

СУМСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи

Драч Константин Дмитриевич

УДК 514.764.27

**ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ
ДЛЯ ПОЛНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ
В РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Борисенко Александр Андреевич,
член – корреспондент НАН Украины,
доктор физико-математических наук,
профессор

Харьков - 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
РАЗДЕЛ 1. Основные определения и вспомогательные факты	14
1.1. Базовые факты и определения из римановой геометрии	14
1.2. Базовые факты и определения из лоренцевой геометрии	21
1.3. Теоремы сравнения для нормальных кривизн линий уровня функции расстояния в римановых и лоренцевых пространствах	28
1.4. λ -выпуклые и λ_1, λ_2 -выпуклые гиперповерхности: необходимые сведения	31
1.5. Необходимые сведения из теории оптимального управления	38
1.5.1. Принцип максимума Понтрягина.	38
1.5.2. Особые экстремали и необходимое условие Лежандра – Клебша. . .	40
1.6. Выводы к разделу 1	42
РАЗДЕЛ 2. Теоремы сравнения радиальных (гиперболических) углов в ри- мановых (лоренцевых) многообразиях и следствия из них	44
2.1. Понятия функций радиального и гиперболического угла, их связь с нор- мальными кривизнами.	44
2.2. Теорема сравнения радиальных углов в римановых многообразиях огра- ниченной кривизны	50
2.3. Теорема об оценке функции радиального угла λ -выпуклых гиперпо- верхностей.	55
2.4. Эквивалентность теоремы сравнения радиальных углов и теоремы про- катывания Бляшке.	60

2.5. Теоремы сравнения и оценки функции гиперболического угла для гиперповерхностей ограниченной нормальной кривизны в лоренцевых пространствах.	75
2.6. Выводы к разделу 2	86

РАЗДЕЛ 3. Теоремы об оценке параметров сферического слоя, вмещающего в себя выпуклую гиперповерхность **89**

3.1. Оценка ширины и отношения радиусов сферического слоя для специальных гиперповерхностей в $M^{m+1}(c)$	90
3.2. Теоремы об оценках параметров сферического слоя, вмещающего полные λ - или λ_1, λ_2 -выпуклые гиперповерхности в $M^{n+1}(c)$, и следствия из них	98
3.3. Оценка ширины сферического слоя для λ -выпуклой гиперповерхности в римановом многообразии знакопостоянной кривизны	107
3.4. Выводы к разделу 3	112

РАЗДЕЛ 4. Обратная изопериметрическая задача для λ -выпуклых гиперповерхностей **114**

4.1. Изопериметрические свойства луночек в $M^2(c)$: формулировка результатов	114
4.2. Обратное изопериметрическое неравенство для λ -выпуклых кривых в $M^2(c)$	115
4.3. Обратная изопериметрическая задача для λ -выпуклых гиперповерхностей: существование решения	122
4.4. Лемма о дополнительной симметрии решения для обратной изопериметрической задачи	123
4.5. Доказательство обратного изопериметрического свойства луночек в \mathbb{E}^2 и следствия из него	125
4.5.1. Следствие: теорема Бляшке–Лебега.	136

4.6. Доказательство обратного изопериметрического свойства луночек в \mathbb{S}^2 и \mathbb{H}^2 и следствия из него	137
4.6.1. Следствие: некоторые двойственные результаты в $\mathbb{S}^2(k^2)$	151
4.6.2. Следствие: теорема Сантало – Янеша в $\mathbb{H}^2(-k^2)$	153
4.7. Выводы к разделу 4	155
ВЫВОДЫ	157
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	159

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Результаты по внешней геометрии подмногообразий можно естественным образом разделить на два класса: локальные, когда речь идет о локальных свойствах объекта в некоторой окрестности пространства, и глобальные результаты “в целом”, когда что-то утверждается об объекте целиком. Второй класс включает в себя первый, поэтому получение результатов “в целом” является, в некотором смысле, более интересной но сложной задачей. Классические результаты дифференциальной и римановой геометрии “в целом” были получены в первой половине XX века в работах Д. Гильберта, В. Бляшке, А. Д. Александрова, А. В. Погорелова. Позднее, их результаты были развиты и дополнены в работах Л. Сантало, Г. Каршера, А. Д. Милки и др. Современное развитие идей геометрии “в целом” может быть проиллюстрировано, среди прочего, положительным решением гипотез Г. Лоусона (С. Брендл, [45]) и Т. Вилмора (Ф. К. Маркус и А. Невес, [71]).

В 1972 году Л. Сантало и И. Янеш [79], занимаясь вопросами геометрической теории вероятностей, исследовали асимптотическое поведение семейств h -выпуклых областей, т.е. областей, кривизна границы которых не меньше 1, которые распространяются на все пространство. Они показали, что на плоскости Лобачевского кривизны -1 для таких областей отношение их площади к длине границы стремится к 1. Стоит отметить, что для выпуклых областей на евклидовой плоскости этот предел равен ∞ , а для произвольных выпуклых областей на плоскости Лобачевского, как было показано Э. Галлего и А. Ревентосом [55, 56], этот предел может принимать любое значение от 0 до 1. Обобщение результата Сантало и Янеша на случай многомерного пространства Лобачевского при дополнительных ограничениях на семейство h -выпуклых областей было получено в [72]. Используя принципиально другой подход, А. А. Борисенко с соавторами (В. Микуэль,

Э. Галлего, Д. И. Власенко и др.) в целом цикле работ [40, 5, 39, 34, 41] удалось убрать эти ограничения и перенести результат Сантало и Янеша на случай семейства λ -выпуклых областей, т.е. областей, нормальные кривизны границы которых не меньше λ для некоторой положительной константы $\lambda \leq 1$, в полных односвязных римановых многообразиях отрицательной кривизны не меньше -1 (многообразия Адамара). Ключевым этапом этих исследований было рассмотрение величины угла между границей области и радиальным направлением из фиксированной точки внутри этой области (функция радиального угла) и доказательство предложенной А. А. Борисенко теоремы сравнения и следующих из нее точных оценок для таких углов. Аналогичные оценки в случае объемлющего евклидова пространства были получены и применены в работах А. А. Борисенко с К. Тененблат [43] и с Е. А. Олиным [42]. Поэтому интересным является распространение упомянутых результатов для функции радиального угла на случай неотрицательно искривленных многообразий, а также на многообразия Адамара в случае $\lambda > 1$.

В лоренцевой геометрии для пространственноподобных гиперповерхностей в пространстве – времени каноническим образом возникает понятие *функции гиперболического угла* между ориентирующим времениподобным векторным полем и направленным в будущее (времениподобным) нормальным векторным полем к гиперповерхности. Величина этого угла рассматривается в вопросах общей теории относительности и имеет определенный физический смысл [77, пп. 2.1.3, 3.1.2]. В цикле работ А. Ромеро, Р. Рубио с соавторами [47, 48, 27] эта функция была использована для исследования поверхностей постоянной средней кривизны и получения результатов в духе С. Н. Бернштейна. Для этого они существенно использовали ограниченность этой функции. Именно поэтому естественно попытаться перенести результаты по оценкам радиальных углов в римановых пространствах на случай поверхностей ограниченной нормальной кривизны в лоренцевых многообразиях.

Ограничения на нормальную кривизну полной гиперповерхности, в свою очередь, накладывают ограничение на структуру этой поверхности “в целом”.

Так, В. Бляшке доказал [3], что гладкий оваллоид (т.е. граница компактной области с внутренними точками) в \mathbb{E}^m , нормальная кривизна которого удовлетворяет $k_n \geq \lambda > 0$ (λ -выпуклый), может свободно перекатываться в шаре радиуса $1/\lambda$. В случае $\lambda \geq k_n > 0$, соответствующий шар может свободно перекатываться внутри оваллоида. Эта теорема обобщалась во многих направлениях в пространствах постоянной кривизны (см., например, [66, 21]), а также для произвольных римановых многообразий в работе Р. Ховарда [62]. Возникает естественный вопрос о связи теоремы прокатывания Бляшке с теоремой сравнения углов для полных λ -выпуклых поверхностей в пространствах постоянной кривизны и в общих римановых пространствах.

А. А. Борисенко (частично с В. Микуэлем) в серии работ [40, 34, 41, 35] была получена точная оценка для ширины сферического слоя, т.е. пространства между двумя концентрическими геодезическими сферами, в который можно поместить замкнутую λ -выпуклую гиперповерхность, $\lambda \in (0, 1]$, в многообразиях Адамара кривизны не меньше -1 . Частный случай этого результата в пространстве Лобачевского был позднее другими методами получен В. К. Иониным [20]. Оценки подобного рода показывают степень близости соответствующей поверхности к сфере. Поэтому естественный интерес представляют исследования степени сферичности λ -выпуклых поверхностей при других ограничениях на λ в многообразиях Адамара и в римановых пространствах неотрицательной кривизны. Более того, возникает вопрос о степени сферичности и получении соответствующих точных оценок для полных гиперповерхностей *защемленной нормальной кривизны*, кривизна которых для некоторых положительных констант λ_1, λ_2 удовлетворяет неравенству $\lambda_2 \geq k_n \geq \lambda_1$. С этим вопросом тесно связаны исследования о стабильности для гиперповерхностей, у которых матрица второй фундаментальной формы в каждой точке p в некоторой норме близка к $\lambda(p) \cdot I$, где $\lambda(p)$ – функция точки, I – единичная матрица (*практически омбилические поверхности*). Результаты такого типа были получены А. В. Погореловым [25, Гл. VII, §9], В. И. Дискантом [16], Р. Шнайдером [81], К. Лихтвейсом [70], Ж. Шойером [80] и др.

Один из важных разделов глобальной геометрии гиперповерхностей составляют вариационные задачи, в частности, связанные с минимизацией одних геометрических величин при ограничении (фиксации) других. Пожалуй, исторически первым вопросом такого рода является известная *изопериметрическая задача*. Она заключается в следующем: максимизировать объем компактной области при заданной площади ее границы. В \mathbb{E}^m решением классической изопериметрической задачи является шар. Эта задача решалась и нетривиально обобщалась многими математиками, среди них Я. Штейнер, К. Брунн, Г. Минковский, Т. Боннезен, А. Д. Александров. Из многочисленных современных исследований в этой области отметим недавнее решение гипотезы двойного пузырька [64] о форме связной поверхности в \mathbb{E}^3 минимальной площади, ограничивающей две различные области с наперед заданными объемами. Наряду с классической постановкой, имеет место и *обратная изопериметрическая задача о минимизации* объема и нахождении экстремального объекта. Для произвольных областей она имеет тривиальное решение. Поэтому необходимо естественным образом сузить класс рассматриваемых объектов с наложением дополнительных ограничений. Одним из таких ограничений может быть кривизна. Единственный результат такого типа был получен Р. Ховардом и А. Трайбергсом в [63]. В ней авторы полностью решили обратную изопериметрическую задачу в \mathbb{E}^2 для замкнутых вложенных кривых кривизны $|k| \leq 1$ (вообще говоря, не выпуклых) при некоторых дополнительных ограничениях на длину. В этом свете большой интерес представляет рассмотрение обратной изопериметрической задачи в классе полных λ -выпуклых гиперповерхностей. В завершение отметим, что в \mathbb{E}^m такой вопрос переключается с *задачей Бляшке – Лебега* о минимизации объема области, граница которой есть гиперповерхность постоянной ширины d ([33, 69, 58, 60] для $m = 2$, в размерности больше 2 проблема Бляшке – Лебега в полной общности до сих пор не решена). При $m = 2$ и $m = 3$, с необходимостью, решением задачи является полная $1/d$ -выпуклая гиперповерхность [60, 26].

Связь работы с научными программами, планами, темами. Диссерта-

ция выполнена на кафедре математического анализа и методов оптимизации Сумского государственного университета. Она является составной частью научно-исследовательских работ: “Глобальная геометрия подмногообразий в римановых и финслеровых пространствах” (номер госрегистрации 0109U001454) и “Глобальная геометрия и топология многообразий и подмногообразий в римановых и финслеровых пространствах” (номер госрегистрации 0111U010008).

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является изучение экстремальных свойств полных выпуклых гиперповерхностей ограниченной нормальной кривизны и их нерегулярных аналогов в римановых и лоренцевых пространствах.

Объектом исследования являются полные λ - и λ_1, λ_2 -выпуклые гиперповерхности в римановых и лоренцевых пространствах и связанные с ними геометрические величины (функции радиальных (гиперболических) углов, площади, объемы и т. д.).

Предметом исследования является строение и свойства полных λ - и λ_1, λ_2 -выпуклых гиперповерхностей в римановых и лоренцевых многообразиях.

Основные задачи исследования состоят в следующем:

1. Исследовать понятие функции радиального угла, определяемого для полных гладких λ -выпуклых гиперповерхностей по отношению к некоторой фиксированной точке внутри области, ограниченной этой поверхностью, в римановых многообразиях ограниченной знакопостоянной секционной кривизны; сравнить поведение этой функции с соответствующей функцией для вполне омбилических гиперповерхностей кривизны λ в модельных пространствах. Провести аналогичное исследование для λ -вогнутых гиперповерхностей.

2. Используя результаты предыдущего пункта, исследовать границы изменения функции радиального угла λ -выпуклых гиперповерхностей и получить соответствующие точные оценки.

3. Перенести результаты пунктов 1 и 2 на случай пространственноподобных гиперповерхностей, нормальная кривизна которых удовлетворяет $k_n \leq \lambda$, и кото-

рые лежат в пространстве – времени положительной времениподобной секционной кривизны.

4. В модельных римановых многообразиях постоянной кривизны исследовать связь результатов сравнения радиальных углов из пункта 1 и теоремы прокатывания Бляшке. Выяснить возможность распространения этой связи на случай римановых многообразий знакопостоянной кривизны.

5. Найти точные границы изменения ширины $R - r$ и отношения радиусов R/r сферического слоя, в который можно поместить полную λ - или λ_1, λ_2 -выпуклую гиперповерхность в модельных римановых пространствах; исследовать вопросы стабильности для λ_1, λ_2 -выпуклых гиперповерхностей в этих пространствах. Перенести полученные для λ -выпуклых поверхностей оценки на случай римановых многообразий знакопостоянной кривизны.

6. В двумерных пространствах постоянной кривизны исследовать вопрос о минимизации ограничиваемой площади при фиксированной длине для замкнутых вложенных λ -выпуклых кривых; получить соответствующие обратные изопериметрические неравенства; найти экстремальную кривую и исследовать ее свойства; получить возможные следствия из доказанных неравенств.

Методы исследования. В работе использованы методы общей римановой и лоренцевой геометрий, методы синтетической геометрии, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, аппарат сравнения в римановой и лоренцевой геометриях. В заключительном разделе работы для получения обратных изопериметрических неравенств была широко использована геометрическая теория оптимального управления и принцип максимума Л. С. Понтрягина.

Научная новизна полученных результатов. Все полученные в диссертационной работе результаты являются новыми. Основными являются следующие:

1. Доказана теорема сравнения радиальных углов для гладких вложенных λ -выпуклых гиперповерхностей в полных римановых многообразиях ограниченной секционной кривизны. Доказаны аналогичные результаты для λ -вогнутых гиперповерхностей.

2. Получены точные оценки величин радиальных углов, построенных для полной гладкой λ -выпуклой гиперповерхности относительно точки p ; показано, что эти углы ограничены сверху константой, зависящей от λ , ограничений на секционные кривизны многообразия и расстояния от p до гиперповерхности.

3. В случае лоренцева пространства – времени получена формула, связывающая нормальную кривизну пространственноподобной гиперповерхности, ее функцию гиперболического угла и нормальную кривизну временных сечений (аналог леммы А. А. Борисенко в римановом случае). При помощи этой формулы для пространства – времени положительной времениподобной секционной кривизны и полной пространственноподобной гиперповерхности кривизны $k_n \leq \lambda$ были доказаны результаты, аналогичные изложенным в пунктах 1 и 2. В частности, было показано, что функция гиперболического угла всегда ограничена сверху константой, зависящей только от λ и ограничений на времениподобные секционные кривизны многообразия.

4. В модельных римановых многообразиях постоянной кривизны была доказана эквивалентность теорем сравнения углов и теоремы прокатывания Бляшке для полных гладких λ -выпуклых гиперповерхностей. Используя результаты пункта 1, впервые было получено прямое обобщение теоремы Бляшке на общий риманов случай. Также получены аналогичные результаты для λ -вогнутых гиперповерхностей.

