ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени В. Н. Каразина

на правах рукописи

ЯМПОЛЬСКИЙ Александр Леонидович

УДК 514.7

ГЕОМЕТРИЯ ПОДМНОГООБРАЗИЙ В РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.04 - геометрия и топология

диссертация на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Харьков - 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Основы римановой геометрии расслоенных пространств были заложены С. Сасаки [65, 66] и развиты П. Домбровским [27]. Начальной точкой для исследований, представленных в настоящей диссертации, была статья В. Клингенберга и С. Сасаки [47], в которой рассматривалось расслоение единичных векторов над двумерной сферой. На эту работу обратил внимание проф. Борисенко А.А. и предложил автору развить результаты Клингенберга и Сасаки. Для случая общих двумерных многообразий было получено необходимое и достаточное условие положительности кривизны сферического касательного расслоения [92]. Для пространств постоянной кривизны были получены необходимое и достаточное условие неотрицательности секционной кривизны $T_r(M,c)$, найдены точные оценки на секционную кривизну $T_1(S^3,1)$, точные оценки на кривизну Риччи и скалярную кривизну $T_1(M,c)$ [93], достаточные условия неотрицательности секционной кривизны общих римановых многообразий [96]. В этих работах было замечено, что внутренняя геометрия сферического расслоения существенно зависит от радиуса касательной сферы. Эти результаты были включены в кандидатскую диссертацию автора совместную с профессором Борисенко А.А обзорную статью, опубликованную в журнале "Успехи математических наук" в 1991 году [99]. В 2001 году О. Ковальский с соавторами так же заметили зависимость геометрии сферического расслоения от радиуса касательной сферы и так же сформулировали задачу выяснения условий положительности секционной кривизны сферического расслоения с метрикой Сасаки [52]. В частности, им удалось доказать невозможность достижения положительности кривизны на сферическом касательном расслоении в размерности $n=3$. Следует отметить, что как автору, так и проф. Борисенко А.А. было хорошо известно, что во всех размерностях базы, кроме 2, 4 или 8, нельзя получить положительность кривизны сферического расслоения ни при каких значениях r. Этот результат не был опубликован автором отдельно, но был включен по его согласию в статью [52]. Доказательство опирается на теорему Адамса о количестве линейно независимых векторных полей на сферах и включено в раздел 2.2 настоящей диссертации. Так же в связи с работой [47] профессором Борисенко А.А. была поставлена задача найти *границы изменения секционной кривизны* расслоения единичных векторов на сферах высших размерностей. Эта задача была решена автором для случая пространства постоянной кривизны в работе [100] и изложение этого результата дано в разделе 2.2.

Другой движущей силой наших исследований стала статья О. Ковальского [48], в которой было доказано, что слои касательного расслоения с метрикой Сасаки являются вполне геодезическими и внутренне плоскими подмногообразиями в касательном расслоении. Подобным свойством обладают слои нуль-слоения на римановых многообразиях с постоянным внутренним нуль-индексом. О метриках, допускающих такое нуль-слоение постоянной размерности, принято говорить как о сильно-параболических метриках [89]. Геометрию таких многообразий активно исследовал проф. Борисенко А.А. и ему принадлежит постановка задачи о выяснении условий, при которых метрика Сасаки касательного расслоения допускает сильно-параболическое слоение. Как выяснилось, такое возможно лишь при условии, что базовое многообразие расщепляется в прямое метрическое произведение. При этом, метрика Сасаки касательного расслоения так же расщепляется в прямое метрическое произведение [94]. Опираясь на этот результат, Э. Букс поставил задачу о возможности расщепления в прямое метрическое произведение метрики Сасаки сферического касательного расслоения и решил эту задачу [15]. Этому результату предшествовала работа автора, в которой рассматривалась задача об индексе сильной сферичности метрики Сасаки сферического расслоения многообразия. Многообразия с метриками сильно сферического/гиперболического типа несут слоение фиксированной размерности с вполне геодезическими слоями постоянной положительной/отрицательной кривизны. Слои сферического касательного расслоения с метрикой Сасаки являются вполне геодезическими подмногообразиями в T_rM с постоянной положительной кривизной, однако все вертикальное распределение (за исключением размерности слоя 1) не определяет сильно сферического распределения на $T(T_rM)$. В связи с этим, была сформулирована *задача существования распределения, обладающего свойством сильной сферичности.* Результаты на эту тему были опубликованы в работах [102, 104] и включены в раздел 2.1.

Найденное одномерное сильно-сферическое распределение оказалось полем Сасакиевой структуры на T_1S^n. Его интегральные траектории составляют семейство горизонтальных геодезических на T_1S^n. Описание всех геодезических единичного касательного расслоения над пространством постоянной кривизны принадлежит С. Сасаки [67]. Аналогичная задача для касательного расслоения была решена К. Сато [68]. Как оказалось, в обоих случаях проекциями на базу найденных не вертикальных геодезических являются окружности и винтовые линии. Аналогичным свойством обладают проекции не вертикальных геодезических (единичного) касательного расслоения любого локально-симметрического пространства [60] с той разницей, что эти проекции не обязаны иметь нулевые кривизны начиная с некоторой. Простейшими локально-симметрическими пространствами после пространств постоянной кривизны являются комплексное CP^n и кватернионное HP^n проективные пространства (пространственные формы). В связи с этим возник *вопрос о более точной характеризации проекций* не вертикальных геодезических (сферического) касательного расслоения этих пространств. В работах [101] и [109] были получены соответствующие результаты и их изложение содержится в разделе 3.1.

Касательное и сферическое касательное расслоения слабо наследуют свойства базового многообразия. В связи с чем многими авторами были предложены деформации метрики Сасаки с целью улучшения ее наследственных свойств. Качественно, эти деформации выполнялись в направлении "точки" касательного расслоения ([1], [2], [50], [62] и др.). Однако с геометрической точки зрения интересной и естественной деформацией метрики является деформация метрики в направлении каждой касательной сферы касательного расслоения. В частности, единичное касательное расслоение комплексного проективного пространства допускает естественную "деформацию" метрики вдоль слоев. Эта деформация связана с тем, что единичные касательные сферы в этом случае нечетномерны и допускают векторное поле Хопфа. Деформация метрики нечетномерной сферы вдоль слоев расслоения Хопфа известна как деформация Берже. Возник вопрос о геодезических сферического касательного расслоения с метрикой, отвечающей *Берже - деформации* каждой касательной сферы. Как результат, в работе [118] была построена соответствующая деформация, найдены уравнения геодезических и доказано, что такая деформация не влияет на геометрию проекций геодезических. Изложение этих результатов содержится в разделе 3.2.

Каждая невертикальная геодезическая (сферического) касательного расслоения представляется векторным полем вдоль некоторой кривой на базе. Если обозначить это векторное поле через ξ, а кривую на базе через γ, то кривая в пространстве расслоения может рассматриваться как образ $\xi(\gamma) \subset T_{(1)}M^n$ при отображении $\xi : \gamma \to T_{(1)}M^n$. Естественно возник вопрос о том, можно ли получить вполне геодезические подмногообразия в (сферическом) касательном расслоении как образ $\xi(F^l)$ некоторого подмногообразия $F^l \subset M^n$ под действием некоторого векторного поля ξ, определенного в точках подмногообразия. Мы называем такие подмногообразия *поднятиями подмногообразий с базы в касательное расслоение.* При $l = n$ эта задача была рассмотрена П. Вальчаком [77]. Подмногообразия такого типа трансверсальны слоям. Мы доказываем, что все подмногообразия, трансверсальные слоям задаются векторным полем вдоль некоторого подмногообразия в базе [110] и находим условия вполне геодезичности таких подмногообразий. В случаях $l = 1$ и $l = n$ эти условия полностью согласуются с уравнениями геодезических [65] и результатом из [77]. Мы рассматриваем некоторые частные случаи таких подмногообразий: Киллингово векторное поле, векторное поле постоянной длины, нормальное векторное поле подмногообразия пространства постоянной кривизны, нормальное векторное поле гиперслоения. Полученные результаты изложены в Разделе 3.3.

Поднятия подмногообразий составляют естественный, но не исчерпывающий класс подмногообразий касательного расслоения. Для случая малой размерности базы $n = 2$ оказалось возможным дать описание *всех вполне геодезических подмногообразий* в касательном расслоении над пространством постоянной кривизны [113]. Этот результат является частичным ответом на одну из задач, сформулированных А. Борисенко в обзорной статье [99]. Как оказалось, в касательном расслоении двумерного многообразия постоянной кривизны нет вполне геодезических подмногообразий, трансверсальных слоям, кроме нулевого сечения. Изложение этих результатов содержится в Разделе 3.4.

Наиболее развитой является геометрия поднятий всей базы в пространство единичного касательного расслоения. Такое поднятие осуществляется единичным векторным полем и определяет подмногообразие в T_1M^n, трансверсальное слоям. Если на компактном многообразии существует *глобально определенное единичное векторное поле*, то подмногообразие $\xi(M^n) \subset T_1M^n$ имеет конечный объем относительно индуцированной метрики. В 1986 году Г. Глюк и В. Циллер [35] поставили вопрос существовании единичного векторного поля ξ на 3-сфере с минимальным объемом подмногообразия $\xi(S^3)$.

Такие векторные поля были названы оптимальными. В частности, была доказана оптимальность векторного поля Хопфа на трехмерной сфере S^3. Вскоре Ш. Педерсен в работе [63] доказала, что поле Хопфа на сферах высших размерностей не порождает подмногообразие глобально минимального объема. Как выяснилось позже [32], оптимальность векторного поля ξ означает, что поле ξ является критической точкой вариации функционала объема подмногообразия $\xi(M^n) \subset T_1M^n$ относительно вариаций единичного векторного поля в классе единичных векторных полей. Мы называем такие вариации функционала объема подмногообразия $\xi(M^n)$ *поле-вариацией.* В этой же работе было доказано, что критические векторные поля относительно поле-вариаций являются критическими относительно классических нормальных вариаций подмногообразия $\xi(M^n) \subset T_1M^n$, то есть порождают минимальные подмногообразия в пространстве расслоения единичных векторов. Это наблюдение позволило перейти от вопросов, связанных с глобальными вариациями подмногообразия $\xi(M^n)$ к соответствующим *локальным вариациям*, которые не требуют существования глобально заданного единичного векторного поля. В последовавшей серии работ О. Жиль-Медрано [32, 34] и Л. Ванэке с соавторами [37], [38],[31], [73], [74], [75] были рассмотрены многообразия, допускающие единичные минимальные векторные поля. При этом использовались формулы, дававшие выражение только для следа второй фундаментальной формы подмногообразия $\xi(M^n)$, которые были получены О. Жиль-Медрано в результате исследования формулы первой вариации функционала объема относительно поле-вариаций. Найденное условие минимальности единичного векторного поля оказалось весьма затруднительным в конкретных приложениях. Но в силу эквивалентности двух подходов к минимальности единичного векторного поля, А. Борисенко поставил *вопрос о строении всей второй фундаментальной формы* подмногообразия $\xi(M^n)$, получении альтернативной формулы для средней кривизны подмногообразия $\xi(M^n)$ и выяснения условий вполне геодезичности такого подмногообразия. Более того, зная вторую фундаментальную форму и тензор кривизны метрики Сасаки T_1M^n можно исследовать вопрос о внутренней геометрии подмногообразия $\xi(M^n)$ и ассоциировать с векторным полем геометрические характеристики этого подмногообразия. Раздел 4 полностью посвящен вопросам, связанным со второй фундаментальной формой подмногообразия $\xi(M^n) \subset T_1M^n$.

В 2001 году О.Жиль-Медрано и Е. Линарес-Фустер [33] выписали *формулу второй вариации функционала объема* подмногообразия $\xi(M^n) \subset T_1M^n$ *относительно поле-вариаций* и доказали устойчивость поля Хопфа на трехмерной сфере относительно этого класса вариаций. На сферах высших размерностей поля Хопфа не устойчивы, что не удивительно в силу результата Ш. Педерсен [63]. Как выяснилось, поле-вариации являются частным случаем классической нормальной вариации подмногообразия $\xi(M^n)$. Поэтому неустойчивые подмногообразие $\xi(M^n)$ относительно поле-вариаций будет неустойчивым относительно классических нормальных вариаций. В связи с этим, А. Борисенко предложил автору исследовать на *классическую устойчивость* как поля Хопфа, так и другие найденные примеры вполне геодезических единичных векторных полей. В разделе 4.3 мы доказываем устойчивость поля Хопфа на 3-х мерной сфере и неустойчивость поля Хопфа на сферах высших размерностей относительно классических вариаций. Полученная нами формула второй вариации функционала объема для 3-х мерных групп Ли существенно обобщает соответствующую формулу О. Жиль-Медрано для поля Хопфа [33], а результаты об устойчивости вполне геодезических инвариантных векторных полей на 3-х мерных группах Ли значительно сильнее результатов по неустойчивости минимальных векторных полей на тех же группах, полученные Дж. С. Гонзалезом-да-Вила и Л. Ванэке [39].

Знание всей второй фундаментальной формы подмногообразия $\xi(M^n) \subset T_1M^n$, а так же тензора кривизны T_1M^n, позволяет ставить *вопрос о внутренней геометрии подмногообразия* $\xi(M^n)$. Такая постановка задачи является абсолютно новой и не имеет аналогов. В разделе 4.1 мы находим выражение для гауссовой кривизны подмногообразия $\xi(M^2)$ и даем полное описание геодезических единичных векторных полей на пространствах постоянной гауссовой кривизны таких, что $\xi(M^2) \subset T_1M^2$ является в свою очередь гиперповерхностью постоянной гауссовой кривизны. При рассмотрении векторных полей с вполне геодезическим образом в разделе 4.5 мы находим, что на двумерной сфере единичное векторное поле, огибающее поднятие на сферу при стереографической проекции семейства параллельных прямых на плоскости, имеет постоянную гауссову кривизну 1/4 и в силу изометрии $T_1S^2 \approx RP^3$ представляет локальную модель вполне геодезического подмногообразия $RP^2 \subset RP^3$. При рассмотрении вполне геодезического свойства поля Хопфа в разделе мы находим, что секционная кривизна $\xi(S^{2n+1}) \subset T_1S^{2n+1}$ изменяется в пределах от 1/4 до 5/4. Подмногообразие $\xi(S^{2n+1})$ будучи контактным вполне геодезическим подмногообразием Сасакиева многообразия T_1S^{2n+1}, само является Сасакиевым многообразием относительно индуцированной структуры. Выражение для секционной кривизны $\xi(S^{2n+1})$ позволяет доказать, что $\xi(S^{2n+1})$ является Сасакиевой пространственной формой. То есть, векторное поле Хопфа осуществляет вложение Сасакиевой пространственной формы S^{2n+1} кривизны 1 в Сасакиево многообразие T_1S^{2n+1} в виде Сасакиевой пространственной формы кривизны 1/4.

Конструкция метрики Сасаки применима к касательному расслоению не только риманова, но и *псевдориманова* многообразия [71] и в Разделе 4.5 мы рассматриваем задачу о вполне геодезических единичных векторных полях псевдоримановых многообразиях [117]. Более того, можно выполнить *обобщение метрики Сасаки* на случай векторного расслоения ранга m со связностью, согласованной с послойной метрикой над римановым многообразием размерности n. Конструкция метрики и связанной с ней геометрии векторного расслоения и сферического подрасслоения является прямым обобщением метрики нормального и сферического нормального расслоений подмногообразия в римановом пространстве, предложенной автору профессором А. Борисенко во время работы над кандидатской диссертацией еще в 1982-86 годах. Соответствующий технический аппарат был опубликован в работе [119]. Здесь мы находим условия минимальности и вполне геодезичности единичного сечения общего сферического расслоения и доказываем аналоги теорем о вполне геодезических векторных полях для сечений общих единичных расслоений. Рассмотрены примеры. Изложение этих результатов содержится в Разделе 5.

Связь с научными программами, темами. Работа выполнена в рамках исследований геометрии подмногообразий на кафедре геометрии Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина в рамках научно-исследовательских работ "Глобальна геометрія підмноговидів в ріманових та фінслерових просторах" (№ гос. рег. 0109U001454), "Зовнішня геометрія багатовимірних підмноговидів" (№ гос. рег. 0103U004232), "Глобальна геометрія і топологія многовидів і підмноговидів в ріманових та фінслерових просторах" (№ гос. рег. 0111U010008)

Цель и задачи исследования. *Целью работы* является развитие геометрии подмногообразий в расслоенных пространствах, в частности в сферическом касательном и сферическом нормальном расслоениях римановых многообразий и, соответственно, подмногообразий.

Объектом исследования являются расслоенные пространства, наделенные метрической структурой типа Сасаки.

Предметом исследования являются подмногообразия в расслоенных пространствах, в частности, минимальные и вполне геодезические сечения расслоений.

Основные задачи исследования состоят в следующем:

- исследовать сферическое касательное расслоения с метрикой Сасаки с целью выяснения условий существования ни нем нуль-распределений тензора кривизны, порождающего слоение на вполне геодезические подмногообразия постоянной секционной кривизны;
- найти границы изменения секционной кривизны метрики Сасаки единичного касательного расслоения над пространством постоянной кривизны и, тем самым, существенно обобщить результат Клингенберга и Сасаки, а так же более ранний результат автора о кривизне метрики Сасаки единичного расслоения над единичными сферами;
- уточнить описание проекций геодезических линий касательного расслоения с метрикой Сасаки классических локально-симметрических пространств (пространственных форм), известное ранее только для пространств постоянной кривизны;
- исследовать влияние Берже-деформации метрики Сасаки касательного расслоения кэлерова многообразия на геометрию проекций геодезических деформированной метрики;
- обобщить результаты Сасаки и Вальчака о вполне геодезических свойствах поднятий кривых на базе и всей базы, соответственно, в пространство касательного расслоения под действием векторного поля на случай поднятия подмногообразия произвольной коразмерности;
- доказать гипотезу Борисенко о единственности нулевого сечения в классе вполне геодезических подмногообразий, трансверсальных слоям в расслоении над пространством постоянной кривизны;
- дать решение проблемы Борисенко об описании всех вполне геодезических подмногообразий в касательном расслоении пространства постоянной кривизны в простейшем случае двумерной базы;

- найти вторую фундаментальную форму векторного поля Сасакиевой структуры нечетно мерного многообразия, в частности поля Хопфа на сферах, и исследовать его на вполне геодезичность;
- исследовать поле Хопфа на сферах на устойчивость в классическом, то есть, более широком классе вариаций, чем поле-вариации Жиль-Медрано;
- найти все двумерные римановы и псевдо-римановы многообразия, допускающие вполне геодезические (локальные) единичные векторные поля, найти такие поля;
- выделить из класса минимальных единичных лево-инвариантных векторных полей на трехмерных группах Ли с лево-инвариантной метрикой все вполне геодезические векторные поля, исследовать их на устойчивость относительно классических нормальных вариаций в сравнении с устойчивостью относительно поле-вариаций;
- обобщить результаты по геометрии касательного и сферического касательного расслоения риманова многообразия на общий случай метризованного расслоения со связностью, согласованной с послойной метрикой, над римановым многообразием.

Методы исследования включают методы линейной алгебры, дифференциальных уравнений, теории групп и алгебр Ли, векторных расслоений и общей теории подмногообразий в римановых пространствах.

Научная новизна полученных результатов. В работе впервые изложено систематическое исследование геометрии подмногообразий в расслоенных пространствах с целью обнаружения и описания вполне геодезических, минимальных подмногообразий и слоений. Основными научными результатами, выносимыми на защиту, являются следующие:

- найдено сильно-сферическое распределение на единичном касательном расслоении над пространством постоянной кривизны; в частности, выявлено новое свойство характеристического векторного поля Сасакиевой структуры на единичном расслоении единичной сферы.

- найдены границы изменения секционной кривизны метрики Сасаки сферического расслоения над пространством постоянной кривизны.
- найдено описание проекций геодезических линий касательного расслоения с метрикой Сасаки классических пространственных форм – вещественного пространства постоянной кривизны, комплексного и кватернионного проективного пространств единым методом, использующим рекуррентные свойства тензора кривизны этих пространств;
- доказана инвариантность проекций геодезических относительно Берже-деформации метрики Сасаки единичного касательного расслоения кэлерова многообразия;
- найдены условия вполне геодезичности поднятий в пространство касательного расслоения под действием векторного поля подмногообразия базы произвольной коразмерности;
- дано описание всех вполне геодезических подмногообразий в касательном расслоении двумерного риманова многообразия постоянной кривизны; доказана гипотеза А. Борисенко о единственности нулевого сечения расслоения как вполне геодезического в рассматриваемом классе многообразий.
- найдены разложения Гаусса и Вейнгартена для единичного сечения единичного касательного расслоения риманова многообразия; найдены условия минимальности и вполне геодезичности сечения.
- доказана вполне геодезичность сечения, порожденного характеристическим векторным полем Сасакиевой структуры на многообразии, в частности, полем Хопфа на сферах;

- найдены условия минимальности и вполне геодезичности единичного векторного поля Киллинга, поля единичных нормалей риманова трансверсально ориентируемого риманова гиперслоения; дано описание таких полей на многообразиях малой размерности.

- доказана устойчивость поля Хопфа, как порождающего вполне геодезическое подмногообразие в единичном расслоении 3-х мерной сферы, относительно классических нормальных вариаций;

- найдены все вполне геодезические единичные лево-инвариантные векторные поля на 3-х мерных группах Ли с лево- инвариантной метрикой; проведен их анализ на устойчивость в классе общих классических вариаций и лево-инвариантных вариаций;

- выполнено обобщение метрики Сасаки касательного расслоения на случай метризованного векторного расслоения со связностью и доказаны аналоги соответствующих теорем единичного касательного расслоения; в частности, найдены условия существования вполне геодезических единичных сечений, полностью исследованы маломерные случаи и приведены примеры вполне геодезических сечений единичного нормального расслоения.

Практическое значение полученных результатов. Работа имеет теоретический характер. Результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения геометрии подмногообразий в расслоенных пространствах, геометрических свойств векторных полей, пространств с дополнительными структурами, геодезических линий и вполне геодезических подмногообразий, в лекционных курсах по геометрии подмногообразий и римановой геометрии в Харьковском, Киевском, Одесском, Львовском и других университетах, где ведутся исследования в области геометрии, а так же Киевском институте математики НАН Украины, ФТИНТ НАН Украины.

Личный вклад соискателя. Все результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно. Из статей [109] и [110], выполненных в соавторстве, в диссертации содержатся только результаты автора.

Апробация полученных результатов. Основные результаты исследований докладывались:

- на научных конференциях: IX Всесоюзная конференция по геометрии (Кишинев, 1988); Всесоюзная конференция по геометрии и анализу (Новосибирск, 1989); Всесоюзное совещание молодых ученых по дифференциальной геометрии, посвященное 80-ти летию Н.В. Ефимова (Ростов-на-Дону, 1990); Республиканская научно-методическая конференция, посвященная 200-летию со дня рождения Н.И. Лобачевского (Одесса, 1992); 1(1995), 3(1999), 4(2001), 5(2003), 6(2005) та 8(2013) міжнародні конференції з геометрії та топології (Черкаси); 1-st Karazin Scientific Readings (Kharkiv, 2004); Международная конференция "Тараповские чтения" (Харьков, 2011); 1-st (2008) and 2-nd (2013) Int. Conf. on Geometrical Objects Reconstruction and Symbolic Computations (University of Haifa, Israel); Международная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения А.В. Погорелова (Харьков, 2009); Крымская международная математическая конференция (Судак, 2013 г.); Международная школа - конференция "Тараповские чтения – 2013"(Харьков, 2013 г.); международная конференция "Геометрия в Одессе-2015"(Одесса, 2015).

- на научных семинарах: Харьковский городской геометрический семинар (рук. проф. Борисенко А.А., проф. Аминов Ю.А.), Геометрический семинар ФТИНТ НАНУ (рук. проф. Аминов Ю.А.), геометрический семинар института математики НАН Украины (рук. д.ф.-м.н. Максименко С.И.), научный семинар кафедры геометрии и топологии Львовского национального университета им. И. Франко (рук. проф. Банах Т.О.), семинар кафедры геометрии Киевского национального университета им. Т.

Шевченко (рук. проф. Пришляк А.О.), семинар кафедры геометрии и топологии института математики, экономики и механики Одесского национального университета (рук. доц. Покась С.М.)

Публикации. Основные результаты работы отражены в 21 работе [100] - [120]. Дополнительно, результаты работы отражены в тезисах 18 конференций [121] – [138].

Благодарности. Автор приносит искренние благодарности член - корреспонденту НАН Украины, профессору А.А. Борисенко за постановки задач, многочисленные обсуждения и рекомендации, приобщение к занятиям геометрией; коллегам с кафедры геометрии Харьковского национального университета и участникам Харьковского городского геометрического семинара за стимулирующую поддержку.

РАЗДЕЛ 1

НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ И БАЗОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Раздел содержит необходимые определения и формулировки результатов, составляющих основу постановок задач диссертации, обоснование их актуальности и значимости.

1.1. Основы локальной геометрии TM

Пусть M – гладкое многообразие размерности n. *Пространство касательного расслоения* TM образуется как дизъюнктное объединение $TM = \sqcup_u T_u M$, где $T_u M$ – касательное пространство к M в точке $q \in M$. Точками касательного расслоения являются всевозможные пары (u, ξ), где $u \in M$ и $\xi \in T_u M$. *Проекция* касательного расслоения определяется как отображение $\pi : TM \to M$, ставящее в соответствие каждому касательному пространству точку касания. Таким образом, $\pi(T_u M) = u$ или, двойственным образом, $\pi^{-1}(u) = T_u M$. Согласно общепринятой терминологии в теории расслоенных пространств, многообразие M называется *базой* касательного расслоения, касательное пространство $T_u M$ называется слоем касательного расслоения над точкой $u \in M$.

Локальные координаты в касательном расслоении вводятся следующим образом. Обозначим через $u = (u^1, \dots, u^n)$ локальные координаты на M в некоторой (произвольной) локальной карте. Обозначим через $\mathfrak{X}(M)$ алгебру Ли гладких векторных полей на M. Через ∂_i будем обозначать соответствующий локальный координатный репер, а именно, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$. В таком случае любой касательный вектор $\xi \in T_uM$ представляется в виде

$$\xi = \xi^i \partial_i(u).$$

Независимые параметры $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ параметризуют слой T_uM. Таким образом, набор параметров

$$(u^1, \ldots, u^n; \xi^1, \ldots, \xi^n) \tag{1.1}$$

параметризует точки касательного расслоения и называется *естественными индуцированными локальными координатами* на TM. При замене параметров на базе вида $v^i = v^i(u^1, \ldots, u^n)$ соответствующее преобразование координат на касательном расслоении имеет вид

$$v^i = v^i(u^1, \ldots, u^n), \ldots, \eta^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^j}\xi^j.$$

Матрица Якоби этого преобразования имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v^i}{\partial u^j} & 0 \\ \dfrac{\partial v^i}{\partial u^j \partial u^k}\xi^k & \dfrac{\partial v^i}{\partial u^j} \end{pmatrix}$$

Это означает, что для многообразия класса C^k его касательное расслоение является ориентируемым многообразием класса C^{k-1} размерности $2n$. Если обозначить через

$$\tilde{\partial}_i = \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad \tilde{\partial}_{n+i} = \frac{\partial}{\partial \xi^i}$$

координатный репер на TM, то для вектора $\tilde{X} \in T_{(u,\xi)}(TM)$ имеет место разложение

$$\tilde{X} = \tilde{X}^i \tilde{\partial}_i + \tilde{X}^{n+i} \tilde{\partial}_{n+i}. \tag{1.2}$$

Относительно координат (1.1) проекция расслоения $\pi : TM \to M$ записывается в виде

$$\pi(u,\xi) = u$$

и, с очевидностью, является гладким отображение максимального ранга n на всем касательном расслоении. Поэтому каждая точка базы является регулярным значением отображения π, а значит, по теореме о прообразе регулярного значения, каждый слой T_uM является вложенным подмногообразием в TM. Касательное пространство к слою в каждой точке $(u,\xi) \in TM$ называется *вертикальным подпространством* и обозначается

$$\mathcal{V}_{(u,\xi)} \subset T_{(u,\xi)}(TM).$$

Подпространство трансверсально дополнительное к вертикальному называется *горизонтальным* и обозначается

$$\mathcal{H}_{(u,\xi)} \subset T_{(u,\xi)}(TM).$$

Таким образом, имеет место разложение в прямую сумму

$$T_{(u,\xi)}(TM) = \mathcal{V}_{(u,\xi)} \oplus \mathcal{H}_{(u,\xi)}.$$

Матрица Якоби дифференциала проекции $\pi_* : TTM \to TM$ имеет размер $n \times 2n$ и с очевидностью имеет вид $(E|0)$, где E – единичная $n \times n$ матрица и 0 – нулевая $n \times n$ матрица. Следовательно,

$$\pi_*\big(\mathcal{V}_{(u,\xi)}\big) = 0, \quad \pi_*\big(\mathcal{H}_{(u,\xi)}\big) = T_uM.$$

Используя (1.2) легко видеть, что $\mathcal{V}_{(u,\xi)} = Span(\tilde{\partial}_{n+1}, \ldots, \tilde{\partial}_{2n})$ и

$$\pi_*\tilde{X} = \tilde{X}^i\partial_i \tag{1.3}$$

Горизонтальное распределение определяется не однозначно. Его однозначный выбор можно выполнить при помощи отображения связности [27]. Предположим, что на M задана аффинная связность Γ^i_{jk}. Пусть $(u,\xi) \in TM$ произвольная точка. Пусть (u', ξ') другая точка из TM такая, что u и u' лежат в некоторой достаточно малой окрестности W_u. Используя коэффициенты связности, осуществим параллельный перенос вектора ξ' из точки u' в точку u и рассмотрим разность $\xi' - \xi = \eta \in T_uM$. Обозначим через $\tilde{u} = exp\,(\eta)(u)$. Таким образом, соответствие $u' \to \tilde{u}$ определяет отображение $W_u \to W_u$. Дифференциал этого отображения называется *отображением связности* $\mathcal{K}$. Как показано в [27], в естественных индуцированных координатах отображение связности $\mathcal{K} : TTM \to TM$ действует следующим образом:

$$\mathcal{K}\tilde{X} = (\tilde{X}^{n+i} + \Gamma^i_{jk}\tilde{X}^j\xi^k)\partial_i. \tag{1.4}$$

Векторы из ядра отображения связности имеют вид

$$\tilde{X} = \tilde{X}^i\tilde{\partial}_i - \Gamma^i_{jk}\tilde{X}^j\xi^k\tilde{\partial}_{n+i}$$

и, очевидно, трансверсальны вертикальному подпространству $\mathcal{V}_{(u,\xi)}$ для всех $(u, \xi) \in TM$. Таким образом, аффинная связность на многообразии порождает *определенное* горизонтальное распределение $\mathcal{H}_{(u,\xi)} = \ker \mathcal{K}$. Заметим, что для любого вертикального вектора $\tilde{X} = \tilde{X}^{n+i}\tilde{\partial}_{n+i}$ отображение связности действует как $\mathcal{K}\tilde{X} = \tilde{X}^{n+i}\partial_i$ и поэтому $\mathcal{K}(\mathcal{V}_{(u,\xi)}) = T_uM$. В силу полученных результатов, можем записать

$$\begin{gathered} T_{(u,\xi)}(TM) = \mathcal{V}_{(u,\xi)} \oplus \mathcal{H}_{(u,\xi)}, \\ \ker \pi_* = \mathcal{V}_{(u,\xi)}, \quad \operatorname{im} \pi_* = T_uM, \\ \ker \mathcal{K} = \mathcal{H}_{(u,\xi)}, \quad \operatorname{im} \mathcal{K} = T_uM. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Из формул (1.3) и (1.4) следует, что горизонтальная (1.3) и вертикальная (1.4) проекции векторного поля $\tilde{X}(u, \xi)$, заданного на TM, не являются векторными полями на M, так как координатные функции проекций зависят не только от базовых координат (u), но и от слоевых координат (ξ). Однако на TTM можно выделить специальные классы векторных полей, связанных с векторными полями на M, которые называются *лифтами*.

Пусть $X = X(u)^i\partial_i(u)$ векторное поле на M. Определим *вертикальный* и *горизонтальный* лифты поля $X(u)$ формулами

$$X^v_{(u,\xi)} = X^i(u)\tilde{\partial}_{n+i}, \qquad X^h_{(u,\xi)} = X(u)^i\tilde{\partial}_i - \Gamma^i_{jk}X^j(u)\xi^k\tilde{\partial}_{n+i}. \tag{1.6}$$

В дальнейшем, вместо $X^v_{(u,\xi)}$ и $X^h_{(u,\xi)}$ будем писать X^v и X^h если имеется ввиду лифт в произвольную точку $(u,\xi) \in TM$. Горизонтальный и вертикальный лифты векторного поля являются векторными полями на TM. Их важность состоит в том, что

$$\mathcal{H}_{(u,\xi)} = Span(\partial^h_1, \ldots, \partial^h_n), \qquad \mathcal{V}_{(u,\xi)} = Span(\partial^v_1, \ldots, \partial^v_n).$$

Последнее означает, что для изучения геометрии касательного расслоения достаточно ограничиться лифтами векторных полей с базы на касательное расслоение.

Для лифтов векторных полей имеет место следующая важная лемма, которую принято называть леммой Домбровского [27].

Лемма 1.1 *Пусть $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Тогда для скобок лифтов векторных полей X и Y в произвольную точку $(u,\xi) \in TM$ имеют место выражения:*

$$[X^h, Y^h] = [X,Y]^h - \Big(R(X,Y)\xi\Big)^v, \quad [X^h, Y^v] = \big(\nabla_X Y\big)^v, \quad [X^v, Y^v] = 0,$$

где ∇ – (аффинная) связность на M и $R(X,Y)\xi$ – ее тензор кривизны.

Поскольку (u,ξ) есть фиксированная точка касательного расслоения, а лифты определены для векторных полей на базе, то $\Big(R(X,Y)\xi\Big)^v$ следует понимать как линейную комбинацию $\xi^i\Big(R(X,Y)\partial_i\Big)^v$.

Заметим, так же, что горизонтальное распределение $\mathcal{H}$ на касательном расслоении TM многообразия с аффинной связностью ∇ интегрируемо тогда и только тогда, когда связность плоская.

1.2. Метрика Сасаки TM и ее связность Леви-Чивита.

Пусть теперь (M, g) риманово многообразие со связностью Леви-Чивита. Метрика на его касательном расслоении TM была определена С. Сасаки [65] линейным элементом

$$d\sigma^2 = ds^2 + |D\xi|^2 = g_{ij}du^i du^j + g_{ij}D\xi^i D\xi^j,$$

где ds^2 – линейный элемент базы, а $D\xi^i = d\xi^i + \Gamma^i_{jk}\xi^j du^k$ – ковариантные дифференциалы координат "векторной составляющей" индуцированных координат на TM. Таким образом, TM наделяется структурой риманова многообразия.

Скалярное произведение касательных к TM векторов может быть выражено в терминах дифференциала проекции и отображения связности. Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярное произведение векторов, касательных к M, а через $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ скалярное произведение векторов, касательных к TM. Тогда [27]

$$\langle\langle\tilde{X},\tilde{Y}\rangle\rangle = \langle\pi_*\tilde{X},\pi_*\tilde{Y}\rangle + \langle\mathcal{K}\tilde{X},\mathcal{K}\tilde{Y}\rangle. \tag{1.7}$$

Из (1.5) следует, что горизонтальное и вертикальное подпространства взаимно ортогональны, а из (1.7) следует, что метрика Сасаки определяется "теоремой Пифагора".

Используя Лемму 1.1, несложно вычислить связность Леви-Чивита метрики Сасаки (TM, g_s) при помощи формулы Кошуля

$$\begin{aligned} 2\langle\nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle X, Z\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \\ \langle X,[Y,Z]\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle + \langle Z,[X,Y]\rangle. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Соответствующие формулы для комбинаций лифтов векторных полей для краткости называют формулами Ковальского [48].

Лемма 1.2 *Для любых векторных полей X, Y на M, ковариантные производные относительно связности Леви-Чивита $\tilde{\nabla}$ метрики Сасаки для лифтов в произвольную точку $(u, \xi) \in TM$ могут быть найдены по формулам*

$$\begin{aligned} &\tilde{\nabla}_{X^h} Y^h = (\nabla_X Y)^h - \tfrac{1}{2}\Big(R(X,Y)\xi\Big)^v, \quad \tilde{\nabla}_{X^v} Y^h = \tfrac{1}{2}\Big(R(\xi,X)Y\Big)^h, \\ &\tilde{\nabla}_{X^h} Y^v = (\nabla_X Y)^v + \tfrac{1}{2}\Big(R(\xi,Y)X\Big)^h, \quad \tilde{\nabla}_{X^v} Y^v = 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

где ∇ и R связность Леви-Чивита и тензор кривизны (M, g), соответственно.

Выражение $\Big(R(\xi,Y)X\Big)^h$ так же следует понимать как линейную комбинацию $\xi^i\Big(R(\partial_i,Y)X\Big)^h$. Непосредственными следствиями леммы Ковальского являются следующие утверждения:

- *Слои касательного расслоения с метрикой Сасаки являются вполне геодезическими и внутренне плоскими подмногообразиями.*
- *Нормальная связность слоев касательного расслоения с метрикой Сасаки плоская тогда и только тогда, когда базовое многообразие плоское.*

Для доказательства достаточно заметить, что касательное пространство слоя натянуто на векторы вида X^v, а на векторы вида Y^h натягивается нормальное пространство слоя и применить формулы (1.9). Формулы (1.9) являются ключевыми для вычисления тензора кривизны метрики Сасаки на лифтах векторных полей [48].

Лемма 1.3 *Тензор кривизны $\tilde{R}$ связности Леви-Чивита $\tilde{\nabla}$ метрики Сасаки TM полностью определяется значениями на лифтах векторных полей:*

$$
\begin{aligned}
&\tilde{R}(X^v, Y^v)Z^v = 0,\\
&\tilde{R}(X^v, Y^v)Z^h = \Big(R(X,Y)Z + \tfrac{1}{4}R(\xi,X)R(\xi,Y)Z - \tfrac{1}{4}R(\xi,Y)R(\xi,X)Z\Big)^h,\\
&\tilde{R}(X^h, Y^v)Z^v = -\Big(\tfrac{1}{2}R(Y,Z)X + \tfrac{1}{4}R(\xi,Y)R(\xi,Z)X\Big)^h,\\
&\tilde{R}(X^h, Y^v)Z^h = \Big(\tfrac{1}{2}R(X,Z)Y + \tfrac{1}{4}R(R(\xi,Y)Z,X)\xi\Big)^v + \Big(\tfrac{1}{2}(\nabla_X R)(\xi,Y)Z\Big)^h,\\
&\tilde{R}(X^h, Y^h)Z^v = \Big(R(X,Y)Z + \tfrac{1}{4}R(R(\xi,Z)Y,X)\xi - \tfrac{1}{4}R(R(\xi,Z)X,Y)\xi\Big)^v +\\
&\qquad\qquad \tfrac{1}{2}\Big((\nabla_X R)(\xi,Z)Y - (\nabla_Y R)(\xi,Z)X\Big)^h,\\
&\tilde{R}(X^h, Y^h)Z^h = \Big(R(X,Y)Z + \tfrac{1}{4}R(\xi,R(X,Z)\xi)Y - \tfrac{1}{4}R(\xi,R(Y,Z)\xi)X +\\
&\qquad\qquad \tfrac{1}{2}R(\xi,R(X,Y)\xi)Z\Big)^h + \Big(\tfrac{1}{2}(\nabla_Z R)(X,Y)\xi\Big)^v,
\end{aligned}
$$

где ∇ и R связность Леви-Чивита и ее тензор кривизны на M, соответственно.

Следствием Леммы 1.3 являются следующие утверждения:

- Секционная кривизна касательного расслоения с метрикой Сасаки ограничена тогда и только тогда, когда база плоская [8].
- Касательное расслоение с метрикой Сасаки локально симметрично тогда и только тогда, когда база плоская [48].
- Касательное расслоение с метрикой Сасаки имеет постоянную кривизну Риччи тогда и только тогда, когда база плоская [59].
- Касательное расслоение с метрикой Сасаки имеет постоянную скалярную кривизну тогда и только тогда, когда база плоская [59].

Последние утверждения говорят о "жесткости" метрики Сасаки в том смысле, что она слабо наследует свойства кривизны базового многообразия. Наличие такой жесткости стало причиной многочисленных "деформаций" метрики Сасаки с целью улучшения ее наследственных свойств.

1.3. Метрика Сасаки на сферическом касательном расслоении T_rM.

Сферическое касательное расслоение определяется как гиперповерхность в касательном расслоении, заданная уравнением $g_{ij}\xi^i\xi^j = r^2$. Слоем полученного подрасслоения $\pi : T_rM \to M$ является сфера радиуса $r = const$. При $r = 1$ сферическое расслоение называется *расслоением единичных векторов*. Метрика, индуцированная метрикой Сасаки TM на гиперповерхности T_rM называется метрикой Сасаки на T_rM. Очевидно, что метрика Сасаки T_rM получается из метрики Сасаки T_1M послойной конформной деформацией $\xi \to r\xi$. Поэтому геометрия T_1M по существу определяет геометрию T_rM в том смысле, что формулы, получаемые для T_1M преобразуются в формулы для T_rM заменой $\xi \to r\xi$.

В каждой точке $(u, \xi) \in T_1M$ вектор ξ^v является вектором единичной нормали гиперповерхности $T_1M \subset TM$. В связи с этим, вектор $\tilde{X} \in T_{(u\xi)}TM$ будет касательным к T_1M тогда и только тогда, когда $\big\langle \mathcal{K}\tilde{X}, \xi \big\rangle = 0$. Это означает, что

- горизонтальные распределения для T_1M и TM совпадают;
- вертикальное распределение для T_1M является ортогональным дополнением к ξ^v в вертикальном распределении $\mathcal{V}$ для TM.

В связи с этим, Э. Букс и Л. Ванэке [16] ввели понятие тангенциального лифта векторного поля в вертикальное распределение на T_1M формулой

$$X^{tg} = X^v - \big\langle X, \xi \big\rangle \xi^v. \tag{1.10}$$

Здесь и далее ξ^v как векторное поле на TM вдоль T_1M следует понимать как $\xi^i\big(\partial_i(u)\big)^v$, так как лифты определены на векторных полях, а "точка" ξ векторным полем не является. Поэтому для "векторных полей" ξ^v и ξ^h нельзя непосредственно применять формулы (1.9). Для них выполним отдельное вычисление.

$$\tilde\nabla_{X^h}\xi^h = \tilde\nabla_{X^h}(\xi^k\partial_k^h) = X^h(\xi^k)\partial_k^h + \xi^k\tilde\nabla_{X^h}\partial_k^h = X^i(\tilde\partial_i - \Gamma_{is}^j\xi^s\tilde\partial_{n+j})(\xi^k)\partial_k^h + \xi^k((\nabla_X\partial_k)^h - \frac{1}{2}(R(X,\partial_k)\xi)^v) = -X^i\xi^s\Gamma_{is}^j\xi^s\partial_j^h + \xi^kX^i\Gamma_{ik}^j\partial_j^h - \frac{1}{2}(R(X,\xi)\xi)^v = -\frac{1}{2}(R(X,\xi)\xi)^v,$$

$$\tilde\nabla_{X^v}\xi^h = \tilde\nabla_{X^v}(\xi^k\partial_k^h) = X^v(\xi^k)\partial_k^h + \xi^k\tilde\nabla_{X^v}\partial_k^h = X^i\tilde\partial_{n+i}(\xi^k)\partial_k^h + \xi^k(\frac{1}{2}(R(\xi,X)\partial_k)^h) = X^i\partial_i^h + \frac{1}{2}(R(\xi,X)\xi)^h = X^h - \frac{1}{2}(R(X,\xi)\xi)^h,$$

$$\tilde\nabla_{X^h}\xi^v = \tilde\nabla_{X^i\partial_i^h}(\xi^k\partial_k^v) = X^i(\tilde\partial_i - \Gamma_{is}^j\xi^s\tilde\partial_{n+j})(\xi^k)\partial_k^v + X^i\xi^k\tilde\nabla_{\partial_i^h}\partial_k^v = -X^i\xi^s\Gamma_{is}^j\partial_j^v + X^i(\xi^k(\nabla_{\partial_i}\partial_k)^v + \xi^s\xi^k(\frac{1}{2}R(\partial_s,\partial_k)\partial_i)^h = -\Gamma_{is}^jX^i\xi^s\partial_j^v + X^i\xi^k\Gamma_{ik}^j\partial_j^v = 0,$$

$$\tilde\nabla_{X^v}\xi^v = \tilde\nabla_{X^i\partial_i^v}(\xi^k\partial_k^v) = X^i\tilde\partial_{n+i}(\xi^k)\partial_k^v = X^i\partial_i^v = X^v,$$

В итоге получаем следующие правила дифференцирования

$$\begin{aligned} \tilde\nabla_{X^h}\xi^h &= -\frac{1}{2}(R(X,\xi)\xi)^v, & \tilde\nabla_{X^h}\xi^v &= 0,\\ \tilde\nabla_{X^v}\xi^h &= X^h - \frac{1}{2}(R(X,\xi)\xi)^h, & \tilde\nabla_{X^v}\xi^v &= X^v. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Эти формулы применимы и для $X=\xi$. В частности, $\tilde\nabla_{\xi^h}\xi^h = 0$, в связи с чем поле ξ^h называется полем *геодезического потока* на T_1M [65], [87].

В качестве применения этих правил, вычислим оператор Вейнгартена для подмногообразия $T_1M \subset TM$. Поскольку ξ^v есть поле нормалей на T_1M, то рассмотрим производные

$$\tilde{\nabla}_{X^h}\xi^v = 0, \qquad \tilde{\nabla}_{X^{tg}}\xi^v = \tilde{\nabla}_{X^v - <X,\xi>\xi^v}\xi^v = X^v - \big\langle X, \xi\big\rangle \xi^v = X^{tg}.$$

Если обозначить через $\tilde{A}_{\xi^v}$ оператор Вейнгартена для T_1M, то из последних выражений следует, что

$$\tilde{A}_{\xi^v} X^h = 0, \qquad \tilde{A}_{\xi^v} X^{tg} = X^{tg}. \tag{1.12}$$

Как следствие, *подмногообразие $T_1M \subset TM$ является гиперповерхностью постоянной средней кривизны $\tilde{H} = \frac{n-1}{2n-1}$, распределение горизонтальных подпространств вполне геодезично в TM, а вертикальное распределение вполне омбилично в TM.*

В терминах горизонтального и тангенциального лифтов справедливы следующие аналоги леммы Домбровского и леммы Ковальского [16].

Лемма 1.4 *Пусть $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Тогда для скобок лифтов векторных полей X и Y в произвольную точку $(u, \xi) \in T_1M$ имеют место выражения:*

$$[X^h, Y^h] = [X, Y]^h - \Big(R(X, Y)\xi\Big)^{tg}, \;\; [X^h, Y^{tg}] = \big(\nabla_X Y\big)^{tg},$$

$$[X^{tg}, Y^{tg}] = \big\langle X, \xi\big\rangle Y^{tg} - \big\langle Y, \xi\big\rangle X^{tg},$$

где ∇ – связность Леви-Чивита на M и R – ее тензор кривизны.

Лемма 1.5 *Для любых векторных полей X, Y на M, ковариантные производные относительно связности Леви-Чивита $\bar{\nabla}$ метрики Сасаки для лиф-*

тов в произвольную точку $(u,\xi)\in T_1M$ *могут быть найдены по формулам*

$$\begin{aligned}
&\bar\nabla_{X^h}Y^h=(\nabla_XY)^h-\tfrac12\Big(R(X,Y)\xi\Big)^{tg}, \quad \bar\nabla_{X^{tg}}Y^h=\tfrac12\Big(R(\xi,X)Y\Big)^h,\\
&\bar\nabla_{X^h}Y^{tg}=(\nabla_XY)^{tg}+\tfrac12\Big(R(\xi,Y)X\Big)^h, \quad \bar\nabla_{X^{tg}}Y^{tg}=-\big\langle Y,\xi\big\rangle X^{tg}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

где ∇ *и* R *связность Леви-Чивита и тензор кривизны* (M,g).

По существу, введение в рассмотрение тангенциального лифта позволяет избежать оговорок о том, что при вертикальном лифте векторного поля в вертикальное распределение на T_1M следует брать векторы из ортогонального дополнения "точки" ξ и осуществить их вертикальный лифт в смысле TM, как было предложено ранее в работе [93, 96]. Поэтому, если положить

$$X'=X-\big\langle X,\xi\big\rangle\xi, \tag{1.14}$$

то с очевидностью получим $X^{tg}=(X')^v$.

Лемма 1.13 показывает, что вертикальное распределение на сферическом касательном расслоении состоит из вполне геодезических подмногообразий постоянной секционной кривизны. Подобным свойством обладают нуль-распределения на римановом многообразии [55]. Нуль-распределение $\mathcal{N}$ на римановом многообразии определяется так:

$$\mathcal{N}_u=\{Z\in T_uM^n\,|\,R(X,Y)Z=c\big(\big\langle Y,Z\big\rangle X-\big\langle X,Z\big\rangle Y\big)\quad\forall\,X,Y\in T_uM^n\}.$$

Однако, легко проверить, что вертикальное распределение в размерности базы $n\ge 3$ не составляет нуль-распределения на T_1M^n. Этот факт обосновывает постановку задачи существования нуль-распределений на сферическом касательном расслоении. При этом следует различать чисто вертикальное подраспределение и прочие, невертикальные распределения. Нуль-распределения для $c=0$ на касательном расслоении рассматривались автором в кандидатской диссертации и условием существования такого распределения оказалось расщепление базового многообразия в метрическое произведение. Исследование сформулированных задач содержит Раздел 2.1.

Тензор кривизны метрики Сасаки T_1M можно легко вычислить, используя Лемму 1.3 и оператор Вейнгартена (1.12)[16].

Лемма 1.6 *Тензор кривизны* $\bar{R}$ *связности Леви-Чивита* $\bar{\nabla}$ *метрики Сасаки* T_1M *полностью определяется значениями на лифтах векторных полей:*

$$\bar{R}(X^{tg},Y^{tg})Z^{tg} = \langle Y',Z'\rangle X^{tg} - \langle X',Z'\rangle Y^{tg},$$

$$\bar{R}(X^{tg},Y^{tg})Z^{h} = \Big(R(X',Y')Z + \tfrac{1}{4}R(\xi,X)R(\xi,Y)Z - \tfrac{1}{4}R(\xi,Y)R(\xi,X)Z\Big)^h,$$

$$\bar{R}(X^{h},Y^{tg})Z^{tg} = -\Big(\tfrac{1}{2}R(Y',Z')X + \tfrac{1}{4}R(\xi,Y)R(\xi,Z)X\Big)^h,$$

$$\bar{R}(X^{h},Y^{tg})Z^{h} = \Big(\tfrac{1}{2}R(X,Z)Y' + \tfrac{1}{4}R(R(\xi,Y)Z,X)\xi\Big)^{tg} + \Big(\tfrac{1}{2}(\nabla_X R)(\xi,Y)Z\Big)^h,$$

$$\bar{R}(X^{h},Y^{h})Z^{tg} = \Big(R(X,Y)Z' + \tfrac{1}{4}R(R(\xi,Z)Y,X)\xi - \tfrac{1}{4}R(R(\xi,Z)X,Y)\xi\Big)^{tg} + \tfrac{1}{2}\Big((\nabla_X R)(\xi,Z)Y - (\nabla_Y R)(\xi,Z)X\Big)^h,$$

$$\bar{R}(X^{h},Y^{h})Z^{h} = \Big(R(X,Y)Z + \tfrac{1}{4}R(\xi,R(X,Z)\xi)Y - \tfrac{1}{4}R(\xi,R(Y,Z)\xi)X + \tfrac{1}{2}R(\xi,R(X,Y)\xi)Z\Big)^h + \Big(\tfrac{1}{2}(\nabla_Z R)(X,Y)\xi\Big)^{tg},$$

где ∇ *и* R *связность Леви-Чивита и ее тензор кривизны на* M, *соответственно.*

Лемма 1.6 позволяет выписать выражение для секционной кривизны метрики Сасаки T_1M [96].

Лемма 1.7 *Пусть* $\bar{X} = X_1^h + X_2^{tg}$ *и* $\bar{Y} = Y_1^h + Y_2^{tg}$ *единичные взаимно ортогональные векторы, касательные к* T_1M. *Секционная кривизна* $\bar{K}(\bar{\pi})$ *метрики*

Сасаки T_1M в двумерном направлении $\bar{\pi} = \bar{X} \wedge \bar{Y}$ равна:

$$\bar{K}(\bar{\pi}) = \langle R(X_1,Y_1)Y_1,X_1\rangle - \frac{3}{4} \mid R(X_1,Y_1)\xi \mid^2 + 3\langle R(X_1,Y_1)Y_2',X_2'\rangle +$$

$$\frac{1}{4} \mid R(\xi,Y_2)X_1 + R(\xi,X_2)Y_1 \mid^2 - \langle R(\xi,X_2)X_1, R(\xi,Y_2)Y_1\rangle +$$

$$\langle(\nabla_{Y_1}R)(X_1,Y_1)\xi,X_2\rangle - \langle(\nabla_{X_1}R)(X_1,Y_1)\xi,Y_2\rangle +$$

$$\mid X_2' \mid^2 \mid Y_2' \mid^2 - \langle X_2',Y_2'\rangle^2. \quad (1.15)$$

где $R(X,Y)Z$– тензор кривизны M и X_2', Y_2' определены формулой (1.14).

Формула (1.15) упрощается, если базовое многообразие имеет постоянную секционную кривизну. Имеет место следующая теорема [47].

Теорема 1.8 *Для единичной сферы S^2, единичное касательное расслоения T_1S^2 с метрикой Сасаки изометрично вещественному проективному пространству RP^3 постоянной секционной кривизны 1/4.*

Для сфер больших размерностей доказано следующее утверждение [93].

Теорема 1.9 *Для единичной сферы S^n, секционная кривизна метрики Сасаки T_1S^n изменяется в пределах [0,5/4].*

Теоремы 1.8 и 1.8 обосновывают задачу нахождения пределов изменения секционной кривизны в общем случае базового многообразия постоянной секционной кривизны, рассмотренную в Разделе 2.2.

Относительно локальных координат (1.1) кривая $\Gamma \subset TM^n$ задается уравнением $\Gamma(\sigma) = \{u^i = u^i(\sigma), \xi^i = \xi^i(\sigma)\}$ и интерпретируется как векторное поле $\xi(\sigma)$ вдоль кривой $\gamma(\sigma) = (\pi \circ \Gamma)(\sigma) \subset M^n$. Если поле ξ единично, то $\Gamma(\sigma) \subset T_1M^n$. Уравнения геодезических линий на TM^n и T_1M^n были выведены С. Сасаки [65, 66] и записываются для случая TM^n для случая T_1M^n, соответственно, в виде

$$\begin{cases} \gamma'' + R(\xi, \gamma')\gamma' = 0, \\ \xi'' = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \gamma'' + R(\xi, \gamma')\gamma' = 0, \\ \xi'' + \rho^2\xi = 0 \quad (c = |\xi'| = const) \end{cases}.$$

В обоих случаях геодезические в расслоениях над пространствами постоянной кривизны полностью описаны [67], [68]. В частности, для случая базового многообразия постоянной кривизны было доказано следующее утверждение.

Теорема 1.10 *Пусть* Γ *геодезическая в (сферическом) касательном расслоении с метрикой Сасаки над пространством постоянной кривизны* (M^n, c). *Тогда геодезические кривизны ее проекции* $\gamma = \pi \circ \Gamma$ *на базу есть кривая с постоянными геодезическими кривизнами* $k_1, k_2, k_3 = 0, \ldots, k_{n-1} = 0$.

Для более общего случая локально-симметрической базы, П.Надь [60] доказал следующую теорему.

Теорема 1.11 *Пусть* Γ *– геодезическая в (сферическом) касательном расслоении с метрикой Сасаки над локально-симметрическим пространством. Тогда геодезические кривизны ее проекции* $\gamma = \pi \circ \Gamma$ *на базу есть кривая с постоянными геодезическими кривизнами.*

В связи с Теоремами 1.10 и 1.11 возникает *задача более точной характеризации* проекций геодезических (сферического) касательного расслоения над классическими локально-симметрическими пространствами непостоянной кривизны CP^n и HP^n. Комплексное проективное пространство CP^n является частным случаем локально-симметрического Кэлерова многообразия с почти комплексной структурой J. В каждом касательном пространстве такого многообразия можно определить деформацию метрики касательной сферы типа деформации Берже, то есть деформацию в направлении векторного поля Хопфа $J\xi$ на каждой касательной сфере. Такая деформация возможна на сферическом расслоении T_1M^n и на "взрезанном" касательном расслоении (без нулевого сечения) $TM_0 = TM^n \setminus M^n$. Возникает *вопрос об уравнении геодезических Берже-деформированной метрики* и о влиянии такого типа деформаций на проекции геодезических на базу. Сформулированные задачи рассматриваются в Разделах 3.1 и 3.2.

Невертикальные кривые являются одномерными подмногообразиями в (сферическом) касательном расслоении, трансверсальными к слоям. Векторное поле ξ, заданное на всем многообразии, определяет вложение $\xi : M^n \to TM^n$ максимальной размерности, трансверсальное слоям. Вопрос о вполне геодезичности подмногообразия $\xi(M^n) \subset TM^n$ рассматривал П.Вальчак [77].

Теорема 1.12 *Пусть ξ – векторное поле постоянной длины на римановом многообразии M^n. Тогда $\xi(M^n)$ – вполне геодезическое подмногообразие в TM^n, тогда и только тогда, когда ξ – параллельное векторное поле на M^n.*

Заметим, что результат Теоремы 1.12 означает вырождение базы в метрическое произведение $M^n = M^{n-1} \times E^1$, причем ξ огибает евклидов фактор.

Кривые в касательном расслоении являются частным случаем поднятия подмногообразия $F^l \subset M^n$ в (сферическое) касательное расслоение при помощи векторного поля ξ на M^n, заданного в точках подмногообразия F^l. Теорема 1.12 покрывает случай $l = n$. Рассмотрение случаев $1 < l < n$ является новой задачей. В частности, выяснение условий вполне геодезичности такого класса подмногообразий. Представляет интерес рассмотрение важного частного случая единичного векторного поля, заданного вдоль подмногообразия, а именно поля единичных нормалей. Более того, при наличии на многообразии риманова трансверсально ориентируемого слоения, поле единичных нормалей слоев определяет поднятие слоения на единичное касательное расслоение всего многообразия. Возникает естественная задача изучения геометрии поднятого слоения. Так же в связи с результатами Теорем 1.8 и 1.12 возникает задача описания (по крайней мере локального) всех вполне геодезических подмногообразий в касательном расслоении многообразий малой размерности $n = 2$. Сформулированные задачи рассматриваются в Разделах 3.3 и 3.4.

Единичное векторное поле ξ на римановом многообразии определяет (по крайней мере локально) вложение $\xi : M^n \to T_1M^n$, трансверсальное слоям. Такая интерпретация позволяет приписать векторному полю геометрические характеристики подмногообразия $\xi(M^n)$ такие, например, как средняя, секционная кривизны, кривизна Риччи, скалярная кривизна и т.п. Наибольшее развитие получили вопросы, связанные со средней кривизной, в частности, вопросы минимальности единичного векторного поля.

Г.Глюк и В.Циллер [35] первыми поставили вопрос о минимальности глобально заданного единичного векторного поля (что накладывает ограничения на топологию многообразия). Локальная постановка задачи о минимальных единичных векторных принадлежит О.Жиль-Медрано и Е.Ллинарес-Фустер [34]. А именно, обозначим через $\tilde{X}^1(M)$ пространство всех гладких единичных векторных полей на M. Вариация поля ξ в классе $\tilde{X}^1(M)$ порождает вариацию $\xi(M)$ и, следовательно, вариацию функционала объема $Vol_\xi : \tilde{X}^1(M) \to \mathbb{R}$. Мы будем называть такую вариацию функционала объема *поле-вариацией.* Единичное векторное поле ξ называется *минимальным* по О. Жиль-Медрано, если ξ является стационарной точкой функционала объема относительно поле-вариаций. Было доказано [34], что такое определение минимальности оказывается эквивалентным классическому, то есть минимальное векторное поле порождает минимальное погружение $\xi : M \to T_1M$. Условие минимальности относительно поле-вариаций было выражено в терминах некоторой специальной 1-формы. Однако проверка на минимальность векторного поля в смысле Жиль-Медрано оказалась весьма затруднительной. В связи с этим, возникла задача о структуре второй фундаментальной формы подмногообразия $\xi(M^n) \subset T_1M^n$ и получения альтернативной формулы для вектора средней кривизны векторного поля. Более того, знание всей второй фундаментальной формы позволяет ставить задачу о вполне геодезичности подмногообразий вида $\xi(M^n) \subset T_1M^n$, исследования внутренней геометрии таких подмногообразий через уравнение Гаусса. В первую очередь такой подход требует описания касательно-нормального оснащения подмногообразия $\xi(M^n) \subset T_1M^n$, выписывания разложения Гаусса-Вейнгартена и т.д. Представляет интерес, так же, постановка задачи о геометрических свойствах классов векторных полей.

Для случая 3-х мерной групп Ли G с лево-инвариантной метрикой К. Цукада и Л. Ванеке нашли список всех *минимальных* лево-инвариантных единичных векторных полей [73]. Было доказано, что каждое минимальное единичное векторное поле на 3-мерной *унимодулярной* группах Ли является собственным вектором оператора Риччи. Знание всей второй фундаментальной формы позволяет ставить задачу описания геодезических инвариантных единичных векторных полей на этих группах.

Формула второй вариации относительно поле-вариаций для функционала объема была получена в работе [33] и оказалась довольно сложной для пользования. Видимо поэтому известно не слишком много результатов касательно устойчивоси/неустойчивости векторных полей относительно поле-вариаций. Известно, что минимальное векторное поле на 2-мерном римановом многообразии всегда устойчиво относительно поле-вариаций [33]. Поле Хопфа на единичной 3-х мерной сфере так же минимально и устойчиво относительно поле-вариаций [33]. Заметим, однако, что поле Хопфа на самом деле порождает вполне геодезическое подмногообразие в расслоении единичных векторов любой нечетно-мерной сферы равно как и характеристическое векторное поле Сасакиевой структуры на нечетно-мерных многообразиях [107].

С другой стороны, хорошо известна формула второй вариации функционала объема для *классической* нормальной вариации подмногообразия в римановом пространстве [69], с помощью которой можно проверять устойчивость/неустойчивость минимального или вполне геодезического подмногообразия относительно локальной или глобальной (если такая существует) нормальной вариации функционала объема. Свойства классической устойчивости подмногообразия $\xi(M) \subset T_1M$ оказываются отличными от свойств устойчивости или не устойчивости относительно поле-вариаций, рассмотренные в [33], так как классическая вариация приводит к вариации поля не только в направлении, ортогональном ξ.

В некоторых случаях нормальная вариация минимального подмногообразия $\xi(M) \subset T_1M$ эквивалентна второй поле-вариации минимального единичного векторного поля. Случай вполне геодезических единичных лево-инвариантных векторных полей на 3-х мерной группе Ли с лево-инвариантной метрикой дает соответствующий пример. Сформулированные задачи рассматриваются в Разделе 4.

Для исследования геометрии подмногообразий, А.Борисенко перенес определение метрики Сасаки на случай подмногообразия в римановом пространстве, использовав свойства связности в нормальном расслоении [98]. После чего, стала почти очевидной возможность определить метрику типа Сасаки на метризованном векторном расслоения с метрической связностью. Представляет интерес изучение сечений таких расслоений и сравнение их геометрии с геометрией векторного поля, т.е. сечений (единичного) касательного расслоения. Этим вопросам посвящен Раздел 5.

1.4. Выводы.

В разделе рассмотрены известные результаты по геометрии касательного и сферического расслоения риманова многообразия с метрикой Сасаки. Обоснована постановка следующих задач:

- о существовании сильно-сферического распределении на сферическом касательном расслоении;
- о границах изменения кривизны метрики Сасаки сферического касательного расслоения над пространством постоянной кривизны;
- об уточненной характеризации проекций геодезических (сферического) касательного расслоения над классическими локально-симметрическими пространствами непостоянной кривизны CP^n и HP^n;
- об уравнении геодезических Берже-деформированной метрики и о влиянии такого типа деформаций на проекции геодезических на базу;
- о поднятии подмногообразий базы в (сферическое) касательное расслоение под действием векторного поля, определенного в точках подмногообразия и выяснение условий вполне геодезичности таких поднятий;
- о локальном описании всех вполне геодезических подмногообразий в касательном расслоении двумерного многообразия;
- о систематическом изучении геометрии подмногообразий, порожденных единичным векторным полем. В частности, о существовании векторных полей с вполне геодезических образом;
- об обобщении конструкции метрики Сасаки метризованное векторное расслоения с метрической связностью. В частности, исследование минимальности и вполне геодезичности сечений расслоения.

РАЗДЕЛ 2

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ВНУТРЕННЕЙ ГЕОМЕТРИИ СФЕРИЧЕСКИХ РАССЛОЕНИЙ

В данном разделе рассматривается задача поиска сильно сферических распределений тензора кривизны расслоения единичных векторов и находятся точные границы изменения секционной кривизны $T_1(M^n, c)$ для базового многообразия постоянной кривизны, что существенно усиливает результаты из [47] и [93]. Раздел содержит результаты, принадлежащие автору и опубликованные в работах [100], [103] и [104].

2.1. Сильно-сферические распределения на единичном касательном расслоении.

Нуль-распределением на римановом многообразии (M, g) называется распределение $\mathcal{L}$, определяемое векторными полями из общего ядра операторов кривизны. Это означает, что $Z \in \mathcal{L}$, если $R(X, Y)Z = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Если размерность такого нуль-распределения постоянна, то в работах Борисенко А.А. такие нуль - распределения *сильно - параболическими.* В работе [94] изучались сильно параболические распределения на касательном расслоении риманова многообразия с метрикой Сасаки. Постановка задачи, принадлежащая Борисенко А.А, была связана с тем, что на римановом многообразии сильно - параболическое распределение интегрируемо и его интегральные подмногообразия внутренне плоски и вполне геодезичны в объемлющем пространстве. Нетрудно видеть, что слои касательного расслоения с метрикой Сасаки так же внутренне плоски и вполне геодезичны.

Однако слои не образуют сильно - параболического распределения. Оказалось, что касательное расслоение риманова многообразия с метрикой Сасаки допускает сильно - параболическое распределение только в том случае, когда базовое многообразие расщепляется в прямое метрическое произведение [94]

Более общий тип нуль-распределения образует так называемое сильно *сферическое/гиперболическое* распределение. Метрика риманова многообразия (M, g) называется сильно s - сферической/гиперболической, если на M существует s - мерное распределение $\mathcal{L}^s$ такое, что тензор кривизны метрики M удовлетворяет условию

$$R(X,Y)Z = c(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) \quad (c > 0, \text{ соответственно, } c < 0) \quad (2.1)$$

для любого $Y \in \mathcal{L}^s$ и произвольных $X, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Известно, что это распределение интегрируемо и интегральные подмногообразия являются в M вполне геодезическими подмногообразиями постоянной кривизны c [55]. Размерность s естественно называть индексом сильной сферичности/ гиперболичности, c – показателем сферичности/гиперболичности.

Известно, что слои T_1M являются вполне геодезическими подмногообразиями в T_1M, имеют постоянную кривизну, равную 1, и представляют собой интегральные подмногообразия $(n-1)$ - мерного вертикального распределения [27, 48]. Борисенко А.А. принадлежит постановка задачи выяснения условий существования сильно сферического распределения на сферическом касательном расслоении с метрикой Сасаки. Сильно сферические распределения на расслоении единичных векторов существуют. Пример составляет единичное касательное расслоение стандартной двумерной сферы T_1S^2, секционная кривизна которого постоянна и равна $1/4$ и в смысле определения (2.1) мы имеем $c = 1/4, s = 3$. Исчерпывающий результат для двумерных многообразий дает следующая теорема [102].

Теорема 2.1 *Единичное касательное расслоение T_1M^2 допускает сильно-сферическое распределение $\mathcal{L}^s$ с показателем сферичности $c > 0$ только и только тогда, когда M^2 есть пространство постоянной кривизны $K > 0$.*

При этом,

- *если $K = 1$, то $s = 3$, $c = \frac{1}{4}$ и $\mathcal{L}^s_{(q,\xi)} = T_{(q,\xi)}(T_1(M^2, 1))$;*
- *если $K \neq 1$, то $s = 1$, $c = \frac{K^2}{4}$ и $\mathcal{L}^s_{(q,\xi)} = \mathcal{V}_{(q,\xi)}(T_1(M^2, K))$.*

Доказательство. Пусть T_1M^2 допускает сильно-сферическое распределение $\mathcal{L}^s$. Тогда тензор кривизны T_1M^2 в каждой точке $(q, \xi) \in T_1M^2$ удовлетворяет условию (2.1). Выберем в окрестности точки $q \in M^2$ риманову нормальную систему координат так, что в точке q ортонормированные векторы $e_1, e_2 = \xi$ будут касаться координатных направлений. Тогда в точке (q, ξ) векторы $E_1 = e_1^h, E_2 = \xi^h, E_3 = e_1^v$ составят ортонормированный базис в $T_{(q,\xi)}(T_1M^2)$. Пусть $\tilde{Y} = \tilde{Y}^1E_1 + \tilde{Y}^2E_2 + \tilde{Y}^3E_3$ вектор из $\mathcal{L}^s$. Относительно выбранной системы координат условие сильной сферичности в точке (q, ξ) запишется в виде

$$\bar{R}_{ijkm}\tilde{Y}^m = c(\delta_{ik}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jk})\tilde{Y}^m,$$

где δ – символ Кронеккера, а индексы $i, j, k, m = 1, \ldots, 3$. Относительно выбранной системы координат компоненты тензора кривизны $\bar{R}$ имеют особенно простой вид [92]

$$\bar{R}_{1212} = K(1 - \tfrac{3}{4}K), \quad \bar{R}_{1313} = \tfrac{K^2}{4}, \qquad \bar{R}_{2323} = \tfrac{K^2}{4},$$

$$\bar{R}_{1213} = \tfrac{1}{2}e_1(K), \qquad \bar{R}_{1223} = \tfrac{1}{2}e_2(K), \quad \bar{R}_{1323} = 0,$$

где K – гауссова кривизна M^2. Выпишем условия сильной сферичности для следующих существенных комбинаций индексов (i, j, k):

- $(1, 2, 1) : \quad K(1 - \frac{3}{4}K)\tilde{Y}^2 + \frac{1}{2}e_1(K)\tilde{Y}^3 = c\tilde{Y}^2;$

- $(1,2,2):\quad -K(1-\frac{3}{4}K)\tilde{Y}^1+\frac{1}{2}e_2(K)\tilde{Y}^3=-c\tilde{Y}^1;$
- $(1,2,3):\quad -\frac{1}{2}e_1(K)\tilde{Y}^1-\frac{1}{2}e_2(K)\tilde{Y}^2=0;$
- $(1,3,1):\quad \frac{1}{2}e_1(K)\tilde{Y}^2+\frac{K^2}{4}\tilde{Y}^3=c\tilde{Y}^3;$
- $(1,3,2):\quad -\frac{1}{2}e_1(K)\tilde{Y}^1=0;$
- $(1,3,3):\quad -\frac{K^2}{4}\tilde{Y}^1=-c\tilde{Y}^1;$
- $(2,3,1):\quad \frac{1}{2}e_2(K)\tilde{Y}^2=0;$
- $(2,3,2):\quad \frac{1}{2}e_2(K)\tilde{Y}^1+\frac{K^2}{4}\tilde{Y}^3=c\tilde{Y}^3;$
- $(2,3,3):\quad -\frac{K^2}{4}\tilde{Y}^2=-c\tilde{Y}^2.$

Из $(1,3,3)$ и $(2,3,3)$ следует, что либо (i) $K^4/4=c$, либо (ii) $\tilde{Y}^1=\tilde{Y}^2=0$.

(i) Пусть $K^2/4=c$. В силу произвола выбора точки и постоянства c, это условие означает постоянство гауссовой кривизны. Но тогда $e_1(K)=e_2(K)=0$ и условия $(1,2,1)$ и $(1,2,2)$ при подстановке $c=K^2/4$ сведутся к виду

$$K(1-K)\tilde{Y}^2=0,\qquad K(1-K)\tilde{Y}^1=0.$$

Таким образом, если $K=1$, то все уравнения удовлетворяются тождественно, а значит вектор $\tilde{Y}$ может быть выбран произвольно. Если же $K\neq 1$, то $\tilde{Y}^1=\tilde{Y}^2=0$ и сильно сферическое распределение является одномерным и огибает слои единичного расслоения T_1M^2.

(ii) Пусть $\tilde{Y}^1=\tilde{Y}^2=0$. Тогда из $(1,2,1)$ и $(1,2,2)$ следует, что сильно сферическое распределение существует, если $e_1(K)=e_2(K)=0$, то есть $K=const$. Тогда из $(1,3,1)$ следует, что $c=K^2/4$. При этих условиях, остальные уравнения выполняются тождественно.

■

Сильно-сферические невертикальное распределение на T_1M. Предположим, что T_1M допускает невертикальное сильно-сферическое распределение $\tilde{\mathcal{L}}^s(q,\xi)$ размерности $s>0$. Зафиксируем точку (q,ξ) и пусть $\tilde{Z}\in$

$\mathcal{L}^s(q,\xi)$. Выберем ортонормированный базис $(e_1,\dots,e_n)$ в T_qM так, что $e_n = \xi$. Тогда

$$E_i = e_i^h, \quad E_{n+\alpha} = e_\alpha^v \quad \big(i = 1\dots n, \alpha = 1\dots(n-1)\big) \tag{2.2}$$

образуют ортонормированный базис в $T_{(q,\xi)}(T_1M)$. Поэтому для вектора $\tilde{Z}$ имеет место разложение $\tilde{Z} = \tilde{Z}^i(q,\xi)E_i + \tilde{Z}^{n+\alpha}(q,\xi)E_{n+\alpha}$. Положим $Z_h = \pi_*(\tilde{Z}) = \tilde{Z}^i(q,\xi)e_i(q)$, $Z(\xi) = \mathcal{K}(\tilde{Z}) = \tilde{Z}^{n+\alpha}(q,\xi)e_\alpha(q) \perp \xi$. В силу поточечной линейности операций взятия горизонтального и вертикального лифтов, корректно определены поднятия

$$(Z_h)^h := \tilde{Y}^i(q,\xi)e_i^h, \quad (Z(\xi))^{tg} := \tilde{Z}^{n+\alpha}(q,\xi)e_\alpha^v = Z(\xi)^v.$$

Условие принадлежности вектора $\tilde{Z}$ распределению $\tilde{\mathcal{L}}^s$ имеет вид

$$\bar{R}(\bar{X},\bar{Y})\big((Z_h)^h + (Z(\xi))^v\big) = \\ c\Big(\big\langle \big\langle \bar{Y}, (Z_h)^h + (Z(\xi))^v \big\rangle \big\rangle \bar{X} - \big\langle \big\langle \bar{X}, (Z_h)^h + (Z(\xi))^v \big\rangle \big\rangle \bar{Y}\Big)$$

для любых $\bar{X} = X_1^h + X_2^{tg} = X_1^h + (X_2')^v$, $\bar{Y} = Y_1^h + Y_2^{tg} = Y_1^h + (Y_2')^v$. Используя выражение для тензора кривизны (1.6) нетрудно выписать необходимое и достаточное условие существования такого вектора $\tilde{Z}$ в терминах комбинаций различных типов векторов $\bar{X}$ и $\bar{Y}$, а именно

(1) $\bar{X} = X^h$, $\bar{Y} = Y^h$:

$$R(X,Y)Z_h + \frac{1}{4}R(\xi, R(X,Z_h)\xi)Y - \frac{1}{4}R(\xi, R(Y,Z_h)\xi)X + \frac{1}{2}R(\xi, R(X,Y)\xi)Z_h + \\ \frac{1}{2}\big((\nabla_X R)(\xi, Z(\xi))Y - (\nabla_Y R)(\xi, Z(\xi))X\big) = c\big(\langle Y, Z_h \rangle X - \langle X, Z_h \rangle Y\big);$$

$$R(X,Y)Z(\xi) - \langle R(X,Y)Z(\xi), \xi \rangle \xi + \\ \frac{1}{4}R(R(\xi, Z(\xi))Y, X)\xi - \frac{1}{4}R(R(\xi, Z(\xi))X, Y)\xi + \frac{1}{2}(\nabla_{Z_h} R)(X,Y)\xi = 0;$$

(2) $\bar{X} = X^h$, $\bar{Y} = Y^{tg} = (Y')^v$:

$$\frac{1}{2}(\nabla_X R)(\xi, Y)Z_h - \frac{1}{2}R(Y', Z(\xi))X - \frac{1}{4}R(\xi, Y)R(\xi, Z(\xi))X = c\langle\, Y', Z(\xi)\,\rangle X;$$

$$\frac{1}{2}R(X, Z_h)Y' - \frac{1}{2}\langle\, R(X, Z_h)Y', \xi\,\rangle\xi + \frac{1}{4}R(R(\xi, Y)Z_h, X)\xi = -c\langle\, X, Z_h\,\rangle Y';$$

(3) $\bar{X} = X^{tg} = (X')^v$, $\bar{Y} = Y^{tg} = (Y')^v$:

$$R(X', Y')Z_h + \frac{1}{4}R(\xi, X)R(\xi, Y)Z_h - \frac{1}{4}R(\xi, Y)R(\xi, X)Z_h = 0;$$

$$(1-c)\big(\langle\, Y', Z(\xi)\,\rangle X' - \langle\, X', Z(\xi)\,\rangle Y'\big) = 0.$$

Хорошо известно, что характеристическое векторное поле Сасакиевой структуры определяет одномерное сильно сферическое распределение на многообразии. Расслоение T_1S^n стандартной единичной сферы с метрикой Сасаки (после ее гомотетичной перенормировки с коэффициентом $1/4$) является многообразием Сасаки с характеристическим векторным полем ξ^h. Оказывается, что других многообразий (M^n, K) постоянной кривизны K размерности $n \geq 3$ с сильно сферическим распределением на $T_1(M^n, K)$ не существует.

Теорема 2.2 *Единичное касательное расслоение $T_1(M^n, K)$ ($n \geq 3$) пространства постоянной кривизны $K > 0$ допускает невертикальное сильно-сферическое распределение $\mathcal{L}^s$ с показателем сферичности $c > 0$ только и только тогда, когда*

- *M^n локально изометрично единичной сфере S^n;*
- *распределение $\mathcal{L}^s$ одномерно и совпадает с характеристическим векторным полем стандартной Сасакиевой структуры на T_1S^n;*
- *показатель сферичности $c = 1/4$.*

Доказательство. Покажем вначале, что $Z(\xi) = 0$. Из уравнения сильной сферичности $(3)_2$ следует, что либо $c = 1$, либо $\langle\, Y', Z(\xi)\,\rangle X' - \langle\, X', Z(\xi)\,\rangle Y' = 0$ для всех X' и Y'.

Пусть $c = 1$. Полагая $Y' = Z(\xi)$ в $(2)_1$, получим

$$-\frac{1}{4}R(\xi, Z(\xi))R(\xi, Z(\xi))X = |Z(\xi)|^2 X.$$

Домножая на X, имеем

$$\frac{1}{4}|R(\xi, Z(\xi))X|^2 = |Z(\xi)|^2|X|^2.$$

Так как размерность $n \geq 3$, то можно выбрать $X \perp \xi, Z(\xi)$. Тогда ввиду постоянства кривизны базы $R(\xi, Z(\xi))X = 0$, а значит $Z(\xi) = 0$.

Пусть $\langle\, Y', Z(\xi)\,\rangle X' - \langle\, X', Z(\xi)\,\rangle Y' = 0$. Так как размерность $n \geq 3$, то X' и Y' можно выбрать линейно не зависимыми, а следовательно $\langle\, Y', Z(\xi)\,\rangle = 0$ для всех Y'. В свою очередь, это означает, что $Z(\xi) = 0$.

Заметим, что условие $Z(\xi) = 0$ носит точечный характер, то есть это не означает, что искомое распределение горизонтально. Это лишь означает, что в точке (q, ξ) интегральное подмногообразие распределения $\mathcal{L}^s$ касается плоскости горизонтального не интегрируемого распределения $\mathcal{H}$ в точке (q, ξ). Проекция $Z_h = \tilde{Z}(q, \xi)^i e_i(q)$ не является векторным полем на базе.

Так как $n \geq 3$, в уравнении $(2)_2$ можно положить $X = X' \perp Y'$. Тогда получим

$$\frac{1}{2}R(X', Z_h)Y' = \frac{K}{2}\langle\, Z_h, Y'\,\rangle X'$$

$$\frac{1}{4}R(R(\xi, Y')Z_h, X')\xi = \frac{K}{4}R(\langle\, Y', Z_h\,\rangle\xi - \langle\, \xi, Z_h\,\rangle Y', X')\xi =$$
$$\frac{K}{2}\Big(\langle\, Y', Z_h\,\rangle R(\xi, X')\xi - \langle\, \xi, Z_h\,\rangle R(Y', X')\xi\Big) = -\frac{K^2}{4}\langle\, Y', Z_h\,\rangle X'$$

и уравнение примет вид

$$\frac{K}{2}\Big(1 - \frac{K}{2}\Big)\langle\, Y', Z_h\,\rangle X' = -c\langle\, X', Z_h\,\rangle Y'.$$

В силу произвола и ортогональности X' и Y' заключаем, что $\langle X', Z_h \rangle = 0$. Следовательно $Z_h = \lambda\xi$ и не нарушая общности можно положить $Z_h = \xi$. Это означает, что $\mathcal{L}^s$ одномерно $s = 1$ и определяется полем геодезического потока $\tilde{Z} = \xi^h$. В таком случае, уравнение $(2)_2$ перепишется в виде

$$\frac{1}{2}R(X',\xi)Y' - \frac{1}{2}\langle R(X',\xi)Y',\xi\rangle\xi + \frac{1}{4}R(R(\xi,Y')\xi,X)\xi = -c\langle X,\xi\rangle Y'.$$

Полагая $X = \xi$ приходим к равенству $\frac{K^2}{4}Y' = cY'$, откуда следует, что $c = K^2/4$. Если же $X = X' \perp \xi$, то получаем тождество.

Оставшееся уравнение $(1)_1$ перепишется в виде

$$R(X,Y)\xi + \frac{1}{4}R(\xi,R(X,\xi)\xi)Y - \frac{1}{4}R(\xi,R(Y,\xi)\xi)X + \frac{1}{2}R(\xi,R(X,Y)\xi)\xi = \frac{K^2}{4}\big(\langle Y,\xi\rangle X - \langle X,\xi\rangle Y\big).$$

Заметим, что $R(X,\xi)\xi = K\big(X - \langle X,\xi\rangle\xi\big) = KX'$, а $K\big(\langle Y,\xi\rangle X - \langle X,\xi\rangle Y\big) = R(X,Y)\xi$. Поэтому полученное выражение можно упростить

$$R(X,Y)\xi + \frac{K}{4}R(\xi,X')Y - \frac{K}{4}R(\xi,Y')X - \frac{K}{2}R(X,Y)\xi = \frac{K}{4}R(X,Y)\xi.$$

Для векторов вида $X = X'$ и $Y = Y'$ с очевидностью получаем тождество $0 = 0$. Полагая $X = X'$ и $Y = \xi$ после несложных преобразований получаем $K(1-K) = 0$, откуда следует, что $K = 1$. Таким образом, M^n локально изометрично единичной сфере S^n, а $\mathcal{L}^s$ одномерно и огибает слои характеристического векторного поля Сасакиевой структуры на T_1S^n.

∎

В контактной геометрии распределения, содержащие структурное векторное поле, называются контактными. Как следует из доказательства Теоремы 2.2, сильно сферическое распределение на $T_1(M^n,K)$ является контактным. Возникает вопрос о существовании контактного сильно сферического распределения для единичного касательного расслоения общего риманова многообразия. Ответ отрицательный [102].

Теорема 2.3 *На единичном касательном расслоении риманова многообразия не постоянной секционной кривизны не существует контактного сильно сферического распределения.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}^s$ искомое сильно сферическое распределение такое, что $\mathcal{L}^s \supset \xi^h$. В точке $(q, \xi) \in T_1M$ выберем ортонормированный базис в соответствии с (2.2). Пусть $\tilde{Y} \in \mathcal{L}^s$ и $Y_h = \pi_*(\tilde{Y})$, $Y_v = \mathcal{K}(\tilde{Y})$. Полагая в $(2)_2$ условий сильной сферичности $X = Z_h = \xi$ и домножая уравнение на Y' находим $\frac{1}{4}|R(Y', \xi)\xi|^2 = c$. Так как линейный оператор $R(\cdot, \xi, \xi) : \xi^\perp \to \xi^\perp$ (оператор Якоби) симметричен, то он диагонализуем, то есть существует ортонормированный базис $(e_1, \dots, e_{n-1}) \subset \xi^\perp$ такой, что $R(e_\alpha, \xi)\xi = K_\alpha e_\alpha$, где K_α – секционные кривизны по площадкам $e_\alpha \wedge \xi$. Значит $K_\alpha^2 = 4c$ и в силу произвола выбора ξ это означает постоянство секционной кривизны многообразия.

■

Вертикальные сильно-сферические распределения на T_1M. Результаты предыдущего раздела верны, если искомое распределение не является вертикальным. Однако Теорема 2.1 показывает, что вертикальные сильно сферические распределения могут существовать. Все вертикальное распределение в размерности $n \geq 3$ не является сильно сферическим. Может ли меньшее распределение быть сильно сферическим?