5. Впервые получены точные оценки для ширины $R - r$ слоя, в который можно поместить полную вложенную λ_1, λ_2 -выпуклую гиперповерхность в римановых модельных пространствах; в евклидовом случае была получена точная оценка для отношения радиусов R/r этого слоя. Полученные оценки ширины слоя были перенесены в λ -выпуклом случае на римановы многообразия ограниченной знакопостоянной кривизны.

6. Впервые получены обратные изопериметрические неравенства для замкнутых вложенных λ -выпуклых кривых, лежащих на двумерных плоскостях постоянной кривизны. В частности, продемонстрировано, что единственным решением

ем обратной изопериметрической задачи в соответствующем классе является λ -выпуклая луночка. В качестве следствий получены двойственные неравенства на сфере S^2 , доказаны теоремы Бляшке – Лебега в E^2 и Сантало – Янеша в H^2 .

Практическое значение полученных результатов. Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы для дальнейших исследований в области выпуклой геометрии. Материалы, содержащиеся в диссертации, могут включаться в спецкурсы по дифференциальной и римановой геометрии, теории оптимизации и вариационного исчисления для студентов старших курсов университетов.

Личный вклад соискателя. Постановки задач принадлежат научному руководителю – члену-корреспонденту Национальной академии наук Украины, д. ф.-м. н., профессору А. А. Борисенко. Обобщения некоторых постановок принадлежат соискателю. Реализация доказательств всех утверждений, вынесенных на защиту, проведена соискателем самостоятельно.

Апробация результатов диссертации. Материалы диссертации докладывались и обсуждались на IV научной конференции для студентов и аспирантов “Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях” (Харьков, 2010), международной конференции “Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях” посвященной 50-летию механико-математического факультета (Харьков, 2011), международной конференции Differential Geometry (Bedlewo, Poland, 2012), научно-технической конференции IMA::2013 (Сумы, 2013), международной конференции Differential Geometry and its Applications (Brno, Czech Republic, 2013), 8-ой международной конференции по геометрии, топологии и преподаванию геометрии (Черкасы, 2013), International Congress of Mathematicians 2014 (Seoul, Korea, 2014), 3rd Heidelberg Laureate Forum (Heidelberg, Germany, 2015), семинаре в рамках Research Term in Analysis and Geometry in Metric Spaces (Madrid, Spain, 2015), семинаре по анализу университета Цинциннати (Цинциннати, США, 2015, руководитель – профессор Нагешвари Шанмугалингам), семинаре

кафедры математического анализа и методов оптимизации Сумского государственного университета (Сумы, 2013, руководители – член-корреспондент НАН Украины, профессор, д. ф.-м. н. А. А. Борисенко и проф. К. Г. Малютин), семинаре кафедры оптимального управления (ХНУ им. В. Н. Каразина, 2015, руководитель – д. ф.-м. н., профессор В. И. Коробов), а также на заседаниях Харьковского городского геометрического семинара ХНУ им. В. Н. Каразина (руководители – член-корреспондент НАН Украины, д. ф.-м. н., профессор А. А. Борисенко и д. ф.-м. н., профессор Ю. А. Аминов).

Публикации. Результаты, представленные в диссертации, опубликованы в 7 статьях [6, 9, 10, 11, 19, 38, 51] в журналах, входящих в перечень ВАК Украины, из них 2 статьи без соавторов, и в 6 сборниках тезисов докладов международных научных конференций [7, 8, 10, 17, 18, 36], из них 2 – без соавторов.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех разделов, выводов и списка использованных источников, который включает в себя 84 наименования. Работа представлена на 168 страницах, список первоисточников занимает 9 страниц. В работе содержится 14 иллюстраций, из которых ни одна не занимает отдельной страницы. Основные результаты, которые выносятся на защиту, изложены в разделах 2 - 4.

Автор выражает огромную благодарность своему учителю и научному руководителю – члену-корреспонденту НАН Украины, доктору физико-математических наук, профессору Александру Андреевичу Борисенко, за постановки задач, поддержку и за геометрию, в красоте которой научил разбираться. Автор глубоко признателен коллективу кафедры геометрии ХНУ им. В. Н. Каразина за всестороннюю помощь и теплую, дружескую атмосферу, а также благодарит свою любимую семью за то, что она всегда рядом.

РАЗДЕЛ 1

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

В данном разделе мы напомним все необходимые для дальнейшего изложения результатов работы определения и факты из теории римановых и псевдоримановых (лоренцевых) многообразий. Мы также сформулируем принцип максимума Л. С. Понтрягина и некоторые результаты из теории оптимального управления, которые станут нашими основными инструментами для доказательства обратных изопериметрических неравенств, изложенных в разделе 4.

1.1. Базовые факты и определения из римановой геометрии

В изложении этого подраздела мы будем следовать классическим учебникам по римановой геометрии [15, 50, 74].

Пусть (M^{m+1}, g) – риманово многообразие размерности $m + 1$, $m \geq 1$, g – положительно определенная первая фундаментальная форма на этом многообразии. Везде далее M^{m+1} будет подразумеваться *гладким, полным и односвязным*. Обозначим через TM касательное расслоение над многообразием M^{m+1} , а через T_pM – касательное пространство к M^{m+1} в точке $p \in M^{m+1}$. Первая фундаментальная форма g определяет на каждом касательном пространстве скалярное произведение $\langle u, v \rangle = g(u, v)$ и норму $|u| = g(u, u)^{1/2}$ для произвольных векторов u и v из T_pM .

Обозначим через $K_\sigma(p)$ *секционную кривизну* риманова многообразия M^{m+1} в точке $p \in M^{m+1}$ и в направлении двумерной плоскости $\sigma \subset T_pM$. Также, будем обозначать через $M^{m+1}(c)$ полное односвязное риманово многообразие постоянной секционной кривизны, равной c . Другими словами, $K_\sigma(p) \equiv c$ для любой пары $p \in M^{m+1}(c)$ и $\sigma \subset T_pM(c)$. Как известно [15, стр. 152], значение c однозначно

с точностью до изометрии определяет одно из трех модельных многообразий. Мы будем их называть *модельными пространствами*. А именно, при $c = 0$ многообразие $M^{m+1}(c)$ изометрично евклидовому пространству \mathbb{E}^{m+1} , при $c > 0$ – сферическому пространству $\mathbb{S}^{m+1}(c)$, а при $c < 0$ – гиперболическому пространству (или пространству Лобачевского) $\mathbb{H}^{m+1}(c)$.

Для пары точек $p, q \in M^{m+1}$ (риманово) расстояние $\text{dist}_M(p, q)$ между ними определяется как супремум длин всех кусочно-гладких кривых, соединяющих эти точки на многообразии. По теореме Хопфа – Ринова [15, п. 13.1], (геодезическая) полнота (M^{m+1}, g) эквивалентна метрической полноте (метрического) пространства (M^{m+1}, dist_M) .

Определим расстояние от точки $q \in M^{m+1}$ до произвольного подмножества $N \subset M^{m+1}$ как

$$d_N(q) := \inf \{ \text{dist}_M(p, q) : p \in N \}.$$

В частности, $d_p(\cdot)$ – функция расстояния на римановом многообразии от точки p .

Пусть $p \in M^{m+1}$ – произвольная точка, $v \in T_p M$ – произвольный вектор, и $\gamma_v: [0, l] \rightarrow M$ – единственная геодезическая такая, что $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$, $l \geq 1$.

Отображение

$$\exp_p: T_p M \rightarrow M, \quad v \mapsto \gamma_v(1)$$

называется *экспоненциальным отображением* риманова многообразия в точке p . Для гладкого риманова многообразия \exp_p корректно определено для каждой точки p в открытом шаре $B(0, \text{inj}_M(p)) \subset T_p M$ с центром в нуле и радиуса $\text{inj}_M(p)$, где $\text{inj}_M(p)$ – *радиус инъективности* многообразия M^{m+1} в точке p . Более того, \exp_p является диффеоморфизмом шара $B(0, \text{inj}_M(p))$ на свой образ $\exp_p B(0, \text{inj}_M(p))$ в M^{m+1} [15, п. 24.1].

Экспоненциальное отображение позволяет ввести *полярную систему координат* относительно точки p на многообразии M^{m+1} . Напомним ее конструкцию и свойства [74, гл. 5, п. 7]. отождествим касательное пространство $T_p M$ с

\mathbb{R}^{m+1} и введем в некоторой окрестности нуля $U_0 \subset T_p M$ стандартную евклидову полярную систему координат $(t, \theta) \in (0, +\infty) \times \mathbb{S}^m(1)$. Произвольной точке $q \in \exp_p(U_0 \setminus \{0\}) \subset M^{m+1}$ поставим в соответствие полярные координаты (t_q, θ_q) единственной точки $\exp_p^{-1}(q) \in T_p M$. Введенные в $\exp_p(U_0 \setminus \{0\})$ координаты называются *полярными координатами* на многообразии. Заметим, что по построению, $t_q = d_p(q)$. В полярной системе координат метрика многообразия примет вид $g = dt^2 + g_t$, где g_t – метрика на геодезической сфере $t = \text{const}$. Полярная система координат с центром в точке p является регулярной в той области параметров, в которой \exp_p есть диффеоморфизмом. В частности, она регулярна в проколотом шаре $B(0, \text{inj}_M(p)) \setminus \{0\}$.

В случае модельных пространств $M^{m+1}(c)$, метрика многообразия в полярной системе координат не зависит от выбора центра и имеет вид

$$g = dt^2 + \text{sn}_c^2(t) ds_m^2,$$

где ds_m^2 – стандартная метрика на единичной сфере $\mathbb{S}^m(1)$, а

$$\text{sn}_c(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{ct}), & \text{при } c > 0, \\ t, & \text{при } c = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-c}} \text{sh}(\sqrt{-ct}), & \text{при } c < 0, \end{cases}$$

есть *обобщенный синус*. При этом, такая система координат регулярна для всех $(t, \theta) \in (0, +\infty) \times \mathbb{S}^m(1)$ при $c \leq 0$ (т. е. для евклидова пространства и пространства Лобачевского), и для $(t, \theta) \in (0, \pi/\sqrt{c}) \times \mathbb{S}^m(1)$ в случае сферического пространства ($c > 0$).

Пусть на многообразии M^{m+1} задана гладкая функция $f: N \rightarrow \mathbb{R}$, $N \subseteq M^{m+1}$. *Градиентом* этой функции называется заданное на N векторное поле ∇f такое, что для любого $X \in TN$

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f)$$

где $X(f)$ – дифференцирование функции f в направлении вектора X . Векторное

поле градиента определяется однозначно и на римановом многообразии (M^{m+1}, g) в локальных координатах имеет вид

$$\nabla f = g^{ij} \partial_j(f) \cdot \partial_i,$$

где $\{g^{ij}\}_{i,j=1}^{m+1}$ – компоненты обратной матрицы g^{-1} первой квадратичной формы $g = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^{m+1}$, $\{\partial_i\}_{i=1}^{m+1}$ – базис координатных векторных полей на M^{m+1} ; мы также используем правило Эйнштейна суммирования по повторяющимся индексам.

В полярной системе координат (t, θ) с центром в точке p выделяется координатное векторное поле ∂_t , соответствующее дифференцированию в направлении увеличения координаты t . Известно [78, утв. 4.8], что градиент ∇d_p функции расстояния $d_p(\cdot)$ есть гладкое единичное векторное поле, корректно определенное в области регулярности полярной системы координат [78, лемма 4.4]. Более того, ∇d_p совпадает с векторным полем ∂_t и, как следует из леммы Гаусса [15, п. 12.2.2], является внешним нормальным векторным полем для геодезических сфер $t = \text{const}$.

Один из возможных путей исследования геометрии произвольных римановых многообразий состоит в наложении ограничений на значения секционных кривизн и сравнении различных величин на многообразии с их аналогами в модельных пространствах постоянной кривизны. Имеет место следующая теорема сравнения метрик на геодезических сферах $t = \text{const}$ в полярной системе координат.

Теорема 1.1. [74, гл. 6, теор. 27] *Если секционные кривизны K_σ риманова многообразия M^{m+1} равномерно ограничены, то есть для всех пар (p, σ) удовлетворяют*

$$c_1 \leq K_\sigma(p) (\leq c_2)$$

для некоторых констант c_1 и c_2 , то

$$(\text{sn}_{c_2}^2(t) ds_m^2 \leq) g_t \leq \text{sn}_{c_1}^2(t) ds_m^2.$$

(последнее понимается как неравенство между квадратичными формами, взятыми в точках с одинаковыми координатами (t, θ) .)

Пусть $F: N^m \rightarrow M^{m+1}$ – погружение гладкого m -мерного риманова многообразия N^m , образ $\Sigma = F(N^m)$ мы будем называть погруженной гиперповерхностью. Погружение F индуцирует на Σ риманову метрику. Везде далее мы будем рассматривать гиперповерхности с индуцированной метрикой. Погружение F называется *вложением*, а соответствующая гиперповерхность Σ – *вложенной*, если F является гомеоморфизмом на свой образ. Гиперповерхность называется *полной*, если она является полным подмногообразием в индуцированной метрике. Будем говорить, что Σ является C^r -гладкой, если такой же степенью гладкости обладает погружение F .

Предположим, что гиперповерхность Σ является C^r -гладким ($r \geq 2$) подмногообразием M^{m+1} , $m \geq 2$. Обозначим через ν поле единичных нормалей к Σ , и пусть $B^\nu(\cdot, \cdot)$ – (скалярная) вторая фундаментальная форма Σ относительно поля ν .

Определение 1.2. Величина

$$k_n^\nu(p, X) := \frac{B^\nu(X, X)|_p}{\langle X, X \rangle|_p}$$

называется *нормальной кривизной* гиперповерхности Σ относительно поля нормалей ν в точке $p \in \Sigma$ в направлении касательного вектора $X \in T_p\Sigma \subset T_pM$.

Заметим, что если $X \in T_p\Sigma$ является главным направлением на гиперповерхности Σ , то соответствующая нормальная кривизна $k_n^\nu(p, X)$ совпадает с одной из главных кривизн.

Пусть ∇, ∇^Σ – связность Леви-Чивита на многообразии M^{m+1} и индуцированная связность на гиперповерхности $\Sigma \subset M^{m+1}$, соответственно. Тогда для любых двух гладких касательных векторных полей X, Y , заданных на Σ , имеет

место разложение Гаусса

$$\nabla_Y X = \nabla_Y^\Sigma X + B^\nu(X, Y)\nu.$$

Если X – гладкое единичное касательное к Σ векторное поле в некоторой окрестности точки p , то из разложения Гаусса и определения 1.2 следует, что

$$k_n^\nu(p, X(p)) = \langle \nabla_X X, \nu \rangle|_p. \quad (1.1)$$

При этом, значение нормальной кривизны зависит только от значения векторного поля X в точке p и не зависит от его поведения в окрестности. В частности, если $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Sigma \subset M^{m+1}$ – произвольная гладкая кривая, такая, что $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X(p)$, то

$$k_n^\nu(p, X(p)) = \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}|_0, \nu(p) \rangle.$$

Таким образом, нормальная кривизна гиперповерхности Σ относительно поля нормалей ν в точке p и направлении $X \in T_p M$ равна нормальной составляющей вектора кривизны $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ произвольной кривой γ , проходящей через точку p в направлении X (тут $\dot{\gamma}$ – касательное векторное поле к кривой γ).

Из последнего наблюдения вытекает, что в двумерном случае ($m = 1$), нормальная кривизна кривой Σ есть просто ее *геодезическая кривизна*, которую мы будем обозначать $k_g^\nu(p)$. В дальнейшем изложении, говоря о гиперповерхности, мы не будем различать случаи $m = 1$ и $m \geq 2$, и при $m = 1$ под понятием нормальной кривизны всегда будет подразумевать геодезическую кривизну соответствующей кривой.

Гиперповерхность $\Sigma \subset M^{m+1}$, $m \geq 1$, называется *вполне омбилической*, если ее нормальные кривизны постоянны, то есть $k_n^\nu(p, X) \equiv \text{const}$ для любой пары (p, X) . Если $k_n^\nu \equiv 0$, то Σ называется *вполне геодезической* гиперповерхностью.

Для модельных пространств постоянной кривизны известна классификация полных вполне омбилических гиперповерхностей в них [49, гл. 2, §3]. А именно:

– в евклидовом пространстве \mathbb{E}^{m+1} вполне омбилическими являются только

вполне геодезические аффинные гиперплоскости \mathbb{E}^m и сферы \mathcal{S}_λ ненулевой нормальной кривизны, равной λ относительно внутреннего поля нормалей. Заметим, что радиус такой сферы равен $1/\lambda$; мы будем обозначать этот радиус R_λ ;

– в сферическом пространстве $\mathbb{S}^{m+1}(k^2)$ вполне омбилическими являются только геодезические сферы \mathcal{S}_λ кривизны $\lambda > 0$ относительно направленного вовнутрь сферы поля нормалей. Радиус сферы равен $R_\lambda = 1/k \operatorname{arccotg}(\lambda/k)$. При $\lambda = 0$ сфера \mathcal{S}_0 радиуса $\pi/2k$ есть вполне геодезическим подмногообразием $\mathbb{S}^{m+1}(k^2)$. Если считать сферу $\mathbb{S}^{m+1}(k^2)$ стандартным образом вложенной в евклидово пространство \mathbb{E}^{m+2} , то все описанные вполне омбилические гиперповерхности получаются сечением этой сферы аффинными гиперплоскостями в \mathbb{E}^{m+2} . При этом любая сфера \mathcal{S}_0 получается сечением $\mathbb{S}^{m+1}(k^2)$ гиперплоскостью, проходящей через начало координат в \mathbb{E}^{m+2} , и изометрична сферическому пространству $\mathbb{S}^m(k^2)$.

– для описания вполне омбилических гиперповерхностей гиперболического пространства, рассмотрим модель Пуанкаре пространства Лобачевского в открытом шаре $\mathcal{B} \subset \mathbb{E}^{m+1}$. Тогда любая вполне омбилическая гиперповерхность в $\mathbb{H}^{m+1}(-k^2)$ будут иметь вид $S \cap \mathcal{B}$, где $S \subset \mathbb{E}^{m+1}$ – евклидова $(m+1)$ -мерная сфера. При этом, если S ортогональна $\partial\mathcal{B}$, то $S \cap \mathcal{B}$ является вполне геодезической гиперповерхностью, изометричной $\mathbb{H}^m(-k^2)$. Если S пересекает $\partial\mathcal{B}$ трансверсально, то гиперповерхность $S \cap \mathcal{B}$ называется *эквилистантой* и относительно направленного внутрь S поля нормалей ν имеет постоянную нормальную кривизну, равную λ , где $0 < \lambda < k$. Если S касается $\partial\mathcal{B}$, то гиперповерхность $S \cap \mathcal{B}$ называется *орисферой* (*орициклом*, при $m = 1$) и имеет постоянную нормальную кривизну, равную k относительно поля ν . И наконец, если S лежит внутри \mathcal{B} , то S является *геодезической сферой* \mathcal{S}_λ пространства Лобачевского, относительно внутреннего поля нормалей имеет нормальную кривизну, равную λ (причем $\lambda > k$) и радиус $R_\lambda = 1/k \operatorname{arcctg}(\lambda/k)$.

Таким образом, в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^{m+1}(-k^2)$ существует три вида

вполне омбилических гиперповерхностей ненулевой нормальной кривизны, равной λ . В зависимости от того, λ больше, равно или меньше k , мы получаем сферу, орисферу или эквидистанту.

Отметим еще раз, что для дальнейшего изложения мы зафиксировали обозначения \mathcal{S}_λ для вполне омбилической сферы нормальной кривизны λ (относительно внутреннего поля нормалей) в модельном пространстве $M^{m+1}(c)$ и R_λ для радиуса \mathcal{S}_λ . Заметим, что при $c < 0$ кривизна λ сферы \mathcal{S}_λ должна удовлетворять неравенство $\lambda > \sqrt{-c}$.

Для модельных пространств $M^{m+1}(c)$ мы также введем обозначение \mathcal{F}_λ для полных вполне омбилических гиперповерхностей постоянной нормальной кривизны, равной λ , $\lambda > 0$ (относительно внутреннего поля нормалей). При $\lambda > 0$ и $c \geq 0$ имеем $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{S}_\lambda$. Поверхность \mathcal{F}_λ будет сферой и при $c < 0$ и условии $\lambda > \sqrt{-c}$ (относительно внутреннего поля нормалей). В то же время, \mathcal{F}_0 – вполне геодезическая гиперповерхность в $M^{m+1}(c)$.

1.2. Базовые факты и определения из лоренцевой геометрии

В этом разделе, следуя [2], [31] и [75], мы изложим необходимые сведения из теории псевдоримановых многообразий. Мы опустим те определения, которые дословно повторяют их римановы аналоги.

Пусть (M^{m+1}, g) – $(m+1)$ -мерное ($m \geq 1$) лоренцево многообразие, то есть псевдориманово многообразие с невырожденной первой фундаментальной формой g , сигнатура которой имеет вид $(-, +, \dots, +)$. По прежнему, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будет обозначать индефинитное скалярное произведение, определяемое формой g на каждом касательном в точке $p \in M^{m+1}$ пространстве $T_p M$.

Вектор $v \in TM$ называется *пространственноподобным*, *светоподобным* (*изотропным*), *временноподобным* или *непространственноподобным* (*причинным*), если, соответственно, $\langle v, v \rangle > 0$, $\langle v, v \rangle = 0$, $\langle v, v \rangle < 0$ или $\langle v, v \rangle \leq 0$.

Говорят, что лоренцево многообразие M^{m+1} *ориентируемо во времени*, если существует глобально определенное временноподобное гладкое векторное поле

$X: M \rightarrow TM$, т. е. векторное поле такое, что для любой точки $p \in M^{m+1}$ вектор $X(p)$ – времениподобный. При заданной временной ориентации, времениподобный вектор $v \in T_p M$ называется *направленным в будущее*, если $\langle v, X(p) \rangle < 0$. Если же $\langle v, X(p) \rangle > 0$, то v называется *направленным в прошлое* времениподобным вектором.

C^∞ -гладкое лоренцево многообразие M^{m+1} с фиксированной временной ориентацией называется *пространством – временем*. Везде далее, в качестве лоренцевых многообразий мы будем рассматривать пространство – время.

В пространстве – времени, аналогично римановым многообразиям, вводятся понятия связности, ковариантного дифференцирования, геодезических линий, геодезической полноты, тензора кривизны \mathcal{R} [31]. В тоже время, в силу существования ненулевых векторов нулевой длины, понятие секционной кривизны $K_\sigma(p)$ определяется только для *невырожденных* двумерных плоскостей $\sigma \subset T_p M$ плоскостей. Двумерная плоскость называется невырожденной, если существует $v \in T_p M$ такой, что $\langle v, v \rangle \neq 0$. Это эквивалентно тому, что в σ существует базис $\{u, v\}$ для которого $\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2 \neq 0$. Тогда секционная кривизна в точке p вдоль невырожденной плоскости σ , натянутой на u и v , определяется как

$$K_\sigma(p) = \frac{\langle \mathcal{R}(u, v)v, u \rangle}{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2}.$$

Такое определение корректно и не зависит от выбора $\{u, v\}$.

Лоренцево многообразие с $K_\sigma(p) \equiv \text{const}$ для любой точки $p \in M^{m+1}$ и невырожденной плоскости $\sigma \subset T_p M$ называется *многообразием постоянной кривизны*. Существует классификация геодезически полных лоренцевых многообразий постоянной кривизны c , аналогичная риманову случаю [2, п. 4.3]. Нам понадобятся два класса таких пространств.

Пространство – время постоянной нулевой кривизны изометрично пространству Минковского

$$\mathbb{M}_1^{m+1} = \{(x^0, x^1, \dots, x^m) : x^i \in \mathbb{R}, i \in \{0, \dots, m\}\}$$

с метрикой $g = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^m)^2$. Заметим, что любое касательное пространство $T_p M$ может быть, подобно риманову случаю, изометрически отождествлено с \mathbb{M}_1^{m+1} , если последнее рассматривается как векторное пространство. Если взять в \mathbb{R}^{m+1} псевдориманову метрику $g = (dx^0)^2 + \dots + (dx^{m-1})^2 - (dx^m)^2$, то мы получим псевдориманово пространство Минковского сигнатуры $(+, \dots, +, -)$, изометричное \mathbb{M}_1^{m+1} .

Для заданного $k^2 > 0$, единственным, с точностью до изометрии, пространством – временем постоянной кривизны k^2 является многообразие де Ситтера

$$\mathbb{S}_1^{m+1}(k^2) = \{(t, \theta) : t \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{S}^m(1)\}$$

с метрикой

$$g = -dt^2 + \frac{1}{k^2} \operatorname{ch}^2(k t) ds_m^2.$$

В случае пространства – времени некоторые подходы к исследованию свойств многообразий путем ограничения секционных кривизн теряют свой смысл. Оказывается, что если секционные кривизны M^{m+1} равномерно ограничены и сверху, и снизу, и $m \geq 2$, то M^{m+1} является пространством постоянной кривизны [68]. Более того, если секционная кривизна ограничена сверху (или снизу) для *всех* невырожденных двумерных плоскостей, то пространство имеет постоянную кривизну [61]. Невырожденная двумерная плоскость $\sigma \subset TM$ называется *времениподобной плоскостью*, если она натянута на пространственноподобный и времениподобный касательный векторы; соответствующую σ секционную кривизну мы также будем называть времениподобной. Можно построить семейство лоренцевых многообразий, у которых все времениподобные секционные кривизны ограничены сверху (или снизу) [2]. Таким образом, для использования техники сравнения естественным будет рассматривать ограничения на времениподобные секционные кривизны.

Гладкая кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ называется *пространственноподобной*, *светоподобной*, *времениподобной* или *причинной*, если касательное к ней векторное поле $\dot{\gamma}: [a, b] \rightarrow TM$ состоит из векторов соответствующего типа. Интуитивно,

временеподобные кривые представляют собой траектории точек во времени.

Напомним определение причинной структуры на M^{m+1} . Пусть $p, q \in M^{m+1}$ – две различные точки. Говорят, что точка q лежит в *хронологическом (причинном) будущем* точки p (будем обозначать, соответственно, $p \ll q$ и $p < q$), если существует направленная в будущее времениподобная (причинная) кривая $\gamma: [0, 1] \rightarrow M^{m+1}$ такая, что $\gamma(0) = p$ и $\gamma(1) = q$. Для произвольного непустого множества $S \subset M^{m+1}$ положим

$$I^+(S) := \{q \in M : p \ll q \text{ для некоторой } p \in S\},$$

$$J^+(S) := \{q \in M : p < q \text{ для некоторой } p \in S\} \cup S.$$

Множество $I^+(S)$ ($J^+(S)$) называется *хронологическим* (соответственно, *причинным*) *будущим* для S . Заметим, что $I^+(S)$ всегда открытое множество.

В то время, как лоренцева длина $L(\gamma)$ кусочно-гладкой кривой γ определяется аналогично риманову случаю [2], определение расстояние в лоренцевой геометрии отличается от римановой геометрии.

Определение 1.3. Для двух точек $p, q \in M^{m+1}$ таких, что $q \in J^+(p)$, *лоренцево расстояние* $\text{dist}_M(p, q)$ от точки p к точке q есть супремум длин $L(\gamma)$ всех направленных в будущее причинных кривых $\gamma: [0, 1] \rightarrow M^{m+1}$ таких, что $\gamma(0) = p$ и $\gamma(1) = q$; если же $q \notin J^+(p)$, то $\text{dist}_M(p, q) := 0$.

Из определения выше следует, что $\text{dist}_M(p, q) > 0$ тогда и только тогда, когда $q \in I^+(p)$.

Пусть $N \subset M^{m+1}$ – произвольное множество. Определим лоренцев аналог расстояния до этого множества.

Определение 1.4. Функция $d_N: M^{m+1} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, определяемая как

$$d_N(q) := \sup \{\text{dist}_M(p, q) : p \in N\}$$

для произвольной точки $q \in M^{m+1}$, называется *лоренцевой функцией расстояния по отношению к N* . При $N = \{p\}$ получаем функцию $d_p(\cdot)$ расстояния до точки p .

Переходя к гиперповерхностям в пространстве – времени, мы выделим один важный для нас класс. Гладкая погруженная гиперповерхность $\Sigma \subset M^{m+1}$ называется *пространственноподобной*, если индуцированная на ней метрика является римановой. Другими словами, касательное расслоение $T\Sigma$ состоит из пространственноподобных векторов, что эквивалентно существованию нормального к Σ векторного поля ν , состоящего из времениподобных векторов. Выберем ν направленным в прошлое и нормируем его так, что $g(\nu(p), \nu(p)) = -1$ для любой точки $p \in \Sigma$. Будем называть таким образом выбранное поле *единичным направленным в прошлое полем нормалей*.

Напомним, что множество $S \subset M^{m+1}$ называется *ахроническим*, если любая времениподобная кривая пересекает S не более одного раза.

Пусть N – связная ахроническая пространственноподобная гиперповерхность в M^{m+1} . Для введенной ранее функции расстояния d_N можно ввести ее естественную область регулярности следующим образом (см. [2] и [52] для деталей). Пусть N_{-1}^\perp – расслоение единичных времениподобных нормальных векторов над N . Определим функцию $s_N: N_{-1}^\perp \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ положив $s_N(v) := \sup\{t \geq 0: d_N(\gamma_v(t)) = t\}$, где $\gamma_v: [0, t_0) \rightarrow M$ – непродолжаемая в будущее геодезическая с $\gamma_v(0) = p \in N$, $\dot{\gamma}_v(0) = v$. Также, положим

$$\mathcal{I}^+(N) := \{tv: v \in N_{-1}^\perp \text{ и } 0 < t < s_N(v)\},$$

и определим

$$\mathcal{I}^+(N) := \exp_N^\perp (\text{int} (\mathcal{I}^+(N))),$$

где \exp_N^\perp – экспоненциальное отображение ортогонального дополнения TN в TM .

Замечание 1.5. (см. [52]) Если мы дополнительно предположим, что N – компактная гиперповерхность, и что (M^{m+1}, g) – *глобально гиперболично* и *геодезически полно*, то $\mathcal{I}^+(N) = I^+(N)$.

Отметим, что $\mathcal{I}^+(N)$ – открытое (возможно пустое) подмножество M , диффеоморфное внутренности $\mathcal{I}^+(N)$ под действием \exp_N^\perp . Более того, $\mathcal{I}^+(N)$ яв-

ляется областью регулярности функции расстояния d_N . Справедливо следующее, аналогичное риманову случаю, утверждение.

Утверждение 1.6. [52] Пусть $N \subset M^{m+1}$ – гладкая ахроническая временноподобная гиперповерхность. Если $\mathcal{I}^+(N) \neq \emptyset$, то d_N является гладкой функцией в $\mathcal{I}^+(N)$, и ее градиент ∇d_N есть единичным направленным в прошлое времениподобным векторным полем в $\mathcal{I}^+(N)$, интегральные траектории которого суть геодезические линии, подходящие ортогонально к N .

В силу того, что метрика на гладкой пространственноподобной гиперповерхности Σ в пространстве–времени M^{m+1} является римановой, определение нормальной кривизны $k_n^\nu(p, X)$ в точке $p \in \Sigma$ в направлении касательного (пространственноподобного) вектора $X \in T_p \Sigma$ относительно направленного в прошлое поля нормалей ν , равно как и все последующие рассуждения, дословно переносятся из римановой геометрии.

Нас будут интересовать вполне омбилические (вполне геодезические) пространственноподобные гиперповерхности в модельном пространстве де Ситтера $\mathbb{S}_1^{m+1}(k^2)$. Для их описания, рассмотрим изометрическое вложение $\mathbb{S}_1^{m+1}(k^2) \hookrightarrow \mathbb{M}_1^{m+2}$, которое строится следующим образом (см., например, [75, гл. 8, стр. 227]).

В пространстве Минковского $(\mathbb{M}_1^{m+2}, g_0)$ сигнатуры $(+, \dots, +, -)$ рассмотрим следующее множество (метрически, это однополостный гиперboloид в \mathbb{R}^{m+2})

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \left\{ x \in \mathbb{M}_1^{m+2} : g_0(x, x) = \frac{1}{k^2} \right\} \\ &= \left\{ \frac{\operatorname{ch} t}{k}(\theta, 0) + \frac{\operatorname{sh} t}{k}(0, 1) : t \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{S}^m(1) \subset \mathbb{R}^{m+1} \right\}. \end{aligned}$$

Гиперboloид \mathcal{H} является гладкой гиперповерхностью в \mathbb{M}_1^{m+2} . В это же время, объемлющая метрика пространства Минковского индуцирует на \mathcal{H} геодезически полную лоренцеву метрику $g = -dt^2 + 1/k^2 \operatorname{ch}^2(kt) ds_m^2$ постоянной временноподобной секционной кривизны, равной k^2 . Таким образом, гиперповерхность \mathcal{H}

с заданными координатами является изометрическим вложением пространства де Ситтера \mathbb{S}_1^{m+1} в \mathbb{M}_1^{m+2} .