Теорема 2.4 *Единичное касательное расслоение T_1M^n риманова многообразия M^n размерности $n \geq 3$ неотрицательной секционной кривизны не допускает вертикального сильно сферического распределения.*

Доказательство. Используя выражение для тензора кривизны (1.6) можно выписать необходимое и достаточное условие существования такого распределения в терминах комбинаций различных типов векторов $\bar{X}$ и $\bar{Y}$. Они имеют следующий смысл: в каждой точке $q \in M$ для любого единичного вектора $\xi \in T_qM^n$ существует подпространство $\mathcal{L}_q^s \subset \xi^{\perp}$ такое, что для любого вектора $Z(\xi) \in \mathcal{L}_q^s$ выполняются уравнения

(1) $\bar{X} = X^h$, $\bar{Y} = Y^h$:

$$\tfrac{1}{2}\big((\nabla_X R)(\xi, Z(\xi))Y - (\nabla_Y R)(\xi, Z(\xi))X\big) = 0;$$

$$R(X,Y)Z(\xi) - \big\langle\, R(X,Y)Z(\xi), \xi \,\big\rangle \xi +$$

$$\tfrac{1}{4}R(R(\xi, Z(\xi))Y, X)\xi - \tfrac{1}{4}R(R(\xi, Z(\xi))X, Y)\xi = 0;$$

(2) $\bar{X} = X^h$, $\bar{Y} = Y^{tg} = (Y')^v$:

$$-\frac{1}{2}R(Y', Z(\xi))X - \frac{1}{4}R(\xi, Y)R(\xi, Z(\xi))X = c\big\langle\, Y', Z(\xi) \,\big\rangle X;$$

(3) $\bar{X} = X^{tg} = (X')^v$, $\bar{Y} = Y^{tg} = (Y')^v$:

$$(1-c)\big(\big\langle\, Y', Z(\xi) \,\big\rangle X' - \big\langle\, X', Z(\xi) \,\big\rangle Y'\big) = 0.$$

Из дифференциального тождество Бьянки

$$0 = \big\langle\, (\nabla_X R)(\xi, Z(\xi))Y - (\nabla_Y R)(\xi, Z(\xi))X), W \,\big\rangle = \big\langle\, (\nabla_W R)(X,Y)Z(\xi), \xi \,\big\rangle,$$

из симметрий тензора кривизны следует, что уравнение $(1)_2$ является следствием уравнения (2), в чем легко убедиться домножением на произвольный вектор W. Кроме того, из уравнения (3) при $n \geq 3$ следует, что $c = 1$.

Теперь условия вертикальной сильной сферичности упрощаются до

(a) $\frac{1}{2}\langle R(Z(\xi), Y')X, W\rangle - \frac{1}{4}\langle R(\xi, Z(\xi))W, R(\xi, Y')X\rangle + \langle Y', Z(\xi)\rangle\langle X, W\rangle = 0;$

(b) $\frac{1}{2}\langle (\nabla_W R)(X,Y)\xi, Z(\xi)\rangle = 0;$

для любых $X, Y, W \in T_qM$ и любых $X', Y', W' \in \xi^{\perp}$.

Введем в рассмотрение оператор кривизны $R_{XY}\colon T_qM \to T_qM$ и для удобства вычислений сделаем замену $\frac{1}{2}R_{XY} \to \bar{R}_{XY}$. Полагая вначале $Y' =$

$Z(\xi)$, а затем $Y' \perp Z(\xi)$ и учитывая произвольность выбора векторов в выписанных выше равенствах, можно записать их в следующей эквивалентной форме (все векторы предполагаются нормированными)

$$
\begin{aligned}
&\bar{R}^2_{\xi Z(\xi)} = -E;\\
&\bar{R}_{Y'Z(\xi)} = \bar{R}_{\xi Z(\xi)}\bar{R}_{\xi Y'} \quad Y' \perp \xi, Z(\xi);\\
&(\nabla_W \bar{R})_{\xi Z(\xi)} = 0;
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Условие $(2.3)_1$ означает, что семейство операторов кривизны $\bar{R}_{\xi Z(\xi)}$ определяет на базе семейство почти комплексных структур, а значит размерность базового многообразия должна быть четной. То есть $s = 0$, если n нечетно.

Пусть $n \geq 3$ четно. Предположим, что $Z(\xi)(\xi)$ является решением системы (2.3). Будем говорить, что $Z(\xi)(\xi)$ –*соответствующий* вектор для ξ. Легко проверить, что уравнения системы (2.3) инвариантны относительно замены $\xi \to Z(\xi)$, $Z(\xi) \to \xi$. Более того, эти уравнения инвариантны относительно поворота в плоскости $\xi \wedge Z(\xi)$, что доказывается прямой проверкой. Это означает, что если вектору ξ соответствует вектор $Z(\xi)$, то вектору $\eta = \cos\varphi\xi + \sin\varphi Z(\xi)$ соответствует вектор $W = -\sin\varphi\xi + \cos\varphi Z(\xi)$. Таким образом плоскость плоскость $\xi \wedge Z(\xi)$ состоит из взаимно соответствующих векторов и мы будем говорить об этой плоскости как о *плоскости соответствий.*

В силу линейности условий (2.3) относительно $Z(\xi)$, легко убедиться в том, что *если вектору ξ соответствуют два линейно независимых вектора $Z_1(\xi)$ и $Z_2(\xi)$, то ξ соответствует плоскость $Z_1(\xi) \wedge Z_2(\xi)$.*

Оператор $R_{\xi Z(\xi)}$ является кососимметрическим и косоортогональным линейным оператором. Ортогональным преобразованием матрица такого оператора приводится к каноническому блочно-диагональному виду, в котором каждый блок есть 2×2 матрица вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Докажем теперь, что если $(\xi, Z(\xi))$ — соответствующая пара на четномерном многообразии размерности $n \geq 4$, то ξ и $Z(\xi)$ принадлежат каноническому базису кососимметричного линейного оператора оператора $\bar{R}_{\xi Z(\xi)}$:

$$\bar{R}_{\xi Z(\xi)}\xi = Z(\xi), \quad \bar{R}_{\xi Z(\xi)}Z(\xi) = -\xi.$$

Так как $n \geqslant 4$, то найдется пара взаимно ортогональных векторов Y_1, Y_2, ортогональных $(\xi, Z(\xi))$ - плоскости. Используя (2.3) и первое тождество Бьянки для оператора кривизны, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned}
&\bar{R}_{Y_1 Z(\xi)}Y_2 = \bar{R}_{\xi Z(\xi)}\bar{R}_{\xi Y_1}Y_2 = \\
&\qquad \bar{R}_{\xi Z(\xi)}(-\bar{R}_{Y_1 Y_2}\xi + \bar{R}_{\xi Y_2}Y_1) = -\bar{R}_{\xi Z(\xi)}\bar{R}_{Y_1 Y_2}\xi + \bar{R}_{\xi Z(\xi)}\bar{R}_{\xi Y_2}Y_1 = \\
&\qquad - \bar{R}_{\xi Z(\xi)}\bar{R}_{Y_1 Y_2}\xi + \bar{R}_{Y_2 Z(\xi)}Y_1 = -\bar{R}_{\xi Z(\xi)}\bar{R}_{Y_1 Y_2}\xi + \bar{R}_{Y_1 Z(\xi)}Y_2 - \bar{R}_{Y_1 Y_2}Z(\xi).
\end{aligned}$$

Отсюда сразу находим, что $\bar{R}_{Y_1 Y_2}Z(\xi) = -\bar{R}_{\xi Z(\xi)}\bar{R}_{Y_1 Y_2}\xi$, После умножения на вектор ξ имеем $\langle \bar{R}_{Y_1 Y_2}Z(\xi), \xi\rangle = -\langle \bar{R}_{\xi Z(\xi)}\bar{R}_{Y_1 Y_2}\xi, \xi\rangle$ или

$$\langle \bar{R}_{Y_1 Y_2}Z(\xi), \xi\rangle = \langle \bar{R}_{\xi Z(\xi)}\xi, \bar{R}_{Y_1 Y_2}\xi\rangle. \tag{2.4}$$

Кроме того, для любого Y ортогонального ξ и $Z(\xi)$, мы имеем $\bar{R}_{\xi Z(\xi)}Y + \bar{R}_{Z(\xi)Y}\xi + \bar{R}_{Y\xi}Z(\xi) = 0$. Используя (2.3), запишем это так:

$$\bar{R}_{\xi Z(\xi)}Y - \bar{R}_{\xi Z(\xi)}\bar{R}_{\xi Y}\xi + \bar{R}_{Y\xi}Z(\xi) = 0.$$

Подействуем на левую часть оператором $\bar{R}_{\xi Z(\xi)}$. Применяя $(2.3)_1$, получим $-Y + \bar{R}_{\xi Y}\xi - \bar{R}_{\xi Z(\xi)}\bar{R}_{\xi Y}Z(\xi) = 0$ для $Y \perp \xi, Z(\xi)$. Еще раз используя $(2.3)_2$ окончательно находим

$$Y + \bar{R}_{Y\xi}\xi + \bar{R}_{Y Z(\xi)}Z(\xi) = 0. \tag{2.5}$$

После умножения (2.5) на ξ и на $Z(\xi)$ имеем

$$\langle \bar{R}_{\xi Z(\xi)}Z(\xi), Y\rangle = \langle \bar{R}_{Y Z(\xi)}Z(\xi), \xi\rangle = 0; \tag{2.6}$$

$$\langle \bar{R}_{\xi Z(\xi)}\xi, Y\rangle = -\langle \bar{R}_{Y\xi}\xi, Z(\xi)\rangle = 0. \tag{2.7}$$

Так как Y - произвольный, ортогональный $(\xi, Z(\xi))$ - плоскости вектор, то

$$\bar{R}_{\xi Z(\xi)}Z(\xi) = \lambda\xi; \quad \bar{R}_{\xi Z(\xi)}\xi = -\lambda Z(\xi). \tag{2.8}$$

Покажем, что $\lambda = 1$. Действительно, подставив (2.8) в (2.4), получим равенство $\langle \bar{R}_{Y_1Y_2}Z(\xi), \xi\rangle = -\lambda\langle \bar{R}_{Y_1Y_2}\xi, Z(\xi)\rangle$ или $(1-\lambda)\langle \bar{R}_{\xi Z(\xi)}Y_1, Y_2\rangle = 0$. Предположим, что

$$\langle \bar{R}_{\xi Z(\xi)}Y_1, Y_2\rangle = 0 \tag{2.9}$$

для любых взаимно ортогональных Y_1, Y_2, ортогональных $(\xi, Z(\xi))$ - плоскости. Вектор $\bar{R}_{\xi Z(\xi)}Y_1$ обладает свойствами:

- $\bar{R}_{\xi Z(\xi)}Y_1$ ортогонален Y_1,
- $\bar{R}_{\xi Z(\xi)}Y_1$ ортогонален ξ в силу (2.6),
- $\bar{R}_{\xi Z(\xi)}Y_1$ ортогонален $Z(\xi)$ в силу (2.7).

Следовательно согласно (2.9), можно положить $Y_2 = \bar{R}_{\xi Z(\xi)}Y_1$. В силу кососимметричности оператора $\bar{R}_{\xi Z(\xi)}$, получим $\langle \bar{R}_{\xi Z(\xi)}Y_1, \bar{R}_{\xi Z(\xi)}Y_1\rangle = |Y_1|^2 = 0$. Противоречие. Таким образом, в (2.8) значение $\lambda = 1$.

В качестве следствия, заметим, что секционная кривизна M в направлении плоскости соответствий равна 2. Для доказательства, достаточно вспомнить, что $\bar{R} = \frac{1}{2}R$. Наконец, заметим, что тождество (2.5) с учетом обратной замены $\bar{R} = \frac{1}{2}R$ запишется в виде $2Y + R_{Y\xi}\xi + R_{YZ(\xi)}Z(\xi) \equiv 0$. Так как $Y, \xi, Z(\xi)$ единичны и взаимно ортогональны, то скалярное умножение тождества на Y дает тождество на секционные кривизны $2 + K_{Y\wedge\xi} + K_{Y\wedge Z(\xi)} = 0$, а это противоречит положительности кривизны базового многообразия.

■

2.2. Распределение кривизны единичного касательного расслоения

Пусть (M, g) риманово многообразие и T_rM его касательное расслоение векторов длины $r = const$ с метрикой Сасаки. Если M локально - симметрично, то для некоторого достаточно малого значения $r > 0$ касательное расслоение T_rM является многообразием неотрицательной секционной кривизны [96]. В частности [93, 99], если M есть стандартная сфера S^n, то кривизна T_rS^n неотрицательна для всех r , удовлетворяющих неравенству $0 < r^2 \le \frac{4}{3}$.

Вопрос о том, можно ли выбором r добиться *положительности* кривизны T_rM при условии положительности кривизны M ставился А. Борисенко в начале 80-х и тогда же на этот вопрос был получен практически исчерпывающий ответ, не публиковавшийся до 2001 года. Статья [52] содержит этот ответ, на публикацию которого автор дал свое разрешение. Ниже мы приводим указанное доказательство.

Теорема 2.5 *Пусть (M, g) риманово многообразие. Если $\dim M \neq 2, 4, 8$ то в каждой точке $q \in M$ существует тройка единичных векторов $X, Y, Z \in M_q$ такая, что $g_q(X, Y) = 0$ и $R_q(X, Y)Z = 0$. Как следствие, секционная кривизна метрики Сасаки T_1M не может быть положительной.*

Доказательство. Предположим, что найдется точка $x \in M$ такая, что

$$R_q(X, Y)Z \neq 0 \tag{2.10}$$

для всех единичных $X, Y, Z \in M_q$ таких, что $g_q(X, Y) = 0$ (ясно, что условие единичности можно заменить эквивалентным условием их невырожденности). Выберем в окрестности точки x локальную систему координат так, чтобы в самой точке координатные векторы $e_1, \ldots, e_n$ составляли ортонормированный репер. Положим $X = e_1$. Тогда для любого Y из ортогонального дополнения e_1 вектор $R_q(e_1, Y)Z$ ортогонален Z. Следовательно, если конец вектора Z пробегает всю единичную касательную сферу S_q, то $R_q(e_1, Y)Z$ порождает на S_q невырожденное векторное поле. Положим $V_i = R_q(e_1, e_i)Z$ для каждого $i = 2, \ldots, n$. Каждое из векторных полей V_i невырождено в силу (2.10).

Покажем, что поля V_i линейно не зависимы. Действительно, в противном случае существует нетривиальный набор коэффициентов $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ такой, что $\sum\limits_{i=2}^{n} \lambda_i V_i = 0$. Тогда имеем

$$0 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i V_i = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i R_q(e_1, e_i)Z = R_q(e_1, \sum_{i=2}^{n} \lambda_i e_i)Z$$

Так как не все λ_i равны нулю, то вектор $Y = \sum_{i=2}^n \lambda_i e_i$ ненулевой, ортогонален e_1 и удовлетворяет условию $R_q(e_1, Y)Z = 0$. Последнее противоречит условию (2.10). Таким образом, на сфере S_q размерности $n-1$ нам удалось построить семейство из $n-1$ линейно независимых невырожденных векторных полей, что возможно лишь в случаях $n - 1 = 1, 3, 7$, То есть при $n = 2, 4, 8$.

Остается заметить, что в направлении площадки (X^h, Y^v) секционная кривизна метрики Сасаки равна $\frac{1}{4}|R(\xi, Y)X$, а значит обращается в нуль на некоторой паре векторов указанного вида. Теорема доказана.

$\blacksquare$

Исключительность случая $\dim M = 2$ очевидна. Все многообразия положительной (отрицательной) гауссовой кривизны удовлетворяют условию (2.10). И более того, справедлива теорема [92]: *если M^2 двумерное риманово многообразие гауссовой кривизны K, то T_rM^2 с метрикой Сасаки имеет положительную секционную кривизну тогда и только тогда, когда*

$$||\mathrm{grad}\, K||^2 < K^3(1 - \frac{3}{4} r^2 K)$$

в каждой точке M^2.

Теорема 2.6 *Пусть* (M^n, c) *– пространство постоянной кривизны* c*. Обозначим через* $\tilde{K}$ *секционную кривизну метрики Сасаки* $T_1(M^n, c)$*, а через* $\tilde{K}_{min}$ *и* $\tilde{K}_{max}$ *наименьшее и наибольшее ее значения. Тогда*

(a) при $n = 2$

$$\tilde{K}_{min} = c(1 - \tfrac{3c}{4}) \quad \text{при } c \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty),$$

$$\tilde{K}_{min} = \tfrac{c^2}{4} \quad \text{при } c \in (0, 1]);$$

$$\tilde{K}_{max} = \tfrac{c^2}{4} \quad \text{при } c \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty),$$

$$\tilde{K}_{max} = c(1 - \tfrac{3c}{4}) \quad \text{при } c \in (0, 1];$$

(b) при $n \geq 3$

$$\tilde{K}_{min} = c(1 - \tfrac{3c}{4}) \quad \text{при } c \in (-\infty, 0] \cup (\tfrac{4}{3}, +\infty),$$

$$\tilde{K}_{min} = 0 \quad \text{при } c \in (0, \tfrac{4}{3});$$

$$\tilde{K}_{max} = c + \tfrac{c^2(c-5)^2}{4(c^2-4c-1)} \quad \text{при } c \in \left(-\infty, \tfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right],$$

$$\tilde{K}_{max} = 1 \quad \text{при } c \in \left(\tfrac{3-\sqrt{17}}{2}, \tfrac{2}{3}\right],$$

$$\tilde{K}_{max} = c + \tfrac{c^2}{4(2c-1)} \quad \text{при } c \in \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right],$$

$$\tilde{K}_{max} = \tfrac{c^2}{4} \quad \text{при } c \in \left(\tfrac{5+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right).$$

Доказательство. Для случая многообразия постоянной кривизны и удачного выбора базиса касательного к (M^n, c) пространства формула (1.15) может быть приведена к более простому виду. А именно, пусть (q,ξ) произвольная точка $T_1(M^n,c)$. В качестве n-го координатного направления на M^n выберем направление ξ. Остальные $n-1$ направление выберем путем процесса ортогонализации. Тогда в точке q компоненты метрического тензора M^n будут равны δ_{ij} $(i,j=1,...,n)$ и скалярное произведение в (1.15) станет евклидовым. Каждый касательный вектор в T_1M^n в точке (q,ξ) будет задаваться $2n-1$ координатой:

$$\tilde{X}=\{X^1,X^2,...,X^n;X^{n+1},...,X^{2n-1}\},\quad \tilde{Y}=\{Y^1,Y^2,...,Y^n;Y^{n+1},...,Y^{2n-1}\}$$

При этом $X_1=\{X^1,...;X^n\}$, $\quad X_2=\{X^{n+1},...,X^{2n-1};0\}$, $\quad \xi=\{0,...,0;1\}$. В этих условиях формула (1.15) примет вид [93]:

$$\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}}=\sum_{p=1}^{q}\sum_{q=2}^{n-1}\Big[c(B^{pq})^2+c(3-c)B^{pq}B^{n+pn+q}+(B^{n+pn+q})^2\Big]+$$
$$+c\Big(1-\frac{3c}{4}\Big)\sum_{p=1}^{n-1}(B^{np})^2+\frac{c^2}{4}\sum_{p=1}^{n-1}(B^{nn+p})^2+\frac{c^2}{4}\sum_{p=1}^{n-1}(B^{pn+p})^2, \quad (2.11)$$

где $B^{IJ}=X^IY^J-X^JY^I$, $\quad (I,\ J=1,\dots,2n-1)$ – компоненты простого бивектора, составленного из координат векторов $\tilde{X},\tilde{Y}$

Заметим, что ортонормированность пары $(\tilde{X},\tilde{Y})$ означает единичность бивектора $\{B^{IJ}\}$, т.е.

$$\sum_{I=1}^{J}\sum_{J=2}^{2n-1}(B^{IJ})^2=1 \quad (2.12)$$

Еще одно выражение для секционной кривизны метрики Сасаки расслоения $T_1(M^n,c)$ получим, пользуясь выражением для тензора кривизны (M^n,c) :

$$R(X,Y)Z=c\Big(\big\langle Y,Z\big\rangle X-\big\langle X,Z\big\rangle Y\Big) \quad (2.13)$$

Прежде заметим, что поскольку секционная кривизна зависит только от данной двумерной плоскости, а не от векторов, ее задающих, то в плоскости ортонормированных векторов $\tilde{X}, \tilde{Y}$ можно выбрать такую пару векторов, что

$$\big\langle X_2, Y_2 \big\rangle = 0, \quad \big\langle X_1, Y_1 \big\rangle = 0, \quad \big\langle\, X_2, \xi\, \big\rangle = \big\langle\, Y_2, \xi\, \big\rangle = 0 \tag{2.14}$$

и при этом секционная кривизна не изменится. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что векторы нашей элементарной площадки удовлетворяют условиям (2.14).

С учетом (2.13) и (2.14) формула Леммы (1.15) преобразуется к виду:

$$\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} = c|X_1|^2|Y_1|^2 + c(3-c)\Big[\big\langle X_1, X_2\big\rangle\big\langle Y_1, Y_2\big\rangle - \big\langle X_1, Y_2\big\rangle\big\langle Y_1, X_2\big\rangle\Big] + |X_2|^2|Y_2|^2 +$$
$$\frac{c^2}{4}\Big[(\big\langle Y_2, X_1\big\rangle - \big\langle X_2, Y_1\big\rangle)^2 + \big\langle \xi, X_1\big\rangle^2 |Y_2|^2 + \big\langle \xi, Y_1\big\rangle^2 |X_2|^2\Big] -$$
$$\frac{3c^2}{4}\Big[\big\langle Y_1, \xi\big\rangle^2 |X_1|^2 + \big\langle X_1, \xi\big\rangle^2 |Y_1|^2\Big]. \tag{2.15}$$

Заметим, что $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} = 1$, если $\tilde{X} = \{0, 0; 0; 0, 1\}$ и $\tilde{Y} = \{0, 0; 0; 1, 0\}$.

Пункт а) теоремы является простым следствием формулы (2.11), так как в формуле для кривизны отсутствует первый блок слагаемых и задача сводится к нахождению экстремума диагональной квадратичной формы на единичной сфере.

Пункт б). Доказательство проведем в несколько этапов. А именно, разобьем все множество элементарных площадок векторов $\tilde{X}, \tilde{Y}$ касательных к $T_1(M^n, c)$ на 5 типов следующим образом:

а) горизонтальный тип: $X_2 = 0,\ Y_2 = 0$;

б) вертикальный тип: $X_1 = 0,\ Y_1 = 0$;

в) квазигоризонтальный тип: $Y_2 = 0$ или $X_2 = 0$;

г) квазивертикальный тип: $Y_1 = 0$ или $X_1 = 0$;

д) общий тип: $X_1 \neq 0, Y_1 \neq 0, X_2 \neq 0, Y_2 \neq 0$

Найдем, далее, наибольшее и наименьшее значение $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}}$ в направлении каждого из указанных типов площадок и, наконец, сравним полученные экстремумы между собой, найдем глобальный минимум и максимум секционной кривизны $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}}$ по всем возможным площадкам.

а) горизонтальный тип. Так как $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ нормированы, то из (2.14) следует, что

$$\|\tilde{X}\|^2 = |X_1|^2 + |X_2|^2 = |X_1|^2 = 1, \quad \|\tilde{Y}\|^2 = |Y_1|^2 + |Y_2|^2 = |Y_1|^2 = 1.$$

Поэтому формула (2.15) примет вид:

$$\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} = c - \frac{3c^2}{4}\Big(\big\langle \xi, X_1\big\rangle^2 + \big\langle \xi, Y_1\big\rangle^2\Big) = c - \frac{3c^2}{4}\Big(\cos^2\varphi + \cos^2\psi\Big),$$

где $\varphi = (\xi\,\hat{}\,X_1)$, $\psi = (\xi\,\hat{}\,Y_1)$.

Отсюда находим экстремальные значения:

$$\tilde{K} = c, \quad \tilde{K} = c - \frac{3c^2}{4} \tag{2.16}$$

б) вертикальный тип. В этом случае из формулы (2.15) находим

$$\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} = 1 \tag{2.17}$$

Рассмотрению оставшихся типов предпошлем доказательство того, что на площадках векторов горизонтальные проекции которых не ортогональны вектору ξ, экстремальные кривизны имеют только два значения:

$$\tilde{K} = c\Big(1 - \frac{3c}{4}\Big), \quad \tilde{K} = \frac{c^2}{4}.$$

Действительно, рассмотрим формулу Леммы (2.11) как функцию $2(2n-1)$ координат векторов элементарной площадки и будем искать экстремальные значения этой функции при условиях:

$$\varphi_1 \equiv \sum_{I=1}^{2n-1}(X^I)^2 - 1 = 0, \quad \varphi_2 \equiv \sum_{I=1}^{2n-1}(Y^I)^2 - 1 = 0, \quad \varphi_3 \equiv \sum_{I=1}^{2n-1} X^I Y^I = 0. \tag{2.18}$$

Пусть $\Phi = \tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} - \lambda\varphi_1 - \mu\varphi_2 - \nu\varphi_3$ – функция Лагранжа. Путем простого, но громоздкого вычисления найдем, что, если $\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0$ дает экстремум функции

Φ, то в точке $(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0)$

$$\sum_{I=1}^{2n-1} X^I \frac{\partial \Phi}{\partial X^I} = \tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} - \lambda = 0, \ \sum_{I=1}^{2n-1} X^I \frac{\partial \Phi}{\partial X^I} = \nu = 0, \ \sum_{I=1}^{2n-1} X^I \frac{\partial \Phi}{\partial Y^I} = \tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} - \mu = 0.$$

Это означает, что условный экстремум $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}}$ равен параметру λ или μ функции Лагранжа, причем в точке экстремума параметр ν равен 0.

Так как секционная кривизна зависит от площадки, определяемой данной парой векторов, то "экстремальную"пару можно так повернуть в "экстремальной плоскости что координаты этой пары векторов будут удовлетворять условиям (2.14):

$$\sum_{i=1}^{n} X^i Y^j = 0, \ \sum_{p=1}^{n-1} X^{n+p} Y^{n+p} = 0 \tag{2.19}$$

Рассмотрим теперь в точке экстремума два уравнения:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial X^n} = c\,(1 - \frac{3c}{4}) \sum\limits_{p=1}^{n-1} B^{np} Y_0^p + \frac{c^2}{4} \sum\limits_{p=1}^{n-1} B^{nn+p} Y_0^{n+p} - \lambda X_0^n = 0, \\ \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial Y^n} = c\,(1 - \frac{3c}{4}) \sum\limits_{p=1}^{n-1} B^{np} (X_0^p) + \frac{c^2}{4} \sum\limits_{p=1}^{n-1} B^{nn+p} (-X_0^n) - \mu Y_0^n = 0. \end{cases}$$

Распишем бивекторы через координаты и выпишем систему уравнений относительно X_0^n Y_0^n.

$$c\,(1 - \tfrac{3c}{4}) \sum_{p=1}^{n-1} (X_0^n Y_0^p - X_0^p Y_0^n) Y_0^p + \tfrac{c^2}{4} \sum_{p=1}^{n-1} (X_0^n Y_0^{n+p} - X_0^{n+p} Y_0^{n+p}) Y_0^{n+p} - \lambda X_0^n = 0,$$

$$c\,(1 - \tfrac{3c}{4}) \sum_{p=1}^{n-1} (X_0^n Y_0^p - X_0^p Y_0^n) X_0^p + \tfrac{c^2}{4} \sum_{p=1}^{n-1} (X_0^n Y_0^{n+p} - X_0^{n+p} Y_0^{n+p}) X_0^{n+p} + \mu Y_0^n = 0$$

$$X_0^n \Big[c\,(1 - \frac{3c}{4}) \sum_{p=1}^{n-1} (Y^p)^2 + \frac{c^2}{4} \sum_{p=1}^{n-1} (Y_0^{n+p})^2 - \lambda \Big] -$$
$$Y_0^n \Big[c(1 - \frac{3c}{4}) \sum_{p=1}^{n-1} X_0^p Y_0^p + \frac{c^2}{4} \sum_{p=1}^{n-1} X_0^{n+p} Y_0^{n+p} \Big] = 0$$

$$X_0^n\Big[c\,(1-\frac{3c}{4})\sum_{p=1}^{n-1}X_0^pY_0^p+\frac{c^2}{4}\sum_{p=1}^{n-1}X_0^{n+p}Y_0^{n+p}\Big]-$$
$$Y_0^n\Big[c(1-\frac{3c}{4})\sum_{p=1}^{n-1}(X_0^p)^2+\frac{c^2}{4}\sum_{p=1}^{n-1}(X_0^{n+p})^2-\mu\Big]=0$$

Воспользовавшись равенствами (2.18) и (2.19), запишем

$$X_0^n\Big[c\,(1-\frac{3c}{4})-c(1-\frac{3c}{4})(Y_0^n)^2-c\,(1-c)\sum_{p=1}^{n-1}(Y_0^{n+p})^2-\lambda\Big]+$$
$$Y_0^n c\,(1-\frac{3c}{4})X_0^nY_0^n=0,$$

$$X_0^n c\,(1-\frac{3c}{4})X_0^nY_0^n+$$
$$Y_0^n\Big[c\,(1-\frac{3c}{4})-c\,(1-\frac{3c}{4})(X_0^n)^2-c(1-c)\sum_{p=1}^{n-1}(X_0^{n+p})^2-\mu\Big]=0.$$

Приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned}X_0^n\Big[c\,(1-\tfrac{3c}{4})-c\,(1-c)|(Y_0)_v|^2-\lambda\Big]&=0,\\ Y_0^n\Big[c\,(1-\tfrac{3c}{4})-c\,(1-c)|(X_0)_v|^2-\mu\Big]&=0.\end{aligned}$$

Если $X_0^n\neq 0$ или $Y_0^n\neq 0$, то $\lambda=c\,(1-\frac{3c}{4})-c\,(1-c)|(Y_0)_v|^2$ или $\mu=c\,(1-\frac{3c}{4})-c\,(1-c)|(X_0)_v|^2$.

Таким образом, экстремальное значение кривизны $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}}$ линейно зависит от квадрата нормы вертикальной проекции вектора $\tilde{Y}_0$ или $\tilde{X}_0$. Следовательно, экстремальные значения $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}}$ будут:

$$\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}}=c\Big(1-\frac{3c}{4}\Big),\ \tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}}=\frac{c^2}{4}\tag{2.20}$$

Эти экстремумы найдены при условии, что X_0^n и Y_0^n одновременно не обращаются в 0.

Таким образом, все дальнейшее исследование имеет смысл проводить, если $X_0^n = 0,\ Y_0^n = 0$. Это означает, что

$$\langle X_1, \xi \rangle = 0,\ \langle Y_1, \xi \rangle = 0 \tag{2.21}$$

в) квазигоризонтальный тип $(Y_2 = 0)$**.** Формула (2.15) с учетом (2.21) примет вид:

$$\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} = c \mid X_1 \mid^2 \mid Y_1 \mid^2 + \frac{c^2}{4} \langle X_2, Y_1 \rangle^2.$$

Но так как $\mid Y_1 \mid = \|\tilde{Y}\|^2 = 1$, то $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} = c \mid X_1 \mid^2 + \frac{c^2}{4} \cos^2 \varphi \mid X_2 \mid^2$.

Поскольку $\mid X_1 \mid^2 + \mid X_2 \mid^2 = 1$, то полученное выражение можно рассматривать как квадратичную форму на единичной сфере. Отсюда находим два экстремальных значения $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}}$:

$$\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} = c,\ \tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} = \frac{c^2}{4} \tag{2.22}$$

г) квазивертикальный тип $(Y_1 = 0)$**.** Исследование дословно повторяет исследование квазигоризонтального типа. В результате найдем еще два экстремума: $\tilde{K} = 1,\ \tilde{K} = \frac{c^2}{4}$.

д) общий тип. Покажем, что исследование на экстремум $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}}$ при любом n сводится к исследованию на экстремум $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}}$ при $n = 3$. Для этого еще более специализируем базис касательного к M^n пространства. А именно, пусть

$$E_n = \xi, \quad E_1 = \frac{X_2}{|X_2|}, \quad E_2 = \frac{Y_2}{\|Y_2|},$$

а $E_3,\ E_4, \ldots, E_{n-1}$ произвольное дополнение $\{E_1, E_2, E_n\}$ до ортонормированного базиса $T_q M^n$. Тогда

$$X_2 = \{X^{n+1}, \ldots; 0\},\ Y_2 = \{0, Y^{n+2}, 0, \ldots; 0\},$$

где, очевидно, $X^{n+1} = |X_2|, \quad Y^{n+2} = |Y_2|$, и $X_1 = X^1 E_1 + X^2 E_2 + \sum\limits_{i=3}^{n-1} X^i E_i + X^n E_n, \quad Y_1 = Y^1 E_1 + Y^2 E_2 + \sum\limits_{i=3}^{n-1} Y^i E_i + Y^n E_n.$

В этих условиях $\sum\limits_{p=1}^{q}\sum\limits_{q=2}^{n-1}(B^{n+p\,n+q})^2 = (B^{n+1n+2})^2$, $\sum\limits_{p=1}^{q}\sum\limits_{q=2}^{n-1}B^{pq}\cdot B^{n+p\,n+q} = B^{12}\cdot B^{n+1\,n+2}$, $\sum\limits_{p=1}^{n-1}B^{p\,n+p} = B^{1\,n+1}+B^{2\,n+2}$. Поэтому формула (2.11) примет вид:

$$\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} = c\,(B^{12})^2 + c\,(3-c)B^{12}B^{n+1n+2} + (B^{n+1n+2})^2 + \frac{c^2}{4}(B^{1n+1}+B^{2n+2})^2 + c\left(1-\frac{3c}{4}\right)\Big[(B^{n1})^2+(B^{n2})^2\Big] + \frac{c^2}{4}\Big[(B^{nn+1})^2+(B^{nn+2})^2\Big] + c\sum_{p=1}^{q}\sum_{q=3}^{n-1}(B^{pq})^2 + c\left(1-\frac{3c}{4}\right)\sum_{p=3}^{n-1}(B^{np})^2 + \frac{c^2}{4}\sum_{p=3}^{n-1}(B^{nn+p})^2 \quad (2.23)$$

Пусть $\tilde{K}_{max}$ означает максимум $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}}$ при любых $\tilde{X},\tilde{Y}$ для данного K, т.е. при фиксированном K выполняется неравенство:

$$\tilde{K}_{max} - \tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} \geq 0$$

для любой ортонормированной пары $\tilde{X},\tilde{Y}\in T_{(q,\xi)}T_1M^n$. Последнее неравенство с учетом формул (2.12) и (2.23) может быть переписано в виде:

$$\tilde{K}_{max}\sum_{I=1}^{J}\sum_{J=2}^{2n-1}(B^{IJ})^2 - \tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} = \Big\{\tilde{K}_{max}[(B^{12})^2+(B^{1n+1})^2+(B^{2n+2})^2+ + (B^{n+1n+2})^2+(B^{1n})^2+(B^{2n})^2+(B^{nn+1})^2+(B^{nn+2})^2] - - [c(B^{12})^2 + c(3-c)B^{12}B^{n+1n+2} + (B^{n+1n+2})^2 + \frac{c^2}{4}(B^{1n+1}+B^{2n+2})^2 + + c\left(1-\frac{3c}{4}\right)[(B^{1n})^2+(B^{2n})^2] + \frac{c^2}{4}[(B^{nn+1})^2+(B^{nn+2})^2]\Big\} + (\tilde{K}_{max}-K)\sum_{p=1}^{q}\sum_{q=3}^{n-1}(B^{pq})^2 + [\tilde{K}_{max} - c\left(1-\frac{3c}{4}\right)]\sum_{p=3}^{n-1}(B^{np})^2 + \left(\tilde{K}_{max}-\frac{c^2}{4}\right)\sum_{p=3}^{n-1}(B^{nn+p})^2 + \tilde{K}_{max}\sum_{*}(B^{IY})^2 \geq 0 \quad (2.24)$$

В последней сумме $*$ означает суммирование по всем оставшимся индексам.

Поскольку бивектор B^{IJ} в этой формуле подразумевается произвольным, то легко проверить, что при его соответствующем выборе можно обратить в нуль (при $n \geq 3$) все группы слагаемых, кроме какой-либо одной. Таким образом $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}}$ должна обеспечивать неотрицательность каждой из групп слагаемых. Это означает, что

$$\tilde{K}_{max} \geq max\left\{c, c\Big(1-\frac{3c}{4}\Big),\ \frac{c^2}{4}, 0\right\} \tag{2.25}$$

а так же $\tilde{K}_{max}$ должна обеспечивать неотрицательность группы слагаемых, отмеченных в формуле (2.24) фигурной скобкой. В свою очередь, эта группа слагаемых соответствует пятимерному касательному к $T_1(M^n, c)$ подпространству, натянутому на векторы $E_1, E_2, E_n, E_{n+1}, E_{n+2}$ два из которых горизонтальны (E_1, E_2), два вертикальные (E_{n+1}, E_{n+2}) и $E_n = \xi$. Другими словами, эта группа слагаемых соответствует некоторому $T_1(M^3, c) \subset T_1(M^n, c)$. Найденные экстремумы для площадок горизонтального и квазигоризонтального типа удовлетворяют неравенству (2.25). Наша задача тем самым сводится к нахождению экстремумов $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}}$ на $T_1(M^3, c)$ и сравнения их с уже найденными.

Аналогичное рассуждение можно привести для минимума $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}}$. Различие будет лишь в том, что $\tilde{K}_{min}$ на $T_1(M^3, c)$ должно будет удовлетворять другому "априорному" неравенству:

$$\tilde{K}_{min} \leq \min\left\{c\Big(1-\frac{3c}{4}\Big), 0\right\} \tag{2.26}$$

Итак, приступим к изучению экстремумов $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}}$ на $T_1(M^3, c)$ при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} &X_1 \neq 0,\ X_2 \neq 0,\ Y_1 \neq 0,\ Y_2 \neq 0, \\ &\big\langle X_1, \xi\big\rangle = \big\langle Y_1, \xi\big\rangle = \big\langle X_2, \xi\big\rangle = \big\langle Y_2, \xi\big\rangle = \big\langle X_2, Y_2\big\rangle = \big\langle X_1, Y_1\big\rangle = 0 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Введем в рассмотрение единичные векторы:

$$X = \frac{X_1}{|X_1|}, \quad Y = \frac{Y_1}{|Y_1|}, \quad \eta = \frac{X_2}{|X_2|}, \quad \zeta = \frac{Y_2}{|Y_2|}.$$

Так как выполнены равенства (2.27) и размерность касательного к M^3 пространства равна 3, то взаимное расположение векторов X, Y, η, ζ, ξ может иметь два варианта, которые отличаются ориентацией репера (X, Y, ξ). При этом ориентация репера (η, ζ, ξ) может всегда считаться правой. Так как в случае постоянства кривизны базового многообразия значение $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}}$, вычисленное по формуле 1.15, не изменяется при замене ξ на $-\xi$. Учитывая условия (2.27), формула (2.15) примет вид:

$$\begin{gathered}\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} = c|X_1|^2|Y_1|^2 + c(3-c)(\xi, X, Y)|X_1||Y_1||X_2||Y_2| + \\ +|X_2|^2|Y_2|^2 + \tfrac{c^2}{4}\Big(\langle X, \zeta\rangle|X_1||Y_2| - \langle Y, \eta\rangle|X_2||Y_1|\Big)^2,\end{gathered} \tag{2.28}$$

где (ξ, X, Y) – смешанное произведение трех векторов.

Вариант A: $(\xi, X, Y) = +1$. В силу единичности векторов $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ имеем условия: $|X_1|^2 + |X_2|^2 = 1$, $|Y_1|^2 + |Y_2|^2 = 1$. Они позволяют ввести в рассмотрение параметры α и β следующим образом:

$$|X_1| = \cos\alpha,\ |X_2| = \sin\alpha,\ |Y_2| = \sin\beta,\ \alpha, \beta \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) \tag{2.29}$$

Наконец, через φ обозначим угол между векторами X и η. Тогда формула (19) примет вид:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} &= c\cos^2\alpha\cos^2\beta + \frac{1}{4}c(3-c)\sin 2\alpha\sin 2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \\ &+ \frac{c^2}{4}\sin^2\varphi\sin^2(\alpha+\beta) = \frac{1}{4}\Big[(c+1) + (c-1)\cos 2\alpha + \\ &+ (c-1)\cos 2\beta + (c+1)\cos 2\alpha\cos 2\beta + c(3-c)\sin 2\alpha\sin 2\beta + \\ &+ c^2\sin^2\varphi\sin^2(\alpha+\beta)\Big]\end{aligned} \tag{2.30}$$

Таким образом, для решения нашей задачи достаточно исследовать последнюю функцию переменных параметров α, β, φ на экстремум, принимая c в качестве фиксированного параметра.

В дальнейшем, для сокращения записи вместо $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}}$ будем употреблять просто $\tilde{K}$. Заметим, что $\tilde{K}$ тем больше, чем больше $\sin^2\varphi$. Таким образом, максимум $\tilde{K}$ нужно искать при условии $\sin^2\varphi = 1$, а минимум при $\sin^2\varphi = 0$. Выпишем необходимые условия экстремума $\tilde{K}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \alpha} = {} & \frac{1}{4}\Big[-2(c-1)\sin 2\alpha - 2(c+1)\sin 2\alpha\cos 2\beta + \\
& 2c(3-c)\cos 2\alpha\sin 2\beta + c^2\sin^2\varphi\sin 2(\alpha+\beta)\Big] = 0 \\
\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \beta} = {} & \frac{1}{4}\Big[-2(c-1)\sin 2\beta - 2(c+1)\cos 2\alpha\sin 2\beta + \\
& 2c(3-c)\sin 2\alpha\cos 2\beta + c^2\sin^2\varphi\sin 2(\alpha+\beta)\Big] = 0 \\
\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \varphi} = {} & \frac{c^2}{4}\sin 2\varphi\sin^2(\alpha+\beta) = 0
\end{aligned}$$

Из последнего уравнения системы следует, что $\sin 2\varphi = 0$ $(\sin(\alpha+\beta) \neq 0)$ в силу условия (2.29). Отсюда следует, что либо $\sin^2\varphi = 1$, либо $\sin^2\varphi = 0$. Из первых двух уравнений найдем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \beta} = {} & \frac{1}{2}\Big[-(c-1)(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + (c\,(3-c) - (c+1))\times \\
& (\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha) + c^2\sin^2\varphi\sin 2(\alpha+\beta)\Big] = 0 \\
\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \beta} = {} & \frac{1}{2}\Big[-(c-1)(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) - (c\,(3-c) + (c+1))\times \\
& (\sin 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\beta\cos 2\alpha)\Big] = 0
\end{aligned}$$

После тригонометрических преобразований получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}
\sin(\alpha+\beta)\Big[(c-1)\cos(\alpha-\beta) + (c^2\cos^2\varphi - 2c + 1)\cos(\alpha+\beta)\Big] = 0 \\
\sin(\alpha-\beta)\Big[(c-1)\cos(\alpha+\beta) + (-c^2 + 4c + 1)\cos(\alpha+\beta)\Big] = 0
\end{cases}$$

Поскольку $(\alpha, \beta) \in (0, \frac{\pi}{2})$, то следуют два варианта:

$$i)\begin{cases}
\sin(\alpha-\beta) = 0 \\
(c-1)\cos(\alpha-\beta) + (c^2\cos^2\varphi - 2c + 1)\cos(\alpha+\beta) = 0
\end{cases}$$

$$ii)\begin{cases}
(c-1)\cos(\alpha-\beta) + (c^2\cos^2\varphi - 2c + 1)\cos(\alpha+\beta) = 0 \\
(-c^2 + 4c + 1)\cos(\alpha-\beta) + (c-1)\cos(\alpha+\beta) = 0
\end{cases}$$

Вариант i). Ввиду (2.29) из первого уравнения следует, что $\alpha = \beta$. Тогда из второго уравнения найдем

$$\cos 2\beta = \frac{c-1}{2c-1-c^2\cos^2\varphi} \tag{2.31}$$

Решение существует при условии

$$\left|\frac{c-1}{2c-1-c^2\cos^2\varphi}\right| \le 1 \tag{2.32}$$

Так как $\alpha=\beta$ и $\sin^2 2\beta = 1-\cos^2 2\beta$, то

$$\tilde{K} = \tfrac{1}{4}\Big[c+1+2(c-1)\cos 2\beta + (c+1)\cos^2 2\beta + c(3-c)\sin^2 2\beta +$$
$$+c^2\sin^2\varphi\sin^2 2\beta\Big] = \tfrac{1}{4}\Big[c+1+2(c-1)\cos 2\beta - (2c-1-c^2\cos^2\varphi)\cos^2 2\beta +$$
$$+c^2\sin^2\varphi\Big] = \tfrac{1}{4}\Big[-c^2+4c+1+\tfrac{(c-1)^2}{2c-1-c^2\cos^2\varphi}+c^2\sin^2\varphi\Big]$$

Отсюда находим наименьшее значение $\tilde{K}$ при $\sin^2\varphi = 0$:

$$\tilde{K} = c\left(1-\frac{c}{4}\right) \qquad c<0,\ c\ge 2 \tag{2.33}$$

и наибольшее значение $\tilde{K}$ при $\sin^2\varphi = 1$:

$$\tilde{K} = c + \frac{c^2}{4(2c-1)} \quad c\le 0, \quad c\ge \frac{2}{3} \tag{2.34}$$

Вариант ii). Будем решать раздельно две системы этого варианта при $\sin^2\varphi = 0$ и $\sin^2\varphi = 1$. Если $\sin^2\varphi = 0$, то

$$\begin{cases} (c-1)\cos(\alpha-\beta) + (c-1)\cos(\alpha+\beta) = 0, \\ (-c^2+4c+1)\cos(\alpha-\beta) + (c-1)\cos(\alpha+\beta) = 0. \end{cases}$$

Система имеет решение, если $(c-1)^2 - (-c^2+4c+1)(c-1) = 0$, т.е. при $c = 0, 1, 4$. Случаи $c=0$ и $c=1$ тривиальны. При $c=4$ имеем: $\cos(\alpha-\beta) + 3\cos(\alpha+\beta) = 0$. Отсюда найдем, что $2\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 0$. В то же время, при $c=4$ и $\sin^2\varphi = 0$ формула (2.30) примет вид: $\tilde{K} = (2\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2$. Таким образом, находим наименьшее значение $\tilde{K}$:

$$\tilde{K} = 0, \qquad c = 4. \tag{2.35}$$

Если $\sin^2\varphi = 1$, то

$$\begin{cases} (c-1)\cos(\alpha-\beta) - (2c-1)\cos(\alpha+\beta) = 0, \\ (-c^2+4c+1)\cos(\alpha-\beta) + (c-1)\cos(\alpha+\beta) = 0 \end{cases}$$

Решение системы существует, если $(c-1)^2 + (2c-1)(-c^2+4c+1) = 0$. Последнее уравнение приводится к виду $-2c\,(c^2-5c+2) = 0$. Решение $c = 0$ тривиально. Пусть c удовлетворяет уравнению

$$c^2 - 5c + 2 = 0 \tag{2.36}$$

Тогда второе уравнение системы есть следствие первого и после тригонометрических преобразований из первого уравнения получим:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{3c-2}{c}\sin\alpha\sin\beta.$$

Отсюда,

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{2(c-1)}{c}\sin\alpha\sin\beta, \quad \sin^2(\alpha+\beta) = 1 - \frac{4(c-1)^2}{c^2}\sin^2\alpha\sin^2\beta.$$

Подставляя последние выражения в (2.30), получим:

$$\tilde{K} = \frac{c^2}{4} + \frac{2}{c}(-2c+1)(c^2-5c+2)\sin^2\alpha\sin^2\beta$$

Так как c удовлетворяет (2.36), то отсюда получаем максимальное значение:

$$\tilde{K} = \frac{c^2}{4}, \quad c = \frac{(5\pm\sqrt{17})}{2} \tag{2.37}$$

Вариант B: $(\xi, X, Y) = -1$. Обозначим через φ угол между векторами Y и η, формулу для $\tilde{K}$ приведем к виду:

$$\tilde{K} = \frac{1}{4}\Big[c+1+(c-1)\cos 2\alpha + (c-1)\cos 2\beta + (c+1)\cos 2\alpha\cos 2\beta -$$
$$c(3-c)\sin 2\alpha\sin 2\beta + c^2\cos^2\varphi\sin^2(\alpha-\beta)\Big]. \tag{2.38}$$

Здесь $\tilde{K}$ тем больше, чем больше $\cos^2\varphi$. Таким образом, максимум $\tilde{K}$ нужно искать при $\cos^2\varphi = 1$, а минимум при $\cos^2\varphi = 0$, за исключением варианта

$\alpha = \beta$. Аналогично варианту А система

$$\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \beta} = 0$$

приводится к виду

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta)\Big[-(c-1)\cos(\alpha-\beta) + (c^2-4c-1)\cos(\alpha+\beta)\Big] = 0, \\ \sin(\alpha-\beta)\Big[-(c^2\sin^2\varphi - 2c+1)\cos(\alpha-\beta) - (c-1)\cos(\alpha+\beta)\Big] = 0. \end{cases}$$

Имеем два варианта:

$$i) \begin{cases} \sin(\alpha-\beta) = 0, \\ -(c-1)\cos(\alpha-\beta) + (c^2-4c-1)\cos(\alpha+\beta) = 0; \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} -(c-1)\cos(\alpha-\beta) + (c^2-4c-1)\cos(\alpha+\beta) = 0, \\ (c^2\sin^2\varphi - 2c+1)\cos(\alpha-\beta) - (c-1)\cos(\alpha+\beta) = 0. \end{cases}$$

Вариант i). Из первого уравнения системы с учетом (2.29) следует, что $\alpha = \beta$, а из второго находим

$$\cos 2\beta = \frac{c-1}{c^2-4c-1} \quad . \tag{2.39}$$

Решение существует, при условии, что

$$\Big|\frac{c-1}{c^2-4c-1}\Big| \le 1 \quad . \tag{2.40}$$

Используя (2.39), найдем, что

$$\sin^2\beta = \frac{1}{2}\frac{c^2-5c}{c^2-4c-1} \quad . \tag{2.41}$$

При $\alpha = \beta$ формула (2.38) преобразуется к виду:

$$\tilde{K} = c\cos^4\beta - c\,(3-c)\sin^2\beta\cos^2\beta + \sin^4\beta =$$
$$(-c^2+4c+1)\sin^4\beta + (c^2-5c)\sin^2\beta + c.$$

Подставляя в последнее выражение значение $\sin^2\beta$ из (2.41), найдем

$$\tilde{K} = c + \frac{c^2(c-5)^2}{4(c^2-4c-1)} \tag{2.42}$$

Условие существования (2.40) дает

$$c \le \frac{(3-\sqrt{17})}{2},\ 0 \le c \le \frac{(3+\sqrt{17})}{2},\ c \ge 5.$$

Вариант ii). Будем решать раздельно две системы этого варианта при $\cos^2\varphi = 1$ и $\cos^2\varphi = 0$. Если $\cos^2\varphi = 1$, то система имеет вид

$$\begin{cases} -(c-1)\cos(\alpha-\beta) + (c^2-4c-1)\cos(\alpha+\beta) = 0 \\ (-2c+1)\cos(\alpha-\beta) + (c-1)\cos(\alpha+\beta) = 0 \end{cases}.$$

Решение существует, если $(c-1)^2 + (c^2-4c-1)(-2c+1) = 0$, т.е., если c удовлетворяет уравнению $-2c\,(c^2-5c+2) = 0$. Нетрудно проверить, что дальнейшее исследование приводит к последнему максимуму варианта **(A)**, а именно

$$\tilde{K} = \frac{c^2}{4} \quad \text{при} \quad c = \frac{(5\pm\sqrt{17})}{2} \tag{2.43}$$

Если $\cos^2\varphi = 1$, то система имеет вид

$$\begin{cases} -(c-1)\cos(\alpha-\beta) + (c^2-4c-1)\cos(\alpha+\beta) = 0, \\ (c-1)^2\cos(\alpha-\beta) + (c-1)\cos(\alpha+\beta) = 0. \end{cases}$$

Решение системы существует, если $(c-1)^2 + (c-1)^2(c^2-4c-1) = 0$, т.е., если $c\,(c-1)^2(c-4) = 0$.

Случаи $c = 0$ и $c = 1$ уже исследованы ранее. Пусть $c = 4$. Тогда $3\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta) = 0$. Отсюда найдем, что $2\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta = 0$. В то же время, при $c = 4$ и $\cos\varphi = 0$ формула (29) примет вид:

$$\tilde{K} = (2\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)^2$$

Таким образом, находим наименьшее значение $\tilde{K} = 0$ при $c = 4$.

Сравнение на соответствующих промежутках экстремальных значений

$\tilde{K}$, задаваемых формулами (2.16), (2.17), (2.20), (2.22), (2.26), (2.33), (2.34), (2.42) дает сформулированный в теореме результат.

В заключение, укажем примеры тех элементарных площадок, на которых достигаются экстремальные кривизны:

- $\tilde{K} = c + \frac{c^2(c-5)^2}{4(c^2-4c-1)}$, если

$$\tilde{X} = \left\{\sqrt{\frac{c^2-3c-2}{2(c^2-4c-1)}}, 0; 0; 0, \sqrt{\frac{c^2-5c}{2(c^2-4c-1)}}\right\},$$

$$\tilde{Y} = \left\{0, \sqrt{\frac{c^2-3c-2}{2(c^2-4c-1)}}; 0; \sqrt{\frac{c^2-5c}{2(c^2-4c-1)}}, 0\right\};$$

- $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} = 1$, если $\tilde{X} = \{0, 0; 0; 0, 1\}, \quad \tilde{Y} = \{0, 0; 0; 1, 0\}$;
- $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} = c + \frac{c^2}{4(2c-1)}$, если

$$\tilde{X} = \left\{\sqrt{\frac{3c-2}{2(2c-1)}}; 0; 0; 0, \sqrt{\frac{c}{2(2c-1)}}\right\},$$

$$\tilde{Y} = \left\{0, \sqrt{\frac{3c-2}{2(2c-1)}}; 0; \sqrt{\frac{c}{2(2c-1)}}, 0\}\right\};$$

- $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} = \frac{c^2}{4}$, если $\tilde{X} = \{0, 0; 1; 0, 0\}, \quad \tilde{Y} = \{0, 0; 0; 1, 0\}$;
- $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} = c\,(1 - \frac{3c}{4})$, если $\tilde{X} = \{0, 0; 1; 0, 0\}, \quad \tilde{Y} = \{0, 1; 0; 0, 0\}$;
- $\tilde{K}_{\tilde{X}\tilde{Y}} = 0$, если $\tilde{X} = \{1, 0; 0; 0, 0\}, \quad \tilde{Y} = \{0, 0; 0; 0, 1\}$;

$\blacksquare$

Доказанная теорема может быть легко переформулирована для расслоения векторов фиксированной длины r над пространством постоянной кривизны. Для этого достаточно заметить, что кривизна $T_r(M^n, c)$ сводится к кривизне $T_1(M^n, r^2c)$.

2.3. Выводы

В разделе рассмотрены вопросы внутренней геометрии сферического касательного расслоения, связанные с понятием индекса дефектности риманова многообразия. Для общих римановых многообразий исчерпывающий результат получен в размерности 2. Доказано, что

- единичное касательное расслоение T_1M^2 допускает сильно-сферическое распределение только и только тогда, когда M^2 есть пространство постоянной кривизны $K > 0$. При этом, сильно-сферическое распределение либо трехмерно и совпадает со всем касательным пространством (при $K = 1$), либо одномерно и совпадает с вертикальным распределением (при $K \neq 1$).

Этот результат обосновывает исследование единичного касательного расслоения пространств постоянной кривизны в размерности $n \geq 3$ и исключительность чисто вертикального сильно сферического распределения. Единичная сфера S^n выделяется тем, что ее единичное расслоение T_1S^n с метрикой Сасаки является Сасакиевой пространственной формой с характеристическим векторным полем ξ^h. Секционная кривизна T_1S^n в направлении площадок, содержащих ξ^h, постоянна и равна $1/4$. Это означает, что ξ^h определяет одномерное сильно сферическое распределение на T_1S^n. Мы доказываем, что верно и обратное:

- единичное касательное расслоение с метрикой Сасаки над пространством постоянной кривизны допускает сильно сферическое невертикальное распределение тогда и только тогда, когда базовое многообразие изометрично единичной сфере, распределение горизонтально и совпадает с характеристическим полем Сасакиевой структуры на T_1S^n.

- Вертикального сильно сферического распределения на пространствах неотрицательной секционной кривизны не существует.

Секционная кривизна Сасакиева многообразия T_1S^n при $n \geq 3$ неотрицательна и лежит в пределах $[0, 5/4]$. Мы доказываем, что в общем случае при $n \neq 2, 4, 8$ нельзя ожидать положительности кривизны метрики Сасаки T_1M^n. Неотрицательность секционной кривизны $T_1(M^n, c)$ при $n \geq 3$ наблюдается для пространств постоянной кривизны при $c \in [0, 4/3]$. Более того, *мы находим точные границы изменения секционной кривизны метрики Сасаки* $T_1(M^n, c)$ *для всех значений* c.

РАЗДЕЛ 3

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ И ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ

В данном разделе решается задача характеризации проекций геодезических линий (единичного) касательного расслоения с метрикой Сасаки над классическими пространственными формами: пространством постоянной кривизны (M^n, c), комплексным проективным пространством CP^n и кватернионным проективным пространством HP^n. В связи с комплексным проективным пространством, предложена деформация метрики Сасаки касательных сфер в направлении поля Хопфа на них и исследовано влияние такой деформации на свойства проекций геодезических. Геодезические линии в расслоении описываются векторными полями вдоль кривых на базе. В связи с этим, в разделе рассмотрены задачи геометрии подмногообразий в (единичном) касательном расслоении, порожденных векторным полем вдоль подмногообразия в базе. В частности, ищутся условия существования вполне геодезических подмногообразий такого типа. Раздел содержит результаты, принадлежащие автору и опубликованные в работах [101], [103], [109], [110], [113], [118].

3.1. Геодезические в касательном расслоении над пространственными формами

Сато К. [68] и Сасаки С. [67] доказали что проекция на базу любой невертикальной геодезической на касательном или касательном сферическом расслоении вещественной пространственной формы $M^n(c)$ – кривая с постоянными кривизнами k_1 и k_2 и нулевыми кривизнами $k_3, \dots, k_{n-1}$. Надь П. [60] существенно обобщил этот результат. Он рассматривал случай общего локально симметричного базового многообразия и доказал что геодезические кривизны проекции любой (невертикальной) геодезической линии на касательном сферическом расслоении сферы постоянны. Однако было бы интересно найти более ясное описание проекций геодезических для случая сферического касательного расслоения классических симметрических пространств ранга 1. В этой главе мы решаем эту задачу для случая касательного (сферического) расслоение почти всех классический локально симметрических пространств, а именно *сферы, комплексного и кватернионного проективных пространств и их некомпактный двойственных* с единой точки зрения, используя *рекуррентные свойства* степеней оператора кривизны этих пространств. Этот подход позволяет дать также единое доказательство утверждений, доказанных в [67], [68] и [101]

Пусть $(u^1, \dots, u^n; \xi^1, \dots, \xi^n)$ – естественные индуцированные координаты на TM^n. Относительно естественной системы координаты, каждая кривая Γ на TM^n может быть представлена как

$$\Gamma(\sigma) = \Big\{u^1(\sigma) \dots, u^n(\sigma); \xi^1(\sigma), \dots, \xi^n(\sigma)\Big\}$$

относительно параметра длин дуги σ и может интерпретироваться как векторное поле $\xi(\sigma) = \xi^1(\sigma)\partial/\partial u^1 + \dots + \xi^n(\sigma)\partial/\partial u^n$ вдоль *проекции* кривой $\gamma = \pi \circ \Gamma = (u^1(\sigma), \dots, u^n(\sigma))$. Если ξ - *единичное* векторное поле, то Γ лежит в T_1M^n и представляет произвольную кривую в T_1M^n.

Линейный элемент метрики Сасаки на TM и T_1M имеет вид

$$d\sigma^2 = ds^2 + |D\xi|^2, \tag{3.1}$$

где ds^2 – линейный элемент базы, а $D\xi$ – ковариантный дифференциал (единичного) вектора ξ. Обозначим $(')$ ковариантную производная вдоль γ относительно параметра σ. Тогда Γ - геодезическая линия на TM^n или T_1M^n если

γ и ξ удовлетворяют соответственно системе уравнений

$$TM^n: \begin{cases} \gamma'' = R_{\xi'\xi}\gamma', \\ \xi'' = 0; \end{cases} \qquad T_1M^n: \begin{cases} \gamma'' = R_{\xi'\xi}\gamma', \\ \xi'' = -\rho^2\xi, \end{cases} \tag{3.2}$$

где $\rho^2 = |\xi'|^2$ и $R_{\xi'\xi}$ - *оператор кривизны* M^n построенный на бивекторе $\xi' \wedge \xi$.

Из (3.2) следует, что $\rho = const$ в обоих случаях. Обозначим через s натуральный параметр γ. Тогда из (3.1) следует, что

$$\frac{ds}{d\sigma} = \sqrt{1-\rho^2}, \tag{3.3}$$

так что $0 \leq \rho \leq 1$. Согласно последнему неравенству, набор геодезических TM^n и T_1M^n может быть разбит на 3 класса, а именно,

- *горизонтальные* геодезические ($\rho = 0$), порожденные параллельными (единичными) векторными полями вдоль геодезических на базовом многообразии;
- *вертикальные* геодезические ($\rho = 1$) представленные геодезическими на отдельном слое;
- *наклонные* геодезические, соответствующие $0 < \rho < 1$.

В дальнейшем мы рассмотрим свойства проекций наклонных геодезических.

Лемма 3.1 *Пусть (M^n, g) локально симметричное риманово многообразие и R_{XY} его оператор кривизны Пусть $\gamma = \pi \circ \Gamma$ – проекция геодезической линии TM^n или T_1M^n на базовое пространство. Тогда для производных γ порядка p мы имеем*

$$\gamma^{(p)} = R^{p-1}_{\xi'\xi}\gamma' = R_{\xi'\xi}\gamma^{(p-1)}$$

и как следствие все геодезические кривизны γ постоянны.

Доказательство следует из параллелизма тензора кривизны M^n и уравнения (3.2). Кроме того, из очевидного тождества $\left\langle \gamma^{(p)}, \gamma^{(p-1)} \right\rangle \equiv 0$ для всех $p > 1$, мы заключаем что $|\gamma^{(p)}| = const$ для всех $p > 1$ и поэтому, по индукции, все геодезические кривизны γ постоянны.

Пусть $(M^n(c), g)$ – риманово многообразие постоянной кривизны c. Обозначим через $(M^{2n}(c); J; g)$ риманово многообразие с комплексной структурой J постоянной голоморфной кривизны c и $(M^{4n}(c); J_1, J_2, J_3; g)$ риманово многообразие с кватернионной структурой (J_1, J_2, J_3) постоянной кватернионной кривизны c. Для краткости, обозначим $\mathcal{M}(c)$ одну из этих пространственных форм, отвечающую стандартной метрике и будем обращаться к $\mathcal{M}(c)$ просто как к пространственной форме постоянной кривизны c. Результат составляет следующее утверждение.

Теорема 3.2 *Пусть $\mathcal{M}(c)$ – пространственная форма постоянной кривизны $c \neq 0$. Пусть Γ – не вертикальная геодезическая линия на касательном или касательном сферическом расслоении над $\mathcal{M}(c)$. Пусть $\gamma = \pi \circ \Gamma$ – проекция Γ на $\mathcal{M}(c)$. Тогда геодезические кривизны кривой γ постоянны и*

(a) $k_3 = \cdots = k_{n-1} = 0$ для вещественной пространственной формы;

(b) $k_6 = \cdots = k_{2n-1} = 0$ для комплексной пространственной формы;

(c) $k_{10} = \cdots = k_{4n-1} = 0$ для кватернионной пространственной формы.

Как заметил А. А. Борисенко, результат Теоремы 3.2 может быть выраженный в более ясных геометрических терминах: *спроектированная кривая $\gamma = \pi \circ \Gamma$ лежит на вполне геодезическом S^3 или H^3, на вполне геодезическом CP^3 или CH^3 и на вполне геодезическом QP^3 или QH^3 для вещественной, комплексной и кватернионной пространственной формы соответственно.* Эти утверждения могут быть получены из (3.6), (3.10) и (3.14).

Доказательство Теоремы 3.2 базируется на рекуррентном свойстве степеней оператора кривизны рассматриваемых пространств, доказанных в [109]. Пусть R_{XY} - оператор кривизны $\mathcal{M}(c)$. Определим степень оператора кривизны R^p_{XY} рекуррентно следующим образом: $R^p_{XY}Z = R^{p-1}_{XY}(R_{XY}Z)\ \ p > 1$. Основной инструмент для наших рассмотрений заложен в цепи лемм.

Лемма 3.3 *Пусть R_{XY} оператор кривизны вещественной пространственной формы $(M^n(c), g)$. Тогда для любых X и Y*

$$R^p_{XY} = \begin{cases} (-b^2c^2)^{s-1}R_{XY} \text{ для } p=2s\text{-}1 \\ \\ (-b^2c^2)^{s-1}R^2_{XY} \text{ для } p=2s, \end{cases} \quad s \geq 1$$

где $b = |X \wedge Y| = const$ - норма бивектора $X \wedge Y$.

Доказательство. Оператор кривизны R_{XY} вещественной пространственной формы $(M^n(c), g)$ имеет следующее выражение

$$R_{XY}Z = c\Big(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y\Big).$$

Тогда

$$\begin{aligned} R^2_{XY}Z = c\Big(\langle Y, R_{XY}Z\rangle X - \langle X, R_{XY}Z\rangle Y\Big) = \\ c^2\Big(\Big\langle Y, \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y\Big\rangle X - \Big\langle X, \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y\Big\rangle Y\Big) = \\ c^2\Big(\langle Y, Z\rangle\langle X, Y\rangle X - \langle X, Z\rangle|Y|^2X - \langle Y, Z\rangle|X|^2Y + \langle X, Z\rangle\langle X, Y\rangle Y\Big) = \\ c^2\Big(\langle Y, Z\rangle\Big(\langle X, Y\rangle X - |X|^2Y\Big) + \langle X, Z\rangle\Big(\langle X, Y\rangle Y - |Y|^2X\Big)\Big) = \\ c\Big(\langle Y, Z\rangle R_{XY}X + \langle X, Z\rangle R_{YX}Y\Big). \end{aligned}$$

Поэтому,

$$R^3_{XY}Z = c\Big[\big\langle Y, R_{XY}Z\big\rangle R_{XY}X + \big\langle X, R_{XY}Z\big\rangle R_{YX}Y\Big] =$$
$$c^3\Big[\Big(\big\langle Y, Z\big\rangle\big\langle X, Y\big\rangle - \big\langle X, Z\big\rangle|Y|^2\Big)\Big(\big\langle X, Y\big\rangle X - |X|^2Y\Big) +$$
$$\Big(\big\langle Y, Z\big\rangle|X|^2 - \big\langle X, Z\big\rangle\big\langle X, Y\big\rangle\Big)\Big(\big\langle X, Y\big\rangle Y - |Y|^2X\Big)\Big] =$$
$$c^3\Big[-\big\langle Y, Z\big\rangle X\Big(|X|^2|Y|^2 - \big\langle X, Y\big\rangle^2\Big) + \big\langle X, Z\big\rangle Y\Big(|X|^2|Y|^2 - \big\langle X, Y\big\rangle^2\Big)\Big] =$$
$$-c^2b^2R_{XY}Z,$$

где, очевидно, $b^2 = |X|^2|Y|^2 - \big\langle X, Y\big\rangle^2$ - квадрат нормы $X \wedge Y$. Теперь мы можем найти другие степени для R_{XY} индуктивно.

■

Лемма 3.4 *Пусть R_{XY} – оператор кривизны неплоской комплексной пространственной формы $(M^n(c); J; g)$. Обозначим $b = |X \wedge Y|$ норму бивектора $X \wedge Y$ и $m = \big\langle X, JY\big\rangle$. Тогда для любых X и Y*

$$R^p_{XY} = \begin{cases} \mathrm{Lin}\,(JR^2_{XY},\ R_{XY},\ J\,) \text{ для } p=2s\text{-}1 \\ \\ \mathrm{Lin}\,(R^2_{XY},\ JR_{XY},\ E\,) \text{ для } p=2s, \end{cases} \quad s \geq 2$$

где E - тождественный оператор, и Lin *означает линейную комбинацию соответствующих операторов с коэффициентами, являющимися многочленами от $\frac{1}{c}$, b, m.*

Лемма 3.5 *Пусть R_{XY} – оператор кривизны неплоской кватернионной пространственной формы $(M^n(c); J_1, J_2, J_3; g)$. Обозначим $b = |X \wedge Y|$ норму бивектора $X \wedge Y$. Положим $m_1 = \big\langle X, J_1Y\big\rangle$, $m_2 = \big\langle X, J_2Y\big\rangle$, $m_3 = \big\langle X, J_3Y\big\rangle$,*

$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$, $\mathcal{J} = m_1 J_1 + m_2 J_2 + m_3 J_3$. *Тогда для любых* X *и* Y

$$R^p_{XY} = \begin{cases} \mathrm{Lin}\,(\mathcal{J} R^4_{XY},\, R^3_{XY},\, \mathcal{J} R^2_{XY},\, R_{XY}, \mathcal{J}\,) \text{ для } p{=}2s\text{-}1 \\ \\ \mathrm{Lin}\,(R^4_{XY},\, \mathcal{J} R^3_{XY},\, R^2_{XY},\, \mathcal{J} R_{XY}, E\,) \text{ для } p{=}2s, \end{cases} \quad s \geq 3$$

где E *- тождественный оператор и* Lin *означает линейную комбинацию соответствующих операторов с коэффициентами, являющимися многочленами от* $\frac{1}{c}$, b, m.

Доказательство Лемм 3.4 и 3.5 аналогично доказательству Леммы 3.3 и использует известные выражения для оператора кривизны комплексной и кватернионной пространственных форм. Техническая часть доказательства Лемм 3.4 и 3.5 принадлежит соавтору работы [109], поэтому здесь мы их опускаем.

Доказательство Теоремы 3.2. Случай (a). Обозначим $e_1, \dots, e_{n-1}$ репер Френе γ. Используя формулы Френе для кривой с постоянными геодезическими кривизнами и с учетом (3.3), легко видеть, что это

$$\begin{aligned} \gamma^{(2s-1)} &= (1-\rho^2)^{s-1/2} k_1 k_2 \dots k_{2s-2}\, e_{2s-1} + \mathrm{Lin}\,\{e_1, e_3, \dots, e_{2s-3}\}, \\ \gamma^{(2s)} &= (1-\rho^2)^{s} k_1 k_2 \dots k_{2s-1}\, e_{2s} + \mathrm{Lin}\,\{e_2, e_4, \dots, e_{2s-2}\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

для всех $s \geq 1$ (с формальной подстановкой $k_0 \equiv 1$). Полагая $s = 1, 2$ в четных производных, мы видим, что

$$\begin{aligned} \gamma^{(2)} &= (1-\rho^2) k_1\, e_2 \\ \gamma^{(4)} &= (1-\rho^2)^2 k_1 k_2 k_3\, e_4 + \mathrm{Lin}\,(e_2). \end{aligned} \tag{3.5}$$

С другой стороны, применяя Лемму 3.1, Лемму 3.3 и Лемму 3.1 снова, мы получаем

$$\gamma^{(4)} = R^3_{\xi'\,\xi}\gamma' = -b^2 c^2\, R_{\xi'\,\xi}\gamma' = -b^2 c^2 \gamma^{(2)}. \tag{3.6}$$

Подстановка из (3.5) дает $(1-\rho^2)^2 k_1 k_2 k_3\, e_4 + \mathrm{Lin}\,(e_2) = 0$ и поэтому $k_3 = 0$, что и заканчивает доказательство.

Заметим, что b^2 постоянно вдоль γ, так как

$$\big(b^2\big)' = \Big(|\xi' \wedge \xi|^2\Big) = \Big(\rho^2\,|\,\xi\,|^2 - \big\langle \xi', \xi \big\rangle^2\Big)' = 2\rho^2 \big\langle \xi', \xi \big\rangle - 2\big\langle \xi', \xi \big\rangle \rho^2 \equiv 0.$$

Случай (b). Обозначим $e_1, \ldots, e_{2n-1}$ репер Френе γ. Подобно случаю (a), формулы Френе дают

$$\begin{aligned} \gamma^{(2s-1)} &= (1-\rho^2)^{s-1/2} k_1 k_2 \ldots k_{2s-2}\, e_{2s-1} + \mathrm{Lin}\,\big\{e_1, e_3, \ldots, e_{2s-3}\big\}, \\ \gamma^{(2s)} \quad &= (1-\rho^2)^{s} k_1 k_2 \ldots k_{2s-1}\, e_{2s} + \mathrm{Lin}\,\big\{e_2, e_4, \ldots, e_{2s-2}\big\} \end{aligned} \tag{3.7}$$

для всех $s \geq 1$. Полагая $s = 1, 2, 3, 4$ в нечетных производных, мы получаем

$$\begin{aligned} \gamma' \quad &= (1-\rho^2)^{1/2} e_1, \\ \gamma^{(3)} &= (1-\rho^2)^{3/2} k_1 k_2\, e_3 + \mathrm{Lin}\,(e_1), \\ \gamma^{(5)} &= (1-\rho^2)^{5/2} k_1 \ldots k_4\, e_5 + \mathrm{Lin}\,(e_1, e_3), \\ \gamma^{(7)} &= (1-\rho^2)^{7/2} k_1 \ldots k_6\, e_7 + \mathrm{Lin}\,(e_1, e_3, e_5). \end{aligned} \tag{3.8}$$

С другой стороны, применяя Лемму 3.1, Лемму 3.4 и снова Лемму 3.1, мы получаем

$$\begin{cases} \gamma^{(5)} = R^4_{\xi'\,\xi}\gamma' = \mathrm{Lin}\,(R^2_{\xi'\,\xi}, JR_{\xi'\,\xi}, E)\gamma' = \mathrm{Lin}\,(\gamma^{(3)}, J\gamma^{(2)}, \gamma'), \\ \gamma^{(7)} = R^6_{\xi'\,\xi}\gamma' = \mathrm{Lin}\,(R^2_{\xi'\,\xi}, JR_{\xi'\,\xi}, E)\gamma' = \mathrm{Lin}\,(\gamma^{(3)}, J\gamma^{(2)}, \gamma'), \end{cases} \tag{3.9}$$

Исключая $J\gamma^{(2)}$ из (3.9), мы приходим к уравнению

$$\gamma^{(7)} = \mathrm{Lin}\,(\gamma^{(5)}, \gamma^{(3)}, \gamma'). \tag{3.10}$$

Подстановка из (3.8) влечет $(1-\rho^2)^{7/2} k_1 \ldots k_6\, e_7 + \mathrm{Lin}\,(e_1, e_3, e_5) = 0$ и мы заключаем, что $k_6 = 0$, что завершает доказательство.

Заметим, что коэффициенты всех линейных комбинаций - константы. Действительно, по Лемме 3.4 коэффициенты - многочлены относительно $1/c$, $b = |\xi' \wedge \xi|$ и $m = \big\langle \xi', J\xi \big\rangle$. Значение b постоянно вдоль γ по теми же причинами, что и случае (а). Величина m постоянна вдоль γ так как

$$m' = \big\langle \xi', J\xi \big\rangle' = \big\langle \xi'', J\xi \big\rangle + \big\langle \xi', J\xi' \big\rangle \equiv 0.$$

Случай (с). Обозначим $e_1, \dots, e_{4n-1}$ репер Френе γ. Как и выше, формулы Френе дают

$$\begin{aligned} \gamma^{(2s-1)} &= (1-\rho^2)^{s-1/2} k_1 k_2 \dots k_{2s-2}\, e_{2s-1} + \mathrm{Lin}\,\big\{e_1, e_3, \dots, e_{2s-3}\big\}, \\ \gamma^{(2s)} &= (1-\rho^2)^{s} k_1 k_2 \dots k_{2s-1}\, e_{2s} + \mathrm{Lin}\,\big\{e_2, e_4, \dots, e_{2s-2}\big\} \end{aligned} \tag{3.11}$$

для всех $s \geq 1$. Полагая $s = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ в нечетных производных, мы получаем

$$\begin{aligned} \gamma' &= (1-\rho^2)^{1/2} e_1, \\ \gamma^{(3)} &= (1-\rho^2)^{3/2} k_1 k_2\, e_3 + \mathrm{Lin}\,(e_1), \\ \gamma^{(5)} &= (1-\rho^2)^{5/2} k_1 \dots k_4\, e_5 + \mathrm{Lin}\,(e_1, e_3), \\ \gamma^{(7)} &= (1-\rho^2)^{7/2} k_1 \dots k_6\, e_7 + \mathrm{Lin}\,(e_1, e_3, e_5), \\ \gamma^{(9)} &= (1-\rho^2)^{9/2} k_1 \dots k_8\, e_9 + \mathrm{Lin}\,(e_1, e_3, e_5, e_7), \\ \gamma^{(11)} &= (1-\rho^2)^{11/2} k_1 \dots k_{10}\, e_{11} + \mathrm{Lin}\,(e_1, e_3, e_5, e_7, e_9). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Применяя снова Лемму 3.1, Лемму 3.5 и затем Лемму 3.1, получаем

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma^{(7)} = R^6_{\xi'\xi}\gamma' = \quad & \mathrm{Lin}\,(R^4_{\xi'\xi}, \mathcal{J}R^3_{\xi'\xi}, R^2_{\xi'\xi}, \mathcal{J}R_{\xi'\xi}, E)\gamma' = \\ & \mathrm{Lin}\,(\gamma^{(5)}, \mathcal{J}\gamma^{(4)}, \gamma^{(3)}, \mathcal{J}\gamma^{(2)}, \gamma'), \\ \gamma^{(9)} = R^8_{\xi'\xi}\gamma' = \quad & \mathrm{Lin}\,(R^4_{\xi'\xi}, \mathcal{J}R^3_{\xi'\xi}, R^2_{\xi'\xi}, \mathcal{J}R_{\xi'\xi}, E)\gamma' = \\ & \mathrm{Lin}\,(\gamma^{(5)}, \mathcal{J}\gamma^{(4)}, \gamma^{(3)}, \mathcal{J}\gamma^{(2)}, \gamma'), \\ \gamma^{(11)} = R^{10}_{\xi'\xi}\gamma' = \quad & \mathrm{Lin}\,(R^4_{\xi'\xi}, \mathcal{J}R^3_{\xi'\xi}, R^2_{\xi'\xi}, \mathcal{J}R_{\xi'\xi}, E)\gamma' = \\ & \mathrm{Lin}\,(\gamma^{(5)}, \mathcal{J}\gamma^{(4)}, \gamma^{(3)}, \mathcal{J}\gamma^{(2)}, \gamma'). \end{aligned} \right. \tag{3.13}$$

Исключая $\mathcal{J}\gamma^{(2)}$ и $\mathcal{J}\gamma^{(4)}$ из (3.13), мы приходим к уравнению

$$\gamma^{(11)} = \mathrm{Lin}\,(\gamma^{(9)}, \gamma^{(7)}, \gamma^{(5)}, \gamma^{(3)}, \gamma'). \tag{3.14}$$

Подстановка из (3.12) влечет $(1-\rho^2)^{11/2}k_1 \dots k_{10}\, e_{11} + \mathrm{Lin}\,(e_1, e_3, e_5, e_7, e_9) = 0$ и мы заключаем, что $k_{10} = 0$, что заканчивает доказательство.

Заметим, что коэффициенты всех линейных комбинаций - константы. Действительно, по Лемме 3.5 коэффициенты – многочлены от $1/c, b = |\xi' \wedge \xi|$ и $m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$. Значение b постоянно вдоль γ по теми же самыми причинами, что и в случае(а). Значения m_1, m_2, m_3 весь постоянны вдоль γ так как $m_i' = \langle \xi', J_i\xi \rangle' = \langle \xi'', J_i\xi \rangle + \langle \xi', J_i\xi' \rangle \equiv 0$ для $i = 1, 2, 3$.

3.2. Геодезические в расслоении сфер Берже

Метрика Сасаки слабо наследует свойства базового многообразия. В большинстве случаев метрика Сасаки обладает только свойствами общей римановой метрики. Видимо поэтому в последнее время появились попытки деформировать метрику Сасаки с целью уменьшения ее "жесткости". Используя понятие естественного поднятия римановой метрики многообразия до метрики касательного расслоения, М.Т.К. Аббасси и М. Сарих [1] предложили очень общую идею деформации метрики Сасаки на касательном и сферическом касательных расслоениях. Эта деформированная метрика включает в себя как метрику Сасаки, так и метрику Чигера-Громолла [26], [70], а так же ряд других метрик [57], [58], [61]. Свойства этих метрик изучались в работах [2], [3], [4], [6], [57], [58], [62]. Предложенные деформации используют деформацию метрики в направлении "точки касательного расслоения".

В данном разделе мы предлагаем другой естественный способ послойной деформации метрики Сасаки в присутствии на многообразии почти комплексной структуры J. Если базовое многообразие (M, g) имеет размерность $2n$ и снабжено почти комплексной структурой J, то на каждой касательной сфере S_x^{2n-1} в касательном пространстве T_xM определено векторное поле Хопфа $J\xi$, где ξ есть единичное нормальное векторное поле на этой сфере. Применяя известную метрическую деформацию Берже на каждой касательной сфере, мы получим сферическое расслоение над M с метрическими сферами Берже в качестве слоев. С более широкой точки зрения, мы получаем деформацию метрики Сасаки на взрезанном расслоении $TM_0 := TM \backslash M$ в направлении $J\xi$ такую, что ограничение этой деформации на расслоение единичных векторов даст описанную выше конструкцию. Опишем точную конструкцию.

Метрика Сасаки может быть полностью определена скалярным произведением комбинаций лифтов векторных полей с M на TM как

$$\langle\langle X^h, Y^h \rangle\rangle = \langle X, Y \rangle, \quad \langle\langle X^h, Y^v \rangle\rangle = 0, \quad \langle\langle X^v, Y^v \rangle\rangle = \langle X, Y \rangle.$$

Рассмотрим теперь в качестве базового многообразия M эрмитово многообразие (M^{2n}, g, J). Определим *деформацию* Метрики Сасаки вдоль $J\xi$ направления в каждом слое вида

$$\begin{aligned} &\langle\langle X^h, Y^h \rangle\rangle = \langle X, Y \rangle, \\ &\langle\langle X^h, Y^v \rangle\rangle = 0, \\ &\langle\langle X^v, Y^v \rangle\rangle = \langle X, Y \rangle + \delta^2 \langle X, J\xi \rangle \langle Y, J\xi \rangle, \end{aligned} \tag{3.15}$$

где J - почти комплексная структура на M, и δ - некоторая постоянная. Геометрически эта деформация означает, что мы искажаем каждую касательную сферу $S^{2n-1} \subset T_qM$ вдоль слоев стандартного Хопфовского расслоения S^{2n-1} в каждой точке $q \in M$. Мы будем называть касательное (сферическое) расслоение с метрикой (3.15) *касательным (сферическим) Берже расслоением.*

В дальнейшем мы предполагаем, что M эрмитово локально симметричное пространство. В этом случае M является обязательно Кэлеровым, то есть $\nabla J = 0$, и локально симметричным как риманово многообразие [90].

Заметим, что формулы Домбровского (Лемма 1.1) для скобок лифтов векторных полей независимы от выборе метрики касательного расслоения и могут быть использованы для нашего случая в неизменной форме. Что касается связности Леви-Чивита метрики (3.15), то она может быть найдена с использованием формул Домбровского и формулы Кошуля (1.8). Подробные вычисления приведены в [118].

Лемма 3.6 *Связность Леви-Чивита метрики (3.15) полностью определена в каждой точке $(q, \xi) \in TM$ формулами*

$$\tilde{\nabla}_{X^h} Y^h = \big(\nabla_X Y\big)^h - \tfrac{1}{2}\big(R(X,Y)\xi\big)^v,$$

$$\tilde{\nabla}_{X^h} Y^v = \tfrac{1}{2}\Big(R(\xi,Y)X + \delta^2 \langle Y, J\xi\rangle R(\xi, J\xi)X\Big)^h + \Big(\nabla_X Y\Big)^v,$$

$$\tilde{\nabla}_{X^v} Y^h = \tfrac{1}{2}\Big(R(\xi,X)Y + \delta^2 \langle X, J\xi\rangle R(\xi, J\xi)Y\Big)^h$$

$$\tilde{\nabla}_{X^v} Y^v = \delta^2\Big(\langle X, J\xi\rangle JY + \langle Y, J\xi\rangle JX -$$

$$\tfrac{\delta^2}{1+\delta^2|\xi|^2}\big(\langle Y,\xi\rangle \langle X, J\xi\rangle + \langle X,\xi\rangle \langle Y, J\xi\rangle \big) J\xi\Big)^v,$$

где ∇ - связность Леви-Чивита на M, и R - ее тензор кривизны.

Рассмотрим кривую Γ на касательном расслоении с метрикой (3.15). Геометрически, $\Gamma = \{x(\sigma), \xi(\sigma)\}$, где $x(\sigma)$ - кривая на M и $\xi(\sigma)$ - векторное поле вдоль этой кривой. Пусть σ – параметр длины дуги на Γ. Тогда $\Gamma' = \big(\frac{dx}{d\sigma}\big)^h + (\nabla_{\frac{dx}{d\sigma}}\xi)^v$. Введем обозначения $x' = \frac{dx}{d\sigma}$ и $\xi' = \nabla_{\frac{dx}{d\sigma}}\xi$. Тогда мы можем записать $\Gamma' = (x')^h + (\xi')^v$. Используя Лемму 3.6 мы можем легко получить дифференциальные уравнения геодезических линий метрики (3.15).