Обратим внимание на очевидную аналогию между вложениями $\mathbb{S}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{E}^{m+2}$ и $\mathbb{S}_1^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{M}_1^{m+2}$. Таким образом, пространство де Ситтера есть лоренцевым аналогом сферического пространства.

Все пространственноподобные вполне омбилические гиперповерхности в $\mathbb{S}^{m+1}(k^2)$ получаются как связные компоненты пересечения $\Pi \cap \mathcal{H}$, где $\Pi \subset \mathbb{M}_1^{m+2}$ – аффинная гиперплоскость. Если Π проходит через начало координат в \mathbb{M}_1^{m+1} , то $\Pi \cap \mathcal{H}$ является вполне геодезической гиперповерхностью. Если же $0 \notin \Pi$, то в зависимости от типа вектора нормали ν_0 к Π , в пересечении получаются различные вполне омбилические поверхности. В частности,

- если $\langle \nu_0, \nu_0 \rangle < 0$, то $\Pi \cap \mathcal{H}$ имеет постоянную нормальную кривизну, равную λ , где $0 < \lambda < k$ (здесь, и двух пунктах ниже, кривизна считается относительно направленного в прошлое поля нормалей к $\Pi \cap \mathcal{H}$);
- если $\langle \nu_0, \nu_0 \rangle = 0$, то $\Pi \cap \mathcal{H}$ является гиперповерхностью постоянной нормальной кривизны, равной k ;
- если же $\langle \nu_0, \nu_0 \rangle > 0$, то пересечение Π с \mathcal{H} имеет постоянную нормальную кривизну λ , причем $\lambda > k$.

Введем лоренцев аналог римановых геодезических сфер в пространстве де Ситтера. Говорят, что множество точек $(t, \theta) \in \mathbb{S}_1^{m+1}$ таких, что $t \equiv R_\lambda$, где R_λ – фиксированное число, определяемое ниже, образуют *временной срез (сечение)* пространства $\mathbb{S}_1^{m+1}(k^2)$. Обозначим это множество через \mathcal{S}_λ . Оказывается, что \mathcal{S}_λ есть гладкая пространственноподобная замкнутая вполне омбилическая гиперповерхность кривизны λ , причем $R_\lambda = 1/k \operatorname{arctg}(\lambda/k)$ [31].

Заметим, что все \mathcal{S}_λ гомеоморфны $\mathbb{S}^m(1)$, и каждая из них может выступать в роли компактной поверхности Коши [75]. Если \mathcal{S}_0 – нулевое временное сечение, то $I^+(\mathcal{S}_0)$ совпадает с верхней половиной гиперboloида, то есть совпадает с точками на \mathcal{H} , имеющими неотрицательную временную координату t . При этом, если $p \in \mathbb{S}_1^{m+1}$ имеет координаты (t, θ) с $t \geq 0$, то $d_{\mathcal{S}_0}(p) = t$. Поэтому градиентное

векторное поле ∇d_{S_0} совпадает с обратным координатным векторным полем $-\partial_t$. Заметим, что ∂_t задает временную ориентацию на S_1^{m+1} .

В заключение этого подраздела условимся говорить, что гладкая пространственноподобная гиперповерхность $\Sigma \subset M^{m+1}$ – выпукла, если вторая фундаментальная форма B^ν относительно направленного в прошлое нормального векторного поля ν является неотрицательно определенной. Это эквивалентно тому, что $k_n^\nu \geq 0$ в каждой точке на Σ и в каждом направлении.

1.3. Теоремы сравнения для нормальных кривизн линий уровня функции расстояния в римановых и лоренцевых пространствах

В этом подразделе мы сформулируем две теоремы сравнения нормальных кривизн линий уровня функции расстояния. В частности, в римановом случае, для геодезических сфер как линий уровня функции расстояния до фиксированной точки. В лоренцевом случае мы приведем необходимый результат сравнения для линий уровня лоренцевой функции расстояния до произвольной пространственноподобной ахронической гиперповерхности.

Пусть $(M^{m+1}(c), g)$ – одно из модельных римановых пространств постоянной кривизны c с введенной на нем полярной системой координат (t, θ) с началом в некоторой точке на $M^{m+1}(c)$, $g = dt^2 + \text{sn}_c^2(t) ds_m^2$ – соответствующая метрика. Как мы уже отмечали, геодезическая сфера $t = \text{const}$ является вполне омбилической гиперповерхностью, нормальная кривизна которой относительно нормального векторного поля $-\partial_t$ постоянна и равна [74, гл. 3, п.2]

$$\frac{\text{sn}'_c(t)}{\text{sn}_c(t)}.$$

Мы обозначим эту величину через $\mu_{n,c}^{-\partial_t}(t)$. Имеем,

$$\mu_{n,c}^{-\partial_t}(t) = \begin{cases} \sqrt{c} \text{ctg}(\sqrt{c}t), & \text{при } c > 0, \\ 1/t, & \text{при } c = 0, \\ \sqrt{-c} \text{cth}(\sqrt{-c}t), & \text{при } c < 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Для произвольного риманова многообразия M^{m+1} с введенной на нем полярной системой координат (t, θ) с началом в точке p и метрикой $g = dt^2 + g_t$ обозначим через $\mu_n^{-\partial_t}(t)(q, X)$ нормальную кривизну геодезической сферы $\mathcal{S}(t) \subset M^{m+1}$ радиуса t с центром в p , посчитанную в точке $q \in \mathcal{S}(t)$ в направлении $X \in T_q\mathcal{S}(t)$.

Имеет место следующая теорема, которая выражает связь нормальных кривизн сфер многообразий ограниченной кривизны с соответствующими кривизнами сфер в модельных пространствах.

Теорема 1.7. [74, гл. 6, теор. 27] *Если секционные кривизны K_σ риманова многообразия (M^{m+1}, g) , $g = dt^2 + g_t$, равномерно ограничены, то есть для всех пар (p, σ) удовлетворяют*

$$c_1 \leq K_\sigma(p) (\leq c_2),$$

где c_1 и c_2 – некоторые константы, то нормальные кривизны сфер $\mathcal{S}(t)$ радиуса t для всех точек $q \in \mathcal{S}(t)$ и по всем направлениям $X \in T_p\mathcal{S}(t)$ удовлетворяют

$$(\mu_{n,c_2}^{-\partial_t}(t) \leq) \mu_n^{-\partial_t}(t)(q, X) \leq \mu_{n,c_1}^{-\partial_t}(t),$$

как только $\mathcal{S}(t)$ лежит в области регулярности полярной системы координат на M^{m+1} ; здесь $\mu_{n,c_i}^{-\partial_t}$ определяются (1.2).

Перейдем к случаю лоренцевых пространств. Пусть в модельном пространстве де Ситтера $\mathbb{S}_1^{m+1}(k^2)$ постоянной положительной кривизны k^2 введена система координат (t, θ) с метрикой $g = -dt^2 + 1/k^2 \operatorname{ch}^2(kt) ds_m^2$, описанная в подразделе 1.2. Как было отмечено в том же разделе, гиперповерхности уровня $t = \operatorname{const}$ имеют постоянную нормальную кривизну, которая относительно направленного в

прошлое единичного нормального векторного поля $-\partial_t$ равна

$$k \operatorname{th}(kt) =: \mu_{n,k^2}^{-\partial_t}(t).$$

Пусть теперь M^{m+1} – произвольно пространство-время и $N \subset M^{m+1}$ – пространственноподобная ахроническая гиперповерхность. В обозначениях подраздела 1.2, для произвольного $t > 0$, положим $\mathcal{S}(t) := \{p \in \mathcal{I}^+(N) : d_N(p) = t\}$ – линия уровня функции расстояния d_N . Можно показать, что $\mathcal{S}(t)$ – гладкая пространственноподобная гиперповерхность, и ∇d_N в точках на $\mathcal{S}(t)$ является направленным в прошлое единичным векторным полем (см. [52]). Обозначим через $\mu_n^{\nabla d_N}(t)(q, X)$ нормальную кривизну $\mathcal{S}(t)$ относительно ∇d_N в точке $q \in \mathcal{S}(t)$ и в направлении $X \in T_q \mathcal{S}(t)$.

Имеет место следующий лоренцев аналог теоремы 1.7.

Теорема 1.8. [52, теор. 3.5] Пусть N – выпуклая гладкая ахроническая пространственноподобная гиперповерхность в M^{m+1} , и пусть $\mathcal{I}^+(N) \neq \emptyset$. Если вдоль всех времениподобных направленных в будущее геодезических $\gamma: [0, s_0) \rightarrow \mathcal{I}^+(N)$, выходящих перпендикулярно N , секционные кривизны M^{m+1} удовлетворяют

$$K_{\sigma_s}(\gamma(s)) \geq k^2 > 0$$

для всех времениподобных плоскостей σ_s содержащих $\dot{\gamma}(s)$, то нормальные кривизны линий уровня $\mathcal{S}(t)$ для всех точек $q \in \mathcal{S}(t)$ и по всем направлениям $X \in T_p \mathcal{S}(t)$ удовлетворяют

$$k \operatorname{th}(kt) = \mu_{n,k^2}^{-\partial_t}(t) \leq \mu_n^{\nabla d_N}(t)(q, X).$$

1.4. λ -выпуклые и λ_1, λ_2 -выпуклые гиперповерхности: необходимые сведения

В этом подразделе мы дадим определение, сформулируем известные факты и докажем некоторые вспомогательные результаты, касающиеся главных объектов исследования данной работы – *полных гиперповерхностей ограниченной нормальной кривизны* и их негладких аналогов – λ - и λ_1, λ_2 -выпуклых гиперповерхностей.

Пусть M^{m+1} – полное односвязное гладкое риманово многообразие. Везде далее гиперповерхности считаются ориентируемыми.

Определение 1.9. Для заданных неотрицательных констант λ, λ_1 и λ_2 , C^r -гладкая ($r \geq 2$) гиперповерхность $\Sigma \subset M^{m+1}$ называется λ -выпуклой (соответственно, λ_1, λ_2 -выпуклой), если существует поле нормалей ν к Σ , относительно которого все нормальные кривизны для любой точки $p \in \Sigma$ и касательного направления $X \in T_p \Sigma$ удовлетворяют

$$k_n^\nu(p, X) \geq \lambda \quad (\text{соответственно, } \lambda_2 \geq k_n^\nu(p, X) \geq \lambda_1).$$

Если Σ не является достаточно гладкой, то λ -выпуклость (соответственно, λ_1, λ_2 -выпуклость) можно определить синтетическим образом. К этому мы сейчас и перейдем.

Напомним (см. [13]), что погруженная гиперповерхность $\Sigma = F(N^m)$ в M^{m+1} называется *локально выпуклой в точке* $p = F(x)$, $p \in \Sigma$, $x \in N^m$, если существует непустая окрестность $U_x \subset N^m$ точки x такая, что ее образ $F(\overline{U}_x)$ гомеоморфен \overline{U}_x и лежит на границе выпуклого тела (тут верхней чертой обозначено замыкание множества). Под *выпуклым телом* мы понимаем непустую замкнутую область в M^{m+1} такую, что любые две точки внутри или на границе этой области могут быть соединены единственной минимальной геодезической, не выходящей за пределы области.

Везде далее через D_Σ будем обозначать замкнутую выпуклую область, ограниченную гиперповерхностью Σ в многообразии M^{m+1} , если такая область опре-

деляется. Таким образом, по определению D_Σ , $\partial D_\Sigma = \Sigma$.

Пусть, по прежнему, \mathcal{F}_λ есть вполне омбилическая гиперповерхность постоянной нормальной кривизны, равной λ , $\lambda \geq 0$, в модельном пространстве, и пусть $D_{\mathcal{F}_\lambda}$ – замкнутая выпуклая область, границей которой служит \mathcal{F}_λ . Заметим, $D_{\mathcal{F}_\lambda}$ может быть неограниченной. При $\lambda = 0$ в качестве $D_{\mathcal{F}_\lambda}$ выберем любое из двух выпуклых полупространств, разделяемых \mathcal{F}_λ .

Определение 1.10. Гиперповерхность $\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ называется λ -выпуклой, если она локально выпукла в каждой своей точке, и через любую точку $p \in \Sigma$ проходит вполне омбилическая гиперповерхность \mathcal{F}_λ такая, что в некоторой окрестности точки p гиперповерхность Σ лежит в области $D_{\mathcal{F}_\lambda}$ (см. рис. 1.1).

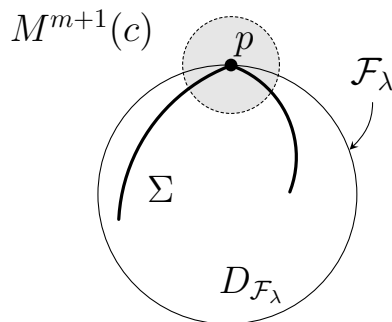


Рис. 1.1. Определение λ -выпуклости.

Определение 1.11. Локально выпуклая во всех своих точках гиперповерхность $\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ называется λ_1, λ_2 -выпуклой, если через любую точки $p \in \Sigma$ проходят две вполне омбилические гиперповерхности $\mathcal{F}_{\lambda_1}, \mathcal{F}_{\lambda_2}$ такие, что в некоторой открытой окрестности $U_p \subset M^{m+1}(c)$ точки p справедливо

$$D_{\mathcal{F}_{\lambda_2}} \subset \Sigma \cap U_p \subset D_{\mathcal{F}_{\lambda_1}}.$$

Другими словами, λ_1, λ_2 -выпуклая гиперповерхность в любой своей точке защемлена между двумя вложенными вполне омбилическими гиперповерхностями кривизн λ_1 и λ_2 .

Будем называть определенные выше гиперповерхности \mathcal{F}_λ *опорными*.

Определение 1.12. Область D_Σ называется λ -выпуклой (λ_1, λ_2 -выпуклой), если ее граница Σ является λ -выпуклой (λ_1, λ_2 -выпуклой) гиперповерхностью (в гладком случае, относительно направленного в область D_Σ поля нормалей ν для Σ).

Заметим, что 0-выпуклые гиперповерхности являются просто локально выпуклыми. Таким образом, понятия λ - и λ_1, λ_2 -выпуклости при ненулевых λ накладывают дополнительные условия на степень выпуклости гиперповерхностей. Кроме того, λ -выпуклые поверхности можно рассматривать как λ, ∞ -выпуклые, что эквивалентно сколь угодно большому значению для λ_2 . При этом \mathcal{F}_∞ есть просто точка.

Понятие λ -выпуклости в негладком случае можно ввести и в произвольном римановом многообразии (см. [34]).

Определение 1.13. 0, λ -выпуклая гиперповерхность (область) называется λ -вогнутой гиперповерхностью (областью).

Сделаем еще несколько замечаний. В определениях 1.10, 1.11 из существования опорных вполне омбилических гиперповерхностей не следует локальной выпуклости. Действительно, возьмем сферу радиуса 1 в \mathbb{E}^3 , пересечем ее плоскостью и отразим меньшую “шапочку” симметрично относительно этой плоскости во внутрь большей. Получившаяся поверхность будет по прежнему иметь опорную сферу радиуса 1 в каждой точке (в смысле определения 1.10), но не будет более локально выпуклой.

Более того, в гладком случае для модельных пространств определение 1.9 равносильно определениям 1.10 и 1.11. Это непосредственно следует из перехода к двумерным сечениям и локального задания поверхностей в малой окрестности соответствующей точки p , используя геодезические нормальные координаты (см., например, [56, утв. 1]; [53, лемма 3.1]).

Предположим, что $\Sigma \subset M^{m+1}$ – гладкая гиперповерхность. Тогда, в силу определения нормальной кривизны (см. определение 1.2), условие λ - и λ_1, λ_2 -выпуклости для Σ равносильно тому, что относительно соответствующего по-

ля нормалей вторая фундаментальная форма B^ν для любого единичного вектора $u \in T\Sigma$ удовлетворяет, соответственно,

$$B^\nu(u, u) \geq \lambda \quad \text{и} \quad \lambda_2 \geq B^\nu(u, u) \geq \lambda_1. \quad (1.3)$$

В тоже время, в негладком случае в $M^{m+1}(c)$ неравенствам выше можно придать смысл. Выпуклые гиперповерхности являются, в некотором смысле, довольно гладкими. А именно, по теореме Александрова (см. [29]) любая выпуклая гиперповерхность является почти всюду дважды дифференцируемой по отношению к мере Лебега на поверхности. Значит, почти всюду на ней определена вторая фундаментальная форма, которая для λ - и λ_1, λ_2 -выпуклых поверхностей удовлетворяет неравенствам (1.3).

Более того, так как вполне омбилические гиперповерхности \mathcal{F}_{λ_i} являются гладкими поверхностями в $M^{m+1}(c)$, и малая окрестность произвольной точки $p \in \Sigma$ на λ_1, λ_2 -выпуклой гиперповерхности Σ защемлена между \mathcal{F}_{λ_1} и \mathcal{F}_{λ_2} , то Σ в свою очередь является $C^{1,1}$ -гладкой (см. [82]). Обобщенная теорема Радемахера [82] гарантирует существование почти всюду корректно определенной второй фундаментальной формы таких поверхностей. Заметим, что для λ_1, λ_2 -выпуклых поверхностей поле нормалей ν определено во всех точках.

В дальнейшем нам понадобятся следующий результат, который отображает метрическую структуру λ - и λ_1, λ_2 -выпуклых гиперповерхностей.

Тут и далее два изометричных многообразия M и N будем обозначать как $M \simeq N$.

Лемма 1.14 (о сечении). *Если $\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ – λ -выпуклая гиперповерхность, $m \geq 2$ и $\pi(p) \subset M^{m+1}(c)$ – $(l+1)$ -мерная вполне геодезическая плоскость с $m > l \geq 1$, проходящая через точку $p \in \Sigma$, то $\pi(p) \cap \Sigma$ – λ -выпуклая гиперповерхность в $M^{l+1}(c) \simeq \pi(p)$.*

Доказательство. Лемма непосредственно следует из определения λ -выпуклости и

того, что в сечении сферы аффинной плоскостью получается сфера нормальной кривизны, не меньшей кривизны исходной сферы. \square

Также, имеет место следующая лемма о топологическом строении полных λ -выпуклых гиперповерхностей.

Лемма 1.15 [35]. *Полная λ -выпуклая гиперповерхность Σ в полном односвязном римановом многообразии M^{m+1} ($m \geq 2$) ограниченной отрицательной секционной кривизны $0 \geq c_2 \geq K_\sigma \geq c_1$, где $\lambda > \sqrt{-c_1}$, является вложенной и ограничивает область D_Σ , гомеоморфную шару.*

Важный результат, на который мы будем существенно опираться в дальнейшем, составляет так называемая *теорема прокатывания В. Бляшке*.

Теорема 1.16 (теорема прокатывания Бляшке). *А. Если D_Σ – λ -выпуклая область в модельном пространстве $M^{m+1}(c)$, $p \in \Sigma$ – произвольная точка и \mathcal{F}_λ – опорная для Σ в точке p вполне омбилическая гиперповерхность кривизны, равной λ , то*

$$D_\Sigma \subset D_{\mathcal{F}_\lambda}.$$

В. Если D_Σ – λ -вогнутая область в $M^{m+1}(c)$, $p \in \Sigma$ – произвольная точка и \mathcal{F}_λ – опорная для Σ в точке p вполне омбилическая гиперповерхность кривизны, равной λ , то

$$D_{\mathcal{F}_\lambda} \subset D_\Sigma.$$

При этом, гиперповерхности Σ и \mathcal{F}_λ могут пересекаться только по замкнутой области, содержащей точку p .

Для евклидова пространства эта теорема была впервые доказана в [3]; в общем случае пространств постоянной кривизны см. [66, 21, 62]. Очевидно, что для λ_1, λ_2 -выпуклой гиперповерхности, если $\lambda_1 \neq 0$, выполняются оба пункта А и В теоремы 1.16.

Известно, что выпуклость области $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+1}$ можно ввести одним из следующих эквивалентных способов:

- 1) для любых двух точек $p, q \in \Omega$ отрезок pq лежит в Ω ;
- 2) через каждую точку $p \in \partial\Omega$ проходит глобально опорная для Ω гиперплоскость.

В пространствах постоянной кривизны мы ввели понятие λ -выпуклости по аналогии с пунктом 2 выше. Оказывается, λ -выпуклость можно задать двойственный образом, аналогично пункту 1. В дальнейших разделах работы мы не будем в полной мере пользоваться эквивалентностью двух определений, поэтому ниже мы сформулируем и докажем лишь необходимые в этой связи сведения.

Договоримся об обозначениях. Пусть D_Σ – λ -выпуклая область в $M^{m+1}(c)$, и пусть p, q – две произвольные точки в D_Σ . Будем считать, что в случае $c < 0$ справедливо $\lambda > \sqrt{-c}$, т. е. считаем, что в гиперболическом случае $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{S}_\lambda$. Рассмотрим произвольное вполне геодезическое двумерное подпространство $\pi_{p,q} \simeq M^2(c)$ в $M^{m+1}(c)$, проходящее через p и q . В $\pi_{p,q}$ существует ровно две окружности, кривизны, равной λ , проходящие через p и q . Напомним, что R_λ – их радиус. Каждую из них эти две точки разбивают на две дуги – большую и меньшую. Везде далее меньшую дугу, проходящую через точки p и q , будем называть *меньшей дугой кривизны λ для точек p и q* .

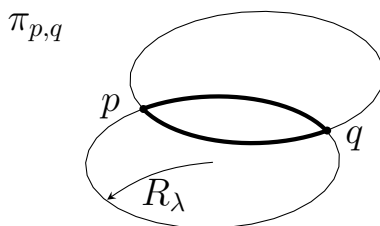


Рис. 1.2. Жирным выделены две меньшие дуги кривизны λ для точек p и q в $\pi_{p,q} \simeq M^2(c)$.

Справедлива следующая лемма, демонстрирующая двойственный подход к определению λ -выпуклости.

Лемма 1.17. *Если D_Σ – (замкнутая) λ -выпуклая область в модельном пространстве $M^{m+1}(c)$ постоянной кривизны, равной c (причем, для $c < 0$ считаем $\lambda > \sqrt{-c}$), то любая меньшая дуга кривизны λ , проходящая через любые две точки $p, q \in D_\Sigma$, лежит в D_Σ .*

Доказательство. Предположим, что это не так, и существуют такие точки $p, q \in D_\Sigma$ и некоторая меньшая дуга ω для точек p и q , целиком не лежащая в области D_Σ . Рассмотрим пересечение D_Σ тем двумерным подпространством $\pi_{p,q} \simeq M^2(c)$, которое содержит p, q и ω . Пусть $\gamma = \pi_{p,q} \cap \Sigma$ (см. рис. 1.3). По лемме 1.14, кривая γ является λ -выпуклой. Более того, γ – замкнутая и вложенная кривая, т. к. является сечением границы выпуклой области.

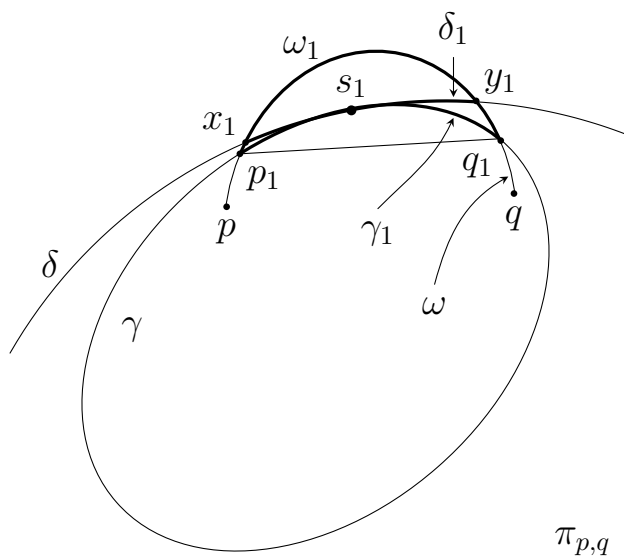


Рис. 1.3. Построения в лемме 1.17.

Пусть p_1, q_1 – точки пересечения ω с γ . Причем, если ω_1 – часть ω , лежащая между точками p_1 и q_1 , а γ_1 – часть кривой γ , ограниченная дугой ω_1 и геодезической хордой $p_1 q_1$, то ω_1 и γ_1 будут выпуклыми кривыми, лежащими по одну сторону от геодезической, соединяющей p_1 и q_1 .

Пусть s_1 – произвольная точка на γ_1 , не совпадающая с p_1 и q_1 . Так как γ – λ -выпуклая замкнутая вложенная кривая, то, по теореме 1.16, окружность δ геодезической кривизны λ , опорная для γ в точке s_1 , целиком содержит γ . Предположим, что окружность δ пересекает ω_1 в двух точках x_1 и y_1 . При этом, если x_1 или y_1 совпадает с p_1 или q_1 , то в силу произвольности выбора s_1 , $\omega_1 \equiv \gamma_1$ и получим противоречие с тем, что ω_1 не лежит в D_Σ . Следовательно, $x_1 \neq p_1$, $y_1 \neq q_1$.

Так как ω_1 – меньшая дуга кривизны λ , то и дуга δ_1 окружности δ , ограниченная дугой ω_1 и геодезической хордой p_1q_1 , меньше половины окружности δ . А в силу выпуклости окружности δ , δ_1 и часть ω_1 лежат по одну сторону от геодезической x_1y_1 .

Таким образом мы получили, что для двух данных точек x_1 и y_1 существуют две различные меньшие дуги кривизны λ , лежащие по одну сторону от геодезической x_1y_1 , чего быть не может. Отсюда следует утверждение леммы 1.17.

□

1.5. Необходимые сведения из теории оптимального управления

В этом подразделе мы сформулируем те необходимые определения и факты из теории оптимального управления, которые нам понадобятся в разделе 4.

1.5.1. Принцип максимума Понтрягина. Нашим главным инструментом для получения результатов раздела 4 будет *принцип максимума Понтрягина*. Здесь мы напомним все необходимые определения и приведем формулировку этого принципа, адаптированную под наши нужды (в общем случае, см. [23, §1.4] или эквивалентный, но идеологически иной, подход в [1, §5]).

Определение 1.18. Пару функций $(\mathbf{x}(t), u(t))$, определенных как

$$(\mathbf{x}(t), u(t)): [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

на некотором фиксированном отрезке $\Delta := [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, мы назовем *управляемым процессом*, если *фазовая переменная* $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ – абсолютно непрерывная функции на Δ , *управление* $u(t)$ – ограниченная измеримая на Δ функция, и пара $(\mathbf{x}(t), u(t))$ удовлетворяет *управляемой системе*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ u(t) &\in \Delta_u \end{aligned} \quad \text{п.в. на } \Delta, \quad (1.4)$$

где $\Delta_u \subset \mathbb{R}$ – фиксированный отрезок, функция $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ и ее производные $f_{\mathbf{x}}$ – непрерывны по совокупности переменных, и точкой, как это принято, обозначена производная по параметру t .

Для управляемых процессов ставится задача минимизации функционала

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt \longrightarrow \min, \quad (1.5)$$

при интегральном ограничении типа равенства

$$\int_{t_0}^{t_1} F_1(t, \mathbf{x}(t), u(t)) dt = a. \quad (1.6)$$

и граничных условиях

$$x_2(t_0) = b, \quad x_2(t_1) = c. \quad (1.7)$$

(тут функция $F_0: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируема на своей области определения, функция $F_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывна вместе со своими производными $(F_1)_{\mathbf{x}}$ и $(F_1)_t$ по совокупности переменных, и a, b, c – вещественные константы.)

Траектория $\{(\mathbf{x}(t), u(t)): t \in \Delta\}$, соответствующая управляемому процессу (1.4), называется *допустимой* в задаче (1.5), если для этой траектории выполнено интегральное ограничение (1.6) и граничные условия (1.7). Допустимая траектория называется *оптимальной*, если она доставляет наименьшее значение функционалу \mathcal{J} среди всех допустимых траекторий.

Определим функцию Понтрягина

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{x}, u, \mathbf{p}, \mu_0, \mu_1) := \mathbf{p} \cdot f(\mathbf{x}, u) + \mu_1 F_1(t, \mathbf{x}, u) - \mu_0 F_0(t, \mathbf{x}, u),$$

и конечной лагранжиан

$$l(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1)) := \mu_2 (x_2(t_0) - b) + \mu_3 (x_2(t_1) - c).$$

Мы будем говорить, что допустимая траектория $\{(\mathbf{x}(t), u(t)) : t \in \Delta\}$ для задачи (1.5) удовлетворяет *принципу максимума Понтрягина*, если существуют вещественные числа μ_j , $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ и абсолютно непрерывная на Δ функция $\mathbf{p} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ такие, что выполнены следующие условия:

- (i) $\mu_0 \geq 0$ (условие неотрицательности);
- (ii) $\mu_0 + |\mu_1| + |\mu_2| + |\mu_3| \neq 0$ (условие нетривиальности);
- (iii) $\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathcal{H}'_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t), u(t), \mathbf{p}(t), \mu_0, \mu_1)$ п.в. на Δ (сопряженная система);
- (iv) $\max_{v \in \Delta_u} \mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t), v, \mathbf{p}(t), \mu_0, \mu_1) = \mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t), u(t), \mathbf{p}(t), \mu_0, \mu_1)$ для почти всех $t \in \Delta$ (условие максимума);
- (v) $\mathbf{p}(t_i) = (-1)^i l'_{\mathbf{x}(t_i)}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1))$, $i \in \{0, 1\}$ (условие трансверсальности).

Справедлива следующая теорема (см. [23], [1]).

Теорема 1.19. Пусть $\{(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{u}(t)) : t \in \Delta\}$ – оптимальная траектория для задачи (1.5). Тогда она удовлетворяет *принципу максимума Понтрягина*.

Оптимальная траектория $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}\}$ называется *нормальной*, если для нее $\mu_0 \neq 0$. В противном случае траектория называется *абнормальной*.

1.5.2. Особые экстремали и необходимое условие Лежандра – Клебша.

Предположим, что функция Понтрягина задачи (1.5) линейна по управлению, то есть представима в виде $\mathcal{H} = u\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, где функции \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 не зависят от управления u . Для таких функций условие максимума гарантирует, что оптималь-

ное управление $\hat{u}(t)$ имеет вид

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u_{\max}, & \text{при } \mathcal{H}_1 > 0 \\ u_{\min}, & \text{при } \mathcal{H}_1 < 0 \\ \text{не определено,} & \text{при } \mathcal{H}_1 = 0 \end{cases} \quad \text{п.в. на } \Delta_u = [u_{\min}, u_{\max}].$$

Таким образом, условие максимальности не дает никакой информации об управлении когда $\mathcal{H}_1 = 0$.

Определение 1.20. Допустимая траектория $\{(\mathbf{x}^*(t), u^*(t)) : t \in \Delta\}$ для задачи с линейной по управлению функцией Понтрягина называется *особой*, если существует интервал $\Delta_0 \subset \Delta$ такой, что

$$\mathcal{H}_1 \big|_{(\mathbf{x}^*, u^*)} \equiv 0 \text{ на } \Delta_0.$$

Участок особой траектории (экстремали), соответствующий Δ_0 , называется *особой дугой*.

Наличие особых дуг на допустимых траекториях является предметом отдельного исследования. Оказывается, не любая особая экстремаль может быть оптимальной. Для формулировки необходимого условия, которое мы будем использовать в дальнейшем, дадим следующее определение [67].

Определение 1.21. (*Внутренним*) порядком задачи с линейной по управлению функцией Понтрягина называется такое минимальное натуральное число q , что на любой особой дуге $\{(\mathbf{x}^*(t), u^*(t)) : t \in \Delta_0\}$ выполняется

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \mathcal{H}_1 \right]_{(x^*, u^*)} \neq 0,$$

где производная по времени берется в силу управляемой и сопряженной систем.

Имеет место следующее необходимое условие оптимальности особых экстремалей, которое называется *условием Лежандра – Клебша*.

Теорема 1.22. [67], [44] Если особая нормальная траектория $\{(\mathbf{x}^*(t), u^*(t)) : t \in \Delta\}$

является оптимальной траекторией в задаче порядка q , то

$$(-1)^q \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \mathcal{H}_1 \right] \leq 0. \quad (1.8)$$

вдоль любой особой дуги этой траектории.

1.6. Выводы к разделу 1

В данном разделе были введены основные объекты и сформулированы те утверждения относительно них, которые будут использованы в дальнейшем изложении результатов работы.

В частности, первые два подраздела содержат необходимые сведения из теории римановых (подраздел 1.1) и псевдоримановых (лоренцевых) (подраздел 1.2) пространств. Среди прочего, вводится понятие модельных пространств постоянной секционной кривизны, рассматриваются понятия функции расстояния, ее регулярность, вводится полярная система координат на многообразии, понятие нормальной кривизны гиперповерхности, описываются вполне омбилические подмногообразия модельных пространств, для псевдоримановых многообразий все эти понятия рассматриваются в контексте соответствующих типов векторов, кривых и поверхностей.