Лемма 3.7 *Пусть (M^{2n}, g, J) эрмитово локально симметричное многообразие и TM его Берже касательное расслоение. Кривая $\Gamma = \{x(\sigma), \xi(\sigma)\}$ геодезическая на TM, если $x(\sigma)$ и $\xi(\sigma)$ удовлетворяют уравнениям*

$$\begin{aligned} & x'' + \mathcal{R}(\xi, \xi')x' = 0 \\ & \xi'' + 2\delta^2\big\langle \xi', J\xi\big\rangle\Big(J\xi' - \tfrac{\delta^2}{1+\delta^2|\xi|^2}\big\langle \xi', \xi\big\rangle J\xi\Big) = 0, \end{aligned} \qquad (3.16)$$

где $\mathcal{R}(\xi,\xi') = R(\xi,\xi') + \delta^2\langle\xi', J\xi\rangle R(\xi, J\xi)$ *и* R *- оператор кривизны* M.

Рассмотрим теперь сферическое касательное расслоение T_1M. Единичная нормаль к T_1M как и до деформации есть ξ^v. Поэтому, чтобы получить уравнения геодезических для T_1M, достаточно положить $|\xi| = 1$ в (3.16) и предположить, что левая часть второго уравнения (3.16) пропорциональна ξ.

Лемма 3.8 *Пусть* (M^{2n}, g, J) *– эрмитово локально симметричное многообразие и* T_1M *его касательное сферическое Берже расслоение. Положим* $c = |\xi'|$, $\mu = \langle\xi', J\xi\rangle$. *Кривая* $\Gamma = \{x(\sigma), \xi(\sigma)\}$ *геодезическая на* T_1M *если и только если*

(a) $c = const, \mu = const$;

(b) $x(\sigma)$ *и* $\xi(\sigma)$ *удовлетворяют уравнениям*

$$
\begin{aligned}
&x'' + \mathcal{R}(\xi,\xi')x' = 0 \\
&\xi'' + c^2\xi + 2\delta^2\mu(J\xi' + \mu\xi) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

где $\mathcal{R}(\xi,\xi') = R(\xi,\xi') + \delta^2\mu R(\xi, J\xi)$ *и* R *- оператор кривизны базового многообразия.*

Доказательство. Положим $|\xi| = 1$ в (3.16) и предположим, что

$$
\xi'' + 2\delta^2\langle\xi', J\xi\rangle J\xi' = \rho\xi, \tag{3.18}
$$

где ρ - некоторая функция. Положим $c = |\xi'|$. Тогда $c = const$, так как из (3.18) мы видим что $\langle\xi'', \xi'\rangle = 0$. Положим $\mu = \langle\xi', J\xi\rangle$. Тогда $\mu = const$ так как $\mu' = \langle\xi'', J\xi\rangle = 0$ по тем же причинам. Умножая (3.18) на ξ, мы находим, что $-\rho = c^2 + 2\delta^2\mu^2 = const$.

■

Теорема 3.9 *Пусть $\gamma = \pi \circ \Gamma$ – проекция кривой Γ на касательном сферическое Берже расслоении над эрмитовым локально симметричным многообразием M. Тогда все геодезические кривизны γ постоянны.*

Доказательство. Покажем вначале, что тензор $\mathcal{R}(\xi, \xi')$ параллелен вдоль γ для случая T_1M. Используя (3.17) мы получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{R}'(\xi, \xi') = \ & R(\xi, \xi'') + \delta^2\mu R(\xi', J\xi) + \delta^2\mu R(\xi, J\xi') = \\ & -2\delta^2\mu R(\xi, J\xi') - \delta^2\mu R(J\xi', \xi) + \delta^2\mu R(\xi, J\xi') = 0.\end{aligned}$$

Здесь мы также использовали факт что $R(JX, JY) = R(X, Y)$. Следовательно, если Γ является геодезической на T_1M, то вдоль каждой кривой $\gamma = \pi \circ \Gamma$

$$x^{(p+1)}(\sigma) = -\mathcal{R}(\xi, \xi')\, x^{(p)}(\sigma) \quad p \geq 1, \tag{3.19}$$

или, продолжая процесс,

$$x^{(p+1)}(\sigma) = (-1)^p \mathcal{R}^p(\xi, \xi')\, x'(\sigma) \quad p \geq 1. \tag{3.20}$$

С другой стороны, довольно очевидно что $\big\langle \mathcal{R}(\xi, \xi')X, Y \big\rangle = -\big\langle \mathcal{R}(\xi, \xi')Y, X \big\rangle$. Этот факт и (3.19) влечет

$$|x^{(p)}(\sigma)| = const \quad \text{для всех } p \geq 1 \tag{3.21}$$

Действительно,

$$\tfrac{d}{d\sigma}\, |x^{(p)}(\sigma)|^{\,2} = 2\,\big\langle x^{(p+1)}(\sigma), x^{(p)}(\sigma)\big\rangle = -2\,\big\langle \mathcal{R}(\xi, \xi')\, x^{(p)}(\sigma), x^{(p)}(\sigma)\big\rangle = 0.$$

Обозначим s естественный параметр на γ. Тогда $x'_\sigma = x'_s \frac{ds}{d\sigma}$ и поэтому

$$1 = \|\Gamma'\|^2 = \left|\frac{ds}{d\sigma}\right|^2 + |\xi'|^2 + \delta^2 \big\langle \xi', J\xi \big\rangle^2 = \left|\frac{ds}{d\sigma}\right|^2 + c^2 + \delta^2\mu^2.$$

Из этого мы получаем

$$\frac{ds}{d\sigma} = \sqrt{1 - c^2 - \delta^2\mu^2} = \sqrt{1 - \lambda^2}, \tag{3.22}$$

где мы полагаем $\lambda^2 = c^2 + \delta^2\mu^2 = const$.

Обозначим $\nu_1, \ldots, \nu_{2n-1}$ репер Френе вдоль γ и $k_1, \ldots, k_{2n-1}$ геодезические кривизны γ. Тогда, имея в виду (3.22), мы имеем

$$x' = \sqrt{1-\lambda^2}\,\nu_1, \quad x'' = (1-\lambda^2)k_1\nu_2.$$

Теперь (3.21) влечет $k_1 = const$. Так что далее мы имеем

$$x^{(3)} = (1-\lambda^2)^{3/2}\,k_1(-k_1\nu_1 + k_2\nu_3)$$

и (3.21) влечет снова $k_2 = const$. Продолжая процесс мы заканчиваем доказательство.

$\blacksquare$

Как было доказано в [101], для случая T_1CP^n и TCP^n с метрикой Сасаки, кривизны $\gamma = \pi \circ \Gamma$ – нули, начиная с k_6. Довольно замечательно, что это свойство, все еще имеют силу для случая касательного сферического Берже расслоения над CP^n.

Теорема 3.10 *Пусть* Γ *– геодезическая касательного сферического Берже расслоения над комплексным проективным пространством* CP^n*. Тогда геодезические кривизны* $\gamma = \pi \circ \Gamma$ *все постоянны и* $k_6 = \cdots = k_{2n-1} = 0$*.*

Доказательство. Для случая CP^n мы имеем

$$R(X,Y)Z = \frac{m}{4}\Big(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y + \langle JY,Z\rangle JX - \langle JX,Z\rangle JY + 2\langle X,JY\rangle JZ\Big).$$

Поэтому, $R(\xi, J\xi) = -2J$ и для случая касательного сферического Берже расслоения $\mathcal{R}(\xi,\xi') = R(\xi,\xi') - 2\delta^2 J$. Так как R и J коммутируют, то есть $RJ = JR$, операторы $\mathcal{R}$ и J также коммутируют. Используя этот факт может относительно легко найти выражение для степеней оператора $\mathcal{R}$ вдоль γ. Действительно, в [109] было доказано, что степени оператора кривизны CP^n

удовлетворяют отношениям

$$R^{2q} = \mathrm{Lin}\,(R^2, JR, E), \qquad R^{2q+1} = \mathrm{Lin}\,(JR^2, R, J),$$

где Lin означает линейную комбинацию соответствующих тензоров и E означает тождественный оператор. Легко проверить, что

$$\mathrm{Lin}\,(R, J) \cdot \mathrm{Lin}\,(R, J) = \mathrm{Lin}\,(R^2, JR, E)$$
$$\mathrm{Lin}\,(R^2, JR, E) \cdot \mathrm{Lin}\,(R, J) = \mathrm{Lin}\,(JR^2, R, J)$$
$$\mathrm{Lin}\,(JR^2, R, J) \cdot \mathrm{Lin}\,(R, J) = \mathrm{Lin}\,(R^2, JR, E).$$

Поэтому, для оператора $\mathcal{R}$ мы также имеем

$$\mathcal{R}^{2q} = \mathrm{Lin}\,(R^2, JR, E), \qquad \mathcal{R}^{2q+1} = \mathrm{Lin}\,(JR^2, R, J). \tag{3.23}$$

С другой стороны, $\mathcal{R}J = J\mathcal{R}$ и $R = \mathcal{R} - 2\delta^2 J$. Поэтому,

$$R^2 = \mathrm{Lin}\,(\mathcal{R}^2, J\mathcal{R}, E) \quad JR = \mathrm{Lin}\,(J\mathcal{R}, E) \quad JR^2 = \mathrm{Lin}\,(J\mathcal{R}, \mathcal{R}, J).$$

Принимая во внимание это, мы можем переписать (3.23) как

$$\mathcal{R}^{2q} = \mathrm{Lin}\,(\mathcal{R}^2, J\mathcal{R}, E), \qquad \mathcal{R}^{2q+1} = \mathrm{Lin}\,(J\mathcal{R}^2, \mathcal{R}, J). \tag{3.24}$$

Используя теперь (3.19), (3.20) и (3.24), мы получаем

$$x^{(2q)} = \mathrm{Lin}\,(Jx''', x'', Jx'), \quad x^{(2q+1)} = \mathrm{Lin}\,(x''', Jx'', x') \tag{3.25}$$

для $q \geq 2$. С другой стороны, формул Френе дают

$$x' = \sqrt{1-\lambda^2}\,\nu_1 \quad x'' = (1-\lambda^2)k_1\nu_2, \quad x''' = (1-\lambda^2)^{3/2}(-k_1^2\nu_1 + k_1k_2\nu_3)$$

и вообще,

$$\begin{aligned} x^{(2q)} &= \mathrm{Lin}\,(\nu_2, \dots, \nu_{2q-2}) + (1-\lambda^2)^q\, k_1 \dots k_{2q-1}\, \nu_{2q} \\ x^{(2q+1)} &= \mathrm{Lin}\,(\nu_1, \dots, \nu_{2q-1}) + (1-\lambda^2)^{q+1/2}\, k_1 \dots k_{2q}\, \nu_{2q+1} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Таким образом, (3.25) принимает вид

$$x^{(2q)} = \mathrm{Lin}\,(J\nu_1, J\nu_3, \nu_2), \qquad x^{(2q+1)} = \mathrm{Lin}\,(\nu_1, \nu_3, J\nu_2).$$

Сравнивая результаты, для всех $q \geq 2$ мы имеем

$$\mathrm{Lin}\,(J\nu_1, J\nu_3, \nu_2) = \mathrm{Lin}\,(\nu_2, \dots, \nu_{2q-2}) + (1-\lambda^2)^q\, k_1 \dots k_{2q-1}\, \nu_{2q},$$

$$\mathrm{Lin}\,(\nu_1, \nu_3, J\nu_2) = \mathrm{Lin}\,(\nu_1, \dots, \nu_{2q-1}) + (1-\lambda^2)^{q+1/2}\, k_1 \dots k_{2q}\, \nu_{2q+1}.$$

Полагая $q = 2$ и $q = 3$, из второго уравнения выше, мы получаем

$$\begin{cases} \mathrm{Lin}\,(\nu_1, \nu_3, J\nu_2) = (1-\lambda^2)^{5/2}\, k_1 \dots k_4\, \nu_5, \\ \mathrm{Lin}\,(\nu_1, \nu_3, \nu_5, J\nu_2) = (1-\lambda^2)^{7/2}\, k_1 \dots k_6\, \nu_7 \end{cases}$$

и поэтому вообще $\mathrm{Lin}\,(\nu_1, \nu_3, \nu_5) = k_1 \dots k_6\, \nu_7$. Так как $\nu_1, \dots, \nu_7$ линейно независимы, мы заключаем что $k_6 = 0$.

■

Для случая геодезических касательного (не сферического) Берже расслоения проекции геодезических на базовое локально симметрическое многообразие не будут иметь постоянных кривизн, так как тензор $\mathcal{R}$ не параллелен вдоль этих проекций и аналог доказательства Теоремы 3.9 не имеет места. А именно, вдоль проекции геодезической на базу

$$\mathcal{R}'(\xi, \xi') = \frac{2\delta^6 \big\langle \xi', J\xi \big\rangle \big\langle \xi', \xi \big\rangle \big(1 - |\xi|^2\big)}{1 + \delta^2 |\xi|^2} R(\xi, J\xi).$$

3.3. Поднятия подмногообразий в касательное расслоение

В отличие от единичных векторных полей, результатов (как в локальном, так и в глобальном аспекте) по геометрии общих векторных полей, рассматриваемых как подмногообразия в *касательном расслоение* получено мало. Известно [54], что, если ξ - нулевое векторное поле, то $\xi(M^n)$ вполне геодезическое подмногообразие в TM^n. Вальчак [77] рассматривал случай, когда

ξ – ненулевое векторное поле на M^n и доказал, что, если ξ – параллельное векторное поле на M^n, то $\xi(M^n)$ вполне геодезическое в TM^n. Кроме того, если ξ имеет постоянную длину, то $\xi(M^n)$ вполне геодезическое в TM^n, если и только если ξ – параллельное векторное поле на M^n. Последнее условие довольно обременительно, поскольку в этом случае базовое многообразие M^n должно быть метрическим произведением $M^{n-1} \times \mathbb{R}^1$. Аналогичная задача для естественно-деформированной метрики [1] рассматривалась в [30].

Заметим, что $\xi(M^n)$ имеет максимальную размерность среди подмногообразий в касательном расслоении, трансверсальных к слоям. В этом разделе, мы изучаем подмногообразия $N^l \subset TM^n$ с $l \leq n$, которые являются трансверсальными к слоям. Мы показываем, что любое трансверсальное подмногообразие $N^l \subset TM^n$ может быть понято локально как образ подмногообразия $F^l \subset M^n$ под действием некоторого векторного поля ξ, определенного вдоль F^l. Таким образом, мы получаем цепь включений:

$$\xi(F^l) \subset \xi(M^n) \subset TM^n.$$

Мы интересуемся прежде всего подмногообразиями этого класса, которые являются вполне геодезическими. По сравнению со случаем, когда ξ определено на всем M^n или, по крайней мере, на области $D^n \subset M^n$ как в [77], $\xi(F^l)$ может быть вполне геодезично в TM^n, в то время как $\xi(M^n)$ – нет. Наши рассмотрения включают также случай, когда векторное поле определено только на F^l, т.е. так, чтобы ξ определяло "прямое" вложение $\xi : F^l \to TM^n$.

Для $l = 1$ мы получаем ничто иное, как векторное поле вдоль кривой в M^n, которое порождает геодезическую в TM^n. Сасаки С. [65] описал геодезические линии в TM^n в терминах векторных полей вдоль кривых в M^n и нашел дифференциальные уравнения на кривую и соответствующее векторное поле. Кроме того, в случае, когда M^n имеет постоянную кривизну, Сато [68] явно описал кривые и векторные поля.

Очевидно, наш подход занимает промежуточное положение между вышеупомянутыми рассмотрениями для $l = 1$ и $l = n$.

Необходимые и достаточные условия на $\xi(F^l)$, обеспечивающие вполне геодезичность, которые мы даем в Предложении 3.15, имеют более ясный геометрический смысл, если мы предположим, что ξ имеет постоянную длину вдоль F^l (Теорема 3.20) или что ξ – нормальное векторное поле вдоль F^l (Теорема 3.21). Применение Теоремы 3.21 к частному случаю слоений на римановых многообразиях позволяет прояснить геометрическую структуру $\xi(M^n)$ (Следствие 3.22).

Применение к случаю риманова многообразия постоянной кривизны показывает не жесткость вполне геодезического свойства $\xi(F^l)$, $l < n$ в сравнении со случаем $l = n$. Всюду в разделе мы полагаем, что

- M^n – риманово многообразие с метрикой $\bar g$, F^l – подмногообразие M^n с индуцированной метрикой g, TM^n - касательное расслоение M^n с метрикой Сасаки $\tilde g$;
- $\bar\nabla$, ∇, $\tilde\nabla$ - связность Леви-Чивита относительно $\bar g$, g, $\tilde g$ соответственно;
- диапазон индексов: $a, b, c = 1 \dots n; \quad i, j, k = 1 \dots l$.

Заметим, что в принятых в разделе обозначениях метрика Сасаки $\tilde g$ на TM^n определена следующим скалярным произведением: если $\tilde X, \tilde Y$ - касательные векторные поля на TM^n, то

$$\tilde g(\tilde X, \tilde Y) = \bar g(\pi_* \tilde X, \pi_* \tilde Y) + \bar g(\mathcal{K}\tilde X, \mathcal{K}\tilde Y) \tag{3.27}$$

где $\pi_* : TTM^n \to TM^n$ - дифференциал проекции $\pi : TM^n \to M^n$ и $\mathcal{K} : TTM^n \to TM^n$ является *отображением связности* .

Пусть $\{x^1, \dots, x^n; \xi^1, \dots, \xi^n\}$ – естественная индуцированная система координат в TM^n. Обозначим через $F^l \subset M^n$ – подмногообразие, заданное параметрически в виде $x^a = x^a(u^1, \dots, u^l)$. Пусть ξ – векторное поле на M^n, определенное в некотором окрестности (или только на) подмногообразие F^l. Тогда ограничение ξ на подмногообразие F^l, которое мы называем *вектор-*

ным полем на M^n вдоль F^l, порождает подмногообразие $\xi(F^l) \subset TM^n$ с локальным представлением вида

$$\xi(F^l) : \begin{cases} x^a = & x^a(u^1, \dots, u^l), \\ \xi^a = & \xi^a(x^1(u^1, \dots, u^l), \dots, x^n(u^1, \dots, u^l)). \end{cases} \tag{3.28}$$

В дальнейшем мы будем ссылаться на подмногообразие (3.28) как на подмногообразие, *порожденное векторным полем на M^n вдоль F^l*. Следующее предложение описывает касательное пространство $\xi(F^l)$.

Предложение 3.11 *Векторное поле $\tilde{X}$ на TM^n касательно к $\xi(F^l)$ вдоль $\xi(F^l)$ если и только если его горизонтально-вертикальное разложение имеет вид*

$$\tilde{X} = X^h + (\bar{\nabla}_X \xi)^v, \tag{3.29}$$

где X - касательное векторное поле на F^l, $\bar{\nabla}_X \xi$ ковариантная производная ξ в направлении X относительно связности Леви-Чивита из M^n и лифты рассматриваются как лифты на TM^n.

Доказательство. Обозначим через $\tilde{e}_i$ векторы координатного репера $\xi(F^l)$. Тогда $\tilde{e}_i = \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial u^i}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial u^i};\ \frac{\partial \xi^1}{\partial u^i}, \dots, \frac{\partial \xi^n}{\partial u^i} \right\}$. Найдем проекции

$$\begin{aligned} \pi_* \tilde{e}_i = & \ \frac{\partial x^a}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial u^i}, \\ \mathcal{K} \tilde{e}_i = & \ \left(\frac{\partial \xi^a}{\partial u^i} + \bar{\Gamma}^a_{bc} \xi^b \frac{\partial x^c}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^a} = \left(\frac{\partial \xi^a}{\partial x^c} \frac{\partial x^c}{\partial u^i} + \bar{\Gamma}^a_{bc} \xi^b \frac{\partial x^c}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^a} \\ = & \ \frac{\partial x^c}{\partial u^i} (\frac{\partial \xi^a}{\partial x^c} + \bar{\Gamma}^a_{bc} \xi^b) \frac{\partial}{\partial x^a} = \bar{\nabla}_i \xi, \end{aligned}$$

где $\bar{\Gamma}^a_{bc}$ - символы Кристоффеля метрики $\bar{g}$ взятый вдоль F^l и $\bar{\nabla}_i$ означает ковариантную производную векторного поля на M^n относительно связности

Леви-Чивита $\bar{g}$ вдоль i -й координатной кривой подмногообразия $F^l \subset M^n$. В итоге, мы имеем $\tilde{e}_i = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)^h + (\bar{\nabla}_i \xi)^v$. Пусть $\tilde{X}$ – векторное поле на TM^n касательное к $\xi(F^l)$ вдоль $\xi(F^l)$. Тогда следующее разложение имеет место $\tilde{X} = \tilde{X}^i \tilde{e}_i$. Положим $X = \tilde{X}^i \partial/\partial u^i$. Векторное поле X касательно к F^l и разложение $\tilde{X}$ может быть представлено как $\tilde{X} = X^h + (\bar{\nabla}_X \xi)^v$, что заканчивает доказательство.

■

Чтобы описать нормальное расслоение $\xi(F^l)$, нам необходимо одно вспомогательное понятие. Пусть ξ – данное векторное поле на подмногообразии $F^l \subset M^n$. Тогда $\bar{\nabla}$ определяет поточечно линейное отображение $\bar{\nabla}\xi : T_q F^l \to T_q M^n$, $X \to \bar{\nabla}_X \xi$, для каждого $x \in M^n$. Его сопряженное отображение, относительно соответствующего скалярного произведения, индуцированного метриками g и $\bar{g}$, порождает линейное отображение $(\bar{\nabla}\xi)^t : T_q M^n \to T_q F^l$ определенное формулой

$$g\,((\bar{\nabla}\xi)^t W, X) = \bar{g}\,(\bar{\nabla}_X \xi, W) \text{ для всех } W \in T_q M^n \text{ и } X \in T_q F^l. \tag{3.30}$$

Мы называем отображение $(\bar{\nabla}\xi)^t : T_q M^n \to T_q F^l$ *сопряженной производной.* Теперь мы можем доказать

Предложение 3.12 *Пусть η и Z нормальное и касательное векторные поля на F^l соответственно. Тогда лифты η^h, $\eta^v - ((\bar{\nabla}\xi)^t \eta)^h$, $Z^v - ((\bar{\nabla}\xi)^t Z)^h$ в точки $\xi(F^l)$ порождают нормальное расслоение $\xi(F^l)$ в TM^n.*

Доказательство. Пусть $\tilde{X} = X^h + (\bar{\nabla}_X \xi)^v$ – векторное поле на $\xi(F^l)$. Пусть η и Z – векторные поля на F^l, которые являются нормальными и касательными к F^l соответственно. Принимая во внимание (3.27), (3.29) и (3.30), мы имеем

$$\tilde{g}(\tilde{X},\eta^h) = \bar{g}\,(X,\eta) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{X},\eta^v - [(\bar{\nabla}\xi)^t\eta]^h) = &\ -\bar{g}\,(X,(\bar{\nabla}\xi)^t\eta) + \bar{g}\,(\bar{\nabla}_X\xi,\eta) \\
= &\ -\bar{g}\,(\bar{\nabla}_X\xi,\eta) + \bar{g}\,(\bar{\nabla}_X\xi,\eta) = 0, \\
\tilde{g}(\tilde{X},Z^v - [(\bar{\nabla}\xi)^t Z]^h) = &\ -\bar{g}\,(X,(\bar{\nabla}\xi)^t Z) + \bar{g}\,(\bar{\nabla}_X\xi,Z) \\
= &\ -\bar{g}\,(\bar{\nabla}_X\xi,Z) + \bar{g}\,(\bar{\nabla}_X\xi,Z) = 0
\end{aligned}$$

Пусть $\eta_1,\ldots,\eta_p$ $(p = 1,\ldots,n-l)$ – нормальный репер F^l, а $f_1,\ldots,f_l$ касательный репер в каждой точке $x \in F^l$. Рассмотрим векторные поля

$$N_\alpha = \eta^h_\alpha, \quad P_\alpha = \eta^v_\alpha - ((\bar{\nabla}\xi)^t\eta_\alpha)^h, \quad F_i = f^v_i - ((\bar{\nabla}\xi)^t e_i)^h,$$

где $\alpha = 1,\ldots,n-l;\ i = 1,\ldots,n$. Покажем, что они линейно независимы. Действительно, предположим, что

$$\lambda^\alpha N_\alpha + \mu^\alpha P_\alpha + \nu^i F_i = \{\lambda^\alpha\eta_\alpha - \mu^\alpha(\bar{\nabla}\xi)^t\eta_\alpha - \nu^i(\bar{\nabla}\xi)^t e_i\}^h + \{\mu^\alpha\eta_\alpha + \nu^i f_i\}^v = 0.$$

Ввиду того, что горизонтальная и вертикальная компоненты линейно независимы, мы видим, что $\mu^\alpha\eta_\alpha + \nu^i f_i = 0$, что возможно только если $\mu^\alpha = 0, \nu^i = 0$. Тогда, из горизонтальной части разложения выше мы видим, что $\lambda^\alpha = 0$. Поэтому N_α, P_α и F_i линейно независимы, что и заканчивает доказательство.

■

Очевидно, что векторные поля вдоль подмногообразия $F^l \subset M^n$ порождают подмногообразия в TM^n которые трансверсальны к слоям TM^n. Мы покажем, что по крайней мере локально верно и обратное.

Теорема 3.13 *Пусть N^l вложенное подмногообразие в касательном расслоении риманова многообразия M^n, трансверсальное к слоям в окрестности точки $Q \in N^l$, тогда существует подмногообразие F^l в M^n содержащее*

$q = \pi(Q)$, такое что N^l является локальным образом F^l относительно некоторого гладкого векторного поля ξ, заданного в точках F^l.

Доказательство. Пусть N^l подмногообразие в TM^n, трансверсальное слоям и пусть $x^a = x^a(u_1, \dots, u^l)$; $\quad \xi^a = \xi^a(u^1, \dots, u^l)$ его локальная параметризация в индуцированных координатах. Базис касательной плоскости N^l составляют векторы $\tilde{\partial}_i = \frac{\partial x^a}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial x^a} + \frac{\partial \xi^a}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial \xi^a}$. В силу трансверсальности вертикальному распределению, размерность образа ограничения дифференциала проекции расслоения на касательную плоскость N^l локально постоянна и равна l. Это означает, что векторы

$$\partial_i = \pi_*(\tilde{\partial}_i) = \frac{\partial x^a}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial x^a}$$

линейно не зависимы. Следовательно, функции $x^a = x^a(u^1, \dots, u^l)$ параметризуют некоторое локально вложенное подмногообразие $F^l \subset M^n$. Не ограничивая общности, можно считать, что минор матрицы Якоби

$$\left(\frac{\partial x^k}{\partial u^i}\right) \quad i, k = 1, \dots, l$$

локально невырожден. По теореме об обратном отображении, существует локальное обратное $u^l = u^l(x^1, \dots, x^l)$, а "слоевые" параметры имеют вид $\xi^a = \xi^a(x^1, \dots, x^l)$. Это означает, что N^l является образом F^l под действием некоторого векторного поля ξ, заданного в точках F^l.

■

В частности, горизонтальные подмногообразия в TM^n порождаются, как это видно из (3.29), векторными полями, параллельными вдоль подмногообразия F^l относительно связности в M^n. Такие векторные поля могут существовать без ограничения на геометрию M^n, что сильно отличается от рассмотрений Вальчака [77]

Очевидно, геометрические свойства подмногообразия $\xi(F^l)$ зависят от подмногообразия F^l и векторного поля ξ. Если не налагать никаких ограничений на них, геометрия $\xi(F^l)$ становится слишком общей. Однако, можно сформулировать условия вполне геодезичности $\xi(F^l)$ в более или менее геометрических терминах. Для этого мы введем понятие ξ-связности на римановом многообразии M^n.

Определение 3.14 *Пусть M^n риманово многообразие с римановой связностью $\bar\nabla$ и тензором кривизны $\bar R$. Пусть ξ – фиксированное гладкое векторное поле на M^n. Обозначим $\mathfrak{X}(M^n)$ набор всех гладких векторных полей на M^n. Отображение $\overset{*}{\nabla}\colon \mathfrak{X}(M^n)\times\mathfrak{X}(M^n)\to\mathfrak{X}(M^n)$ определенное формулой*

$$\overset{*}{\nabla}_{\bar X}\,\bar Y=\bar\nabla_{\bar X}\bar Y+\frac{1}{2}\Big[\bar R(\xi,\bar\nabla_{\bar X}\xi)\bar Y+\bar R(\xi,\bar\nabla_{\bar Y}\xi)\bar X\Big] \tag{3.31}$$

является аффинной связностью без кручения на M^n. Назовем ее ξ - связностью.

Отметим, что, если ξ - параллельное векторное поле, или многообразие M^n является плоским, то ξ-связность совпадает со связностью Леви-Чивита M^n.

Предложение 3.15 *Пусть F^l – подмногообразие в римановом многообразии M^n. Пусть ξ – векторное поле на M^n вдоль F^l. Тогда $\xi(F^l)$ вполне геодезично в TM^n если и только если*

(a) F^l вполне геодезично относительно ξ-связности (3.31);

(b) для любых векторных полей X,Y на F^l

$$\bar\nabla_X\bar\nabla_Y\xi=\bar\nabla_{\overset{*}{\nabla}_X Y}\xi+\frac{1}{2}\bar R(X,Y)\xi.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться определением вполне геодезического подмногообразия, формулами Ковальского (1.9) и результатом Предложения 3.12.

Для случаев, когда $l = 1$ и $l = n$, мы получаем уравнения геодезических [65] и известные условия вполне геодезичности $\xi(M^n)$, найденные в [77]. В частности

Следствие 3.16 *Если $F^l = M^n$, то $\xi(M^n)$ вполне геодезично в TM^n если и только если для любых векторных полей $\bar X, \bar Y$ на M^n*

$$\bar\nabla_{\bar X}\bar\nabla_{\bar Y}\xi = \bar\nabla_{\overset{*}{\nabla}_{\bar X}\bar Y}\xi + \frac{1}{2}\bar R(\bar X, \bar Y)\xi.$$

Результат Следствия 3.16 может быть выражен в более геометрических терминах. Определим *"оператор Вейнгартена"* A_ξ для поля ξ

$$A_\xi \bar Y = -\bar\nabla_{\bar Y}\xi, \text{ для всех } \bar Y \in \mathfrak{X}(M^n). \tag{3.32}$$

Введем симметричное билинейное отображение $\Gamma_\xi : \mathfrak{X}(M^n)\times\mathfrak{X}(M^n) \to \mathfrak{X}(M^n)$

$$\Gamma_\xi(\bar X, \bar Y) = \frac{1}{2}\Big[\bar R(A_\xi \bar X, \xi,)\bar Y + \bar R(A_\xi \bar X, \xi)\bar X\Big], \tag{3.33}$$

для всех $\bar X$, $\bar Y \in \mathfrak{X}(M^n)$. Тогда определение ξ-связности примет вид, подобный разложению Гаусса

$$\overset{*}{\nabla}_{\bar X} \bar Y = \bar\nabla_{\bar X}\bar Y + \Gamma_\xi(\bar X, \bar Y). \tag{3.34}$$

Ковариантная производная $(1,1)$ тензорного поля A_ξ задается как

$$(\bar\nabla_{\bar X}A_\xi)\bar Y = -\bar\nabla_{\bar X}\bar\nabla_{\bar Y}\xi + \bar\nabla_{\bar\nabla_{\bar X}\bar Y}\xi.$$

Следовательно, выполняется уравнения типа Кодацци

$$\bar R(\bar X, \bar Y)\xi = (\bar\nabla_{\bar Y}A_\xi)\bar X - (\bar\nabla_{\bar X}A_\xi)\bar Y.$$

В этих обозначениях

$$\bar{\nabla}_{\overset{*}{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}}\xi + \frac{1}{2}\bar{R}(\bar{X},\bar{Y})\xi - \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\xi = -A_\xi(\Gamma_\xi(\bar{X},\bar{Y}) + \frac{1}{2}\Big[(\bar{\nabla}_{\bar{X}}A_\xi)\bar{Y} + (\bar{\nabla}_{\bar{Y}}A_\xi)\bar{X}\Big].$$

Определим симметричное билинейное отображение $\Omega_\xi : \mathfrak{X}(M^n)\times\mathfrak{X}(M^n)\to\mathfrak{X}(M^n)$ формулой

$$\Omega_\xi(\bar{X},\bar{Y}) = -A_\xi(\Gamma_\xi(\bar{X},\bar{Y})) + \frac{1}{2}\Big[(\bar{\nabla}_{\bar{X}}A_\xi)\bar{Y} + (\bar{\nabla}_{\bar{Y}}A_\xi)\bar{X}\Big].$$

Тогда Следствие 3.16 может быть повторно сформулировано как

Следствие 3.17 *Если ξ - гладкое векторное поле на римановом многообразии M^n, то $\xi(M^n)$ вполне геодезично в TM^n если и только если для любых векторных полей $\bar{X},\bar{Y}$ на M^n*

$$\Omega_\xi(\bar{X},\bar{Y}) = -A_\xi(\Gamma_\xi(\bar{X},\bar{Y})) + \frac{1}{2}\Big[(\bar{\nabla}_{\bar{X}}A_\xi)\bar{Y} + (\bar{\nabla}_{\bar{Y}}A_\xi)\bar{X}\Big] = 0, \qquad (3.35)$$

где Γ_ξ и A_ξ определены (3.33) и (3.32) соответственно.

Замечание 3.18 Предложение 3.15 может также быть повторно сформулировано в этих терминах: *пусть F^l – подмногообразие в римановом многообразии M^n и ξ – векторное поле на M^n вдоль F^l. Тогда $\xi(F^l)$ вполне геодезично в TM^n, если и только если F^l - вполне геодезично относительно ξ-связности (3.31) и Ω_ξ обращается в нуль на касательном расслоении F^l.*

Как показано в [107], для случая единичного касательного расслоения, Хопфовские векторные поля на нечетно мерных сферах порождают вполне геодезические подмногообразия в T_1S^n. Хопфовские векторные поля являются полями Киллинга на сферах. Однако следующее утверждение показывает, что для касательного расслоения пространства постоянной кривизны векторные поля Киллинга не порождают вполне геодезических подмногообразий.

Теорема 3.19 *Ненулевое Киллингово векторное поле на пространстве ненулевой постоянной кривизны (M^n, c) никогда не порождает вполне геодезическое подмногообразие в TM^n. Более того, многообразие с положительной секционной кривизной не допускают ненулевого Киллингова векторного поля со вполне геодезическим свойством.*

Доказательство. Пусть ξ – Киллингово векторное поле на пространстве M^n постоянной кривизны c. Тогда A_ξ - кососимметричной линейный оператор, то есть.

$$\bar g(A_\xi \bar X, \bar Y) + \bar g(\bar X, A_\xi \bar Y) = 0, \tag{3.36}$$

и кроме того,

$$(\bar\nabla_{\bar X} A_\xi)\bar Y = \bar R(\xi, \bar X)\bar Y \tag{3.37}$$

для всех векторных полей $\bar X, \bar Y$ на M^n ([90]). Так как M^n имеет ненулевую постоянную кривизну, уравнение (3.35) может быть упрощено, а именно,

$$(\bar\nabla_{\bar X} A_\xi)\bar Y + (\bar\nabla_{\bar Y} A_\xi)\bar X = c\Big[2\bar g(\bar X, \bar Y)\,\xi - \bar g(\xi, \bar X)\bar Y - \bar g(\xi, \bar Y)\bar X\Big],$$

$$\bar R(A_\xi \bar X, \xi,)\bar Y + \bar R(A_\xi \bar X, \xi)\bar X = c\Big[\bar g(\xi, \bar X)A_\xi \bar Y + \bar g(\xi, \bar Y)A_\xi \bar X\Big].$$

Так что ξ вполне геодезично если

$$\bar g(\xi, \bar X)\bar Y + \bar g(\xi, \bar Y)\bar X + A_\xi(\bar g(\xi, \bar X)A_\xi \bar Y + \bar g(\xi, \bar Y)A_\xi \bar X) = 2\bar g(\bar X, \bar Y)\,\xi,$$

или

$$\bar g(\xi, \bar X)\Big[\bar Y + A_\xi(A_\xi \bar Y)\Big] + \bar g(\xi, \bar Y)\Big[\bar X + A_\xi(A_\xi \bar X)\Big] = 2\bar g(\bar X, \bar Y)\,\xi,$$

для всех векторных полей $\bar{X}, \bar{Y}$ на M^n. Выбирая $\bar{X}, \bar{Y}$ так, что $\bar{X}_q \neq 0$ и $\bar{X}_q = \bar{Y}_q \perp \xi_q$, мы получаем $2\,|\bar{X}_q|^2 \xi_q = 0$. Поэтому, $\xi = 0$ для всех $q \in M^n$.

Пусть ξ – ненулевое Киллингово векторное поле на многообразии с *положительной* (непостоянной) секционной кривизной. Из (3.36) следует, что $A_\xi \xi \perp \xi$. Если $A_\xi \xi = 0$, то, после подстановки $Y = \xi$ в (3.36), мы заключаем, что ξ имеет постоянную длину и поэтому может быть вполне геодезическим только если это параллельное векторное поле [77]. В этом случае, $M^n = M^{n-1} \times E^1$ и мы приходим к противоречию. Предположим что $A_\xi \xi \neq 0$. Тогда $\xi \wedge A_\xi \xi$ – ненулевое поле бивектора. Полагая $\bar{Y} = \bar{X}$ в (3.35) и используя (3.37), мы имеем $A_\xi \Big[\bar{R}(\xi, A_\xi \bar{X})\bar{X}\Big] + \bar{R}(\xi, \bar{X})\bar{X} = 0$. Беря скалярное произведение с ξ и применяя (3.36), мы получаем $-\bar{g}(\bar{R}(\xi, A_\xi \bar{X})\bar{X}, A_\xi \xi) + K_{\xi \wedge \bar{X}} |\xi \wedge \bar{X}|^2 = 0$. Наконец, полагая $\bar{X} = A_\xi \xi$, мы имеем $K_{\xi \wedge \bar{X}} = 0$ и приходим к противоречию.

■

Следующая Теорема подобна доказанной П. Вальчаком [77], но не имеет таких жестких последствий для структуры M^n.

Теорема 3.20 *Пусть ξ – векторное поле постоянной длины вдоль подмногообразие $F^l \subset M^n$. Тогда $\xi(F^l)$ – вполне геодезическое подмногообразие в TM^n, если и только если F^l вполне геодезично в M^n и ξ – параллельное векторное поле на M^n вдоль F^l.*

Доказательство. Условие $|\,\xi\,| = const$ влечет $\bar{g}\,(\bar{\nabla}_X \xi, \xi) = 0$ для любого векторного поля X касательного к F^l. Так как $\xi(F^l)$, по предположению, является вполне геодезическим, то из второго условия Предложения 3.15 следует, что $\bar{g}\,(\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \xi, \xi) = 0$. Следовательно $\bar{g}\,(\bar{\nabla}_X \xi, \bar{\nabla}_Y \xi) = 0$ для любых $X, Y \in T_q F^l$, $x \in F^l$. Полагая $X = Y$, мы видим, что $\bar{\nabla}_X \xi = 0$, то есть ξ параллелен вдоль F^l в объемлющем пространстве и второе условие Предложения 3.15 выполнено. Кроме того, условие $\bar{\nabla}_X \xi = 0$ означает, что ξ-связность (3.31) совпадает со связностью Леви-Чивита M^n, так что F^l вполне геодезично в M^n согласно Предложению 3.15.

С другой стороны, если F^l вполне геодезично в M^n и $\bar{\nabla}_X\xi = 0$ для любого касательного векторного поля X на F^l, тогда оба условия Предложения 3.15 удовлетворяются с очевидностью.

■

Накладывая больше ограничений на векторное поле, мы можем получить более геометричный результат.

Теорема 3.21 *Пусть ξ – нормальное векторное поле на подмногообразии $F^l \subset M^n$, параллельное в нормальном расслоение. Тогда $\xi(F^l)$ вполне геодезическое в TM^n, если и только если F^l вполне геодезическое подмногообразие в M^n.*

Доказательство. Если ξ - нормальное векторное поле к F^l и параллельное в нормальном расслоении, то $\bar{\nabla}_X\xi = -A_\xi X$ для каждого векторного поля X на F^l, где A_ξ - оператор формы F^l относительно ξ, и следовательно $\bar{g}\,(\bar{\nabla}_X\xi, \xi) = 0$. Это означает что $|\xi|$=const вдоль F^l.

Пусть $\xi(F^l)$ – вполне геодезическое в TM^n. Тогда из (b) Предложения 3.15 мы видим это $\bar{g}\,(\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y\xi, \xi) = 0$, что влечет $|\bar{\nabla}_X\xi| = 0$ для каждого X касательного к F^l. В этот случай, вдоль F^l ξ-связность (3.31) совпадает со связностью Леви-Чивита M^n и (a) Предложения 3.15 влечет вполне геодезическое свойство F^l.

Наоборот, если ξ - нормальное векторное поле, которое является параллельным в нормальном расслоении F^l, и F^l вполне геодезическое, тогда $\bar{\nabla}_X\xi = 0$ для любого векторного поля X касательного к F^l. Очевидно, оба условия Предложения 3.15 выполнены.

■

Применение Теоремы 3.21 к частному случаю слоеных римановых многообразий позволяет прояснить геометрическую структуру $\xi(M^n)$. Многообразие M^n, является *ν-слоеным*, если оно допускает семейство $\mathcal{F}$ связных ν-мерных подмногообразий $\{\mathcal{F}_\alpha; \alpha \in\}$, называемых *листами*, так что (i) $M^n = \bigcup\limits_{\alpha\in} \mathcal{F}_\alpha$; (ii) $\mathcal{F}_\alpha \cap \mathcal{F}_\beta = \emptyset$ для $\alpha \neq \beta$; (iii) существует покрытие координатными картами $\mathcal{U}$ многообразия M^n такое, что в каждой локальной карте $U \in \mathcal{U}$ листы могут быть выражены локально как подмногообразия уровня, то есть $u^{\nu+1} = c_{\nu+1}, \dots, u^n = c_n$.

Семейство $\mathcal{F}$ называют *ν-слоением* и *гиперслоением* для $\nu = n-1$. Гиперслоение, является *трансверсально ориентируемым* если M^n допускает векторное поле ξ трансверсальное к листам. Кроме того, относительно римановой метрики на M^n, это векторное поле может быть выбрано как поле единичных нормалей для каждого листа.

Подмногообразие $F^{k+\nu} \subset M^n$ называют ν-линейчатым , если $F^{k+\nu}$ допускает ν-слоение $\big\{\mathcal{F}_\alpha;\, \alpha \in A\big\}$ такое, что каждый лист $\mathcal{F}_\alpha$ является вполне геодезическим в M^n. Листы $\mathcal{F}_\alpha$ называются *образующими* [64].

Следствие 3.22 *Пусть M^n – риманово многообразие, допускающее вполне геодезическое трансверсально ориентируемое гиперслоение $\mathcal{F}$. Пусть ξ – поле нормалей слоения, имеющее постоянную длину. Тогда $\xi(M^n)$ является $(n-1)$ линейчатым подмногообразием в TM^n с образующими $\xi(\mathcal{F}_\alpha)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}_\alpha$ листы гиперслоения и ξ – векторное полем постоянной длины на M^n, которое является полем нормалей вдоль каждого листа. По Теореме 3.21, $\xi(\mathcal{F}_\alpha)$ вполне геодезическое в TM^n для каждого α. Так как $\xi : M^n \to \xi(M^n)$ – гомеоморфизм, $\xi(\mathcal{F}_\alpha) \cap \xi(\mathcal{F}_\beta) = \emptyset$ для $\alpha \neq \beta$ и $\xi(M^n) = \bigcup\limits_{\alpha\in} \xi(\mathcal{F}_\alpha)$. Наконец, если $\mathcal{F}_\alpha$ задается $u^n = c_n$ в пределах локальной карты U тогда из (3.28) следует, что $\xi(\mathcal{F}_\alpha)$ задается теми же самые равенствами в пределах локальной карты $\xi(U)$. Таким образом, $\xi(\mathcal{F}) = \big\{\xi(\mathcal{F}_\alpha); \alpha \in A\big\}$ образует гиперслоение на $\xi(M^n)$ со вполне геодезическими листами в TM^n.

■

Если объемлющее пространство имеет постоянную кривизну $c \neq 0$, и ξ - нормальное векторное поле на подмногообразии $F^l \subset M^n$, тогда необходимое и достаточное условие на ξ, обеспечивающее вполне геодезичность подмногообразия в TM^n принимает довольно простой вид.

Теорема 3.23 *Пусть F^l – подмногообразие пространства $M^n(c)$ постоянной кривизны $c \neq 0$. Пусть ξ – нормальное векторное поле на F^l. Тогда $\xi(F^l)$ вполне геодезическое в TM^n, если и только если F^l вполне геодезическое в $M^n(c)$ и ξ параллельно в нормальном расслоении.*

Доказательство. Тензор кривизны $M^n(c)$ имеет вид

$$\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z} = c\,(\bar{g}\,(\bar{Y}, \bar{Z})\bar{X} - \bar{g}\,(\bar{X}, \bar{Z})\bar{Y}\,). \tag{3.38}$$

Если ξ - нормальное векторное поле на F^l тогда $\bar{\nabla}_X\xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X\xi$. Так как $A_\xi X$ касателен, и $\nabla^{\perp}_X\xi$ нормален к F^l, из (3.38) мы находим

$$\bar{R}(\xi, \bar{\nabla}_X\xi)Y = -c\,g\,(A_\xi X, Y)\,\xi$$

для любых векторных полей X, Y на F^l. Таким образом, условия Предложения 3.15 означают, что

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_X Y - c\,g\,(A_\xi X, Y)\xi \quad \text{касательно к} \quad F^l, \\ \bar{\nabla}_{\bar{\nabla}_X Y - c\,g\,(A_\xi X, Y)\xi}\,\xi = \bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y\xi. \end{cases} \tag{3.39}$$

Умножая $(3.39)_1$ сначала на ξ, а затем на нормальное векторное поле η, ортогональное ξ, мы имеем

$$\begin{cases} g\,(A_\xi X, Y)(1 - c\,|\xi|^2) = 0, \\ g\,(A_\eta X, Y) = 0. \end{cases}$$

Если ξ имеет постоянную длину $|\xi|^2 = \frac{1}{c}$ $(c > 0)$, тогда по Теореме 3.20, F^l - вполне геодезическое в M^n, в ином случае F^l вполне геодезическое сразу же. Так что F^l вполне геодезическое и поэтому $\bar{\nabla}_X\xi = \nabla^{\perp}_X\xi$, $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$. Условие $(3.39)_2$ теперь принимает вид

$$\nabla^{\perp}_{\nabla_X Y}\xi = \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\xi. \tag{3.40}$$

Положим $Y = \nabla_V Z$, где V и Z - произвольные векторные поля касательные к F^l. Тогда из (3.40), мы получаем $\nabla^{\perp}_{\nabla_X\nabla_V Z}\xi = \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_{\nabla_V Z}\xi$. Применяя (3.40) к $\nabla^{\perp}_{\nabla_V Z}\xi$ в правой части вышеупомянутого уравнения, мы видим что $\nabla^{\perp}_{\nabla_V Z}\xi = \nabla^{\perp}_V\nabla^{\perp}_Z\xi$ и поэтому,

$$\nabla^{\perp}_{\nabla_X\nabla_V Z}\xi = \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_V\nabla^{\perp}_Z\xi. \tag{3.41}$$

Меняя местами X и V, мы получаем

$$\nabla^{\perp}_{\nabla_V\nabla_X Z}\xi = \nabla^{\perp}_V\nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Z\xi. \tag{3.42}$$

Наконец, применяя снова (3.40) к скобке $[X, V]$ и Z, мы получаем

$$\nabla^{\perp}_{\nabla_{[X,V]}Z}\xi = \nabla^{\perp}_{[X,V]}\nabla^{\perp}_Z\xi. \tag{3.43}$$

Объединяя (3.41), (3.42) и (3.43), мы получаем $\nabla^{\perp}_{R(X,V)Z}\xi = R^{\perp}(X, V)\nabla^{\perp}_Z\xi$, где R - тензор кривизны F^l, и $R^{\perp}$ - тензор кривизны нормальной связности. Так как F^l - вполне геодезическое и $M^n(c)$ имеет постоянную кривизну, $R^{\perp}(X, Y)\eta \equiv 0$ для любого нормального векторного поля η и, кроме того, $R(X, Y)Z = c\,(g\,(Y, Z)X - g\,(X, Z)Y)$. Так что мы имеем $c\,\nabla^{\perp}_{g\,(Y,Z)X-g\,(X,Z)Y}\xi = 0$. Полагая X ортогональным к Y и $Y = Z$ мы получаем $\nabla^{\perp}_X\xi = 0$ для любого векторного поля X на F^l, что заканчивает необходимую часть доказательства. Достаточная часть тривиальна.

$\blacksquare$

Теорема 3.23 особенно ясно показывает различие между наши рассмотрениями и результатом Вальчака [77], так как наличие на многообразии параллельного векторного поля приводит к вырождению его в прямое метрическое произведение.

3.4. Классификация вполне геодезических подмногообразий в TM^2

В предыдущем разделе мы рассматривали случай подмногообразий в TM^n, трансверсальных слоям и имеющим размерность размерности $l < n$ и нашли некоторые примеры вполне геодезических подмногообразия этого типа. В этом разделе мы рассматриваем более общую проблему описания всех возможных вполне геодезических подмногообразий в *касательном расслоении* римановых двумерных многообразий со знакопостоянной ненулевой кривизной. Для случая пространства постоянной кривизны эта проблема была сформулирована А.Борисенко в разделе задач работы [99].

Локальное описание двумерных вполне геодезических подмногообразий в TM^2 содержится в следующем утверждении.

Теорема 3.24 *Пусть M^2 – риманово многообразие знако-постоянной кривизны $K \neq 0$. Предположим, что $\tilde{F}^2 \subset TM^2$ - вполне геодезическое подмногообразие. Тогда локально $\tilde{F}^2$ - одно из следующих подмногообразий:*

(a) отдельный слой T_qM^2;

(b) если $K = const$, то это базовое многообразие, вложенное в TM^2 нулевым сечением.

(c) линейчатая поверхность построенная на геодезической γ в M^2 с образующими, порожденными параллельным вдоль γ единичным векторным полем;

Доказательство. Пусть$\tilde{F}^2$ – подмногообразием в TM^2. Пусть $(x^1, x^2; \xi^1, \xi^2)$ – локальная карта на TM^2. Тогда локально $\tilde{F}^2$ можно задать отображением вида

$$f: \begin{cases} x^1 = x^1(u^1, u^2), & \xi^1 = \xi^1(u^1, u^2), \\ x^2 = x^2(u^1, u^2), & \xi^2 = \xi^1(u^1, u^2), \end{cases}$$

где u^1, u^2 - локальные параметры на $\tilde{F}^2$. Якобиева матрица f_* отображения f имеет вид

$$f_* = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \xi^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \xi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \xi^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}.$$

Так как $rank\ f_* = 2$, мы имеем три *геометрически различных* возможности достигнуть ранга, а именно

$$(i) \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \xi^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \xi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \xi^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \neq 0; \qquad (ii) \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \neq 0;$$

$$(iii) \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \xi^1}{\partial u^2} \end{pmatrix} \neq 0;$$

Без потери общности мы можем рассмотреть эти возможности так, что (ii) исключает (i), и (iii) исключает (i) и (ii), ограничивая рассмотрения до меньшей окрестности или даже до открытого и плотного подмножества

Наиболее простым является **Случай (i).** В этом случае локальную параметризацию $\tilde{F}^2$ можно задать как

$$f: \begin{cases} x^1 = x^1(u^1, u^2), & \xi^1 = u^1, \\ x^2 = x^2(u^1, u^2), & \xi^2 = u^2. \end{cases}$$

Принимая во внимание, что мы исключаем случай (ii) из рассмотрения случая (iii), мы должно предположить

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \xi^1}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial x^1}{\partial u^2} = 0.$$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \xi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \xi^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial x^1}{\partial u^1} = 0.$$

Таким образом, мы заключаем, что $x^1 = const$. Тем же самым способом, мы получаем, что $x^2 = const$. Поэтому, подмногообразие этого вида не ничто иное, как слой, который является очевидно вполне геодезическим, что дает **утверждение (a)** доказываемой теоремы.

Случай (ii). В этом случае можно локально параметризовать подмногообразие как

$$f : \begin{cases} x^1 = u^1, & \xi^1 = \xi^1(u^1, u^2), \\ x^2 = u^1, & \xi^2 = \xi^2(u^1, u^2), \end{cases}$$

и мы можем рассмотреть подмногообразие $\tilde{F}^2$ как образ векторного поля $\xi(u^1, u^2)$ на базовом многообразии. Обозначим $\tilde{F}^2$ в этом случае через $\xi(M^2)$.

Для случая векторного поля, заданного на всем многообразии, формула (3.35) примет вид

$$-A_\xi(\Gamma_\xi(X,Y)) + \frac{1}{2}\Big[(\nabla_X A_\xi)Y + (\nabla_Y A_\xi)X\Big] = 0. \qquad (3.44)$$

Естественно переписать это уравнение полагая $\xi = \rho e$, где $\rho = |\xi|$ и e – единичное векторное поле. Как результат, мы получаем, что $\xi(M^n)$ вполне геодезично в TM^n тогда и только тогда, когда для любого векторного поля

X выполнены следующие уравнения

$$\begin{aligned} &Hess_\rho(X,X) - \rho^2\Big(R(e,\nabla_X e)X\Big)(\rho) - \rho\,|\nabla_X e|^2 = 0,\\ &\rho^3\nabla_{R(e,\nabla_X e)X} e - 2X(\rho)\nabla_X e - \rho(\nabla_X\nabla_X e - \nabla_{\nabla_X X} e + |\nabla_X e|^2\, e) = 0, \end{aligned} \tag{3.45}$$

где $Hess_\rho(X,X)$ - гессиан функции ρ.

Действительно, уравнение (3.44) эквивалентно уравнению

$$\nabla_X\nabla_X\xi - \nabla_{\nabla_X X}\xi = \nabla_{R(\xi,\nabla_X\xi)X}\xi, \tag{3.46}$$

где X - произвольное векторное поле. Полагая $\xi = \rho\, e$, где e - единичное векторное поле, мы имеем

$$\begin{aligned} &\nabla_X\nabla_X(\rho\, e) - \nabla_{\nabla_X X}(\rho\, e) = \nabla_X(X(\rho)e + \rho\,\nabla_X e) - (\nabla_X X)(\rho)e-\\ &\rho\,\nabla_{\nabla_X X} e = \Big(X(X(\rho)) - (\nabla_X X)(\rho)\Big)e + 2X(\rho)\nabla_X e + \rho\,(\nabla_X\nabla_X e - \nabla_{\nabla_X X} e) \end{aligned}$$

и

$$\nabla_{R(\xi,\nabla_X\xi)X}\xi = \rho^2\Big(R(e,\nabla_X e)X\Big)(\rho)\, e + \rho^3\nabla_{R(e,\nabla_X e)X} e.$$

Если мы заметим, что $X(X(\rho)) - (\nabla_X X)(\rho) \overset{def}{=} Hess_\rho(X,X)$ и для единичного векторного поля e мы имеем $\big\langle\nabla_X\nabla_X e - \nabla_{\nabla_X X} e, e\big\rangle = -|\nabla_X e|^2$, тогда мы можем разложить уравнение (3.46) на e и $e^\perp$ компоненты, что дает уравнения (3.45).

Из размерностных соображений следует. что для данного единичного векторного поля e всегда существует по крайней мере локально векторное поле e_0 такое, что $\nabla_{e_0} e = 0$. В частности, при $n = 2$ из уравнений (3.45) следует, что либо M^2 является плоским, либо e_0 – геодезическое векторное поле и ρ линейна относительно естественного параметра на каждой e_0 геодезической линии. Кроме того, поле ξ образует постоянный угол с каждой e_0 геодезической линией. Действительно, из $(3.45)_1$ следует, что $Hess_\rho(e_0,e_0) = 0$ в каждой точке M^2. Из $(3.45)_2$ мы видим, что $r(e_0,e_0)e = 0$, что дает $\nabla_{e_0}\nabla_{e_0} e - \nabla_{\nabla_{e_0}e_0} e = -\nabla_{\nabla_{e_0}e_0} e = 0$. Если $\nabla_{e_0}e_0 \neq 0$, то поле e параллельно на

M^2, а значит M^2 – плоское многообразие. Если же предполагать, что M^2 не плоско, то e_0 с необходимостью геодезическое векторное поле. Так как в этом случае $Hess_\rho(e_0, e_0) = e_0(e_0(\rho)) = 0$, мы заключаем, что ρ линейна относительно естественного параметра на каждой e_0 геодезической линии. Что касается угловой функции $\langle e_0, e\rangle$, мы имеем $e_0\langle e_0, e\rangle = \langle\nabla_{e_0} e_0, e\rangle + \langle e_0, \nabla_{e_0} e\rangle = 0$.

Как следствие, можно принять интегральные траектории поля e_0 в качестве координатных и построить полугеодезическую локальную систему координат (u, v) такую, что e является параллельным вдоль u-геодезических. Пусть

$$ds^2 = du^2 + b^2(u, v)\, dv^2 \tag{3.47}$$

будет первой фундаментальной формой M^2 относительно этой координатной системы. Обозначим ∂_1 и ∂_2 соответствующие координатные векторные поля. Тогда следующие уравнения должны быть удовлетворены: $\nabla_{\partial_1} e = 0,\ \partial_1^2(\rho) = 0$. Введем единичные векторные поля $e_1 = \partial_1,\ \ e_2 = \frac{1}{b}\partial_2$. Тогда следующие правила ковариантного дифференцирования имеют место

$$\begin{aligned} &\nabla_{e_1} e_1 = 0, &&\nabla_{e_1} e_2 = 0,\\ &\nabla_{e_2} e_1 = -k\, e_2 &&\nabla_{e_2} e_2 = k\, e_1, \end{aligned} \tag{3.48}$$

где k - геодезическая кривизна v-кривых. Заметим, что $k = -\frac{\partial_1 b}{b}$. Относительно выбранной координатной системы, поле ξ может быть выражено как

$$\xi = \rho\,(\cos\omega\, e_1 + \sin\omega\, e_2), \tag{3.49}$$

где $\omega = \omega(u, v)$ - угловая функция, то есть, $e = \cos\omega\, e_1 + \sin\omega\, e_2$. Введем единичное векторное поле $\nu = -\sin\omega\, e_1 + \cos\omega\, e_2$. Тогда мы можем легко найти $\nabla_{e_1} e = \partial_1\omega\, \nu,\quad \nabla_{e_2} e = (e_2(\omega) - k)\, \nu$. Так как e параллелен вдоль u-кривых, мы заключаем что $\partial_1\omega = 0$, так что $\omega = \omega(v)$.

Теперь проблема может быть сформулирована так: *на римановом с 2 многообразиями с метрикой (3.47), найти векторное поле вида (3.49), где*

$$\partial_1^2\rho = 0 \text{ и } \omega = \omega(v), \tag{3.50}$$

удовлетворяющее уравнению (3.46). Эта задача сводится к системе следующей системе уравнений.

$$\begin{aligned} &\nabla_{e_2}\nabla_{e_2}\xi - (k + c\,K)\nabla_{e_1}\xi = 0,\\ &\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}\xi + \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}\xi + (k + c\,K)\nabla_{e_2}\xi = 0, \end{aligned} \tag{3.51}$$

или в скалярном виде

$$\begin{cases} e_2(e_2(\rho)) - (k + c\,K)\,e_1(\rho) = \rho\lambda^2,\\ e_2(c) = 0,\\ 2e_1(e_2(\rho)) + c\,K\,e_2(\rho) = 0,\\ e_1(c) + c\,(k + c\,K) = 0 \end{cases} \tag{3.52}$$

где $\lambda := \big\langle \nabla_{e_2} e, \nu \big\rangle = e_2(\omega) - k$, $c := \rho^2\lambda = \pm|\,\xi \wedge \nabla_{e_2}\xi|$ и K - гауссова кривизна.

Действительно, $\nabla_{e_1}\xi = e_1(\rho)\,e$, $\nabla_{e_2}\xi = e_2(\rho)\,e + \rho\lambda\nu$. Принимая во внимание (3.48) и (3.50), мы имеем

$$\begin{aligned} &\nabla_{e_1}\nabla_{e_1}\xi - \nabla_{\nabla_{e_1}e_1}\xi = e_1(e_1(\rho))\,e = \partial_1^2\rho\,e = 0,\\ &\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}\xi - \nabla_{\nabla_{e_1}e_2}\xi = \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}\xi,\\ &\nabla_{e_2}\nabla_{e_1}\xi - \nabla_{\nabla_{e_2}e_1}\xi = \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}\xi + k\nabla_{e_2}\xi,\\ &\nabla_{e_2}\nabla_{e_2}\xi - \nabla_{\nabla_{e_2}e_2}\xi = \nabla_{e_2}\nabla_{e_2}\xi - k\nabla_{e_1}\xi. \end{aligned}$$

Что касается правой части (3.46), мы имеем

$$\begin{aligned} &R(\xi, \nabla_{e_1}\xi)e_1 = 0, \quad R(\xi, \nabla_{e_1}\xi)e_2 = 0,\\ &R(\xi, \nabla_{e_2}\xi)e_1 = \rho^2\lambda\,R(e, \nu)e_1 = -\rho^2\lambda\,K\,e_2,\\ &R(\xi, \nabla_{e_2}\xi)e_2 = \rho^2\lambda\,R(e, \nu)e_2 = \rho^2\lambda\,K\,e_1. \end{aligned}$$

Поэтому, полагая $X = e_1$ в (3.46), мы получаем тождество. Полагая $X = e_2$, мы имеем

$$\nabla_{e_2}\nabla_{e_2}\xi - k\nabla_{e_1}\xi = \rho^2\lambda\, K\nabla_{e_1}\xi.$$

Полагая $X = e_1 + e_2$, мы получаем $\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}\xi + \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}\xi + k\nabla_{e_2}\xi = -\rho^2\lambda\, K\nabla_{e_2}\xi$. Остается заметить,что

$$|\,\xi\wedge\nabla_{e_2}\xi|^2 = |\xi|^2\,|\nabla_{e_2}\xi|^2 - \big\langle\xi,\nabla_{e_2}\xi\big\rangle^2 = \rho^2(e_2(\rho)^2 + \rho^2\lambda^2) - (e_2(\rho)\rho)^2 = \rho^4\lambda^2.$$

Так что, если мы положим $c = \rho^2\lambda$, то очевидно приходим к (3.51).

Более того, продолжая вычисления, мы видим

$$\begin{aligned}\nabla_{e_2}\nabla_{e_2}\xi = {} & \Big[e_2(e_2(\rho)) - \rho\lambda^2\Big]\,e + \Big[e_2(\rho)\lambda + e_2(\rho\lambda)\Big]\,\nu = \\ & \Big[e_2(e_2(\rho)) - \rho\lambda^2\Big]\,e + \tfrac{1}{\rho}e_2(c)\,\nu,\\ \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}\xi + \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}\xi = {} & \Big[e_2(e_1(\rho)) + e_1(e_2(\rho))\Big]e + \Big[e_1(\rho)\lambda + e_1(\rho\lambda)\Big]\nu = \\ & \Big[e_2(e_1(\rho)) + e_1(e_2(\rho))\Big]e + \tfrac{1}{\rho}e_1(c)\nu.\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $e_1(e_2(\rho)) - e_2(e_1(\rho)) = k\,e_2(\rho)$, уравнения (3.51) могут быть переписаны как

$$\begin{aligned}&\Big[e_2(e_2(\rho)) - \rho\lambda^2\Big]\,e + \tfrac{1}{\rho}e_2(c)\,\nu - (k + cK)e_1(\rho)\,e = 0\\ &\Big[2\,e_1(e_2(\rho)) - k\,e_2(\rho)\Big]\,e + \tfrac{1}{\rho}e_1(c)\,\nu + (k + cK)\Big[e_2(\rho)\,e + \rho\lambda\,\nu\Big] = 0\end{aligned}$$

и после очевидных упрощений мы приходим к уравнению (3.52).

До этого момента мы не использовали постоянства кривизны рассматриваемого многообразия. Пусть M^2 риманово многообразие постоянной кривизны $K \neq 0$. Тогда функция b в (3.47) должна удовлетворять уравнению

$$-\frac{\partial_{11}b}{b} = K.$$

Общее решение этого уравнения может быть выражено в 3 видах:

(a) $b(u,v) = A(v)\cos(u/r + \theta(v))$ или $b(u,v) = A(v)\sin(u/r + \theta(v))$ для $K =$

$1/r^2 > 0$;

(b) $b(u,v) = A(v)\cosh(u/r + \theta(v))$ или $b(u,v) = A(v)\sinh(u/r + \theta(v))$ для $K = -1/r^2 < 0$;

(c) $b(u,v) = A(v)e^{u/r}$ для $K = -1/r^2 < 0$;

Очевидно, мы можем положить $A(v) \equiv 1$ (путем изменения параметра v) в каждом из этих случаев. Уравнения $(3.52)_2$ означают, что c не зависит от v. Так как K постоянна, из уравнения $(3.52)_4$ следует $e_2(k) = 0$. Если мы заметим, что $k = -\frac{\partial_1 b}{b}$, то можно легко найти $\theta(v) = const$ для случаев (a) и (b). После изменения u-параметра, функция b принимает один из видов

(a) $b(u,v) = \cos(u/r)$ или $b(u,v) = \sin(u/r)$ для $K = 1/r^2 > 0$;

(b) $b(u,v) = \cosh(u/r)$ или $b(u,v) = \sinh(u/r)$ для $K = -1/r^2 < 0$;

(c) $b(u,v) = e^{u/r}$ для $K = -1/r^2 < 0$;

Из уравнения $(3.52)_4$ мы находим

$$cK = -\frac{e_1(c)}{c} - k = -\frac{e_1(c)}{c} + \frac{e_1(b)}{b} = e_1(\ln b/c).$$

Предположим сначала что $e_2(\rho) \neq 0$. Умножая $(3.52)_3$ на $e_2(\rho)$), мы можем легко разрешить это уравнение относительно $e_2(\rho)$ в виде $e_2(\rho)^2\, b/c = h(v)^2$ или $\partial_2\rho = h(v)\sqrt{c\,b}$.

Так как ρ линейна относительно u-параметра, скажем $\rho = a_1(v)u + a_2(v)$, тогда $\partial_2\rho = a_1'u + a_2'$ и поэтому $\sqrt{cb}$ также линеен относительно u, а именно $\sqrt{cb} = m_1(v)u + m_2(v) = \frac{a_1'}{h}\,u + \frac{a_2'}{h}$. Но функции c и b не зависят от v. Поэтому m_1 и m_2 - константы, так что $a_1 = m_1 \int h(v)\,dv, a_2 = m_2 \int h(v)\,dv$. Таким образом $\sqrt{cb} = m_1 u + m_2$.

Теперь функция c принимает вид $c(u) = \frac{(m_1u+m_2)^2}{b}$ и поэтому $e_1(c) = \frac{2m_1(m_1u+m_2)}{b} - \frac{(m_1u+m_2)^2\partial_1 b}{b^2}$. Подстановка в $(3.52)_4$ дает

$$\frac{2m_1(m_1u+m_2)}{b} - \frac{2(m_1u+m_2)^2\partial_1 b}{b^2} + \frac{(m_1u+m_2)^4}{b^2}K = 0$$

или

$$\frac{(m_1u+m_2)}{b^2}\Big[2m_1b-2(m_1u+m_2)\partial_1 b+(m_1u+m_2)^3K\Big]=0.$$

Выражение в скобках - алгебраическое и не может быть тождественно нулем если $K \neq 0$. Поэтому $m_1 = m_2 = 0$ и следовательно $\rho^2\lambda := c = 0$. Но это тождество подразумевает $\lambda = 0$ или $\rho = 0$. Если $\lambda = 0$ тогда e - параллельное единичное векторное поле и поэтому, M^2 является плоским, и мы приходим к противоречию. Поэтому $\rho = 0$.

Предположим теперь, что $e_2(\rho) = 0$. Тогда $\rho = a_1u + a_2$, где a_1, a_2 - константы, и мы приходим к следующей системе

$$-(k+cK)\partial_1\rho = \rho\lambda^2, \quad \partial_2\, c = 0, \quad \partial_1 c + c(k+cK) = 0. \tag{3.53}$$

Если $\partial_1\rho = 0$ тогда немедленно $\rho = 0$ или $\lambda = 0$. Тождество $\lambda = 0$ подразумевает $K = 0$ как и выше. Поэтому, $\rho = 0$.

Предположим $\partial_1\rho \neq 0$ или, эквивалентно, $a_1 \neq 0$. Тогда из $(3.53)_1$ мы получаем

$$(k+cK) = -\frac{\rho\lambda^2}{a_1} \tag{3.54}$$

Так как $c = \rho^2\lambda$, из $(3.53)_2$ мы видим что $\partial_2\lambda = 0$ или $\partial_2\left[\frac{\partial_2\omega+\partial_1 b}{b}\right] = 0$. Так как b не зависит от v, мы имеем $\partial_{22}\omega = 0$ или эквивалентно $\partial_2\omega = \alpha = const$. Таким образом, $\lambda = \frac{\alpha+\partial_1 b}{b}$. Теперь мы можем найти $\partial_1 c$ двумя способами. Сначала из $(3.53)_3$ используя (3.54) и имея в виду, что $c = \rho^2\lambda$ находим $\partial_1 c = c\frac{\rho\lambda^2}{a_1} = \frac{\rho^3\lambda^3}{a_1}$ С другой стороны, непосредственно $\partial_1 c = 2\rho\partial_1\rho\lambda + \rho^2\partial_1\lambda$. Легко видеть, что $\partial_1\lambda = k\lambda - K$ и следовательно мы получаем $\partial_1 c = 2a_1\rho\lambda + \rho^2(k\lambda - K)$. Уравнивая, мы имеем $2a_1\rho\lambda+\rho^2(k\lambda-K)-\frac{\rho^3\lambda^3}{a_1} = 0$ или $\frac{\rho}{a_1}\left[2a_1^2\lambda + a_1\rho(k\lambda-K) - \rho^2\lambda^3\right] = 0$. Выражение в скобках - алгебраическое и не может быть тождественно нулем для $K \neq 0$. Если $\rho \neq 0$, то мы приходим к противоречию. Таким образом, мы получаем **утверждение (b)** доказываемой теоремы.

Случай (iii). В этом случае можно параметризовать подмногообразие $\tilde{F}^2$ как

$$f : \begin{cases} x^1 = u^1, & \xi^1 = u^2, \\ x^2 = x^2(u^1, u^2), & \xi^2 = \xi^2(u^1, u^2). \end{cases}$$

Принимая во внимание, что мы исключаем случай (i) в рассмотрениях случая (iii), мы должны положить

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \frac{\partial x^2}{\partial u^2} = 0.$$

Поэтому, $x^2(u^1, u^2)$ не зависит от u^2, и локальное представление принимает вид

$$f : \begin{cases} x^1 = u^1, & \xi^1 = u^2, \\ x^2 = x^2(u^1), & \xi^2 = \xi^2(u^1, u^2). \end{cases}$$

Заметим, что $\pi(\tilde{F}^2) = (u^1, x^2(u^1)$ - регулярная кривая на M^2. Если мы обозначаем эту проекцию $\gamma(s)$, параметризовав ее параметром длины дуги и положим $u^2 := t$, локальная параметризация $\tilde{F}^2$ принимает вид

$$\gamma(s) : \begin{cases} x^1 = x^1(s), \\ x^2 = x^2(s), \end{cases} \qquad \xi(t, s) : \begin{cases} \xi^1 = t, \\ \xi^2 = \xi^2(t, s) \end{cases} \tag{3.55}$$

Мы можем понимать этот вид подмногообразий в TM^2 как однопараметрическое семейство гладких векторных полей на регулярной кривой на базовом многообразии. Мы будем называть подмногообразия этого типа как *линейчатые подмногообразия* в TM^2.

Фиксируя $s = s_0$, мы видим, что $\tilde{F}^2$ пересекает слой в точке $x^1(s_0), x^2(s_0)$ по кривой $\xi(t, s_0)$. Если $\tilde{F}^2$, как предполагается, является вполне геодезическим, то эта кривая - прямая линия на слое. Поэтому, семейство $\xi(t, s)$ должно иметь вид

$$\xi(t,s): \begin{cases} \xi^1 = t, \\ \xi^2 = \alpha(s)t + \beta(s). \end{cases}$$

Введем два векторных поля, заданных вдоль $\gamma(s)$

$$a = \partial_1 + \alpha(s)\partial_2, \quad b = \beta(s)\partial_2. \tag{3.56}$$

Тогда мы можем представить $\xi(t,s)$ как $\xi(t,s) = a(s)\,t + b(s)$. Обозначим τ и ν векторы репера Френе кривой $\gamma(s)$. Обозначим также $(\ ')$ ковариантную производную векторных полей относительно параметра длины дуги на $\gamma(s)$. Тогда $\tau\,' = k\,\nu$, $\nu\,' = -k\,\tau$. Обозначим через $\tilde\partial_1$ и $\tilde\partial_2$ соответственно s и t координатные векторные поля на $\tilde F^2$. Простое вычисление дает $\tilde\partial_1 = \tau^h + (\xi')^v$, $\quad \tilde\partial_2 = a^v$. Одно из единичных нормальных векторных полей может быть найдено сразу же, а именно $\tilde N_1 = \nu^{\,h}$. Рассмотрим условия на F^2, обеспечивающие ее вполне геодезичность относительно нормального векторного поля $\tilde N_1$. Используя формулы (1.9), находим

$$\tilde\nabla_{\tilde\partial_1}\tilde N_1 = \tilde\nabla_{\tau^{\,h}+(\xi')^v}\nu^{\,h} = -k\tau^{\,h} - \frac{1}{2}\Big[R(\tau,\nu)\xi\Big]^v + \frac{1}{2}\Big[R(\xi,\xi')\nu\Big]^h$$

Поэтому, $\big\langle\big\langle\tilde\nabla_{\tilde\partial_1}\tilde N_1, \tilde\partial_2\big\rangle\big\rangle = -\frac{1}{2}\big\langle R(\tau,\nu)\xi, a\big\rangle = -\frac{1}{2}\big\langle R(\tau,\nu)b, a\big\rangle = 0$. Так как M^2, как предполагается, не имеет нулей кривизны в рассматриваемой области, то значит $b\wedge a = 0$. Из (3.56) мы заключаем $b = 0$. Таким образом, $\xi(t,s) = a(s)\,t$. Кроме того,

$$\begin{gathered}\big\langle\big\langle\tilde\nabla_{\tilde\partial_1}\tilde N_1, \tilde\partial_1\big\rangle\big\rangle = -k - \frac{1}{2}\big\langle R(\tau,\nu)\xi,\xi'\big\rangle + \frac{1}{2}\big\langle R(\xi,\xi')\nu,\tau\big\rangle = \\ -\,k + \big\langle R(\xi,\xi')\nu,\tau\big\rangle = -k + t^2\big\langle R(a,a')\nu,\tau\big\rangle = 0\end{gathered}$$

тождественно относительно параметра t. Поэтому, $k = 0$ и $a\wedge a' = 0$. Таким образом, $\gamma(s)$ – геодезическая линия на M^2. Кроме того, $(a\wedge a' = 0) \sim (a' = \lambda a)$. Положим $a = \rho(s)\,e(s)$, где $\rho = |a(s)|$. Тогда $(a' = \lambda a) \sim (\rho' e + \rho\, e' = \lambda\rho\, e)$, что означает что $e' = 0$. Из этого мы заключаем, что $\xi(t,s) =$

$t\rho(s)\, e(s)$, где $\rho(s)$ - произвольная функция, и $e(s)$ - единичное векторное поле, параллельное вдоль $\gamma(s)$. Поэтому $\tilde\partial_1 = \tau^h + t\rho'\, e^v$, $\tilde\partial_2 = \rho\, e^v$ и мы можем найти другое единичное нормальное векторное поле $\tilde N_2 = (e^\perp)^v$, где $e^\perp(s)$ – единичное векторное поле, также параллельное вдоль $\gamma(s)$ и ортогональное к $e(s)$. Для этого векторного поля мы имеем

$$\tilde\nabla_{\tilde\partial_1} \tilde N_2 = \tilde\nabla_{\tau^h + (\xi')^v} (e^\perp)^v = [(e^\perp)']^v + \tfrac12 \Big[R(\xi, e^\perp)\tau\Big]^h = \tfrac12 t\rho \Big[R(e, e^\perp)\tau\Big]^h,$$
$$\tilde\nabla_{\tilde\partial_2} \tilde N_2 = 0$$

Очевидно, $\langle\langle \tilde\nabla_{\tilde\partial_i} \tilde N_2, \tilde\partial_k\rangle\rangle = 0$ для всех $i, k = 1, 2$. Таким образом, подмногообразие вполне геодезическое. Этим доказывается **утверждение (c)** теоремы.

■

Линейчатые вполне геодезические подмногообразия существуют и в общем случае [113].

Предложение 3.25 *Пусть M^n – риманово многообразие. Рассмотрим цилиндрическую поверхность $\tilde F^2 \subset TM^n$ вида $\big\{\gamma(s), t\,\rho(s)\, e(s)\big\}$, где $\gamma(s)$ геодезическая в M^n, $e(s)$ - единичное векторное поле, параллельное вдоль γ и $\rho(s)$ - произвольная гладкая функция. Тогда $\tilde F^2$ является вполне геодезическим в TM^n и внутренне плоским.*

Локальное описание трехмерных вполне геодезических подмногообразий в TM^2 дает следующая теорема.

Теорема 3.26 *Пусть M^2 – риманово многообразие с гауссовой кривизной K. Вполне геодезическое подмногообразие $\tilde F^3 \subset TM^2$ локально является либо*

a) 3 плоскостью в $TM^2 = E^4$, если $K \equiv 0$, или *b) ограничением касательного расслоения на геодезическую $\gamma \in M^2$ такую, что $K|_\gamma = 0$, если $K \not\equiv 0$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{F}^3$ – подмногообразие в TM^2, заданное в локальной карте $(x^1, x^2; \xi^1, \xi^2)$. Тогда локально $\tilde{F}^3$ можно задать отображением f вида

$$f(u^1, u^2, u^3) = \left(x^1(u^1, u^2, u^3),\ x^2(u^1, u^2, u^3),\ \xi^1(u^1, u^2, u^3),\ \xi^2(u^1, u^2, u^3)\right),$$

где u^1, u^2, u^3 - локальные параметры на $\tilde{F}^3$. Якобиева матрица f_* отображения f имеет вид

$$f_* = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \xi^1}{\partial u^2} & \frac{\partial \xi^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \xi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \xi^2}{\partial u^2} & \frac{\partial \xi^2}{\partial u^3} \end{pmatrix}.$$

Так как $rank\ f_* = 3$, мы имеем две геометрически различных возможности достичь ранга, а именно

$$(a) \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \xi^1}{\partial u^2} & \frac{\partial \xi^1}{\partial u^3} \end{pmatrix} \neq 0; \quad (b) \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \xi^1}{\partial u^2} & \frac{\partial \xi^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \xi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \xi^2}{\partial u^2} & \frac{\partial \xi^2}{\partial u^3} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Без потери общности мы можем рассматривать эти возможности таким образом, что (b) исключает (a).

Рассмотрим случай (a). В этом случае мы можем локально параметризовать подмногообразие F^3 как

$$x^1 = u^1,\ x^2 = u^2, \quad \xi^1 = u^3,\ \xi^2 = \xi^2(u^1, u^2, u^3).$$

В соответствии с гипотезой, подмногообразие $\tilde{F}^3$ вполне геодезическое в TM^2. Поэтому, оно пересекает каждый слой TM^2 по вертикальным геодезическим, то есть прямым линиям. Положим $u_0 = (u_0^1,\ u_0^2)$. Тогда параметрическое уравнение $\tilde{F}^3 \cap T_{u_0}M^2$ относительно параметров слоя будет иметь вид

$$\xi^1 = u^3, \quad \xi^2 = \xi^2(u_0^1, u_0^2, u^3).$$

С другой стороны, это уравнение должно быть уравнением прямой линии и следовательно

$$\xi^1 = u^3, \quad \xi^2 = \alpha(u_0^1, u_0^2)\, u^3 + \beta(u_0^1, u_0^2),$$

где $\alpha(u) = \alpha(u^1, u^2)$ и $\beta(u) = \beta(u^1, u^2)$ некоторые гладкие функции на M^2. С этой точки зрения, если положить $u^3 = t$ *подмногообразие может быть локально представлено как однопараметрическое семейство гладких векторных полей* ξ_t *на* M^2 вида

$$\xi_t(u) = t\,\partial_1 + \big(\alpha(u)t + \beta(u)\big)\,\partial_2$$

относительно координатного репера $\partial_1 = \partial/\partial u^1$, $\partial_2 = \partial/\partial u^2$. Введем векторные поля

$$a(u) = \partial_1 + \alpha(u)\,\partial_2, \quad b(u) = \beta(u)\,\partial_2. \tag{3.57}$$

Тогда ξ_t может быть выражено как $\xi_t(u) = t\,a(u) + b(u)$. Естественно обозначить через $\xi_t(M^2)$ подмногообразие $\tilde{F}^3 \subset TM^2$ этого типа.

Обозначим $\tilde{\partial}_i$ $(i = 1, \dots, 3)$ координатные векторные поля $\xi_t(M^2)$. Тогда

$$\tilde{\partial}_1 = \big\{1, 0, 0, t\,\partial_1\alpha + \partial_1\beta\big\}, \quad \tilde{\partial}_2 = \big\{0, 1, 0, t\,\partial_2\alpha + \partial_2\beta\big\}, \quad \tilde{\partial}_3 = \big\{0, 0, 1, \alpha\big\}.$$

Прямое вычисление показывает, что эти поля можно представить как

$$\tilde{\partial}_1 = \partial_1^h + t(\nabla_{\partial_1} a)^v + (\nabla_{\partial_1} b)^v, \quad \tilde{\partial}_2 = \partial_2^h + t(\nabla_{\partial_2} a)^v + (\nabla_{\partial_2} b)^v, \quad \tilde{\partial}_3 = a^v.$$

Обозначим $\tilde{N}$ нормальное векторное поле $\xi_t(M^2)$. Тогда $\tilde{N} = (a^\perp)^v + Z_t^h$, где $\big\langle a^\perp, a\big\rangle = 0$ и поле $Z_t = Z_t^1\partial_1 + Z_t^2\partial_2$ может быть легко найдено из уравнений

$$\big\langle\big\langle \tilde{\partial}_i, \tilde{N}\big\rangle\big\rangle = \big\langle Z_t, \partial_i\big\rangle + t\big\langle \nabla_{\partial_i} a, a^\perp\big\rangle + \big\langle \nabla_{\partial_i} b, a^\perp\big\rangle = 0 \quad (i = 1, 2)$$

Используя формулы Ковальского (1.9), можно найти

$$\tilde\nabla_{\tilde\partial_i} a^v = \tilde\nabla_{\partial_i^h + t(\nabla_{\partial_i} a)^v + (\nabla_{\partial_i} b)^v} a^v = (\nabla_{\partial_i} a)^v + \frac{1}{2}\Big[R(\xi_t, a)\partial_i\Big]^h = (\nabla_{\partial_i} a)^v + \frac{1}{2}\Big[R(b, a)\partial_i\Big]^h.$$

Если подмногообразие $\xi_t(M^2)$ вполне геодезическое, то следующие уравнения должны быть удовлетворены тождественно

$$\big\langle\big\langle \tilde\nabla_{\tilde\partial_i}\tilde\partial_3, \tilde N\big\rangle\big\rangle = \big\langle \nabla_{\partial_i} a, a^\perp\big\rangle + \frac{1}{2}\big\langle R(b,a)\partial_i, Z_t\big\rangle = 0$$

относительно параметра t. Чтобы упростить дальнейшие вычисления, предположим что координатная система на M^2 - ортогональна, так что $\big\langle \partial_1, \partial_2\big\rangle = 0$ и

$$R(b,a)\partial_2 = g^{11}K\,|b\wedge a|\partial_1, \quad R(b,a)\partial_1 = -g^{22}K\,|b\wedge a|\partial_2,$$

где K - гауссова кривизна M^2 и g^{11}, g^{22}, - контравариантные метрические коэффициенты. Тогда мы имеем

$$\big\langle R(b,a)\partial_1, Z_t\big\rangle = -g^{22}K\,|b\wedge a|\big\langle Z_t, \partial_2\big\rangle = g^{22}K\,|b\wedge a|\Big(t\big\langle \nabla_{\partial_2} a, a^\perp\big\rangle + \big\langle \nabla_{\partial_2} b, a^\perp\big\rangle\Big),$$

$$\big\langle R(b,a)\partial_2, Z_t\big\rangle = g^{11}K\,|b\wedge a|\big\langle Z_t, \partial_1\big\rangle = -g^{11}K\,|b\wedge a|\Big(t\big\langle \nabla_{\partial_1} a, a^\perp\big\rangle + \big\langle \nabla_{\partial_1} b, a^\perp\big\rangle\Big).$$

Таким образом мы получаем систему

$$\begin{cases} g^{22}K|b\wedge a|\big\langle \nabla_{\partial_2} a, a^\perp\big\rangle t + \big\langle \nabla_{\partial_1} a, a^\perp\big\rangle + g^{22}K|b\wedge a|\big\langle \nabla_{\partial_2} b, a^\perp\big\rangle = 0, \\[2ex] g^{11}K|b\wedge a|\big\langle \nabla_{\partial_1} a, a^\perp\big\rangle t - \big\langle \nabla_{\partial_2} a, a^\perp\big\rangle + g^{11}K|b\wedge a|\big\langle \nabla_{\partial_1} b, a^\perp\big\rangle = 0, \end{cases}$$

которая должен быть удовлетворена тождественно относительно t. Как следствие, мы имеем 3 случая:

$$\text{(i)} \qquad K = 0, \begin{cases} \big\langle \nabla_{\partial_1} a, a^\perp\big\rangle = 0, \\[2ex] \big\langle \nabla_{\partial_2} a, a^\perp\big\rangle = 0 \end{cases} ;$$

$$\text{(ii)}\qquad K\neq 0,\quad |b\wedge a|=0,\ \begin{cases}\big\langle \nabla_{\partial_1} a, a^{\perp}\big\rangle = 0,\\[1ex] \big\langle \nabla_{\partial_2} a, a^{\perp}\big\rangle = 0\end{cases};$$

$$\text{(iii)}\qquad K\neq 0,\ \ |b\wedge a|\neq 0,\ \begin{cases}\big\langle \nabla_{\partial_1} a, a^{\perp}\big\rangle = 0,\\[1ex] \big\langle \nabla_{\partial_2} a, a^{\perp}\big\rangle = 0\end{cases},\begin{cases}\big\langle \nabla_{\partial_1} b, a^{\perp}\big\rangle = 0,\\[1ex] \big\langle \nabla_{\partial_2} b, a^{\perp}\big\rangle = 0\end{cases};$$

Случай (i). В этом случае основное многообразие является плоским, и мы можем выбрать декартову координатную систему, так чтобы ковариантное дифференцирование стало обычным, и мы имеем

$$\nabla_{\partial_i} a = \big\{0, \partial_i\alpha\big\}\quad (i=1,2),\quad a^{\perp} = \big\{-\alpha, 1\big\}.$$

Из $\big\langle \nabla_{\partial_i} a, ^{\perp}\big\rangle = 0$ следует, что $\alpha = const$, то есть a - параллельное векторное поле. Кроме того, в этом случае

$$\tilde\partial_1 = \big\{1,0,0,\partial_1\beta\big\} = \partial_1^h + (\partial_1 b)^v,\ \tilde\partial_2 = \big\{0,1,0,\partial_2\beta\big\} = \partial_1^h + (\partial_1 b)^v,$$

$$\tilde\partial_3 = \big\{0,0,1,\alpha\big\},\quad \tilde N = \big\{-\partial_1\beta, -\partial_2\beta, -\alpha,\ 1\big\}.$$

Теперь мы можем найти $\tilde\nabla_{\tilde\partial_i}\tilde\partial_k = (\nabla_{\partial_i}\partial_k b)^v = \big\{0,0,0,\partial_{ik}\beta\big\}$ и условие вполне геодезичности $\big\langle\big\langle \tilde\nabla_{\tilde\partial_i}\tilde\partial_k, \tilde N\big\rangle\big\rangle = 0$ влечет $\partial_{ik}\beta = 0$. Таким образом, $\beta = m_1u^1 + m_2u^2 + m_0$, где m_1, m_2, m_0 – произвольные константы. Как следствие, подмногообразие $\xi_t(M^2)$ получает параметрические уравнения вида

$$x^1 = u^1,\ x^2 = u^2,\quad \xi^1 = t,\ \xi^2 = \alpha t + m_1u^1 + m_2u^2 + m_0$$

и мы имеем обычную гиперплоскость в $TM^2 = E^4$.