Подраздел 1.3 содержит теоремы сравнения нормальных кривизн линий уровня функции расстояния в римановых и лоренцевых многообразиях ограниченной секционной кривизны.

В подразделе 1.4 вводится основной объект работы – полные λ -выпуклые (вогнутые), λ_1, λ_2 -выпуклые (гладкие и общего вида) гиперповерхности – и рассматриваются их свойства. Среди ключевых свойств таких поверхностей в модельных пространствах можно выделить теорему прокатывания Бляшке (теорема 1.16). Показывается, что из этой теоремы следует двойственный способ описания λ -выпуклости (лемма 1.17).

Последний подраздел 1.5 содержит необходимые в дальнейшем изложении сведения из теории оптимального управления. В частности, вводится понятие управляемого процесса, задачи минимизации, допустимого процесса (траектории), формулируется необходимое условие оптимальности допустимых траекторий – принцип максимума Понтрягина. Кроме того, в задачах с линейной по управлению функцией Понтрягина, рассматривается понятие особой экстремали, ее порядка, и приводится необходимое условие (условие Лежандра – Клебша) оптимальности особых траекторий.

РАЗДЕЛ 2

ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ РАДИАЛЬНЫХ (ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ) УГЛОВ В РИМАНОВЫХ (ЛОРЕНЦЕВЫХ) МНОГООБРАЗИЯХ И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НИХ

В этом разделе мы докажем теорему сравнения для так называемых *радиальных углов*, ассоциированных с λ -выпуклыми гиперповерхностями в римановых многообразиях ограниченной кривизны. Используя этот результат, мы получим точную оценку на величины радиальных углов, эквивалентную оценке градиента функции расстояния до гиперповерхности. Кроме этого, в пространствах постоянной кривизны мы покажем равносильность теоремы сравнения углов и теоремы прокатывания Бляшке, а также докажем аналог теоремы Бляшке в римановых многообразиях ограниченной кривизны. В конце раздела некоторые изложенные выше результаты распространяются на случай лоренцевых многообразий ограниченной времениподобной кривизны и приводятся оценки для так называемой *функции гиперболического угла* пространственноподобной гиперповерхности.

2.1. Понятия функций радиального и гиперболического угла, их связь с нормальными кривизнами.

Этот подраздел содержит все необходимые определения и основные технические леммы, касающиеся функции радиального угла в римановых многообразиях и функции гиперболического угла в лоренцевых многообразиях.

Начнем с риманова случая. Пусть M^{m+1} – риманово многообразие. Введем на M^{m+1} полярную систему координат с центром в точке $p \in M^{m+1}$ и предположим, что гиперповерхность $\Sigma \subset M^{m+1}$ лежит в области регулярности такой системы координат. Например, можем считать $\Sigma \subset \exp_p B(0, \text{inj}_M(p)) \setminus \{p\}$. В такой

области функция расстояния d_p является гладкой, и поэтому определено единичное поле градиента ∇d_p (см. подраздел 1.1).

Обозначим через ν – единичное нормальное векторное поле к Σ .

Определение 2.1. Функция $\varphi: \Sigma \rightarrow [0, \pi]$, определяемая соотношением

$$\cos \varphi = \langle \nabla d_p, \nu \rangle,$$

называется *функцией радиального угла* для гиперповерхности Σ с выбранным на ней нормальным векторным полем ν по отношению к центру p полярной системы координат (см. рис. 2.1).

Таким образом, φ определяется парой: точкой p и гиперповерхностью Σ с заданной на ней ориентацией (при помощи нормального векторного поля ν). В дальнейшем, если будет ясно, относительно какого нормального векторного поля определена функция φ , мы будем опускать явное указание.

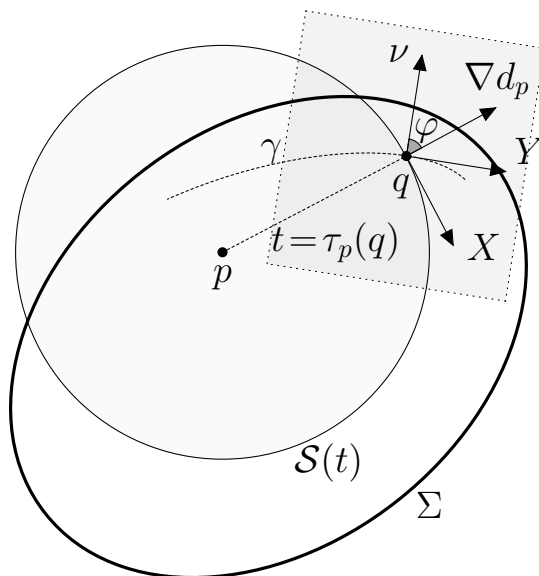


Рис. 2.1. Определение радиального угла φ (для гиперповерхности Σ относительно точки p) и связанных с ним векторных полей.

Обозначим через τ_p ограничение функции расстояния d_p на гиперповерхность Σ :

$$\tau_p: \Sigma \rightarrow (0, +\infty), \quad \tau_p(q) = d_p(q) \text{ для } q \in \Sigma,$$

и пусть $\nabla^\Sigma \tau_p$ – соответствующее поле градиента τ_p как функции на Σ . Для удобства, введем в рассмотрение единичное векторное поле $Y = \nabla^\Sigma \tau_p / |\nabla^\Sigma \tau_p|$.

Векторное поле $\nabla^\Sigma \tau_p$ является ортогональной проекцией ∇d_p на $T\Sigma$. Действительно, по определению градиента функции (см. подраздел 1.1), в точках на Σ для произвольного касательного векторного поля $X \subset T\Sigma$ имеем следующие равенства:

$$\langle \nabla d_p, X \rangle = X(d_p) = X(\tau_p), \quad \langle \nabla^\Sigma \tau_p, X \rangle = X(\tau_p).$$

Вычитая одно из другого, получим $\langle \nabla d_p - \nabla^\Sigma \tau_p, X \rangle = 0$, что и доказывает утверждение.

Из связи ∇d_p и $\nabla^\Sigma \tau_p$ следует, что для любой точки $q \in \Sigma$ векторы $\nabla d_p(q)$, $Y(q)$ и $\nu(q)$ лежат в двумерном подпространстве $T_q M$. Тогда выберем в этом подпространстве единичный вектор $X(q)$ ортогональный ∇d_p и такой, что ориентации пар $\{X(q), \nabla d_p(q)\}$ и $\{Y(q), \nu(q)\}$ совпадают.

Конструкция выше работает только в тех точках $q \in \Sigma$, в которых $\nabla^\Sigma \tau_p \neq 0$. В противном случае, точка q является критической точкой функции τ_p . В этой точке $\varphi(q) = 0$.

Если $q \in \Sigma$ не является критической точкой для функции расстояния τ_p , то существует единственная интегральная траектория γ векторного поля Y такая, что γ проходит через q в направлении $Y(q)$. Более того, так как $\nabla^\Sigma \tau_p(q) \neq 0$ и τ_p является гладкой функцией, кривая γ в некоторой окрестности q может быть параметризована параметром расстояния t от p :

$$t = \tau_p(\gamma(t)) = d_p(\gamma(t)).$$

Во введенных выше обозначениях справедлива следующая лемма, доказанная А. А. Борисенко в [34]. Формула, которая в ней фигурирует, является формулой типа Лиувилля, и в двумерном случае эквивалентна [50, гл. 4-4, утв. 4]. Лемма выражает связь между функцией радиального угла φ , нормальными кривизнами Σ и нормальными кривизнами геодезических сфер $\mathcal{S}(t)$, которые суть линии уровня

функции расстояния d_p (см. подраздел 1.3).

Лемма 2.2. [34] В любой точке $q = \gamma(t)$ построенной выше интегральной траектории γ выполняется равенство

$$k_n^{-\nu}(q, Y) = \mu_n^{-\nabla d_p}(t)(q, X) \cdot \cos \varphi + \frac{d}{dt} \cos \varphi, \quad (2.1)$$

где $\mu_n^{-\nabla d_p}(t)(q, X)$ – нормальная кривизна гиперповерхности $\mathcal{S}(t)$ в точке q и в направлении $X(q)$ по отношению к единичному полю нормалей $-\nabla d_p$.

Замечание 2.3. Заметим, что если D_Σ – выпуклая область, p – точка внутри нее, то для внешнего нормального векторного поля ν величина φ – это угол между ν и ∇d_p , а величина $k_n^{-\nu}(q, Y)$ – неотрицательна. При этом, нормальная кривизна $\mu_n^{-\nabla d_p}(t)(q, X)$ всегда неотрицательна.

Мы приведем доказательство аналога этой леммы в лоренцевом случае, к формулировке которого сейчас и переходим. Но перед этим отметим, что в цитируемом источнике [34] (а также в [4]) доказательство содержит вычислительную неточность, которую можно исправить, и результат остается справедливым. Так, наше вычисление для лоренцева случая может быть практически дословно перенесено на риманов случай.

Перейдем к случаю лоренцева многообразия. Пусть $N \subset M^{m+1}$ – гладкая ахроническая пространственноподобная гиперповерхность в пространство–времени M^{m+1} .

Определение 2.4. Для произвольной пространственноподобной гиперповерхности $\Sigma \subset \mathcal{I}^+(N)$, для которой ν – направленное в прошлое единичное поле нормалей, функция $\varphi: \Sigma \rightarrow [0, +\infty)$, определяемая соотношением

$$\operatorname{ch} \varphi = - \langle \nabla d_N, \nu \rangle,$$

называется *функцией гиперболического угла* для Σ по отношению к N .

Повторим построенную выше риманову конструкцию в лоренцевом случае. А именно, обозначим через τ_N ограничение функции расстояния d_N на Σ . В силу того, что функция τ_N определена на Σ , мы можем рассмотреть ее градиент $\nabla^\Sigma \tau_N$. Поле $\nabla^\Sigma \tau_N$ является пространственноподобным векторным полем в $T\Sigma \subset TM$.

Аналогично риманову случаю, построим правильно ориентированное единичное пространственноподобное векторное поле X , в каждой точке лежащее в двумерной (времениподобной) плоскости, натянутой на ∇d_N , $\nabla^\Sigma \tau_N$ и ν , ортогонально ∇d_N . Введем в рассмотрение $Y: \Sigma \rightarrow T\Sigma$ – единичное (пространственноподобное) векторное поле, коллинеарное $\nabla^\Sigma \tau_N$ в каждой точке.

Также как и в римановом случае, конструкция выше работает только для не критических точек τ_N . В критических точках $\nabla^\Sigma \tau_N = 0$ и $\varphi = 0$.

Если $p \in \Sigma$ не является критической точкой для функции расстояния τ_N , то существует единственная интегральная траектория γ векторного поля Y такая, проходящая через p в направлении $Y(p)$. Аналогично, в силу утверждение 1.6, кривая γ в некоторой окрестности p может быть параметризована параметром расстояния t от N :

$$t = \tau_N(\gamma(t)) = d_N(\gamma(t)). \quad (2.2)$$

Используя построенную выше конструкцию, мы можем установить связь между функцией гиперболического угла Σ , нормальной кривизной Σ и нормальной кривизной $\mathcal{S}(t)$ – линий уровня функции расстояния (см. подраздел 1.3). Следующая лемма является лоренцевым аналогом леммы 2.2.

Лемма 2.5. *Если $\gamma(t)$ – интегральная траектория векторного поля Y , параметризованная расстоянием t от N , то для любого t в точке $p = \gamma(t)$ выполняется*

равенство

$$k_n^\nu(p, Y) = \mu_n^{\nabla d_N}(t)(p, X) \cdot \operatorname{ch} \varphi + \frac{d}{dt} \operatorname{ch} \varphi, \quad (2.3)$$

где $\mu_n^{\nabla d_N}(t)(\gamma(t), X)$ – нормальная кривизна гиперповерхности $\mathcal{S}(t)$ в точке p и в направлении $X(p)$ по отношению к направленному в прошлое единичному полю нормалей ∇d_N .

Доказательство. Утверждение леммы следует из непосредственного вычисления. Действительно, построенные векторные поля в каждой точке связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} Y &= -\operatorname{sh} \varphi \cdot \nabla d_N + \operatorname{ch} \varphi \cdot X \\ \nu &= \operatorname{ch} \varphi \cdot \nabla d_N - \operatorname{sh} \varphi \cdot X. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Используя (1.1) и (2.4), имеем:

$$\begin{aligned} k_n^\nu(p, Y) &= \langle \nabla_Y Y, \nu \rangle = (-\operatorname{ch} \varphi \cdot \langle \nabla d_N, \nu \rangle + \operatorname{sh} \varphi \cdot \langle X, \nu \rangle) \cdot Y(\varphi) \\ &\quad - \operatorname{sh} \varphi \langle \nabla_Y \nabla d_N, \nu \rangle + \operatorname{ch} \varphi \langle \nabla_Y X, \nu \rangle \\ &= Y(\varphi) + \operatorname{sh}^2 \varphi \langle \nabla_{\nabla d_N} \nabla d_N, \nu \rangle - \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi \langle \nabla_X \nabla d_N, \nu \rangle \\ &\quad - \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi \langle \nabla_{\nabla d_N} X, \nu \rangle + \operatorname{ch}^2 \varphi \langle \nabla_X X, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Так как интегральные кривые для ∇d_N являются геодезическими линиями, то $\nabla_{\nabla d_N} \nabla d_N = 0$. Следовательно, второе слагаемое в последнем равенстве пропадает. Используя единичность ∇d_N и X , мы имеем:

$$\begin{aligned} k_n^\nu(p, Y) &= Y(\varphi) - \operatorname{ch}^2 \varphi \operatorname{sh} \varphi \langle \nabla_X \nabla d_N, \nabla d_N \rangle + \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh}^2 \varphi \langle \nabla_X \nabla d_N, X \rangle \\ &\quad - \operatorname{ch}^2 \varphi \operatorname{sh} \varphi \langle \nabla_{\nabla d_N} X, \nabla d_N \rangle + \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh}^2 \varphi \langle \nabla_{\nabla d_N} X, X \rangle \\ &\quad + \operatorname{ch}^3 \varphi \langle \nabla_X X, \nabla d_N \rangle - \operatorname{ch}^2 \varphi \operatorname{sh} \varphi \langle \nabla_X X, X \rangle \\ &= Y(\varphi) + \operatorname{ch} \varphi \langle \nabla_X X, \nabla d_N \rangle \\ &= Y(\varphi) + \operatorname{ch} \varphi \cdot \mu_n^{\nabla d_N}(p, X). \end{aligned}$$

Для доказательства (2.3) осталось заметить, что

$$Y(\varphi) = Y(t) \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \operatorname{sh} \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \operatorname{ch} \varphi$$

в силу (2.2) и того факта, что Y – единичное пространственноподобное векторное поле, коллинеарное $\nabla^\Sigma \tau_N$. Лемма доказана. \square

2.2. Теорема сравнения радиальных углов в римановых многообразиях ограниченной кривизны

Используя результаты предыдущего подраздела, здесь мы докажем один из первых основных результатов диссертационной работы – теорему сравнения радиальных углов.