Случай (ii). С учетом (3.57), условие $b\wedge a = 0$ влечет $b = 0$. Условия $\big\langle \nabla_{\partial_1} a, a^{\perp}\big\rangle = 0,\quad \big\langle \nabla_{\partial_2} a, a^{\perp}\big\rangle = 0$ означают, что $\nabla_{\partial_1} = \lambda_1(u)\,a,\ \nabla_{\partial_2} = \lambda_2(u)\,a$. Как следствие, мы имеем $\xi_t = t\,a$, а значит

$$\tilde\partial_1 = \partial_1^h + t(\nabla_{\partial_1} a)^v = \partial_1^h + t\lambda_1\, a^v,\ \tilde\partial_2 = \partial_2^h + t(\nabla_{\partial_2} a)^v = \partial_2^h + t\lambda_2\, a^v,$$

$$\tilde\partial_3 = a^v, \quad \tilde N = (a^\perp)^v.$$

Используя формулы Ковальского (1.9),

$$\tilde\nabla_{\tilde\partial_i}\tilde\partial_k = \tilde\nabla_{\partial_i^h + t\lambda_i\, a^v}\Big(\partial_k^h + t\lambda_k\, a^v\Big) =$$
$$\tilde\nabla_{\partial_i^h}\partial_k^h + t\lambda_i\tilde\nabla_{a^v}\partial_k^h + \tilde\nabla_{\partial_i^h}(t\lambda_k a^v) + t^2\lambda_i\lambda_k\tilde\nabla_{a^v}a^v =$$
$$(\nabla_{\partial_i}\partial_k)^h - \frac{1}{2}\Big[R(\partial_i,\partial_k)\xi_t\Big]^v + t\lambda_i\frac{1}{2}\Big[R(\xi_t,a)\partial_k\Big]^h + t\partial_i(\lambda_k)a^v + t\lambda_k(\nabla_{\partial_i}a)^v +$$
$$t\lambda_k\frac{1}{2}\Big[R(\xi_t,a)\partial_i\Big]^h = (\nabla_{\partial_i}\partial_k)^h - t\frac{1}{2}\Big[R(\partial_i,\partial_k)a\Big]^v + t\partial_i(\lambda_k)a^v + t\lambda_k\lambda_i\, a^v.$$

Очевидно, для $i \neq k$

$$\big\langle\big\langle\tilde\nabla_{\tilde\partial_i}\tilde\partial_k, \tilde N\big\rangle\big\rangle = -t\frac{1}{2}\big\langle R(\partial_i,\partial_k)a, a^\perp\big\rangle \neq 0,$$

так как M^2 является неплоским и $a \neq 0$. Противоречие

Случай (iii). Условия влекут $\nabla_i a = \lambda_i(u)\, a, \quad \nabla_i b = \mu_i(u)\, a \quad (i = 1,2)$ и мы имеем

$$\xi_t = t\, a + b,$$

$$\tilde\partial_1 = \partial_1^h + (t\lambda_1 + \mu_1)\, a^v,\ \tilde\partial_2 = \partial_1^h + (t\lambda_2 + \mu_2)\, a^v,\ \tilde\partial_3 = a^v,$$

$$\tilde N = (a^\perp)^v.$$

Вычисления как выше ведут к тождеству

$$\big\langle\big\langle\tilde\nabla_{\tilde\partial_i}\tilde\partial_k, \tilde N\big\rangle\big\rangle = -\frac{1}{2}\big\langle R(\partial_i,\partial_k)\xi_t, a^\perp\big\rangle =$$
$$-t\frac{1}{2}\big\langle R(\partial_i,\partial_k)a, a^\perp\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle R(\partial_i,\partial_k)b, a^\perp\big\rangle = 0$$

что может быть верно если и только если

$$\big\langle R(\partial_i,\partial_k)a, a^\perp\big\rangle = 0, \quad \big\langle R(\partial_i,\partial_k)b, a^\perp\big\rangle = 0.$$

Первое условие противоречит $K \neq 0$.

Рассмотрим случай (b). В этом случае подмногообразие $\tilde{F}^3$ может локально параметризовано как $x^1 = u^1,\ x^2 = x^2(u^1, u^2, u^3) \quad \xi^1 = u^2,\ \xi^2 = u^3$. Так как мы исключаем случай (a), мы должны предположить

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \xi^1}{\partial u^2} & \frac{\partial \xi^1}{\partial u^3} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial x^2}{\partial u^3} = 0;$$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \xi^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \xi^2}{\partial u^2} & \frac{\partial \xi^2}{\partial u^3} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial x^2}{\partial u^2} = 0;$$

Поэтому, в этом случае мы имеем подмногообразие, которое можно параметризовать как $x^1 = x^1(s),\ x^2 = x^2(s), \quad \xi^1 = u^2,\ \xi^2 = u^3$, где s - естественный параметр регулярной кривой $\gamma(s) = \big\{x^1(s), x^2(s)\big\}$ на M^2. Геометрически, подмногообразие этого класса не ничто иное, но ограничение TM^2 на кривую $\gamma(s)$. Обозначим τ и ν репер Френе $\gamma(s)$. Легко проверить это $\tilde{\partial}_1 = \tau^{\,h}, \quad \tilde{\partial}_2 = \partial_1^v, \quad \tilde{\partial}_3 = \partial_2^v, \quad \tilde{N} = \nu^{\,h}$. По формулам Ковальского (1.9), для $i = 1, 2$ мы получаем

$$\big\langle\big\langle \tilde{\nabla}_{\tilde{\partial}_{1+i}} \tilde{N}, \tilde{\partial}_1 \big\rangle\big\rangle = \big\langle\big\langle \tilde{\nabla}_{\partial_i^v} \nu^h, \tau^h \big\rangle\big\rangle = \frac{1}{2}\big\langle R(\xi, \partial_i)\nu, \tau \big\rangle = \frac{1}{2}\big\langle R(\tau, \nu)\partial_i, \xi \big\rangle = 0$$

для произвольного ξ. Очевидно, M^2 является плоским вдоль $\gamma(s)$.

■

В качестве следствия, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 3.27 *Пусть M^2 – риманово многообразие со знакопостоянной кривизной. Тогда TM^2 не допускает вполне геодезического 3-подмногообразия.*

3.5. Выводы

В разделе решена задачи с описания проекций геодезических линий в расслоениях над пространственными формами. Доказано, что невертикальная геодезическая линия на касательном или касательном сферическом расслоении над $\mathcal{M}^n(c)$ проектируется в кривую с постоянными кривизнами, лежащую на соответствующем вполне геодезическом подмногообразии $\mathcal{M}^3(c)$. Это свойство сохраняется при Берже-деформации метрики Сасаки для касательного сферического расслоения и не сохраняется для касательного расслоения без нулевого сечения.

Векторные поля порождают подмногообразия, трансверсальные слоям. Верно и обратное: вложенное подмногообразие, трансверсальное слою, порождается некоторым векторным полем вдоль подмногообразия в базе. В некоторых случаях подмногообразия такого типа могут быть вполне геодезическими. Например, параллельное векторное поле вдоль вполне геодезического подмногообразия в базе. Поле нормалей трансверсально ориентируемого вполне геодезического гиперслоения расслаивает касательное расслоении единичных векторов на вполне геодезические листы. Для размерности базы $n = 2$ можно дать описание всех вполне геодезических подмногообразий в касательном расслоении многообразия постоянной Гауссовой кривизны.

РАЗДЕЛ 4

ГЕОМЕТРИЯ ЕДИНИЧНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

В данном разделе содержится систематическое исследование геометрических свойств единичного касательного векторного поля как сечения единичного сферического расслоения с метрикой Сасаки. В частности, решаются задачи характеризации многообразий, допускающих сечения с вполне геодезическим свойством. С этой точки зрения рассматриваются классические векторные поля: поле Хопфа на сферах, Киллинговы поля, характеристические векторные поля контактных и Сасакиевых структур, нормальные векторные поля гиперслоений, инвариантные векторные поля на группах Ли. Проводится анализ формулы второй вариации функционала объема для подмногообразий, порожденных сечениями, и исследуется вопрос об устойчивости подмногообразий такого типа в единичном касательном расслоении. Раздел содержит результаты, принадлежащие автору и опубликованные в работах [105], [106], [107], [108], [111], [112], [114], [115], [116], [117], [120].

4.1. Разложения Гаусса и Вейнгартена для $\xi(M) \subset T_1M$

Пусть (M, g) риманово многообразие размерности $(n+1)$ с метрикой g. Обозначим $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение относительно g и ∇ связность Леви-Чивита на M. Напомним, что *метрика Сасаки* на TM определена скалярным произведением (1.7).

Пусть ξ – единичное гладкое касательное векторное поле на (M, g). Для изучения внутренней и внешней геометрии подмногообразия $\xi(M) \subset T_1M$, нам необходимо знать структуру касательного и нормального расслоений этого подмногообразия. Обозначим через $T\xi(M)$ касательное расслоение $\xi(M) \subset T_1M$. Тогда $T\xi(M) = \xi_*(TM)$, где ξ_* – дифференциал сечения $\xi : M \to T_1M$. Нетрудно видеть, что

$$\xi_* X = X^h + (\nabla_X \xi)^v \tag{4.1}$$

для любого $X \in TM$. Обозначим через $\mathfrak{X}(M)$ алгебру Ли гладких векторных полей на M. Известно, что ξ^v является единичным нормальным векторным полем на $T_1M \subset TM$. Тогда для любого $X \in \mathfrak{X}(M)$ векторное поле $X^{tg} = X^v - \langle X, \xi \rangle \xi^v$, является касательным векторным полем на T_1M и называется *тангенциальным лифтом* X [16]. Аналогом леммы Ковальского для ковариантных производных лифтов векторных полей с базы на расслоение единичных векторов является Лемма 1.5 [16]. *Оператор Номидзу* $A_\xi : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}_{\xi^\perp}(M)$ для заданного единичного векторного поля ξ определяется формулой $A_\xi X = -\nabla_X \xi$ [90]. Его сопряженный A^t_ξ определяется стандартным образом

$$\langle A^t_\xi X, Y \rangle = \langle X, A_\xi Y \rangle. \tag{4.2}$$

Заметим, что метрика, индуцированная метрикой Сасаки T_1M на подмногообразии $\xi(M)$, имеет вид

$$\tilde g(\xi_* X, \xi_* Y)\big|_{(u,\xi(u))} = g(X, Y) + g(A_\xi X, A_\xi Y).$$

В выражении через оператор Номидзу мы можем определить касательное $\xi_* : \mathfrak{X}(M) \to T\xi(M)$ и нормальное $\tilde n : \mathfrak{X}(M) \to T^\perp \xi(M)$ отображения по формулам

$$\tilde X = \xi_* X = X^h - (A_\xi X)^{tg}, \qquad \tilde n(Y) = (A^t_\xi Y)^h + Y^{tg}, \tag{4.3}$$

где X и Y – касательные векторные поля на M.

Гладкое отображение римановых многообразий $\phi : (M, g) \to (N, h)$ называется *гармоническим* над областью $G \subset M$ с кусочно гладкой границей, если ϕ является экстремалью функционала энергии

$$\frac{1}{2}\int_G |d\phi|^2\, dV_g$$

Второй фундаментальной формой отображения ϕ называется отображение

$$B_\phi(X,Y) = \nabla^\phi_{\phi_* X}(\phi_* Y) - \phi_*(\nabla^g_X Y),$$

где ∇^ϕ и ∇^g – индуцированная связность Леви-Чивита на $\phi(M)$ и ∇^g – связность Леви-Чивита на M. След второй фундаментальной формы отображения ϕ называется полем напряженности отображения ϕ, то есть $\tau(\phi) = trace(B_\phi)$. В применении к отображению $\xi : M \to T_1M$, с помощью формул Леммы 1.5, нетрудно вычислить

$$\tilde\nabla_{\xi_* X}\xi_* Y = \Big(\nabla_X Y + \frac{1}{2}(R(\xi, \nabla_X\xi)Y + R(\xi, \nabla_Y\xi)X)\Big)^h + \Big(\nabla_X\nabla_Y\xi - \frac{1}{2}R(X,Y)\xi\Big)^{tg}.$$

Так как $R(X,Y)\xi = (\nabla_Y A_\xi)X - (\nabla_X A_\xi)Y$, то

$$\tilde\nabla_{\xi_* X}\xi_* Y = \Big(\nabla_X Y + \frac{1}{2}(R(\xi, \nabla_X\xi)Y + R(\xi, \nabla_Y)X)\Big)^h - \Big(A_\xi(\nabla_X Y) + \frac{1}{2}((\nabla_X A_\xi)Y + (\nabla_Y A_\xi)X)\Big)^{tg}.$$

Наконец,

$$\xi_*(\nabla_X Y) = \big(\nabla_X Y\big)^h - \big(A_\xi(\nabla_X Y)\big)^{tg},$$

а поэтому

$$B_\xi(X,Y) = \frac{1}{2}\Big(R(A_\xi X, \xi)Y + R(A_\xi Y, \xi)X\Big)^h - \frac{1}{2}\Big((\nabla_X A_\xi)Y + (\nabla_Y A_\xi)X\Big)^{tg}.$$

Положим $hB_\xi(X,Y) = \pi_*(B_\xi(X,Y)$ и $vB_\xi(X,Y) = \mathcal{K}(B_\xi(X,Y))$. Тогда

$$\tau(\xi) = (trace(hB_\xi))^h - (trace(vB_\xi))^{tg}$$

и, следовательно, поле ξ задает гармоническое отображение $\xi : M \to T_1M$

тогда и только тогда, когда

$$trace(hB_\xi)^h = 0, \quad trace(vB_\xi)^{tg} = 0.$$

Заметим, что $-trace(vB_\xi) := \bar{\Delta}\xi$ известен как грубый лапласиан поля [87], а единичное векторное поле называется *гармоническим*, если $\bar{\Delta}\xi = \lambda\xi$. Гармонические векторные поля являются экстремалями вариационной задачи для функционала $\int |\nabla\xi|^2 dV$, рассматривавшейся в [78]. Величина $\int |\nabla\xi|^2 dV$ называется тотальным кручением (total bending) или *функционалом энергии* поля и изучалась в работах [13], [78], [79], [80], [81], [82]. Единичное векторное задает *гармоническое отображение* $\xi : M \to T_1M$ тогда и только тогда, когда оно гармоническое и $trace(hB_\xi) = 0$. Свойства гармоничности векторного поля и гармоничности задаваемого им отображения рассматривались в работах [5], [7], [17], [23], [24], [28], [38], [40], [53], [75], [74]. В связи с этим, в работе [114] были введены понятия *грубого гессиана* поля и *тензора гармоничности*

$$\begin{aligned} Hess_\xi(X,Y) &= \tfrac{1}{2}\big((\nabla_X A_\xi)Y + (\nabla_Y A_\xi)X\big), \\ \Gamma_\xi(X,Y) &= \tfrac{1}{2}\big(R(A_\xi X,\xi)Y + R(A_\xi Y,\xi)X\big). \end{aligned} \tag{4.4}$$

В выражении через эти тензоры, $B_\xi(X,Y) = \Big(\Gamma_\xi(X,Y)\Big)^h - \Big(Hess_\xi(X,Y)\Big)^{tg}$. Имеет место следующий технический результат.

Лемма 4.1 *Обозначим через $\bar{\nabla}$, $\tilde{\Omega}$, $\tilde{A}$ и $\tilde{\nabla}^\perp$ индуцированную связность, вторую фундаментальную форму, оператор Вейнгартена и ковариантную производную в нормальной связности подмногообразия $\xi(M)$. Тогда*

$$\bar{\nabla}_{\xi_*X}\xi_*Y = \xi_*\Big(\nabla_X Y + \Gamma_\xi(X,Y)\Big) + \Big(A_\xi(\Gamma_\xi(X,Y)) - Hess_\xi(X,Y)\Big)^{tg}\downarrow_{T\xi(M)},$$

$$\tilde{\Omega}(\xi_*X,\xi_*Y) = \Big(A_\xi(\Gamma_\xi(X,Y)) - Hess_\xi(X,Y)\Big)^{tg}\downarrow_{T^\perp\xi(M)},$$

$$\tilde{A}_{\tilde{n}(Z)}(\xi_* X) =$$

$$-\Big((\nabla_X A^t_\xi)Z + \frac{1}{2}R(\xi, Z)X - \frac{1}{2}R(\xi, A_\xi X)A^t_\xi Z + \frac{1}{2}A^t_\xi\big(R(X, A^t_\xi Z)\xi\big)\Big)^h\downarrow_{T\xi(M)},$$

$$\tilde{\nabla}^\perp_{\xi_* X}\tilde{n}(Z) = \tilde{n}\Big(\nabla_X Z + \frac{1}{2}R(A^t_\xi Z, X)\xi\Big) +$$
$$\Big((\nabla_X A^t_\xi)Z + \frac{1}{2}R(\xi, Z)X - \frac{1}{2}R(\xi, A_\xi X)A^t_\xi Z + \frac{1}{2}A^t_\xi\big(R(X, A^t_\xi Z)\xi\big)\Big)^h\downarrow_{T^\perp\xi(M)},$$

где $\downarrow$ *означает соответствующую проекцию.*

Доказательство. Для доказательства, используем формулы Леммы 1.5 и вид репера (4.3). Получим

$$\tilde{\nabla}_{\xi_* X}\xi_* Y = \Big(\nabla_X Y + \frac{1}{2}R(A_\xi X, \xi)Y + \frac{1}{2}R(A_\xi Y, \xi)X\Big)^h -$$
$$\Big(\nabla_X(A_\xi Y) + \frac{1}{2}R(X, Y)\xi\Big)^{tg}.$$

Выделяя касательную составляющую, находим

$$\tilde{\nabla}_{\xi_* X}\xi_* Y = \xi_*\Big(\nabla_X Y + \Gamma_\xi(X, Y)\Big) +$$
$$\Big(A_\xi(\nabla_X Y) + A_\xi(\Gamma_\xi(X, Y)) - \nabla_X(A_\xi Y) - \frac{1}{2}R(X, Y)\xi\Big)^{tg} =$$
$$\xi_*\Big(\nabla_X Y + \Gamma_\xi(X, Y)\Big) + \Big(A_\xi(\Gamma_\xi(X, Y)) - (\nabla_X A_\xi)Y - \frac{1}{2}R(X, Y)\xi\Big)^{tg}.$$

Осталось заметить, что $R(X, Y)\xi = (\nabla_Y A_\xi)X - (\nabla_X A_\xi)Y$, а поэтому

$$\tilde{\nabla}_{\xi_* X}\xi_* Y = \xi_*\Big(\nabla_X Y + \Gamma_\xi(X, Y)\Big) + \Big(A_\xi(\Gamma_\xi(X, Y)) - Hess_\xi(X, Y)\Big)^{tg}.$$

Векторное поле $\Big(A_\xi(\Gamma_\xi(X, Y)) - Hess_\xi(X, Y)\Big)^{tg}$ трансверсально $\xi(M)$, а поэтому его проекция на нормальное подпространство $\xi(M)$ является векторной второй фундаментальной формой, а проекция на касательное подпространство определяет добавку к деформации связности на $\xi(M)$. Таким образом,

$$\bar{\nabla}_{\xi_* X}\xi_* Y = \xi_*\Big(\nabla_X Y + \Gamma_\xi(X,Y)\Big) + \\ \Big(A_\xi(\Gamma_\xi(X,Y)) - Hess_\xi(X,Y)\Big)^{tg}\downarrow_{T\xi(M)},$$

$$\tilde{\Omega}(\xi_* X, \xi_* Y) = \Big(A_\xi(\Gamma_\xi(X,Y)) - Hess_\xi(X,Y)\Big)^{tg}\downarrow_{T^\perp\xi(M)}.$$

Для поля нормалей $\tilde{n}(Z)$ аналогично находим

$$\tilde{\nabla}_{\xi_* X}\tilde{n}(Z) = \Big(\nabla_X(A^t_\xi Z) + \frac{1}{2}R(\xi,Z)X - \frac{1}{2}R(\xi,A_\xi X)A^t_\xi Z\Big)^h + \\ \Big(\nabla_X Z - \frac{1}{2}R(X,A^t_\xi Z)\xi\Big)^{tg}.$$

Выделим трансверсальную и нормальную составляющие, добавляя и вычитая в полученном выражении вектор $\Big(A^t_\xi\big(\nabla_X Z - \frac{1}{2}R(X,A^t_\xi Z)\xi\big)\Big)^h$. Получим

$$\tilde{\nabla}_{\xi_* X}\tilde{n}(Z) = \\ \Big(\nabla_X(A^t_\xi Z) + \frac{1}{2}R(\xi,Z)X - \frac{1}{2}R(\xi,A_\xi X)A^t_\xi Z - A^t_\xi\big(\nabla_X Z - \frac{1}{2}R(X,A^t_\xi Z)\xi\big)\Big)^h + \\ \Big(A^t_\xi\big(\nabla_X Z - \frac{1}{2}R(X,A^t_\xi Z)\xi\big)\Big)^h + \Big(\nabla_X Z - \frac{1}{2}R(X,A^t_\xi Z)\xi\Big)^{tg} = \\ \Big((\nabla_X A^t_\xi)Z + \frac{1}{2}R(\xi,Z)X - \frac{1}{2}R(\xi,A_\xi X)A^t_\xi Z + \frac{1}{2}A^t_\xi\big(R(X,A^t_\xi Z)\xi\big)\Big)^h + \\ \tilde{n}\big(\nabla_X Z + \frac{1}{2}R(A^t_\xi Z, X)\xi\big).$$

Проекция трансверсальной составляющей на касательное подпространство определяет оператор Вейнгартена, а ее проекция на нормальное подпространство определяет добавку к ковариантной производной в нормальной связности $\xi(M)$, что и завершает доказательство.

■

В качестве следствия Леммы 4.1 получаем выражение для второй фундаментальной формы для $\xi(M) \subset T_1 M$.

Лемма 4.2 *Вторая фундаментальная форма подмногообразия* $\xi(M) \subset T_1M$ *относительно произвольной нормали* $\tilde{n}(Z)$ *имеет вид*

$$\tilde{\Omega}_{\tilde{n}(Z)}(\xi_*X, \xi_*Y) = \big\langle Hess_\xi(X,Y) - A_\xi(\Gamma_\xi(X,Y)), Z'\big\rangle,$$

где $Z' = Z - \big\langle Z, \xi\big\rangle\xi$.

Условия вполне геодезичности для $\xi(M) \subset T_1M$ принимает следующий вид.

Лемма 4.3 *Единичное векторное поле* ξ *на римановом многообразии* M^n *порождает вполне геодезическое подмногообразие* $\xi(M^n) \subset T_1M^n$ *тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет системе уравнений*

$$Hess_\xi(X,Y) - A_\xi\Gamma_\xi(X,Y) - \big\langle A_\xi X, A_\xi Y\big\rangle\,\xi = 0 \tag{4.5}$$

для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$.

В работе [32] были введены в рассмотрение две формы

$$\nu(Z) = trace(X \to (\nabla_X A^t_\xi)Z), \qquad \tilde{\nu}(Z) = trace(X \to R(A_\xi X, \xi)Z).$$

Равенство $\nu(Z) = 0$ для $Z \in \tilde{X}_{\xi^\perp}$ эквивалентно гармоничности поля ξ, а дополнительное условие $\tilde{\nu}(Z) = 0$ для всех $Z \in \tilde{X}(M)$ означает гармоничность отображения $\xi \to T_1M$. В цитируемых работах эти формы рассматривались для нахождения гармонических векторных полей, задающих гармоническое отображения. В качестве следствия отмечалась минимальность таких полей. Для нахождения минимальных векторных в работе [34] была предложена некоторая трудно вычислимая форма, обращение в нуль которой означает минимальность векторного поля. Такой критерий минимальности использовался в работах [20], [31], [37], [38] . Наши вычисления в Лемме 4.1 показывают, что на самом деле для нахождения минимальных векторных полей достаточно форм ν и $\tilde{\nu}$, так как можно выразить среднюю кривизну подмногообразия $\xi(M)$ относительно произвольной нормали $\tilde{N} = (A^t_\xi Z)^h + (Z)^{tg}$ для $Z \in \tilde{X}_{\xi^\perp}(M)$ через эти две формы в следующем виде:

$$n\tilde{H}(\tilde{N}) = \nu(Z) + \tilde{\nu}(A^t_\xi Z).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} n\tilde{H}(\tilde{N}) = trace(\tilde{X} \to \tilde{A}_{\tilde{N}}\tilde{X}) = \\ trace\Big(X \to (\nabla_X A^t_\xi)Z + \frac{1}{2}R(\xi, Z)X - \frac{1}{2}R(\xi, A_\xi X)A^t_\xi Z + \frac{1}{2}A^t_\xi\big(R(X, A^t_\xi Z)\xi\big)\Big) = \\ \nu(Z) + \frac{1}{2}\tilde{\nu}(A^t_\xi Z) + \frac{1}{2}trace(X \to A^t_\xi\big(R(X, A^t_\xi Z)\xi\big)). \end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$\big\langle A^t_\xi\big(R(X, A^t_\xi Z)\xi\big), X\big\rangle = \big\langle R(X, A^t_\xi Z)\xi, A_\xi X\big\rangle = \big\langle R(A_\xi X, \xi)A^t_\xi Z, X\big\rangle,$$

а значит $trace(X \to A^t_\xi\big(R(X, A^t_\xi Z)\xi\big) = \tilde{\nu}(A^t_\xi Z)$. Таким образом, мы имеем $n\tilde{H}((\xi_* Z)^\perp) = \nu(Z) + \tilde{\nu}(A^t_\xi Z)$. Нетрудно видеть, что в наших обозначениях $\tilde{\nu}(Z) = -g(trace(\Gamma_\xi), Z)$.

Чтобы построить естественные касательные и нормальные ортонормированные реперы для $\xi(M)$, можно использовать сингулярное разложение оператора формы A_ξ, основанное на следующем линейном результате алгебры ([91], Теорема 7.3.5).

Теорема 4.4 *Матрица $A \in M_{m,n}$ ранга k может быть представлена в виде*

$$A = F\Sigma E^*,$$

где $F \in M_m$ и $E \in M_n$ - унитарные матрицы.

Матрица $\Sigma = [\sigma_{ij}] \in M_{m,n}$ - такая, что $\sigma_{ij} = 0$, $i \neq j$, $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq$

$\dots \geq \sigma_{kk} > \sigma_{k+1,k+1} = \dots = \sigma_{qq} = 0$, $q = \min\{m, n\}$. Величины $\{\sigma_{ii}\} \equiv \{\lambda_i\}$ являются неотрицательными квадратными корнями собственных значений матрицы AA^t и следовательно однозначно определены. Столбцы матрицы F - собственные векторы матрицы AA^t, и столбцы матрицы E - собственные значения матрицы A^tA. Кроме того, $A^tf_i = \lambda_i e_i$ и $Ae_i = \lambda_i f_i$ для $i = 1, \dots, k$. Если матрица A вещественна, то F, Σ и E могут быть выбраны вещественными.

Столбцы матриц F и E называют соответственно *левыми* и *правыми сингулярными векторами* матрицы A. Значения λ_i называют *сингулярными значениями* матрицы A.

Положим $A = A_\xi$ и применим Теорему 4.4. Так как $A^t_\xi \xi = 0$ для любого единичного векторного поля ξ, существуют ортонормированные локальные реперы $e_0, e_1, \dots, e_n$ и $f_0 = \xi$, $f_1, \dots, f_n$ на M такие, что

$$A_\xi\, e_0 = 0,\ A_\xi\, e_\alpha = \lambda_\alpha f_\alpha, \quad A^t_\xi\, f_0 = 0,\ A^t_\xi\, f_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha,\ \alpha = 1, \dots, n,$$

где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n \geq 0$ - действительные функции.

Естественно назвать функции λ_i $(i = 1, \dots, n)$ *сингулярными главными кривизнами* поля ξ относительно выбранного сингулярного репера. Заметим, что, если необходимо, можно использовать ориентированные сингулярные значения, зафиксировав направления векторов сингулярного репера. Полагая $\lambda_0 = 0$, мы можем переписать соотношения на сингулярных реперах в объединенном виде

$$\begin{gathered} A_\xi\, e_i = \lambda_i f_i, \quad A^t_\xi\, f_i = \lambda_i e_i, \qquad i = 0, 1, \dots, n, \\ \lambda_0 = 0,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Применение формул (4.3) к векторам сингулярного репера позволяет построить ортонормированное оснащение подмногообразия $\xi(M)$, а именно,

$$\begin{aligned}
\tilde e_i &= \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}}(e_i^h-\lambda_i f_i^v), \qquad i=0,1,\dots,n,\\
\tilde n_{\sigma|} &= \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\sigma^2}}\big(\lambda_\sigma e_\sigma^h+f_\sigma^v\ \big),\ \ \sigma=1,\dots,n
\end{aligned} \tag{4.7}$$

образуют ортонормированные реперы в касательном и в нормальном пространствах подмногообразия $\xi(M)$, соответственно.

Лемма 4.5 *Компоненты второй фундаментальной формы* $\xi(M)\subset T_1M$ *относительно реперов* (4.7) *имеют вид*

$$\tilde\Omega_{\sigma|00}=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\sigma^2}}\big[-\big\langle(\nabla_{e_0}A_\xi)e_0,f_\sigma\big\rangle\big],$$

$$\tilde\Omega_{\sigma|\alpha0}=\frac12\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\alpha^2}}\Big[-\big\langle(\nabla_{e_\alpha}A_\xi)e_0+(\nabla_{e_0}A_\xi)e_\alpha,f_\sigma\big\rangle+ \\ \lambda_\sigma\lambda_\alpha\big\langle R(e_\sigma,e_0)\xi,f_\alpha\big\rangle\Big],$$

$$\tilde\Omega_{\sigma|\alpha\beta}=\frac12\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\alpha^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\beta^2}}\Big[-\big\langle(\nabla_{e_\alpha}A_\xi)e_\beta+(\nabla_{e_\beta}A_\xi)e_\alpha,f_\sigma\big\rangle+ \\ \lambda_\alpha\lambda_\sigma\big\langle R(e_\sigma,e_\beta)\xi,f_\alpha\big\rangle+\lambda_\beta\lambda_\sigma\big\langle R(e_\sigma,e_\alpha)\xi,f_\beta\big\rangle\Big],$$

где $\sigma,\alpha,\beta=1,\dots,n$

Доказательство состоит в прямом применении Леммы 4.2 к векторам, порождающим реперы (4.7), а именно

$$X=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i}}e_i,\quad Y=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k}}e_k,\quad Z=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\sigma}}f_\sigma,$$

применении формул (4.6), а как же симметрий тензора кривизны.

Оператор Номидзу удовлетворяет *неголономному уравнению Кодацци*

$$R(X,Y)\xi = (\nabla_Y A_\xi)X - (\nabla_X A_\xi)Y. \tag{4.8}$$

Поэтому оператор Номидзу A_ξ можно называть так же *неголономным оператором Вейнгартена*. Так как реперы (4.3) ортонормированы, то для компонент вектора средней кривизны подмногообразия $\xi(M) \subset T_1M$ получаем

$$(n+1)H_{\sigma|} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\sigma^2}}\Bigg\{ -\big\langle(\nabla_{e_0}A_\xi)e_0, f_\sigma\big\rangle + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{-\big\langle(\nabla_{e_\alpha}A_\xi)e_\alpha, f_\sigma\big\rangle + \lambda_\sigma\lambda_\alpha\big\langle R(e_\sigma,e_\alpha)\xi, f_\alpha\big\rangle}{1+\lambda_\alpha^2}\Bigg\}. \tag{4.9}$$

Можно несколько упростить формулу (4.9). Чтобы сделать это, мы вводим следующие обозначения:

$$E_{i|jk} = \big\langle \nabla e_i e_j, e_k\big\rangle, \quad F_{i|jk} = \big\langle \nabla e_i f_j, f_k\big\rangle,$$

где f_0 полагается нулевым вектором. Очевидно, $E_{i|jk} = -E_{i|kj}$ и $F_{i|jk} = -F_{i|kj}$. Легко проверить, что

$$-\big\langle(\nabla_{e_i}A_\xi)e_j, f_k\big\rangle = e_i(\lambda_j)\delta_{jk} + \lambda_j F_{i|jk} - \lambda_k E_{i|jk}.$$

Поэтому,

$$-\big\langle(\nabla_{e_j}A_\xi)e_j, f_i\big\rangle = e_j(\lambda_j)\delta_{ij} + \lambda_j F_{j|ji} - \lambda_i E_{j|ji},$$

$$-\big\langle(\nabla_{e_i}A_\xi)e_j, f_j\big\rangle = e_i(\lambda_j),$$

$$-\big\langle(\nabla_{e_i}A_\xi)e_j, f_i\big\rangle = e_i(\lambda_j)\delta_{ij} + \lambda_j F_{i|ji}\lambda_i E_{i|ji}$$

Из (4.8) следует, что $\big\langle R(e_i,e_j)\xi, f_j\big\rangle = e_i(\lambda_j) + \big\langle(\nabla_{e_j}A_\xi)e_j, f_i\big\rangle + (\lambda_i+\lambda_j)(E_{j|ji} - F_{j|ji})$. Поэтому $-\big\langle(\nabla_{e_j}A_\xi)e_j, f_i\big\rangle = e_i(\lambda_j) + (\lambda_i+\lambda_j)(E_{j|ji} - F_{j|ji}) - \big\langle R(e_i,e_j)\xi, f_j\big\rangle$. Наконец, вводя матрицу $G_{i|j}$ с компонентами $G_{i|j} = E_{i|ij} - F_{i|ij}$ мы можем переписать формулу средней кривизны следующим образом

$$(n+1)H_{\sigma|} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\sigma^2}} \sum_{i=0}^{n} \frac{e_\sigma(\lambda_i) - (\lambda_i + \lambda_\sigma) G_{i|\sigma} + (\lambda_i\lambda_\sigma - 1)\langle R(e_\sigma, e_i)\xi, f_i\rangle}{1+\lambda_i^2}, \tag{4.10}$$

где предполагается $\lambda_0 = 0$ и $f_0 = 0$.

Рассмотрим выражение для второй фундаментальной формы подмногообразия $\xi(M) \subset T_1M$ для некоторых частных случаев.

Двумерные многообразия. В простейшем случае двумерного риманова многообразия выражение (4.9) для средней кривизны $\xi(M) \subset T_1M$ имеет вид

$$H = \frac{1}{2\sqrt{1+\lambda^2}} \left(-\langle \nabla_{e_0} e_0, e_1 \rangle \lambda + \frac{e_1(\lambda)}{1+\lambda^2} \right). \tag{4.11}$$

Пусть ξ – данное единичное векторное поле. Обозначим e_0 единичное векторное поле такое, что $\nabla_{e_0}\xi = 0$. Обозначим e_1 единичное векторное поле, ортогональное к e_0, такое что $\nabla_{e_1}\xi = \lambda\eta$, где η - единичное векторное поле, ортогональное к ξ. Положим

$$\nabla_\xi \, \xi = k\,\eta, \quad \nabla_\eta \, \eta = \kappa\, \xi.$$

Функции k и κ есть *ориентированные* геодезические кривизны интегральных кривых полей ξ и η соответственно. Ниже мы покажем, что $\lambda^2 = k^2 + \kappa^2$. Обозначим *ориентированные* геодезические кривизны интегральных кривых полей e_0 и e_1 через μ и σ соответственно. Тогда

$$\nabla_{e_0} e_0 = \mu\, e_1, \quad \nabla_{e_1} e_1 = \sigma\, e_0.$$

Ориентации реперов (ξ, η) и (e_0, e_1) независимы. Положим $s = 1$, если ориентации когерентны и $s = 0$ в противном случае.

Следующее предложение дает полезную информацию о связи между сингулярными значениями оператора $(\nabla\xi) = -A_\xi$, геометрическими характеристиками интегральных кривых сингулярного репера и гауссовой кривизной многообразия.

Лемма 4.6 *Пусть ξ – данное гладкое единичное векторное поле на M^2. Обозначим e_0 единичное векторное поле на M^2 такое что $\nabla_{e_0}\xi = 0$. Пусть η и e_1 – единичные векторные поля на M^2 такие, что (ξ, η) и (e_0, e_1) образуют два ортонормированных репера на M^2. Обозначим через λ ориентированное сингулярное значение оператора $(\nabla\xi)$. Тогда мы имеем $\nabla_{e_1}\xi = \lambda\eta$, и выполняется следующие соотношения:*

(a) если $k = \left\langle \nabla_\xi \xi, \eta \right\rangle$ – ориентированная геодезическая кривизна ξ-кривой и $\kappa = \left\langle \nabla_\eta \eta, \xi \right\rangle$ – ориентированная геодезическая кривизна η-кривой, то

$$\lambda^2 = k^2 + \kappa^2;$$

(b) если K - гауссова кривизна M^2, то

$$(-1)^s K = e_0(\lambda) - \lambda\sigma,$$

где $\sigma = \left\langle \nabla_{e_1} e_1, e_0 \right\rangle$ - ориентированная геодезическая кривизна e_1-кривой и

$$s = \begin{cases} 1 \text{ если реперы } (\xi, \eta) \text{ и } (e_0, e_1) \text{ одинаково ориентированы,} \\ 0 \text{ если реперы } (\xi, \eta) \text{ и } (e_0, e_1) \text{ ориентированы противоположно} \end{cases}.$$

Доказательство. (a) Если (ξ, η) - ортонормированный репер на M^2, то

$$\begin{aligned} &\nabla_\xi \xi = k\,\eta, \qquad \nabla_\xi \eta = -k\,\xi, \\ &\nabla_\eta \xi = -\kappa\,\eta, \;\; \nabla_\eta \eta = \kappa\,\xi. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Геометрически, функции k и κ - ориентированные геодезические кривизны ξ-и η-кривых соответственно.

Таким же способом мы получаем

$$\begin{aligned} &\nabla_{e_0} e_0 = \mu\, e_1, \qquad \nabla_{e_0} e_1 = -\mu\, e_0, \\ &\nabla_{e_1} e_0 = -\sigma\, e_1, \;\; \nabla_{e_1} e_1 = \sigma\, e_0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

где μ и σ - ориентированные геодезические кривизны e_0-и e_1-кривых соответственно.

Пусть ω – угловая функция между ξ и e_0. Тогда мы имеем два возможных разложения:

$$\mathrm{Or}(+) \begin{cases} e_0 = \cos\omega\,\xi + \sin\omega\,\eta, \\ e_1 = -\sin\omega\,\xi + \cos\omega\,\eta, \end{cases} \qquad \mathrm{Or}(-) \begin{cases} e_0 = \cos\omega\,\xi + \sin\omega\,\eta, \\ e_1 = \sin\omega\,\xi - \cos\omega\,\eta. \end{cases}$$

В случае $Or(+)$ мы имеем

$$\nabla_{e_0} \xi = (k\cos\omega - \kappa\sin\omega)\,\eta, \quad \nabla_{e_1} \xi = -(k\sin\omega + \kappa\cos\omega)\,\eta,$$

и благодаря выбору e_0 и e_1 мы видим, что

$$\begin{cases} k\cos\omega - \kappa\sin\omega &= 0, \\ k\sin\omega + \kappa\cos\omega &= -\lambda. \end{cases}$$

Так что для случая $Or(+)$ $k = -\lambda\sin\omega$, $\kappa = -\lambda\cos\omega$.

Таким же способом, для случая $Or(-)$ $k = \lambda\sin\omega$, $\kappa = \lambda\cos\omega$. В обоих случаях $\lambda^2 = k^2 + \kappa^2$.

(b) Ввиду выбора реперов,

$$\big\langle R(e_0,e_1)\xi,\eta\big\rangle = \big\langle \nabla_{e_0}\nabla_{e_1}\xi - \nabla_{e_1}\nabla_{e_0}\xi - \nabla_{\nabla_{e_0}e_1-\nabla_{e_1}e_0}\xi,\eta\big\rangle =$$
$$\big\langle \nabla_{e_0}(\lambda\,\eta) - \nabla_{-\mu\,e_0+\sigma\,e_1}\,\xi,\eta\big\rangle = e_0(\lambda) - \lambda\sigma.$$

С другой стороны,

$$\big\langle R(e_0,e_1)\xi,\eta\big\rangle = \begin{cases} -K \text{ в случае } Or(+), \\ +K \text{ в случае } Or(-). \end{cases} \tag{4.14}$$

Положим $s = 1$ для случая $Or(+)$ и $s = 0$ для случая $Or(-)$. Тогда мы получаем $(-1)^s K = e_0(\lambda) - \lambda\sigma$, что заканчивает доказательство.

■

Результат Леммы 4.5 может также быть упрощен следующим способом.

Лемма 4.7 *Пусть M – 2-мерное риманово многообразие гауссовой кривизны K. В терминах Леммы 4.6 вторая фундаментальная форма подмногообразия $\xi(M) \subset T_1M$ может быть представлен в двух эквивалентных формах:*

(i)

$$\tilde\Omega = \begin{bmatrix} -\mu\,\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & (-1)^{s+1}\dfrac{K}{2} + \dfrac{e_0(\lambda)}{1+\lambda^2} \\ (-1)^{s+1}\dfrac{K}{2} + \dfrac{e_0(\lambda)}{1+\lambda^2} & e_1\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) \end{bmatrix},$$

(ii)

$$\tilde\Omega = \begin{bmatrix} -\mu\,\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & \dfrac{1}{2}\left(\sigma\,\lambda + \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}e_0(\lambda)\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\sigma\,\lambda + \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}e_0(\lambda)\right) & e_1\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) \end{bmatrix}.$$

Доказательство. В каждой точке $(p,\xi)\in\xi(M)$ векторы

$$\tilde e_0 = e_0^h, \quad \tilde e_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}(e_1^h+\lambda\eta^v)$$

образуют ортонормированный репер в касательном пространстве $\xi(M)$ и

$$\tilde n = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\big(-\lambda e_1^h + \eta^v \ \big),$$

является единичной нормалью для $\xi(M)\subset T_1M$.

Таким образом мы видим, что в 2-мерном случае компоненты Ω принимают вид

$$\tilde\Omega_{00} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\big\langle -(\nabla_{e_0}A_\xi)e_0,\eta\big\rangle, \quad \tilde\Omega_{11} = \frac{1}{(1+\lambda^2)^{3/2}}\big\langle -(\nabla_{e_1}A_\xi)e_1,\eta\big\rangle,$$

$$\tilde\Omega_{01} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\lambda^2}\Big[-\big\langle(\nabla_{e_1}A_\xi)e_0+(\nabla_{e_0}A_\xi)e_1,\eta\big\rangle + \lambda^2\big\langle R(e_1,e_0)\xi,\eta\big\rangle\Big].$$

Имея в виду (4.13) и (4.14), мы находим

$$\tilde\Omega_{00} = -\mu\,\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \qquad \tilde\Omega_{11} = \frac{e_1(\lambda)}{(1+\lambda^2)^{3/2}} = e_1\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right),$$

$$\tilde\Omega_{01} = \frac{1}{2(1+\lambda^2)}(e_0(\lambda)+\lambda\sigma-\lambda^2(-1)^sK) = \begin{cases} (-1)^{s+1}\dfrac{K}{2}+\dfrac{e_0(\lambda)}{1+\lambda^2} \\ \dfrac{1}{2}\left(\sigma\,\lambda+\dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}e_0(\lambda)\right)\end{cases},$$

где Лемма 4.6 (b) была применена двумя способами.

■

Лемма 4.8 *Пусть ξ и η – единичные взаимно ортогональные векторные поля на 2-мерном римановом многообразии. Обозначим k и κ геодезические кривизны интегральных кривых поля ξ и η, соответственно. Средняя кри-*

визна H векторного поля ξ дается формулой

$$H = \frac{1}{2}\left[\xi\left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2+\kappa^2}}\right) - \eta\left(\frac{\kappa}{\sqrt{1+k^2+\kappa^2}}\right)\right].$$

Доказательство. Из (4.9) можно видеть, что после замены $\xi \to -\xi$ средняя кривизна H только изменяет ее знак. Поэтому, мы можем выбрать направление ξ так, что оно будет полем главных нормалей η - кривых. По тем же причинам можно рассматривать η как поле главных нормалей ξ - кривых. Обозначим ω угол между ξ и полем e_0 сингулярного репера. Тогда $e_0 = \cos\omega\xi + \sin\omega\eta$. Так как $\nabla_{e_0}\xi = 0$, мы имеем $\cos\omega\nabla_\xi\xi + \sin\omega\nabla\eta\xi = 0$. Формулы Френе дают $\nabla_\xi\xi = k\eta, \quad \nabla_\eta\xi = -\kappa\eta$. Поэтому мы получаем

$$k\cos\omega - \kappa\sin\omega = 0. \tag{4.15}$$

Обозначим e_1 и f_1 другие векторы сингулярного репера. Легко проверить, что изменение направлений этих векторов индуцирует изменение знака H. Поэтому, мы можем всегда полагать $f_1 = \eta$ и $e_1 = \pm\sin\omega\xi \mp \cos\omega\eta$, чтобы удовлетворить уравнению $\nabla_{e_1}\xi = \lambda f_1$ с $\lambda \geq 0$. Принимая во внимание все это, положим

$$e_0 = \cos\omega\xi + \sin\omega\eta, \quad e_1 = \sin\omega\xi - \cos\omega\eta.$$

Тогда мы имеем $\nabla_{e_0}\xi = \cos\omega\nabla_\xi\xi + \sin\omega\nabla_\eta\xi = 0, \quad \nabla_{e_1}\xi = \sin\omega\nabla_\xi\xi - \cos\omega\nabla_\eta\xi = \lambda\eta$. Из этих уравнений мы получаем $\nabla_\xi\xi = \lambda\sin\omega\,\eta, \quad \nabla_\eta\xi = -\lambda\cos\omega\,\eta$. Сравнивая это с формулами Френе, мы заключаем что $k = \lambda\sin\omega$, $\kappa = \lambda\cos\omega$. Поэтому,

$$\lambda^2 = k^2 + \kappa^2, \quad \sin\omega = \frac{k}{\lambda}, \quad \cos\omega = \frac{\kappa}{\lambda} \tag{4.16}$$

Чтобы использовать формулу (4.11), мы должны найти $e_1(\lambda)$ и $\langle\nabla_{e_0}e_0, e_1\rangle$. Теперь, имея в виду (4.15), мы имеем $e_1(\lambda) = \frac{k}{\lambda}\xi(\lambda) - \frac{\kappa}{\lambda}\eta(\lambda)$ и $\nabla_{e_0}e_0 = -\big(\xi(\sin\omega) - \eta(\cos\omega)\big)e_1$. Поэтому, используя (4.16), мы получаем выражение $-\langle\nabla_{e_0}e_0, e_1\rangle = \xi\left(\frac{k}{\lambda}\right) - \eta\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)$. Подставляя эти выражения в (4.11), мы получаем

$$H=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\left[\left(\xi\Big(\frac{k}{\lambda}\Big)-\eta\Big(\frac{\kappa}{\lambda}\Big)\right)\lambda+\frac{1}{1+\lambda^2}\left(\frac{k}{\lambda}\xi(\lambda)-\frac{\kappa}{\lambda}\eta(\lambda)\right)\right]=$$
$$\frac{1}{2}\frac{1}{(1+\lambda^2)^{3/2}}\left[\left((1+\lambda^2)\,\xi(k)-k\lambda\,\xi(\lambda)\right)-\left((1+\lambda^2)\,\eta(\kappa)-\kappa\lambda\,\eta(\lambda)\right)\right]=$$
$$\frac{1}{2}\left[\xi\left(\frac{k}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)-\eta\left(\frac{\kappa}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)\right].$$

Принимая во внимание (4.16), мы получаем то, что требовалось.

■

Если ξ – геодезическое векторное поле, то для него $k=0$ и формула для средней кривизны такого поля упрощается до $H=\frac{1}{2}\eta\big(\frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}}\big)$. Требование минимальности поля влечет постоянство кривизны его ортогональных траекторий. В частности, если поле ξ является радиальным, то каждая окружность Гаусса относительно данной точки имеет постоянную геодезическую кривизну, то есть является окружностью Дарбу. Если же потребовать, чтобы каждое радиальное векторное поле было минимальным, то каждая окружность Гаусса является окружностью Дарбу, а значит двумерное многообразие имеет постоянную гауссову кривизну (см. [88]). Минимальность геодезического векторного поля накладывает ограничение на геометрию многообразия.

Теорема 4.9 *Единичное геодезическое векторное поле ξ на двумерном римановом многообразии M^2 является минимальным тогда и только тогда, когда M^2 несет метрику вращения и ξ есть поле касательных меридианов этой метрики.*

Доказательство. Единичное геодезическое векторное поле ξ определяет локальное геодезическое слоение на M^2. Приняв интегральные траектории поля в качестве координатного семейства полугеодезической системы координат, запишем метрику M^2 в виде

$$ds^2 = du^2 + g^2(u,v)dv^2.$$

Для поля $\xi = \{1, 0\}$ сингулярный репер примет вид $e_0 = \xi = \partial_u$ и $e_1 = f_1 = \{0, 1/g\} = (1/g)\partial_v$. Тогда $\nabla_{e_1}\xi = (\partial_u g/g)\, e_1$, то есть $\lambda = \partial_u g/g$. Из формулы (4.11) следует, что ξ минимально тогда и только тогда, когда $e_1(\lambda) = 0$, то есть, когда $\frac{\partial_u g}{g} = C_1(u)$, а значит $g(u,v) = C_2(v)e^{\int C_1(u)\, du}$. После очевидной замены параметра мы приходим к метрике вращения.

■

Интегральные траектории минимального векторного поля не обязаны быть геодезическими линиями. Рассмотрим риманово многообразие M с метрикой вращения $ds^2 = du^2 + e^{2g(u)}dv^2$. Рассмотрим векторное поле ξ, которое параллельно вдоль каждой u - геодезической. Для него сингулярный репер совпадает с координатным, то есть в обозначениях Леммы 4.11 $e_0 = \partial_u,\quad e_1 = e^{-g}\partial_v$ и так как само поле e_0 – геодезическое, то средняя кривизна поля ξ примет вид $H = \frac{1}{2\sqrt{1+\lambda^2}}\frac{e_1(\lambda)}{1+\lambda^2}$. При этом само поле имеет вид $\xi = \cos\omega(v)e_0 + \sin\omega(v)e_1$. Положим $\eta = -\sin\omega e_0 + \cos\omega e_1$. Тогда $\lambda = \big\langle \nabla_{e_1}\xi, \eta \big\rangle = (e_1(\omega) - \kappa)$, где $\kappa = g'$ – геодезическая кривизна параллелей. Заметим, что $e_1(\kappa) = 0$, а поэтому $e_1(\lambda) = e_1(e_1(\omega)) = e^{-2g}\partial_v^2\omega$. Следовательно, для такого поля

$$H = \frac{e^{-2g}\omega_{vv}}{2\Big(1 + (e^{-g}\omega_v + g')^2\Big)^{3/2}}.$$

Как следствие, *на 2-мерном многообразии с метрикой вращения единичное векторное поле ξ, параллельное вдоль u - геодезических, является минимальным тогда и только тогда, когда если его угловая скорость вращения вдоль параллелей не выше линейной. В частности, векторное поле, образующее постоянный угол с каждым меридианом минимально.*

Полученная нами формула позволяет привести примеры единичных векторных полей ***постоянной средней кривизны.*** Рассмотрим плоскость Лобачевского L^2 с метрикой $ds^2 = du^2 + e^{2u}dv^2$. Рассмотрим единичное векторное поле на L^2, угловая функция которого относительно u - геодезических есть линейна, то есть $\omega = au+b$ $(a, b = const)$. Покажем, что такое векторное поле имеет постоянную среднюю кривизну

$$H = \frac{a}{2\sqrt{2+a^2}}.$$

Действительно, рассмотрим поле $\xi = \cos\omega X_1 + \sin\omega X_2$ где $\omega = au + b$ и $X_1 = \{1, 0\}$, $X_2 = \{0, e^{-u}\}$. Имеем $\nabla_{X_1}X_1 = 0$, $\nabla_{X_1}X_2 = 0$, $\nabla_{X_2}X_1 = X_2$, $\nabla_{X_2}X_2 = -X_1$. Теперь мы определяем сингулярный репер для ξ. Чтобы сделать это, мы введем векторное поле $\eta = -\sin\omega X_1 + \cos\omega X_2$. Тогда $\nabla_{X_1}\xi = \frac{\partial\omega}{\partial u}\eta = a\eta$, $\nabla_{X_2}\xi = \eta$. Поэтому, полагая $e_0 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(X_1 - aX_2)$, $e_1 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(aX_1 + X_2)$, мы имеем $\nabla_{e_0}\xi = 0$, $\nabla_{e_1}\xi = \sqrt{1+a^2}\,\eta$. Следовательно, $f_1 = \eta$ и $\lambda = \sqrt{1+a^2} = const$. Кроме того, $\nabla_{e_0}e_0 = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\,e_1$. Подставляя это в (4.11), мы имеем $H = \frac{a}{2\sqrt{2+a^2}}$.

Построенный пример имеет обобщение на случай пространства Лобачевского размерности $(n + 1)$. Рассмотрим $(n + 1)$ - мерное пространство Лобачевского, с орисферической системой координат $(u, v^1, \dots, v^n)$. Тогда

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}[(dv^1)^2 + \dots + (dv^n)^2].$$

Рассмотрим единичные векторные поля

$$X_0 = \{1, 0, \dots, 0\}, X_1 = \{0, e^{-u}, \dots, 0\}, \dots, X_n = \{0, 0, \dots, e^{-u}\}. \tag{4.17}$$

Легко проверить, что $\nabla_{X_0}X_0 = 0$, $\nabla_{X_0}X_\alpha = 0$, $\nabla_{X_\alpha}X_0 = X_\alpha$, $\nabla_{X_\alpha}X_\alpha = -X_0$. Определим единичное векторное поле ξ следующим образом:

$$\xi = \cos\theta X_0 + \sin\theta\cos u X_1 + \sin\theta\sin u X_2, \tag{4.18}$$

где $\theta \in [0, \pi/2]$ постоянная.

Предложение 4.10 *Единичное векторное поле, которое задается формулой (4.18) относительно репера (4.17) на пространстве Лобачевского размерности* $(n+1)$ *с метрикой* $ds^2 = du^2 + e^{2u}[(dv^1)^2 + \cdots + (dv^n)^2]$, *является полем постоянной средней кривизны. А именно, мы имеем*

$$H_{1|} = \frac{n-2}{n+1}\frac{\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta}{1+\cos^2\theta}, \quad H_{2|} = \frac{n\sqrt{2}\sin\theta}{2(n+1)}, \quad H_{\sigma|} = 0 \quad \sigma \geq 3.$$

Доказательство. Относительно репера $\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$, матрица $(\nabla\xi)$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & -\sin\theta\cos u & -\sin\theta\sin u & 0 & \ldots & 0 \\ -\sin\theta\sin u & \cos\theta & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \sin\theta\cos u & 0 & \cos\theta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Матрица $(\nabla\xi)^t(\nabla\xi)$ имеет следующее выражение

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

где A есть 3×3 матрица вида

$$\begin{bmatrix} \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta\sin u & \sin\theta\cos\theta\cos u \\ -\sin\theta\cos\theta\sin u & \cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2 u & \sin^2\theta\sin u\cos u \\ \sin\theta\cos\theta\cos u & sin^2\theta\sin u\cos u & \cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2(u) \end{bmatrix}$$

и B - диагональная $(n-2)\times(n-2)$ матрица вида

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \cos^2\theta \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $(\nabla\xi)^t(\nabla\xi)$ равны

$$\lambda_0^2 = 0, \lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1, \lambda_3 = \cdots = \lambda_n^2 = cos^2\theta.$$

Теперь легко найти векторы сингулярного репера. Мы имеем

$$\begin{aligned}
e_0 &= \cos\theta X_0 + \sin\theta \sin u X_1 - \sin\theta\cos u X_2,\\
e_1 &= \cos u X_1 + \sin u X_2,\\
e_2 &= \sin\theta X_0 - \cos\theta\sin u X_1 + \cos\theta\cos u X_2,\\
& e_3 = X_3, \ldots, e_n = X_n
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\sin\theta X_0 + \cos\theta\cos u X_1 + \cos\theta\sin u X_2,\\
f_2 &= -\sin u X_1 + \cos u X_2,\\
& f_3 = e_3, \ldots, f_n = e_n.
\end{aligned}$$

Так что, мы имеем

$$\begin{array}{lll}
\nabla_{e_0}\xi = 0, & \nabla_{e_1}\xi = f_1, & \nabla_{e_2}\xi = f_2,\\
\nabla_{e_3}\xi = \cos\theta f_3, & \ldots & \nabla_{e_n}\xi = \cos\theta f_n
\end{array}$$

Прямое вычисление дает следующие компоненты для матрицы $G_{i|j}$ в формуле (4.10):

$$\begin{bmatrix}
0 & \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta & 0 & \ldots & 0\\
-\cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 & \ldots & 0\\
-\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & \ldots & 0\\
-\cos\theta & -\sin\theta & -\sin\theta & 0 & \ldots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-\cos\theta & -\sin\theta & -\sin\theta & 0 & \ldots & 0
\end{bmatrix}.$$

Поскольку все λ_i - константы, мы имеем

$$H_{1|} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{1+\lambda_1^2}} \sum_{i=0}^{n} \frac{-(\lambda_1+\lambda_i)G_{i|1} + (\lambda_i - \lambda_1)\big\langle R(e_1,e_i)\xi, f_i\big\rangle}{1+\lambda_i^2} =$$
$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}\left[\sum_{i=0}^{2}(-G_{i|1}) + \sum_{i=3}^{n}\frac{-(1+\lambda_i)G_{i|1} + (\lambda_i-1)\big\langle\xi, e_1\big\rangle}{1+\cos^2\theta}\right] =$$
$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}\left[0 + (n-2)\frac{(1+\cos\theta)\sin\theta + (\cos\theta-1)\sin\theta}{1+\cos^2\theta}\right] =$$
$$\frac{n-2}{n+1}\frac{\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta}{1+\cos^2\theta}.$$

Аналогично, мы получаем

$$H_{2|} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{1+\lambda_2^2}} \sum_{i=0}^{n} \frac{-(\lambda_2+\lambda_i)G_{i|2} + (\lambda_i - \lambda_2)\big\langle R(e_2,e_i)\xi, f_i\big\rangle}{1+\lambda_2^2} =$$
$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}\left[\sum_{i=0}^{2}(-G_{i|2}) + \sum_{i=3}^{n}\frac{-(1+\lambda_i)G_{i|2} + (\lambda_i-1)\big\langle\xi, e_2\big\rangle}{1+\cos^2\theta}\right] =$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)}\left[2\sin\theta + (n-2)\frac{(1+\cos\theta)\sin\theta + (\cos\theta-1)\sin\theta\cos\theta}{1+\cos^2\theta}\right] =$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)}\left[2\sin\theta + (n-2)\frac{\sin\theta + \sin\theta\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}\right] = \frac{n\sqrt{2}\sin\theta}{2(n+1)}.$$

и $H_{\sigma|} = 0$ для всех $\sigma \geq 3$.

■

Подобное, но более сложное вычисление показывает, что существуют семейство векторных полей постоянной средней кривизны на пространстве Лобачевского. А именно, пусть ξ – векторное поле вида

$$\xi = \cos\theta X_0 + \sin\theta\cos au X_1 + \sin\theta\sin au X_2, \tag{4.19}$$

где a и θ - константы, и репер $X_0, X_1, \dots, X_n$ выбран как выше. Тогда следующее утверждение верно.

Предложение 4.11 *Единичное векторное поле вида (4.19) относительно репера (4.17) на пространстве Лобачевского размерности* $(n+1)$ *с метрикой*

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}[(dv^1)^2 + \cdots + (dv^n)^2],$$

является полем постоянной средней кривизны. А именно, мы имеем

$$H_{1|} = \frac{\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta}{n+1}\left(\frac{1-a^2}{1+\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta} + \frac{n-2}{1+\cos^2\theta}\right),$$

$$H_{2|} = \frac{an\sin\theta}{(n+1)\sqrt{1+\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}},$$

$$H_{\sigma|} = 0 \quad \sigma \geq 3.$$

Доказательство базируется на факте, что сингулярные значения $(\nabla\xi)$ являются следующими константами:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \sqrt{\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}, \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = \cos\theta.$$

Нормальное векторное поле гиперслоения. Пусть M^{n+1} допускает риманово трансверсально ориентируемое гиперслоение. Пусть ξ – единичное нормальное векторное поле слоения. Тогда компоненты вектора средней кривизны $\xi(M)$ имеют вид

$$H_{\sigma|} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{1+k_\sigma^2}}\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{-e_\sigma(k_\alpha) + (1-k_\alpha k_\sigma)\langle R(\xi, e_\alpha)e_\alpha, e_\sigma\rangle}{1+k_\alpha^2}\right\}$$

где e_α главные направления и k_α – главные кривизны слоев.

Для данного случая, сингулярный репер прост. Так как ξ – геодезическое векторное поле, мы имеем $e_0 = \xi$, в то время как другие – главные направления второй фундаментальной формы слоев. Если мы обозначим соответствующий оператор формы A_ξ, то

$$\nabla_{e_\alpha}\xi = -A_\xi e_\alpha = -k_\alpha e_\alpha$$

Так что, пренебрегая условием положительности λ_α (фактически, мы никогда не использовали это условие в доказательстве формулы (4.10)), мы можем положить $f_\alpha = e_\alpha$ и $\lambda_\alpha = k_\alpha$. Поэтому, в (4.10) мы получаем $G_{i|j} = 0$, и результат следует немедленно. Мы так же можем подтвердить следующее:

Каждое радиальное единичное векторное поле на пространстве постоянной кривизны минимально [20].

Действительно, такое векторное поле ξ есть поле нормалей локального слоения на геодезические Гауссовы сферы. В пространстве постоянной кривизны все главные кривизны этих сфер постоянны (вдоль сфер). Поэтому $e_\sigma(k_\alpha) = 0$. Из постоянства кривизны следует, что $\big\langle R(\xi, e_\alpha)e_\alpha, e_\sigma\big\rangle = 0$. Следовательно, $H_\sigma = 0$.

Сильно нормальное векторное поле. Следуя [37], единичное векторное поле ξ называется *сильно нормальным*, если $\big\langle(\nabla_X A_\xi)Y, Z\big\rangle = 0$ для всех $X, Y, Z \in \xi^\perp$. Другими словами, $(\nabla_X A_\xi)Y = \lambda(X,Y)\,\xi$ для $X, Y \in \xi^\perp$. Легко видеть, что

$$\lambda(X,Y) = \big\langle(\nabla_X A_\xi)Y, \xi\big\rangle = \big\langle\nabla_{\nabla_X Y}\xi - \nabla_X\nabla_Y\xi, \xi\big\rangle = \big\langle\nabla_X\xi, \nabla_Y\xi\big\rangle.$$

Таким образом, условие сильной нормальности можно выразить уравнением

$$(\nabla_X A_\xi)Y = \big\langle A_\xi X, A_\xi Y\big\rangle\,\xi \tag{4.20}$$

для всех $X, Y \in \xi^\perp$. Из (4.8) следует, что $R(X,Y)\xi = 0$ для всех $X, Y \in \xi^\perp$. Последнее условие называется условием *нормальности* векторного поля ξ [37]. Условие сильной нормальности существенно упрощает вторую фундаментальную форму подмногообразия $\xi(M^n) \subset T_1M^n$. Ортонормированный репер $e_1, e_2, \dots, e_n$ назовем *адаптированным* к полю ξ если мы выберем

$e_1 = \xi$ и $e_2, \dots, e_n \in \xi^\perp$.

Лемма 4.12 *Пусть ξ – единичное сильно нормальное векторное поле на римановом многообразии M^n. Относительно адаптированного репера все матричные компоненты второй фундаментальной формы $\xi(M^n) \subset T_1(M^n)$ одновременно приводятся к виду*

$$\tilde\Omega_{\tilde N} = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Для доказательства достаточно положить $N_\sigma = e_\sigma \quad (\sigma = 2, \dots, n)$. Тогда условие (4.20) влечет

$$R(X,Y)\xi = 0, \quad Hess_\xi(X,Y) = \langle A_\xi X, A_\xi Y\rangle \xi, \quad \Gamma_\xi(X,Y) = \lambda\xi$$

для всех $X, Y \in \xi^\perp$. Следовательно, относительно адаптированного репера

$$\tilde\Omega_\sigma(\xi_* e_\alpha, \xi_* e_\beta) = 0 \quad (\alpha, \beta = 2, \dots, n)$$

для всех $\sigma = 2, \dots, n$. Следующее утверждение является естественным следствием Леммы 4.12 .

Лемма 4.13 *Пусть ξ – единичное сильно нормальное векторное поле. Обозначим через k – геодезическую кривизну его интегральных траекторий, а через ν – поле главных нормалей этих траекторий. Поле ξ минимально* *тогда и только тогда, когда*

$$k[\xi,\nu]+\xi(k)\nu-kA_\xi R(\nu,\xi)\xi+k^2\xi=0$$

где $[\xi,\nu]=\nabla_\xi\nu-\nabla_\nu\xi$.

Доказательство. В принятых обозначениях имеем

$$Hess_\xi(\xi,\xi)=\nabla_{\nabla_\xi\xi}-\nabla_\xi\nabla_\xi\xi=k\nabla_\nu\xi-\nabla_\xi(k\nu)=k[\nu,\xi]-\xi(k)\nu,$$

$$\Gamma_\xi(\xi,\xi)=R(\nabla_\xi\xi,\xi)\xi=kR(\nu,\xi)\xi$$

и мы получаем

$$\tilde\Omega_\sigma(\xi_*e_1,\xi_*e_1)=\big\langle k[\xi,\nu]+\xi(k)\nu-kA_\xi R(\nu,\xi)\xi,e_\sigma\big\rangle.$$

Чтобы быть минимальным, поле ξ должно удовлетворять условию $k[\xi,\nu]+\xi(k)\nu-kA_\xi R(\nu,\xi)\xi=\lambda\,\xi$. Умножая на ξ, $\lambda=k\big\langle[\xi,\nu],\xi\big\rangle=k\big\langle\nabla_\xi\nu,\xi\big\rangle=-k^2$, что и завершает доказательство.

■

Отсюда немедленно получаем результат из [37]:

Если на римановом многообразии существует единичное сильно нормальное геодезическое векторное поле, то оно минимально.

Большинство примеров минимальных векторных полей из [37] основано на этой теореме.

Кривизна $\xi(M^2)\subset T_1M^2$. Используя (4.11) и уравнение Гаусса, и формулу секционной кривизны (1.15), мы можем получить явную формулу для гауссовой кривизны $\xi(M^2)$.

Лемма 4.14 *Пусть ξ – единичное векторное поле на 2-мерном римановом многообразии M. В терминах Леммы 4.7, гауссова кривизна K_ξ гиперпо-*

верхности $\xi(M) \in T_1M$ задается формулой

$$K_\xi = \frac{K^2}{4} + \frac{K(1-K)}{1+\lambda^2} + (-1)^{s+1}\frac{\lambda}{1+\lambda^2}e_0(K) + \frac{1}{2}\mu e_1\left(\frac{1}{1+\lambda^2}\right) - \left((-1)^{s+1}\frac{K}{2} + \frac{e_0(\lambda)}{1+\lambda^2}\right)^2,$$

где K – гауссова кривизна M.

Может ли единичное векторное поле иметь *постоянную кривизну*? Частичный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 4.15 *Пусть M^2 – пространство постоянной гауссовой кривизны K. Предположим, что ξ – единичное геодезическое векторное поле на M^2. Тогда $\xi(M^2)$ имеет постоянную гауссову кривизну в одном из следующих случаев:*

(a) $K = -c^2 < 0$ и ξ – нормальное векторное поле для семейства орициклов на гиперболической 2- плоскости L^2. В этом случае $K_\xi = -c^2$ и поэтому $\xi(L^2)$ локально изометрично L^2;

(b) $K = 0$ и ξ - параллельное векторное поле на M^2. В этом случае $K_\xi = 0$ и $\xi(M^2)$ также локально изометрично M^2;

(c) $K = 1$ и ξ - любое (локальное) геодезическое векторное поле на стандартной сфере S^2. В этом случае $K_\xi = 0$.

Доказательство. Так как ξ является геодезическим, мы можем положить $e_0 = \xi$, $e_1 = \eta$, $s = 1$. Принимая во внимание (4.12) и (4.13), мы видим, что $\lambda = -\kappa = -\sigma$. Лемма 4.6 (b) дает $-K = -e_0(\sigma) + \sigma^2$. Так что результат

Леммы 4.14 принимает вид

$$K_\xi = \frac{K^2}{4} + \frac{K(1-K)}{1+\sigma^2} - \left(\frac{K}{2}\frac{e_0(\sigma)}{1+\sigma^2}\right)^2 = \frac{K^2}{4} + \frac{K(1-K)}{1+\sigma^2} - \left(\frac{K}{2}\frac{K+\sigma^2}{1+\sigma^2}\right)^2 =$$
$$\frac{K(1-K)}{1+\sigma^2} + \frac{K(K+\sigma^2)}{1+\sigma^2}\left(\frac{K+\sigma^2}{1+\sigma^2}\right)^2 = K - \left(\frac{K+\sigma^2}{1+\sigma^2}\right)^2.$$

Предположим, что K_ξ постоянна. Тогда нужно рассмотреть следующие случаи:

(a) $\sigma = const \neq 0$. Это означает, что ортогональные траектории поля ξ состоят из кривых постоянной кривизны. Относительно этой естественной координатной системы, метрика M^2 принимает вид $ds^2 = du^2 + f^2\,dv^2$. Положим $\sigma = -c$. Тогда функция f должна удовлетворить уравнению

$$\frac{f_u}{f} = c$$

общее решение которого $f(u,v) = A(v)e^{cu}$. После замены параметра v, мы получаем метрику вида

$$ds^2 = du^2 + e^{2cu}\,dv^2.$$

Поэтому многообразие M^2 локально изометрично к гиперболической 2- плоскости L^2 кривизны $-c^2$, и поле ξ - геодезическое поле (внутренних или внешних) нормалей к семейству орициклов.

(b) $\sigma = 0$. Тогда очевидно ξ – параллельное векторное поле, и поэтому многообразие M^2 является локально-евклидовом, что влечет K_ξ=0.

(c) σ не постоянна. Тогда K_ξ постоянна только если $K = 1$. Так что M^2 содержится в стандартной сфере S^2 и кривизна $\xi(S^2)$ не зависит от σ. Таким образом, поле ξ – любое (локальное) геодезическое векторное поле. Очевидно, $K_\xi = 0$ для этого случая.

■

Случай (a) Теоремы 4.15 имеет интересное обобщение следующего вида.

Теорема 4.16 *Пусть L^2 – гиперболическая 2-плоскость кривизны $-c^2$. Тогда T_1L^2 допускает гиперслоение с листами постоянной внутренней кривизны $-c^2$ и постоянной внешней кривизны $-\frac{c^2}{4}$. Листы порождены единичными векторными полями, составляющими постоянный угол с пучком параллельных геодезических на L^2.*

Доказательство. Рассмотрим L^2 с метрикой $ds^2 = du^2 + e^{2cu}dv^2$ и семейством векторных полей $\xi_\omega = \cos\omega X_1 + \sin\omega X_2 \quad (\omega = const)$, где $X_1 = \{1, 0\}, \quad X_2 = \{0, e^{-cu}\}$ являются единичными векторными полями. Так как $\nabla_{X_1}\xi_\omega = 0$, мы можем положить $e_0 = X_1, \quad e_1 = X_2$ и поэтому мы имеем $\sigma = -c, \quad \lambda = c$. Тогда, полагая $K = -c^2$ и $\lambda = c$ в Лемме 4.46, мы получаем $K_\xi = -c^2$. Внешняя кривизна $\xi(L^2)$ также постоянна так как $\det\Omega = -\frac{1}{4}c^2$.

Теперь зафиксируем точку P_∞ на мнимой границе L^2 в бесконечности, и проведем пучок параллельных геодезических из P_∞ в каждую точку L^2. Зададим семейство подмногообразий $\xi_\omega(L^2)$ для этого пучка. Очевидно, через каждую точку $(p, \zeta) \in T_1L^2$ проходит только одно подмногообразие этого семейства. Таким образом, семейство подмногообразии ξ_ω образует гиперслоение на T_1L^2 постоянной внутренней кривизны $-c^2$ и постоянной внешней кривизны $-\frac{c^2}{4}$.

Геометрически, $\xi_\omega(L^2)$ – семейство координатных гиперповерхностей $\omega = const$ в T_1L^2. Действительно, пусть (u, v, ω) – естественная локальная координатная система на T_1L^2. Тогда метрика T_1L^2 имеет вид

$$ds^2 = du^2 + 2e^{2u}dv^2 + 2\,dv d\,\omega + d\,\omega^2.$$

Относительно этих координат, координатная гиперповерхность $\omega = const$ не ничто иное, как $\xi_\omega(L^2)$ и индуцируемая метрика $ds^2 = du^2 + 2e^{2cu}dv^2$. Очевидно, ее гауссова кривизна постоянна и равна $-c^2$.

$\blacksquare$

4.2. Поля Киллинга. Вполне геодезичность поля Сасакиевой структуры

Из (4.20) следует, что каждое сильно нормальное векторное поле всегда является нормальным. Если ξ - единичное *Киллингово* векторное поле, обратное утверждение также верно. Для Киллинговых векторных полей можно существенно упростить результат Леммы 4.5.

Лемма 4.17 *Пусть ξ – Киллингово векторное поле на римановом многообразии M^{n+1}. Предположим, что* $\operatorname{rank} A_\xi = 2m$. *Обозначим e_α $(\alpha = 1, \dots, n)$ сингулярный репер для поля ξ удовлетворяющий (4.22) и (4.23). Если ξ (сильно) нормально, то ненулевыми компонентами второй фундаментальной формы $\xi(M) \subset T_1M$ являются*

$$\tilde{\Omega}_{\sigma|\, m+\sigma\, 0} = -\tilde{\Omega}_{m+\sigma|\, \sigma 0} = \frac{1}{2}\frac{K_\sigma(1-K_\sigma)}{1+K_\sigma} \quad \sigma = 1, \dots, m,$$

где K_α – кривизны в двумерном направлении M^{n+1} вдоль плоскости $\xi \wedge e_\alpha$.

Доказательство. Пусть M – $(n+1)$ мерное риманово многообразие, допускающее Киллингово векторное поле ξ. Тогда линейный оператор A_ξ кососимметричный

$$\big\langle A_\xi X, Y \big\rangle = -\big\langle X, A_\xi Y \big\rangle \text{ и значит } A_\xi^t = -A_\xi \tag{4.21}$$

относительно некоторого ортонормированного репера.

Поле ξ обязательно *геодезическое* и очевидно $A_\xi \xi = 0$. Для сингулярных реперов мы имеем $e_0 = f_0 = \xi$ и $e_\alpha, f_\alpha \in \xi^\perp$ для всех $\alpha = 1, \dots, n$. Более того, положим $2m = \operatorname{rank} A_\xi$. Существует ортонормированный репер

$$e_0 = \xi,\ e_1, \dots, e_m,\ e_{m+1}, \dots, e_{2m},\ e_{2m+1}, \dots, n$$

такой что

$$
\begin{aligned}
&A_\xi\, e_\alpha = \lambda_\alpha e_{m+\alpha}, \quad A_\xi\, e_{m+\alpha} = -\lambda_\alpha e_\alpha \ \text{ для } \alpha = 1,\dots,m \\
&A_\xi e_0 = 0, \quad A_\xi e_\alpha = 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{ для } \alpha = 2m+1,\dots,n.
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Из определения сингулярного репера (4.6), мы видим, что можно положить

$$
\begin{aligned}
&f_\alpha = e_{m+\alpha}, \quad f_{m+\alpha} = -e_\alpha \quad \text{для } \alpha = 1,\dots,m \\
&f_0 = e_0, \quad f_\alpha = e_\alpha \qquad\qquad\quad \text{для } \alpha = 2m+1,\dots,n.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Так как ξ – Киллингово векторное поле, то

$$
A^t_\xi A_\xi X = R(X,\xi)\xi \tag{4.24}
$$

и следовательно, правые сингулярные векторы для Киллингова векторного поля это поля Якоби вдоль ξ-геодезических. Пусть $e_1,\dots,e_n$ – ортонормированный репером полей Якоби. Тогда

$$
R(e_\alpha,\xi)\xi = K_\alpha e_\alpha \ \ \alpha = 1,\dots,n,
$$

где K_α - кривизны в двумерном направлении M вдоль $\xi\wedge e_\alpha$ плоскости. С другой стороны, по определению сингулярных векторов

$$
A^t_\xi A_\xi e_\alpha = \lambda^2_\alpha e_\alpha.
$$

Таким образом $K_\alpha = \lambda^2_\alpha \geq 0$. Любое Киллингово векторное поле ξ удовлетворяет

$$
-(\nabla_X A_\xi)Y = R(X,\xi)Y. \tag{4.25}
$$

Поэтому, $\tilde\Omega_{\sigma|00} = \big\langle -(\nabla_{e_0}A_\xi)e_0, f_\sigma\big\rangle = 0$. Теперь из соотношения

$$
\lambda_\alpha\big\langle e_\sigma, f_\alpha\big\rangle = \big\langle e_\sigma, A_\xi e_\alpha\big\rangle = -\big\langle A_\xi e_\sigma, e_\alpha\big\rangle = -\lambda_\sigma\big\langle f_\sigma, e_\alpha\big\rangle
$$

мы находим $\lambda_\alpha\lambda_\sigma\big\langle e_\sigma, f_\alpha\big\rangle = -\lambda_\sigma^2\big\langle f_\sigma, e_\alpha\big\rangle$ и поэтому полагая для краткости $\Lambda_{\sigma\alpha 0} := \frac{1}{\sqrt{(1+\lambda_\sigma^2)(1+\lambda_\alpha^2)}}$ мы находим

$$\begin{aligned}\tilde\Omega_{\sigma|\alpha 0} = \frac{1}{2}\Lambda_{\sigma\alpha 0}\Big\{-\big\langle(\nabla_{e_\alpha}A_\xi)e_0 + (\nabla_{e_0}A_\xi)e_\alpha, f_\sigma\big\rangle + \lambda_\sigma\lambda_\alpha\big\langle R(e_\sigma, e_0)\xi, f_\alpha\big\rangle\Big\} = \\ \frac{1}{2}\Lambda_{\sigma\alpha 0}\Big\{\big\langle R(e_\alpha,\xi)\xi, f_\sigma\big\rangle + \lambda_\sigma\lambda_\alpha\big\langle R(e_\sigma,\xi)\xi, f_\alpha\big\rangle\Big\} = \\ \frac{1}{2}\Lambda_{\sigma\alpha 0}\Big\{\lambda_\alpha^2\big\langle e_\alpha, f_\sigma\big\rangle + \lambda_\sigma^3\lambda_\alpha\big\langle e_\sigma, f_\alpha\big\rangle\Big\} = \\ \frac{1}{2}\Lambda_{\sigma\alpha 0}\Big\{\lambda_\alpha^2\big\langle e_\alpha, f_\sigma\big\rangle - \lambda_\sigma^4\big\langle e_\alpha, f_\sigma\big\rangle\Big\} = \frac{1}{2}\frac{\lambda_\alpha^2-\lambda_\sigma^4}{\sqrt{(1+\lambda_\sigma^2)(1+\lambda_\alpha^2)}}\big\langle e_\alpha, f_\sigma\big\rangle.\end{aligned}$$

Принимая во внимание (4.23), мы получаем

$$\tilde\Omega_{\sigma|\, m+\sigma\, 0} = -\tilde\Omega_{m+\sigma|\,\sigma 0} = \frac{1}{2}\frac{K_\sigma(1-K_\sigma)}{1+K_\sigma} \quad \sigma = 1,\dots,m. \tag{4.26}$$

Так как ξ является строго нормальным, то $(\nabla_{e_\alpha}A_\xi)e_\beta = \lambda\xi$, $R(e_\alpha, e_\beta)\xi = 0$ для всех $\alpha,\beta = 1,\dots,n$. Поэтому для остальных компонент мы имеем $\tilde\Omega_{\sigma|\alpha\beta} = 0$.

■

Используя Лемму 4.17 мы можем доказать следующее.

Теорема 4.18 *Пусть M^{2m+1} – многообразие Сасаки и ξ – характеристическое векторное полем. Тогда $\xi(M^{2m+1})$ вполне геодезическое подмногообразие в T_1M^{2m+1}.*

Доказательство. Хорошо известно, что тензор кривизны Сасакиева многообразия с характеристическим полем ξ удовлетворяет условию

$$R(X,Y)\,\xi = \big\langle \xi, Y\big\rangle X - \big\langle \xi, X\big\rangle Y. \tag{4.27}$$

для всех векторных полей X, Y на M, а оператор A_ξ удовлетворяет условию

$$(\nabla_X A_\xi)Y = \big\langle\, X, Y\,\big\rangle\xi - \big\langle\, \xi, Y\,\big\rangle X = R(\xi, X)Y. \tag{4.28}$$

При этом само поле является Киллинговым. Свойство (4.27) означает, что кривизна в двумерном направлении M вдоль плоскости, включающие характеристическое векторное поле ξ равны 1, и ξ - нормальное единичное векторное поле, в то время как (4.28) означает, что ξ является строго нормальным. Так что, мы можем применить Лемму 4.17 и немедленно получаем $\Omega_{\sigma|\alpha\beta} \equiv 0$.

■

Для 3-х мерного многообразия и Киллингова векторного поля имеет место более сильный результат.

Теорема 4.19 *Пусть ξ – единичное Киллингово векторное поле на 3-мерном римановом многообразии M^3. Если $\xi(M^3)$ вполне геодезическое в T_1M^3, то M^3 является или Сасакиевым и ξ – его характеристическое векторное поле или $M^3 = M^2 \times E^1$ метрически, и ξ - единичное векторное поле евклидова фактора.*

Доказательство. Действительно, (4.26) верно для любого единичного Киллингова векторного поля. Если $\xi(M^3)$ вполне геодезическое, то существуют репер Якоби e_1, e_2 в $\xi^\perp$ такой что кривизны в двумерном направлении, $K_{\xi\wedge e_1} = K_{\xi\wedge e_2} = K$ и K удовлетворяет $K(1-K) = 0$. Так как e_1 и e_2 – поля Якоби вдоль ξ-геодезических, $\big\langle R(e_1,\xi)\xi, e_2\big\rangle = 0$ и поэтому, для любого единичного X в $\xi^\perp$ очевидно $K_{\xi\wedge X} \equiv K$. Таким образом, все кривизны в двумерном направлении вдоль 2-плоскостей, содержащих ξ, равны или 0 или 1. Первый случай означает, что ξ - параллельное векторное поле на M^3. Так что $M^3 = M^2 \times E^1$ метрически и ξ - единичное векторное поле евклидова фактора. Второй случай означает, что M^3 - K-контактное, что означает в размерности 3, что M^3 Сасакиево, и ξ - характеристическое векторное поле.

■

Поле Хопфа, обозначим его ξ, на нечетномерной сфере является структурным векторным полем Сасакиевой структуры на ней. По Теореме 4.18, $\xi(S^{2n+1})$ вполне геодезично в T_1S^{2n+1}. Существуют ли другие единичные векторные поля на сферах, обладающие вполне геодезическим свойством?

Напомним, что оператор A_ξ симметричен тогда и только тогда, когда поле ξ голономно и кососимметричен тогда и только тогда, когда поле ξ Киллингово. Оба этих класса принадлежат классу *ковариантно нормальных* единичных векторных полей.