Теорема 2.6. Пусть M^{m+1} – полное односвязное гладкое $(m + 1)$ -мерное ($m \geq 1$) риманово многообразие, все секционные кривизны K_σ которого в каждой точке и по каждой двумерной площадке $\sigma \subset TM$ удовлетворяют неравенству

$$K_\sigma \geq c$$

для некоторой константы c . И пусть области $D_\Sigma \subset M^{m+1}$, $D_{\mathcal{F}_\lambda} \subset M^{m+1}(c)$ и точки $p \in D_\Sigma$, $p_\lambda \in D_{\mathcal{F}_\lambda}$ выбраны так, что Σ – гладкая λ -выпуклая гиперповерхность с $\lambda > 0$ относительно направленного в D_Σ поля нормалей ν и лежащая в шаре радиуса $\operatorname{inj}_M(p)$ с центром в точке p , \mathcal{F}_λ – вполне омбилическая гиперповерхность кривизны λ относительно внутреннего поля нормалей ν_λ и $\operatorname{dist}(p, \Sigma) = \operatorname{dist}(p_\lambda, \mathcal{F}_\lambda) \neq 0$. Тогда для φ и φ_λ – функций радиальных углов, соответственно, гиперповерхностей Σ и \mathcal{F}_λ по отношению к точкам p и p_λ и

нормальным полям $-\nu$ и $-\nu_\lambda$ — в тех точках $q \in \Sigma$ и $q_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda$, для которых

$$\tau_p(q) = \tau_{p_\lambda}(q_\lambda),$$

выполняется неравенство

$$\cos \varphi(q) \geq \cos \varphi_\lambda(q_\lambda). \quad (2.5)$$

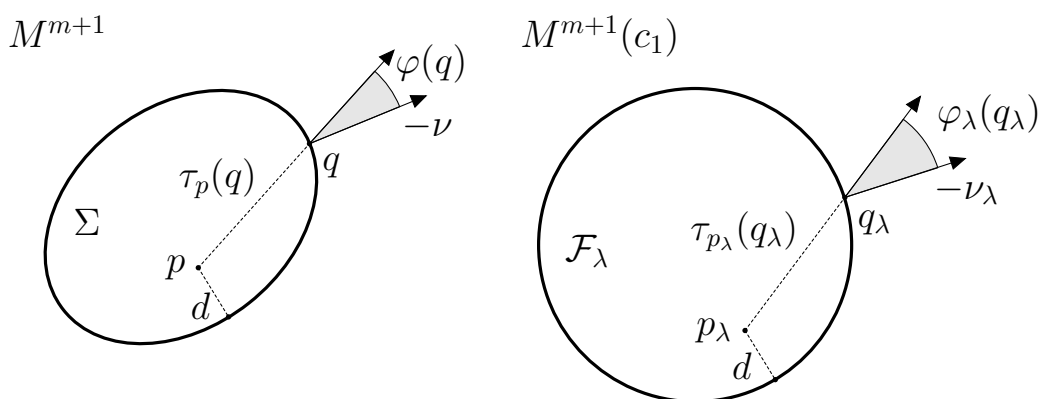


Рис. 2.2. Иллюстрация к теореме 2.6 сравнения радиальных углов (тут $d = \text{dist}(p, \Sigma) = \text{dist}(p_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$).

Замечание 2.7. Если $K_\sigma \leq 0$, то $\text{inj}_M(p) = \infty$ для любой точки p [15, §24], и поэтому условие принадлежности шару радиуса $\text{inj}_M(p)$ можно откинуть. То же замечание верно и для последующих результатов.

Пусть D — звездная относительно точки p область, $\Sigma \subset \partial D$. Напомним, что *опорной функцией* гиперповерхности $\Sigma \subset M^{m+1}$ относительно точки $p \in D$ называется функция

$$h_p = \tau_p \cdot \cos \varphi,$$

заданная на Σ (см. [14, глава 6, §5]).

Из теоремы 2.6 следует теорема сравнения для опорных функций.

Следствие 2.8. Если выполнены условия теоремы 2.6, то для опорных функций h_p

и h_{p_λ} гиперповерхностей Σ и \mathcal{F}_λ по отношению к точкам $p \in D_\Sigma$ и $p_\lambda \in D_{\mathcal{F}_\lambda}$ выполняется неравенство

$$h_p(q) \geq h_{p_\lambda}(q_\lambda).$$

Для теоремы 2.6 и следствия 2.8 имеет место двойственный к ним результат.

Теорема 2.9. Пусть M^{m+1} – полное односвязное гладкое риманово многообразие, все секционные кривизны K_σ которого удовлетворяют

$$c \geq K_\sigma;$$

$D_\Sigma \subset M^{m+1}$ – λ -вогнутая область с гладкой границей и $\lambda > 0$ относительно внутреннего поля нормалей ν , лежащая в шаре радиуса $\text{inj}_M(p)$, $p \in D_\Sigma$; $D_{\mathcal{F}_\lambda} \subset M^{m+1}(c)$ – область с вполне омбилической границей кривизны λ относительно внутреннего поля ν_λ ; точка $p_\lambda \in D_{\mathcal{F}_\lambda}$ выбрана так, что $\text{dist}(p, \Sigma) = \text{dist}(p_\lambda, \mathcal{F}_\lambda) \neq 0$. Если точки $q \in \Sigma$ и $q_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda$ таковы, что

$$\tau_p(q) = \tau_{p_\lambda}(q_\lambda),$$

то для радиальных углов φ и φ_λ по отношению к p и p_λ , $-\nu$ и $-\nu_\lambda$ гиперповерхностей Σ и \mathcal{F}_λ в этих точках выполняется неравенство

$$\cos \varphi(q) \leq \cos \varphi_\lambda(q_\lambda).$$

Более того, для опорных функций h_p и h_{p_λ} гиперповерхностей Σ и \mathcal{F}_λ в

точках q и q_λ справедливо неравенство

$$h_p(q) \leq h_{p_\lambda}(q_\lambda).$$

Теорема 2.6 в ходе изложения доказана в статьях [39], [34], [41] для многообразий Адамара. Мы воспользуемся той же техникой, но наше доказательство будет несколько проще.

Доказательство теорем 2.6 и 2.9. Доказательства теорем 2.6 и 2.9 практически дословно повторяют друг друга с заменой соответствующих результатов сравнения. Поэтому мы остановимся лишь на доказательстве первой теоремы.

Пусть $s \in \Sigma$ и $s_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda$ такие точки, что $\tau_p(s) = \tau_{p_\lambda}(s_\lambda) = d$, где $d = \text{dist}(p, \Sigma) = \text{dist}(p_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$. Заметим, что в этих точках неравенство (2.5) выполнено.

По условию теоремы обе гиперповерхности Σ и \mathcal{F}_λ лежат в областях регулярности функций расстояния d_p и d_{p_λ} (а значит, и их ограничений τ_p, τ_{p_λ}). Для выпуклых гиперповерхностей в модельных пространствах это верно всегда, для Σ это следует из принадлежности шару радиуса $\text{inj}_M(p)$. Предположим, что в точке q градиент $\nabla^\Sigma \tau_p$ не пропадает: $\nabla^\Sigma \tau_p(q) \neq 0$. Заметим, что тогда $\nabla^{\mathcal{F}_\lambda} \tau_{p_\lambda}(q_\lambda) \neq 0$. Более того, в силу строения \mathcal{F}_λ векторное поле $\nabla^{\mathcal{F}_\lambda} \tau_{p_\lambda}$ пропадает в точке s_λ , и если $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{S}_\lambda$, то и в ее диаметрально противоположной точке. Во всех остальных точках \mathcal{F}_λ это векторное поле не обнуляется. В тоже время, если $\nabla^\Sigma \tau_p(q) = 0$, $q \neq s$, то $\varphi(q) = 0$ (см., например, (2.20)), и неравенство (2.5) выполнено.

При таком допущении, через точки q и q_λ проходят единственные интегральные траектории векторных полей $\nabla^\Sigma \tau_p$ и $\nabla^{\mathcal{F}_\lambda} \tau_{p_\lambda}$. Более того, эти интегральные траектории могут быть в окрестности точек q и q_λ параметризованы расстоянием t от точек p и p_λ (мы используем одинаковое обозначение t для разных пространств). Обозначим эти траектории как $\gamma(t)$ и $\gamma_\lambda(t)$ соответственно. Рассмотрим предельное множество $[t_{\min}, t_{\max}]$ значений параметра t , для которых такая параметризация существует. Можем считать, что $t_{\min} = d$. Тогда $\lim_{t \rightarrow t_{\min}+0} \gamma(t) = s$, $\lim_{t \rightarrow t_{\min}+0} \gamma_\lambda(t) = s_\lambda$ и $\varphi(s) = \varphi_\lambda(s_\lambda) = 0$ в силу того, что d – это расстояние.

По лемме 2.2, вдоль интегральных траекторий γ и γ_λ справедливы равенства

(в обозначениях леммы)

$$k_n(t) = \mu_n(t) \cdot \cos \varphi(t) + \frac{d}{dt} \cos \varphi(t), \quad (2.6)$$

$$\lambda = \mu_{n,c}(t) \cdot \cos \varphi_\lambda(t) + \frac{d}{dt} \cos \varphi_\lambda(t), \quad (2.7)$$

где, для краткости, $k_n(t) = k_n^\nu(\gamma(t), Y)$, $\mu_n(t) = \mu_n^{-\nabla d_p}(t)(\gamma(t), X)$ и $\mu_{n,c}(t) = \mu_{n,c}^{-\nabla d_{p\lambda}}(t)$. В (2.7) мы воспользовались тем, что \mathcal{F}_λ – вполне омбилическая поверхность (а значит все ее нормальные кривизны равны λ) и тем, что в модельном пространстве $M^{m+1}(c)$ постоянной кривизны c нормальная кривизна $\mu_{n,c}^{-\nabla d_{p\lambda}}$ геодезических сфер радиуса t зависит только от t и определяется равенством (1.2).

По теореме сравнения для нормальных кривизн сфер (теорема 1.7) имеем

$$\mu_{n,c}(t) \geq \mu_n(t). \quad (2.8)$$

Вычтем равенство (2.7) из равенства (2.6). Так как Σ – гладкая λ -выпуклая гиперповерхность, ее нормальные кривизны удовлетворяют $k_n \geq \lambda$ относительно поля нормалей ν . Учитывая это неравенство и (2.8), получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq k_n(t) - \lambda \\ &\leq \frac{d}{dt} (\cos \varphi(t) - \cos \varphi_\lambda(t)) + \mu_{n,c}(t) (\cos \varphi(t) - \cos \varphi_\lambda(t)). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Обозначим $f(t) = \cos \varphi(t) - \cos \varphi_\lambda(t)$. В силу (2.9) и (1.2), функция f удовлетворяет следующему дифференциальному неравенству

$$f'(t) + \frac{\text{sn}'_c(t)}{\text{sn}_c(t)} f(t) \geq 0. \quad (2.10)$$

И так как $\text{sn}_c(t) > 0$ для всех положительных значений t , то (2.10) эквивалентно условию

$$(f(t) \cdot \text{sn}_c(t))' \geq 0. \quad (2.11)$$

Таким образом, функция $f \cdot \text{sn}_c$ является монотонно возрастающей на $[d, t_{\max}]$. При этом, $f(d) \cdot \text{sn}_c(d) = 0$. А значит, для всех значений t , больших d , мы име-

ем $f(t) \geq 0$. И если значение $t = l > d$ соответствует точкам q и q_λ , то $f(l) = \cos \varphi(q) - \cos \varphi_\lambda(q_\lambda) \geq 0$, что и требовалось показать. \square

2.3. Теорема об оценке функции радиального угла λ -выпуклых гиперповерхностей.

Теорема сравнения радиальных углов, доказанная в предыдущем подразделе, дает возможность дать априорную оценку величины функции гиперболического угла заданной λ -выпуклой гиперповерхности Σ . Первым шагом для получения этого результата является оценка радиального угла для вполне омбилических гиперповерхностей \mathcal{F}_λ .

В случае, когда \mathcal{F}_λ – орифера или орицикл в пространстве Лобачевского, оценки функции радиальных углов были получены в [5], [40], [39], [34] и [41] при различных ограничениях в пространстве Лобачевского и отрицательно искривленных многообразиях (многообразиях Адамара). Поэтому, нас будет интересовать оставшийся, по сути, случай, когда $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{S}_\lambda$ – сфера. Напомним, что для пространства Лобачевского $\mathbb{H}^{m+1}(-k^2)$ из такого допущения следует ограничение $\lambda > k$.

Заметим, что в силу симметрии сферы, для оценки радиального угла можем считать, что \mathcal{S}_λ – окружность на двумерной плоскости $M^2(c)$ постоянной кривизны, равной c . В таком случае справедлива следующая лемма.

Лемма 2.10. *Пусть $M^2(c)$ – плоскость постоянной кривизны, равной c , \mathcal{S}_λ – окружность радиуса R_λ , p_λ – точка внутри круга, ограниченного окружностью, на расстоянии d от окружности. Тогда угол φ_λ между произвольной геодезической из точки p_λ в точку на окружности и внешней нормалью к окружности удовлетворяет,*

1. в случае евклидовой плоскости ($c = 0$),

$$\cos \varphi_\lambda \geq \sqrt{\frac{2d}{R_\lambda} - \frac{d^2}{R_\lambda^2}} \geq \frac{d}{R_\lambda}.$$

2. в случае пространства Лобачевского кривизны $c = -k^2$,

$$\cos \varphi_\lambda \geq \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sh}^2 k(R_\lambda - d)}{\operatorname{sh}^2 kR_\lambda}} \geq \frac{\operatorname{sh} kd}{\operatorname{sh} kR_\lambda}.$$

3. в случае сферического пространства кривизны $c = k^2$, при условии, что

$$R_\lambda \leq \pi/2k,$$

$$\cos \varphi_\lambda \geq \sqrt{1 - \frac{\sin^2 k(R_\lambda - d)}{\sin^2 kR_\lambda}} \geq \frac{\sin kd}{\sin kR_\lambda}.$$

Доказательство. Рассмотрим все три случая одновременно. Пусть p_1 – центр S_λ , s_λ – точка пересечения геодезического луча p_1p_λ с S_λ . Т.к. d – расстояние, то $|p_\lambda s_\lambda| = \operatorname{dist}(p_\lambda, s_\lambda) = d$. Пусть также $q_\lambda \in S_\lambda$ – произвольная точка. Тогда $\angle p_1 q_\lambda p_\lambda = \varphi_\lambda$ (см. рис. 2.3).

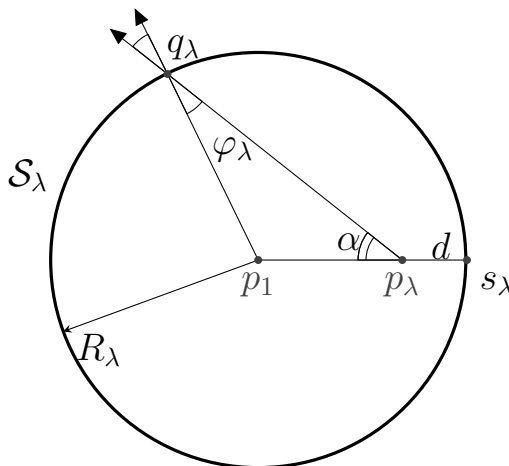


Рис. 2.3. Построения для оценки функции радиального угла окружности $S_\lambda \subset M^2(c)$.

Обозначим $\alpha = \angle q_\lambda p_\lambda s_\lambda$. По теореме синусов в двумерном пространстве

$M^2(c)$ постоянной кривизны для геодезического треугольника $\Delta p_1 p_\lambda q_\lambda$:

$$\frac{\operatorname{sn}_c |p_1 q_\lambda|}{\sin \angle p_1 p_\lambda q_\lambda} = \frac{\operatorname{sn}_c |p_1 p_\lambda|}{\sin \angle p_1 q_\lambda p_\lambda} \text{ или } \frac{\operatorname{sn}_c R_\lambda}{\sin \alpha} = \frac{\operatorname{sn}_c (R_\lambda - d)}{\sin \varphi_\lambda}.$$

Следовательно,

$$\sin \varphi_\lambda = \frac{\operatorname{sn}_c (R_\lambda - d)}{\operatorname{sn}_c R_\lambda} \sin \alpha.$$

Значит, максимальное значение угла φ_λ (и, соответственно, минимальное значение $\cos \varphi_\lambda$) достигается при $\sin \alpha = 1$, то есть при $\alpha = \pi/2$, $p_\lambda q_\lambda \perp p_1 s_\lambda$. Заметим, что при $\alpha = \pi/2$ луч из точки p_λ непременно пересечет \mathcal{S}_λ в некоторой точке q_λ . В евклидовом случае это очевидно. В случае пространства Лобачевского это видно, если рассмотреть конструкцию рис. 2.3 в модели Пуанкаре в диске, считая p_λ – центром этого диска. В сферическом пространстве, в силу того, что $R_\lambda \leq \pi/2k$, окружность \mathcal{S}_λ будет лежать в замкнутой полусфере. Рассмотрев, например, стереографическую проекцию этой полусферы на плоскость, легко видеть, что при $\alpha = \pi/2$ луч из точки p_λ пересечет \mathcal{S}_λ . Таким образом, максимальное значение φ_λ достигается во всех модельных пространствах.