Определение 4.20 *Регулярное единичное векторное поле на римановом многообразии называется ковариантно нормальным, если оператор* $A_\xi : TM \to \xi^\perp$, *определенный формулой* $A_\xi X = -\nabla_X \xi$, *удовлетворяет условию* $A_\xi^t A_\xi = A_\xi A_\xi^t$ *относительно некоторого ортонормированного репера.*

Интегральные траектории голономного и Киллингова векторных полей всегда являются геодезическими линиями. Каждое ковариантно нормальное единичное векторное поле так же обладает этим свойством.

Лемма 4.21 *Интегральные траектории ковариантно нормального векторного поля являются геодезическими линиями.*

Доказательство. Пусть ξ – ковариантно нормальное единичное векторное поле на римановом многообразии M^{n+1}. Обозначим через ν_1 поле главных нормалей его интегральных траекторий. Тогда $\nabla_\xi \xi = -k\nu_1$, где k – геодезическая кривизна траекторий поля ξ. Дополним пару (ξ, ν_1) до ортонормированного репера $(\xi, \nu_1, \dots \nu_n)$ на многообразии M^{n+1}. Тогда

$$\nabla_\xi \xi = -k\nu_1, \quad \nabla_{\nu_\alpha} \xi = -a_\alpha^\beta \nu_\beta,$$

где $\alpha, \beta = 1, \dots, n$. Относительно репера $(\xi, \nu_1, \dots \nu_n)$ мы имеем

$$-A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}, \quad -A_\xi^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k & a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A_\xi A_\xi^t = \begin{pmatrix} k^2 & ka_1^1 & \dots & ka_1^n \\ ka_1^1 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_1^n & * & \dots & * \end{pmatrix}, \quad A_\xi^t A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

и, как результат, $k = 0$.

■

Теперь мы можем доказать утверждение, характеризующие поля Хопфа в классе ковариантно нормальных векторных полей на сферах.

Теорема 4.22 *Пусть ξ – ковариантно нормальное единичное векторное поле на открытом связном подмножестве единичной сферы S^{n+1}. Подмногообразие $\xi(S^{n+1}) \subset T_1S^{n+1}$ вполне геодезично тогда и только тогда, когда $n = 2m$ и поле ξ есть ограничение поля Хопфа.*

Доказательство. Если базовым многообразием является пространство постоянной кривизны, уравнение (4.5) может быть существенно упрощено. А именно, единичное (локальное) векторное поле ξ на пространстве постоянной кривизны (M^{n+1}, c) порождает вполне геодезическое подмногообразие

$\xi(M^{n+1}) \subset T_1M^{n+1}$ тогда и только тогда, когда ξ удовлетворяет уравнению

$$(\nabla_X A_\xi)Y = \frac{c}{2}\Big[(\mathcal{L}_\xi\, g)(X,Y)\, A_\xi\xi + \big\langle \xi, X\big\rangle\, (A_\xi^2 Y + Y) + \big\langle \xi, Y\big\rangle\, (A_\xi^2 X - X)\Big] + \big\langle A_\xi X, A_\xi Y\big\rangle\, \xi, \quad (4.29)$$

где $(\mathcal{L}_\xi\, g)(X,Y) = \big\langle \nabla_X\xi, Y\big\rangle + \big\langle X, \nabla_Y\xi\big\rangle$ – производная Ли метрического тензора в направлении ξ. Действительно, в случае постоянства кривизны

$$(\nabla_Y A_\xi)X - (\nabla_X A_\xi)Y = R(X,Y)\xi = c\big(\langle \xi, Y\rangle X - \langle \xi, X\rangle Y\big).$$

Значит,

$$Hess_\xi(X,Y) = (\nabla_X A_\xi)Y + \frac{c}{2}\big[\langle \xi, Y\rangle X - \langle \xi, X\rangle Y\big].$$

Для $\Gamma_\xi(X,Y)$ имеем

$$-\Gamma_\xi(X,Y) = \frac{c}{2}\Big[\langle \nabla_X\xi, Y\rangle\xi - \langle \xi, Y\rangle\nabla_X\xi + \langle \nabla_Y\xi, X\rangle\xi - \langle \xi, X\rangle\nabla_Y\xi\Big] = \frac{c}{2}(\mathcal{L}_\xi\, g)(X,Y)\,\xi + \frac{c}{2}\Big[\langle \xi, Y\rangle A_\xi X + \langle \xi, X\rangle A_\xi Y\Big].$$

Поэтому окончательно

$$(\nabla_X A_\xi)Y = \frac{c}{2}\Big[(\mathcal{L}_\xi\, g)(X,Y)\, A_\xi\xi + \big\langle \xi, X\big\rangle\, (A_\xi^2 Y + Y) + \big\langle \xi, Y\big\rangle\, (A_\xi^2 X - X)\Big] + \big\langle A_\xi X, A_\xi Y\big\rangle\, \xi.$$

Если ξ ковариантно нормально на единичной сфере, то $c = 1$, $A_\xi\xi = -\nabla_\xi\xi = 0$ и уравнение (4.29) принимает вид

$$(\nabla_X A_\xi)Y = \frac{1}{2}\Big[\big\langle \xi, X\big\rangle\, (A_\xi^2 Y + Y) + \big\langle \xi, Y\big\rangle\, (A_\xi^2 X - X)\Big] + \big\langle A_\xi X, A_\xi Y\big\rangle\, \xi. \quad (4.30)$$

Полагая $X = Y = \xi$ мы получаем тождество. Положим $Y = \xi$ и возьмем произвольный $X \perp \xi$. Тогда $2(\nabla_X A_\xi)\xi + X = A_\xi^2 X$. С другой стороны, прямое вычисление дает $(\nabla_X A_\xi)\xi = -(\nabla_X\nabla_\xi\xi - \nabla_{\nabla_X\xi}\xi) = A_\xi^2 X$. Значит $A_\xi^2\big|_{\xi^\perp} = -E$. Следовательно, $n = 2m$. Так как A_ξ вещественный нормальный оператор, существует ортонормированный репер такой, что

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & -1 & 0 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

с нулевыми остальными элементами. Следовательно, $A_\xi + A_\xi^t = 0$ и ξ есть единичное Киллингово векторное поле. Поток, порождаемый полем ξ сохраняет метрику. Следовательно, ξ определяет локальное геодезическое эквидистантное слоение на сфере. Как показано в [36] и [42], поле ξ продолжается до глобально определенного и совпадает с полем Хопфа.

Заметим, что если взять $X, Y \perp \xi$, то получим уравнение $(\nabla_X A_\xi)Y = \langle A_\xi X, A_\xi Y \rangle \xi$. Поле Хопфа Киллингово, а значит [37] $(\nabla_X A_\xi)Y = R(\xi, X)Y = \langle X, Y \rangle \xi$. А так как ξ есть поле Хопфа, то $\langle A_\xi X, A_\xi Y \rangle = \langle X, Y \rangle$. То есть мы приходим к тождеству и не получаем никаких дополнительных условий.

Наконец, полагая $X = \xi$ и $Y \in \xi^\perp$, с учетом геодезичности поля, получаем $0 = \frac{1}{2}(A_\xi^2 Y + Y)$, что так же выполняется ввиду Киллинговости поля. В обратную сторону утверждение доказано в Теореме 4.18

■

Если поле удовлетворяет более слабому условию *геодезичности*, то результат является не настолько определенным. Подмногообразие N контактного метрического многообразия $(\tilde{M}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\varphi}, \tilde{g})$ называется *инвариантным*, если $\tilde{\varphi}(T_pN) \subset T_pN$ и анти-инвариантным, если $\tilde{\varphi}(T_pN) \subset (T_pN)^\perp$ для всех $p \in N$. Если N – инвариантное подмногообразие, то характеристическое векторное поле $\tilde{\xi}$ *касательно* к N в каждой точке из N. В силу вышесказанного, следующее определение является естественным [22].

Определение 4.23 *Единичное векторное поле ξ на римановом многообразии (M^n, g) называется инвариантным (анти-инвариантным) если подмногообразие $\xi(M^n) \subset (T_1M^n, g_{cm})$ инвариантно (анти-инвариантно).*

Из определения ξ- касательного лифта (4.3) следует, что интегральные траектории *инвариантного* единичного векторного поля являются геодезическими линиями. В работе [22] доказана следующая теорема.

Теорема 4.24 *Единичное векторное поле ξ на (M^n, g) инвариантно тогда и только тогда, когда ($\tilde{\xi} = \xi\,,\, \tilde{\eta} = g(\cdot, \xi)\,,\, \tilde{\varphi} = A_\xi$) является почти контактной структурой на M^n. В частности, ξ является геодезическим векторным полем на M^n и $n = 2m + 1$.*

Мы доказываем следующее.

Теорема 4.25 *Единичное геодезическое векторное поле ξ на S^{n+1} является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда $n = 2m$ и ξ является сильно нормальным инвариантным единичным векторным полем.*

Доказательство. Так как $A_\xi\xi = 0$, то уравнение (4.29) принимает вид (4.30). Следуя доказательству Теоремы 4.22, мы приходим к следующим уравнениям на поле ξ:

$$A_\xi^2 X = -X, \quad (\nabla_X A_\xi)Y = \big\langle A_\xi X, A_\xi Y \big\rangle\, \xi \qquad (4.31)$$

для всех $X, Y \in \xi^\perp$. Из $(4.31)_1$ следует, что $n = 2m$. Сравнивая $(4.31)_2$ с (4.20), мы видим, что ξ сильно нормальное. Рассмотрим теперь $(1,1)$ тензорное поле $\varphi = A_\xi = -\nabla\xi$ и 1-форму $\eta = g(\cdot, \xi)$. Принимая во внимание $(4.31)_1$ и

$A_\xi \xi = 0$, мы видим, что

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad \varphi\xi = 0, \quad \eta(\varphi X) = 0, \quad \eta(X) = 1$$

для любого векторного поля X на сфере. Следовательно, тройка

$$\big(\tilde\varphi = A_\xi, \quad \tilde\xi = \xi, \quad \tilde\eta = g(\cdot, \xi)\big)$$

образует *почти контактную структуру* с полем ξ в качестве характеристического. По теореме 4.24, поле ξ инвариантно.

Обратно, пусть ξ сильно нормальное и инвариантное на S^{n+1}. Тогда, по теореме 4.24, ξ геодезическое и $n = 2m$. Остаток доказательства состоит в прямой проверке формулы (4.30).

∎

О кривизне поля Хопфа. В метрической контактной геометрии, сечения, содержащие характеристическое векторное поле, называют ξ-сечениями, в то время как сечения типа $X \wedge \varphi X$ для $X \in \xi^\perp$ называют φ-сечениями.

Формулы (4.3) определяют ξ-касательный лифт X^τ и ξ-нормальный лифт Z^ν гладких векторных полей $X, Z \in \mathfrak{X}(M)$, а именно,

$$X^\tau = \xi_*(X) = X^h - (A_\xi X)^{tg}, \quad Z^\nu = \tilde n(Z) = (A^t_\xi Z)^h + Z^{tg}. \tag{4.32}$$

Для любого $X \in \xi^\perp$ мы называем 2- плоскости вида $X^\tau \wedge (\xi)^\tau$ как ξ- касательный лифт ξ-сечения и 2-плоскости вида $X^\tau \wedge (A_\xi X)^\tau$, как ξ-касательный лифт φ-сечения. Следующее утверждение имеет место.

Теорема 4.26 *Пусть ξ поле Хопфа на единичной сфере S^{2m+1}. Относительно индуцированной структуры, подмногообразие $\xi(S^{2m+1})$ является Сасакиевой пространственной формой φ- кривизны 5/4.*

Другими словами, поле Хопфа дает пример вложения *Сасакиевой простран-*

ственной формы φ-кривизны 1 в *Сасакиево многообразие* такого, что образ является контактной, вполне геодезической *Сасакиевой пространственной формой* φ-кривизны 5/4 относительно индуцированной структуры.

Доказательство. Если ξ единичное поле Хопфа на S^{2m+1}, то ξ является характеристическим векторным полем стандартной контактной метрической структуры с φ - оператором равным A_ξ на единичной сфере S^{2m+1}. По теореме 4.24, подмногообразие $\xi(S^{2m+1})$ является инвариантным подмногообразием в T_1S^{2m+1}. Следовательно, $\xi(S^{2m+1})$ *так же Сасакиево* относительно индуцированной структуры [83]. Характеристическое векторное поле индуцированной структуры совпадает с характеристическим векторным полем объемлющего пространства, то есть с ξ^h. В наших обозначениях $\xi^h = \xi^\tau$, так как поле ξ – геодезическое. Если $X \wedge \varphi X$ – φ-сечение на сфере, то поднятое сечение $X^\tau \wedge (\varphi X)^\tau$ является φ- сечением индуцированной структуры на $\xi(S^{2m+1})$. Таким образом, если кривизна $\xi(S^{2m+1})$ по площадкам вида $X^\tau \wedge (A_\xi X)^\tau$ постоянна, то это в точности означает, что $\xi(S^{2m+1})$ есть Сасакиева пространственная форма.

По Теореме 4.25 подмногообразие $\xi(S^{2m+1})$ вполне геодезично. В силу этого, кривизна в двумерном направлении $\xi(S^{n+1})$, полностью определена кривизной T_1S^{n+1} вдоль плоскости, касательной к $\xi(S^{n+1})$.

Пусть X и Y – *единичные взаимно ортогональные* векторные поля на S^{n+1}. Тогда $X^\tau = X^h - (A_\xi X)^{tg}$ и $Y^\tau = Y^h - (A_\xi Y)^{tg}$ образуют базис элементарных 2- плоскостей, касательных к $\xi(S^{n+1})$. Этот базис не ортонормирован, так как

$$\|X^\tau\|^2 = |X|^2 + |A_\xi X|^2 = 2 - \big\langle \xi, X\big\rangle^2, \ \|Y^\tau\|^2 = |Y|^2 + |A_\xi Y|^2 = 2 - \big\langle \xi, Y\big\rangle^2,$$

$$\big\langle\big\langle X^\tau, Y^\tau\big\rangle\big\rangle = \big\langle X, Y\big\rangle + \big\langle A_\xi X, A_\xi Y\big\rangle = -\langle \xi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle.$$

Поэтому, норма бивектора $X^\tau \wedge Y^\tau$ равна $\|X^\tau \wedge Y^\tau\| = 4 - 2\big\langle \xi, X\big\rangle^2 - 2\big\langle \xi, Y\big\rangle^2$. Полагая $X_1 = X,\ Y_1 = Y,\ X_2 = A_\xi X,\ Y_2 = A_\xi Y$ и применяя формулу (1.15), после рутинных вычислений [107] мы находим

$$\tilde{K}(X^\tau, Y^\tau) = \frac{1 - \frac{3}{4}\big[\left\langle \xi, X\right\rangle^2 + \left\langle \xi, Y\right\rangle^2\big] + \frac{3}{2}\left\langle A_\xi X, Y\right\rangle^2}{2 - \big[\left\langle \xi, X\right\rangle^2 + \left\langle \xi, Y\right\rangle^2\big]}. \qquad (4.33)$$

Чтобы получить произвольное φ-сечение на $\xi(S^{2m+1})$, следует взять $X \in \xi^\perp$ и $Y = A_\xi X$. С очевидностью, в этом случае $\tilde{K}(X^\tau, Y^\tau) = \frac{5}{4}$, что и завершает доказательство.

■

Непосредственным следствием формулы (1.15) является следующее утверждение

Теорема 4.27 *Кривизна в двумерном направлении $\xi(S^{2m+1})$ для Хопфовского векторного поля изменяется между $\frac{1}{4}$ и $\frac{5}{4}$. Кривизна минимальна для ξ-касательного лифта ξ-сечения и максимальна для ξ- касательного лифта φ- сечения*

Легко заметить, что кривизна минимальна, если $X = \xi$ (или $Y = \xi$) и равна $1/4$. Если же $X, Y \in \xi^\perp$, то кривизна максимальна и равна $5/4$. Как показано в [100], кривизна T_1S^{n+1} изменяется между 0 и $5/4$. Теорема 4.27 проясняет геометрический смысла *максимальной* кривизны. *Минимальная* кривизна, геометрически, это ξ-кривизна в двумерном направлении естественной структуры Сасаки на T_1S^{n+1} (которая, как известно, равняется $1/4$ после перенормировки).

4.3. Классическая устойчивость поля Хопфа.

Пусть M^n – *компактное* подмногообразие в римановом пространстве R^m. Обозначим $\nabla^\perp$ ковариантную производную в связности нормального расслоения. Пусть e_i $(i = 1, \dots, n)$ – ортонормированный репер на M^n и η – поле нормальной вариации вдоль M^n. Обозначим через $k_i(\eta)$ i-ю главную нормальную кривизну M^n относительно η и $K(e_i, \eta)$ кривизна в двумерном направлении R^m вдоль плоскости $e_i \wedge \eta$. Тогда *вторая вариация объема* M^n *относительно* η задается формулой [85]

$$\delta^2 Vol(\eta) = \int\limits_{M^n} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla^{\perp}_{e_i}\eta, \nabla^{\perp}_{e_i}\eta \rangle -$$

$$|\eta|^2 \Big(- \sum_{i,j;\, i\neq j} k_i(\eta) k_j(\eta) + \sum_{i=1}^{n} K(e_i,\eta) \Big) \Big\} dV. \quad (4.34)$$

Мы называем минимальное (вполне геодезическое) векторное поле *классически устойчивым*, если $\delta^2 Vol(\eta) > 0$ для любой нормальной вариации. Чтобы применять формулу (4.34) к нашему случаю, мы должны найти нормальную связность расслоения для подмногообразия $\xi(S^{2m+1}) \subset T_1 S^{2m+1}$. Касательное и нормальное оснащения для $\xi(S^{2m+1}) \subset T_1 S^{2m+1}$ выберем согласно (4.32).

Лемма 4.28 *Пусть* $\tilde\nabla^{\perp}$ *означает ковариантную производную в нормальном расслоении* $\xi(M)$. *Если* ξ *- Хопфовское векторное поле на единичной сфере* S^{n+1} $(n = 2m)$ *тогда*

$$\tilde\nabla^{\perp}_{X^\tau} Z^\nu = \big(\nabla_X Z\big)^\nu - \frac{1}{2}\big\langle \xi, X\big\rangle \big(A_\xi Z\big)^\nu = -\big\langle \xi, X\big\rangle Z^h + 2\big(\nabla_X Z\big)^{tg}, \qquad (4.35)$$

для всех $X, Z \in \mathfrak{X}(S^{n+1})$, $\big\langle Z, \xi\big\rangle = 0$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся Леммой 4.1. Другое доказательство предъявлено в [107]. Так как поле Хопфа является геодезическим Киллинговым полем контактной метрической структуры на единичной сфере, то

$$A_\xi \xi = 0,\ A^t_\xi = -A_\xi,\ (\nabla_X A_\xi) Z = R(\xi, X) Z = \big\langle X, Z\big\rangle \xi,\ A^2_\xi Z = -Z + \big\langle Z, \xi\big\rangle \xi. \qquad (4.36)$$

Покажем, что горизонтальная составляющая искомой производной нулевая. Помня, что $\langle Z,\xi\rangle=0$, выполним необходимые вычисления:

$$(\nabla_X A^t_\xi)Z=-(\nabla_X A_\xi)Z=-\langle X,Z\rangle\xi,\quad \frac{1}{2}R(\xi,Z)X=\frac{1}{2}\langle X,Z\rangle\xi-\frac{1}{2}\langle\xi,X\rangle Z,$$

$$-\frac{1}{2}R(\xi,A_\xi X)A^t_\xi Z= \\ \frac{1}{2}R(\xi,A_\xi X)A_\xi Z=\frac{1}{2}\big(\langle A_\xi X,A_\xi Z\rangle\xi-\langle\xi,A_\xi Z\rangle A_\xi X\big)=\frac{1}{2}\langle X,Z\rangle\xi,$$

$$\frac{1}{2}A^t_\xi\big(R(X,A^t_\xi Z)\xi\big)=\frac{1}{2}A_\xi\big(R(X,A_\xi Z)\xi\big)= \\ \frac{1}{2}\big(\langle A_\xi Z,\xi\rangle X-\langle\xi,X\rangle A_\xi Z\big)=-\frac{1}{2}\langle\xi,X\rangle A^2_\xi Z=\frac{1}{2}\langle\xi,X\rangle Z.$$

Сумма полученных выражений нулевая. Следовательно,

$$\tilde\nabla^\perp_{X^\tau}Z^\nu=\big(\nabla_X Z+\frac{1}{2}R(A^t_\xi Z,X)\xi)\big)^\nu=\big(\nabla_X Z\big)^\nu-\frac{1}{2}\langle\xi,X\rangle(A_\xi Z)^\nu.$$

Для доказательства второго равенства заметим, что для $X,Y\in\mathfrak{X}(S^{n+1})$ и поля Хопфа ξ справедлива цепочка равенств:

$$\langle\langle X^\nu,Y^\nu\rangle\rangle=\langle A^t_\xi X,A^t_\xi Y\rangle+\langle X-\langle\xi,X\rangle\xi,Y-\langle\xi,Y\rangle\xi\rangle= \\ -\langle A^2_\xi X,Y\rangle+\langle X,Y\rangle-\langle X,\xi\rangle\langle Y,\xi\rangle=\langle X-\langle X,\xi\rangle\xi,Y\rangle+\langle X,Y\rangle-\langle X,\xi\rangle\langle Y,\xi\rangle= \\ 2\langle X,Y\rangle-2\langle X,\xi\rangle\langle Y,\xi\rangle.$$

Заметим, что если $\langle Y,\xi\rangle=0$, то $\langle\langle X^\nu,Y^\nu\rangle\rangle=2\langle X,Y\rangle$. Поэтому для такого Y имеем,

$$\langle\langle\tilde\nabla^\perp_{X^\tau}Z^\nu,Y^\nu\rangle\rangle=2\langle\nabla_X Z-\frac{1}{2}\langle X,\xi\rangle A_\xi Z,Y\rangle=2\langle\nabla_X Z,Y\rangle-\langle X,\xi\rangle\langle A_\xi Z,Y\rangle= \\ -\langle X,\xi\rangle\langle Z,A^t_\xi Y\rangle+2\langle\nabla_X Z,Y\rangle=\langle\langle-\langle X,\xi\rangle Z^h+2(\nabla_X Z)^{tg},(A_\xi Y)^h+Y^{tg}\rangle\rangle.$$

В силу произвольного выбора Y, мы получаем искомое равенство.

■

Очевидно, что оператор Вейнгартена подмногообразия $\xi(S^{n+1})$ для поля Хопфа определяется ξ-касательной составляющей найденной производной. Поскольку она оказалась нулевой, то мы получаем *еще одно доказательство* вполне геодезичности подмногообразия $\xi(S^{n+1}) \subset T_1S^{n+1}$ для поля Хопфа.

Пусть ξ – данное единичное векторное поле на M^{n+1}. Тогда векторное поле $\tilde\eta = (\eta)^\nu$ можно рассмотреть как поле вариации объема для подмногообразия $\xi(M^{n+1})$, где η - произвольное векторное поле из $\xi^\perp$. Для случая Хопфовского векторного поля на S^{n+1} $(n = 2m)$, мы можем выбрать

$$\tilde e_i = \frac{1}{||(e_i)^\tau||}(e_i)^\tau = \begin{cases} e_0^h \text{ для } i = 0 \ , \\ \\ \frac{1}{\sqrt2}\big(e_\alpha^h + f_\alpha^{tg}\big) \text{ для } \alpha = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{4.37}$$

где $e_0, e^1, \dots, e_n,\ f_0, f_1, \dots, f_n$ образуют сингулярные базисы для оператора A_ξ, в качестве ортонормированного касательного репера на $\xi(S^{n+1})$. Так как $\xi(S^{n+1})$ вполне геодезическое подмногообразие, формула (4.34) получает вид

$$\delta^2 Vol(\tilde\eta) = \int\limits_{S^{n+1}} \left\{ \sum_{i=0}^n \|\nabla^\perp_{\tilde e_i}\tilde\eta\,\| - \|\tilde\eta\,\|^2 \sum_{i=0}^n \tilde K(\tilde e_i, \tilde\eta) \right\} dV, \tag{4.38}$$

где $\bar\nabla^\perp_{\tilde e_i}$ задано формулой (4.35) и $\tilde K$ задано формулой (1.15).

Лемма 4.29 *Пусть ξ – Хопфовское векторным поле на S^{n+1} $(n = 2m)$. Пусть $\eta \in \xi^\perp$ порождает нормальную вариацию объема $\tilde\eta = (\eta)^\nu$ для подмногообразия $\xi(S^{n+1}) \subset T_1(S^{n+1})$. Пусть $e_0 = \xi, e_1, \dots, e_n$ – правый сингулярный репер для оператора A_ξ. Тогда, формула (4.34) может быть упрощена к виду*

$$\delta^2 Vol(\tilde\eta) = \int\limits_{S^{n+1}} \left\{ 4|\nabla_{e_0}\eta\,|^2 + 2\sum_{\alpha=1}^n |\nabla_{e_\alpha}\eta\,|^2 - \frac{2n-1}{2}\,|\eta\,|^2 \right\} dV, \tag{4.39}$$

Доказательство. Обозначим $\tilde\nabla^{\perp}$ связность в нормальном расслоении для $\xi(S^{n+1})$. Докажем, сначала, что

$$\sum_{i=0}^{n}\|\tilde\nabla^{\perp}_{\tilde e_i}\tilde\eta\,\| = 4|\nabla_{e_0}\eta\,|^2 + 2\sum_{\alpha=1}^{n}|\nabla_{e_\alpha}\eta\,|^2 - |\eta\,|^2.$$

Применяя (4.35) и учитывая (4.37), мы находим

$$\tilde\nabla^{\perp}_{\tilde e_0}\tilde\eta = -(\eta)^h + 2(\nabla_{e_0}\eta)^{tg}, \qquad \tilde\nabla^{\perp}_{\tilde e_\alpha}\tilde\eta = \sqrt{2}\,(\nabla_{e_\alpha}\eta)^{tg}.$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{n}\|\tilde\nabla^{\perp}_{\tilde e_i}\tilde\eta\,\| = |\eta\,|^2 + 4\,|\nabla_{e_0}\eta\,|^2 + 2\sum_{\alpha=1}^{n}\Big(\,|\nabla_{e_\alpha}\eta\,|^2 - \big\langle\nabla_{e_\alpha}\eta\,,\xi\big\rangle^2\Big) =$$

$$|\eta\,|^2 + 4\,|\nabla_{e_0}\eta\,|^2 + 2\sum_{\alpha=1}^{n}\Big(\,|\nabla_{e_\alpha}\eta\,|^2 - \big\langle\eta\,,\nabla_{e_\alpha}\xi\big\rangle^2\Big) =$$

$$|\eta\,|^2 + 4\,|\nabla_{e_0}\eta\,|^2 + 2\sum_{\alpha=1}^{n}\,|\nabla_{e_\alpha}\eta\,|^2 - 2\sum_{\alpha=1}^{n}\big\langle\eta\,,f_\alpha\big\rangle^2 =$$

$$|\eta\,|^2 + 4\,|\nabla_{e_0}\eta\,|^2 + 2\sum_{\alpha=1}^{n}\,|\nabla_{e_\alpha}\eta\,|^2 - 2\,|\eta\,|^2 = 4\,|\nabla_{e_0}\eta\,|^2 + 2\sum_{\alpha=1}^{n}\,|\nabla_{e_\alpha}\eta\,|^2 - |\eta\,|^2$$

и доказательство закончено. Теперь докажем, что

$$\|\tilde\eta\,\|^2\,\sum_{i=0}^{n}\tilde K(\tilde e_i,\tilde\eta\,) = \frac{1}{2}|\eta\,|^2 + (n-2)\,|\eta\,|^2.$$

Кривизна в двумерном направлении T_1M^n задается (1.15) в предположении, что $\tilde X$ и $\tilde Y$ являются ортонормированными. Чтобы найти $|\tilde\eta\ \,|^2\tilde K(\tilde e_i,\tilde\eta\,)$, мы можем использовать (1.15), полагая $\tilde Y = \tilde\eta$ и имея в виду, что $\tilde\eta$ имеет произвольную длину.

Теперь положим $\zeta = A_\xi\eta$ и затем $\tilde\eta = \zeta^h + \eta^{tg}$. Очевидно,

$$\big\langle\eta,\zeta\big\rangle = 0, \quad \big\langle\eta,\xi\big\rangle = \big\langle\zeta,\xi\big\rangle = 0, \quad |\eta\,| = |\zeta|. \tag{4.40}$$

Положим $\tilde{X} = \tilde{e}_0 = e_0^h$ и $\tilde{Y} = \zeta^h + \eta^{tg}$. Тогда

$$\|\tilde{\eta}\,\|^2 \tilde{K}(\tilde{e}_0, \tilde{\eta}\,) = \big\langle R(e_0, \zeta)\zeta, e_0\big\rangle - \frac{3}{4}\,\big|\, R(e_0, \zeta)\xi\,\big|^2 + \frac{1}{4}\,\big|\, R(\xi, \eta)e_0\,\big|^2 =$$
$$|\zeta|^2 - \frac{3}{4}\,|\zeta|^2 + \frac{1}{4}\,|\eta\,|^2 = \frac{1}{2}\,|\eta\,|^2.$$

Чтобы найти $\tilde{K}(\tilde{e}_\alpha, \tilde{\eta}\,)$ для $\alpha = 1, \dots, n$, мы полагаем $\tilde{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_\alpha^h + f_\alpha^{tg})$ и поэтому

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_\alpha, \; X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} f_\alpha, \; Y_1 = \zeta, \; Y_2 = \eta$$

в применении (1.15). Таким образом мы имеем

$$\|\tilde{\eta}\,\|^2 \tilde{K}(\tilde{e}_\alpha, \tilde{\eta}) = \frac{1}{2}\,\big\langle R(e_\alpha, \zeta)\zeta, e_\alpha\big\rangle - \frac{3}{8}\,\big|\, R(e_\alpha, \zeta)\xi\,\big|^2 + \frac{1}{8}\,\big|\, R(\xi, \eta)e_\alpha + R(\xi, f_\alpha)\zeta\big|^2 +$$
$$\frac{1}{2}|\eta\,|^2 - \frac{1}{2}\big\langle f_\alpha, \eta\big\rangle^2 + \frac{3}{2}\big\langle R(e_\alpha, \zeta)\eta, f_\alpha\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle R(\xi, f_\alpha)e_\alpha, R(\xi, \eta)\zeta\big\rangle.$$

Теперь положим $\eta^\alpha = \big\langle \eta, f_\alpha\big\rangle$. Тогда $\zeta^\alpha = \big\langle \zeta, e_\alpha\big\rangle = -\big\langle \eta, f_\alpha\big\rangle = -\eta^\alpha$. Учитывая (4.40), мы получаем

$$\|\tilde{\eta}\,\|^2 \tilde{K}(\tilde{e}_\alpha, \tilde{\eta}) = \frac{1}{2}\,|\eta\,|^2 - \frac{1}{2}(\eta^\alpha)^2 + \frac{1}{8}\,\big|\big\langle e_\alpha, \eta\,\big\rangle + \big\langle f_\alpha, \zeta\,\big\rangle\big|^2 + \frac{1}{2}|\eta\,|^2 -$$
$$\frac{1}{2}(\eta^\alpha)^2 - \frac{3}{2}\big\langle e_\alpha, \eta\,\big\rangle\big\langle f_\alpha, \zeta\,\big\rangle = |\eta\,|^2 - (\eta^\alpha)^2 - \big\langle \eta, e_\alpha\big\rangle^2.$$

Также легко видеть, что $\sum_{\alpha=1}^n (\eta^\alpha)^2 = \sum_{\alpha=1}^n \big\langle \eta, e_\alpha\big\rangle^2 = |\eta\,|^2$. Следовательно мы имеем $\|\tilde{\eta}\,\|^2 \Big(\tilde{K}(\tilde{e}_0, \tilde{\eta}) + \sum_{\alpha=0}^n \tilde{K}(\tilde{e}_\alpha, \tilde{\eta})\Big) = \frac{1}{2}\,|\eta\,|^2 + (n-2)\,|\eta\,|^2$. Объединяя результаты, мы получаем то, что требовалось.

■

Теорема 4.30 *Векторное поле Хопфа на единичной 3- сфере устойчиво относительно классических нормальных вариаций.*

Доказательство. Поскольку подпространства правых (и левых) сингулярных реперов для Хопфовского векторного поля совпадают с $\xi^\perp$, мы можем выбрать другие два Хопфовских векторных поля на S^3 в качестве e_1

и e_2. Тогда

$$\begin{aligned} &\nabla_{e_1} e_1 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_2 = -e_0, \\ &\nabla_{e_2} e_1 = e_0, \quad \nabla_{e_2} e_2 = 0. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Положим $\eta = \eta^1 e_1 + \eta^2 e_2$. Положим $|\mathrm{grad}\, \eta^\alpha|^2 = \big(e_1(\eta^\alpha)\big)^2 + \big(e_2(\eta^\alpha)\big)^2$ $(\alpha = 1, 2)$. Тогда, используя (4.41) мы находим

$$\sum_{\alpha=1}^{2} |\nabla_{e_\alpha} \eta\,|^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} |\,\mathrm{grad}\, \eta^\alpha|^2 + |\eta\,|^2.$$

Поэтому,

$$\delta^2 Vol(\tilde{\eta}) = \int\limits_{S^{n+1}} \left\{ 4|\nabla_{e_0} \eta\,|^2 + 2\sum_{\alpha=1}^{n} |\mathrm{grad}\, \eta^\alpha|^2 + \frac{1}{2}|\eta\,|^2 \right\} dV > 0$$

что означает, что $\xi(S^3)$ устойчиво.

■

Теорема 4.31 *Векторное поле Хопфа на единичной сфере размерности* $n = 2m+1 > 3$ *неустойчиво.*

Доказательство. Выберем векторы сингулярного репера так, что $e_0 = \xi$, в то время как другие $e_1, \dots, e_{2m}$ являются горизонтальными лифтами векторов ортонормированного репера q_k на CP^m относительно Хопфовского расслоения $S^{2m+1} \xrightarrow{S^1} CP^m$. Тогда $\nabla_{q_k} q_j = 0$ и $J q_{2k} = q_{2k+1}$ $(k, j = 1, \dots, m)$ для комплексной структуры CP^n (см. [45]). Тогда вдоль слоя, то есть вдоль интегральных кривых $e_0 = \xi$, имеет место следующая таблица ненулевых ковариантных производных [45, 43].

$$\begin{aligned} &\nabla_{e_0} e_{2k} = e_{2k-1}, \quad \nabla_{e_0} e_{2k-1} = -e_{2k}, \\ &\nabla_{e_{2k}} e_0 = e_{2k-1}, \quad \nabla_{e_{2k-1}} e_0 = -e_{2k} \\ &\nabla_{e_{2k-1}} e_{2k} = e_0, \quad \nabla_{e_{2k}} e_{2k-1} = -e_0, \end{aligned}$$

где $k = 1, \dots, m$.

Пусть $\eta = \eta^{2k-1} e_{2k-1} + \eta^{2k} e_{2k}$ будет полем вариации. Тогда, используя таблицу производных, мы находим

$$\nabla_{e_0} \eta = \left(e_0(\eta^{2k-1}) + \eta^{2k}\right) e_{2k-1} + \left(e_0(\eta^{2k}) - \eta^{2k-1}\right) e_{2k-1}$$

$$\nabla_{e_{2t-1}} \eta = e_{2t-1}(\eta^{2k-1})\, e_{2k-1} + e_{2t-1}(\eta^{2k})\, e_{2k} + \delta_{st}\, \eta^{2k}\, e_0$$

$$\nabla_{e_{2t}} \eta = e_{2t}(\eta^{2k-1})\, e_{2k-1} + e_{2t}(\eta^{2k})\, e_{2k} - \delta_{kt}\, \eta^{2k-1}\, e_0,$$

где δ_{kt} - символ Кронекера.

Положим $|\mathrm{grad}\, \eta^{\sigma}|^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} \left[e_{\alpha}(\eta^{\sigma})\right]^2$. Тогда

$$\sum_{\alpha=1}^{n} |\nabla_{e_\alpha} \eta\,|^2 = \sum_{\sigma=1}^{n} |\mathrm{grad}\, \eta^{\sigma}|^2 + |\eta\,|^2$$

и

$$|\nabla_{e_0} \eta\,|^2 = \sum_{k=1}^{m} \left[\left(e_0(\eta^{2k}) - \eta^{2k-1}\right)^2 + \left(e_0(\eta^{2k-1}) + \eta^{2k}\right)^2\right].$$

Чтобы доказать неустойчивость, мы должны найти поле вариации η обеспечивающее отрицательность для второй вариации объема. Поэтому, выберем $\eta = \cos t e_{2k-1} + \sin t e_{2k}$, где t - параметр длины дуги на e_0-кривых. Тогда $\nabla_{e_0} \eta = 0, \quad \mathrm{grad}\, \eta^{\sigma} = 0$ и для подынтегрального выражения в формуле (4.39) мы имеем $\frac{5-2n}{2} |\eta\,|^2 < 0$ для $n > 2$, что заканчивает доказательство.

■

Как следствие, на сферах высших размерностей глобально минимальный объем имеют векторные поля "север-юг" [11]. Вопросы минимальности и устойчивости в других постановках рассматривались в [43], [14] и [46].

4.4. Вполне геодезические нормальные векторные поля гиперслоения

Пусть M^{n+1} – риманово многообразие, допускающее трансверсально ориентируемое риманово гиперслоение. В этом случае $A_\xi X = -\nabla_X \xi$ является оператором Вейнгартена соответствующего листа. Заметим, так же что $A_\xi\, \xi = 0$.

Обозначим через ∇^F индуцированную связность на каждом листе. Обозначим $B_\xi(X,Y)$ вторые фундаментальные формы листов, то есть $B_\xi(X,Y) = \big\langle A_\xi X, Y\big\rangle_F$ где $\big\langle \cdot,\cdot\big\rangle_F$ скалярное произведение относительно индуцируемой метрики на каждом листе и X,Y касательны к соответствующему листу.

Пусть $e_\alpha \quad (\alpha = 1,\dots,n)$ – ортонормированный репер, состоящий из собственных векторов оператора формы, то есть $A_\xi\, e_\alpha = k_\alpha\, e_\alpha$, где k_α - главные кривизны соответствующего листа. Так как A_ξ симметричен, в наших обозначениях мы имеем

$$f_0 = e_0 = \xi,\ f_\alpha = \operatorname{sign}(k_\alpha) e_\alpha,\ \lambda_\alpha = |k_\alpha| \quad (\alpha = 1,\dots,n),$$

где f_α - векторы левого сингулярного репера, и λ_α - соответствующие сингулярные значения. Мы можем упростить обозначения если мы положим

$$f_0 = e_0 = \xi,\ f_\alpha = e_\alpha,\ \lambda_\alpha = k_\alpha \quad (\alpha = 1,\dots,n), \tag{4.42}$$

разрешая λ_α быть не обязательно положительным. Тогда оснащение для $\xi(M)$ в рассматриваемом случае получает вид

$$\tilde e_0 = \xi^h, \quad \tilde e_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+k_\alpha^2}}(e_\alpha^h - k_\alpha\, e_\alpha^v), \quad \tilde n_{\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{1+k_\alpha^2}}(k_\alpha e_\alpha^h + e_\alpha^v). \tag{4.43}$$

Теперь, может быть сделано следующее упрощение [108].

Лемма 4.32 *Пусть ξ – единичное векторное поле риманова трансверсально ориентируемого гиперслоения на данном римановом многообразии M^{n+1}. Обозначим X,Y,Z векторные поля касательные к листам. Тогда*

$$\big\langle (\nabla_X A_\xi)Y, Z\big\rangle = \big\langle (\nabla_X A_\xi)Z, Y\big\rangle = (\nabla^F_X B_\xi)(Y,Z),$$

$$\big\langle (\nabla_X A_\xi)\xi, Z\big\rangle = \big\langle A_\xi X, A_\xi Z\big\rangle_F$$

$$\big\langle (\nabla_\xi A_\xi)X, Z\big\rangle = \big\langle A_\xi X, A_\xi Z\big\rangle_F + \big\langle R(X,\xi)\xi, Z\big\rangle.$$

Следующая лемма дает полезную информацию относительно связей между внешней геометрией листов гиперслоения и внешней геометрией подмногообразия $\xi(M)$.

Лемма 4.33 *Пусть ξ – единичное нормальное векторное поле риманова трансверсально ориентируемого (локального) гиперслоения на данном римановом многообразии M^{n+1}. Компоненты второй фундаментальной формы подмногообразия $\xi(M) \in T_1M$ относительно некоторого ортонормированного репера задаются формулами*

$$\tilde{\Omega}_{\sigma|\,00} = \quad 0$$

$$\tilde{\Omega}_{\sigma|\,\alpha 0} = \quad \tfrac{1}{2}\Lambda_{\sigma\alpha 0}\Big\{\big[(k_\sigma^2-1)K_\sigma - 2k_\sigma^2\big]\delta_{\sigma\alpha} - (1-k_\alpha k_\sigma)(1-\delta_{\sigma\alpha})\big\langle R(e_\alpha,\xi)\xi, e_\sigma\big\rangle\Big\}$$

$$\tilde{\Omega}_{\sigma|\,\alpha\beta} = \quad \tfrac{1}{2}\Lambda_{\sigma\alpha\beta}\Big\{-2\,(\nabla^F_{e_\sigma}B_\xi)(e_\alpha,e_\beta) + (1-k_\sigma k_\alpha)\big\langle R(\xi,e_\alpha)e_\beta, e_\sigma\big\rangle + (1-k_\sigma k_\beta)\big\langle R(\xi,e_\beta)e_\alpha, e_\sigma\big\rangle\Big\},$$

где K_σ - собственные значения нормального оператора Якоби $R(\cdot,\xi)\xi$ и $\delta_{\sigma\alpha}$, - символ Кронеккера.

Заметим, что Лемма 4.33 может быть применена к случаю локального слоения типа семейства сфер, трубок и т.д. Как непосредственное следствие мы видим что если листы являются вполне геодезическими или вполне омбилическими, то $\xi(M)$ - *минимальное* подмногообразие, но в общем случае не вполне геодезическое.

Доказательство. (a) Так как ξ - геодезическое векторное поле, мы можем положить $e_0 = \xi$, и поэтому $\big\langle(\nabla_{e_0} A_\xi)e_0, e_\sigma\big\rangle = 0$. Применяя Лемму 4.5, мы получаем $\tilde{\Omega}_{\sigma|\,00} = 0$.

(b) Из Леммы 4.5

$$\tilde{\Omega}_{\sigma|\,\alpha 0} = \frac{1}{2}\Lambda_{\sigma\alpha 0}\Big\{ -\big\langle(\nabla_{e_\alpha} A_\xi)e_0\xi, f_\sigma\big\rangle - \big\langle(\nabla_{e_0} A_\xi)e_\alpha, f_\sigma\big\rangle + \lambda_\sigma\lambda_\alpha\big\langle R(e_\sigma, e_0)\xi, f_\alpha\big\rangle\Big\}.$$

Принимая во внимание (4.42) и применяя Лемму 4.32, мы получаем

$$\big\langle(\nabla_{e_\alpha} A_\xi)e_0, f_\sigma\big\rangle = \big\langle(\nabla_\xi A_\xi)\xi, e_\sigma\big\rangle = k_\alpha k_\sigma\big\langle e_\alpha, e_\sigma\big\rangle = k_\sigma^2\delta_{\sigma\alpha}$$

$$\big\langle(\nabla_{e_0} A_\xi)e_\alpha, f_\sigma\big\rangle = \big\langle(\nabla_\xi A_\xi)e_\alpha, e_\sigma\big\rangle = k_\sigma^2\delta_{\sigma\alpha} + \big\langle R(e_\sigma, \xi)\xi, e_\alpha\big\rangle.$$

С другой стороны, полагая $K_\alpha = \big\langle R(e_\alpha, \xi)\xi, e_\alpha\big\rangle$, мы имеем

$$\big\langle R(e_\sigma, \xi)\xi, e_\alpha\big\rangle = K_\sigma\delta_{\sigma\alpha} + (1 - \delta_{\sigma\alpha})\big\langle R(e_\sigma, \xi)\xi, e_\alpha\big\rangle.$$

После подстановок, мы получаем

$$\tilde{\Omega}_{\sigma|\,\alpha 0} = \frac{1}{2}\Lambda_{\sigma\alpha 0}\Big\{\big[(k_\sigma^2 - 1)K_\sigma - 2k_\sigma^2\big]\delta_{\sigma\alpha} - (1 - k_\alpha k_\sigma)(1 - \delta_{\sigma\alpha})\big\langle R(e_\alpha, \xi)\xi, e_\sigma\big\rangle\Big\}$$

(c) Из Лемм 4.5 и (4.42)

$$\tilde{\Omega}_{\sigma|\,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Lambda_{\sigma\alpha\beta}\Big\{ -\big\langle(\nabla_{e_\alpha} A_\xi)e_\beta, e_\sigma\big\rangle - \big\langle(\nabla_{e_\beta} A_\xi)e_\alpha\xi, e_\sigma\big\rangle + \\ k_\sigma\left[k_\alpha\big\langle R(e_\sigma, e_\beta)\xi, e_\alpha\big\rangle + k_\beta\big\langle R(e_\sigma, e_\alpha)\xi, e_\beta\big\rangle\right]\Big\}.$$

Лемма 4.32 и уравнения Кодацци дают

$$\big\langle(\nabla_{e_\alpha} A_\xi)e_\beta, e_\sigma\big\rangle = (\nabla^F_{e_\alpha} B_\xi)(e_\beta, e_\sigma), \quad \big\langle(\nabla_{e_\beta} A_\xi)e_\alpha, e_\sigma\big\rangle = (\nabla^F_{e_\beta} B_\xi)(e_\alpha, e_\sigma),$$

$$\big\langle R(e_\sigma, e_\beta)\xi, e_\alpha\big\rangle = -(\nabla^F_{e_\sigma} B_\xi)(e_\beta, e_\alpha) + \big\langle(\nabla_{e_\beta} A_\xi)e_\alpha, e_\sigma\big\rangle,$$

$$\big\langle R(e_\sigma, e_\alpha)\xi, e_\beta\big\rangle = -(\nabla^F_{e_\sigma} B_\xi)(e_\alpha, e_\beta) + \big\langle(\nabla_{e_\alpha} A_\xi)e_\beta, e_\sigma\big\rangle.$$

Так что мы имеем

$$\big\langle(\nabla_{e_\alpha} A_\xi)e_\beta, e_\sigma\big\rangle + \big\langle(\nabla_{e_\beta} A_\xi)e_\alpha, e_\sigma\big\rangle = \\ 2(\nabla^F_{e_\sigma} B_\xi)(e_\alpha, e_\beta) + \big\langle R(e_\sigma, e_\alpha)\xi, e_\beta\big\rangle + \big\langle R(e_\sigma, e_\beta)\xi, e_\alpha\big\rangle.$$

После подстановок, мы получаем

$$\tilde{\Omega}_{\sigma|\,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Lambda_{\sigma\alpha\beta}\Big\{ -2(\nabla^F_{e_\sigma}B_\xi)(e_\alpha, e_\beta) + \\ (1-k_\sigma k_\alpha)\big\langle R(\xi, e_\alpha)e_\beta, e_\sigma\big\rangle + (1-k_\sigma k_\beta)\big\langle R(\xi, e_\beta)e_\alpha, e_\sigma\big\rangle\Big\},$$

что заканчивает доказательство.

■

Теперь мы можем охарактеризовать вполне омбилические слоения следующим образом.

Теорема 4.34 *Пусть ξ – единичное нормальное векторное поле риманова трансверсально ориентируемого вполне омбилического (локального) гиперслоения на римановом многообразии M. Тогда $\xi(M)$ вполне геодезическое в T_1M если и только если*

$$K_\sigma = \frac{2\,k^2}{k^2-1}, \tag{4.44}$$

где $k = k(s)$ величина омбиличности листа и K_σ собственные числа нормального оператора Якоби $R(\cdot, \xi)\xi$.

Доказательство. Результат Леммы 4.33 означает что внешняя геометрия голономных, то есть с интегрируемым распределением $\xi^\perp$, геодезические векторные поля зависят от внешней геометрии листов и нормального оператора Якоби $R_\xi = R(\cdot, \xi)\xi$. Говорят, что подмногообразие $F \subset M$ кривизно-адаптировано [9], если для каждого нормального к F вектора ξ в точке $p \in F$ выполняются следующие условия

$$R_\xi(T_pF) \subset T_pF, \quad A_\xi \circ R_\xi = R_\xi \circ A_\xi,$$

где A_ξ - оператор формы F. Первое условие всегда выполняется для гиперповерхности. Второе означает, что существует базис T_pF состоящий из общих собственных векторов R_ξ и A_ξ. Каждое вполне омбилическое подмногообразие является кривизно-адаптированным и имеет параллельную вторую фундаментальную форму. Отсюда немедленно следует, что ненулевые компоненты второй фундаментальной формы для $\xi(M) \in T_1M$ имеют вид

$$\tilde{\Omega}_{\sigma|\,\sigma 0} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+k^2}\Big[(k^2-1)K_\sigma - 2k^2\Big],$$

где k – величина омбиличности листа гиперслоения и K_σ- собственные значения нормального оператора Якоби $R(\cdot,\xi)\xi$.

■

Заметим, что $K_\sigma = K_{\xi\wedge e_\sigma}$, где $K_{\xi\wedge e_\sigma}$ означает кривизну в двумерном направлении вдоль плоскости $\xi \wedge e_\sigma$ и e_σ – собственные векторы нормального оператора Якоби. Подобное условие является необходимым для вполне геодезического свойства в случае кривизно-адаптированного слоения (даже локального), а именно

$$K_\sigma = \frac{2\,k_\sigma^2}{k_\sigma^2 - 1}.$$

Это условие не выполняется, если M^{n+1} локально симметричное, и листы однородны. В этом случае K_σ постоянны вдоль ξ-геодезической в то время как k_σ – функции ее естественного параметра. Типичным примером является поле единичных нормалей семейства геодезических сфер или трубок вокруг вполне геодезического подмногообразия. Эти векторные поля минимальны [20], но не могут быть вполне геодезическими.

Как прямое применение Леммы 4.33 к случаю 2-мерных римановых многообразий, мы имеем возможность полностью описать вполне геодезические единичные векторные поля, принадлежавшие рассматриваемому классу, и сами базовые многообразия следующим образом.

Теорема 4.35 *Пусть ξ – (локальное) единичное геодезическое векторное поле на 2-мерном римановом многообразии M. Тогда ξ – вполне геодезическое векторное поле если и только если локальное выражение для метрики M относительно ($\xi, \xi^{\perp}$) – ортогональной координатной системы принимает вид*

$$ds^2 = \frac{(t^2-1)^2}{t^4(t^2+1)^2}\,dt^2 + \frac{a^2t^2}{(t^2+1)^2}\,dv^2, \tag{4.45}$$

где t – геодезическая кривизна $\xi^{\perp}$-кривых, ξ – нормированное векторное поле ∂_t и a – параметр.

Доказательство. Пусть ξ - (локальное) геодезическое единичное векторное поле на 2-мерном римановом многообразии M гауссовой кривизны K. Результат Леммы 4.33 позволяет упростить матрицу второй фундаментальной формы $\xi(M) \in T_1M$ к виду

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{(k^2-1)K-2k^2}{1+k^2} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{(k^2-1)K-2k^2}{1+k^2} & -\dfrac{e_1(k)}{(1+k^2)^{3/2}} \end{pmatrix},$$

где k - геодезическая кривизна интегральных траекторий единичного векторного поля $e_1 = \xi^{\perp}$. Так как ξ геодезическое и значит минимальное, то по Теореме 4.9 поле ξ огибает меридианы метрики вращения $ds^2 = du^2 + f^2(u)\,dv^2$. Кривые $u = const$ (параллели) дают нам вполне омбилическое слоение на M^2. *Величина омбиличности* – это геодезическая кривизна параллелей, векторное поле $\xi = \partial_u$ – это единичное касательное векторного поля меридианов, гауссова кривизна K многообразия M^2 в этом случае зависит только от u – естественного параметра на меридианах – и $K = k'(u) - k^2(u)$. Чтобы удовлетворить условиям вполне геодезичности, геодезическая кривизна k должна быть решением дифференциального уравнения

$$k' = \frac{k^2\,(k^2+1)}{k^2-1}.$$

Неявное решение $u = 2\arctan k + \dfrac{1}{k} + u_0$. Обратная функция $k = k(u)$, существует на интервалах где $K(u) \neq 1$. Чтобы привести явное решение, мы поступим следующим образом. Выберем k как параметр, скажем t. Так как $k = -f^{-1} f'_u$, мы можем написать два соотношения

$$\frac{f'_u}{f} = -t\,, \qquad \frac{d\,t}{du} = \frac{t^2(t^2+1)}{t^2-1}. \tag{4.46}$$

Делая замену параметра, мы получаем дифференциальное уравнение на $f(t)$ вида $\dfrac{f'_t}{f} = \dfrac{1-t^2}{t(1+t^2)}$ с общим решением $f(t) = \dfrac{a\,t}{t^2+1}$, где a - постоянная интегрирования. Из (4.46) мы можем также найти $du = \dfrac{t^2-1}{t^2(t^2+1)}\,dt$, и поэтому рассматриваемая метрика принимает вид (4.45).

■

Мы можем получить изометрическое вложение построенной метрики евклидово 3 - мерное пространство *в виде поверхности вращения* для некоторых значений параметра интегрирования.

Пример 4.36 Пусть $\big\{x(t), z(t)\big\}$ – профильная кривая, порождающая поверхность с метрикой (4.45) с $a = 1$. Тогда, очевидно, $x(t) = \dfrac{t}{(t^2+1)}$ и $(x'_t)^2 + (z'_t)^2 = \dfrac{(t^2-1)^2}{t^4(t^2+1)^2}$. Отсюда находим $z'_t = \pm\dfrac{(t^2-1)\sqrt{2t^2+1}}{t^2(t^2+1)^2}$. Выберем одну ветвь, скажем с положительным знаком. Относительно простое вычисление дает $z(t) = \dfrac{(2t^2+1)^{3/2}}{t(t^2+1)}$ (с точностью до постоянной). Таким образом, мы имеем $x(t) = \frac{t}{(t^2+1)}, \quad z(t) = \frac{(2\,t^2+1)^{3/2}}{t(t^2+1)}$, где t – геодезическая кривизна меридианов соответствующей поверхности вращения с одной сингулярной точкой, соответствующей значению параметра $t = \pm 1$.

Отметим, что $K < 0$ при $t^2 \in (0, 1)$ и $K > 0$ для $t^2 \in (1, +\infty)$. Точка $(0, 0, 2\sqrt{2})$ – омбилическая в бесконечности.

Пример не является собственно 2-мерным. Рассмотрим метрику вращения вида

$$ds^2 = du^2 + f^2(u) \sum_{\alpha=1}^{n} (dv^\alpha)^2.$$

Тогда листы гиперслоения $u = const$ все вполне омбилические со значением омбиличности $K = -f^{-1} f'_u$. Чтобы векторное поле $\xi = \partial_u$ было вполне геодезическим, это значение должно удовлетворить тому же самому дифференциальному уравнению, а именно

$$k' = \frac{k^2 \, (k^2 + 1)}{k^2 - 1},$$

которое имеет то же самое решение как в 2-мерном примере.

4.5. Вполне геодезические единичные векторные поля на двумерных многообразиях

Рассмотренные выше частные случаи векторных полей со вполне геодезическим образом обосновывают задачу нахождения многообразий, допускающих единичные вполне геодезические векторные поля. В простейшем случае двумерных аналитических многообразий можно дать их исчерпывающее описание.

Определение 4.37 *Точка $q \in M^n$ называется стационарной для векторного поля ξ если $\nabla_X \xi \,|_q = 0$ для всех $X \in T_q M^n$.*

Если стационарные точки заполняют область $D \subset M^n$, то локально $M^n = M^{n-k} \times E^k$, где E^k – Евклидов сомножитель размерности $k \geq 1$. В случае

$n = 2$, многообразие является тогда плоским в D. Если многообразие знакопостоянной гауссовой кривизны, тогда всегда можно ограничивать наши рассмотрения областью без стационарных точек данного поля.

Теорема 4.38 *Пусть M^2 – риманово аналитическое многообразие со знакопостоянной гауссовой кривизной K. Тогда, на некотором открытом подмножестве $U \subset M^2$ существует единичное вполне геодезическое векторное поле ξ если и только если*

(a) метрика g на U локально имеет вид $ds^2 = du^2 + \sin^2\alpha(u)\,dv^2$, где $\alpha(u)$ – решение дифференциального уравнения $\dfrac{d\alpha}{du} = 1 - \dfrac{a+1}{\cos\alpha}$;

(b) вполне геодезическое единичное векторное поле ξ имеет вид

$$\xi = \cos(av + \omega_0)\,\partial_u + \frac{\sin(av + \omega_0)}{\sin\alpha(u)}\,\partial_v,$$

где $a, \omega_0 = const$.

Гауссова кривизна K метрики $ds^2 = du^2 + \sin^2\alpha(u)\,dv^2$ имеет вид

$$K = \frac{d\alpha}{du}. \tag{4.47}$$

Поэтому $\alpha(u)$ – полная кривизна многообразия вдоль меридиана метрики. Векторное поле является параллельным вдоль меридиана и закручивается вдоль параллелей с постоянной угловой скоростью a относительно координатного репера.

Доказательство. Пусть ξ – данное единичное векторное поле на римановом многообразии M^n. По соображениям размерности, ядро линейного оператора $\nabla_X\xi : TM^n \to \xi^\perp$ не пусто. Поэтому существует ненулевое векторное поле e_0 такое, что $\nabla_{e_0}\xi = 0$. В случае $n = 2$, поле e_0 может быть найдено явно. Обозначите η единичное векторное поле на M^2, которое ортогонально ξ. Положим $\nabla_\xi \xi = k\,\eta$, $\nabla_\eta \eta = \varkappa\,\xi$, где k и $\varkappa$ - геодезические кривизны интегральных траекторий полей ξ и η соответственно. Введем ортонормированный репер

$$e_0 = \frac{\varkappa}{\lambda}\,\xi + \frac{k}{\lambda}\,\eta, \quad e_1 = \frac{k}{\lambda}\,\xi - \frac{\varkappa}{\lambda}\,\eta, \quad \lambda = \sqrt{k^2 + \varkappa^2}.$$

Поля e_0 и e_1 корректно определены на открытом подмножестве $U \subset M^2$, где поле ξ не имеет стационарных точек, то есть точек, где $\lambda = 0$. Ограничимся этой открытой частью. Легко проверить, что

$$\nabla_{e_0}\xi = 0, \quad \nabla_{e_1}\xi = \lambda\eta. \tag{4.48}$$

Обозначим через ω угловую функция между ξ и e_0. Тогда

$$k = \lambda \sin\omega, \quad \varkappa = \lambda\cos\omega \tag{4.49}$$

и мы можем положить

$$\xi = \cos\omega\, e_0 + \sin\omega\, e_1, \quad \eta = \sin\omega\, e_0 - \cos\omega\, e_1. \tag{4.50}$$

Обозначим через μ и σ *ориентированные* геодезические кривизны интегральных кривых полей e_0 и e_1 соответственно. Тогда

$$\nabla_{e_0} e_0 = \mu\, e_1, \quad \nabla_{e_1} e_1 = \sigma\, e_0.$$

В этих терминах фундаментальная форма подмногообразия $\xi(M) \subset T_1M$ выражается формулой Леммы 4.7, а именно

$$\Omega = \begin{bmatrix} -\mu\,\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & \dfrac{1}{2}\left(\sigma\,\lambda + \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} e_0(\lambda)\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\sigma\,\lambda + \dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} e_0(\lambda)\right) & e_1\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) \end{bmatrix}. \tag{4.51}$$

Положим $\cos(\alpha/2) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$. Тогда мы имеем

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \sin(\alpha/2), \quad \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} = \cos\alpha,$$
$$e_0(\lambda) = \frac{e_0(\alpha)}{2\cos^2(\alpha/2)}, \quad e_1\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) = \frac{1}{2}\cos(\alpha/2)\, e_1(\alpha).$$

После этих упрощений

$$\Omega = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2\mu\,\sin(\alpha/2) & \dfrac{\sigma\,\sin\alpha + e_0(\alpha)\cos\alpha}{2\cos^2(\alpha/2)} \\ \dfrac{\sigma\,\sin\alpha + e_0(\alpha)\cos\alpha}{2\cos^2(\alpha/2)} & \cos(\alpha/2)\, e_1(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Пусть $\Omega \equiv 0$. В силу требования аналитичности, $\mu\sin(\alpha/2) \equiv 0$ означает, что либо $\mu \equiv 0$, либо $\sin(\alpha/2) \equiv 0$. Но если $\sin(\alpha/2) \equiv 0$, то $\lambda \equiv 0$, что противоречит условию. Значит $\mu \equiv 0$. Поэтому, если вполне геодезическое векторное поле существует, то *интегральные траектории поля e_0 - геодезические*. Так как $\cos(\alpha/2) \neq 0$, то

$$e_1(\alpha) \equiv 0. \tag{4.52}$$

Введем локальную полугеодезическую координатную систему (u, v) так, что

$$\partial_u = e_0,\ \partial_v = f(u, v)\, e_1,$$

где $f(u, v)$ - некоторая ненулевая функция. Тогда линейный элемент M^2 может быть записан как $ds^2 = du^2 + f^2 dv^2$. Условие (4.52) влечет $\partial_v\alpha = 0$, что означает, что $\alpha = \alpha(u)$. Рассмотрим теперь последнее условие

$$\sigma\,\sin\alpha + e_0(\alpha)\cos\alpha = 0.$$

Если $\cos\alpha \equiv 0$, то $\sin\alpha \equiv 1$ и следовательно $\sigma \equiv 0$. Это означает, что e_0 – параллельное векторное поле на M^2 и следовательно $K = 0$. Положим $e_0(\alpha) = -\sigma\,\tan\alpha$. Относительно выбранной полугеодезической координатной системы, $\sigma = -\partial_u f/f$ и мы приходим к следующему соотношению

$$\frac{\partial_u f}{f} = \cot\alpha\ \partial_u \alpha.$$

Ввиду (4.52), мы имеем $\alpha = \alpha(u)$, и уравнение выше имеет очевидное решение $f(u, v) = C(v)\sin\alpha$, где $C(v) \neq 0$ – постоянная интегрирования. Совершив преобразование параметра v, можно всегда полагать $C(v) \equiv 1$. Поэтому, линейный элемент 2- многообразия M, которое допускает вполне геодезическое векторное единичное поле, в выбранной системе координат с необходимостью имеет вид

$$ds^2 = du^2 + \sin^2\alpha(u)\, dv^2. \tag{4.53}$$

Обратимся теперь к векторному полю. Прямое вычисление дает

$$\nabla_{e_0}\xi = \nabla_{e_0}(\cos\omega\, e_0 + \sin\omega\, e_1) = (-e_0(\omega) - \mu)\,\eta,$$

$$\nabla_{e_1}\xi = \nabla_{e_1}(\cos\omega\, e_0 + \sin\omega\, e_1) = (-e_1(\omega) + \sigma)\,\eta.$$

Так как $\mu = 0$ и $\nabla_{e_0}\xi = 0$, мы видим что $\partial_u\omega = 0$ и следовательно $\omega = \omega(v)$. Второе равенство означает, что $-e_1(\omega) + \sigma = \tan(\alpha/2)$. Относительно выбранной координатной системы, мы имеем $\sigma = -\cot\alpha\, \partial_u\alpha$ и следовательно

$$\partial_v\omega = \sin\alpha\,(\sigma - \tan(\alpha/2) = -\cos\alpha\ \partial_u\alpha - 2\sin^2(\alpha/2)$$

Правая часть не зависит от v-параметра и поэтому $\partial^2_{vv}\omega = 0$, что означает $\omega = av + \omega_0, \quad (a, \omega_0 = const)$. Как следствие, мы приходим к следующему дифференциальному уравнению для функции $\alpha(u)$: $\cos\alpha\ \partial_u\alpha + 2\sin^2(\alpha/2) = -a$ или эквивалентно

$$\frac{d\alpha}{du} = 1 - \frac{a+1}{\cos\alpha}. \tag{4.54}$$

■

Прямое вычисление показывает, что если α – решение (4.54), то гауссова кривизна метрики (4.53) имеет вид (4.47). Так как по предположению, K

знакопостоянна, соотношение (4.47) позволяет выбрать α в качестве нового параметра на u-кривых. Относительно параметра α мы имеем

$$du = \frac{d\alpha}{K} = -\frac{\cos\alpha}{a+1-\cos\alpha}\,d\alpha$$

и линейный элемент (4.53) принимает вид

$$ds^2 = \left(\frac{\cos\alpha}{a+1-\cos\alpha}\right)^2 d\alpha^2 + \sin^2\alpha\, dv^2. \tag{4.55}$$

Если ξ - единичное векторное поле на римановом многообразии M^n, то индуцируемая метрика на $\xi(M^n)$ имеет вид

$$d\tilde{s}^2 = g_{ik}du^i du^k + \big\langle \nabla_i\xi, \nabla_k\xi\big\rangle du^i du^k.$$

Если ξ вполне геодезическое векторное поле на M^2, тогда метрика M^2 имеет стандартный вид (4.53) и $\nabla_{\partial_u}\xi = \nabla_{e_0}\xi = 0,\ \nabla_{\partial_v}\xi = \sin\alpha\nabla_{e_1}\xi = \sin\alpha\lambda\,\eta = 2\sin^2(\alpha/2)\,\eta$. Таким образом, мы имеем

$$d\tilde{s}^2 = du^2 + \sin^2\alpha\, dv^2 + 4\sin^4(\alpha/2)dv^2 = du^2 + 4\sin^2(\alpha/2)dv^2.$$

Принимая во внимание (4.47) мы можем легко найти гауссову кривизну вполне геодезического подмногообразия $\xi(M^2)$, а именно $\tilde{K} = \frac{1}{4}K(K - 2\cot(\alpha/2)K'_\alpha)$, где $K(\alpha)$ – гауссова кривизна M^2, заданная соотношениями (4.47) и (4.54). В частности, если $K=1$, то $\tilde{K} = \frac{1}{4}$ [47].

Уравнения (4.54) и (4.47) полностью определяют класс римановых 2-мерных многообразий допускающих вполне геодезическое единичное векторное поле [111].

Предложение 4.39 *Пусть M^2 – риманово многообразие с линейным элементом вида $ds^2 = du^2 + \sin^2\alpha(u)dv^2$. Обозначим через K гауссову кривизну M^2. Тогда $K = \dfrac{d\alpha}{du}$, если и только если функция $\alpha(u)$ удовлетворяет уравнению $\frac{d\alpha}{du} = 1 + \frac{m}{\cos\alpha}\quad (m = const)$.*

Следствием Теоремы 4.38 является тот факт, что риманово многообразие (M^2, c) постоянной кривизны $c \neq 0$ допускает вполне геодезическое единичное векторное поле, если и только если $c = 1$. Это векторное поле параллельно вдоль меридианов и движется вдоль параллелей с единичной угловой скоростью.

В работе [105] был рассмотрен отдельно случай двумерных многообразий постоянной кривизны и, в частности, была доказана следующая теорема, дающая геометрическое описание вполне геодезического единичного векторного поля.

Теорема 4.40 *Пусть M^2 – риманово многообразием постоянной гауссовой кривизны K. Единичное векторное поле ξ, порождающее вполне геодезического подмногообразия в T_1M^2 существует если и только если $K = 0$ или $K = 1$. Кроме того,*

a) если $K = 0$, то ξ является или параллельным векторным полем или движется вдоль семейства параллельных геодезических с постоянной угловой скоростью. Геометрически, $\xi(M^2)$ есть либо изометричное вложение M^2 в качестве фактора в $M^2 \times S^1$, или является винтовым плоским подмногообразием в $M^2 \times S^1$;

b) если $K = 1$, то ξ - векторное поле на сфере S^2, которое является параллельным вдоль меридианов и движется вдоль параллели с единичной угловой скоростью. Геометрически, $\xi(M^2)$ - часть вполне геодезического RP^2 локально изометричного сфере S^2 радиуса 2 в $T_1S^2 \overset{isom}{\approx} RP^3$.

Доказательство. В доказательстве нуждается только случай $K = 0$, который не покрывается Теоремой 4.38. Пусть $\xi = \{\cos\omega, \sin\omega\}$ искомое поле. Из Леммы 4.7 вид (i) следует, что $e_0(\lambda) = e_1(\lambda) = 0$, то есть $\lambda = const$. Если $\lambda = 0$, то поле ξ параллельное ($\omega = const$). Если же $\lambda \neq 0$, то $\mu = 0$ и значит поле параллельно вдоль семейства геодезических. Тогда можно параметризовать многообразие так, что $ds^2 = dx^2 + dy^2$ и $\omega = \omega(x)$. Пусть (x, y, ω) – стандартные координаты в $T_1M^2 \overset{isom}{\approx} E^2 \times S^1$. Тогда первая фундаментальная форма T_1M^2 примет вид $d\tilde{s}^2 = dx^2 + dy^2 + d\omega^2$. Функция $\omega(x)$ задаст вполне геодезическое подмногообразие только если $\omega(x) = ax + b$ – линейная функция. Если $a = 0$, то относительно этих координат локальная параметризация $\xi(M^2)$ есть $\omega = const$ и $\xi(M^2)$ не ничто иное, как E^2 изометрически вложенное в $E^2 \times S^1$. Если $a \neq 0$, то локальная параметризация $\xi(M^2)$ есть $\omega = ax + b$ и индуцируемая метрика $d\tilde{s}^2 = (1 + a^2)\, dx^2 + dy^2$ плоская. Вложение является винтовым в смысле, что это подмногообразие пересекает каждую плоскую образующую цилиндра $p : E^2 \times S^1 \to S^1$ под постоянным углом $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

■

В случае $K = 0$ нетрудно найти интегральные траектории вполне геодезического векторного поля. Для этого следует принять одну из семейства параллельных геодезических в качестве оси Oy, а одну из семейства ортогональных траекторий (так же состоящего из геодезических) в качестве оси Ox. В таком случае поле $\xi = \{\cos(ax), \sin(ax)$, а значит для интегральных траекторий получим дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = \tan(ax)$ решением которого будет семейство линий $y(x) = -\frac{1}{a} \ln|\cos(ax)| + C$.

Интегральные траектории вполне геодезического векторного поля ξ могут быть найдены и в общем случае. Пусть $\gamma = \{u(s), v(s)\}$ – интегральная траектория. Так как $\xi = \cos\omega\, e_0 + \sin\omega\, e_1 = \cos\omega\, \partial_u + \frac{\sin\omega}{\sin\alpha} \partial_v$, мы можем положить $\frac{du}{ds} = \cos\omega$, $\quad \frac{dv}{ds} = \frac{\sin\omega}{\sin\alpha}$ и затем $\frac{du}{dv} = \cot\omega \sin\alpha$. Так как $\alpha = \alpha(u)$ и

$\omega = av + \omega_0$, мы приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{\sin\alpha} = \cot\omega\, dv.$$

Используя (4.54), мы можем найти $\frac{du}{d\alpha} = \frac{\cos\alpha}{-a-1+\cos\alpha}$ и сделать замену параметра в левой части уравнения. Тогда мы приходим к уравнению $\frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sin\alpha(-a-1+\cos\alpha)} = \cot\omega\, dv$. Беря первообразные, мы имеем

$$\tan(\alpha/2)\sin(av+\omega_0) = c\,(a+(a+2)\tan^2(\alpha/2))^{\frac{a+1}{a+2}} \qquad \text{для} \quad a \neq 0, -2,$$

$$\tan(\alpha/2)\sin(-2v+\omega_0) = c\,e^{\frac{1}{2}\tan^2(\alpha/2)} \qquad \text{для} \quad a = -2,$$

$$\tfrac{1}{2}\tan\omega_0\left(\tfrac{1}{1-\cos\alpha} + \ln\big|\tan(\alpha/2)\big|\right) = v - c \qquad \text{для} \quad a = 0.$$

Принимая во внимание (4.49), $\tan(\alpha/2)\sin\omega = k$ и $\tan^2(\alpha/2) = k^2 + \varkappa^2$. Отсюда получаем внутреннее уравнение интегральных кривых вполне геодезического векторного поля

$$k = c\left[a + (a+2)(k^2+\varkappa^2)\right]^{\frac{a+1}{a+2}} \qquad \text{при} \quad a \neq 0, -2,$$

$$k = c\,e^{\frac{1}{2}(k^2+\varkappa^2)} \qquad \text{при} \quad a = -2,$$

$$k = \sin\omega_0\,\exp\left[2\cot\omega_0(v-c) - \tfrac{1}{2}\tfrac{1+k^2+\varkappa^2}{k^2+\varkappa^2}\right] \qquad \text{при} \quad a = 0,$$

где c - постоянная интегрирования.

Кроме того, в любом случае

$$\xi(k) = \cos\omega\,\partial_u[\tan(\alpha/2)\sin\omega] + \frac{\sin\omega}{\sin\alpha}\partial_v[\tan(\alpha/2)\sin\omega] =$$
$$\frac{\cos\omega\sin\omega\,\alpha'_u}{2\cos^2(\alpha/2)} + \frac{a\,\sin\omega\cos\omega\tan(\alpha/2)}{\sin\alpha} = \frac{\cos\omega\sin\omega}{2\cos^2(\alpha/2)}(\alpha'_u + a).$$

Уравнение (4.54) дает

$$\xi(k) = \frac{(a+1)\cos\omega\sin\omega}{2\cos^2(\alpha/2)}\left(1 - \frac{1}{\cos\alpha}\right).$$

Таким образом, если $a = -1$, то интегральные траектории поля ξ образуют семейство окружностей. Метрика M^2 имеет вид $ds^2 = du^2 + \sin^2 u\, dv^2$ и мы имеем дело с единичной сферой, параметризованной вектор-функцией

$\vec{r} = \left\{ \sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u \right\}$. Эти окружности удовлетворяют уравнению

$$\tan(u/2) \sin v = c. \tag{4.56}$$

Пусть (ρ, φ) – полярные координаты в декартовой плоскости, которая проходит через центр сферы так, что $(0, 0, 1)$ является *северным* полюсом на сфере. Тогда параметры (ρ, φ) и (u, v) связаны через стереографическую проекцию из *южного* полюса как $\rho = \tan(u/2), \quad \varphi = v$. Поэтому, уравнение (4.56) определяет семейство параллельных прямых линий на декартовой плоскости. *Семейство интегральных кривых вполне геодезического векторного поля на единичной сфере может быть получено как прообразы этого семейства при стереографической проекции.* Явное уравнение этого семейства

$$r(v) = \left\{ \frac{2c \sin v \cos v}{c^2 + \sin^2 v}, \frac{2c \sin^2 v}{c^2 + \sin^2 v}, -\frac{c^2 - \sin^2 v}{c^2 + \sin^2 v} \right\}$$

где c - геодезическая кривизна соответствующей окружности. Все эти окружности проходят через южный полюса $(0, 0, -1)$ при $v = 0, \pi$. Мы можем видеть это, используя выражение $\tan(u/2) = c/\sin v$ и тригонометрические выражения для $\sin u$ и $\cos u$ через $\tan(u/2)$.

Единичная сфера - не единственная поверхность, которая реализует метрику (4.55). Пусть (x, y, z) – стандартные Декартовы координаты в E^3. Мы можем найти изометрическое вложение метрики (4.55) в E^3 в классе поверхностей вращения. Чтобы сделать это, положим

$$x(\alpha) = \sin \alpha, \quad (x'_\alpha)^2 + (z'_\alpha)^2 = \left(\frac{\cos \alpha}{a + 1 - \cos \alpha} \right)^2$$

и мы легко находим

$$x(\alpha) = \sin \alpha, \quad z(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\cos t}{a + 1 - \cos t} \sqrt{1 - (a + 1 - \cos t)^2}\, dt,$$

где интервал интегрирования ограничен в соответствии с ограничениями

$$\begin{cases} 1+a<\cos\alpha<2+a, \\ -2<a<-1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a<\cos\alpha<1+a, \\ -1<a<0. \end{cases}$$

Ограничения означают, что, если $|a+1| \geq 1$, то метрика (4.55) не допускает изометрического вложение в E^3 в классе поверхностей вращения.

Интегральные траектории вполне геодезического единичного векторного поля на общем двумерном многообразии так же допускают конформное описание [138].

Теорема 4.41 *Интегральные траектории вполне геодезического единичного векторного поля на двумерном многообразии конформно эквивалентны интегральным траекториям единичного вполне геодезического векторного поля на цилиндре как фактор-пространстве плоскости.*

Доказательство. Будем искать преобразование $u = u(x,y), v = v(x,y)$, приводящее метрику вращения Теоремы 4.38 к конформному виду. В новых координатах

$$ds^2 = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \sin^2\alpha(u)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)dx^2 + \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \sin^2\alpha(u)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)dy^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \sin^2\alpha(u)\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$$

Положим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin\alpha(u)\,\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\sin\alpha(u)\,\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.57}$$

При таком предположении матрица Якоби предполагаемого преобразования получит выражение

$$J = \begin{pmatrix} \sin\alpha(u)\frac{\partial v}{\partial y} & -\sin\alpha(u)\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}. \tag{4.58}$$

Так как

$$\det J = \sin\alpha(u)\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) = \sin\alpha(u)|grad\,(v)|^2,$$

то для невырожденности матрицы Якоби следует потребовать $|grad\,(v)| \neq 0$, так как $\sin\alpha(u) \neq 0$ в силу вида самой метрики. В результате такого преобразования мы получаем $ds^2 = \sin^2\alpha(u)|grad\,(v)|^2\big(dx^2 + dy^2\big)$. Условием разрешимости системы (4.57) является тождество $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$, которое в силу системы (4.57) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \sin\alpha(u)\Delta v.$$

Следовательно, к конформному виду приводит преобразование (4.57) в котором функция $v(x, y)$ является *произвольной гармонической с ненулевым градиентом.* Подходящей функцией является функция $v(x, y) = x$, которая соответствует проекции поверхности вращения на прямой круговой цилиндр, при которой меридианы переходят образующие цилиндра, а параллели – в ортогональные им окружности. При таком выборе проекции

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\alpha(u), \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и относительно новых координат векторное поле Теоремы 4.40 получит координаты

$$\tilde{\xi} = J\xi = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\alpha(u), \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(ax + \omega_0) \\ \frac{\sin(ax+\omega_0)}{\sin\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(ax + \omega_0) \\ \cos(ax + \omega_0) \end{pmatrix}.$$

Сделав замену $\omega_0 \to \omega_0 + \pi/2$, приведем координаты поля к виду

$$\tilde{\xi} = \cos(ax + \omega_0)\partial_x + \sin(ax + \omega_0)\partial_y.$$

Это единичное векторное поле на цилиндре (но не на многообразии, что естественно в силу конформности преобразования). При $a = 0$ мы получаем параллельное векторное поле, а при $a \neq 0$ оно параллельно вдоль образующих и закручивается с постоянной угловой скоростью вдоль окружностей (оси Ox при развертывании на плоскость), что согласуется с Теоремой 4.40. Для интегральных траекторий этого поля имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \tan(ax),$$

решением которого является семейство траекторий

$$y(x) = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C.$$

В частности, при $a = -1$ мы имеем в качестве базового многообразия единичную сферу и интегральные траектории векторного поля проектируются в образ на цилиндре семейства траекторий $y = \ln|\cos x|$, что полностью согласуется с данным выше описанием этих траекторий, если спроектировать эти траектории не на плоскость, а на цилиндр.

■

Вполне геодезические векторные поля на псевдоримановом многообразии. Конструкция метрики Сасаки использует метрику базы и параллельный перенос в касательном расслоении многообразия. Такая метрика, очевидно, может строиться и для случая псевдо-римановой метрики базы. При этом, если M имеет сигнатуру (p, q), то TM имеет сигнатуру $(2p, 2q)$ [41]. Что касается расслоения единичных векторов, то оно распадается на три связных компоненты: (а) расслоение пространственно-подобных векторов T_1M; (б) расслоение времени-подобных векторов $T_{-1}M$; (в) расслоение изотропных векторов T_0M. Метрика, индуцированная на расслоении изотропных векторов вырождена.

Рассмотрим подрасслоения в TM, образованные векторами единичной длины $|\xi|^2 = \epsilon = \pm 1$. Эти подрасслоения являются гиперповерхностями в TM с метрикой, индуцированной метрикой Сасаки TM и называются расслоением единичных пространственно-подобных векторов для $\epsilon = +1$ и расслоением единичных времени-подобных векторов для $\epsilon = -1$. Для краткости, будем называть такие подрасслоения расслоением ϵ-единичных векторов и обозначать через $T_\epsilon M$.

Пусть теперь ξ – векторное поле на M. Векторное поле ξ называется *единичным пространственно-подобным*, если $|\xi|^2 = +1$ и *единичным времени - подобным*, если $|\xi|^2 = -1$ в каждой точке многообразия. Для краткости, будем называть такое поле ϵ- *единичным*. Следующая лемма аналогична риманову случаю (Лемма 4.2) как по содержанию, так и по технике доказательства [117].

Лемма 4.42 *Пусть* $\tilde N = (A^t_\xi N)^h + (N)^v$ $(N \perp \xi)$*произвольная нормаль к подмногообразию* $\xi(M) \subset T_\epsilon M$. *Вторая фундаментальная форма подмногообразия* $\xi(M)$ *относительно нормали* $\tilde N$ *имеет вид*

$$\tilde\Omega_{\tilde N}(\xi_* X, \xi_* Y) = \big\langle Hess_\xi(X,Y) - A_\xi(\Gamma_\xi(X,Y)), N\big\rangle.$$

В качестве следствия, получаем следующее условие вполне геодезичности подмногообразия $\xi(M) \subset T_\epsilon M$.

Лемма 4.43 *Подмногообразие* $\xi(M) \subset T_\epsilon M$ *вполне геодезично тогда и только тогда, когда поле* ξ *удовлетворяет уравнению*

$$Hess_\xi(X,Y) - A_\xi(\Gamma_\xi(X,Y)) - \epsilon \big\langle\, A_\xi X, A_\xi Y \,\big\rangle \xi = 0$$

для любых векторных полей X, Y *на* M.

На псевдоримановом двумерном многообразии $M^{(1,1)}$ вполне геодезические векторные поля как и в римановом случае могут быть описаны явно. Заметим, то параллельное векторное поле всегда является решением уравнения

Леммы 4.43. В двумерном случае это означает, что рассматриваемое многообразие плоское.

Теорема 4.44 *Пусть M – псевдориманово неплоское многообразие сигнатуры* $(1,1)$. *Положим* $\epsilon = \pm 1$. *На M существует вполне геодезическое единичное векторное поле ξ тогда и только тогда, когда*

- *M допускает локальную параметризацию вида $ds^2 = \epsilon(du^2 - sin^2\alpha\, dv^2)$, где $\alpha = \alpha(u)$ – решение дифференциального уравнения $\frac{d\alpha}{du} = -1 - \frac{a-1}{\cos\alpha}$. При этом векторное поле $\pm\xi = \operatorname{ch}(av+\omega_0)\partial_u + \dfrac{\operatorname{sh}(av+\omega_0)}{\sin\alpha(u)}\partial_v$ задает вполне геодезическое подмногообразие в $T_\epsilon M$.*

- *M допускает локальную параметризацию вида $ds^2 = \epsilon(du^2 - sh^2\alpha\, dv^2)$, где $\alpha = \alpha(u)$ – решение дифференциального уравнения $\frac{d\alpha}{du} = 1 - \frac{a+1}{\operatorname{ch}\alpha}$. При этом векторное поле $\pm\xi = \operatorname{sh}(av+\omega_0)\partial_u + \frac{\operatorname{ch}(av+\omega_0)}{\operatorname{sh}\alpha(u)}\partial_v$ задает вполне геодезическое подмногообразие в $T_{-\epsilon}M$.*

Доказательство полностью аналогично риманову случаю. Однако в отличие от риманова случая Гауссова кривизна $M^{1,1}$ удовлетворяет уравнению $K = -\epsilon\,\alpha_u$. Поэтому в случае псевдориманова многообразия, вполне геодезические ϵ-единичные векторные поля существуют как для $K = 1$, так и для случая $K = -1$ (при соответствующих значениях параметра a). При этом $\xi(M)$ лежит в $T_{+1}M$ и $T_{-1}M$, соответственно.

4.6. Вполне геодезические единичные векторные поля на 3-х мерных группах Ли с лево-инвариантной метрикой

Трехмерные группы Ли с лево-инвариантной метрикой имеют нетривиальную, но достаточно простую геометрическую структуру. Естественный класс векторных полей на них составляют инвариантные векторные поля. Минимальные единичные векторные поля на таких группах были найдены в работе [73]. В данном разделе мы находим все *вполне геодезические* единичные векторные поля. При этом мы не пользуемся результатом работы [73], так как в ней используется выражение только для следа вторых форм, что недостаточно для исследования вполне геодезичности. Однако можно проверить, что найденные нами вполне геодезические инвариантные единичные векторные поля принадлежат классам минимальных, описанных в работе [73].

Унимодулярные и не унимодулярные группы имеют существенно различные геометрические свойства и рассматриваются нами отдельно. Уравнение вполне геодезичнности (4.5) выпишем здесь в развернутом виде, а именно,

$$(\nabla_X A_\xi)Y + (\nabla_Y A_\xi)X + A_\xi R(\xi, A_\xi X)Y + A_\xi R(\xi, A_\xi Y)X - 2\langle A_\xi X, A_\xi Y \rangle\xi = 0. \quad (4.59)$$

4.6.1. Унимодулярный случай.

Рассмотрим унимодулярную группу Ли с лево инвариантной метрикой $\langle\ ,\ \rangle$. Существует ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 ее алгебры Ли такой, что действия скобки определены формулами

$$[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, \quad [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3. \quad (4.60)$$

Константы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ полностью определяют топологическую структуру соответствующей группы Ли:

знаки $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Группа Ли
$+,+,+$	$SU(2)$ или $SO(3)$
$+,+,-$	$SL(2,\mathbb{R})$ или $O(1,2)$
$+,+,0$	$E(2)$
$+,-,0$	$E(1,1)$
$+,0,0$	Nil^3 (группа Гейзенберга)
$0,0,0$	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$

Определим константы связности $\mu_i = \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\lambda_i$. Тогда для любого лево инвариантного поля единичного вектора $\xi = x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$ матрица оператора A_ξ примет вид

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_2x_3 & \mu_3x_2 \\ \mu_1x_3 & 0 & -\mu_3x_1 \\ -\mu_1x_2 & \mu_2x_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.61}$$

Введем в рассмотрение векторные поля $N_m = e_m\times\xi$. Обозначим ε_{ikm} смешанное произведение $\langle\, e_i, e_k\times e_m\,\rangle$. Тогда в координатном выражении

$$N_m = \varepsilon_{ikm}(x_ie_k - x_ke_i), \quad \nabla_{e_i}\xi = \mu_i\, e_i\times\xi = \mu_i\, N_i. \tag{4.62}$$

Прямое вычисление показывает, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.45 *Пусть G – трехмерная унимодулярная группа Ли с лево инвариантной метрикой $\{e_i,\ i=1,2,3\}$ будет ортонормированный базис алгебры Ли, удовлетворяющий* (4.60). *Тогда для любого лево инвариантного* *единичного векторного поля* $\xi = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ *мы имеем*

$$(\nabla_{e_i}A_\xi)e_i = \mu_i^2(\xi - x_ie_i), \quad (\nabla_{e_i}A_\xi)e_k = \varepsilon_{ikm}\mu_i\mu_m N_m - \mu_i\mu_k x_i e_k \quad (i \neq k),$$

$$R(e_i, e_k)\xi = -\varepsilon_{ikm}\sigma_{ik}N_m,$$

где $\sigma_{ik} = \sigma_{ki} = \mu_i\mu_m + \mu_k\mu_m - \mu_i\mu_k$.

Отметим, что $\mu_i\mu_k = \frac{1}{2}\rho_m$, где ρ_m - соответствующая главная кривизна Риччи. Теперь мы можем выписать уравнение (4.59) для различных комбинаций базисных векторов.

Лемма 4.46 *Пусть* G *– трехмерная унимодулярная группа Ли с лево- инвариантной метрикой и* $\{e_i,\ i = 1, 2, 3\}$ *– ортонормированный базис алгебры Ли, удовлетворяющий* (4.60). *Тогда лево-инвариантное единичное векторное поле* $\xi = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ *будет вполне геодезическим если и только если для любого* $i \neq k \neq m$

$$(i,i) \quad x_i\mu_i\Big\{x_m(\sigma_{ik}\mu_k - \mu_i)N_k - x_k(\sigma_{im}\mu_m - \mu_i)N_m\Big\} = 0,$$

$$(i,k) \quad -x_ix_m\mu_i(\sigma_{ik}\mu_i - \mu_k)N_i + x_kx_m\mu_k(\sigma_{ik}\mu_k - \mu_i)N_k + \Big(\mu_i\mu_m(1 - \sigma_{km}) - \mu_k\mu_m(1 - \sigma_{im}) + \mu_i(\sigma_{km}\mu_m - \mu_k)x_i^2 - \mu_k(\sigma_{im}\mu_m - \mu_i)x_k^2\Big)N_m = 0.$$

Доказательство чисто вычислительное, опирается на выражение (4.59), Лемму 4.45 и приведено а работе [116]. Анализ полученных в Лемме 4.46 приводит к следующему результату.

Теорема 4.47 *Пусть* G *– трехмерная унимодулярная группа Ли с лево-инвариантной метрикой и* $\{e_i,\ i = 1, 2, 3\}$ *– канонический ортонормирован-*

ный базис ее алгебры Ли (4.60) *и пусть* μ_1, μ_2, μ_3 – *коэффициенты римановой связности. Лево-инвариантное единичное векторное поле* ξ *является вполне геодезическим в следующих случаях:*

- ξ – *произвольное при* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$*;*

- $\xi = e_i$ *или* $\xi = \cos t\, e_j + \sin t\, e_k$ *при* $\mu_i \neq 0$, $\mu_j = \mu_k = 0$ $(i \neq j \neq k \neq i$, $t = const)$*;*

- ξ – *главное направление Риччи, отвечающее главной кривизне Риччи, равной 2.*

Доказательство. Перепишем результат Леммы 4.46 для различных комбинаций индексов.

$$(1,1) \quad x_1\mu_1\Big\{x_3(\sigma_{12}\mu_2 - \mu_1)N_2 - x_2(\sigma_{13}\mu_3 - \mu_1)N_3\Big\} = 0,$$

$$(2,2) \quad x_2\mu_2\Big\{x_3(\sigma_{21}\mu_1 - \mu_2)N_1 - x_1(\sigma_{23}\mu_3 - \mu_2)N_3\Big\} = 0,$$

$$(3,3) \quad x_3\mu_3\Big\{x_2(\sigma_{31}\mu_1 - \mu_3)N_1 - x_1(\sigma_{32}\mu_2 - \mu_3)N_2\Big\} = 0,$$

$$\begin{aligned}(1,2) \quad & -x_1x_3\mu_1(\sigma_{12}\mu_1 - \mu_2)N_1 + x_2x_3\mu_2(\sigma_{12}\mu_2 - \mu_1)N_2 + \Big(\mu_1\mu_3(1-\sigma_{23}) - \\ & \mu_2\mu_3(1-\sigma_{13}) + \mu_1(\sigma_{23}\mu_3 - \mu_2)x_1^2 - \mu_2(\sigma_{13}\mu_3 - \mu_1)x_2^2\Big)N_3 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2,3) \quad & -x_2x_1\mu_2(\sigma_{23}\mu_2 - \mu_3)N_2 + x_3x_1\mu_3(\sigma_{23}\mu_3 - \mu_2)N_3 + \Big(\mu_2\mu_1(1-\sigma_{31}) - \\ & \mu_3\mu_1(1-\sigma_{21}) + \mu_2(\sigma_{31}\mu_1 - \mu_3)x_2^2 - \mu_3(\sigma_{21}\mu_1 - \mu_2)x_3^2\Big)N_1 = 0,\end{aligned}$$

$$(3,1)\quad -x_3x_2\mu_3(\sigma_{13}\mu_3-\mu_1)N_3+x_1x_2\mu_1(\sigma_{13}\mu_1-\mu_3)N_1+\Big(\mu_3\mu_2(1-\sigma_{12})-\mu_1\mu_2(1-\sigma_{32})+\mu_3(\sigma_{12}\mu_2-\mu_1)x_3^2-\mu_1(\sigma_{32}\mu_2-\mu_3)x_1^2\Big)N_2=0.$$

Векторы N_1, N_2 и N_3 линейно зависимы, то есть $x_1N_1+x_2N_2+x_3N_3=0$, но попарно линейно независимы для общего поля ξ.

Случай $x_1\neq 0, x_2\neq 0, x_3\neq 0$. Подслучай 1: $\mu_1=0,\mu_2=0,\mu_3=0$. Все уравнения выполнены очевидно. Поэтому, *любое лево-инвариантное векторное поле является вполне геодезическим в этом случае.*

Подслучай 2: $\mu_1=0,\mu_2\neq 0,\mu_3\neq 0$. Тогда из (2,2) и (3,3) мы видим, это $\mu_2=0,\mu_3=0$. Противоречие. Подобным способом мы исключаем случаи когда $\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2\neq 0$ и $\mu_i=0$ для $i=2$; $i=3$; $i=1,2$; $i=1,3$; $i=2,3$.

Подслучай 3: $\mu_1\neq 0,\mu_2\neq 0,\mu_3\neq 0$. Так как N_1, N_2 и N_3 линейно независимы попарно, из (1,1), (2,2) и (3,3) мы заключаем:

$$\begin{cases}\sigma_{12}\mu_2-\mu_1=0,\\ \sigma_{12}\mu_1-\mu_2=0,\end{cases},\quad \begin{cases}\sigma_{13}\mu_3-\mu_1=0,\\ \sigma_{13}\mu_1-\mu_3=0,\end{cases}\begin{cases}\sigma_{23}\mu_2-\mu_3=0,\\ \sigma_{23}\mu_3-\mu_2=0.\end{cases}\tag{4.63}$$

Как следствие,

$$(\sigma_{12}-1)(\mu_1+\mu_2)=0,\quad (\sigma_{13}-1)(\mu_1+\mu_3)=0,\quad (\sigma_{23}-1)(\mu_2+\mu_3)=0.$$

Принимая во внимание (4.63), остальные уравнения дают

$$\begin{cases}\mu_1\mu_3(1-\sigma_{23})-\mu_2\mu_3(1-\sigma_{13})=0,\\ \mu_1\mu_2(1-\sigma_{13})-\mu_1\mu_3(1-\sigma_{12})=0,\\ \mu_2\mu_3(1-\sigma_{12})-\mu_1\mu_2(1-\sigma_{23})=0.\end{cases}$$

Так как $\mu_i\neq 0$ $(i=1,2,3)$, мы заключаем $\sigma_{ik}=1$ $(i,k=1,2,3)$ и поэтому $\rho_i=2$ $(i=1,2,3)$.

Случай $x_1\neq 0, x_2\neq 0, x_3=0$. В этом случае $x_1N_1+x_2N_2=0$, но N_1, N_3 и N_2, N_3 *линейно независимы* в парах. Перепишем систему для этого случая следующим образом.

$$(1,1)\quad \mu_1(\sigma_{13}\mu_3-\mu_1)=0,$$

$$(2,2)\quad \mu_2(\sigma_{23}\mu_3-\mu_2)=0,$$

$$(3,3)\quad \equiv 0$$

$$(1,2)\quad \mu_1\mu_3(1-\sigma_{23})-\mu_2\mu_3(1-\sigma_{13})+\mu_1(\sigma_{23}\mu_3-\mu_2)x_1^2-\mu_2(\sigma_{13}\mu_3-\mu_1)x_2^2=0,$$

$$(2,3)\quad x_1^2\mu_2(\sigma_{23}\mu_2-\mu_3)+\mu_1\mu_2(1-\sigma_{31}-\mu_1\mu_3(1-\sigma_{21})+\mu_2(\sigma_{13}\mu_1)-\mu_3)x_2^2=0,$$

$$(3,1)\ -x_2^2\mu_1(\sigma_{13}\mu_1-\mu_3+\mu_2\mu_3(1-\sigma_{12})-\mu_1\mu_2(1-\sigma_{32})-\mu_1(\sigma_{23}\mu_2-\mu_3)x_1^2=0.$$

Положим $\mu_1=\mu_2=0$. Тогда система выполнена для произвольного μ_3. Случай $\mu_3=0$ - уже рассмотрен. Случай $\mu_3\neq 0$ дает $\{e_1,e_2\}_R$.

Положим $\mu_1=0,\mu_2\neq 0$. Тогда $\sigma_{12}=\mu_2\mu_3,\sigma_{13}=\mu_2\mu_3,\sigma_{23}=-\mu_2\mu_3$. Уравнение (2,2) дает $-\mu_2^2(\mu_3^2+1)=0$. Противоречие.

Положим $\mu_1\neq 0,\mu_2=0$. Тогда $\sigma_{12}=\mu_1\mu_3,\sigma_{13}=-\mu_1\mu_3,\sigma_{23}=\mu_1\mu_3$. Уравнение (1,1) дает $-\mu_1^2(\mu_3^2+1)=0$. Противоречие.

Положим $\mu_1\neq 0,\mu_2\neq 0$. Тогда $\mu_1=\sigma_{13}\mu_3,\mu_2=\sigma_{23}\mu_3$ и подстановка в (1,2) дает $\mu_3^3(\mu_2-\mu_1)=0$. Случай $\mu_3=0$ противоречит $\mu_1\neq 0,\mu_2\neq 0$. Так что положим $\mu_1=\mu_2=\mu\neq 0$. Тогда $\sigma_{13}=\sigma_{23}=\mu^2$ и из (1,1) и (2,2) мы заключаем

$$\mu\mu_3-1=0. \tag{4.64}$$

В этом случае мы имеем

$$\sigma_{12}=2-\mu^2,\quad \sigma_{13}=\mu^2,\quad \sigma_{23}=\mu^2. \tag{4.65}$$

Подстановка (4.64) и (4.65) в систему приводит к тождеству. Заметим, что $\mu\mu_3=1$ в наших рассмотрениях означает, что $\rho_1=\rho_2=2$.

Случай $x_1\neq 0,x_2=0,x_3\neq 0$ дает $\{e_1,e_3\}_R$.

Случай $x_1=0,x_2\neq 0,x_3\neq 0$ дает $\{e_2,e_3\}_R$.

Случай $x_1=1,x_2=0,x_3=0$. В этом случае $N_1=0$ и уравнениях

(1,1), (2,2), (3,3) и (2,3) выполнены независимо от геометрии группы. Уравнения (1,2) и (1,3) принимают вид

$$(1,2) \quad \mu_1\mu_3(1-\sigma_{23}) - \mu_2\mu_3(1-\sigma_{13}) + \mu_1(\sigma_{23}\mu_3 - \mu_2) = 0$$

$$(1,3) \quad \mu_2\mu_3(1-\sigma_{12}) - \mu_1\mu_2(1-\sigma_{23}) - \mu_1(\sigma_{23}\mu_2 - \mu_3) = 0$$

После упрощений, мы получаем

$$(1,2) \quad \sigma_{13}(\mu_2\mu_3 - 1) = 0, \quad (1,3) \quad \sigma_{12}(\mu_2\mu_3 - 1) = 0.$$

Случай $\mu_2\mu_3 = 1$ означает $\rho_1 = 2$. Рассмотрим случай $\sigma_{12} = 0, \sigma_{13} = 0$, который эквивалентен системе $\mu_2\mu_3 = 0, \quad \mu_1(\mu_2 - \mu_3) = 0$. Мы имеем 4 возможных решения:

(i) $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \mu_3 = 0$;

(ii) $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \mu_3 \neq 0$;

(iii) $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0, \mu_3 = 0$;

(iv) $\mu_1 \neq 0, \mu_2 = 0, \mu_3 = 0$;

Случаи (i),(ii) и (iii) уже исследованы. Случай (iv) - новый и дает поле e_1.

Случай $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$ дает e_2.

Случай $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$ дает e_3.

■

Конкретизация результата Теоремы 4.47 для каждой из групп изложена в [116] и приводит к следующему заключению.

Теорема 4.48 *Пусть G – трехмерная унимодулярная группа Ли с лево-инвариантной метрикой и $\{e_i,\ i = 1,2,3\}$ – ортонормированный базис алгебры Ли, удовлетворяющий* (4.60). *Кроме того, положим, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Тогда вполне геодезические лево - инвариантные единичные векторные* *поля на G задаются следующим образом:*

G	*Условия на* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	*векторное поле*
SO(3)	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$	S
	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > \lambda_3 = 2$	$\pm e_3$
	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 2 > \lambda_3 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}$	$S \cap \{e_1, e_2\}_R$
	$\lambda_1 = 2 > \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda > 0$	$\pm e_1$
	$\lambda_1 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4} > \lambda = \lambda_2 = \lambda_3 > 2$	$S \cap \{e_2, e_3\}_R$
	$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0, \quad \lambda_m^2 - (\lambda_i - \lambda_k)^2 = 4$	$\pm e_m$ *(i,k,m=1,2,3)*
SL(2,R)	$\lambda_3^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 4$	$\pm e_3$
	$\lambda_1^2 - (\lambda_2 - \lambda_3)^2 = 4$	$\pm e_1$
E(2)	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 = 0$	$\pm e_3,\ S \cap \{e_1, e_2\}_R$
	$\lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 4,\ \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 = 0$	$\pm e_1$
E(1,1)	$\lambda_3^2 - \lambda_1^2 = 4,\ \lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 < 0$	$\pm e_3$
	$\lambda_1^2 - \lambda_3^2 = 4,\ \lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 < 0$	$\pm e_1$
Nil^3	$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$	$\pm e_1$
$R \oplus R \oplus R$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$	S

где $\{e_i, e_k\}$ *обозначает плоскость, натянутую на* e_i *и* e_k*, а* S *– единичную сферу с центром в единице.*

Как оказалось, наличие на не плоской группе инвариантного вполне геодезического единичного векторного поля связано с наличием естественной почти контактной структуры, для которой такое поле является характеристическим.

На каждой из рассмотренных унимодулярных групп Ли рассмотрим структуру (ϕ, ξ, η), заданную как

$$\big(\phi = A_\xi,\ \xi,\ \eta = \langle\, \xi, \cdot\, \rangle\big), \tag{4.66}$$

где (1,1) тензорное поле A_ξ задано формулой (4.61).

Напомним основные понятия из контактной геометрии [10]. *Почти контактной* структурой на многообразии называется тройка (ϕ, ξ, η), состоящая из линейного оператора ϕ, векторного поля ξ и 1-формы η, связанных соотношениями

$$\phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi, \qquad \phi\xi = 0, \qquad \eta(\xi) = 1. \tag{4.67}$$

Структура (ϕ, ξ, η) называется почти контактной *метрической* структурой, если она согласована с метрикой, то есть

$$\langle \phi X, \phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad \eta(X) = \langle X, \xi\rangle. \tag{4.68}$$

Почти контактные метрические структуры образуются четверками (ϕ, ξ, η, g). Если для почти контактной метрической структуры (ϕ, ξ, η, g) выполнено условие

$$d\eta(X, Y) = g(X, \phi Y), \tag{4.69}$$

где $d\eta(X, Y) := X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y])$, то структура (ϕ, ξ, η, g) называется *контактной* метрической структурой. Если при этом ξ – единичное Киллингово векторное поле, то контактная метрическая структура называется K-*контактной*.

Если

$$[\phi, \phi](X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0, \tag{4.70}$$

где $[\phi, \phi]$ – тензор Ниенхейса, то почти контактная структура называется *нормальной*. Наконец, контактная метрическая структура (ϕ, ξ, η, g) называется *Сасакиевой*, если она нормальна.

Предложение 4.49 *На каждой из неплоских унимодулярных групп с лево-инвариантной метрикой лево-инвариантное вполне геодезическое единичное векторное поле является характеристическим векторным полем канонической почти контактной структуры.*

Эта структура ***Сасакиева****, если*

- $G = SO(3)$ *или* $G = SU(2)$ *и* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$*;*
- $G = SL(2, R)$ *и* $\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 = -2$*;*
- $G = Nil^3$.

Эта структура ***нормальна*** *если*

- $G = SO(3)$ *или* $G = SU(2)$, $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ *и*

$$\lambda_1 = \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_2}, \quad \lambda_2 > 1.$$

В остальных случаях структура ***не является ни нормальной, ни метрической****.*

На группе $E(2)$ с плоской метрикой вполне геодезическое инвариантное поле либо параллельное, либо ортогонально параллельному и движется вдоль его интегральных траекторий с постоянной угловой скоростью.

Доказательство. Пусть ξ – вполне геодезическое единичное лево - инвариантное векторное поле на $SU(2)$ или связной компоненте $SO(3)$ с лево - инвариантной метрикой и пусть $\{e_i,\, i = 1, 2, 3\}$ – канонический ортонормированный, удовлетворяющий (4.60) и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Рассмотрим все случаи Теоремы 4.48.

• В случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ мы имеем $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$, а значит

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, поле ξ Киллингово. По теореме 4.19, структура (4.66) Сасакиева.

В случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > \lambda_3 = 2$ мы имеем $\mu_1 = 1, \mu_2 = 1, \mu_3 = \lambda - 1$ и $\xi = \pm e_3$. Для $\xi = +\,e_3$ мы находим

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и видим, что снова ξ Киллингово единичное векторное поле. Следовательно, структура (4.66) Сасакиева.

В случае $\lambda_1 = 2 > \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda > 0$ мы имеем $\mu_1 = -1+\lambda, \mu_2 = 1, \mu_3 = 1$ и $\xi = \pm e_1$. Для $\xi = +\,e_1$ мы находим

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и видим, что снова ξ Киллингово единичное векторное поле. Следовательно, структура (4.66) Сасакиева.

• Рассмотрим случай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 2 > \lambda_3 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}$ и $\xi = x_1 e_1 + x_2 e_2$. Мы имеем

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}), \quad \mu_2 = \frac{1}{2}(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}), \quad \mu_3 = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}).$$

Положим для краткости $\theta = \frac{1}{2}(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4})$ и $\bar{\theta} = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4})$. Тогда

$$\mu_1 = \theta, \quad \mu_2 = \theta, \quad \mu_3 = \bar{\theta}, \quad \theta\bar{\theta} = 1 \quad (\theta \neq 1, \bar{\theta} \neq 1)$$

и в этом случае мы имеем

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{\theta} x_2 \\ 0 & 0 & -\bar{\theta} x_1 \\ -\theta x_2 & \theta x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\theta \neq \bar{\theta}$, то поле ξ не является Киллинговым, но остается геодезическим. Действительно,

$$A_\xi \xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{\theta} x_2 \\ 0 & 0 & -\bar{\theta} x_1 \\ -\theta x_2 & \theta x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta(-x_2 x_1 + x_1 x_2) \end{pmatrix} = 0.$$

Структура (4.66) является почти контактной на $SO(3)$. Действительно,

$$\phi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{\theta} x_2 \\ 0 & 0 & -\bar{\theta} x_1 \\ -\theta x_2 & \theta x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{\theta} x_2 \\ 0 & 0 & -\bar{\theta} x_1 \\ -\theta x_2 & \theta x_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2^2 & x_1 x_2 & 0 \\ x_1 x_2 & -x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\phi^2 Z = \begin{pmatrix} -1 + x_1^2 & x_1 x_2 & 0 \\ x_1 x_2 & -1 + x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = -Z + \langle \xi, Z \rangle \xi.$$

Эта структура не метрическая. Для проверки условия согласованности (4.68) мы имеем

$$\phi Z = \begin{pmatrix} \bar{\theta} x_2 z_3 \\ -\bar{\theta} x_1 z_3 \\ -\theta x_2 z_1 + \theta x_1 z_2 \end{pmatrix}, \quad \phi W = \begin{pmatrix} \bar{\theta} x_2 w_3 \\ -\bar{\theta} x_1 w_3 \\ -\theta x_2 w_1 + \theta x_1 w_2 \end{pmatrix}$$

и значит

$$\langle\, \phi Z, \phi W \,\rangle = \bar{\theta}^2 z_3 w_3 + \theta^2 (x_2^2 z_1 w_1 + x_1^2 z_2 w_2 - x_1 x_2 z_1 w_2 - x_1 x_2 z_2 w_1) =$$
$$\theta^2 (z_1 w_1 + z_2 w_2) + \bar{\theta}^2 x_3 w_3 - \langle\, \xi, Z \,\rangle \langle\, \xi, W \,\rangle \neq \langle\, Z, W \,\rangle - \langle\, \xi, Z \,\rangle \langle\, \xi, W \,\rangle.$$

Эта структура не является нормальной. Для доказательства, проверим условие нормальности (4.70). Найдем кручение Ниенхейса для ϕ на e_1, e_2. Имеем,

$$\phi e_1 = -\theta x_2 e_3, \quad \phi e_2 = \theta x_1 e_3, \quad \phi e_3 = \bar{\theta} x_2 e_1 - \bar{\theta} x_1 e_2,$$
$$[e_1, e_2] = 2\theta e_3, \quad [e_1, e_3] = -(\theta + \bar{\theta}) e_2, \quad [e_2, e_3] = (\theta + \bar{\theta}) e_1,$$
$$\phi^2 [e_1, e_2] = -2\theta e_3, \quad [\phi e_1, \phi e_2] = 0,$$
$$\phi[\phi e_1, e_2] = -\theta^2 x_2^2 (\theta + \bar{\theta}) e_3 = -\theta(\theta^2 + 1) x_2^2 e_3,$$
$$\phi[e_1, \phi e_2] = -\theta^2 (\theta + \bar{\theta}) x_1^2 e_3 = -\theta(\theta^2 + 1) x_1^2 e_3$$

и значит

$$[\phi, \phi](e_1, e_2) = \theta(\theta^2 - 1) e_3 \neq 2 d\eta(e_1, e_2) \xi.$$

Подобным образом можно проанализировать случай $\lambda_1 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4} > \lambda = \lambda_2 = \lambda_3 > 2$ с тем же результатом.

- Рассмотрим случай $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, $\xi = \pm e_i$. Имеем,

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \quad \mu_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3), \quad \mu_3 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)$$

Положим $\xi = e_1$. Условие $\lambda_1^2 - (\lambda_2 - \lambda_3)^2 = 4$ означает, что $\mu_2 \mu_3 = 1$. Матрица

A_ξ принимает вид

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_3 \\ 0 & \mu_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mu_2 \neq \mu_3$, поле ξ не Киллингово, но геодезическое. Структура (4.66) почти контактна. В самом деле,

$$\phi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2\mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_3\mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и значит $\phi^2 Z = -Z + \langle\, \xi, Z \,\rangle \xi$. Структура *нормальна* тогда и только тогда, когда

$$\lambda_1 = \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_2}, \quad \lambda_2 > 1. \tag{4.71}$$

Действительно, заметим, что $\phi e_1 = 0, \quad \phi e_2 = \mu_2 e_3, \quad \phi e_3 = -\mu_3 e_2$. Теперь положим $Z = e_1, W = e_2$. Тогда

$$\phi^2[e_1, e_2] = \lambda_3 \phi^2 e_3 = -\lambda_3 e_3, \quad [\phi e_1, \phi e_2] = 0, \quad \phi[\phi e_1, e_2] = 0,$$

$$\phi[e_1, \phi e_2] = \mu_2 \phi[e_1, e_3] = -\mu_2 \lambda_2 \phi e_2 = -\mu_2^2 \lambda_2 e_3,$$

$$d\eta(e_1, e_2) = \tfrac{1}{2}(\langle\, e_1, \phi e_2 \,\rangle - \langle\, \phi e_1, e_2 \,\rangle) = 0.$$

Следовательно, первое необходимое условие нормальности имеет вид $\lambda_3 = \mu_2^2 \lambda_2$. Если заметить, что $\mu_2 \mu_3 = 1$, мы можем переписать это условие так

$$\lambda_3 \mu_3 = \lambda_2 \mu_2. \tag{4.72}$$

Положим $Z = e_1, W = e_3$. Тогда

$$\phi^2[e_1, e_3] = -\lambda_2 \phi^2 e_2 = \lambda_2 e_2, \quad [\phi e_1, \phi e_3] = 0, \quad \phi[\phi e_1, e_3] = 0,$$

$$\phi[e_1, \phi e_3] = -\mu_3 \phi[e_1, e_2] = -\mu_3 \lambda_3 \phi e_3 = \mu_3^2 \lambda_3 e_2,$$

$$d\eta(e_1, e_3) = \tfrac{1}{2}(\langle\, e_1, \phi e_3 \,\rangle - \langle\, \phi e_1, e_3 \,\rangle) = 0.$$

Следовательно, второе необходимое условие нормальности имеет вид $\lambda_2 = \mu_3^2\lambda_3$, что эквивалентно (4.72).

Наконец, положим $Z = e_2, W = e_3$. Тогда

$$\phi^2[e_2, e_3] = \lambda_1\phi^2 e_1 = 0, \quad [\phi e_2, \phi e_3] = -\mu_2\mu_3[e_3, e_2] = \lambda_1 e_1, \quad \phi[\phi e_2, e_3] = 0,$$

$$\phi[e_2, \phi e_3] = 0, \quad d\eta(e_2, e_3) = \tfrac{1}{2}(\langle\, e_2, \phi e_3\,\rangle - \langle\, \phi e_2, e_3\,\rangle) = -\tfrac{1}{2}(\mu_3 + \mu_2) = -\tfrac{1}{2}\lambda_1.$$

Легко проверить, что (4.69) выполнено. Распишем равенство (4.72), а именно, $\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) = \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)$ и преобразуем его к $\lambda_1(\lambda_3 - \lambda_2) + \lambda_3(\lambda_2 - \lambda_3) = \lambda_2(-\lambda_2 + \lambda_3)$. Так как $\lambda_2 \neq \lambda_3$, мы получаем $\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3$. Тогда $\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) = \lambda_3, \quad \mu_3 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) = \lambda_2$ и условие $\mu_2\mu_3 = 1$ влечет $\lambda_2\lambda_3 = 1$. Так как $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, мы получаем (4.71).

Эта структура *не метрическая*, так как

$$\langle\, \phi Z, \phi W\,\rangle = \mu_3^2 z_3 w_3 + \mu_2^2 z_2 w_2 \neq \langle\, Z, W\,\rangle - \langle\, \xi, Z\,\rangle\langle\, \xi, W\,\rangle = z_2 w_2 + z_3 w_3.$$

Полагая $\xi = e_2$, мы получаем условие нормальности в виде $\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_3$, что противоречит условию $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Структура не метрическая.

Полагая $\xi = e_3$, мы получаем условие нормальности в виде $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$, что снова противоречит условию $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Структура не метрическая.

Пусть ξ лево - инвариантное вполне геодезическое единичное векторное поле на $SL(2, R)$ и $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$.

Рассмотрим случай $\lambda_3 = -\sqrt{4 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2} \leq -2$ и $\xi = e_3$. Имеем,

$$\phi = A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_2 & 0 \\ \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с условием $\mu_1\mu_2 = 1$. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то $\lambda_3 = -2$ и $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Тогда $\xi = e_3$ Киллингово и структура Сасакиева. Если $\lambda_1 > \lambda_2$, то $\lambda_3 < -2$ и структура почти контактна, так как

$$\phi^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подобно случаю $SO(3)$, структура не метрическая, а условие нормальности для $\xi = e_3$ принимает вид $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$, что противоречит соглашению о знаках λ_i.

Рассмотрим случай $\lambda_1 = \sqrt{4 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2}$ и $\xi = e_1$. Имеем,

$$\phi = A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_3 \\ 0 & \mu_2 & 0 \end{pmatrix}$$

с условием $\mu_2\mu_3 = 1 \quad (\mu_2 \neq 1,\ \mu_3 \neq 1)$. Подобно $SO(3)$ случай 3, условие нормальности принимает вид $\lambda_2 = \mu_3^2\lambda_3$ and $\lambda_3 = \mu_2^2\lambda_2$, что противоречит соглашению о знаках λ_i.

Пусть ξ лево - инвариантное вполне геодезическое единичное векторное поле на $E(2)$ и пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$. Положим $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$. Тогда $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \mu_3 = \lambda$ и для $\xi = e_3$ мы имеем $A_\xi = 0$. Это значит, что ξ – параллельное векторное поле. Если $\xi = x_1e_1 + x_2e_2$, то

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda x_2 \\ 0 & 0 & -\lambda x_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как $A_\xi^2 = 0$, структура (4.66) не является почти контактной. Поле ξ не является Киллинговым, но является геодезическим. Более того, мы имеем $\nabla_{e_3}\xi = \lambda(x_1e_2 - x_2e_1)$. Это означает, что ξ движется вдоль e_3-геодезических с постоянной угловой скоростью λ.

Положим $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ и $\xi = e_1$. Тогда $\mu_1 = \frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_2)$, $\mu_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)$,

$\mu_3 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ и $\mu_2\mu_3 = 1$. Имеем,

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_3 \\ 0 & \mu_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Структура (4.66) почти контактна. Подобно $SO(3)$ случай 3 (с условием $\lambda_3 = 0$), условием нормальности структуры является условие $\lambda_2 = \mu_3^2\lambda_3\,(= 0)$, что приводит к противоречию.

Пусть ξ лево - инвариантное вполне геодезическое единичное векторное поле на $E(1,1)$ и $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0$. Рассмотрим случай $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 = -4$, что эквивалентно условию $\mu_1\mu_2 = 1$, и положим $\xi = e_3$. Тогда

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_2 & 0 \\ \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и структура становится почти контактной. Как и в предыдущих случаях, структура не является ни метрической, ни нормальной. То же самое верно в случае $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 4$ и $\xi = e_1$.

Пусть ξ лево инвариантное вполне геодезическое единичное векторное поле на группе Гейзенберга и $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. В этом случае мы имеем $\mu_1 = -1, \mu_2 = 1, \mu_3 = 1$ и $\xi = e_1$. Тогда

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

что означает Киллинговость поля ξ, а значит структура Сасакиева.

■

4.6.2. Неунимодулярный случай. Пусть e_1 – единичный вектор, ортогональный к унимодулярному ядру U и выберем ортонормированный базис $\{e_2, e_3\}$ в U который диагонализует симметричную часть $ad_{e_1}\big|_U$. Тогда действие скобки может быть выражено как

$$[e_1, e_2] = \alpha\, e_2 + \beta\, e_3, \quad [e_1, e_3] = -\beta\, e_2 + \delta\, e_3, \quad [e_2, e_3] = 0. \tag{4.73}$$

Если необходимо, изменяя e_1 на $-e_1$, мы можем полагать $\alpha + \delta > 0$ и, возможно меняя местами e_2 и e_3, мы можем также полагать $\alpha \geq \delta$ [73].

Тогда связность Леви-Чивита определится следующей таблицей

∇	e_1	e_2	e_3
e_1	0	$\beta\, e_3$	$-\beta\, e_2$
e_2	$-\alpha\, e_2$	$\alpha\, e_1$	0
e_3	$-\delta\, e_3$	0	$\delta\, e_1$

Для любого лево-инвариантного единичного векторного поля $\xi = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ мы имеем

$$\nabla_{e_1}\xi = \beta\ e_1 \times \xi, \quad \nabla_{e_2}\xi = -\alpha\ e_3 \times \xi, \quad \nabla_{e_3}\xi = \delta\ e_2 \times \xi.$$

Положим $N_i = e_i \times \xi$. Тогда

$$N_1 = -x_3 e_2 + x_2 e_3,\ N_2 = -x_2 e_1 + x_1 e_2,\ N_3 = x_3 e_1 - x_1 e_3. \tag{4.74}$$

То есть, $A_\xi e_1 = -\beta\, N_1, \quad A_\xi e_2 = \alpha\, N_2, \quad A_\xi e_3 = -\delta\, N_3$ и матрица A_ξ примет вид

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha\, x_2 & -\delta\, x_3 \\ \beta\, x_3 & \alpha\, x_1 & 0 \\ -\beta\, x_2 & 0 & \delta\, x_1 \end{pmatrix} \tag{4.75}$$

Прямое вычисление дает следующую таблицу вторых производных лево - инвариантного единичного векторного поля [116].

∇	ξ	$\nabla_{e_1}\xi$	$\nabla_{e_2}\xi$	$\nabla_{e_3}\xi$
e_1	$\beta\, N_1$	$\beta^{\,2}(x_1e_1-\xi)$	$-\beta\,\alpha\,x_1e_3$	$\beta\,\delta\,x_1e_2$
e_2	$-\alpha\, N_2$	$-\beta\,\alpha\,x_3e_1$	$\alpha^{\,2}(x_2e_2-\xi)$	$-\alpha\,\delta\,x_3e_2$
e_3	$\delta\, N_3$	$\beta\,\delta\,x_2e_1$	$-\alpha\,\delta\,x_2e_3$	$\delta^{\,2}(x_3e_3-\xi)$

Наконец, используя первые и вторые производные поля находим следующие выражения для производных оператора A_ξ [116].

$(\nabla_{e_i}A_\xi)e_k$	e_1	e_2	e_3
e_1	$-\beta^{\,2}(x_1e_1-\xi)$	$\beta\,\delta\,N_3+\beta\,\alpha\,x_1e_3$	$\beta\,\alpha\,N_2-\beta\,\delta\,x_1e_2$
e_2	$\alpha^{\,2}N_2+\beta\,\alpha\,x_3e_1$	$\beta\,\alpha\,N_1-\alpha^{\,2}(x_3e_3-\xi)$	$\alpha\,\delta\,x_3e_2$
e_3	$-\delta^{\,2}N_3-\beta\,\delta\,x_2e_1$	$\alpha\,\delta\,x_2e_3$	$\beta\,\delta\,N_1-\delta^{\,2}(x_2e_2-\xi)$

Прямым применением уравнения Кодацци мы можем найти оператор кривизны не унимодулярной группы относительно выбранного репера, а именно,

$$
\begin{aligned}
R(e_1,e_2)\xi &= \alpha^{\,2}N_2+\beta\,(\alpha\,-\delta\,)N_3,\\
R(e_1,e_3)\xi &= -\delta^{\,2}N_3-\beta\,(\alpha\,-\delta\,)\,N_2,\\
R(e_2,e_3)\xi &= \alpha\,\delta\,N_1.
\end{aligned}
$$

Используя приведенные выше результаты, аналогично вычислениям для унимодулярных групп, мы находим вид условий (4.59) относительно выбранного репера [116].

Лемма 4.50 *Пусть G – неунимодулярная группа Ли с базисом, выбранным выше. Тогда лево - инвариантное поле единичного вектора $\xi=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$ вполне геодезично, если и только если оно удовлетворяет следующим* *уравнениям:*

$$(1,1)\quad \beta\, x_1\Big\{\big[\beta\,[1+\alpha\,(\alpha\,-\delta\,)]x_2+\alpha^{\,3}x_3\big]N_2-$$

$$\big[\beta\,[1-\delta\,(\alpha\,-\delta\,)]x_3-\delta^{\,3}x_2\big]N_3\Big\}=0,$$

$$(2,2)\quad \alpha\,\Big\{\Big[\beta\,[1+\alpha^{\,2}(1-x_3^2)]-[\alpha\,+\beta^{\,2}(\alpha\,-\delta\,)]x_2x_3\Big]N_1+$$

$$\alpha\,\Big[1+\delta^{\,2}\Big]x_1x_3N_3\Big\}=0,$$

$$(3,3)\quad \delta\,\Big\{\Big[\beta\,[1+\delta^{\,2}(1-x_2^2)]+[\delta\,-\beta^{\,2}(\alpha\,-\delta\,)]x_2x_3\Big]N_1-$$

$$\delta\,\Big[1+\alpha^{\,2}\Big]x_1x_2N_2\Big\}=0,$$

$$(1,2)\quad \beta\, x_1\Big[[\alpha\,+\beta^{\,2}(\alpha\,-\delta\,)]x_2+\beta\,\alpha^{\,2}x_3\Big]N_1+$$

$$\alpha\,\Big[\alpha\,[1+\alpha^{\,2}(1-x_3^2)]-\beta\,[1+\alpha\,(\alpha\,-\delta\,)]x_2x_3\Big]N_2+$$

$$\Big[\alpha\,\delta\,\big[\beta\,\delta\,(1-x_1^2)-\delta^{\,2}x_2x_3+\beta\,(\alpha\,-\delta\,)(1-x_3^2)\big]+\beta\,\alpha\,(x_3^2-x_1^2)+\beta\,\delta\,\Big]N_3,$$

$$(1,3)\quad \beta\, x_1\Big[[\delta\,-\beta^{\,2}(\alpha\,-\delta\,)]x_3-\beta\,\delta^{\,2}x_2\Big]N_1-$$

$$\Big[\alpha\,\delta\,\big[\alpha\,\beta\,(1-x_1^2)+\alpha^{\,2}x_2x_3-\beta\,(\alpha\,-\delta\,)(1-x_2^2)\big]+\beta\,\alpha\,+\beta\,\delta\,(x_2^2-x_1^2)\Big]N_2+$$

$$\delta\,\Big[\beta\,[-1+\delta\,(\alpha\,-\delta\,)]x_2x_3-\delta\,[1+\delta^{\,2}(1-x_2^2)]\Big]N_3,$$

$$(2,3)\quad \Big[\beta\,\big[\alpha\,\delta\,(\alpha+\delta\,)x_2x_3-\beta\,(\alpha-\delta\,)(\alpha\,(1-x_3^2)+\delta\,(1-x_2^2))\big]+\alpha\,\delta\,(x_2^2-x_3^2)\Big]N_1+$$

$$\alpha\,\delta\,\Big[1+\alpha^{\,2}\Big]x_1x_3N_2-\alpha\,\delta\,\Big[1+\delta^{\,2}\Big]x_1x_2N_3.$$

Теперь мы можем доказать следующее утверждение.

Теорема 4.51 *Пусть G – неунимодулярной группа Ли с базисом, удовлетворяющим* (4.73). *Лево - инвариантное единичное векторное поле ξ вполне геодезично тогда и только тогда, когда*

- *либо* $\beta = \delta = 0$ *и* $\xi = \pm e_3$;
- *либо* $\beta = \theta = \pm 1$, $\alpha\delta = -1$ *и* $\pm\xi = \theta \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} e_2 + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} e_3$.

Доказательство. Пусть ξ не принадлежит унимодулярному ядру. Тогда $x_1 \neq 0$. Из (4.74) следует, что$N_2 \neq 0$, $N_3 \neq 0$ и они всегда линейно независимы. Кроме того, векторы N_1 и N_3 линейно зависимы если и только если $x_3 = 0$. Если $x_3 \neq 0$, то уравнения $(2,2)$ Леммы 4.50 влекут $x_3 = 0$, и мы получаем в противоречие.

Положим $x_3 = 0$. Если $x_2 \neq 0$, то N_1 и N_2 - линейно независимы и $(3,3)$ влечет $\delta = 0$. В этом случае мы можем переписать $(1,1)$ в виде $\beta^2 x_1 x_2 (1 + \alpha^2) N_2 = 0$, и мы имеем $\beta = 0$. В этом случае уравнение $(1,2)$ Леммы 4.50 принимает вид $\alpha^2(1+\alpha^2)N_2 = 0$ и мы получаем противоречие.

Положим $x_3 = x_2 = 0$. В этом случае $\xi = e_1$, $N_1 = 0$, $N_2 = e_2$ и $N_3 = -e_3$. Уравнение $(1,1)$ Леммы 4.50 дает $\beta = 0$ и уравнение $(1,2)$ Леммы 4.50 принимает вид $\alpha^2(1+\alpha^2)N_2 = 0$. Противоречие.

Пусть ξ не принадлежит унимодулярному ядру. Тогда $\xi = x_2 e_2 + x_3 e_3$. Так как $x_1 = 0$, мы имеем $N_1 \neq 0$ и N_1 линейно независим или с N_2 или N_3.

Предположим $\mu_1 = 0$. Тогда $(2,2)$ Леммы 4.50 влечет $-\alpha^2 x_2 x_3 = 0$ и мы имеем следующие случаи.

- Случай $x_3 = 0$. Тогда $N_1 = \pm e_3$, $N_2 = \mp e_1$, $N_3 = 0$ и уравнения $(1,2)$ Леммы 4.50 принимает вид $\alpha^2(1+\alpha^2)N_2 = 0$. Противоречие.
- Случай $x_2 = 0$. Тогда $N_1 = \mp e_2$, $N_2 = 0$, $N_3 = \pm e_1$. Уравнение $(1,3)$ Лем-

мы 4.50 тогда принимает вид $-\delta^2(1+\delta^2)N_3 = 0$ и мы должны положить $\delta = 0$. Легко проверить, что если $\beta = \delta = 0$, то все уравнения выполнены. Кроме того, поле $\xi = \pm e_3$ становится параллельным векторным полем, так как $A_\xi = 0$.

Предположим $\beta \neq 0$, $\delta = 0$. Тогда $(1,3)$ Леммы 4.50 влечет $\beta\,\alpha\,N_2 = 0$ и мы имеем $x_2 = 0$. В этом случае $x_3^2 = 1$ и $(2,2)$ Леммы 4.50 дает $\alpha\,\beta\,N_1 = 0$. Противоречие.

Предположим $\beta \neq 0, \delta \neq 0$. В этом случае прямой анализ система становится слишком сложным. Но мы можем применить в этом случае иной метод, основанный на Лемме 4.5. Так как $x_1 = 0$, матрица (4.75) принимает вид

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha\,x_2 & -\delta\,x_3 \\ \beta\,x_3 & 0 & 0 \\ -\beta\,x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Обозначим $\tilde e_0$, $\tilde e_1$, $\tilde e_2$; $\tilde f_1$, $\tilde f_2$ ортонормированный сингулярные реперы A_ξ. Матрица $A_\xi^t A_\xi$ принимает вид

$$A_\xi^t A_\xi = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 x_2^2 & \alpha\,\delta\,x_2 x_3 \\ 0 & \alpha\,\delta\,x_2 x_3 & \delta^2 x_3^2 \end{pmatrix}. \tag{4.76}$$

Собственные значения равны $\left[0, \beta^2, \alpha^2 x_2^2 + \delta^2 x_3^2\right]$. Введем обозначение $m = \sqrt{\alpha^2 x_2^2 + \delta^2 x_3^2}$. Тогда сингулярные значения

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = |\beta|,\ \lambda_2 = m.$$

Сингулярный репер $\tilde e_0$, $\tilde e_1$, $\tilde e_2$ состоит из собственных векторов матрицы (4.76), а именно

$$\tilde e_0 = \frac{1}{m}\big(-\delta\,x_3\,e_2 + \alpha\,x_2\,e_3\big), \quad \tilde e_1 = e_1, \quad \tilde e_2 = \frac{1}{m}\big(\alpha\,x_2\,e_2 + \delta\,x_3\,e_3\big)$$

Чтобы найти $\tilde f_1$ и $\tilde f_2$, вычислим $A_\xi\,\tilde e_1 = \beta\,\big(x_3\,e_2 - x_2\,e_3\big)$, $\quad A_\xi\,\tilde e_2 = -m\,e_1$. Обозначим $\varepsilon = sign(\,\beta\,)$. Тогда $\tilde f_1 = \varepsilon\big(x_3\,e_2 - x_2\,e_3\big)$, $\quad \tilde f_2 = -e_1$. Теперь мы имеем

$$\tilde\Omega_{\sigma|00} = -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\sigma^2}}\big\langle\,(\nabla_{\tilde e_0}A_\xi)\,\tilde e_0,\ \tilde f_\sigma\,\big\rangle.$$

Если ξ является вполне геодезическим, то ξ удовлетворяет условию

$$0 = (\nabla_{\tilde e_0}A_\xi)\,\tilde e_0 = \nabla_{\tilde e_0}(A_\xi\,\tilde e_0) - A_\xi\nabla_{\tilde e_0}\,\tilde e_0 = A_\xi A_{\tilde e_0}\,\tilde e_0$$

Так как (4.75) применимо к любому лево-инвариантному единичному векторному полю, мы легко вычисляем

$$A_{\tilde e_0}\,\tilde e_0 = \frac{1}{m^2}\begin{pmatrix} 0 & \alpha\,\delta\,x_3 & -\delta\,\alpha\,x_2 \\ \beta\,\alpha\,x_2 & 0 & 0 \\ \beta\,\delta\,x_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -\delta\,x_3 \\ \alpha\,x_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{m^2}\alpha\,\delta\,(\delta\,x_3^2{+}\alpha\,x_2^2)\ \tilde e_1.$$

Поэтому,

$$A_\xi A_{\tilde e_0}\,\tilde e_0 = -\frac{1}{m^2}\alpha\,\delta\,(\delta\,x_3^2 + \alpha\,x_2^2)A_\xi\,\tilde e_1 = -\varepsilon\beta\,\alpha\,\delta\,(\delta\,x_3^2 + \alpha\,x_2^2)\,\tilde f_1.$$

Так как $\beta\neq 0, \alpha\neq 0$ и $\delta\neq 0$, мы имеем $\alpha\,x_2^2 + \delta\,x_3^2 = 0, \quad x_2^2 + x_3^2 = 1$. Решая систему, мы находим

$$x_2^2 = \frac{-\delta}{\alpha\,-\delta},\quad x_3^2 = \frac{\alpha}{\alpha\,-\delta}.$$

Напомним, что $\alpha\,+\delta\,>\,0,\quad \alpha\,\geq\,\delta$ по выбору репера. Поэтому, решение существует, если $\delta\,<0$ и, как следствие, $\alpha\,>0$. Таким образом,

$$\xi = \pm\sqrt{\frac{-\delta}{\alpha\,-\delta}}\ e_2 \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha\,-\delta}}\ e_3.$$

Обозначим $\theta = \pm\,1$. Без потери общности мы можем полагать

$$\xi = \theta\sqrt{\frac{-\delta}{\alpha\,-\delta}}\ e_2 + \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha\,-\delta}}\ e_3.$$

Как следствие

$$m = \sqrt{\alpha^{2}\frac{-\delta}{\alpha-\delta} + \delta^{2}\frac{\alpha}{\alpha-\delta}} = \sqrt{-\alpha\,\delta}\,.$$

Более того

$$\frac{\alpha}{m}x_2 = \theta\,\frac{\alpha}{\sqrt{-\alpha\,\delta}}\sqrt{\frac{-\delta}{\alpha-\delta}} = \theta\,x_3,$$
$$\frac{\delta}{m}x_3 = \frac{\delta}{\sqrt{-\alpha\,\delta}}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-\delta}} = \frac{-\sqrt{(-\delta)^2}}{\sqrt{-\alpha\,\delta}}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-\delta}} = -\theta\,x_2$$

и мы имеем

$$\tilde{e}_0 = \tfrac{1}{m}\big(-\delta\,x_3\,e_2 + \alpha\,x_2\,e_3\big) = \theta\,\xi,$$
$$\tilde{e}_1 = e_1 = -\,\tilde{f}_2,$$
$$\tilde{e}_2 = \tfrac{1}{m}\big(\alpha\,x_2\,e_2 + \delta\,x_3\,e_3\big) = \theta(x_3\,e_2 - x_2\,e_3) = \theta\varepsilon\;\tilde{f}_1.$$

Относительно этого репера, мы имеем

$$\begin{aligned} A_\xi\,\tilde{e}_0 &= A_\xi\xi = 0,\\ A_\xi\,\tilde{e}_1 &= |\beta\,|\,\tilde{f}_1 = \theta\varepsilon|\beta\,|\;\tilde{e}_2 = \theta\beta\;\tilde{e}_2\\ A_\xi\,\tilde{e}_2 &= m\,\tilde{f}_2 = -m\;\tilde{e}_1 \end{aligned} \tag{4.77}$$

и матрица A_ξ принимает вид

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -m\\ 0 & \theta\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Простое вычисление дает

∇	$\tilde{e}_0$	$\tilde{e}_1$	$\tilde{e}_2$
$\tilde{e}_0$	0	$-\theta m\,\tilde{e}_2$	$\theta m\,\tilde{e}_1$
$\tilde{e}_1$	$-\beta\;\tilde{e}_2$	0	$\beta\;\tilde{e}_0$
$\tilde{e}_2$	$\theta m\,\tilde{e}_1$	$-\theta m\,\tilde{e}_0 - (\alpha+\delta\,)\,\tilde{e}_2$	$(\alpha+\delta\,)\,\tilde{e}_1$

.

Используя таблицу производных и принимая во внимание, что $\xi = \tilde{e}_0$, мы находим, что $(\nabla_{\tilde{e}_i}A_\xi)\,\tilde{e}_k$ можно представить следующей таблицей.

$(\nabla_{\tilde e_i} A_\xi)\,\tilde e_k$	$\tilde e_0$	$\tilde e_1$	$\tilde e_2$
$\tilde e_0$	0	$-m(m-\theta\beta)\,\tilde e_1$	$m(m-\theta\beta)\,\tilde e_2$
$\tilde e_1$	$-\theta m\beta\;\tilde e_1$	$\beta^2\,\tilde e_0$	0
$\tilde e_2$	$-\theta m\beta\;\tilde e_2$	$-(\alpha+\delta)(\theta m-\beta)\,\tilde e_1$	$m^2\,\tilde e_0+(\alpha+\delta)(\theta m-\beta)\,\tilde e_2$

Наконец, необходимые компоненты оператора кривизны принимают вид

$$R(\tilde e_0,\,\tilde e_1)\xi=m(m-2\theta\beta)\,\tilde e_1,\quad R(\tilde e_0,\,\tilde e_2)\xi=-m^2\,\tilde e_2,$$

$$R(\tilde e_1,\,\tilde e_2)\xi=-(\alpha+\delta)(\theta m-\beta)\,\tilde e_1.$$

Заметим, также, что $\tilde f_1=\theta\varepsilon\,\tilde e_2,\quad \tilde f_2=-\,\tilde e_1$. Теперь, мы можем найти все компоненты матриц $\tilde\Omega_\sigma$.

$$\tilde\Omega_{1|10}=\frac{-\big\langle(\nabla_{\tilde e_1}A_\xi)\,\tilde e_0+(\nabla_{\tilde e_0}A_\xi)\,\tilde e_1,\;\tilde f_1\big\rangle+\lambda_1^2\big\langle R(\tilde e_1,\,\tilde e_0)\xi,\;\tilde f_1\big\rangle}{2(1+\lambda_1^2)}=$$

$$\frac{-\big\langle-m^2\,\tilde e_1,\theta\varepsilon\,\tilde e_2\big\rangle+\beta^2\big\langle-m(m-2\theta\beta)\,\tilde e_1,\theta\varepsilon\,\tilde e_2\big\rangle}{2(1+\beta^2)}=0.$$

$$\tilde\Omega_{1|20}=\frac{-\big\langle(\nabla_{\tilde e_2}A_\xi)\,\tilde e_0+(\nabla_{\tilde e_0}A_\xi)\,\tilde e_2,\;\tilde f_1\big\rangle+\lambda_1\lambda_2\big\langle R(\tilde e_1,\,\tilde e_0)\xi,\;\tilde f_2\big\rangle}{2\sqrt{(1-\lambda_1^2)(1+\lambda_2^2)}}=$$

$$\frac{-\big\langle m(m-2\theta\beta)\,\tilde e_2,\theta\varepsilon\,\tilde e_2\big\rangle+|\beta|m\big\langle-m(m-2\theta\beta)\,\tilde e_1,-\,\tilde e_1\big\rangle}{2\sqrt{(1+\beta^2)(1+m^2)}}=$$

$$\frac{m(m-2\theta\beta)(m|\beta|-\theta\varepsilon)}{2\sqrt{(1-\beta^2)(1-m^2)}}=\frac{\varepsilon m(m-2\theta\beta)(m\beta-\theta)}{2\sqrt{(1+\beta^2)(1+m^2)}}.$$

$$\tilde\Omega_{1|11}=\frac{-\big\langle(\nabla_{\tilde e_1}A_\xi)\,\tilde e_1,\;\tilde f_1\big\rangle}{\sqrt{(1+\lambda_1^2)^3}}=\frac{-\big\langle\beta^2\,\tilde e_0,\theta\varepsilon\,\tilde e_1\big\rangle}{(1+\beta^2)\sqrt{(1+\beta^2)}}=0.$$

$$\tilde\Omega_{1|12}=\frac{-\big\langle(\nabla_{\tilde e_1}A_\xi)\,\tilde e_2+(\nabla_{\tilde e_2}A_\xi)\,\tilde e_1,\ \tilde f_1\big\rangle+\lambda_1^2\big\langle R(\tilde e_1,\tilde e_2)\xi,\ \tilde f_1\big\rangle}{2\sqrt{(1+\lambda_1^2)^2(1+\lambda_2^2)}}=$$

$$\frac{\big\langle(\alpha+\delta)(\theta m-\beta)\ \tilde e_1,\theta\varepsilon\,\tilde e_2\big\rangle+\beta^2\big\langle-(\alpha+\delta)(\theta m-\beta)\ \tilde e_1,\theta\varepsilon\,\tilde e_2\big\rangle}{2(1+\beta^2)\sqrt{1+m^2}}=0.$$

$$\tilde\Omega_{1|22}=\frac{-\big\langle(\nabla_{\tilde e_2}A_\xi)\,\tilde e_2,\ \tilde f_1\big\rangle+\lambda_1\lambda_2\big\langle R(\tilde e_1,\tilde e_2)\xi,\ \tilde f_2\big\rangle}{\sqrt{(1+\lambda_1^2)(1+\lambda_2^2)^2}}=$$

$$\frac{-\big\langle m^2\,\tilde e_0+(\alpha+\delta)(\theta m-\beta)\ \tilde e_2,\theta\varepsilon\,\tilde e_2\big\rangle+|\beta|m\big\langle(\alpha+\delta)(\theta m-\beta)\ \tilde e_1,\ \tilde e_1\big\rangle}{\sqrt{(1+\beta^2)}\,(1+m^2)}=$$

$$\frac{-\theta\varepsilon(\alpha+\delta)(\theta m-\beta)+|\beta|m(\alpha+\delta)(\theta m-\beta)}{\sqrt{(1+\beta^2)}\,(1+m^2)}=\frac{\varepsilon(\alpha+\delta)(\theta m-\beta)(m\beta-\theta)}{\sqrt{(1+\beta^2)}\,(1+m^2)}.$$

Подведя итог, мы получаем следующие ненулевые компоненты матрицы $\tilde\Omega_1$

$$\tilde\Omega_{1|13}=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon m(m-2\theta\beta)(m\beta-\theta)}{\sqrt{(1+\beta^2)(1+m^2)}},\ \ \tilde\Omega_{1|33}=\frac{\varepsilon(\alpha+\delta)(\theta m-\beta)(m\beta-\theta)}{\sqrt{(1+\beta^2)(1+m^2)}},$$

Подобным же образом мы находим ненулевые компоненты матрицы $\tilde\Omega_2$, а именно,

$$\tilde\Omega_{2|12}=\frac{\theta m^2(m\beta-\theta)}{2\sqrt{(1+\beta^2)(1+m^2)}},\quad \tilde\Omega_{2|23}\frac{(\alpha+\delta)(\beta-\theta m)}{2\sqrt{(1+\beta^2)}}.$$

Таким образом, для вполне геодезического поля ξ мы имеем единственное возможное решение $\beta=\theta m,\quad m\beta=\theta$. Следовательно, $-\alpha\,\delta=m^2=1,\quad \beta=\theta$. Если $\beta=+1$, то поле имеет вид $\pm\,\xi=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,e_2+\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$. Если $\beta=-1$, то поле имеет вид $\pm\,\xi=-\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,e_2+\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$.

■

Геометрические свойства единичного вполне геодезического поля и группы содержится в следующем утверждении.

Предложение 4.52 *Пусть неунимодулярная трехмерная группа Ли G с лево - инвариантной метрикой допускает лево - инвариантное единичное вполне геодезическое векторное поле ξ. Тогда*

- *в случае $\beta = \delta = 0$, группа $G = L^2(-\alpha) \times R^1$ и поле $\xi = e_3$ - параллельное поле единичного вектора на G, касательное к евклидову сомножителю;*
- *в случае $\beta = \pm 1, \alpha\,\delta = -1$ группа G допускает два взаимно ортогональных внутренне плоских слоения с постоянной внешней кривизной одно из которых минимально, а поле ξ есть Киллингово поле, огибающее линии пересечения указанных слоений. Распределение $\xi^{\perp}$ не интегрируемо, но вполне геодезично.*

Доказательство. Случай $\beta = \delta = 0$. Скобки принимают вид

$$[e_1, e_2] = \alpha\, e_2, \quad [e_1, e_3] = 0, \quad [e_2, e_3] = 0$$

и мы заключаем, что группа допускает три интегрируемых распределения, а именно, $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$ и $e_2 \wedge e_3$. Единственная не нулевая компонента тензора кривизны группы имеет вид $R(e_1, e_2)e_2 = -\alpha^2 e_1$. Таким образом, $G = L^2(-\alpha) \times R^1$ и поле $\xi = e_3$ - параллельное поле единичного вектора на G, касательное к евклидову сомножителю.

Случай $\beta = \theta = \pm 1, m = \sqrt{-\alpha\,\delta} = 1$. Относительно сингулярного репера,

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

а значит ξ - всегда Киллингово единичное (геодезическое) векторное поле на G. Более того, для векторов сингулярного репера мы имеем

∇	$\tilde{e}_0$	$\tilde{e}_1$	$\tilde{e}_2$
$\tilde{e}_0$	0	$-\theta\,\tilde{e}_2$	$\theta\,\tilde{e}_1$
$\tilde{e}_1$	$-\theta\,\tilde{e}_2$	0	$\theta\,\tilde{e}_0$
$\tilde{e}_2$	$\theta\,\tilde{e}_1$	$-\theta\,\tilde{e}_0 - (\alpha + \delta)\,\tilde{e}_2$	$(\alpha + \delta)\,\tilde{e}_1$

и мы видим что распределения $\tilde{e}_0 \wedge \tilde{e}_1$ и $\tilde{e}_0 \wedge \tilde{e}_2$ интегрируемы. Напомним, что $\xi = \tilde{e}_0$ в этом случае. Поэтому, интегральные траектории поля ξ являются линиями пересечения интегральных подмногообразий $\tilde{e}_0 \wedge \tilde{e}_1$ and $\tilde{e}_0 \wedge \tilde{e}_2$.

Обозначим $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ вторые фундаментальные формы интегральных многообразий распределений $\tilde{e}_0 \wedge \tilde{e}_2$ и $\tilde{e}_0 \wedge \tilde{e}_1$ соответственно. Тогда мы можем легко найти

$$\Omega^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & \alpha + \delta \end{pmatrix}, \qquad \Omega^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$$

и увидеть, что $\tilde{e}_0 \wedge \tilde{e}_1$ подмногообразия минимальны. Компоненты тензора кривизны на сингулярном репере легко вычисляются:

$$R(\tilde{e}_0, \tilde{e}_2)\,\tilde{e}_0 = -\,\tilde{e}_2, \quad R(\tilde{e}_0, \tilde{e}_1)\,\tilde{e}_0 = -\,\tilde{e}_1.$$

Обозначим $K^{(i)}_{int}$ внутреннюю кривизну соответствующих слоений, а через $K^{(i)}_G$ кривизну группы вдоль слоев $(i = 1, 2)$. Тогда $K^{(i)}_G = \langle R(\tilde{e}_0, \tilde{e}_i)\,\tilde{e}_i, \tilde{e}_0 \rangle = 1$. Уравнение Гаусса влечет $K^{(i)}_{int} = K^{(i)}_G + \det \Omega^{(i)} = 0$. Поэтому, оба слоения являются внутренне плоскими и имеют постоянную внешнюю кривизну $K^{(i)}_{ext} = \det \Omega^{(i)} = -1$. Кроме того, одно из слоений - минимально. Распределение $\xi^{\perp} = \tilde{e}_1 \wedge \tilde{e}_2$ не интегрируемо (естественно), но вполне геодезично, так как $\nabla_{\tilde{e}_1} \tilde{e}_2 + \nabla_{\tilde{e}_2} \tilde{e}_1 \in \xi^{\perp}$.

$\blacksquare$

4.7. Устойчивость вполне геодезических единичных векторных полей на 3-х мерных группах Ли

Напомним, что мы можем определить касательное $\xi_* : \mathfrak{X}(M) \to T\xi(M)$ и нормальное $\nu : \mathfrak{X}(M) \to T^\perp\xi(M)$ отображения по формулам (4.3) в виде

$$\xi_*(X) = X^h - (A_\xi X)^{tg} = X^h - (A_\xi X)^v, \quad \nu(Y) = (A_\xi^t Y)^h + Y^{tg}. \qquad (4.78)$$

Существуют ортонормированный репер $(e_1, \dots, e_n) \in \mathfrak{X}(M)$ и ортонормированный репер $(f_1, \dots, f_{n-1}) \in \mathfrak{X}_{\xi^\perp}$ такие, что

$$A_\xi e_i = \sigma_i f_i, \quad A_\xi^t f_i = \sigma_i e_i,$$

где $\sigma_i \geq 0$ – *сингулярные значения* линейного оператора A_ξ. По существу, e_i – это собственные векторы симметричного линейного оператора $A_\xi^t A_\xi$, а его собственные значения есть квадраты сингулярных значений. Из соображений размерности следует, что существует по крайней мере локальное единичное векторное поле e_0 такое, что $A_\xi e_0 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} &\tilde e_\alpha = \tfrac{\xi_*(e_\alpha)}{|\xi_*(e_\alpha)|} = \tfrac{1}{\sqrt{1+\sigma_\alpha^2}}(e_\alpha^h - \sigma_\alpha f_\alpha^v),\ \tilde e_n = e_0^h, \\ &\tilde n_\alpha = \tfrac{\nu(f_\alpha)}{|\nu(f_\alpha)|} = \tfrac{1}{\sqrt{1+\sigma_\alpha^2}}(\sigma_\alpha e_\alpha^h + f_\alpha^v) \quad \alpha = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \qquad (4.79)$$

образуют касательный и нормальный реперы для $\xi(M) \subset T_1M$. Мы будем называть эти реперы *сингулярным оснащением* для $\xi(M) \subset T_1M$. Если ξ – геодезическое векторное поле, т.е. $A_\xi \xi = 0$, то мы всегда можем полагать $\tilde e_n = \xi^h$.

Пусть $\tilde n = \frac{\nu(Z)}{|\nu(Z)|}$ – единичное нормальное векторное поле на $\xi(M)$ и $F \subset M$ – область с компактным замыканием. Обозначим через $\tilde N = w\tilde n$ поле локальной нормальной вариации, где $w : F \to \mathbb{R}$ – гладкая функция такая, что $w|_{\partial \bar F} = 0$. Предположим, что $\xi(M)$ минимально. Тогда формула второй вариации функционала объема в приложении к нашему случаю принимает вид

$$\delta^2(Vol_\xi) = \int\limits_{\xi(F)} \Big(||\tilde{\nabla}^{\perp}\tilde{N}||^2 - (\widetilde{Ric}(\tilde{N}) + ||\tilde{S}_{\tilde{N}}||^2) \Big) dVol_\xi,$$

где $\tilde{\nabla}^{\perp}$ означает ковариантную производную в нормальном расслоении $\xi(M)$, $\widetilde{Ric}(\tilde{N})$ – частичная кривизна Риччи и $\tilde{S}$ оператор Вейнгартена для $\xi(M)$.

В случае если M *компактно, ориентировано и вполне геодезично* формула второй вариации для функционала объема $\xi(M)$ упрощается, а именно

$$\delta^2 Vol_\xi = \int\limits_{\xi(M)} \sum_{i=1}^{n} \Big(||\tilde{\nabla}^{\perp}_{\tilde{e}_i}\tilde{N}||^2 - w^2 \tilde{K}(\tilde{e}_i, \tilde{n}) \Big)\, dVol_\xi.$$

Наконец, заметим, что $dVol_\xi = \sqrt{\det(I + A_\xi^t A_\xi)}\, dV := L^{1/2} dV$, где dV – элемент объема базового многообразия. Поэтому мы можем переписать формулу второй вариации функционала объема в виде

$$\delta^2 Vol_\xi = \int\limits_{M} \sum_{i=1}^{n} \Big(||\tilde{\nabla}^{\perp}_{\tilde{e}_i}\tilde{N}||^2 - w^2 \tilde{K}(\tilde{e}_i, \tilde{n}) \Big)\, L^{1/2} dV. \tag{4.80}$$

Унимодулярный случай. Пусть ξ – единичное лево-инвариантное векторное поле на 3-х мерной группе Ли G с лево-инвариантной римановой метрикой. Группа G унимодулярна тогда и только тогда, когда существует дискретная подгруппа Γ действующая на G левыми сдвигами свободно и вполне разрывно такая, что левый фактор $\Gamma\backslash G$ компактен [56]. При этом $\Gamma\backslash G$ есть компактное риманово многообразие с теми же свойствами кривизны, что и G. Опущенное на фактор единичное векторное поле имеет те же свойства касательно минимальности, гармоничности и т.п., что и поле на всей группе G [39]. Поэтому мы будем рассматривать единичные лево-инвариантные векторные поля именно на компактных факторах.

Для вычисления интегранда в формуле (4.80), нам потребуется ряд лемм.

Лемма 4.53 *Пусть* $\xi := e_m$ *вполне геодезическое лево-инвариантное единичное векторное поле на (компактном факторе) унимодулярной 3-х мерной группе Ли* G *с лево-инвариантной метрикой. Тогда коэффициенты нормальной связности* $\xi(G)$ *относительно сингулярного оснащения* (4.79) *имеют вид* $\tilde{\gamma}^i_{j|s} = -\frac{1}{2}k_{ij}\delta_{sm} \quad ((i<j) \neq m)$, *где* k_{ij} *– секционные кривизны* G *в направлении* $e_i \wedge e_j$.

Доказательство. Доказательство проведем для $\xi = e_3$. Заметим, что так как ξ предполагается вполне геодезическим, то соответствующая главная кривизна Риччи $\rho_3 = 2$ и значит $\mu_1\mu_2 = \frac{1}{2}\rho_3 = 1$. Из (4.61) получаем

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_2 & 0 \\ \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^t_\xi = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & 0 \\ -\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^t_\xi A_\xi = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит e_1 и e_2 могут быть взяты в качестве векторов сингулярного репера. Так как $A_\xi e_1 = \mu_1 e_2, \quad A_\xi e_2 = -\mu_2 e_1$, то можем положить $\sigma_1 = \mu_1, \ \sigma_2 = \mu_2$ и $f_1 = e_2, f_2 = -e_1$. Тогда сингулярное оснащение (4.79) примет вид

$$\tilde{e}_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{1+\mu_1^2}}e_1\Big)^h - \Big(\frac{\mu_1}{\sqrt{1+\mu_1^2}}e_2\Big)^v,$$
$$\tilde{e}_2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}}e_2\Big)^h + \Big(\frac{\mu_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}e_1\Big)^v, \tilde{e}_3 = (e_3)^h \tag{4.81}$$

$$\tilde{n}_1 = \Big(\frac{\mu_1}{\sqrt{1+\mu_1^2}}e_1\Big)^h + \Big(\frac{1}{\sqrt{1+\mu_1^2}}e_2\Big)^v,$$
$$\tilde{n}_2 = \Big(\frac{\mu_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}e_2\Big)^h - \Big(\frac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}}e_1\Big)^v. \tag{4.82}$$

Напомним, что $\tilde{\gamma}^i_{j|s} := \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_s}\tilde{n}_j, \tilde{n}_i)$ и в нашем случае нам необходимо вычислить только $\tilde{\gamma}^2_{1|s}$. Для этого используем формулы дифференцирования (1.13) и найдем

$$\tilde{\nabla}_{X_1^h+X_2^{tg}}(Y_1^h+Y_2^{tg}) =$$
$$\Big(\nabla_{X_1}Y_1+\frac{1}{2}R(\xi,Y_2)X_1+\frac{1}{2}R(\xi,X_2)Y_1\Big)^h+\Big(\nabla_{X_1}Y_2-\frac{1}{2}R(X_1,Y_1)\xi-\langle Y_2,\xi\rangle X_2\Big)^{tg}$$

Прямое вычисление дает следующие компоненты тензора кривизны группы

	e_1	e_2	e_3
$R(e_1,e_2)\bullet$	$-k_{12}e_2$	$k_{12}e_1$	0
$R(e_1,e_3)\bullet$	$-k_{13}e_3$	0	$k_{13}e_1$
$R(e_2,e_3)\bullet$	0	$-k_{23}e_3$	$k_{23}e_2$

где $k_{ij}=\frac{1}{2}(\rho_i+\rho_j-\rho_m)$ $(i\neq j\neq m\neq i)$ – базисные секционные кривизны.

Используя эти формулы, легко находим $\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_1}\tilde{n}_1=((*)e_3)^{tg}=0$, $\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_2}\tilde{n}_1=(*)e_3^h$ и значит $\tilde{\gamma}^2_{1|1}=\tilde{\gamma}^2_{1|2}=0$. Наконец,

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_3}\tilde{n}_1=\frac{1}{2}\frac{k_{12}}{\sqrt{1+\mu_1^2}}e_2^h-\frac{1}{2}\frac{2\mu_3-\mu_1k_{13}}{\sqrt{1+\mu_1^2}}\,e_1^v$$

Так как $\mu_1\mu_2=1$, мы можем упростить

$$\frac{2\mu_3-\mu_1k_{13}}{\sqrt{1+\mu_1^2}}=\frac{2\mu_3-\mu_1(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3-\mu_1\mu_3)}{\sqrt{1+\mu_1^2}}=\frac{2\mu_3-(\mu_1+\mu_3-\mu_1^2\mu_3)}{\sqrt{1+\mu_1^2}}=$$
$$\frac{\mu_3+\mu_1^2\mu_3-\mu_1}{\sqrt{1+\mu_1^2}}=\frac{\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3-\mu_2\mu_3}{\mu_2\sqrt{1+\mu_1^2}}=\frac{k_{12}}{\sqrt{1+\mu_2^2}}\ ,$$
$$\frac{k_{12}}{\sqrt{1+\mu_1^2}}=\frac{\mu_2k_{12}}{\sqrt{1+\mu_2^2}}.$$

Так что

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_3}\tilde{n}_1=\frac{1}{2}k_{12}\tilde{n}_2$$

и значит $\tilde{\gamma}^2_{1|3}=\frac{1}{2}k_{12}$. Для случаев $\xi=e_1$ и $\xi=e_2$ вычисления аналогичны.

■

Частичная кривизна Риччи

$$\widetilde{Ric}(\tilde{N}) = w^2 \sum_{i=1}^{n} \tilde{K}(\tilde{e}_i, \tilde{n}),$$

где $\tilde{e}_i$ векторы ортонормированного касательного репера на $\xi(M)$, может быть вычислена с использованием формулы (1.15). Поэтому, для вычисления частичной кривизны Риччи $\xi(G)$ нам необходимо знать производные тензора кривизны группы. Мы можем найти эти производные исходя из формулы

$$(\nabla_W R)(X,Y)Z = \\ \nabla_W(R(X,Y)Z) - R(\nabla_W X, Y)Z - R(X, \nabla_W Y)Z - R(X,Y)\nabla_W Z.$$

Результат вычислений удобно представить в следующей форме.

Лемма 4.54 *Пусть* (e_1, e_2, e_3) *– канонический лево-инвариантный ортонормированный репер на (компактном факторе) 3-х мерной унимодулярной группы Ли с лево-инвариантной метрикой. Тогда ковариантные производные тензора кривизны имеют вид*

	$(\nabla_\bullet R)(e_1,e_2)e_1$	$(\nabla_\bullet R)(e_1,e_2)e_2$	$(\nabla_\bullet R)(e_1,e_2)e_3$
e_1	$\mu_1(\rho_3-\rho_2)e_3$	0	$-\mu_1(\rho_3-\rho_2)e_1$
e_2	0	$\mu_2(\rho_3-\rho_1)e_3$	$-\mu_2(\rho_3-\rho_1)e_2$
e_3	0	0	0

	$(\nabla_{\bullet}R)(e_1,e_3)e_1$	$(\nabla_{\bullet}R)(e_1,e_3)e_2$	$(\nabla_{\bullet}R)(e_1,e_3)e_3$
e_1	$\mu_1(\rho_3-\rho_2)e_2$	$-\mu_1(\rho_3-\rho_2)e_1$	0
e_2	0	0	0
e_3	0	$\mu_3(\rho_2-\rho_1)e_3$	$-\mu_3(\rho_2-\rho_1)e_2$

	$(\nabla_{\bullet}R)(e_2,e_3)e_1$	$(\nabla_{\bullet}R)(e_2,e_3)e_2$	$(\nabla_{\bullet}R)(e_2,e_3)e_3$
e_1	0	0	0
e_2	$\mu_2(\rho_3-\rho_1)e_2$	$-\mu_2(\rho_3-\rho_1)e_1$	0
e_3	$\mu_3(\rho_2-\rho_1)e_3$	0	$-\mu_3(\rho_2-\rho_1)e_1$

где ρ_i – главные кривизны Риччи и μ_i – коэффициенты связности.

Теперь мы можем вычислить частичную кривизну Риччи $\xi(G)$.

Лемма 4.55 *Пусть $\xi = e_m$ – вполне геодезическое единичное векторное поле на (компактном факторе) 3-х мерной унимодулярной группы G с левоинвариантной метрикой. Тогда частичная кривизна Риччи $\xi(G)$ относительно произвольного нормального векторного поля $\tilde{N} = h_i\tilde{n}_i + h_j\tilde{n}_j$ $(i \neq j \neq m \neq i)$ имеет вид*

$$\widetilde{Ric}(\tilde{N}) = \frac{1}{4}k_{ij}(h_i^2 + h_j^2) + \Big(1 - \frac{\rho_j^2}{4}\Big)h_i^2 + \Big(1 - \frac{\rho_i^2}{4}\Big)h_j^2$$

где k_{ij} – базисные секционные кривизны и ρ_i – главные кривизны Риччи.

Доказательство. Доказательство проведем для $\xi = e_3$, так как в других случаях вычисления аналогичны. Выберем на $\xi(G)$ касательный и нормальный реперы в соответствии с (4.81) и (4.82). Тогда произвольное нормальное векторное поле $\tilde{N}$ может быть выражено как

$$\tilde{N} = \left(\frac{h_1\mu_1}{\sqrt{1+\mu_1^2}}e_1 + \frac{h_2\mu_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}e_2\right)^h + \left(-\frac{h_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}e_1 + \frac{h_1}{\sqrt{1+\mu_1^2}}e_2\right)^v.$$

Заметим, что если $\tilde{X}$ имеет единичную длину и ортогонален $\tilde{Y}$, то величину $|\tilde{Y}|^2\tilde{K}(\tilde{X},\tilde{Y})$ можно вычислить по формуле (1.15) в предположении что Y_1 и Y_2 есть компоненты ненормированного вектора. Помня об этом, положим

$$Y_1 = \frac{h_1\mu_1}{\sqrt{1+\mu_1^2}}e_1 + \frac{h_2\mu_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}e_2, \quad Y_2 = -\frac{h_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}e_1 + \frac{h_1}{\sqrt{1+\mu_1^2}}e_2.$$

Для вычисления $\tilde{K}(\tilde{e}_1,\tilde{N})$, положим

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_1^2}}e_1 \qquad X_2 = \frac{-\mu_1}{\sqrt{1+\mu_1^2}}e_2.$$

Вычисления дают

$$\big\langle R(X_1,Y_1)Y_1,X_1\big\rangle = \frac{\mu_2^2k_{12}}{(1+\mu_1^2)(1+\mu_2^2)}h_2^2\Big|_{\mu_1\mu_2=1} = \frac{\mu_1^2\mu_3+\mu_3-\mu_1}{\mu_1(1+\mu_1^2)^2}h_2^2,$$

$$||R(X_1,Y_1)\xi||^2 = 0,$$

$$||R(\xi,Y_2)X_1 + R(\xi,X_2)Y_1||^2 = \frac{(k_{13}+\mu_1\mu_2k_{23})^2}{(1+\mu_1^2)(1+\mu_2^2)}\,h_2^2\Big|_{\mu_1\mu_2=1} = \frac{4\mu_1^2}{(1+\mu_1^2)^2}h_2^2,$$

$$\big\langle R(X_1,Y_1)Y_2,X_2\big\rangle = -\frac{\mu_1\mu_2k_{12}}{(1+\mu_1^2)(1+\mu_2^2)}\,h_2^2\Big|_{\mu_1\mu_2=1} = -\frac{\mu_1(\mu_1^2\mu_3+\mu_3-\mu_1)}{(1+\mu_1^2)^2}\,h_2^2,$$

$$\big\langle R(\xi,X_2)X_1, R(\xi,Y_2)Y_1\big\rangle = 0,$$

$$\|X_2\|^2\|Y_2\|^2 - \big\langle X_2,Y_2\big\rangle^2 = \frac{\mu_1^2}{(1+\mu_1^2)(1+\mu_2^2)}\,h_2^2\Big|_{\mu_1\mu_2=1} = \frac{\mu_1^4}{(1+\mu_1^2)^2}h_2^2,$$

$$\big\langle(\nabla_{X_1}R)(\xi,Y_2)Y_1,X_1\big\rangle = \frac{\rho_3(\rho_2-\rho_3)}{2(1+\mu_1^2)(1+\mu_2^2)}h_2^2\Big|_{\rho_3=2,\mu_1\mu_2=1} = \frac{2\mu_1^2(\mu_1\mu_3-1)}{(1+\mu_1^2)^2}h_2^2,$$

$$\big\langle(\nabla_{Y_1}R)(\xi,X_2)X_1,Y_1\big\rangle = -\frac{\mu_2^2\rho_3(\rho_1-\rho_3)}{2(1+\mu_1^2)(1+\mu_2^2)}h_2^2\Big|_{\rho_3=2,\mu_1\mu_2=1} = \frac{2(\mu_1-\mu_3)}{\mu_1(1+\mu_1^2)^2}h_2^2.$$

После подстановки в (1.15), получаем

$$|\tilde{N}|^2\tilde{K}(\tilde{e}_1,\tilde{N}) = (1-\frac{1}{2}\rho_1)h_2^2.$$

Аналогично находим

$$|\tilde{N}|^2\tilde{K}(\tilde{e}_2,\tilde{N}) = (1-\frac{1}{2}\rho_2)h_1^2,$$
$$|\tilde{N}|^2\tilde{K}(\tilde{e}_3,\tilde{N}) = \frac{1}{4}k_{12}^2(h_1^2+h_2^2) + \Big(\frac{\rho_2}{2}-\frac{\rho_2^2}{4}\Big)h_1^2 + \Big(\frac{\rho_1}{2}-\frac{\rho_1^2}{4}\Big)h_2^2.$$

Следовательно,

$$\widetilde{Ric}(\tilde{N}) = \frac{1}{4}k_{12}^2(h_1^2+h_2^2) + \Big(1-\frac{\rho_2^2}{4}\Big)h_1^2 + \Big(1-\frac{\rho_1^2}{4}\Big)h_2^2,$$

что завершает доказательство.

■

Следующая лемма является ключевой.

Лемма 4.56 *Пусть $\xi = e_m$ – вполне геодезическое единичное векторное поле на (компактном факторе) 3-х мерной унимодулярной группы Ли G с лево-инвариантной метрикой. Тогда интегранд в формуле второй вариации функционала объема* (4.80) *преобразуется к виду*

$$W(h,h) := \Big[\frac{e_i(h_i)^2}{1+\mu_i^2} - \frac{2k_{ij}}{\lambda_m}e_i(h_i)e_j(h_j) + \frac{e_j(h_j)^2}{1+\mu_j^2} + \frac{e_i(h_j)^2}{1+\mu_i^2} + \frac{2k_{ij}}{\lambda_m}e_i(h_j)e_j(h_i) + \frac{e_j(h_i)^2}{1+\mu_j^2} + e_m(h_i)^2 + e_m(h_j)^2 + \big(\frac{\rho_j^2}{4}-1\big)h_i^2 + \big(\frac{\rho_i^2}{4}-1\big)h_j^2\Big]|\lambda_m|, \quad (4.83)$$

где $i \neq j \neq m \neq i$, ρ_i and ρ_j – главные кривизны Риччи, k_{ij} – базисные секционные кривизны G и h_i – функции вариации.

Доказательство. Вычисления проведем для $m = 3$. Прежде всего заметим, что $\xi = e_m$ есть единичный собственный вектор оператора Риччи, отвечающий главной кривизне Риччи $\rho_3 = 2$. Это означает, что $\mu_1\mu_2 = 1$ и значит

$$L = \det(I + A_\xi^t A_\xi) = 1 + \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_1^2\mu_2^2 = 2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 = (\mu_1 + \mu_2)^2 = \lambda_3^2.$$

Следовательно, $dVol_\xi$ отличается от dV постоянным множителем, а именно, $dVol_\xi = |\lambda_3| dV$. Выберем касательный и нормальный реперы на $\xi(G)$ в соответствии с (4.81) и (4.82). Положим $\tilde N = h_1\tilde n_1 + h_2\tilde n_2$. Для вычисления $|\tilde\nabla^\perp_{\tilde e_i}\tilde N|^2$, заметим, что

$$\tilde\nabla^\perp_{\tilde e_i}\tilde N = \langle\langle \tilde\nabla_{\tilde e_i}\tilde N, \tilde n_1\rangle\rangle\, \tilde n_1 + \langle\langle \tilde\nabla_{\tilde e_i}\tilde N, \tilde n_2\rangle\rangle\, \tilde n_2 = \tilde e_i(h_1)\tilde n_1 + \tilde e_i(h_2)\tilde n_2 +$$
$$h_2\langle\langle \tilde\nabla_{\tilde e_i}\tilde n_2, \tilde n_1\rangle\rangle\, \tilde n_1 + h_1\langle\langle \tilde\nabla_{\tilde e_i}\tilde n_1, \tilde n_2\rangle\rangle\, \tilde n_2 = \tilde e_i(h_1)\tilde n_1 + \tilde e_i(h_2)\tilde n_2 + h_2\tilde\gamma^1_{2|i}\tilde n_1 + h_1\tilde\gamma^2_{1|i}\tilde n_2$$

По Лемме 4.53, имеем

$$\tilde\nabla^\perp_{\tilde e_1}\tilde N = \tilde e_1(h_1)\tilde n_1 + \tilde e_1(h_2)\tilde n_2, \quad \tilde\nabla^\perp_{\tilde e_2}\tilde N = \tilde e_2(h_1)\tilde n_1 + \tilde e_2(h_2)\tilde n_2,$$

$$\tilde\nabla^\perp_{\tilde e_3}\tilde N = \Big(\tilde e_3(h_1) - \frac12 k_{12}h_2\Big)\tilde n_1 + \Big(\tilde e_3(h_2) + \frac12 k_{12}h_1\Big)\tilde n_2.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^3 ||\tilde\nabla^\perp_{\tilde e_i}\tilde N||^2 = \sum_{i=1}^3 \Big(\tilde e_i(h_1)^2 + \tilde e_i(h_2)^2\Big) + k_{12}\big(\tilde e_3(h_2)h_1 - \tilde e_3(h_1)h_2\big) + \frac14 k_{12}^2(h_1^2 + h_2^2).$$

Так как h_i являются функциями на базовом многообразии, то $\tilde e_\alpha(h_\sigma) = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_\alpha^2}} e_\alpha(h_\sigma)$ и $\tilde e_3(h_\sigma) = e_3(h_\sigma)$, где $(\alpha, \sigma = 1, 2)$. Значит,

$$\sum_{i=1}^3 ||\tilde\nabla^\perp_{\tilde e_i}\tilde N||^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{1+\mu_\alpha^2}\Big(e_\alpha(h_1)^2 + e_\alpha(h_2)^2\Big) +$$
$$e_3(h_1)^2 + e_3(h_2)^2 + k_{12}\big(e_3(h_2)h_1 - e_3(h_1)h_2\big) + \frac14 k_{12}^2(h_1^2 + h_2^2).$$

Так как G компактна, по теореме о дивергенции

$$\int\limits_G div(X)dV = 0$$

для любого векторного поля X. Для $X = h_1 h_2 e_3$, имеем

$$div(h_1 h_2 e_3) = \big\langle \mathrm{grad}(h_1 h_2), e_3 \big\rangle = e_3(h_1)h_2 + e_3(h_2)h_1$$

и значит

$$\int\limits_G \Big(e_3(h_2)h_1 - e_3(h_1)h_2 \Big) dV = 2 \int\limits_G e_3(h_2)h_1 dV.$$

Анализируя таблицу Теоремы 4.48 можно заметить, что во всех случаях (кроме $E(2)$ и T^3 с плоской метрикой) вполне геодезическому e_i соответствует $\lambda_i \neq 0$. Следовательно, мы можем продолжить

$$2 \int\limits_{G/\Gamma} e_3(h_2)h_1 dV = \frac{2}{\lambda_3} \int\limits_G [e_1, e_2](h_2)h_1 dV.$$

Раскроем

$$h_1[e_1, e_2](h_2) = h_1 e_1(e_2(h_2)) - h_1 e_2(e_1(h_2)) =$$
$$e_1(h_1 e_2(h_2)) - e_1(h_1)e_2(h_2) - e_2(h_1 e_1(h_2)) + e_2(h_1)e_1(h_2).$$

Так как G компактна и без края, применяя формулу Стокса получаем

$$\int\limits_G \Big(e_3(h_2)h_1 - e_3(h_1)h_2 \Big) dV = \frac{2}{\lambda_3} \int\limits_G \Big(e_2(h_1)e_1(h_2) - e_1(h_1)e_2(h_2) \Big) dV.$$

Значит,

$$\int\limits_{\xi(G)} \sum_{i=1}^{3} ||\tilde{\nabla}^{\perp}_{\tilde{e}_i} \tilde{N}||^2 dVol_\xi = \int\limits_G \Big(\frac{e_1(h_1)^2}{1+\mu_1^2} - \frac{2k_{12}}{\lambda_3} e_1(h_1)e_2(h_2) + \frac{e_2(h_2)^2}{1+\mu_2^2} +$$
$$\frac{e_1(h_2)^2}{1+\mu_1^2} + \frac{2k_{12}}{\lambda_3} e_1(h_2)e_2(h_1) + \frac{e_2(h_1)^2}{1+\mu_2^2} + e_3(h_1)^2 + e_3(h_2)^2 + \frac{1}{4} k_{12}^2 (h_1^2 + h_2^2) \Big) |\lambda_3| dV$$

Принимая во внимание результат Леммы 4.55, получаем

$$\delta^2 Vol_\xi = \int\limits_G \Big(\frac{e_1(h_1)^2}{1+\mu_1^2} - \frac{2k_{12}}{\lambda_3} e_1(h_1)e_2(h_2) + \frac{e_2(h_2)^2}{1+\mu_2^2} + \frac{e_1(h_2)^2}{1+\mu_1^2} + \frac{2k_{12}}{\lambda_3} e_1(h_2)e_2(h_1) + \frac{e_2(h_1)^2}{1+\mu_2^2} + e_3(h_1)^2 + e_3(h_2)^2 + \big(\frac{\rho_2^2}{4} - 1\big)h_1^2 + \big(\frac{\rho_1^2}{4} - 1\big)h_2^2\Big)|\lambda_3| dV.$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

■

Следует заметить, что если $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$, то $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 2$ и интегранд в формуле (4.83) с точностью до множителя 2 совпадает с интегрдом в формуле второй вариации для поля Хопфа на $S^3(1)$, полученной в [33]. В этом случае мы имеем дело с $SO(3)$ постоянной секционной кривизны $+1$, которая изометрична $S^3(1)$. Лево-инвариантные единичные поля на $SO(3)$ соответствуют полям Хопфа на $S^3(1)$. Так что мы можем заключить, что в этом случае вторая вариация функционала объема относительно поле-вариаций равна половине классической вариации этого функционала. Следовательно, поле Хопфа устойчиво по отношению к обоим типам вариации, что было доказано в [33] и [107]. Из Леммы 4.56 мы заключаем следующее.

Теорема 4.57 *Пусть ξ вполне геодезическое единичное векторное поле на (компактном факторе) 3-х мерной унимодулярной неплоской группы Ли G с лево-инвариантной метрикой. Тогда $\xi(\Gamma\backslash G)$ устойчивое вполне геодезическое подмногообразие в $T_1(\Gamma\backslash G)$ тогда и только тогда, когда G есть группа $SU(2)$ или связная компонента $SO(3)$ постоянной кривизны $+1$ и ξ – произвольное лево-инвариантное.*

Доказательство. Пусть $\xi = e_m$ вполне геодезическое. Тогда $\rho_m = 2$ и для лево-инвариантной устойчивости, другие кривизны Риччи должны удовлетворять неравенству

$$|\rho_i| \geq 2, |\rho_j| \geq 2 \quad \text{или, эквивалентно,} \quad |\mu_m \mu_j| \geq 1, |\mu_i \mu_m| \geq 1.$$

Для общей устойчивости, оба квадратичных выражения, включающие производные, должны быть положительно полу-определены. Последнее условие эквивалентно тому, что

$$\frac{k_{ij}^2}{\lambda_m^2} \leq \frac{1}{(1+\mu_i^2)(1+\mu_j^2)}.$$

Так как $\rho_m = 2\mu_i\mu_j = 2$, мы имеем $(1+\mu_i^2)(1+\mu_j^2) = (2+\mu_i^2+\mu_j^2) = (\mu_i+\mu_j)^2 = \lambda_m^2$. Как результат, $|k_{ij}| \leq 1$. Заметим, что $k_{ij} = \mu_i\mu_m + \mu_m\mu_j - 1$ и значит неравенство $|k_{ij}| \leq 1$ эквивалентно

$$0 \leq \mu_m(\mu_i + \mu_j) \leq 2 \quad \text{или} \quad 0 \leq \frac{\mu_m}{\mu_i}(1+\mu_i^2) \leq 2 \quad \text{или} \quad 0 \leq \frac{\mu_m}{\mu_i} \leq \frac{2}{1+\mu_i^2}.$$

Очевидно, что все коэффициенты связности должны быть одного знака. Следовательно, классическая устойчивость имеет место если

$$\mu_m\mu_i \geq 1, \quad \frac{\mu_m}{\mu_i} \geq 1, \quad 0 \leq \frac{\mu_m}{\mu_i} \leq \frac{2}{1+\mu_i^2}.$$

Система совместна только для $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \pm 1$. Принимая во внимание знаки λ_i, мы получаем единственное решение $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$. Это означает, что базовое многоообразие есть многообразие постоянной кривизны $+1$ и ξ – произвольное лево-инвариантное.

Если система несовместна, то вполне геодезическое подмногообразие $\xi(G)$ не устойчиво. Действительно, если скажем $\rho_i < 2$, то в случае компактного фактора можно взять $h_i = 0$, $h_m = 0$ и $h_j = const \neq 0$ и получим $W(h,h) < 0$ над всем компактным фактором. Если $\rho_i \geq 2$ и $\rho_j \geq 2$ но $|k_{ij}| > 1$, тогда оба квадратичных выражения, включающие производные h_i и h_j в $W(h,h)$, не являются положительно полу-определенными. Выбирая

$h_3 = 0$ и h_1, h_2 достаточно малыми но с производными, делающими квадратичные выражения отрицательными, мы получим отрицательность $W(h, h)$ по крайней мере над некоторой областью $F \subset \Gamma \backslash G$.

■

Доказательство Леммы 4.56 существенно использует кривизну группы. Если группа плоская, то классическая вторая вариация для вполне геодезического $\xi(G)$ имеет значительно более простой вид.

Теорема 4.58 *Пусть ξ вполне геодезическое единичное векторное поле на (компактном факторе) 3-х мерной плоской унимодулярной группы G с лево-инвариантной метрикой. Тогда*

- *если $G = E(2)$ и ξ есть параллельное единичное векторное поле на $E(2)$, то $\xi(\Gamma \backslash G)$ – устойчивое вполне геодезическое подмногообразие;*
- *если $G = E(2)$ и ξ лежит в интегрируемом распределении, ортогональном параллельному векторному полю на $E(2)$, то $\xi(\Gamma \backslash G)$ – не устойчивое вполне геодезическое подмногообразие;*
- *если $G = R \oplus R \oplus R$ и ξ – произвольное единичное лево-инвариантное, то $\xi(T^3)$ есть устойчивое вполне геодезическое подмногообразие.*

Доказательство. Группа $E(2)$ будет плоской, если $\lambda_1 = \lambda_2 = a > \lambda_3 = 0$. В этом случае $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \mu_3 = a$ и $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$. Поле $\xi = e_3$ есть поле единичных нормалей интегрируемого распределения $\xi^\perp$. В этом случае $\widetilde{Ric}(\tilde{N}) = 0$ и мы получаем, что $\xi(G)$ устойчивое вполне геодезическое подмногообразие в T_1G.

Что касается поля $\xi = \cos te_1 + \sin te_2$, то вращением репера в плоскости $e_1 \wedge e_2$ мы всегда можем считать без потери общности, что $\xi = e_1$. Тогда

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\xi^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Касательный репер состоит из $\tilde e_1 = e_1^h, \quad \tilde e_2 = e_2^h, \quad \tilde e_3 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(e_3^h + ae_2^v)$. Нормальный репер на $\xi(G)$ состоит из $\tilde n_2 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(-ae_3^h + e_2^v), \quad \tilde n_3 = e_3^v$. Для поля нормальной вариации $\tilde N = h_2\tilde n_2 + h_3\tilde n_3$, мы имеем $\widetilde{Ric}(\tilde N) = \frac{a^2}{1+a^2}h_3^2$. Нормальная связность $\xi(G)$ плоская и значит, выбирая вариацию с постоянными h_1 и h_2, мы получаем

$$\delta^2 Vol_\xi = -\frac{a^2}{1+a^2}h_3^2 Vol(G).$$

Это означает, что $\xi(G)$ – неустойчивое вполне геодезическое подмногообразие в T_1G.

В случае $R \oplus R \oplus R$, компактным фактором является плоский тор T^3. Каждое лево-инвариантное поле параллельно и, следовательно, $\xi(T^3)$ – устойчивое вполне геодезическое подмногообразие.

■

Рассматривая поле нормальной вариации $\xi(G)$ для $\xi = e_3$, а именно,

$$\tilde N = \left(\frac{h_1\mu_1}{\sqrt{1+\mu_1^2}}e_1 + \frac{h_2\mu_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}e_2\right)^h + \left(-\frac{h_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}e_1 + \frac{h_1}{\sqrt{1+\mu_1^2}}e_2\right)^v$$

можно заметить,что оно порождает две поле-вариации ξ в смысле [33], а именно, $Z_1 = \pi_*(\tilde N)$ и $Z_2 = \mathcal{K}(\tilde N)$. Если h_1 и h_2 не постоянны, то эти вариации выводят $\xi(G)$ из класса подмногообразий в T_1G, порожденных лево-инвариантным единичным векторным полем. Это обстоятельство оправдывает введение следующего определения.

Определение 4.59 *Пусть* ξ *– лево-инвариантное единичное векторное поле на группе Ли с лево-инвариантной метрикой. Поле нормальной вариации* $\tilde{N}$ *для* $\xi(G) \subset T_1G$ *называется лево-инвариантным, если* $Z_1 = \pi_*(\tilde{N})$ $Z_2 = \mathcal{K}(\tilde{N})$ *являются лево-инвариантными векторными полями на* G.

Если ограничиться лево-инвариантными вариациями, то мы получим более широкий класс классически устойчивых вполне геодезических лево- инвариантных единичных векторных полей.

Теорема 4.60 *Пусть* G *– трехмерная унимодулярная группа Ли с лево-инвариантной метрикой. Пусть* (e_1, e_2, e_3) *– канонический базис ее алгебры Ли. Положим, для определенности, что* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. *Тогда устойчивые или неустойчивые относительно лево-инвариантных вариаций вполне геодезические подмногообразия порожденные лево-инвариантным единичным векторным полем* ξ *на компактном факторе* G *будут следующими.*

Группа	*Гл. крив. Риччи*	ξ	*уст.*
SO(3)	$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 2$	(S)	$(+)$
	$\rho_1 = \rho_2 > \rho_3 = 2$	$\pm e_3$	$(+)$
	$\rho_1 = \rho_2 = 2 > \rho_3$	$\cos t\, e_1 + \sin t\, e_2$	$(-)$
	$\rho_1 = 2 > \rho_2 = \rho_3$	$\pm e_1$	$(-)$
	$\rho_1 > \rho_2 = \rho_3 = 2$	$\cos t\, e_2 + \sin t\, e_3$	$(+)$
	$\rho_1 = 2 > \rho_2 > \rho_3$	$\pm e_1$	$(-)$
	$\rho_1 > \rho_2 = 2 > \rho_3$	$\pm e_2$	$(-)$
	$\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 = 2$	$\pm e_3$	$(+)$
$\Gamma\backslash SL(2,R)$	$\rho_3 = 2 > -2 > \rho_2 > \rho_1$	$\pm e_3$	$(-)$
	$\rho_1 = 2 > -2 > \rho_2 > \rho_3$	$\pm e_1$	$(+)$
$\Gamma\backslash E(2)$	$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0,$ $\mu_1 = \mu_2 = 0, \mu_3 > 0$	$\pm e_3,$ $\cos t\, e_1 + \sin t\, e_2$	$(+)$ $(-)$
	$\rho_1 = 2 > \rho_3 > \rho_2 = -2$	$\pm e_1$	$(-)$
$\Gamma\backslash E(1,1)$	$\rho_3 = 2 > \rho_1 = -2 > \rho_2$	$\pm e_3$	$(+)$
	$\rho_1 = 2 > \rho_2 = -2 > \rho_3$	$\pm e_1$	$(+)$
$\Gamma \setminus Nil^3$	$\rho_1 = 2 > \rho_2 = \rho_3 = -2$	$\pm e_1$	$(+)$
T^3	$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0,$ $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$	(S)	$(+)$

где (S) означает векторное поле вида $\xi = \cos t \cos s\, e_1 + \cos t \sin s\, e_2 + \sin t\, e_3$ с фиксированными параметрами t и s.

Доказательство. Если ограничиться лево-инвариантными вариациями, то (4.83) примет вид

$$W(h,h) = (\frac{\rho_j^2}{4} - 1)h_i^2 + (\frac{\rho_i^2}{4} - 1)h_j^2$$

и значит если $min(|\rho_i|, |\rho_j|) \geq \rho_m = 2 \quad (i \neq j \neq m \neq i)$, то $\xi = e_m$ порождает **устойчивое** вполне геодезическое подмногообразие. Если $\rho_i < 2$ или $\rho_j < 2$, то выбирая $h_j \neq 0$ или $h_i \neq 0$ мы получим $W(h,h) < 0$, что означает **неустойчивость** подмногообразия $\xi(G)$.

Ниже мы проверяем все унимодулярные 3-х мерные группы Ли с лево-инвариантной метрикой и соответствующие вполне геодезические единичные лево-инвариантные поля на предмет лево-инвариантной устойчивости или не устойчивости.

• Группа $SO(3)$.

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Здесь ξ есть произвольное лево-инвариантное и $\xi(G)$ – **классически устойчивое** вполне геодезическое подмногообразие в T_1G по Теореме 4.57.

2. Положим $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 + \delta, \lambda_3 = 2$. Здесь $\xi = e_3$. Так как

$$\rho_1 = 2(1+\delta) = \rho_2 = 2(1+\delta) > \rho_3 = 2,$$

   то $\xi(G)$ есть **лево-инвариантно устойчивое** вполне геодезическое подмногообразие в T_1G.

3. Положим $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 + \varepsilon, \lambda_3 = 2 + \varepsilon - \sqrt{\varepsilon(\varepsilon+4)} > 0$. Поворотом репера в плоскости in $e_1 \wedge e_2$, мы всегда можем добиться $\xi = e_1$.

   Для этого случая коэффициенты связности есть

$$\mu_1 = 1 + \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon(\varepsilon+4)}}{2}, \mu_2 = 1 + \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon(\varepsilon+4)}}{2}, \mu_3 = 1 + \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon(\varepsilon+4)}}{2}.$$

Главные кривизны Риччи

$$\rho_1 = 2, \rho_2 = 2, \rho_3 = \frac{1}{2}\Big(2 + \varepsilon - \sqrt{\varepsilon(\varepsilon+4)}\Big)^2.$$

Мы имеем $\rho_1 = \rho_2 = 2 > \rho_3 > 0$ и $W(h,h) = (\rho_3^2/4 - 1)h_2^2 < 0$ для $h_2 \neq 0$. Значит, $\xi(G)$ – **неустойчивое** вполне геодезическое подмногообразие в T_1G.

4. Положим $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 2 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 2$. Здесь $\xi = e_1$. Коэффициенты связности и главные кривизны Риччи

$$\mu_1 = 1 - \varepsilon, \mu_2 = 1, \mu_3 = 1; \qquad \rho_1 = 2, \rho_2 = 2(1-\varepsilon), \rho_3 = 2(1-\varepsilon).$$

Мы видим, что $\rho_1 = 2 > \rho_2 = \rho_3 > -2$ и значит $\rho_2^2 = \rho_3^2 < 4$. Следовательно, $\xi(G)$ – **неустойчивое** вполне геодезическое подмногообразие в T_1G.

5. Положим $\lambda_1 = \varepsilon + \sqrt{4+\varepsilon^2}, \lambda_2 = \sqrt{4+\varepsilon^2}, \lambda_3 = \sqrt{4+\varepsilon^2}$. В этом случае $\xi = \cos te_2 + \sin te_3$. Поворотом репера, мы можем полагать $\xi = e_3$. Тогда

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon^2+4} - \varepsilon}{2}, \quad \mu_2 = \mu_3 = \frac{\sqrt{\varepsilon^2+4} + \varepsilon}{2} = 1/\mu_1,$$

Главные кривизны Риччи будут

$$\rho_1 = 2 + \varepsilon(\sqrt{\varepsilon^2+4} + \varepsilon) > \rho_2 = \rho_3 = 2$$

и значит $\xi(G)$ – **лево-инвариантно устойчивое** вполне геодезическое подмногообразие в T_1G

6. $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0, \quad \lambda_m^2 - (\lambda_i - \lambda_k)^2 = 4$. Обозначим $\lambda_2 - \lambda_3 = \delta > 0, \lambda_1 - \lambda_2 = \varepsilon > 0$. Тогда $\lambda_1 - \lambda_3 = \varepsilon + \delta$. Здесь мы получаем 3 различных случая.

(i) $\lambda_1^2 = (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + 4$, $\xi = e_1$. Тогда

$$\lambda_1 = \sqrt{4+\delta^2}, \lambda_2 = \sqrt{4+\delta^2} - \varepsilon > 0, \lambda_3 = \sqrt{4+\delta^2} - \varepsilon - \delta > 0.$$

Коэффициенты связности

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{\delta^2+4}-\delta}{2} - \varepsilon, \quad \mu_2 = \frac{\sqrt{\delta^2+4}-\delta}{2}, \quad \mu_3 = \frac{\sqrt{\delta^2+4}+\delta}{2}.$$

Главные кривизны Риччи

$$\rho_1 = 2 > \rho_2 = 2 - \varepsilon(\sqrt{\delta^2+4}+\delta) > \rho_3 = 2 - (\varepsilon+\delta)(\sqrt{\delta^2+4}-\delta) > -2$$

и мы получаем **неустойчивое** вполне геодезическое подмногообразие в T_1G.

(ii) $\lambda_2^2 = (\lambda_1-\lambda_3)^2+4$, $\xi = e_2$. Тогда

$$\lambda_1 = \sqrt{4+(\varepsilon+\delta)^2}+\varepsilon, \quad \lambda_2 = \sqrt{4+(\varepsilon+\delta)^2}, \quad \lambda_3 = \sqrt{4+(\varepsilon+\delta)^2}-\delta > 0$$

Коэффициенты связности

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{(\varepsilon+\delta)^2+4}-(\varepsilon+\delta)}{2}, \quad \mu_2 = \frac{\sqrt{(\varepsilon+\delta)^2+4}+\varepsilon-\delta}{2},$$

$$\mu_3 = \frac{\sqrt{(\varepsilon+\delta)^2+4}+\varepsilon+\delta}{2}.$$

Главные кривизны Риччи

$$\rho_1 = 2+\varepsilon(\sqrt{(\varepsilon+\delta)^2+4}+\varepsilon+\delta), \rho_2 = 2, \rho_3 = 2-\delta\Big(\sqrt{(\varepsilon+\delta)^2+4}-(\varepsilon+\delta)\Big).$$

Здесь $\rho_1 > \rho_2 = 2 > \rho_3 > -2$ и мы получаем **неустойчивое** вполне геодезическое подмногообразие в T_1G.

(iii) $\lambda_3^2 = (\lambda_1-\lambda_2)^2+4$, $\xi = e_3$. Тогда

$$\lambda_1 = \sqrt{4+\varepsilon^2}+\varepsilon+\delta, \quad \lambda_2 = \sqrt{4+\varepsilon^2}+\delta, \quad \lambda_3 = \sqrt{4+\varepsilon^2}.$$

Коэффициенты связности

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon^2+4}-\varepsilon}{2}, \quad \mu_2 = \frac{\sqrt{\varepsilon^2+4}+\varepsilon}{2} = 1/\mu_1, \quad \mu_3 = \frac{\sqrt{\varepsilon^2+4}+\varepsilon}{2}+\delta.$$

Главные кривизны Риччи

$$\rho_1 = 2 + (\varepsilon + \delta)(\sqrt{\varepsilon^2 + 4} + \varepsilon) > \rho_2 = 2 + \delta(\sqrt{\varepsilon^2 + 4} - \varepsilon) > \rho_3 = 2$$

и мы получаем **лево-инвариантно устойчивое** вполне геодезическое подмногообразие в T_1G.

- Группа $SL(2, R)$. Здесь $\xi = e_3$ или $\xi = e_1$.

1. В случае $\xi = e_3$ мы имеем $\lambda_3^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 4$. Положим $\lambda_1 - \lambda_2 = \varepsilon > 0$. Тогда $\lambda_3 = -\sqrt{4 + \varepsilon^2}$, $\lambda_2 = a > 0, \lambda_1 = a + \varepsilon$.

   Коэффициенты связности

   $$\mu_1 = -\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 4} + \varepsilon}{2}, \quad \mu_2 = -\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 4} - \varepsilon}{2} = 1/\mu_1, \quad \mu_3 = a + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 4} + \varepsilon}{2}.$$

   Главные кривизны Риччи

   $$\rho_1 = -2 - a(\sqrt{\varepsilon^2 + 4} - \varepsilon), \rho_2 = -2 - (a + \varepsilon)(\sqrt{4 + \varepsilon^2} + \varepsilon), \rho_3 = 2.$$

   Заметим, что $\rho_3 = 2 > \rho_1 > \rho_2$, но $\rho_2 < \rho_1 < -2$. Следовательно, $\rho_2^2 > \rho_1^2 > 4$ и значит $(\rho_2^2/4 - 1)h_3^2 + (\rho_3^2/4 - 1)h_2^2 > 0$. Поэтому $\xi(G)$ **лево-инвариантно устойчивое** вполне геодезическое подмногообразие в T_1G.

2. В случае $\xi = e_1$ мы имеем $\lambda_1^2 - (\lambda_2 - \lambda_3)^2 = 4$. Положим $\lambda_3 = -a$ $(a > 0)$, $\lambda_2 = \lambda_3 + \varepsilon = \varepsilon - a > 0, \lambda_1 = \sqrt{4 + \varepsilon^2}$. (Заметим, что $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\varepsilon^2 + 4} - \varepsilon + a > -\lambda_3 = a$). Кроме того, $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Следовательно, $\sqrt{\varepsilon^2 + 4} \geq \varepsilon - a > 0$.

   Коэффициенты связности

   $$\mu_1 = -a - \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 4} - \varepsilon}{2}, \quad \mu_2 = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 4} - \varepsilon}{2}, \quad \mu_3 = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 4} + \varepsilon}{2} = 1/\mu_2.$$

   Главные кривизны Риччи

   $$\rho_1 = 2, \quad \rho_2 = -2 - a(\sqrt{\varepsilon^2 + 4} + \varepsilon), \quad \rho_3 = -2 + (\varepsilon - a)(\sqrt{\varepsilon^2 + 4} - \varepsilon).$$

   Заметим, что $\rho_2 < -2$, но $-2 < \rho_3 < 2$. Действительно, $\varepsilon - a \leq \sqrt{\varepsilon^2 + 4}$

и значит

$$(\varepsilon - a)(\sqrt{\varepsilon^2+4}-\varepsilon) \le \sqrt{\varepsilon^2+4}(\sqrt{\varepsilon^2+4}-\varepsilon) = 4-\varepsilon(\sqrt{\varepsilon^2+4}-\varepsilon) < 4.$$

Следовательно, $\xi(G)$ – **неустойчивое** вполне геодезическое подмногообразие в T_1G.

• Группа $E(2)$. Плоский случай был рассмотрен в Теореме 4.58. Рассмотрим случай $\lambda_1^2-\lambda_2^2=4$, $\lambda_1>0, \lambda_2>0$ и $\xi=e_1$. Положим $\lambda_1=\sqrt{4+a^2}, \lambda_2=a>0$, $\lambda_3=0$. Тогда

$$\mu_1=-\frac{\sqrt{4+a^2}-a}{2}, \quad \mu_2=\frac{\sqrt{4+a^2}-a}{2}, \quad \mu_3=\frac{\sqrt{4+a^2}+a}{2}=1/\mu_2$$

и

$$\rho_1=2, \rho_2=-2, \rho_3=-2+a(\sqrt{4+a^2}-a).$$

Так что имеем

$$\rho_1=2>\rho_3>\rho_2=-2, \quad \rho_3^2<4$$

и значит $(\rho_3^2/4-1)h_2^2<0$ для $h_2\ne 0$. Следовательно, $\xi(G)$ – **неустойчивое** вполне геодезическое подмногообразие в T_1G.

• Группа $E(1,1)$. Здесь мы снова имеем 2 случая.

1. Рассмотрим $\lambda_3^2-\lambda_1^2=4$, $\lambda_1>0, \lambda_2=0, \lambda_3<0$. Здесь $\xi=e_3$. Положим $\lambda_1=a$, $\lambda_3=-\sqrt{a^2+4}$. Тогда

$$\mu_1=-\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}, \quad \mu_3=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}, \quad \mu_2=\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}=1/\mu_1$$

и главные кривизны Риччи

$$\rho_1=-2, \quad \rho_3=2, \quad \rho_2=-\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4})^2=-2-a(a+\sqrt{4+a^2}).$$

Очевидно, $\rho_3=2>\rho_1=-2>\rho_2$, но $\rho_2^2>\rho_1^2=4$. Следовательно,

$$(\rho_2^2/4-1)h_1^2\ge 0$$

и мы получаем **лево-инвариантно устойчивое** вполне геодезическое подмногообразие в T_1G.

2. Рассмотрим $\lambda_1^2 - \lambda_3^2 = 4$, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0$. Здесь $\xi = e_1$. Положим $\lambda_1 = \sqrt{a^2+4}$, $\lambda_3 = -a < 0$. Тогда

$$\mu_1 = -\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}, \quad \mu_3 = \frac{\sqrt{a^2+4}+a}{2} = 1/\mu_2$$

и главные кривизны Риччи

$$\rho_1 = 2, \quad \rho_2 = -\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4})^2 = -2 - a(a+\sqrt{a^2+4}), \quad \rho_3 = -2.$$

Заметим, что $\rho_1 = 2 > \rho_3 = -2 > \rho_2$, но $\rho_2^2 > \rho_3^2 = 4$. Следовательно,

$$(\rho_2^2/4 - 1)h_1^2 \geq 0$$

и мы получаем **лево-инвариантно устойчивое** вполне геодезическое подмногообразие в T_1G.

• Группа Nil^3. В этом случае $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ и $\xi = e_1$. Легко сосчитать

$$\mu_1 = -1, \quad \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = 1 = 1/\mu_2,$$

$$\rho_1 = 2, \quad \rho_2 = -2, \quad \rho_3 = -2$$

и заметить, что $\rho_1 = 2 > \rho_2 = \rho_3 = -2$. Следовательно, $\xi(G)$ – **лево-инвариантно устойчивое** вполне геодезическое подмногообразие в T_1G.

• Плоский тор T^3 был рассмотрен в Теореме 4.58.

■

Заметим, что результаты Теоремы 4.60 касательно не устойчивости коррелируют с результатами по не устойчивости относительно поле-вариаций из [39], где формула второй поле-вариации была применена при условии постоянства варьирующих функций, то есть лево-инвариантных вариаций в нашей терминологии.

Подытоживая результаты Теоремы 4.60, можно заметить, что на неплоской унимодулярной группе Ли с лево-инвариантной метрикой $\xi(G)$ *устойчивое относительно лево-инвариантных вариаций вполне геодезическое подмногообразие тогда и только тогда, когда ξ есть единичный собственный вектор оператора Риччи, отвечающий минимальной по абсолютной величине главной кривизне Риччи $\rho = 2$.*

Неунимодулярный случай. Не унимодулярная группа не компактна и не допускает компактного фактора [56]. Поэтому следует рассматривать формулу (4.80) над каждой областью $F \subset G$ с компактным замыканием. *Мы говорим, что $\xi(G)$ не устойчивое минимальное/вполне геодезическое единичное векторное поле, если существует область $F \subset G$ с компактным замыканием такая, что вторая вариация $\delta^2 Vol_\xi(F) < 0$.*

Не унимодулярные группы, допускающие вполне геодезические лево-инвариантные векторные поля описываются Теоремой 4.51. Здесь мы переформулируем эту теорему с дополнением об устойчивости или не устойчивости соответствующего подмногообразия.

Теорема 4.61 *Пусть G – 3-х мерная не унимодулярная группа Ли с лево-инвариантной метрикой. Пусть ξ – лево-инвариантное единичное векторное поле на G и (e_1, e_2, e_3) – канонический ортонормированный репер ее алгебры Ли. Предположим, что $\xi(G) \subset T_1G$ вполне геодезично. Тогда*

- *$\beta = \delta = 0$ и $\xi = e_3$ параллельное векторное поле; $\xi(G)$ – устойчивое вполне геодезическое подмногообразие в T_1G;*

- *$\alpha\delta = -1, \beta = \pm 1$ и ξ имеет вид $\xi = \frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, e_2 + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, e_3$; $\xi(G)$ – неустойчивое вполне геодезическое подмногообразие в T_1G;.*

Доказательство. Как было доказано выше, если $\beta=\delta=0$, то $\xi=e_3$ является полем нормалей некоторого вполне геодезического 2-слоения на G и $A_\xi=-\nabla\xi=0$. Значит, в (1.15) все члены с ξ обращаются в ноль. Из формул (4.78) следует, что $\xi(G)$ горизонтально, а поле нормалей – вертикально. Следовательно, $X_2=K(\tilde X)=0$ and $Z_1=\pi_*(\tilde N)=0$. Из (1.15) заключаем, что $\widetilde{Ric}(\tilde N)=0$. Следовательно, $W(h,h)\ge 0$ и значит $\xi(G)$ устойчиво.

Рассмотрим случай $\alpha\delta=-1,\beta=\pm1,\quad \xi=\frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,e_2+\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,e_3$. Заметим, что условия $\alpha>\delta,\alpha\ge-\delta$ и $\alpha\delta=-1$ влекут $\alpha\ge 1$. Для такого векторного поля

$$x_1=0,\quad x_2=\frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}},\quad x_3=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}. \tag{4.84}$$

Таблица ковариантных производных имеет вид

∇	e_1	e_2	e_3
e_1	0	$\beta\,e_3$	$-\beta\,e_2$
e_2	$-\alpha\,e_2$	$\alpha\,e_1$	0
e_3	$\frac{1}{\alpha}e_3$	0	$-\frac{1}{\alpha}e_1$

. (4.85)

Тогда

$$A_\xi=\begin{pmatrix}0 & -\alpha\,x_2 & \frac{1}{\alpha}x_3\\ \beta\,x_3 & 0 & 0\\ -\beta\,x_2 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad A_\xi^t=\begin{pmatrix}0 & \beta\,x_3 & -\beta\,x_2\\ -\alpha\,x_2 & 0 & 0\\ \frac{1}{\alpha}x_3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

и

$$A_\xi^tA_\xi=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} & \frac{-\alpha\beta}{1+\alpha^2}\\ 0 & \frac{-\alpha\beta}{1+\alpha^2} & \frac{1}{1+\alpha^2}\end{pmatrix}.$$

Следовательно, сингулярными числами для A_ξ являются 0 и 1. Соответствующие сингулярные реперы имеют вид

$$s_0 = \xi, \quad s_1 = e_1, \quad s_2 = \tfrac{-\alpha\,\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, e_2 + \tfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, e_3;$$

$$f_1 = A_\xi(s_1) = \tfrac{\beta\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, e_2 - \tfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, e_3, \quad f_2 = A_\xi(s_2) = e_1.$$

Отсюда следует, что касательный и нормальный ортонормированные реперы для $\xi(G)$ согласно (4.79) имеют вид

$$\tilde e_0 = \xi^h,$$

$$\tilde e_1 = \tfrac{\xi_*(s_1)}{|\xi_*(s_1)|} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} e_1^h - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\tfrac{\alpha\,\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, e_2 - \tfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, e_3\Big)^v,$$

$$\tilde e_2 = \tfrac{\xi_*(s_2)}{|\xi_*(s_2)|} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\tfrac{-\alpha\,\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, e_2 + \tfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, e_3\Big)^h - \tfrac{1}{\sqrt{2}} e_1^v,$$

$$\tilde n_1 = \tfrac{\nu(f_1)}{|\nu(f_1)|} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, e_1^h + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\tfrac{\alpha\,\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, e_2 - \tfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, e_3\Big)^v,$$

$$\tilde n_2 = \tfrac{\nu(f_2)}{|\nu(f_2)|} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\tfrac{-\alpha\,\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, e_2 + \tfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\, e_3\Big)^h + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, e_1^v.$$

Для вычисления частичной кривизны Риччи для $\xi(G)$ с использованием формулы (1.15), нам необходимо вычислить тензор кривизны и его производные. Тензор кривизны G можно найти используя таблицу 4.85.

	e_1	e_2	e_3
$R(e_1,e_2)\bullet$	$\alpha^2 e_2 - \beta(\alpha-\delta)e_3$	$-\alpha^2 e_1$	$\beta(\alpha-\delta)e_1$
$R(e_1,e_3)\bullet$	$-\beta(\alpha-\delta)e_2 + \delta^2 e_3$	$\beta(\alpha-\delta)e_1$	$-\delta^2 e_1$
$R(e_2,e_3)\bullet$	0	$\alpha\,\delta\, e_3$	$-\alpha\,\delta\, e_2$

.

Рутинное вычисление производных тензора кривизны можно представить таблицей

	$(\nabla_\bullet R)(e_1,e_2)e_1$	$(\nabla_\bullet R)(e_1,e_2)e_2$	$(\nabla_\bullet R)(e_1,e_2)e_3$
e_1	$2\beta^2(\alpha-\delta)e_2 + \beta(\alpha^2-\delta^2)e_3$	$-2\beta^2(\alpha-\delta)e_1$	$-\beta(\alpha^2-\delta^2)e_1$
e_2	0	$\beta\alpha\,(\alpha-\delta)e_3$	$-\beta\alpha\,(\alpha-\delta)e_2$
e_3	0	$\alpha\,\delta\,(\alpha-\delta)e_3$	$-\alpha\,\delta\,(\alpha-\delta)e_2$

;

	$(\nabla_{\bullet}R)(e_1,e_3)e_1$	$(\nabla_{\bullet}R)(e_1,e_3)e_2$	$(\nabla_{\bullet}R)(e_1,e_3)e_3$
e_1	$\beta(\alpha^2-\delta^2)e_2-\beta^2(\alpha-\delta)e_3$	$-\beta(\alpha^2-\delta^2)e_1$	$2\beta^2(\alpha-\delta)e_1$
e_2	0	$\alpha\delta(\alpha-\delta)e_3$	$-\alpha\delta(\alpha-\delta)e_2$
e_3	0	$-\beta\delta(\alpha-\delta)e_3$	$\beta\delta(\alpha-\delta)e_2$

;

	$(\nabla_{\bullet}R)(e_2,e_3)e_1$	$(\nabla_{\bullet}R)(e_2,e_3)e_2$	$(\nabla_{\bullet}R)(e_2,e_3)e_3$
e_1	0	0	0
e_2	$\alpha\beta(\alpha-\delta)e_2+\alpha\delta(\alpha-\delta)e_3$	$-\alpha\beta(\alpha-\delta)e_1$	$-\alpha\delta(\alpha-\delta)e_1$
e_3	$\alpha\delta(\alpha-\delta)e_2-\beta\delta(\alpha-\delta)e_3$	$-\alpha\delta(\alpha-\delta)e_1$	$\beta\delta(\alpha-\delta)e_1$

.

Зададим поле нормальной вариации в виде $\tilde N = h_1\tilde n_1 + h_2\tilde n_2$. Для вычисления $K(\tilde e_1,\tilde N)$, положим

$$X_1=\tfrac{1}{\sqrt2}e_1,\qquad X_2=-\tfrac{1}{\sqrt2}\Big(\tfrac{\alpha\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,e_2-\tfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,e_3\Big),$$

$$Y_1=\pi_*(\tilde N)=\tfrac{1}{\sqrt2}\Big(h_1e_1+h_2(-\tfrac{\alpha\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}e_2+\tfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}e_3)\Big),$$

$$Y_2=K(\tilde N)=\tfrac{1}{\sqrt2}\Big(h_2e_1+h_1(\tfrac{\alpha\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}e_2-\tfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}e_3)\Big).$$

и применим (1.15). Вычисляя, находим

$$\big\langle R(X_1,Y_1)Y_1,X_1\big\rangle=-\frac14\frac{\alpha^4+\alpha^2+1}{\alpha^2}h_2^2,\quad ||R(X_1,Y_1)\xi||^2=0,$$

$$||R(\xi,Y_2)X_1+R(\xi,X_2)Y_1||^2=\frac{\alpha^6-\alpha^4+3\alpha^2+1}{\alpha^2(1+\alpha^2)}h_2^2,$$

$$\|X_2\|^2\|Y_2\|^2-\big\langle X_2,Y_2\big\rangle^2=\tfrac14h_2^2,$$

$$\big\langle R(X_1,Y_1)Y_2,X_2\big\rangle=\frac14\frac{\alpha^4+\alpha^2+1}{\alpha^2}h_2^2,\quad \big\langle R(\xi,X_2)X_1,R(\xi,Y_2)Y_1\big\rangle=0,$$

$$\big\langle(\nabla_{X_1}R)(\xi,Y_2)Y_1,X_1\big\rangle=-\frac14\frac{\alpha^6-\alpha^4+5\alpha^2-1}{\alpha^2(1+\alpha^2)}h_2^2,$$

$$\big\langle(\nabla_{Y_1}R)(\xi,X_2)X_1,Y_1\big\rangle=-\frac14\frac{\alpha^6+10\alpha^4+4\alpha^2+7}{\alpha^2(1+\alpha^2)}h_2^2.$$

После подстановки в (1.15) и алгебраических преобразований, получаем

$$\tilde{K}(\tilde{e}_1, \tilde{N}) = \frac{1}{4}\frac{\alpha^6 + 10\alpha^4 + 4\alpha^2 + 7}{\alpha^2(1+\alpha^2)}h_2^2.$$

Подобным же образом находим

$$\tilde{K}(\tilde{e}_2, \tilde{N}) = \frac{1}{4}\frac{5\alpha^8 - \alpha^6 + 3\alpha^4 + 13\alpha^2 - 8}{\alpha^2(1+\alpha^2)^2}h_1^2 + \frac{\alpha^8 + 2\alpha^4 + 1}{\alpha^2(1+\alpha^2)^2}h_2^2,$$

$$\tilde{K}(\tilde{e}_0, \tilde{N}) = \frac{1}{4}\frac{\alpha^4 + 14\alpha^2 - 11}{(1+\alpha^2)^2}h_1^2 - \frac{1}{4}\frac{3\alpha^4 + 2\alpha^2 - 9}{(1+\alpha^2)^2}h_2^2.$$

В результате частичная кривизна Риччи для $\xi(G)$ принимает вид

$$\widetilde{Ric}(\tilde{N}) = \frac{1}{4}\frac{5\alpha^8 + 17\alpha^4 + 2\alpha^2 - 8}{\alpha^2(1+\alpha^2)^2}h_1^2 + \frac{1}{4}\frac{5\alpha^8 + 8\alpha^6 + 20\alpha^4 + 20\alpha^2 + 11}{\alpha^2(1+\alpha^2)^2}h_2^2.$$

На неунимодулярной группе мы не можем рассматривать лево - инвариантные вариации на всей области F ввиду граничных условий. Тем не менее, можно рассмотреть лево - инвариантную вариацию, заданную над некоторой подобластью $F_1 \subset F$ такой, что мера $mes(\bar{F} \setminus F_1) < \varepsilon$ для сколь угодно малого ε. Если вторая лево-инвариантная вариация над F_1 отрицательна и отделена от нуля, то выбирая F_1 достаточно большой меры мы всегда можем обеспечить выполнение неравенства $\delta^2 Vol_\xi(F) < 0$.

Если поле вариации $\tilde{N}$ лево - инвариантно, то

$$\sum_{i=0}^{2} ||\tilde{\nabla}^{\perp}_{\tilde{e}_i}\tilde{N}||^2 = \Big(\sum_{i=0}^{2}(\tilde{\gamma}^2_{1i})^2\Big)(h_1^2 + h_2^2),$$

где $\tilde{\gamma}^2_{1i} = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_i}\tilde{n}_1, \tilde{n}_2)$ есть коэффициенты нормальной связности $\xi(G)$ относительно выбранных реперов. Вычисляя, находим

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_0}\tilde{n}_1 = \frac{3}{4}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\alpha^2}}\Big(\beta\alpha e_2 + e_3\Big)^h + \frac{\sqrt{2}}{1+\alpha^2}e_1^v, \quad \tilde{\nabla}_{\tilde{e}_1}\tilde{n}_1 = 0,$$

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_2}\tilde{n}_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\Big(\beta(2\alpha^2 - 1)e_2 - \alpha e_3\Big)^h - \frac{1}{2}\frac{\alpha^4 + \alpha^2 - 2}{\alpha(1+\alpha^2)^2}e_1^v.$$

Теперь не трудно вычислить

$$\tilde{\gamma}^2_{10} = \frac{\alpha^2 + 2}{1 + \alpha^2}, \quad \tilde{\gamma}^2_{11} = 0, \quad \tilde{\gamma}^2_{12} = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}(3\alpha^2 - 2)}{\alpha}.$$

После подстановки и преобразований, лево-инвариантная часть в интегранде (4.80) принимает вид

$$W(h,h) = -\frac{1}{8}\frac{\alpha^8 - 14\alpha^6 + 13\alpha^4 - 24\alpha^2 - 20}{\alpha^2(1+\alpha^2)^2}h_1^2 - \frac{1}{8}\frac{\alpha^8 + 2\alpha^6 + 19\alpha^4 + 12\alpha^2 + 18}{\alpha^2(1+\alpha^2)^2}h_2^2.$$

Множитель при h_2 всегда отрицателен и значит подмногообразие $\xi(G)$ **неустойчиво**. Теорема доказана.

$\blacksquare$

4.8. Выводы

В разделе проведено систематическое изучение подмногообразий единичного касательного расслоения, порожденных единичным векторным полем на базе. Введен в рассмотрение оператор Номидзу (или неголономный оператор Вейнгартена) единичного векторного поля ξ, определены *касательное и нормальное отображения* из касательного пространства к базе в касательное и нормальное подпространства подмногообразия $\xi(M) \subset T_1M$, введены понятия *грубого гессиана* поля и *тензора гармоничности* поля ξ. В этих терминах выписаны фундаментальные *разложения Гаусса и Вейнгартена* для подмногообразия $\xi(M) \subset T_1M$, *выяснена структура* второй фундаментальной формы и *найдено условие вполне геодезичности* подмногообразия $\xi(M^n) \subset T_1M^n$

В простейшем случае двумерного риманова многообразия найдено *выражение для средней кривизны* векторного поля в ясных геометрических терминах. Доказано, что минимальные векторные поля на двумерных многообразиях существуют и их наличие накладывает ограничения на геометрию базового многообразия. Построены примеры векторных полей *постоянной средней кривизны.* Наиболее ясное выражение для средней кривизны подмногообразия $\xi(M)$ получено, если поле ξ есть *поле нормалей риманова гиперслоения.*

Существуют и *вполне геодезические векторные поля.* Примеры доставляют поле нормалей некоторых гиперслоений и двумерные многообразия со специальной метрикой вращения. В двумерном случае *дано описание* и самих векторных полей. Их интегральные траектории конформно эквивалентны интегральным траекториям вполне геодезического векторного поля на плоскости. В последнем случае они описаны явно.

Для пространств размерности $n \geq 3$ система дифференциальных уравнений, определяющая вполне геодезическое свойство единичного векторного поля, становится мало обозримой. В размерности $n = 3$ мы даем *полное описание* многообразий, допускающих вполне геодезическое Киллингово единичное векторное поле. Нетривиальный случай такого описания показывает особую роль характеристического векторного поля Сасакиевой структуры при $n = 3$. Свойством вполне геодезичности обладает *характеристическое векторное поле Сасакиевой структуры* во всех размерностях.

В частности, *векторное поле Хопфа* ξ на сфере S^{2n+1} является характеристическим векторным полем Сасакиевой структуры на ней, а поэтому $\xi(S^{2n+1}) \subset T_1S^{2n+1}$ является вполне геодезическим подмногообразием. Обратное верно при дополнительном требовании на векторное поле быть ковариантно нормальным. Доказано что для поля Хопфа на единичной сфере S^{2m+1} подмногообразие $\xi(S^{2m+1})$ является *Сасакиевой пространственной формой* φ- кривизны $5/4$. Оказалось возможным выделить вполне геодезические векторные поля в классе геодезических векторных полей на сферах.

Для техмерной унимодулярной группы Ли с лево - инвариантной метрикой дано *описание всех лево-инвариантных вполне геодезических единичных векторных полей.* Показано, что вполне геодезическое инвариантное поле на неплоской группе порождает каноническую *почти контактную структуру*. Если группа не унимодулярна, то вполне геодезическое единичное векторное поле так же существует и выделены все такие группы и найдены все соответствующие поля. Выяснена геометрическая структура неунимодулярных групп, допускающих вполне геодезические инвариантные единичные векторные поля.

Решена задача *о глобальной устойчивости* вполне геодезического единичного векторного поля на компактных факторах унимодулярных групп относительно классических нормальных вариаций. Для неунимодулярных задача решена в локальной постановке.

РАЗДЕЛ 5

ОБОБЩЕННАЯ МЕТРИКА САСАКИ И ГЕОМЕТРИЯ СЕЧЕНИЙ ОБЩИХ РАССЛОЕНИЙ

В данном разделе определяется аналог метрики Сасаки на общем векторном расслоении с метрической связностью над римановым многообразием и изучены основные свойства такого обобщения. Получены аналоги формул Домбровского и Ковальского, вычислен тензор кривизны. Определены аналоги отображения связности и оператора Номидзу. Определена метрика на сечениях векторного расслоения и выведены условия минимальности и вполне геодезичности сечений. Приведены примеры существования минимальных и вполне геодезических сечений единичных сечений расслоений. Раздел содержит результаты, принадлежащие автору и опубликованные в [119].

5.1. Векторные расслоения и связности

Определение 5.1 *Расслоением называется произвольная тройка* $(\mathcal{E},\pi,\mathcal{B})$, *где* $\mathcal{E}$ *и* $\mathcal{B}$ *– топологические пространства, а* π *– непрерывное (сюръективное) отображение.*

Пространство $\mathcal{E}$ называется *пространством* расслоения, $\mathcal{B}$ – *базой расслоения*, а π – *проекцией расслоения.* Поскольку для задания отображения необходимо всегда указывать пространства, на которых оно действует, то часто расслоением называют само отображение и записывают расслоение в виде

$$\pi:\mathcal{E}\to\mathcal{B}.$$

Для каждой точки $b \in \mathcal{B}$ ее прообраз $\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b)$ называется слоем над b. Если слои над всеми точками базы гомеоморфны между собой, а значит гомеоморфны некоторому топологическому пространству $\mathcal{F}$, то такое расслоение называется *расслоением с типичным слоем.*

Определение 5.2 *Расслоение $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ с типичным слоем $\mathcal{F}$ называется локально-тривиальным, если существует открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ базы $\mathcal{B}$ такое, что ограничение расслоения над каждой окрестностью U_α является тривиальным, то есть $\pi^{-1}(U_\alpha) \approx U_\alpha \times \mathcal{F}$.*

Соответствующий гомеоморфизм называется *тривиализацией расслоения*, а окрестность – *тривиализующей окрестностью.*

Определение 5.3 *Расслоение $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ называется векторным расслоением ранга m над $\mathbb{R}$, если*

- *для любой точки $b \in \mathcal{B}$, слой $\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b)$ является линейным векторным пространством над $\mathbb{R}$;*

- *существует такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathcal{B}$ и набор изоморфизмов расслоений $\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^m \to \pi^{-1}(U_\alpha) = \mathcal{E}|_{U_\alpha}$, что для каждой точки $b \in U_\alpha$ ограничение $\varphi_\alpha|_b : b \times \mathbb{R}^m \to \pi^{-1}(b)$ является изоморфизмом векторных пространств.*

Семейство $\{U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ называется *тривиализующим атласом* векторного расслоения.

Определение 5.4 *Непрерывное отображение $s : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$, удовлетворяющее соотношению $\pi \circ s = id_{\mathcal{B}}$ называется сечением расслоения*

Сечения векторных расслоений называются *векторными полями.* Сечения векторного расслоения можно складывать и умножать на функции. Нулевое сечение $s = 0$ вкладывает базу в пространство расслоения. Над каждой тривиализующей окрестностью U_α по изоморфизму тривиализации определены локальные базисные сечения $s_1, \dots, s_m$. Поэтому каждое локальное сечение V имеет разложение $V = v^1 s_1 + \dots v^m s_m$. Набор функций $(v_1, \dots, v^m)$ однозначно определяет локальное сечение и называется локальными координатами сечения V. На пересечении тривиализующих окрестностей U_α и U_β имеется два набора базисных сечений $\{s_{1|\alpha}, \dots, s_{m|\alpha}\}$ и $\{s_{1|\beta}, \dots, s_{m|\beta}\}$. В силу линейной независимости, переход от базиса $s_{i|\alpha}$ к базису $s_{k|\beta}$ в каждом слое $\mathcal{F}_b$ осуществляется при помощи невырожденной $m \times m$ матрицы $g(b) \in GL(m, \mathbb{R})$ по формуле $s_{|\beta} = s_{|\alpha} g$, а значит координаты сечения V в различных тривиализующих окрестностях связаны соотношением $V^i_\beta(b) = g^i_k(b) V^k_\alpha(b)$. Следовательно, каждая упорядоченная пара окрестностей (U_α, U_β) с непустым пересечением определяет отображение $\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(m, \mathbb{R})$. Это отображение непрерывно, если непрерывны все $g^i_k(b)$. Очевидным образом определены отображения $\varphi_{\gamma\alpha} \cdot \varphi_{\alpha\beta}$ и $\varphi^{-1}_{\beta\alpha} = \varphi_{\alpha\beta}$.

Определение 5.5 *Пусть $\mathcal{B}$ – топологическое пространство и $\{U_\alpha\}$ его открытое покрытие. Семейство непрерывных отображений $\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$, определенных для любых индексов α, β, для которых $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ и удовлетворяющих соотношениям $\varphi^{-1}_{\beta\alpha} = \varphi_{\alpha\beta}$ на $U_\alpha \cap U_\beta$ и $\varphi_{\gamma\alpha} \cdot \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\gamma\beta}$ на $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ называется коциклом над G.*

Коциклы над $GL(m,\mathbb{R})$ называются (вещественными) матричными коциклами. Таким образом, всякое векторное расслоение определяет некоторый матричный коцикл. Он называется *склеивающим коциклом.*

Верно и обратное. *Для любого топологического пространства $\mathcal{B}$, его открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ и матричного коцикла $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ над $GL(m,\mathbb{R})$ существует единственное с точностью до изоморфизма векторное расслоение ранга m с базой $\mathcal{B}$, тривиализующим покрытием $\{U_\alpha\}$ и склеивающим коциклом $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$.* Аналогичным образом определяются *комплексные*, *кватернионные* и прочие расслоения. Их склеивающие коциклы построены над $GL(m,\mathbb{C})$, $GL(m,\mathbb{H})$ и т.д.

Определение 5.6 *Векторное расслоение $(\mathcal{E},\pi,\mathcal{B})$ над многообразием $\mathcal{B}$ называется гладким, если существует его тривиализующий атлас с гладким матричным коциклом.*

Проекция π гладкого векторного расслоения над n-мерным гладким многообразием $\mathcal{B}$ является в каждой точке $p\in\mathcal{E}$ субмерсией, а значит все слои гладкого вещественного расслоения являются гладкими вложенными n-мерными подмногообразиями в $\mathcal{E}$. Для любой точки $p\in\mathcal{F}_u$, касательное пространство слоя $T_p\mathcal{F}_u$ совпадает с ядром отображения π_*. Это подпространство в $T_p\mathcal{E}$ называется *вертикальным* и обозначается $\mathcal{V}_p\mathcal{E}$. Таким образом, в каждой точке $p\in\mathcal{E}$ имеет место разложение

$$T_p\mathcal{E}=\mathcal{V}_p\mathcal{E}\oplus\mathcal{H}_p\mathcal{E},$$

где $\mathcal{H}_p\mathcal{E}$ дополнительное (трансверсальное) подпространство вертикального подпространства, которое принято называть *горизонтальным.* Так как $\pi:\mathcal{E}\to\mathcal{B}$, то его дифференциал действует по формуле $\pi_*: T_p\mathcal{E}\to T_{\pi(p)}\mathcal{B}$. Как отмечалось выше, $\ker\pi_*=\mathcal{V}_p$. Что же касается $\mathcal{H}_p$, то $\pi_*\mathcal{H}_p$ изоморфно $T_{\pi(p)}\mathcal{B}$ в силу равенства размерностей. Так что можно считать, что $\pi_*\mathcal{H}_p =$

$T_{\pi(p)}\mathcal{B}$. Если поле горизонтальных подпространств выбрано, то для любого векторного поля $\tilde{X}$ на $\mathcal{E}$ имеет место единственное разложение $\tilde{X} = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2$, где $\tilde{X}_1 \in \mathcal{H}, \tilde{X}_2 \in \mathcal{V}$.

Набор горизонтальных подпространств образует n-мерное распределение на $\mathcal{E}$. Напомним, что *n-мерным распределением* на $n+m$-мерном многообразии $\mathcal{E}$ называется отображение $D : \mathcal{E} \to T\mathcal{E}$, ставящее в соответствие каждой точке $p \in \mathcal{E}$ некоторое n-мерное подпространство $D_p \in T_p\mathcal{E}$. Ясно, что каждое n-распределение определяется семейством n линейно независимых касательных векторных полей на $\mathcal{E}$, называемых *базисом распределения*. Распределение называется *гладким*, если в нем можно выбрать базис, состоящий из гладких векторных полей $X_1, \ldots, X_n$. Двойственным образом, n-мерное распределение можно задавать выбором m линейно независимых гладких 1-форм $\theta^1, \ldots, \theta^m$ как их общее ядро. То есть

$$\tilde{X} \in \mathcal{H} \;\Leftrightarrow\; \theta^\alpha(\tilde{X}) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

Два набора форм θ^i и $\bar{\theta}^i$ определяют одно и то же распределение, если в каждой точке $p \in \mathcal{E}$ эти наборы связаны соотношением $\bar{\theta}^\alpha = c^\alpha_\beta(p)\theta^\beta$, причем $(\det(c^\alpha_\beta(p)) \neq 0$.

Локальные координаты на $\mathcal{E}$ в тривиализующем атласе имеют вид

$$(u^1, \ldots, u^n; \xi^1, \ldots, \xi^m),$$

где $(u^1, \ldots, u^n)$ – локальные координаты точек базы, а $(\xi^1, \ldots, \xi^m)$ – координаты разложения вектора слоя по базису сечений. Обозначим через

$$\tilde{\partial}_i := \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad \tilde{\partial}_{n+\alpha} := \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \quad (i = 1, \ldots, n;\; \alpha = 1, \ldots, m)$$

координатные векторные поля, а через du^i, $d\xi^\alpha$ двойственные базисные формы. Тогда для набора форм θ^α, задающего горизонтальное распределение, имеет место разложение $\theta^\alpha = a^\alpha_\beta d\xi^\beta + b^\alpha_i du^i$. На любом вертикальном векторе $\tilde{X} = \tilde{X}^\alpha \tilde{\partial}_{n+\alpha}$ равенство система $\theta^\alpha(\tilde{X}) = 0$ имеет только тривиальное решение. Но $\theta^\alpha(\tilde{X}) = a^\alpha_\beta \tilde{X}^\beta$ в силу двойственности базисов и базисных форм. Поэтому $\det(a^\alpha_\beta) \neq 0$. Обозначим через c^β_α матрицу, обратную к матрице a^α_β. Тогда набор форм $\bar{\theta}^\beta = c^\beta_\alpha \theta^\alpha$ определяет тот же набор горизонтальных подпространств и имеет вид $\bar{\theta}^\beta = d\xi^\beta + G^\beta_i(u,\xi)du^i$. Ясно,что горизонтальное распределение гладко тогда и только тогда, когда гладки функции G^β_i.

Определение 5.7 *Гладкое распределение $\mathcal{H}$ на векторном расслоении $\mathcal{E}$ называется линейной связностью в векторном расслоении $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, если оно горизонтально и для каждой тривиализующей координатной окрестности $U \in \mathcal{B}$ оно задается набором форм*

$$\theta^\alpha = d\xi^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta i}\xi^\beta du^i, \tag{5.1}$$

где $\Gamma^\alpha_{\beta i}$ – некоторые гладкие функции на $\mathcal{B}$.

Функции $\Gamma^\alpha_{\beta i}$ называются коэффициентами (линейной) связности $\mathcal{H}$ над U. Так как du^i – координатные базисные формы на $\mathcal{B}$, то 1-формы на $\mathcal{B}$ $\omega^\alpha_\beta = \Gamma^\alpha_{\beta i}du^i$ называются *формами связности*. Ясно, что θ^α и ω^α_i друг друга определяют однозначно. Если функции $G^\beta_i(u,\xi)$ однородны по слоевой координате, то есть $G^\beta_i(u,\lambda\xi) = \lambda G^\beta_i(u,\xi)$, то связность называется *Финслеровой.*

Определение связности является локальным. Для глобализации связности необходимо согласовать наборы горизонтальных подпространств над пересекающимися окрестностями.

Предложение 5.8 *Гладкое распределение $\mathcal{H}$ на векторном расслоении $\mathcal{E}$, задаваемое формами* (5.1), *определяет глобальную связность в векторном расслоении $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, если на пересечении тривиализующих координатных* *окрестностей U и $\tilde{U}$ соответствующие формы связности ω и $\tilde{\omega}$ связаны соотношением $\varphi\omega = \tilde{\omega}\varphi + d\varphi$, где φ – соответствующая матрица склеивающего коцикла.*

Пусть $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ векторное расслоение со связностью.

Определение 5.9 *Гладкая регулярная кривая $\gamma : I \to \mathcal{E}$, где $I \subset \mathbb{R}$ некоторый отрезок числовой прямой, называется*

- *горизонтальной, если $\dot{\gamma} \in \mathcal{H}_{\gamma(t)}$;*
- *вертикальной, если $\dot{\gamma} \in \mathcal{V}_{\gamma(t)}$*

для любого $t \in I$, где $\dot{\gamma}$ – касательный вектор кривой $\gamma(t)$.

В координатах (u, ξ) над тривиализующей окрестностью уравнение любой кривой $\gamma(t)$ имеет вид $u^i = u^i(t), \quad \xi^\alpha = \xi^\alpha(t)$. Ее касательный вектор в разложении по естественному координатному базису имеет вид

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{u}^i(t)\frac{\partial}{\partial u^i} + \dot{\xi}^\alpha(t)\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}.$$

Кривая будет вертикальной, если $\pi_*\dot{\gamma} = 0$, то есть, $u^i(t)$ есть постоянные функции. Иными словами, *вертикальные кривые – это кривые, лежащие в слоях расслоения.* Кривая будет горизонтальной, если

$$\theta^\alpha(\dot{\gamma}) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

где θ^α заданы формулами (5.1). Следовательно, горизонтальная кривая определяется системой уравнений

$$\dot{\xi}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta i}\xi^\beta \dot{u}^i = 0, \tag{5.2}$$

где коэффициенты связности ограничены на кривую $u(t)$. Заметим, что горизонтальная кривая в расслоении действительно определяет некоторую кривую на базе, так как если $\dot{u}^i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, то $\dot{\xi}^\alpha = 0$ для всех $\alpha = 1, \ldots, m$, а значит кривая $\gamma(t)$ не является регулярной.

Определение 5.10 *Для данной горизонтальной кривой $\gamma : I \to \mathcal{E}$, кривая $u : I \to \mathcal{B}$, определяемая формулой $u(t) = (\pi \circ \gamma)(t)$ называется проекцией горизонтальной кривой $\gamma(t)$.*

Говорят так же, что горизонтальная кривая $\gamma(t)$ *накрывает* кривую $u(t)$. Обратно, если задать регулярную кривую $u : I \to \mathcal{B}$, то задача Коши

$$\begin{cases} \dot{\xi}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta i} \xi^\beta \dot{u}^i = 0, \\ (u(t_0), \xi(t_0)) = (u_0, \xi_0) \end{cases}$$

для системы уравнений (5.2) получит единственное решение. Это означает, что *через данную точку $p_0 = (u_0, \xi_0) \in \mathcal{E}$ проходит единственная горизонтальная кривая, накрывающая данную регулярную кривую на базе, проходящую через точку $u_0 = \pi(p_0)$*. Очевидно, что не вертикальная кривая $\gamma : I \to \mathcal{E}$ имеет естественную интерпретацию, как векторное поле $\xi(t)$ вдоль кривой $u(t)$.

Пусть $\xi : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ гладкое сечение расслоения. Так как $\pi \circ \xi = id_{\mathcal{B}}$, то дифференциал ξ_* имеет максимальный ранг. Следовательно, образ $\xi(\mathcal{B})$ есть гладкое вложенное подмногообразие в $\mathcal{E}$. Если ξ – глобальное сечение, то $\xi(\mathcal{B})$ диффеоморфно $\mathcal{B}$. Подмногообразие $\xi(\mathcal{B})$ называется *секущей поверхностью* в $\mathcal{E}$. Обычно, сечения и секущие поверхности не различают.

Пусть X – векторное поле на $\mathcal{B}$ (сечение касательного расслоения $T\mathcal{B}$). Пусть $u(t)$ – его интегральная кривая, то есть $\dot{u}(t) = X_{u(t)}$. Пусть $\xi : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ – гладкое сечение. Тогда $(\xi \circ u)(t) = \xi(u(t))$ есть некоторая кривая на $\mathcal{E}$, проходящая через точку $p_0 = \xi(u(0))$. Через эту же точку проходит единственная накрывающая $u(t)$ горизонтальная кривая $\gamma(t)$. Если существует предел

$$\lim_{t\to 0}\frac{\xi(u(t))-\gamma(t)}{t} := (\nabla_X\xi)(0),$$

то он определяет некоторый вектор их слоя $\mathcal{F}_{u(0)}$, который называется *ковариантной производной сечения* ξ в точке $u(0)$ в направлении векторного поля X относительно заданной связности и обозначается $(\nabla_X\xi)(0)$. Так как начальная точка выбирается произвольно, то эта конструкция определяет отображение

$$\nabla_X\xi : \mathcal{B}\to\mathcal{F}_b, \quad b\to(\nabla_X\xi)(b).$$

Полученное сечение называется *ковариантной производной сечения* ξ *в точке в направлении касательного к базе векторного поля* X *относительно заданной связности и обозначается* $\nabla_X\xi$. Ковариантная производная гладкого сечения существует.

Предложение 5.11 *Для любого гладкого сечения расслоения* $(\mathcal{E},\pi,\mathcal{B})$ *и любого касательного векторного поля* X *на* $\mathcal{B}$ *существует* $\nabla_X\xi$*, причем относительно локального базиса сечений*

$$(\nabla_X\xi)^\alpha = \left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_{\beta i}\xi^\beta\right)X^i. \tag{5.3}$$

Ясно, что ковариантное дифференцирование понижает класс гладкости сечения на единицу. Производная $\nabla_i\xi := \nabla_{\partial_i}\xi$ называется *частной ковариантной производной.*

Пусть $\xi : \mathcal{B}\to\mathcal{E}$ – гладкое сечение. Обозначим через $\mathfrak{X}(\mathcal{B})$ множество гладких касательных векторных полей на $\mathcal{B}$, а через $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ – множество гладких сечений расслоения. Введем в рассмотрение отображение Γ : $\mathfrak{S}(\mathcal{B})\times\mathfrak{X}(\mathcal{B})\to\mathfrak{S}(\mathcal{B})$, действующее по правилу: $\Gamma(\xi,X) = \Gamma^\alpha_{\beta i}\xi^\beta X^i s_\alpha$. Очевидно, это отображение линейно по каждому аргументу и, если ввести обозначение $\partial_X\xi := X^i\partial_i\xi^\alpha s_\alpha$, то $\nabla_X\xi = \partial_X\xi + \Gamma(\xi, X)$. Отображение $\mathcal{R}$: $\mathfrak{X}(\mathcal{B})\times\mathfrak{X}(\mathcal{B})\times\mathfrak{S}(\mathcal{B})\to\mathfrak{S}(\mathcal{B})$, заданное в терминах коэффициентов связности формулой

$$\mathcal{R}(X,Y)\xi = (\partial_X\Gamma)(\xi,Y) - (\partial_Y\Gamma)(\xi,X) + \Gamma(\Gamma(\xi,Y),X) - \Gamma(\Gamma(\xi,X),Y)$$

является линейным по каждому аргументу и полученное сечение называется *вектором кривизны связности.* В выражении через ковариантные производные сечений вектор кривизны расслоения выражается формулой

$$\mathcal{R}(X,Y)\xi = \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi.$$

Чтобы получить выражение этого вектора в локальных координатах, положим $X = \partial_i,\ Y = \partial_j,\ \xi = s_\beta$. Тогда $[X,Y] = 0$ и мы получаем

$$\mathcal{R}(\partial_i,\partial_j)s_\beta = (\partial_i\Gamma^\alpha_{\beta j} - \partial_j\Gamma^\alpha_{\beta i} + \Gamma^\alpha_{\sigma i}\Gamma^\sigma_{\beta j} - \Gamma^\alpha_{\sigma j}\Gamma^\sigma_{\beta i})s_\alpha.$$

Набор функций $\mathcal{R}^\alpha_{\beta ij} = \partial_i\Gamma^\alpha_{\beta j} - \partial_j\Gamma^\alpha_{\beta i} + \Gamma^\alpha_{\sigma i}\Gamma^\sigma_{\beta j} - \Gamma^\alpha_{\sigma j}\Gamma^\sigma_{\beta i}$ образует тензор, который называется *тензором кривизны* связности векторного расслоения $\mathcal{E}$.

5.2. Отображение связности. Лифты касательных векторных полей и сечений

Пусть $(\mathcal{E},\pi,\mathcal{B})$ гладкое векторное расслоение со связностью $\mathcal{H}$. Рассмотрим касательное пространство к $\mathcal{E}$ в произвольной точке $p\in\mathcal{E}$. Пусть $\tilde{X}\in T_p\mathcal{E}$. В индуцированных локальных координатах (u,ξ)

$$\tilde{X} = \tilde{X}^i\tilde{\partial}_i + \tilde{X}^{n+\alpha}\tilde{\partial}_{n+\alpha}.$$

Проекция $\tilde{X}$ на $\mathcal{H}$ определяется из уравнений $\theta^\alpha(\tilde{X}) = \tilde{X}^{n+\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta i}\xi^\beta\tilde{X}^i = 0$. Таким образом, $\tilde{X}\in\mathcal{H}$, если $\tilde{X}^{n+\alpha} = -\Gamma^\alpha_{\beta i}\xi^\beta\tilde{X}^i$. Перепишем разложение $\tilde{X}$ в виде

$$\tilde{X} = \underbrace{\tilde{X}^i\partial_i - (\Gamma^\alpha_{\beta i}\xi^\beta\tilde{X}^i)\,\tilde{\partial}_{n+\alpha}}_{\in\mathcal{H}} + \underbrace{(\tilde{X}^{n+\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta i}\xi^\beta\tilde{X}^i)\,\tilde{\partial}_{n+\alpha}}_{\in\mathcal{V}} = \tilde{X}_h + \tilde{X}_v. \qquad (5.4)$$

Это разложение адаптировано к выбору горизонтального распределения. Его вертикальная составляющая $\tilde{X}_v = (\tilde{X}^{n+\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta i}\xi^{\beta}\tilde{X}^i)\tilde{\partial}_{n+\alpha}$ касательна к слою в точке $p = (u, \xi)$, а горизонтальная $\tilde{X}_h = \tilde{X}^i\tilde{\partial}_i - (\Gamma^{\alpha}_{\beta i}\xi^{\beta}\tilde{X}^i)\,\tilde{\partial}_{n+\alpha}$ трансверсальна слою. Имеет место естественный изоморфизм $\mathcal{F}_u \approx T_{(u,\xi)}\mathcal{F}$, определяемый структурой слоя. А именно, пусть $(u_0^1, \ldots, u_0^n; \xi^1, \ldots, \xi^m)$. – параметрическое уравнение слоя. Напомним, что $(\xi^1, \ldots, \xi^m)$ – координаты разложения вектора ξ по базису сечений. Тогда

$$\partial_{n+1} = \{1, 0, \ldots, 0\}, \partial_{n+2} = \{0, 1, \ldots, 0\}, \quad \partial_{n+m} = \{0, 0, \ldots, 1\}$$

и, так как слой – линейное пространство $\mathbb{R}^m$, то эти векторы отождествляются с векторами базиса $\mathcal{F}_{u_0}$, то есть векторами базиса сечений. Таким образом, разложение (5.4) определяет послойно-линейное отображение

$$\mathcal{K} : T_p\mathcal{E} \to \mathcal{F}_{\pi(p)}, \qquad \mathcal{K}(\tilde{X}) = (\tilde{X}^{n+\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta i}\xi^{\beta}\tilde{X}^i)s_{\alpha}.$$

Это отображение называется *отображением связности*. Следующее утверждение проясняет геометрический смысл отображения связности.

Предложение 5.12 *Пусть $\xi : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ гладкое сечение гладкого векторного расслоения $(\mathcal{E}, \pi, B)$ со связностью. Тогда $\mathcal{K}(\xi_* X) = \nabla_X \xi$ для любого векторного поля X на $\mathcal{B}$.*

Таким образом, для любого гладкого векторного расслоения со связностью определены два послойно-линейных отображения

$$\pi_* : T_p\mathcal{E} \to T_{\pi(p)}\mathcal{B}, \qquad \mathcal{K} : T_p\mathcal{E} \to \mathcal{F}_{\pi(p)},$$

обладающие следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &\pi_*(\mathcal{V}_p) = 0, && \pi_*(\mathcal{H}_p) = T_{\pi(p)}\mathcal{B}, \\ &\mathcal{K}(\mathcal{V}_p) = \mathcal{F}_{\pi(p)}, && \mathcal{K}(\mathcal{H}_p) = 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Следует отметить, что для векторного поля $\tilde{X}_{(u,\xi)}$ на $\mathcal{E}$ его горизонтальная

$$X_h := \pi_*(\tilde{X}) = \pi_*(\tilde{X}_h) = \tilde{X}^i_{(u,\xi)}\partial_i,$$

и вертикальная проекции

$$X_v := \mathcal{K}(\tilde{X}) = \mathcal{K}(\tilde{X}_v) = (\tilde{X}^{n+\alpha}_{(u,\xi)} + \Gamma^\alpha_{\beta i}(u)\xi^\beta \tilde{X}^i_{(u,\xi)})s_\alpha$$

не являются в общем случае, соответственно, касательным векторным полем на $\mathcal{B}$ и сечением расслоения.

Пусть теперь $X_u = X^i_u\partial_i \in T_u\mathcal{B}$ и $\eta_u = \eta^\alpha_u s_\alpha \in \mathcal{F}_u$. Определим касательные векторы $X^h_{(u,\xi)}, \eta^v_{(u,\xi)} \in T_{(u,\xi)}\mathcal{E}$ формулами

$$X^h_{(u,\xi)} = X^i_u\tilde{\partial}_i - (\Gamma^\alpha_{\beta i}(u)\xi^\beta X^i_u)\tilde{\partial}_{n+\alpha}, \quad \eta^v_{(u,\xi)} = \eta^\alpha_u\tilde{\partial}_{n+\alpha}.$$

Тогда, очевидно, $X^h_{(u,\xi)} \in \mathcal{H}_{(u,\xi)}$, $\eta^v_{(u,\xi)} \in \mathcal{V}_{(u,\xi)}$. Вектор $X^h_{(u,\xi)}$ называется *горизонтальным лифтом вектора* $X_u \in T_u\mathcal{B}$ в точку $(u,\xi) \in \mathcal{E}$, а вектор $\eta^v_{(u,\xi)}$ называется *вертикальным лифтом вектора* $\eta_u \in \mathcal{F}_u$ в точку $(u,\xi) \in \mathcal{E}$.

Если X – касательное гладкое векторное поле на $\mathcal{B}$ и η – гладкое сечение, то очевидно, что координатные функции лифтов в каждую точку $p \in \mathcal{E}$ являются гладкими функциями по u и линейными, а значит гладкими, функциями по ξ. Значит

$$X^h := X^i\tilde{\partial}_i - (\Gamma^\alpha_{\beta i}\xi^\beta X^i)\tilde{\partial}_{n+\alpha}, \quad \eta^v := \eta^\alpha\tilde{\partial}_{n+\alpha}$$

являются гладкими векторными полями на $\mathcal{E}$, которые называются, соответственно, *горизонтальным лифтом касательного векторного поля* X и *вертикальным лифтом сечения* η. Следует помнить, что в этих формулах $X^i, \Gamma^\alpha_{\beta i}$ и η^α являются функциями от локальных координат на базе, а ξ^β – независимые переменные. Непосредственно из определений следует, что

$$\pi_*(X^h) = X, \quad \mathcal{K}(X^h) = 0,$$

$$\pi_*(\eta^v) = 0, \quad \mathcal{K}(\eta^v) = \eta.$$

Лифты векторных полей и сечений являются относительно простыми векторными полями на $\mathcal{E}$. Их важность состоит в следующем.

Предложение 5.13 *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – линейно независимые касательные векторные поля на $\mathcal{B}$ и $\eta_1, \ldots, \eta_m$ – линейно независимые сечения векторного расслоения $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$. Тогда $X_1^h, \ldots, X_n^h$; $\quad \eta_1^v, \ldots, \eta_m^v$ линейно независимые векторные поля на $\mathcal{E}$.*

Данное утверждение позволяет выбирать на векторном расслоении лифты векторных полей и сечений для изучения внутренней геометрии расслоения. Следует, однако, иметь ввиду, что геометрия подмногообразий в расслоении не может быть построена исключительно на лифтах, так как лифтами не исчерпывается все множество векторных полей на $\mathcal{E}$.

Так же как и в случае касательного расслоения, имеется некоторая специфика вычисления лифтов сечений векторного расслоения и сечений касательного расслоения базы в касательное пространство расслоения, заданных тензорными полями. Так, например, если $\mathcal{R}$ – тензор кривизны связности расслоения, то для заданной точки $(u, \xi) \in \mathcal{E}$ нельзя определить вертикальный лифт $(\mathcal{R}(X, Y)\xi)^v$, так как в этом случае $\mathcal{R}(X, Y)\xi$ не является сечением расслоения ввиду того, что ξ фиксированный вектор слоя. Однако, для каждого из сечений выбранного базиса сечений определен набор лифтов $(\mathcal{R}(X, Y)s_\alpha)^v$. Положим по определению

$$(\mathcal{R}(X, Y)\xi)^v_{(u,\xi)} := \xi^\alpha (\mathcal{R}(X, Y)s_\alpha)^v.$$

Аналогичное соглашение мы принимаем и для других тензорных полей.

Лемма 5.14 *Пусть X^h, Y^h и η^v, ζ^v лифты векторных полей X, Y и сечений η, ζ в касательное пространство расслоения $\mathcal{E}$. Тогда для коммутаторов* *этих лифтов в точку* $p = (u, \xi)$ *имеют место формулы*

$$[X^h, Y^h]_p = [X, Y]^h_p - (\mathcal{R}(X, Y)\xi)^v_p, \quad [X^h, \eta^v]_p = (\nabla_X \eta)^v_p,$$

$$[\eta^v, \zeta^v]_p = 0.$$

Доказательство. Выполним простые непосредственные вычисления.

$$[X^h, Y^h] =$$

$$[X^i\tilde{\partial}_i - \Gamma^\alpha_{\beta k}\xi^\beta X^k\tilde{\partial}_{n+\alpha}, Y^s\tilde{\partial}_s - \Gamma^\sigma_{\mu j}\xi^\mu Y^j\tilde{\partial}_{n+\sigma}] = X^i\partial_i Y^s\tilde{\partial}_s - Y^s\partial_s X^i\tilde{\partial}_i -$$
$$X^i\tilde{\partial}_i(\Gamma^\sigma_{\mu j}\xi^\mu Y^j)\tilde{\partial}_{n+\sigma} + Y^s\tilde{\partial}_s(\Gamma^\alpha_{\beta k}\xi^\beta X^k)\tilde{\partial}_{n+\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta k}\xi^\beta X^k\Gamma^\sigma_{\alpha j}Y^j\tilde{\partial}_{n+\sigma} +$$
$$\Gamma^\sigma_{\mu j}\xi^\mu Y^j\Gamma^\alpha_{\mu k}X^k\tilde{\partial}_{n+\alpha} =$$
$$[X, Y]^i\tilde{\partial}_i - \Gamma^\sigma_{\mu j}\xi^\mu[X, Y]^j\tilde{\partial}_{n+\sigma} - (\partial_i\Gamma^\alpha_{\beta k} - \partial_k\Gamma^\alpha_{\beta i} + \Gamma^\alpha_{\sigma i}\Gamma^\sigma_{\beta k} - \Gamma^\alpha_{\sigma k}\Gamma^\sigma_{\beta i})X^iY^k\xi^\beta\tilde{\partial}_{n+\alpha}.$$

Следовательно,

$$[X^h, Y^h] = [X, Y]^h - (\mathcal{R}(X, Y)\xi)^v.$$

Далее,

$$[X^h, \eta^v] =$$
$$[X^i\tilde{\partial}_i - \Gamma^\alpha_{\beta k}\xi^\beta X^k\tilde{\partial}_{n+\alpha}, \eta^\sigma\tilde{\partial}_{n+\sigma}] = X^i\partial_i\eta^\sigma\tilde{\partial}_{n+\sigma} + \Gamma^\alpha_{\sigma k}\eta^\sigma X^k\tilde{\partial}_{n+\alpha} = (\nabla_X\eta)^v.$$

Наконец,

$$[\eta^v, \zeta^v] = [\eta^\alpha\tilde{\partial}_{n+\alpha}, \zeta^\beta\tilde{\partial}_{n+\beta}] = 0,$$

что и завершает доказательство.

■

В качестве простого следствия доказанного утверждения, отметим, что *горизонтальное распределение интегрируемо тогда и только тогда, когда связность в расслоении плоская.*

5.3. Метрика типа Сасаки на векторном расслоении.

Определение 5.15 *Послойной метрикой в векторном расслоении* $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ *называется непрерывная функция* $Q : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$, *ограничение которой на каждый слой является положительно определенной квадратичной формой. Если* Q *гладкая функция, то и метрика называется гладкой.*

Это метрика задана на слоях $\mathcal{E}$, но не $\mathcal{E}$ как гладком многообразии. В дальнейшем, ограничение метрики на слой $Q|_{\mathcal{F}}$ будем обозначать $g^{\mathcal{F}}$. Квадратичная форма $g^{\mathcal{F}}$ определяет в каждом слое скалярное произведение $g^{\mathcal{F}}(\xi, \eta) \in \mathbb{R}$ вида

$$g^{\mathcal{F}}(\xi, \eta) = g^{\mathcal{F}}_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha}\eta^{\beta},$$

где $g^{\mathcal{F}}_{\alpha\beta} : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ – гладкие функции. Наличие послойной метрики естественным образом определяет угол между двумя сечениями и длину (модуль) сечения.

Определение 5.16 *Связность в векторном расслоении* $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ *называется согласованной с послойной метрикой, если*

$$\partial_X g^{\mathcal{F}}(\xi, \eta) = g^{\mathcal{F}}(\nabla_X \xi, \eta) + g^{\mathcal{F}}(\xi, \nabla_X \eta),$$

для любых двух сечений ξ, η, *где* $\partial_X g^{\mathcal{F}}(\xi, \eta)$ *– производная функции* $g^{\mathcal{F}}(\xi, \eta)$ *по направлению векторного поля* X.

Если $\mathcal{B}$ – риманово многообразие, то в его касательном расслоении имеется другая послойная метрика, которую мы будем обозначать через $g^{\mathcal{B}}$. Связность в расслоении $\mathcal{E}$ не имеет отношения к римановой метрике на базе. Риманова связность для $g^{\mathcal{B}}$ не имеет связи со связностью в расслоении $\mathcal{E}$.

Наличие послойной метрики и римановой метрики на базе позволяет определить риманову метрику на расслоении $\mathcal{E}$ некоторым естественным образом. А именно, пусть $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ – два векторных поля на $\mathcal{E}$. Рассмотрим в точке $p=(u,\xi)$ проекции

$$X_h=\pi_*(\tilde{X}),\quad X_v=\mathcal{K}(\tilde{X}),\qquad Y_h=\pi_*(\tilde{Y}),\quad Y_v=\mathcal{K}(\tilde{X}).$$

Поскольку $(X_h,Y_h)\in T_u\mathcal{B}$ и $(X_v,Y_v)\in\mathcal{F}_u$, то определены скалярные произведения $g_u^{\mathcal{B}}(X_h,Y_h),\quad g_u^{\mathcal{F}}(X_v,Y_v)$. Определим скалярное произведение $\tilde{g}(\tilde{X},\tilde{Y})$ формулой

$$\tilde{g}_p(\tilde{X},\tilde{Y})=g^{\mathcal{B}}_{\pi(p)}(\pi_*\tilde{X},\pi_*\tilde{Y})+g^{\mathcal{F}}_{\pi(p)}(\mathcal{K}\tilde{X},\mathcal{K}\tilde{Y})=g_u^{\mathcal{B}}(X_h,Y_h)+g_u^{\mathcal{F}}(X_v,Y_v). \quad (5.6)$$

Скалярному произведению (5.6) отвечает риманова метрика на $\mathcal{E}$, которую мы будем называть *метрикой типа Сасаки на векторном расслоении.* Относительно этой метрики, горизонтальное и вертикальное подпространства взаимно ортогональны.

Лемма 5.17 *Обозначим связность Леви-Чивита метрики Сасаки на $\mathcal{E}$ через $\tilde{\nabla}$. Тогда для производных комбинаций лифтов касательных векторных полей и сечений имеют место формулы*

$$\tilde{\nabla}_{X^h}Y^h=(\nabla^{\mathcal{B}}_XY)^h-\left(\tfrac{1}{2}\mathcal{R}(X,Y)\xi\right)^v,\quad \tilde{\nabla}_{X^h}\eta^v=(\nabla_X\eta)^v+\left(\tfrac{1}{2}\hat{\mathcal{R}}(\xi,\eta)X\right)^h,$$

$$\tilde{\nabla}_{\eta^v}Y^h=\left(\tfrac{1}{2}\hat{\mathcal{R}}(\xi,\eta)Y\right)^h,\qquad\qquad \tilde{\nabla}_{\eta^v}\zeta^v=0,$$

где $\mathcal{R}:\mathfrak{X}(B)\times\mathfrak{X}(B)\times\mathfrak{S}(\mathcal{B})\to\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ – тензор кривизны связности расслоения и $\hat{\mathcal{R}}:\mathfrak{S}(\mathcal{B})\times\mathfrak{S}(\mathcal{B})\times\mathfrak{X}(B)\to\mathfrak{X}(\mathcal{B})$ его сопряженный, определяемый формулой $g^{\mathcal{B}}(\hat{\mathcal{R}}(\xi,\eta)X,Y)=g^{\mathcal{F}}(\mathcal{R}(X,Y)\xi,\eta)$.

Доказательство. По формуле Кошуля, для X^h и Y^h имеем

$$2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^h, Z^h) =$$
$$X^h g(Y,Z) + Y^h g(X,Z) - Z^h g(X,Y) - \tilde{g}(X^h, [Y^h, Z^h]) - \tilde{g}(Y^h, [X^h, Z^h]) +$$
$$\tilde{g}(Z^h, [X^h, Y^h]) =$$
$$Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Z(X,Y) - g(X,[Y,Z]) - g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y]) =$$
$$2g(\nabla^{\mathcal{B}}_X Y, Z) = 2\tilde{g}((\nabla^{\mathcal{B}}_X Y)^h, Z^h);$$

$$2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^h, \eta^v) = -\eta^v g(X,Y) - \tilde{g}(X^h, [Y^h, \eta^v]) - \tilde{g}(Y^h, [X^h, \eta^v]) +$$
$$\tilde{g}(\eta^v, [X^h, Y^h]) = -g^{\mathcal{F}}(R(X,Y)\xi, \eta) = -\tilde{g}((\mathcal{R}(X,Y)\xi)^h, \eta^v).$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{\nabla}_{X^h}Y^h = (\nabla^{\mathcal{B}}_X Y)^h - \frac{1}{2}\big(\mathcal{R}(X,Y)\xi\big)^v.$$

Для X^h и η^v имеем

$$2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h}\eta^v, Z^h) = \eta^v g(X,Z) - \tilde{g}(X^h, [\eta^v, Z^h]) - \tilde{g}(\eta^v, [X^h, Z^h]) +$$
$$\tilde{g}(Z^h, [X^h, \eta^v]) = g^{\mathcal{F}}(\mathcal{R}(X,Z)\xi, \eta) = g(\hat{\mathcal{R}}(\xi,\eta)X, Z) = \tilde{g}((\hat{\mathcal{R}}(\xi,\eta)X)^h, Z^h);$$

$$2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h}\eta^v, \zeta^v) = X^h g^{\mathcal{F}}(\eta,\zeta) - \tilde{g}(\eta^v, [X^h, \zeta^v]) + \tilde{g}(\zeta^v, [X^h, \eta^v]) =$$
$$g^{\mathcal{F}}(\nabla^{\mathcal{F}}_X\eta, \zeta) + g^{\mathcal{F}}(\eta, \nabla^{\mathcal{F}}_X\zeta) - g^{\mathcal{F}}(\eta, \nabla^{\mathcal{F}}_X\zeta) + g^{\mathcal{F}}(\nabla^{\mathcal{F}}_X\eta, \zeta)$$
$$= 2g^{\mathcal{F}}(\nabla^{\mathcal{F}}_X\eta, \zeta) = 2g^{\mathcal{F}}((\nabla^{\mathcal{F}}_X\eta)^v, \zeta^v).$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{\nabla}_{X^h}\eta^v = (\nabla^{\mathcal{F}}_X\eta)^v + \frac{1}{2}\big(\hat{\mathcal{R}}(\xi,\eta)X\big)^h.$$

Для η^v и Y^h имеем

$$2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\eta^v}Y^h, Z^h) = \eta^v g(Y,Z) - \tilde{g}(\eta^v, [Y^h, Z^h]) - \tilde{g}(Y^h, [\eta^v, Z^h]) + \tilde{g}(Z^h, [\eta^v, Y^h]) = g^{\mathcal{B}}(\mathcal{R}(Y,Z)\xi, \eta) = g(\hat{\mathcal{R}}(\xi,\eta)Y, Z) = \tilde{g}((\hat{\mathcal{R}}(\xi,\eta)Y)^h, Z^h);$$

$$2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\eta^v}Y^h, \zeta^v) = Y^h g^{\mathcal{B}}(\eta,\zeta) - \tilde{g}(\eta^v, [Y^h, \zeta^v]) - \tilde{g}(Y^h, [\eta^h, \zeta^v]) + \tilde{g}(\zeta^v, [\eta^v, Y^h]) = g^{\mathcal{B}}(\nabla_Y\eta, \zeta) + g^{\mathcal{B}}(\eta, \nabla_Y\zeta) - g^{\mathcal{B}}(\nabla_Y\zeta, \eta) - g^{\mathcal{B}}(\nabla_Y\eta, \zeta) = 0$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{\nabla}_{\eta^v}Y^h = \frac{1}{2}\big(\hat{\mathcal{R}}(\xi,\eta)Y\big)^h.$$

Для η^v и ζ^v вычисления тривиальны.

■

Непосредственно из полученных формул следует, что

Следствие 5.18 *Относительно метрики типа Сасаки на векторном расслоении* $\mathcal{E}$

- *слои расслоения* $\mathcal{E}$ *являются вполне геодезическими подмногообразиями;*
- *связность, индуцированная на слоях связностью* $\mathcal{E}$*, является плоской;*
- *нормальная связность слоя определяется тензором* $\hat{\mathcal{R}}(\xi,\eta)X$*;*
- *горизонтальное распределение* $\mathcal{H}$ *является вполне геодезическим.*

Используя Леммы 5.14 и 5.17, нетрудно сосчитать оператор кривизны расслоения с метрикой Сасаки.

Лемма 5.19 *Обозначим через* $\tilde{R}$ *тензор кривизны метрики типа Сасаки на* $\mathcal{E}$*. Тогда, на комбинациях лифтов в точку* $p = (u, \xi) \in \mathcal{E}$*, тензор* $\tilde{R}$ *определяется следующими формулами:*

$$\tilde{R}(\eta^v, \zeta^v)\chi^v = 0,$$

$$\tilde{R}(\eta^v, \zeta^v)Z^h = \Big(\hat{\mathcal{R}}(\eta, \zeta)Z + \tfrac{1}{4}\hat{\mathcal{R}}(\xi, \eta)\hat{R}(\xi, \zeta)Z - \tfrac{1}{4}\hat{\mathcal{R}}(\xi, \zeta)\hat{\mathcal{R}}(\xi, \eta)Z\Big)^h,$$

$$\tilde{R}(X^h, \zeta^v)\chi^v = -\Big(\tfrac{1}{2}\hat{\mathcal{R}}(\zeta, \chi)X + \tfrac{1}{4}\hat{\mathcal{R}}(\xi, \zeta)\hat{\mathcal{R}}(\xi, \chi)X\Big)^h,$$

$$\tilde{R}(X^h, \zeta^v)Z^h = \Big(\tfrac{1}{2}\mathcal{R}(X, Z)\zeta + \tfrac{1}{4}\mathcal{R}(\hat{R}(\xi, \zeta)Z, X)\xi\Big)^v + \Big(\tfrac{1}{2}(D_X\hat{\mathcal{R}})(\xi, \zeta)Z\Big)^h,$$

$$\tilde{R}(X^h, Y^h)\chi^v = \Big(\mathcal{R}(X, Y)\chi + \tfrac{1}{4}\mathcal{R}(\hat{\mathcal{R}}(\xi, \chi)Y, X)\xi - \tfrac{1}{4}\mathcal{R}(\hat{\mathcal{R}}(\xi, \chi)X, Y)\xi\Big)^v +$$
$$\tfrac{1}{2}\Big((D_X\hat{\mathcal{R}})(\xi, \chi)Y - (D_Y\hat{\mathcal{R}})(\xi, \chi)X\Big)^h,$$

$$\tilde{R}(X^h, Y^h)Z^h = \Big(R^{\mathcal{B}}(X, Y)Z + \tfrac{1}{4}\hat{\mathcal{R}}(\xi, \mathcal{R}(X, Z)\xi)Y - \tfrac{1}{4}\hat{\mathcal{R}}(\xi, \mathcal{R}(Y, Z)\xi)X +$$
$$\tfrac{1}{2}\hat{\mathcal{R}}(\xi, \mathcal{R}(X, Y)\xi)Z\Big)^h + \Big(\tfrac{1}{2}(D_Z\mathcal{R})(X, Y)\xi\Big)^v,$$

где мы обозначили через $R^{\mathcal{B}}$ *– тензор кривизны римановой связности на базе и*

$$(D_X\hat{\mathcal{R}})(\xi, \eta)Z := \nabla^{\mathcal{B}}_X\Big(\hat{\mathcal{R}}(\xi, \eta)Z\Big) - \hat{\mathcal{R}}(\xi, \nabla_X\eta)Z - \hat{\mathcal{R}}(\xi, \eta)\nabla^{\mathcal{B}}_X Z,$$

$$(D_Z\mathcal{R})(X, Y)\xi := \nabla_Z\Big(\mathcal{R}(X, Y)\xi\Big) - \mathcal{R}(\nabla^{\mathcal{B}}_Z X, Y)\xi - \mathcal{R}(X, \nabla^{\mathcal{B}}_Z Y)\xi.$$

Доказательство. Например, вычислим $\tilde{\nabla}_{\eta^v}(R(X, Y)\xi)^v$. Имеем,

$$\tilde{\nabla}_{\eta^v}(R(X, Y)\xi)^v =$$
$$\eta^\sigma\partial_{n+\sigma}\Big(\xi^\beta(R(X, Y)s_\beta)^v\Big) + \xi^\beta\nabla_{\eta^v}\Big(R(X, Y)s_\beta\Big)^v = \Big(R(X, Y)\eta\Big)^v.$$

С учетом этого, в точке $p = (u, \xi)$ результаты вычислений для одной из компонент будут следующие.

$$\tilde{R}(X^h, \eta^v)Z^h = \tilde{\nabla}_{X^h}\tilde{\nabla}_{\eta^v}Z^h - \tilde{\nabla}_{\eta^v}\tilde{\nabla}_{X^h}Z^h - \tilde{\nabla}_{[X^h,\eta^v]}Z^h =$$
$$\tilde{\nabla}_{X^h}\Big(\frac{1}{2}\hat{R}(\xi,\eta)Z\Big)^h - \tilde{\nabla}_{\eta^v}\Big((\nabla^{\mathcal{B}}_X Z)^h - \big(\frac{1}{2}R(X,Z)\xi\big)^v\Big) - \tilde{\nabla}_{(\nabla_X\eta)^v}Z^h =$$
$$\frac{1}{2}\Big(\nabla^{\mathcal{B}}_X\big(\hat{R}(\xi,\eta)Z\big)\Big)^h - \frac{1}{4}\Big(R(X,\hat{R}(\xi,\eta)Z)\xi\Big)^v - \frac{1}{2}\Big(\hat{R}(\xi,\eta)\nabla^{\mathcal{B}}_X Z\Big)^h -$$
$$\frac{1}{2}\Big(\hat{R}(\xi,\nabla_X\eta)Z\Big)^h + \frac{1}{2}\Big(R(X,Z)\eta\Big)^v = \Big(\frac{1}{2}R(X,Z)\eta + \frac{1}{4}R(\hat{R}(\xi,\eta)Z,X)\xi\Big)^v +$$
$$\frac{1}{2}\Big(\nabla^{\mathcal{B}}_X\big(\hat{R}(\xi,\eta)Z\big) - \hat{R}(\xi,\nabla_X\eta)Z - \hat{R}(\xi,\eta)\nabla^{\mathcal{B}}_X Z\Big)^h.$$

Следовательно, в точке $p = (u, \xi)$ имеем

$$\tilde{R}(X^h, \eta^v)Z^h = \Big(\frac{1}{2}R(X,Z)\eta + \frac{1}{4}R(\hat{R}(\xi,\eta)Z,X)\xi\Big)^v + \frac{1}{2}\Big(\big(D_X\hat{R}\big)(\xi,\eta)Z\Big)^h$$

Остальные формулы получаются аналогичным образом.

$\blacksquare$

Из приведенных формул видно, что внутренняя геометрия расслоения определяется в основном кривизной связности в расслоении и лишь незначительно кривизной базового многообразия.

Пусть $(\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ векторное расслоение с послойной метрикой $g^{\mathcal{F}}$. Гиперповерхность в $\mathcal{E}$, заданная уравнением $g^{\mathcal{F}}(\xi,\xi) = r^2$, является подрасслоением векторного расслоения $\mathcal{E}$ с той же базой и проекцией, но со слоем, изометричным сфере радиуса r. Эта гиперповерхность называется *сферическим расслоением* над $\mathcal{B}$ и обозначается $(\mathcal{E}_r, \pi, \mathcal{B})$ или $\mathcal{E}_r$ для краткости.

Метрика типа Сасаки на $\mathcal{E}$ индуцирует метрику на $\mathcal{E}_r$, которая так же называется метрикой типа Сасаки на $\mathcal{E}_r$. Поле единичных нормалей для $\mathcal{E}_r \subset \mathcal{E}$ составляет векторное поле $\frac{1}{r}\xi^v$. Ввиду вертикальности поля нормалей, горизонтальные распределения на $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_1$ совпадают. Что же касается вертикального распределения, то оно послойно ортогонально вектору ξ^v. Это наблюдение позволяет определить тангенциальный лифт сечения $\eta : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$

формулой

$$\eta^{tg} = \eta^v - \frac{1}{r^2} g^{\mathcal{F}}(\eta,\xi)\xi^v. \tag{5.7}$$

По существу это означает, что для корректного вертикального поднятия сечения в касательное пространство к $\mathcal{E}_r$ следует брать ортогональную составляющую вектора сечения по отношению к "точке" ξ. Используя Лемму 5.17 легко проверить следующее утверждение

Лемма 5.20 *Обозначим риманову связность метрики Сасаки на $\mathcal{E}_r$ через $\bar\nabla$. Тогда для производных комбинаций лифтов касательных векторных полей и сечений имеют место формулы*

$$\bar\nabla_{X^h}Y^h = (\nabla^{\mathcal{B}}_X Y)^h - \left(\tfrac{1}{2}R(X,Y)\xi\right)^{tg}, \quad \bar\nabla_{\eta^{tg}}Y^h = \left(\tfrac{1}{2}\hat R(\xi,\eta)Y\right)^h,$$

$$\bar\nabla_{X^h}\eta^{tg} = (\nabla_X\eta)^{tg} + \left(\tfrac{1}{2}\hat R(\xi,\eta)X\right)^h, \quad \bar\nabla_{\eta^{tg}}\zeta^{tg} = -g^{\mathcal{F}}(\zeta,\xi)\eta^{tg}.$$

5.4. Минимальные и вполне геодезические сечения расслоений.

Рассмотрим единичное сечение $\xi : \mathcal{B} \to \mathcal{E}_1$ как (локальное) вложение базы в $(\mathcal{E}_1, \tilde g)$.

Определение 5.21 *Пусть $(\mathcal{E}_1, \tilde g)$ единичное расслоение с метрикой типа Сасаки. Единичное сечение $\xi : \mathcal{B} \to (\mathcal{E}_1, \tilde g)$ называется минимальным, если $\xi(\mathcal{B})$ является минимальным подмногообразием. Единичное сечение $\xi : \mathcal{B} \to (\mathcal{E}_1, \tilde g)$ называется вполне геодезическим, если $\xi(\mathcal{B})$ является вполне геодезическим подмногообразием.*

Для данного единичного сечения ξ, его дифференциал $\xi_* : T\mathcal{B} \to T\mathcal{E}_1$ действует как

$$\xi_* X = X^h + (\nabla_X \xi)^v.$$

Определим аналог оператора Номидзу $A_\xi : T_u\mathcal{B} \to \mathcal{F}_u$ и его сопряженный $A^t_\xi : \mathcal{F}_u \to T_u\mathcal{B}$ формулами

$$A_\xi X = -\nabla_X \xi, \qquad g^{\mathcal{B}}(A^t_\xi \eta, X) = g^{\mathcal{F}}(A_\xi X, \eta).$$

Тогда ξ-касательные и ξ-нормальные отображения для $\xi(\mathcal{B})$ могут быть описаны следующим образом:

$$\xi_* : T\mathcal{B} \to T\xi(\mathcal{B}), \quad \xi_*(X) = X^h - (A_\xi X)^{tg};$$
$$\tilde{n} : \mathcal{F} \to T^\perp \xi(\mathcal{B}), \quad \tilde{n}(\eta) = (A^t_\xi \eta)^h + \eta^{\mathrm{tg}}$$

Введем также аналоги грубого гессиана и тензора гармоничности векторного поля для сечений единичного расслоения формулами:

$$\begin{aligned} Hess_\xi(X,Y) &= \tfrac{1}{2}\big((\nabla_X A_\xi)Y + (\nabla_Y A_\xi)X\big), \\ \Upsilon_\xi(X,Y) &= \tfrac{1}{2}\big(\hat{\mathcal{R}}(A_\xi X, \xi)Y + \hat{\mathcal{R}}(A_\xi Y, \xi)X\big). \end{aligned}$$

В этих терминах, аналогично случаю касательного расслоения, мы доказываем следующее утверждение.

Лемма 5.22 *Вторая фундаментальная форма $\xi(M) \subset (\mathcal{E}_1, \tilde{g})$ относительно произвольной нормали $\tilde{n}(\eta)$ имеет вид*

$$\tilde{\Omega}_{\tilde{n}(\eta)}(\xi_* X, \xi_* Y) = g^{\mathcal{F}}\big(Hess_\xi(X,Y) - A_\xi(\Upsilon_\xi(X,Y)), \eta'\big),$$

где $\eta' = \eta - g^{\mathcal{F}}(\eta,\xi)\xi$.

С очевидностью, условия вполне геодезичности для $\xi(M) \subset (\mathcal{E}_1, \tilde{g})$ принимает следующий вид.

Лемма 5.23 *Единичное сечение ξ расслоения $\mathcal{E}_1$ порождает вполне геодезическое подмногообразие $\xi(M^n) \subset (\mathcal{E}_1, \tilde{g})$ тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет системе уравнений*

$$Hess_\xi(X,Y) - A_\xi \Upsilon_\xi(X,Y) - g^{\mathcal{F}}(A_\xi X, A_\xi Y)\,\xi = 0 \tag{5.8}$$

для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{B})$.

Отсутствие связи между свойствами связности расслоения и римановой метрикой базы существенно обогащает геометрию расслоений и их сечений. Ниже мы иллюстрируем это утверждение простейшим не тривиальным случаем единичного расслоения, а именно, для $n = \dim \mathcal{B} = 2$ и $m = \dim \mathcal{F} = 2$. Для таких расслоения мы используем термин "*расслоение на окружности над поверхностью*". В частности, мы рассмотрим вопросы минимальности и вполне геодезичности сечений расслоения на окружности над поверхностью.

Теорема 5.24 *Пусть связность в расслоении $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ плоская. Если ξ единичное вполне геодезическое сечение расслоения на окружности над поверхностью, то*

- *ξ – параллельное единичное сечение в случае не плоской базы;*
- *ξ – единичное сечение с линейной угловой функцией относительно параллельного репера сечений в случае плоской базы.*

Доказательство. В случае *плоской связности* расслоения, обозначим через s_1 и s_2 единичные параллельные сечения. Тогда для любого единичного сечения ξ мы получаем выражение

$$\xi = \cos\theta\, s_1 + \sin\theta\, s_1,$$

где $\theta : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ некоторая гладкая функция. Обозначим $\xi^{\perp} = -\sin\theta\, s_1 + \cos\theta\, s_2$. Тогда $A_\xi X = -\nabla^{\mathcal{F}}_X \xi = -X(\theta)\xi^{\perp}, \quad \nabla^{\mathcal{F}}_X \xi^{\perp} = -X(\theta)\xi$ и следовательно

$$(\nabla^{\mathcal{F}}_X A_\xi)Y = \nabla^{\mathcal{F}}_X (A_\xi Y) - A_\xi(\nabla^{\mathcal{B}}_X Y) = -\nabla^{\mathcal{F}}_X (Y(\theta)\xi^{\perp}) + (\nabla^{\mathcal{B}}_X Y)(\theta)\xi^{\perp} = \\ -(XY)(\theta)\xi^{\perp} + X(\theta)Y(\theta)\xi + (\nabla^{\mathcal{B}}_X Y)(\theta)\xi^{\perp}.$$

Заметим, что $(XY)(\theta) = (\partial_X Y + \partial_{XY})\theta, \quad \nabla^{\mathcal{B}}_X Y(\theta) = (\partial_X Y + \Gamma^{\mathcal{B}}(X,Y))\theta$, а значит

$$(\nabla^{\mathcal{F}}_X A_\xi)Y = -(\partial_{XY} - \Gamma^{\mathcal{B}}(X,Y))(\theta)\xi^{\perp} + X(\theta)Y(\theta)\xi = \\ -\nabla^{\mathcal{B}}_X (d\theta)(Y)\xi^{\perp} + X(\theta)Y(\theta)\xi = (\nabla^{\mathcal{F}}_Y A_\xi)X.$$

В таком случае, уравнение (5.8) сводится к $-2\nabla^{\mathcal{B}}_X(d\theta)(Y)\xi^{\perp} = 0$. Поэтому, либо $d\theta = 0$, либо $d\theta$ есть не нулевая параллельная 1-форма на базовом многообразии. В первом случае ξ есть параллельное единичное сечение. Во втором случае базовое многообразие допускает параллельное касательное векторное поле (а именно, $\operatorname{grad}\theta$) и значит базовое многообразие плоское. Выбрав декартову прямоугольную систему координат на базе, мы видим, что θ есть линейная функция.

■

В случае *неплоской связности в расслоении*, введем в рассмотрение бисекционную кривизну связности в $\mathcal{E}$ формулой

$$\varkappa(X\wedge Y, \xi\wedge\eta) = \frac{g^{\mathcal{F}}\big(R^{\mathcal{F}}(X,Y)\xi,\eta\big)}{|X\wedge Y|_{\mathcal{B}}\cdot|\xi\wedge\eta|_{\mathcal{F}}},$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{B})$ и $\xi,\eta \in \mathfrak{S}(\mathcal{B})$. Очевидно, что для случая касательного расслоения это есть Гауссова кривизна поверхности, а для случая нормального расслоения это есть Гауссово кручение поверхности в римановом многообразии M^4. Если оба репера ортонормированы, то $\varkappa = g^{\mathcal{F}}\big(R^{\mathcal{F}}(X,Y)\xi,\eta\big)$.

Из соображений размерности, ядро A_ξ непусто. Обозначим $\mathcal{Z} = \ker A_\xi \subset \mathfrak{X}(\mathcal{B})$, $\quad \mathfrak{I} = \operatorname{im} A_\xi \subset \xi^\perp \subset \mathfrak{S}(\mathcal{B})$. Если $\mathcal{Z}_q = T_q\mathcal{B}$ для всех $q \in \mathcal{B}$, то значит связность в расслоении плоская. В общем случае, $T_q\mathcal{B} = \mathcal{Z}_q \oplus \mathcal{Z}_q^\perp$. Так что для данного сечения ξ мы имеем два взаимно дополнительных распределения $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}^\perp$ на $\mathcal{B}$. Следующее утверждение обобщает Лемму 4.7.

Лемма 5.25 *Пусть ξ единичное сечение расслоения на окружности $\pi : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{B}$ над поверхностью. Предположим, что связность в расслоении $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ не плоская. Тогда относительно ортонормированного репера (e_1, e_2) на базе такого, что $\mathcal{Z} = Span\,\{e_1\}$ и $\mathcal{Z}^\perp = Span\,\{e_2\}$, матрица второй фундаментальной формы $\tilde\Omega$ для $\xi(\mathcal{B}) \subset \mathcal{E}_1$ имеет вид*

$$\Omega = \begin{bmatrix} -k_1 \sin(\alpha/2) & \frac{1}{2}(e_1(\alpha) - \varkappa) \\ \frac{1}{2}(e_1(\alpha) - \varkappa) & \frac{1}{2}e_2(\alpha)\cos(\alpha/2) \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

где $\varkappa$ – би-секционная кривизна $\mathcal{E}$, $\alpha/2$ есть угол между нормалью $\tilde n$ гиперповерхности $\xi(\mathcal{B})$ и вертикальным (одномерным) подпространством, а k_1 – геодезическая кривизна траекторий поля e_1.

Доказательство по существу повторяет доказательство Леммы 4.7 с новым пониманием оператора Номидзу и приведено в [119]. В качестве следствия, мы находим дивергентное выражение для средней кривизны векторного поля.

Следствие 5.26 *Пусть ξединичное сечение расслоения на окружности $\pi : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{B}$ над поверхностью. Предположим, что связность в расслоении $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ не плоская. Обозначим через H среднюю кривизну $\xi(\mathcal{B})$ и че-*

рез $\tilde{n}_h$ горизонтальную проекцию единичного нормального векторного поля на $\xi(\mathcal{B}) \subset \mathcal{E}_1$. Тогда $\tilde{H} = \frac{1}{2} div(\tilde{n}_h)$.

Заметим, что результат Следствия 5.26 является аналогом формулы для средней кривизны явно заданной гиперповерхности в E^3.

Для вполне геодезических сечений расслоения на окружности над поверхностью аналог Теоремы 4.38 имеет следующий вид.

Теорема 5.27 *Пусть $\pi : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{B}$ расслоение на окружности над поверхность. Предположим, что связность в расслоении $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ не плоская. Тогда $\mathcal{E}_1$ допускает вполне геодезическое единичное сечение тогда и только тогда, когда база $\mathcal{B}$ локально изометрична*

$$(M^2, ds^2 = du^2 + \sin^2\alpha(u) dv^2)$$

и би-секционная кривизна $\mathcal{E}$ удовлетворяет условию $\varkappa = \dot{\alpha}(u)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}_1$ допускает вполне геодезическое сечение. Так как $\varkappa \neq 0$, то сечение не параллельно и значит поверхность $\xi(\mathcal{B})$ не горизонтальна. Следовательно, на открытом подмножестве $\mathcal{B}$ мы имеем $\alpha \neq 0$. Пусть $D \subset \mathcal{B}$ есть область, где $\alpha \neq 0$. Выберем репер (e_1, e_2) как в Лемме 5.25. Тогда $\xi(\mathcal{B})$ вполне геодезично если, в частности, $e_2(\alpha) \equiv 0, \quad k_1 \equiv 0$. Следовательно, траектории поля e_1 являются геодезическими, а угловая функция α постоянна вдоль e_2.

Выберем на базе полугеодезическую систему координат (u, v) такую, что $\partial_u = e_1, \quad \partial_v = f(u, v)\, e_2$, где $f(u, v)$ – некоторая функция без нулей в области D. Тогда $ds^2 = du^2 + f^2 dv^2$. В этих координатах, условия на α примут вид $\partial_v \alpha = 0, \quad \partial_u \alpha = \varkappa$, а значит $\varkappa = \dot{\alpha}$. С другой стороны, прямое вычисление показывает, что $\mathcal{R}^{\mathcal{F}}(e_1, e_2)\xi = (e_1(\lambda) - k_2\lambda)\eta$, где $\lambda = \tan(\alpha/2)$–

ненулевое собственное значение оператора $-A_\xi$. Из определения $\varkappa$, находим $\dot{\alpha} = \varkappa = \frac{\dot{\alpha}}{2\cos^2(\alpha/2)} - \tan(\alpha/2)k_2$. Так как $\alpha = \alpha(u)$, то $k_2 = k_2(u)$. Относительно выбранных координат, $k_2 = -\frac{\partial_u f}{f}$. Поэтому, $f(u,v) = a(v)h(u)$ и после замены параметра, получаем $ds^2 = du^2 + h^2(u)\,dv^2$. Таким образом, приходим к уравнению относительно $h(u)$ вида

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{\alpha}}{2\cos^2(\alpha/2)} - \tan(\alpha/2)(-\frac{\dot{h}}{h}),$$

общее решение которого имеет вид $h(u) = C\sin\alpha$. После замены параметров, приходим к выражению $ds^2 = du^2 + \sin^2\alpha\,dv^2$.

Обратно, пусть $\pi : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{B}$ единичное расслоение на окружности над римановым многообразием $\big(\mathcal{B}, ds^2 = du^2 + \sin^2\alpha(u)\,dv^2\big)$ с би-секционной кривизной связности расслоения $\varkappa = \dot{\alpha}(u)$. Покажем, что существует сечение ξ удовлетворяющее условиям

$$\nabla^{\mathcal{B}}_{\partial_u}\xi = 0, \quad \nabla^{\mathcal{B}}_{\partial_v}\xi = 2\sin^2(\alpha/2)\eta$$

Для этого выберем произвольные ортонормированные сечения $\{s_1, s_2\}$ и положим

$$\xi = \ \cos\theta\, s_1 + \sin\theta\, s_2, \quad \eta = -\sin\theta\, s_1 + \cos\theta\, s_2,$$

где θ есть некоторая гладкая функция. Тогда искомое сечение есть решение системы уравнений

$$\big\langle\nabla^{\mathcal{B}}_{\partial_u}\xi, \eta\big\rangle = \partial_u\theta + \gamma^2_{1|1} = 0, \quad \big\langle\nabla^{\mathcal{B}}_{\partial_v}\xi, \eta\big\rangle = \partial_v\theta + \gamma^2_{1|2} = 2\sin^2(\alpha/2)$$

или

$$\partial_1\theta = \gamma^1_{2|1}, \quad \partial_2\theta = \gamma^1_{2|2} + 2\sin^2(\alpha/2).$$

Условие интегрируемости системы принимает вид

$$\partial_2\gamma^1_{2|1} - \partial_1\gamma^1_{2|2} = 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)\dot{\alpha} = \sin(\alpha)\dot{\alpha}.$$

В левой части мы имеем выражение для $g^{\mathcal{F}}\big(R^{\mathcal{F}}(\partial_1, \partial_2)s_1, s_2\big)$. По определению,

$$\frac{g^{\mathcal{F}}\big(R^{\mathcal{F}}(\partial_1, \partial_2)s_1, s_2\big)}{\sin\alpha} = \varkappa.$$

Следовательно, условие $\dot{\alpha} = \varkappa$ является условием интегрируемости полученной системы.

■

Доказанная теорема, в отличие от случая единичного касательного расслоения, не содержит информации о "виде" сечения. Это объясняется тем, что базис сечений расслоения может быть выбран независимо от касательного к базе базиса векторных полей.

Минимальные и вполне геодезические сечения (единичного) нормального расслоения. Здесь мы рассматриваем свойство минимальности и вполне геодезичности единичного нормального векторного поля в "модельном" случае единичного нормального векторного поля на F^2 в M^4. Связностью расслоения в этом случае является нормальная связность подмногообразия, то есть, $\nabla = \nabla^{\perp}$, а тензором кривизны связности, является тенор кривизны связности нормального расслоения [85]. Это означает, что в обозначениях раздела 5.1 мы имеем $\mathcal{R}(X,Y)\xi = R^{\perp}(X,Y)\xi$. Оператор Номидзу $A_\xi X = -\nabla^{\perp}_X\xi$.

Пусть $\{e_i\}_{i=1,2}$ и $\{n_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ базисы касательных и нормальных векторных полей на F^2 соответственно. Тогда разложения ковариантных производных $\nabla^{\perp}_{e_i} n_\alpha = \gamma^{\beta}_{\alpha|i} n_\beta$ определяют компоненты нормальной связности $\gamma^{\beta}_{\alpha|i}$. Они зависят от выбора касательного и нормального реперов. Если базис нормалей ортонормирован, а в качестве базисных касательных векторных полей выбраны координатные векторный поля $\{e_i = \partial/\partial u_i\}_{i=1,2}$, то компоненты нормальной связности обычно называют коэффициентами кручения. В этом случае имеет место косая симметрия $\gamma^{\beta}_{\alpha|i} = -\gamma^{\alpha}_{\beta|i}$. Дифференциальная

1-форма $\omega = \gamma^2_{1|i}\,du^i$ называется формой кручения нормального репера подмногообразия $F^2 \subset M^4$. Она определена с точностью до знака. Касательное векторное поле τ, двойственное 1-форме ω, естественно называть *векторным полем кручения* нормального репера подмногообразия $F^2 \subset M^4$. Поле τ является нулевым тогда и только тогда, когда нормальный репер на $F^2 \subset M^4$ параллелен в нормальной связности. Такой репер существует тогда и только тогда, когда подмногообразие имеет плоскую нормальную связность. При фиксированном касательном репере, зависимость векторного поля τ от выбора нормального репера имеет вид $\tilde{\tau} = \tau + grad\,(\varphi)$ где φ – функция вариации нормального репера (относительно произвольного фиксированного).

Данное единичное нормальное векторное поле ξ на $F^2 \subset M^4$ определяет единственный (по крайней мере локально) нормальный ортонормированный репер (ξ, η), а значит и единственное (с точностью до направления) касательное векторное поле τ. Поэтому в рассматриваемом случае можно называть поле τ *векторным полем кручения нормального векторного поля* ξ.

Выберем $n_1 = \xi$ и $n_2 = \eta$ в качестве базиса нормалей. Для произвольно выбранного ортонормированного касательного базиса на поверхности имеем разложения

$$\nabla^{\perp}_{e_1}\xi = \gamma^2_{1|1}\eta, \quad \nabla^{\perp}_{e_2}\xi = \gamma^2_{1|2}\eta.$$

Следовательно, векторное поле кручения $\tau = \gamma^2_{1|1}e_1 + \gamma^2_{1|2}e_2$. Легко проверить, что поле $\nu = -\gamma^2_{1|2}e_1 + \gamma^2_{1|1}e_2$ и поле τ таковы, что

$$\nabla^{\perp}_{\nu}\xi = 0, \quad \nabla^{\perp}_{\tau}\xi = \big((\gamma^2_{1|1})^2 + (\gamma^2_{1|2})^2\big)\eta = |\tau|^2\eta. \tag{5.10}$$

Это означает, что векторное поле $-\frac{\tau}{|\tau|}$ единичным является собственным вектором оператора Номидзу, а его длина $|\tau|$ является соответствующим собственным значением. Полагая $e_1 = \nu$ и $e_2 = -\frac{\tau}{|\tau|}$, мы получаем касательный базис, удовлетворяющий условиям Леммы 5.25, а именно,

$$A_\xi e_1 = 0, \quad A_\xi e_2 = \lambda\eta,$$

где $\lambda = |\tau|$. Следовательно, касательные векторные поля и единичный вектор нормали на $\xi(F^2) \subset N_1F^2$ имеют вид

$$\tilde e_1 = e_1^h, \quad \tilde e_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\Big(e_2^h - \lambda\eta^v\Big), \quad \tilde n = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\Big(\lambda e_2^h + \eta^v\Big).$$

Очевидно, что $\pi_*(\tilde n) = -\frac{1}{\sqrt{1+|\tau|^2}}\,\tau$ и мы находим, что по Лемме 5.26 средняя кривизна $\xi(F^2) \subset N_1F^2$ выражается как

$$H = -\frac{1}{2}div\Big(\frac{1}{\sqrt{1+|\tau|^2}}\,\tau\Big)$$

Так, например, для комплексной кривой как поверхности в E^4, задаваемой вектор-функцией $\vec r = \{x, y, u(x,y), v(x,y)\}$, где функции u и v удовлетворяют условиям Коши-Римана, векторное поле кручения таково, что

$$div(\tau) = 0, \quad |\tau|^2 = \frac{1}{2}\varkappa_\Gamma|grad(u)|^2\sqrt{\det g},$$

где $\varkappa_\Gamma$ – гауссово кручение поверхности, а g – матрица первой фундаментальной формы.

В частности, для комплексной кривой $w = e^z$ имеем $u = e^x\cos y$, поэтому гауссова кривизна и гауссово кручение имеют вид $K = -\varkappa_\Gamma = -2\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^3}$, векторное поле кручения $\tau = -\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}\,\partial_y$, $\quad |\tau|^2 = \frac{e^{4x}}{(1+e^{2x})^3}$ и любое векторное поле, составляющее постоянный угол с каноническим полем нормалей является минимальным, так как $\big\langle grad\,(|\tau|^2), \tau\big\rangle = 0$.

В следующем примере рассматриваются слои в касательном расслоении TM^2 с метрикой Сасаки как подмногообразия коразмерности 2. Известно, что слои являются внутренне плоскими и вполне геодезическими подмногообразиями. Касательные векторные поля к слою T_xM^2 имеют вид η^v_x, ζ^v_x, а базис поля нормалей составляют векторы X^h_x, Y^h_x. Следовательно, в каждой точке (x,ξ) тензор кривизны нормальной связности слоя определяется компонентой тензора кривизны TM^2 вида $\tilde{g}_{(x,\xi)}\big(\tilde{R}(\eta^v,\zeta^v)X^h,Y^h\big)=g_x\big(R(\eta,\zeta)X,Y\big)$. Если выбрать пары $(\eta,\zeta)\in T_xM^2$ и $(X,Y)\in T_xM^2$, состоящими из единичных взаимно ортогональных векторов, то с очевидностью находим, что гауссово кручение слоев имеет вид $\tilde{\varkappa}_\Gamma=K(x)$, где $K(x)$ – гауссова кривизна M^2 в точке $x\in M^2$.

Значит, *каждый слой расслоения* TM^2 *имеет постоянное гауссово кручение, равное гауссовой кривизне многообразия в данной точке.*

Несложное вычисление показывает, что

$$\tau=K(x)\{-\xi^2,\xi^1\},\quad \tilde{n}_h=-\frac{K(x)\{-\xi^2,\xi^1\}}{\sqrt{1+K^2(x)((\xi^1)^2+(\xi^2)^2)}}.$$

Отсюда,

$$div\,(\tilde{n}_h)=\partial_{\xi^1}Z^1+\partial_{\xi^2}Z^2=\frac{K^3(x)}{(1+K^2(x)|\xi|^2)^{3/2}}(-\xi^2\xi^1+\xi^1\xi^2)=0.$$

Поэтому *любое единичное нормальное векторное поле слоя* T_xM^2 *вида* X_x^h *минимально в единичном нормальном расслоении слоя.*

Векторное поле ν в формулах (5.10) так же имеет определенный геометрический смысл.

Предложение 5.28 *Пусть* ξ *— нормальное единичное векторное поле на* $F^2\subset M^4$. *Пусть* τ *– векторное поле кручения поля* ξ. *Обозначим через* ν *векторное поле, являющееся результатом поворота поля* τ *на угол* $+\pi/2$. *Тогда Гауссово кручение* $\varkappa_\Gamma$ *поверхности* F^2 *может быть выражено формулой* $\varkappa_\Gamma=-div\,(\nu)$

Доказательство. Пусть ξ – данное единичное нормальное векторное поле. Пусть (e_τ, e_ν) – орты полей τ и ν соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \nabla_{e_\tau} e_\tau &= k_\tau e_\nu \quad \nabla_{e_\nu} e_\nu = k_\nu e_\tau \\ \nabla_{e_\tau} e_\nu &= -k_\tau e_\tau \quad \nabla_{e_\nu} e_\tau = -k_\nu e_\nu. \end{aligned} \tag{5.11}$$

где k_τ и k_ν — геодезические кривизны для соответствующих интегральных кривых. Кроме того, в силу такого выбора касательного базиса

$$\nabla^\perp_{e_\tau}\xi = \lambda\,\eta, \quad \nabla^\perp_{e_\nu}\xi = 0,$$

где η – единичное нормальное векторное поле, ортогональное ξ и $\lambda = |\tau|$.

Гауссово кручение вычислим в ортонормированном базисе $(e_\nu, e_\tau, \xi, \eta)$:

$$\varkappa_\Gamma = \left\langle R^\perp(e_\nu, e_\tau)\xi, \eta\right\rangle = \left\langle \nabla^\perp_{e_\nu}\nabla^\perp_{e_\tau}\xi - \nabla^\perp_{e_\tau}\nabla^\perp_{e_\nu}\xi - \nabla^\perp_{[e_\nu, e_\tau]}\xi, \eta\right\rangle =$$

$$\left\langle \nabla^\perp_{e_\nu}(\lambda\eta) - \nabla^\perp_{-k_\nu e_\nu + k_\tau e_\tau}\xi, \eta\right\rangle = \left\langle e_\nu(\lambda)\eta + \lambda\nabla^\perp_{e_\nu}\eta - k_\tau\lambda\,\eta, \eta\right\rangle = e_\nu(\lambda) - k_\tau\lambda.$$

Заметим теперь, что $k_\tau = div\,(e_\nu)$, $e_\nu(\lambda) = \left\langle grad\,(\lambda), e_\nu\right\rangle$, а поэтому

$$e_\nu(\lambda) - k_\tau\lambda = -div\,(\lambda e_\nu) = -div\,(\nu),$$

что и требовалось доказать.

■

Выражения (5.9) в применении к единичному сечению нормального расслоения примет вид

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sin(\alpha/2)\,k_\nu & \frac{1}{2}(e_\nu(\alpha) - \varkappa_\Gamma) \\ \frac{1}{2}(e_\nu(\alpha) - \varkappa_\Gamma) & \frac{1}{2}\cos(\alpha/2)\,e_\tau(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Теорема 5.29 *Параллельное в нормальной связности единичное векторное поле является единственным с точностью до поворота на постоянный угол вполне геодезическим полем на подмногообразии $F^2 \subset M^4$ с плоской нормальной связностью.*

Доказательство. Пусть M^4 допускает подмногообразие с плоской нормальной связностью. Тогда на F^2 имеется параллельное в нормальной связности векторное поле ξ. Для такого поля, очевидно, $\lambda = 0$ и такое поле порождает горизонтальное вполне геодезическое подмногообразие в M^4.

Пусть $\xi(\varphi)$ единичное нормальное векторное поле, составляющее угол φ с параллельным полем. Тогда

$$\lambda = |grad\,\varphi|, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + |grad\,\varphi|^2}},$$

а значит поля τ и ν ненулевые. Но так как условие вполне геодезичности влечет $e_\tau(\alpha) = e_\nu(\alpha) = 0$, то $|grad\,\varphi| = \lambda = const$. Но тогда из формулы для кручения следует, что $k_\tau = 0$. Из второй формы тогда находим, что $k_\nu = 0$. Это значит, что на F^2 есть два семейства взаимно ортогональных геодезический линий. Тогда метрика на F^2 есть метрика плоскости $ds^2 = du^2 + dv^2$, а функция φ линейна по параметрам (u, v). Геометрически, все очевидно. Для плоского подмногообразия с плоской нормальной связностью метрика N_1F^2 имеет вид $d\sigma^2 = du^2 + dv^2 + d\varphi^2$ и, очевидно, уравнение явно заданной вполне геодезической поверхности над плоскостью (u, v) есть

$$\varphi = au + bv + c \quad (\varphi \in [0, 2\pi)).$$

■

Минимальных же векторных полей больше.

Теорема 5.30 *Пусть F^2 подмногообразие в M^4 с плоской нормальной связностью. Пусть φ – угол между векторным полем ξ и полем, параллельным в нормальной связности подмногообразия. Поле ξ минимально тогда* *и только тогда, когда функция φ удовлетворяет уравнению*

$$div\left(\frac{grad\,\varphi}{\sqrt{1+|grad\,\varphi|^2}}\right)=0.$$

Доказательство достаточно очевидно, так как в этом случае $\tau = grad\,\varphi$. По существу, полученная формула есть формула вычисления средней кривизны явно заданной поверхности в евклидовом пространстве.

Пусть F^2 подмногообразие в M^4 с неплоской нормальной связностью. Тогда аналог теорем 4.38 и 5.27 имеет следующую формулировку.

Теорема 5.31 *Пусть F^2 подмногообразие в римановом пространстве M^4 с кривизной K и Гауссовым кручением $\varkappa_\Gamma \neq 0$. Пусть ξ единичное нормальное векторное поле на F^2. Тогда подмногообразие $\xi(F^2) \subset N_1F^2$ вполне геодезично, если F^2 несет локальную метрику вращения в виде:*

$$ds^2 = du^2 + \sin^2\alpha(u)dv^2,$$

при этом $\dot\alpha(u) = \varkappa_\Gamma(u)$.

Нетрудно проверить, что в условиях Теоремы 5.31 гауссова кривизна метрики и Гауссово кручение поверхности с необходимостью связаны соотношением

$$K = \varkappa_\Gamma^2 - \cot\alpha(u)\dot\varkappa_\Gamma. \tag{5.12}$$

Подмногообразия, удовлетворяющие условиям Теоремы 5.31 существуют. В работе Ю.А. Аминова [84] показано, что *любая аналитическая метрика допускает изометрическое погружение в E^4 в виде аналитической поверхности с заданным аналитическим Гауссовым кручением.* Так что если задать произвольную монотонную аналитическую функцию $0 < \alpha(u) < \pi$ и положить $\varkappa_\Gamma = \dot\alpha(u)$, то в E^4 существует поверхность, удовлетворяющая условиям Теоремы 5.31. Например, полагая $\alpha(u) = cu$ мы получим $\varkappa_\Gamma = c$ и $K = c^2$, а значит в E^4 мы находим локально заданную поверхность постоянной Гауссовой кривизны и постоянного Гауссова кручения, допускающую вполне геодезическое единичное нормальное векторное поле.

Вполне геодезические сечения единичного нормального расслоения существуют и пространствах с кривизной. Поверхность Веронезе

$$y = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}x_1x_3, \frac{1}{\sqrt{3}}x_2x_3, \frac{1}{\sqrt{3}}x_1x_2, \frac{1}{2\sqrt{3}}(x_1^2 - x_2^2), \frac{1}{6}(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2) \right\},$$

заданная условием $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$, лежащая в сфере радиуса $R = \frac{r^2}{3}$, допускает вполне геодезическое единичное нормальное векторное поле при $r = \sqrt[4]{12}$.

Рассматриваемая поверхность Веронезе имеет постоянную гауссову кривизну $K = \frac{3}{r^4}$ и гауссово кручение $\varkappa_\Gamma = \frac{6}{r^4} = 2K$. Необходимое условие (5.12) выполнено, если $r = \sqrt[4]{12}$. При этом $K = \frac{1}{4}$, $\varkappa_\Gamma = \frac{1}{2}$. После перехода к сферическим координатам,

$$x_1 = r\sin(u/2)\cos(v/2), \quad x_2 = r\sin(u/2)\cos(v/2), \quad x_3 = r\cos(u/2)$$

метрика поверхности Веронезе при $r = \sqrt[4]{12}$ принимает вид $ds^2 = du^2 + \sin^2(u/2)\,dv^2)$. Очевидно, что $\alpha(u) = \frac{u}{2}$ и в точности $\dot\alpha_u = \varkappa_\Gamma = \frac{1}{2}$.

Заметим, что при найденных условиях подмногообразие $\xi(V^2)$ лежит в $N_1(V^2)$ постоянной секционной кривизны $\frac{1}{16}$.

5.5. Выводы.

В разделе рассмотрено *обобщение метрики Сасаки* на метризованное векторное расслоения со связностью, согласованной с послойной метрикой над Римановым многообразием. Получены *аналоги формул* Домбровского и Ковальского, *выражение для тензора кривизны* метрики типа Сасаки векторного расслоения и единичного подрасслоения.

Для векторного расслоения определен *аналог оператора Номидзу* и его сопряженный. Введено понятие сопряженного тензора кривизны связности расслоения и би-секционной кривизны связности расслоения. Введены аналоги *грубого гессиана* и *тензора гармоничности* векторного поля для сечений единичного расслоения. В этих терминах *найдено выражение для второй фундаментальной формы* единичного сечения и выведено *условие вполне геодезичности* единичного сечения, являющиеся аналогами соответствующих формул для единичных векторных полей на римановом многообразии.

В простейшем случае расслоения ранга 2 над поверхностью, доказан *аналог теоремы* о вполне геодезичности единичного векторного поля на двумерном многообразии. В качестве естественного приложения полученных результатов, рассмотрено нормальное расслоение двумерные подмногообразий в четырех - мерном римановом пространстве. *Построены примеры* минимальных и вполне геодезических единичных нормальных векторных полей.

ВЫВОДЫ

В диссертационной работе развиты вопросы геометрии подмногообразий и внутренней геометрии расслоенных пространств с метрической структурой, определенной изначально на касательном и сферическом касательном расслоениях С. Сасаки [65], [66]. Следуя традиции Харьковской геометрической школы, основные результаты диссертации связаны с геометрией подмногообразий в расслоенных пространствах и выяснению влияния структуры расслоения на геометрические свойства подмногообразий.

В диссертационной работе *впервые поставлена задача существования сильно- сферических распределений* на пространстве сферического касательного расслоения риманова многообразия. *Доказана новая характеризация единичной сферы*: пространство постоянной кривизны допускает сильно- сферическое распределение тогда и только тогда, когда базовое многообразие является единичной сферой, а сильно- сферическое распределение одномерно и совпадает с характеристическим векторным полем Сасакиевой структуры на T_1S^n.

Хорошо известно, что сферическое касательное расслоение общего риманова обладает почти контактной структурой, частным случаем которой является Сасакиева структура на T_1S^n. Секционная кривизна Сасакиева многообразия в направлении площадок, содержащих характеристическое векторное поле, постоянна. *Решена задача распределения секционной кривизны* сферического расслоения над пространством постоянной кривизны (M^n, c) в зависимости от c и показано, что найденные границы являются точными.

Интегральные траектории характеристического векторного поля почти контактной структуры составляют семейство горизонтальных геодезических линий и порождают так называемый геодезический поток. С. Сасаки [67] и К. Сато [68] нашли описание всех геодезических линий (сферического) касательного расслоения пространства постоянной кривизны и показали, что их проекции на базу являются винтовыми линиями. П. Надь[60] показал, что для локально симметрической базы проекция невертикальной геодезической является обобщенной винтовой линией. В работе последний *результат был уточнен* для случаев комплексного CP^n и кватернионного HP^n проективных пространств: *проекция невертикальной геодезической (сферического) касательного расслоения над CP^n и HP^n является кривой с постоянными кривизнами $k_1, \dots, k_5, k_6 = \dots = k_{2n-1} = 0$ и $k_1, \dots, k_9, k_{10} = \dots = k_{4n-1} = 0$, соответственно.*

Комплексное проективное пространство является частным случаем эрмитова локально-симметрического многообразия с комплексной структурой J. На каждой касательной сфере такого многообразия существует векторное поле Хопфа $J\xi$, что позволяет определить на каждой касательной сфере Берже-деформацию метрики. В работе *построена Берже-деформация* метрики Сасаки, найдены ее связность Леви-Чивита и выведены уравнения геодезических Берже-деформированной метрики Сасаки. В частности, *доказано, что у проекции геодезической касательного сферического Берже-расслоения над эрмитовым локально- симметричным многообразием все геодезические кривизны постоянны; в частности, для CP^n такая проекция является кривой с постоянными кривизнами $k_1, \dots, k_5, k_6 = \dots = k_{2n-1} = 0$.* Геодезические Берже-деформированной метрики Сасаки касательного расслоения подобным свойством уже не обладают.

В качестве естественного обобщения линии на (сферическом) касательном расслоении *в работе введено понятие* поднятия подмногообразия базы $F^l \subset M^n$ в (сферическое) касательное расслоение при помощи векторного поля ξ, заданного в точках подмногообразия. В таком случае $\xi(F^l)$ является подмногообразием в расслоении, трансверсальным к слоям. При $l = n$ подмногообразие $\xi(M^n)$ является сечением касательного расслоения и условия вполне геодезичности такого сечения рассматривались в работе П. Вальчака [77]. В работе *доказано, что любое вложенное подмногообразие касательного расслоения, трансверсальное слоям, является образом некоторого векторного поля на базе вдоль подмногообразия в нем, получены условия вполне геодезичности подмногообразий такого типа.* В частности, найдено обобщение результата П. Вальчака: *векторное поле ξ постоянной длины, заданное в точках подмногообразия $F^l \subset M^n$ порождает вполне геодезическое подмногообразие $\xi(F^l) \subset TM^n$ тогда и только тогда, когда F^l вполне геодезично в M^n и ξ – параллельное векторное поле на M^n вдоль F^l.* Последнее утверждение позволяет прояснить структуру касательного расслоения многообразия, допускающего вполне геодезическое трансверсально ориентируемое гиперслоение $\{\mathcal{F}_\alpha\} \subset M^n$: *поле нормалей постоянной длины слоения является $(n-1)$ линейчатым подмногообразием в TM^n с образующими $\xi(\mathcal{F}_\alpha)$.*

Поднятия вполне геодезических подмногообразий составляют естественный класс вполне геодезических подмногообразий общего типа в касательном расслоении. Задача описания всех вполне геодезических подмногообразий касательного расслоения общего риманова многообразия приводит к переопределенной системе дифференциальных уравнений в частных производных. Если базовое многообразие имеет постоянную кривизну, то система уравнений упрощается и в работе *решена задача локального описания всех вполне геодезических подмногообразий* касательного расслоения двумерного многообразия постоянной кривизны. В частности, *подтверждена гипотеза А. Борисенко* о нулевом сечении касательного расслоения неприводимого риманова многообразия как о единственном вполне геодезическом подмногообразии максимальной размерности, трансверсальном слоям.

Подмногообразия, трансверсальные слоям *единичного* касательного расслоения, представляют особый интерес в связи с развитой геометрией единичного векторного поля в неголономной геометрии [86]. Подход к геометрии единичного векторного поля, развитый в диссертации, *существенно отличается от классического* и позволяет приписать единичному векторному полю характеристики, заимствованные из геометрии подмногообразий, такие как: *секционная кривизна, кривизна Риччи, скалярная кривизна векторного поля; средняя кривизна векторного поля и связанное с ней понятие минимальности, вторая фундаментальная форма векторного поля и связанное с ней понятие вполне геодезичности* и т.д..

В диссертационной работе *заложены основы* геометрии единичного векторного поля с точки зрения геометрии подмногообразий и развиты вопросы, связанные с его второй фундаментальной формой. *Введены понятия* грубого Гессиана и тензора гармоничности единичного векторного поля. Показано, что тензор гармоничности определяет деформацию индуцированной связности на подмногообразии $\xi(M^n) \subset T_1M^n$. След грубого Гессиана известен как грубый лапласиан векторного поля и определяет его гармоничность. Показано, что вторая фундаментальная форма подмногообразия $\xi(M^n) \subset T_1M^n$ полностью определяется этими тензорами и неголономным оператором Вейнгартена (оператором Номидзу). Показано, что условие минимальности векторного поля, полученное О. Жиль-Медрано и Е. Ллинарес-Фустер [34], так же выражается через тензоры гармоничности и грубый Гессиан. В приложении к двумерным многообразиям, мы получаем выражение для средней кривизны векторного поля в ясных геометрических терминах и приводим примеры не только минимальных, но и векторных полей *постоянной средней кривизны.* Найденные примеры не являются существенно двумерными, а обобщаются по размерности. Мы находим целые семейства векторных полей постоянной средне кривизны. Мы доказываем, что наличие на многообразии вполне геодезического векторного поля накладывает существенное ограничение на его внутреннюю геометрию. Все двумерные многообразия, несущие вполне геодезическое единичное векторное поле изометричны некоторому классу многообразий с метрикой вращения. При определенных условиях возможно их изометрическое погружение в E^3.

Известные примеры минимальных векторных полей дополнены вычислением их второй фундаментальной формы. В частности, получено выражение для средней кривизны поля нормалей риманова гиперслоения и показано, например, что радиальное векторное поле на римановом многообразии всегда минимально, но не вполне геодезично. Результат о минимальности поля Хопфа на сферах [32], [34] дополнен доказательством их вполне геодезичности. Известный результат о минимальности характеристического векторного Сасакиевой структуры существенно усилен доказательством его вполне геодезичности. Характеристического векторного Сасакиевой структуры принадлежит классу Киллинговых векторных полей единичной длины. Мы доказываем, что на трехмерном многообразии единичное Киллингово поле порождает вполне геодезическое подмногообразие в T_1M^3 тогда и только тогда, когда M^3 является либо метрическим произведением, либо Сасакиевым многообразием. Особый интерес представляет Сасакиева структура на нечетномерной сфере, так как она порождается векторным полем Хопфа. В работе *введено понятие* ковариантно нормального векторного поля и доказано, что векторное поле Хопфа является единственным в этом классе векторным полем с вполне геодезическим свойством. Более того, доказано, что *векторное поле Хопфа осуществляет поднятие Сасакиевой пространственной формы* S^{2n+1} *кривизны 1 в Сасакиево многообразие* T_1S^{2n+1} *в виде Сасакиевой пространственной формы кривизны 5/4*. При этом доказано, что для поля Хопфа *секционная кривизна* подмногообразия $\xi(S^{2n+1} \subset T_1S^{2n+1}$ изменяется в пределах $[1/4, 5/4]$. Доказано, что в более широком классе геодезических векторных полей на сферах, векторные поля с вполне геодезическим свойством выделяются тем, что являются сильно нормальными инвариантными, в терминологии [22], единичными векторными полями.

Вполне геодезичность единичного векторного поля во многих случаях связано с характеристическим векторным полем естественной почти контактной структуры на римановом многообразии. Такая структура задается тройкой $(\xi, \varphi = -A_\xi, \eta = \langle \xi, \cdot \rangle$. В работе *найдены все* вполне геодезические лево-инвариантные единичные векторные поля та трехмерных группах Ли с лево-инвариантной метрикой и доказано, что *на каждой неплоской унимодулярной группе вполне геодезическое векторное поле является характеристическим векторным полем естественной почти контактной структуры.* С метрической точки зрения, эти поля являются *собственными векторами оператора Риччи*, отвечающими собственному значению, равному 2 (если такое существует на группе). Найденные поля составляют подкласс минимальных векторных полей на этих группах [73].

С вариационной точки зрения, минимальные векторные поля доставляют экстремаль функционалу объема подмногообразия $\xi(M^n)$. В постановке О. Жиль-Медрано и Е. Ллинарес-Фустер, вариация функционала объема осуществляется в классе единичных векторных полей, поле-вариаций. Ими доказано, что экстремали функционала объема относительно поле-вариаций совпадают с экстремалями вариаций функционала объема относительно более общих, классических нормальных вариаций подмногообразия $\xi(M^n)$. Полученная в работе [33] формула второй вариации функционала объема относительно поле-вариаций оказалась сложной в конкретных приложениях. В работе предложено исследование на устойчивость вполне геодезических векторных полей относительно классических нормальных вариаций. Доказано, что *векторное поле Хопфа на трехмерной сфере устойчиво, а на сферах высших размерностей неустойчиво относительно классических вариаций.* Этот результат совпадает с результатом из [33]. Полученная в работе формула классической второй вариации функционала объема вполне геодезического инвариантного векторного поля на трехмерной группе Ли с лево-инвариантной метрикой *не имеет аналога* в классе поле-вариаций и позволила дать исчерпывающий ответ относительно устойчивости инвариантных вполне геодезических векторных полей на компактных факторах унимодулярных трехмерных групп Ли. Доказано, что среди неплоских групп только $SU(2)$ или связная компонента $SO(3)$ кривизны 1 несут устойчивое вполне геодезическое векторное поле (аналог поля Хопфа). Найденные ранее примеры неустойчивых минимальных векторных полей относительно поле-вариаций [39] были получены при помощи специальных лево-инвариантных вариаций. В работе *существенно усилены результаты работы [39]*, так как найдены как неустойчивые, так и устойчивые в классе лево-инвариантных вариаций вполне геодезические инвариантные векторные поля.

Наконец, в работе предложено естественное обобщение рассмотренных постановок задач на произвольное векторное метризованное расслоение с метрической связностью над римановым многообразием и получены базовые результаты относительно такого обобщения. Доказаны аналоги теорем о вполне геодезических единичных сечениях в расслоениях ранга 2 над двумерным многообразием и приведены примеры существования таких сечений.

Список использованных источников

1. Abbassi M.T.K. On Riemannian g-natural metrics of the form $ag^s + bg^h + cg^v$ on the Tangent Bundle of a Riemannian Manifold (M, g)/M.T.K. Abbassi, M.Sarih // Mediter. J. Math. -2005. -V. 2. -P. 19 – 43.

2. Abbassi M.T.K. On some hereditary properties of Riemannian g-natural metrics on tangent bundles of Riemannian manifolds/ M.T.K. Abbassi, M.Sarih // Diff. Geom. Appl. -2005. -V. 22, № 1. -P. 19 – 47.

3. Abbassi M.T.K. g-natural contact metrics on unit tangent sphere bundle/M.T.K. Abbassi, G. Calvaruso // Monatsh. Math. -2007. -V. 151, № 2. -P. 89 – 109.

4. Abbassi M.T.K. Curvature properties of g-natural contact metric structures on unit tangent sphere bundles/M.T.K. Abbassi, G. Calvaruso// Beiträge Algebra Geom. -2009. -V. 50, № 1, -P. 155 – 178.

5. Abbassi M.T.K. Harmonicity of unit vector fields with respect to Riemannian g-natural metrics/ M.T.K. Abbassi, G. Calvaruso, D. Perrone// Diff. Geom. Appl. -2009. -V. 27, № 1. -P. 157 – 169.

6. Abbassi M.T.K. On Einstein Riemannian g-natural metrics on unit tangent sphere bundles/M.T.K. Abbassi, O. Kowalski// Ann. Global. Anal. Geom. -2010. -V. 38, № 1. -P. 11 – 20.

7. Abbassi M.T.K. Harmonic sections of tangent bundles equipped with g-natural Riemannian metrics/M.T.K. Abbassi, G. Calvaruso, D. Perrone// Q. J. Math. - 2011. -V. 62, № 2. -P. 259 – 288.

8. Azo K. Notes of some propertis of the sectional curvature of the tangent bundle/K. Azo// Iokohama Math. J. -1981. -V. 29, № 1. -P. 1 – 5.

9. Berndt J. Curvature-adapted submanifolds/ J. Berndt, L. Vanhecke// Nihonkai Math. J. -1992. -V. 3. -P. 177 – 185.

10. Blair D. Contact manifolds in Riemannian geometry/ D. Blair // Lecture Notes in Math. -1976. -V. 509.

11. Brito F. On the volume of vector fields on spaces of constant sectional curvature/F.Brito, P.Chacón, A.Naveira // Comment. Math. Helv. -2004. -V. 79. -P. 300 – 316.

12. Brito F. Solenoidal unit vector fields with minimum energy/F.Brito, M.Salvai // Osaka J. Math. -2004, -V. 41. -P. 533 – 544.

13. Brito F. Total bending of flows with mean curvature correction/F. Brito// Diff. Geom. Appl.-2000. -V. 12. -P. 157 – 163.

14. Brito F. Volume-minimizing foliations on spheres/F. Brito, D. Johnson// arXiv:math.DG/0402294. -2004.

15. Boeckx E. When are the tangent sphere bundles of a riemannian manifold reducible?/ E. Boeckx// Trans. Am. Math. Soc. -2003. -V. 355, № 7. -P. 2885 – 2903.

16. Boeckx E.Characteristic reflections on unit tangent sphere bundle/E.Boeckx, L.Vanhecke// Houston J. Math. -1997. -V. 23. -P. 427 – 448.

17. Boeckx E. Harmonic and minimal vector fields on tangent and unit tangent bundles/E.Boeckx, L.Vanhecke// Differential Geom. Appl. -2000. -V. 13. -P. 77 – 93.

18. Boeckx E. Harmonic and minimal vector fields on tangent and unit tangent bundles/E.Boeckx, L.Vanhecke// Differential Geom. Appl. -2000. -V. 13. -P. 77 – 93.

19. Boeckx E. Unit tangent sphere bundles with constant scalar curvature/E.Boeckx, L.Vanhecke// Czechoslovak Math. J. - 2001. -V. 51 . -P. 523 – 544.

20. Boeckx E. Harmonic and minimal radial vector fields/E.Boeckx, L.Vanhecke// Acta Math. Hungar. -2001. -V. 90 . -P. 317 – 331.

21. Boeckx E. Isoparametric functions and harmonic and minimal unit vector fields/E.Boeckx, L.Vanhecke// Contemp. Math. -2001. -V. 288. -P. 20–31.

22. Binh T.Q. Invariant and Anti-invariant Unit Vector Fields /T.Q.Binh, E.Boeckx, L.Vanhecke// Topics in Almost Hermitian Geometry and Related Fields/ Proc. in honor of Prof. Sekigawa's 60th birthday, World Scientific, Singapore. -2005. -P. 50-59.

23. Benyounes M. Harmonic sections of riemannian vector bundles and metrics of Cheeger-Gromoll type/ M. Benyounes, E. Loubeau, C. M. Wood // arXiv:math.DG/0602049. -2006.

24. Benyounes M. Harmonic maps and sections on spheres/M.Benyounes, E.Loubeau, C. M. Wood// arXiv:math.DG/0703060. -2007.

25. Benyounes M. The geometry of generalised Cheeger-Gromoll metrics/M.Benyounes, E.Loubeau, C.M. Wood// arXiv:math.DG/0703059v1. -2007.

26. Cheeger J. On the Structure of Complete Manifolds of Nonnegative Curvature/J.Cheeger, D.Gromoll// Ann. of Math. -1972. -V. 96. C. 413 – 443.

27. Dombrowski P. On the geometry of the tangent bundle/P. Dombrowski// J. Reine Angew. Math. - 1962. - T. 210. -P. 73 – 88.

28. Dragomir S. On the geometry of tangent hyperquadric bundles: CR and pseudoharmonic vector fields/S.Dragomir, D.Perrone // Ann. Global Anal. Geom. -2006. -V. 30. -P. 211 — 238.

29. Druta S. Tangent sphere bundles of natural diagonal lift type/S.Druta, V.Oproiu // Balkan J. Geom. Appl. -2010. -V. 15, №1. -P. 53 – 67.

30. Ewert-Krzemieniewski S. Totally Geodesic Submanifolds in Tangent Bundle with g-natural Metric/ S.Ewert-Krzemieniewski// arXiv:math.DG/1310.8606 v2. -2003.

31. Gil-Medrano O. Harmonic and minimal invariant unit vector fields on homogeneous Riemannian manifolds/O.Gil-Medrano, J.C.González-Dávila, L.Vanhecke// Houston J. Math. -2001. -V.27. -P. 377-409.

32. Gil-Medrano O. Relationship between volume and energy of unit vector fields/O.Gil-Medrano // Diff. Geom. Appl. -2001. -V. 15. -P. 137 – 152.

33. Gil-Medrano O. Second variation of volume and energy of vector fields. Stability of Hopf vector field/O.Gil-Medrano, E.Llinares-Fuster // Math. Ann. -2001. -V. 320. -P. 531 – 545.

34. Gil-Medrano O. Minimal unit vector fields/O.Gil-Medrano, E.Llinares-Fuster// Tôhoku Math. J.-2002. -V 54. -P. 71 – 84.

35. Gluck H. On the volume of a unit vector field on the tree sphere/H.Gluck, W.Ziller // Comment. Math. Helv. -1986. -V.61. -P. 177 – 192.

36. Gluck H. Fibraions of spheres by parallel great spheres and Berger's rigidity theorem/H.Gluck, F.Warner, W.Ziller // Ann. Glob. Anal. Geom. -1987, -V. 5, № 1. -P. 53 – 82.

37. González-Dávila J.C. Examples of minimal unit vector fields/J.C.González-Dávila, L.Vanhecke // Ann Glob. Anal. Geom. - 2000. -V. 18. -P. 385 – 404.

38. González-Dávila J.C. Minimal and harmonic characteristic vector fields on three-dimensional contact metric manifolds/J.C.González-Dávila, L.Vanhecke// J. Geom. -2001. -V. 72. -P. 65-76.

39. González-Dávila J.C. Energy and volume of unit vector fields on three-dimensional Riemannian manifolds/J.C.González-Dávila, L.Vanhecke// Diff. Geom. Appl. -2002. -V 16. -P. 225 – 244.

40. González-Dávila J.C. Invariant harmonic unit vector fields on Lie groups/J.C.González-Dávila, L.Vanhecke// Boll. Un. Mat. Ital. -2002. -V. 5-B, № 2. -P. 377 – 403.

41. Gray A. Pseudo-Riemnnian almost product manifolds and submersions//A.Gray/ J. Math. Mech. -1967. -V. 16. -P. 715 – 737.

42. Gromoll D. The low-dimensional metric foliations of Euclidean spheres/D.Gromoll, K.Grove // J. Differential Geom. -1988. -V. 28, № 1. -P. 143–156.

43. Johnson D. L. Volumes of flows/D. L. Johnson // Proc. Amer. Math. Soc.-1988. -V. 104. -P. 923 – 932.

44. Higuchi A. The energy of unit vector fields on the 3-sphere/A.Higuchi, B. S.Kay, C. M.Wood // arXiv:math.DG/0005293v1. -2000.

45. Han D.S. Unit vector fields on spheres which are harmonic maps/D.S.Han, J. W.Yim// Math. Z. -1988. -V. 227. -P. 83 – 92.

46. Hurtado A. Instability of Hopf vector fields on Lorentzian Berger spheres/A.Hurtado // arXiv:math.DG/0803.2487 v1. -2008.

47. Klingenberg W. Tangent sphere bundle of a 2-sphere/ W. Klingenberg, S. Sasaki.// Tohôku Math. J. -1975. -V. 27. -P. 45 – 57.

48. Kowalski O. Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold/O. Kowalski // J. Reine Angew. Math. -1971. -V. 250. -P. 124 – 129.

49. Kowalski O. On riemannian manifolds whose tangent sphere bundles can have nonnegative sectional curvature/O. Kowalski, M.Sekizawa // Univ. Iagellonicae Acta Math.. -2002. -V. XL.-P. 245 – 256

50. Kowalski O. Natural transformations of Riemannian metrics on manifolds to metrics on tangent bundles – a classification/O. Kowalski, M.Sekizawa// Bull. Tokyo Gakugei Univ. -1988. -V. 40, №4. -P. 1 – 29.

51. Kowalski O. On tangent sphere bundles with small or large constant radius/O. Kowalski, M.Sekizawa// Ann. Global Anal. Geom. -2000. -V. 18. -P. 207 — 219.

52. Kowalski O. Can tangent sphere bundles over Riemannian manifolds have strictly positive sectional curvature?/O. Kowalski, M.Sekizawa, Z.Vlasek // Global Differential Geometry: The Mathematical Legacy of Alfred Gray (eds. M. Fernandez and J.A. Wolf), Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc. -2001. -V. 288. -P. 110–118.

53. Konderak J. J. On harmonic vector fields/J. J. Konderak // Publ. Mat. -1992. -V. 36. -P. 217 – 228.

54. Liu M.-S. Affine maps of tangent bundles with Sasaki metric/ M.-S. Liu //Tensor, N.S., -1974. -V. 28. -P. 34 – 42

55. Maltz R. The nullity spaces of curvature-like tensors/ R.Maltz// J. Diff. Geom. -1972. -V 6, № 3-4. -P. 219 – 299.

56. Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups/J. Milnor // Adv. in Math. -1976. -T. 21. -C. 293 – 329.

57. Munteanu M. Cheeger Gromoll type metrics on the tangent bundle/M.Munteanu // arXiv:math.DG/0610028. -2006.

58. Munteanu M. New structures on the tangent bundles and tangent sphere bundles/ M.Munteanu // arXiv:math.DG/0511377 v2.-2006.

59. Musso E., Tricerri F. Riemannian metrics on tangent bundles/E.Musso, F.Tricerri // Ann. Math. Pura Appl. -1988. -V. 150, № 4. -P. 1 – 20.

60. Nagy P.T. Geodesics on the tangent sphere bundle of a Riemannian manifold/P.T.Nagy // Geom. Dedic. -1978. -V. 7, № 2. -P. 233 – 244.

61. Oproiu V. A Kähler Einstein structure on the tangent bundle of a space form/V.Oproiu // Int. J. Math. Math. Sci. -2001. -V. 25. -P. 183 – 195.

62. Oproiu V. Hyper-Kähler structures on the tangent bundle of a Kähler manifold/V. Oproiu // Balkan J. Geom. Appl. -2010. -V. 15, № 1. -P. 104 – 119.

63. Pedersen S. L. Volumes of vector fields on spheres/S.L.Pedersen// Trans. Amer. Math. Soc. 336 (1993),69-78.

64. Rovenskii V. Foliations on Riemannian manifolds/ V.Rovenskii // Birkháuser. -1997.

65. Sasaki S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds I/S.Sasaki// Tôhoku Math. J. -1958. -V. 10. -P. 338 – 354.

66. Sasaki S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds II/S.Sasaki// Tôhoku Math. J. -1962. -V. 14. -P. 145 – 155.

67. Sasaki S. Geodesics on the tangent sphere bundle over space forms/S.Sasaki// J. Reine Angew. Math. -1976. -V. 288. -P. 106 – 120.

68. Sato K. Geodesics on the tangent bundle over space forms/K. Sato// Tensor. -1978. -V. 32. C. 5 – 10.

69. Simons J. Minimal Varieties in Riemannian Manifolds/J.Simons // Annals of Mathematics. - 1968. -T. 88, №1. -P. 62 – 105.

70. Sekizawa M. Curvatures of Tangent Bundles with Cheeger-Gromoll Metric// Tokyo J. Math. -1991. -V. 14, №2. -P. 407 – 417.

71. Satoh T. Curvatures of tangent hyperquadric bundles/T.Satoh, M. Sekizawa // Diff. Geom. Appl. -2011, -V. 29. -P. 255 — 260.

72. Tashiro Y. On contact structures of tangent sphere bundles/Y.Tashiro // Tohôku Math. J. -1969. -V. 21. -P. 117 – 143.

73. Tsukada K. Invariant minimal unit vector fields on Lie groups/K.Tsukada, L.Vanhecke// Period. Math. Hungar. -2000. -V. 40. -P. 123 – 133.

74. Tsukada K. Minimality and harmonicity for Hopf vector fields/K.Tsukada, L.Vanhecke// Illinois J. Geom. -2011. -V. 45. -P. 441 – 451.

75. Tsukada K. Minimal and harmonic vector fields on $G_2(C^{m+2})$ and its dual space/K.Tsukada, L.Vanhecke// Monatsh. Math. -2000. -V. 130. -P. 143-154.

76. Vergara-Diaz E. Harmonic almost contact structures/E.Vergara-Diaz, C. M. Wood// arXiv:math.DG/0602533 v1. -2006.

77. Walczak P. On totally geodesic submanifolds of tangent bundle with Sasaki metric/P.Walczak // Bull. Acad. Pol. Sci, ser. Sci. Math. -1989. -V. 28, №.3-4. -P. 161 – 165

78. Weigmink G. Total Bending of Vector Fields on Riemannian Manifolds/G.Weigmink // Math. Ann. -1995. -V. 303. -P. 325 – 344.

79. G. Wiegmink, Total bending of vector fields on the sphere S^3 /G.Weigmink//Diff. Geom. Appl. -1996. -V. 6. -P. 219-236.

80. Wood C. M. On the energy of a unit vector field/C. M. Wood // Geom. Dedicata. -1997. -V. 64. -P. 319 – 330.

81. Wood C. M. The energy of Hopf vector fields/ C. M. Wood // Manuscr. Math. -2000. -V. 101. -P. 71 – 78.

82. Wood C. M. Bending and stretching unit vector fields in euclidean and hyperbolic 3-space/C. M. Wood// arXiv:math.DG/0612286 v1. -2006

83. Yano K. CR-submanifolds of Kählerian and Sasakian manifolds/K. Yano, M. Kon // Birkhäuser, 1983.

84. Аминов Ю.А. О поверхностях в E^4 со знакопостоянным гауссовым кручением/ Ю.А. Аминов // Укр. геом. сб. -1988. -вып. 31. -С. 3 – 14.

85. Аминов Ю.А. Геометрия подмногообразий/ - Киев. Наукова думка 2002. - 468 С.

86. Аминов Ю.А. Геометрия векторного поля/ - М. Наука, ГРФМЛ. -1990. - 208 С.

87. Бессе А. Многообразия Эйнштейна/М. Мир. -1987, Т 1.

88. Бляшке В. Дифференциальная геометрия/ Пер. с нем. - ОНТИ. 1935. - 330 С.

89. Борисенко А.А. Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий/ М. Экзамен. -2003. -672 С.

90. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, т. 2/ М.: Наука. -1981. -344 с.

91. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ/Пер. с англ. - М.: Мир. 1989. -655 С.

92. Ямпольский А.Л. К геометрии сферических касательных расслоений римановых многообразий/ А.Л. Ямпольский // Укр. геом. сб. -1981. -вып. 24. -С. 129 – 132.

93. Ямпольский А.Л. Кривизна метрики Сасаки сферических касательных расслоений/ А.Л. Ямпольский// Укр. геом. сб. -1985. -вып. 28. -С. 132 – 145.

94. Ямпольский А. Цилиндричность касательных расслоений сильно параболических метрик и сильно параболических поверхностей/ Борисенко

А., Ямпольский А. // Укр. геом. сб. -1986. -вып. 29. -С. 12-32 (Engl. transl.: Journ. Sov. Math., 1990, v.51, N 2, pp. 2197-2212) .

95. Геметрия касательного и нормального расслоения с метрикой Сасаки/ Дисс. канд. физ.-мат. наук. Одесса. -1986. -147. С.

96. Ямпольский А. Секционная кривизна метрики Сасаки T_1M^n/Борисенко А., Ямпольский А. // Укр. геом. сб. -1987. -вып. 30. -С. 10-17 (Engl. transl.: Journ. Sov. Math., 1990, v.51, N 5, pp. 2503-2508) .

97. Ямпольский А. О метрике Сасаки касательного и нормального расслоений/ Борисенко А., Ямпольский А. // ДАН СССР. -1987. -Т. 294, № 1. -С. 19 – 22 (Engl. transl.: Sov. Math. Dokl., 1987, v.35, N 3, pp.479-482).

98. Ямпольский А. О метрике Сасаки нормального расслоения подмногообразия в римановом пространстве/ Борисенко А., Ямпольский А. // Мат. Сб. -1987. -Т.134, № 2. -С. 158 – 176 (Engl. transl.: Math. USSR Sbornik, 1989, v.62, N 1, pp. 157-175).

99. Ямпольский А. Риманова геометрия расслоений/ Борисенко А., Ямпольский А. // Успехи Мат. Наук. -1991. -Т. 46, № 6. -С. 51 – 95.

100. Ямпольский А. Экстремальные значения секционной кривизны метрики Сасаки сферического касательного расслоения пространства постоянной кривизны/ А.Л. Ямпольский// Укр. геом. сб. -1988. -вып. 32. -С. 127-137.

101. Ямпольский А. Характеризация проекций геодезических метрики Сасаки TCP^n и T_1CP^n / А.Л. Ямпольский// Укр. Геом. Сборник. -1991. -Т. 34. -С. 121 – 126.

102. Ямпольский А. О сильной сферичности метрики Сасаки сферического касательного расслоения/ А.Л. Ямпольский// Укр. геом. сб. -1992. -вып. 35. -С. 150-159 (Engl. transl.: Journ. Math. Sci., 1994, v. 72, N 4, pp. 3261-3266).

103. Ямпольский А. О вполне геодезических векторных полях на подмногообразии/ А.Л. Ямпольский// Мат. физ., анализ, геометрия. -1994. -Т. 1, № 1-2. -С. 540 – 545.

104. Ямпольский А. О вертикальной сильной сферичности метрики Сасаки сферических касательных расслоений/ А.Л. Ямпольский // Мат. физ., анализ, геометрия. -1996. -Т. 3, № 3-4. -С. 446 – 456.

105. Yampolsky A. On intrinsinc geometry of a unit vector field/ A.Yampolsky // Comment. Math. Univ. Carol. -2002. -V. 43, №2. -P. 131 – 155.

106. Yampolsky A. On the mean curvature of a unit vector field/A.Yampolsky // Math. Publ. Debrecen -2002. -V. 60, №1-2. -P. 131 – 155.

107. Yampolsky A. A totally geodesic property of Hopf vector field/ A.Yampolsky // Acta Math. Hungar. -2003. -V. 101, № 1-2. -P. 93 – 112.

108. Yampolsky A. On extrinsic geometry of unit normal vector field of Riemannian hyperfoliation/ A.Yampolsky// Math. Publ. Debrecen 63/4 (2003), 555 – 567.

109. Yampolsky A. Powers of the space form curvature operator and geodesics of the tangent bundle/ E.Saharova, A.Yampolsky // Укр. Мат. Ж. -2004, -Т.56, №9. -С. 1231 – 1243.

110. Yampolsky A. Transverse totally geodesic submanifolds of the tangent bundle/M.T.K. Abbassi, A.Yampolsky // Publ. Math. Debrecen. -2004, -V. 64, № 1-2. -P. 129 – 154.

111. Yampolsky A. Full description of totally geodesic unit vector field on Riemannian 2-manifold/A.Yampolsky // Journal of Mathematical Physics, Analysys, Geometry. -2004. -V.1, №3. -P. 355 – 365.

112. Ямпольский А. О вполне геодезических единичных векторных полях на римановом многообразии/ А. Ямпольский// Доповіді НАН Укр. -2005. -Т. 3. -С. 32 – 35.

113. Yampolsky A. Totally geodesic submanifolds in the tangent bundle of a Riemannian 2-manifold/ A.Yampolsky// Journal of Mathematical Physics, Analysys, Geometry. -2005. -V.1, №1. -P. 116 – 139.

114. Yampolsky A. On special types of minimal and totally geodesic unit vector fields/A.Yampolsky// Proceedings of the Seventh International Conference in Geometry, Integrability and Quantization June 2 – 10, 2005, Varna, Bulgaria/I. Mladenov edt., -P. 292 – 306.

115. Ямпольський А. Геометрія підмноговидів у ріманових просторах/ О. Борисенко, А. Ямпольський, Л. Масальцев, О. Лейбіна // Фундаментальні орієнтири науки і техніки, сер. Математика, інформатика, механіка та астрономія, зб. статей. -2005. -С. 43 – 57.

116. Yampolsky A. Invariant totally geodesic unit vector fields on three-dimensional Lie groups/ A.Yampolsky // Journal of Mathematical Physics, Analysys, Geometry. -2007. -V.3, №2. -P. 253 – 276.

117. Yampolsky A. Totally geodesic vector fields on pseudo-Riemannian manifolds/ A.Yampolsky // Вестник ХНУ им. В.Н. Каразина, сер. Мат., прикл. Мат., мех. -2011. Т. 990. С. 4 – 14.

118. Yampolsky A. On geodesics of tangent bundle with fiberwise deformed Sasaki metric over Kahlerian manifold / A.Yampolsky // Journal of Math. Phys., Analysis, Geom. -2012. -V. 8, №2. -P. 177 – 189.

119. Yampolsky A. Minimal and totally geodesic sections of the unit sphere bundles / A.Yampolsky // Вісник ХНУ, сер. Мат. Прикл. Мат і мех. -2012. -Т. 1030. -С. 54 – 70.

120. Yampolsky A. Stability of left-invariant totally geodesic unit vector fields on three-dimensional Lie groups / A.Yampolsky // Geometry and its Applications. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. -2014. -Vol. 72. -P. 167 – 195

121. Ямпольский А. Об экстремумах секционной кривизны метрики Сасаки сферического касательного расслоения пространства постоянной кривизны/А.Ямпольский // IX Всесоюзная конференция по геометрии: тезисы сообщений (Кишинев, 20 – 22 сентября 1988 г.). -Кишинев, 1988. -С. 377.

122. Ямпольский А. Характеризация проекций геодезических TCPn/ А.Ямпольский // Всесоюзная конференция по геометрии и анализу: тезисы докладов. -Новосибирск, 1989. -С. 103.

123. Ямпольский А. Об индексе сильной сферичности сферического касательного расслоения / А.Ямпольский // Всесоюзное совещание молодых ученых по дифференциальной геометрии, посвященное 80-ти летию Н.В. Ефимова: тезисы докладов (Абрау-Дюрсо, 29 сентября – 5 октября 1990 г.). - Ростов-на-Дону, 1990. -С. 124.

124. Ямпольский А . Об одной вполне геодезической поверхности в TS2/ А.Ямпольский // Республиканская научно-методическая конференция, посвященная 200-летию со дня рождения Н.И. Лобачевского: тезисы докладов, Ч. 2 (Одесса, 3-8 сентября 1992). -Одесса, 1992. -С. 50.

125. Yampolsky A.L. The classification of totally geodesic submanifolds in the tangent bundle of 2-dimensional Riemannian manifold/A.L. Yampolsky // Міжнародна конференція з геометрії "в цілому": тези доповідей (Черкаси, 12 – 15 вересня 1995 р.). -Черкаси, 1995. -С. 96-97.

126. Yampolsky A. On some surfaces in the tangent bundle / A. Yampolsky // 4-th Intern. Congress of Geometry: book of abstracts (Thessaloniki, May 26-June 1, 1996). -Thessaloniki, 1996. -P. 139.

127. Yampolsky A. On the curvature of Sasaki metric of tangent sphere bundle of the complex projective space/ A.Yampolsky // 3-я міжнародна конферен-

ція з геометрії "в цілому": тези доповідей (Черкаси, 29 червня – 4 липня 1999 р.). -Черкаси, 1999. -С. 57-58

128. Ямпольский А. Гауссова кривизна векторного поля на двумерном многообразии/ А. Ямпольский // 4-а міжнародна конференція з геометрії і топології: тези доповідей. -Черкаси, 2001. -С. 109 – 111.

129. Ямпольский А. О вполне геодезических подмногообразиях в касательном расслоении с метрикой Сасаки/ А. Ямпольский// 5-а міжнародна конференція з геометрії та топології пам'яті О.В. Погорєлова: тези доповідей. -Черкаси, 2003. -С. 159-160.

130. Yampolsky A. Totally geodesic unit vector fields/ A.Yampolsky // 1-st Karazin Scientific Readings: book of abstracts (Kharkiv, June 14 - 16, 2004). -Kharkiv, 2004. -P. 30.

131. Ямпольский А. Вполне геодезические инвариантные единичные векторные поля на трехмерных группах Ли/ А. Ямпольский// 6-а міжнародна конференція з геометрії та топології: тези доповідей. -Черкаси, 2005. -С. 97 – 98.

132. Yampolsky A. Minimal and totally geodesic unit vector fields/ A.Yampolsky // Геометрия в целом, топология и их приложения/ Международная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения Алексея Васильевича Погорелова: Сборник тезисов. -Харьков, 2009. -С. 73 - 74.

133. Ямпольский А.Л. Минимальные единичные нормальные векторные поля на подмногообразии /А.Л. Ямпольский// Международная конференция "Тараповские чтения": Сборник тезисов (Харьков, 17 - 22 апреля 2011). - Харьков, 2011. - С. 155.

134. Yampolsky A. Minimal and totally geodesic unit sections of unit sphere bundles/ A.Yampolsky // Second Int. Workshop on Geometry and Symbolic

Computations: Program and Book of Abstracts (University of Haifa, May 15 - 18). -University of Haifa (Israel). -2013. -P. 15.

135. Yampolsky A. Riemannian geometry of sections of sphere bundles/ A.Yampolsky // Крымская международная математическая конференция: сборник тезисов (Судак, 22 сентября - 4 октября 2013 г.) т.2. Судак, 2013. -С. 81 - 82.

136. Ямпольский А. Об устойчивости вполне геодезических единичных векторных полей на двумерных многообразиях/ А.Ямпольский// 8-а міжнародної конференції з геометрії, топології та викладання геометрії: тези доповідей (Черкаси, 9 - 15 вересня 2013 р.). -Черкаси, 2013. -С. 34 - 35.

137. Ямпольский А. О единичных векторных полях постоянной секционной кривизны// Современные проблемы математики, механики и информатики/ А. Ямпольский // Тезисы локладов международной школы-конференции "Современные проблемы математики, механики и информатики посвященной 150-летию кафедры теоретической механики "Тараповские чтения – 2013": тезисы докладов (Харьков, 29 сентября - 4 октября 2013 г.). -Харьков, 2013. -С. 123 - 124.

138. Ямпольский А. Конформная модель единичного вполне геодезического векторного поля/ А. Ямпольский //Международная конференция «Геометрия в Одессе — 2015» : тезисы докладов (Одесса, 25 – 28 мая 2015 г.). -Одесса, 2015. -С. 94.