Если $\varphi_0 = \max \varphi_\lambda$, то $\sin \varphi_0 = \operatorname{sn}_c (R_\lambda - d) / \operatorname{sn}_c R_\lambda$. Следовательно, для произвольного угла φ_λ

$$\cos \varphi_\lambda \geq \cos \varphi_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{sn}_c (R_\lambda - d)}{\operatorname{sn}_c R_\lambda} \right)^2}.$$

Расписывая sn_c в каждом из случаев, получим первые, более точные, оценки для $\cos \varphi_\lambda$ в пунктах 1 – 3 леммы. Вторые, более простые по своей форме, оценки получаются непосредственной проверкой. Действительно,

1. при $c = 0$,

$$\sqrt{\frac{2d}{R_\lambda} - \frac{d^2}{R_\lambda^2}} \geq \frac{d}{R_\lambda} \Leftrightarrow \frac{2d}{R_\lambda} - \frac{d^2}{R_\lambda^2} \geq \frac{d^2}{R_\lambda^2} \Leftrightarrow \frac{d}{R_\lambda} \geq \frac{d^2}{R_\lambda^2} \Leftrightarrow \frac{d}{R_\lambda} \leq 1 \Leftrightarrow d \leq R_\lambda,$$

что верно;

2. при $c = -k^2$,

$$\begin{aligned}
1 - \frac{\operatorname{sh}^2 k(R_\lambda - d)}{\operatorname{sh}^2 kR_\lambda} &\geq \frac{\operatorname{sh}^2 kd}{\operatorname{sh}^2 kR_\lambda} \Leftrightarrow \operatorname{sh}^2 kR_\lambda - \operatorname{sh}^2 k(R_\lambda - d) \geq \operatorname{sh}^2 kd \\
&\Leftrightarrow (\operatorname{sh} kR_\lambda - \operatorname{sh} k(R_\lambda - d)) (\operatorname{sh} kR_\lambda + \operatorname{sh} k(R_\lambda - d)) \\
&= 2 \operatorname{sh} \frac{kd}{2} \operatorname{ch} k \left(R_\lambda - \frac{d}{2} \right) \cdot 2 \operatorname{sh} k \left(R_\lambda - \frac{d}{2} \right) \operatorname{ch} \frac{kd}{2} \\
&= \operatorname{sh} kd \operatorname{sh} k(2R_\lambda - d) \geq \operatorname{sh}^2 kd \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sh} k(2R_\lambda - d) \geq \operatorname{sh} kd,
\end{aligned}$$

а это верно в силу того, что $2R_\lambda - d \geq d \Leftrightarrow R_\lambda \geq d$;

3. при $c = k^2$,

$$\begin{aligned}
1 - \frac{\sin^2 k(R_\lambda - d)}{\sin^2 kR_\lambda} &\geq \frac{\sin^2 kd}{\sin^2 kR_\lambda} \Leftrightarrow \sin^2 kR_\lambda - \sin^2 k(R_\lambda - d) \geq \sin^2 kd \\
&\Leftrightarrow (\sin kR_\lambda - \sin k(R_\lambda - d)) (\sin kR_\lambda + \sin k(R_\lambda - d)) \geq \sin^2 kd \\
&\Leftrightarrow 2 \sin \frac{kd}{2} \cos k \left(R_\lambda - \frac{d}{2} \right) \cdot 2 \sin k \left(R_\lambda - \frac{d}{2} \right) \cos \frac{kd}{2} \geq \sin^2 kd \\
&\Leftrightarrow \sin kd \sin k(R_\lambda - d) \geq \sin^2 kd \\
&\Leftrightarrow \sin k(R_\lambda - d) \geq \sin kd \\
&\Leftrightarrow \sin k(R_\lambda - d) \cos kR_\lambda \geq 0,
\end{aligned}$$

что верно, т.к. $R_\lambda - d \geq 0$ и $R_\lambda \leq \pi/2k$.

Лемма 2.10 доказана. □

Из теоремы 2.6 сравнения радиальных углов и леммы 2.10 следует второй основной результат диссертационной работы – априорные оценки функции радиального угла для λ -выпуклых гиперповерхностей.

Теорема 2.11. Пусть $M^{m+1}(c)$ – модельное риманово пространство кривизны c ,

$\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ – регулярная класса C^2 полная вложенная λ -выпуклая ($\lambda > 0$)

гиперповерхность в нем, $p \in D_\Sigma$ – точка внутри области, ограничиваемой Σ ,

$d = \operatorname{dist}(p, \Sigma)$ и φ – функция радиального угла гиперповерхности Σ по отношению

к точке p и внешнему полю нормалей. Тогда:

1. Если $c = 0$, т.е. объемлющее пространство является евклидовым пространством \mathbb{E}^{m+1} , то функция радиального угла удовлетворяет неравенству

$$\cos \varphi \geq \sqrt{\frac{2d}{R_\lambda} - \frac{d^2}{R_\lambda^2}} \geq \frac{d}{R_\lambda}. \quad (2.12)$$

2. Если $c = -k^2 < 0$, т.е. объемлющее пространство является пространством Лобачевского $\mathbb{H}^{m+1}(-k^2)$, и $\lambda > k$, то функция φ удовлетворяет

$$\cos \varphi \geq \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sh}^2 k(R_\lambda - d)}{\operatorname{sh}^2 k R_\lambda}} \geq \frac{\operatorname{sh} k d}{\operatorname{sh} k R_\lambda}. \quad (2.13)$$

3. Если $c = k^2 > 0$, т.е. объемлющее пространство является сферическим пространством $\mathbb{S}^{m+1}(k^2)$, то для функции φ выполняется оценка

$$\cos \varphi \geq \sqrt{1 - \frac{\sin^2 k(R_\lambda - d)}{\sin^2 k R_\lambda}} \geq \frac{\sin k d}{\sin k R_\lambda}. \quad (2.14)$$

Во всех оценках выше R_λ – радиус вполне омбилической сферы кривизны, равной λ , в пространстве постоянной кривизны $M^{m+1}(c)$.

Более того, первые оценки во всех случаях являются точными.

Точность оценок следует из того, что экстремальное значение в лемме 2.10 достигается.

Аналогичный результат имеет место, если объемлющее пространство является римановым многообразием знакопостоянной секционной кривизны.

Теорема 2.12. Пусть $\Sigma \subset M^{m+1}$ – полная вложенная C^2 -гладкая λ -выпуклая ($\lambda > 0$) гиперповерхность в полном односвязном $(m + 1)$ -мерном римановом мно-

гообразии M^{m+1} , $p \in D_\Sigma$ – точка внутри Σ на расстоянии $d = \text{dist}(p, \Sigma)$ от Σ , φ – функция радиального угла для Σ , p и внешнего поля нормалей. Тогда:

1. Если секционные кривизны K_σ многообразия M^{m+1} по любой двумерной площадке σ удовлетворяют неравенству $0 \geq K_\sigma \geq -k^2$, и $\lambda > k > 0$, то выполняется неравенство (2.13).

2. Если секционные кривизны многообразия M^{m+1} удовлетворяют неравенству $K_\sigma \geq k^2$ для положительного k , а область D_Σ лежит в шаре радиуса $\text{inj}_M(p)$, то для φ справедливо неравенство (2.14).

Доказательство теорем 2.11 и 2.12. Формулировка теоремы корректна. А именно, полная вложенная λ -выпуклая гиперповерхность Σ ограничивает область D_Σ . При этом, по теореме прокатывания Бляшке (теорема 1.16, а также теорема 2.20), область D_Σ – компакта, и для любой $q \in \Sigma$ найдется точка сравнения $q_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$. После этого приведенные теоремы являются непосредственным следствием теоремы 2.6 и леммы 2.10. \square

Замечание 2.13. Из леммы 1.15 о топологическом строении полных λ -выпуклых гиперповерхностей следует, что в пункте 1 теоремы выше при $m \geq 2$ вместо вложенности Σ можно требовать только погруженности. Это же верно и для всех пунктов теоремы 2.11.

2.4. Эквивалентность теоремы сравнения радиальных углов и теоремы прокатывания Бляшке.

Везде в этом разделе будем считать, что константа λ положительна, а в случае $c < 0$ вдобавок $\lambda > \sqrt{-c}$. При таких значениях для λ в римановом модельном пространстве $M^{m+1}(c)$ существует сфера \mathcal{S}_λ кривизны, равной λ . Как и везде выше, обозначим через R_λ её радиус, $D_{\mathcal{S}_\lambda}$ – ограничиваемый ею шар.

Формулировкам и доказательствам основных результатов этого подраздела предварим следующую конструкцию и два технических результата.

Пусть $D_\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ – (замкнутая) область, граница которой – гладкая вложенная гиперповерхность Σ .

Выберем точку $p \in D_\Sigma$, и пусть $\text{dist}(p, \Sigma) = \text{dist}(p, s) = d$. Для произвольной точки $q \in \Sigma$ построим точку $\bar{q} \in M^2(c)$ такую, что $|q\bar{q}| = R_\lambda$, геодезический отрезок $q\bar{q}$ перпендикулярен Σ в точке q и направлен во внутрь Σ (см. рис. 2.4).

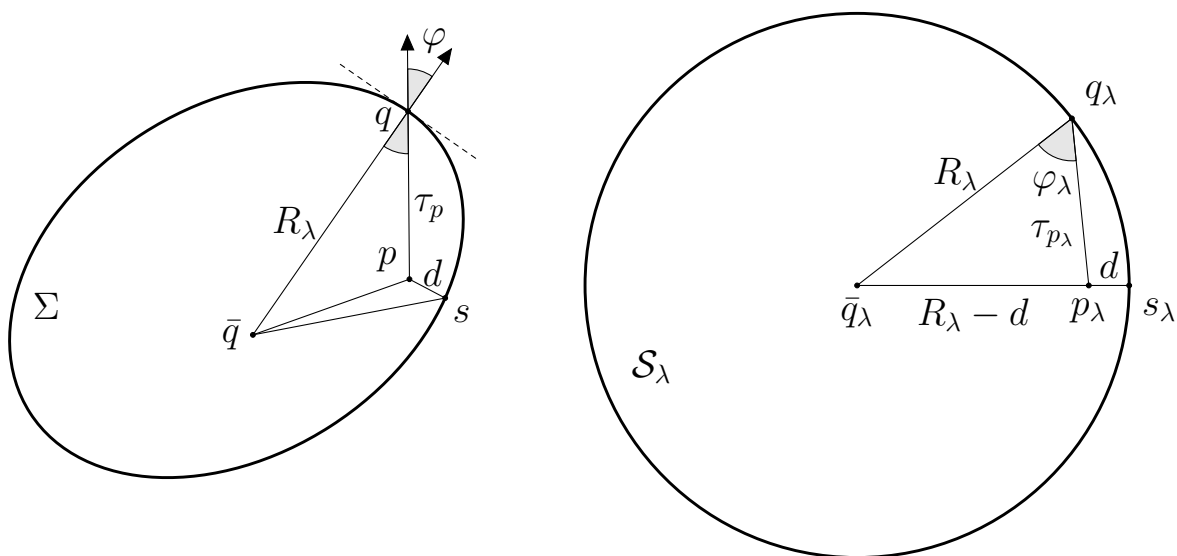


Рис. 2.4. Построение $\Delta pq\bar{q}$ и соответствующего ему $\Delta p_\lambda q_\lambda \bar{q}_\lambda$.

Пусть теперь $p_\lambda \in D_{S_\lambda}$ – такая точка, что $\text{dist}(p_\lambda, S_\lambda) = \text{dist}(p_\lambda, s_\lambda) = d$. Для гиперповерхностей Σ и S_λ и точек p, p_λ рассмотрим функции радиального угла φ и φ_λ . Имеет место следующая лемма.

Лемма 2.14. В обозначениях выше, пусть $q \in \Sigma, q_\lambda \in S_\lambda$ такие точки, что

$$\tau_p(q) = \tau_{p_\lambda}(q_\lambda).$$

Тогда

$$\varphi(q) \leq \varphi_\lambda(q_\lambda) \Leftrightarrow |\bar{q}s| \leq R_\lambda = |\bar{q}_\lambda s_\lambda|. \quad (2.15)$$

Доказательство. Заметим, что для сферы \mathcal{S}_λ точка \bar{q}_λ совпадает с центром окружности для любой $q_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$.

Рассмотрим геодезические треугольники сравнения $\triangle pq\bar{q}$ и $\triangle p_\lambda q_\lambda \bar{q}_\lambda$ (см. рис. 2.4). В них:

$$\begin{aligned} |q\bar{q}| &= |q_\lambda \bar{q}_\lambda| = R_\lambda, & |pq| &= \tau_p(q) = \tau_{p_\lambda}(q_\lambda) = |p_\lambda q_\lambda|, \\ \angle pq\bar{q} &= \varphi(q) \leq \varphi_\lambda(q_\lambda) = \angle p_\lambda q_\lambda \bar{q}_\lambda. \end{aligned}$$

Значит, $|p\bar{q}| \leq |p_\lambda \bar{q}_\lambda| = R_\lambda - d$. При этом, в обратную сторону, если выполняется это неравенство, то $\varphi(q) \leq \varphi_\lambda(q_\lambda)$. Таким образом,

$$\varphi(q) \leq \varphi_\lambda(q_\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad |p\bar{q}| \leq R_\lambda - d. \quad (2.16)$$

Но в $\triangle ps\bar{q}$ выполнено $|ps| = d$. Следовательно, в $\triangle ps\bar{q}$, по неравенству треугольника,

$$|p\bar{q}| \leq R_\lambda - d \quad \Leftrightarrow \quad |\bar{q}s| \leq |\bar{q}p| + |ps| \leq R_\lambda - d + d = R_\lambda. \quad (2.17)$$

Эквивалентности (2.16) и (2.17) дают (2.15). Лемма доказана. \square

Из этой леммы получаем следующее следствие:

Следствие 2.15. *В обозначениях леммы 2.14, если $\tilde{p} \in ps$, $\tilde{p}_\lambda \in p_\lambda s_\lambda$ такие точки на соответствующих геодезических отрезках, что $\text{dist}(\tilde{p}, s) = \text{dist}(\tilde{p}_\lambda, s_\lambda)$, и $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi}_\lambda$ – функции радиальных углов, определенных для \tilde{p}, Σ и $\tilde{p}_\lambda, \mathcal{S}_\lambda$, то*

$$\varphi(q) \leq \varphi_\lambda(q_\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\varphi}(q) \leq \tilde{\varphi}_\lambda(q_\lambda).$$

Следующая лемма является, в некотором смысле, “одноточечным” вариантом теоремы прокатывания Бляшке.

Пусть по-прежнему $\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ – полная гладкая гиперповерхность, ограничивающая область D_Σ , звездную относительно точки $p \in D_\Sigma \setminus \Sigma$. Будем считать, что при этом, в случае $c > 0$ область D_Σ лежит в сфере радиуса $\pi/2\sqrt{c}$. Пусть

точка $s \in \Sigma$ такова, что $\text{dist}(p, s) = \text{dist}(p, \Sigma)$. Рассмотрим геодезическую сферу $\mathcal{S}_\lambda(s)$, проходящую через s перпендикулярно отрезку ps . И пусть $p \in D_{\mathcal{S}_\lambda(s)} \setminus \mathcal{S}_\lambda(s)$.

Лемма 2.16. *В обозначениях выше, если для любых двух точек $q \in \Sigma$ и $q_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda(s)$, удовлетворяющих условию*

$$\tau_p(q) = \tau_p(q_\lambda), \quad (2.18)$$

для функций радиальных углов, определенных для p, Σ и $p_\lambda, \mathcal{S}_\lambda$, справедливо

$$\varphi(q) \leq \varphi(q_\lambda),$$

то гиперповерхность Σ целиком лежит в (замкнутом) шаре $D_{\mathcal{S}_\lambda(s)}$. При этом, Σ может совпадать с $\mathcal{S}_\lambda(s)$ только по области, содержащей точку s .

Доказательство. Введем на многообразии $M^{m+1}(c)$ полярную систему координат с центром в точке p . Тогда метрика многообразия запишется в виде $g = dt^2 + g_{ij}(t, \theta)d\theta^i d\theta^j$, где t – параметр расстояния от начала координат, а $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^m)$ – координаты на стандартной единичной евклидовой сфере $\mathbb{S}^m(1)$. Можно считать, что координаты точки s равны $(d, 0, \dots, 0)$, где $d = \text{dist}(p, s) = \text{dist}(p, \Sigma)$. По условию леммы, D_Σ и $D_{\mathcal{S}_\lambda(s)}$ лежат в области регулярности выбранной системы координат.

В силу того, что область D_Σ является звездной относительно точки p , ее границу Σ можно задать как график $t = f(\theta^1, \dots, \theta^m)$ над единичной сферой $\mathbb{S}^m(1)$. В силу гладкости Σ , функция f будет также гладкой. Аналогично, сферу $\mathcal{S}_\lambda(s)$ можно задать как график $t = \rho(\theta^1, \dots, \theta^m)$ для некоторой гладкой функции ρ .

Для гиперповерхности, заданной в неявном виде $F(t, \theta) = 0$, единичное внешнее нормальное векторное поле коллинеарно ∇F . Тогда в точках q и q_λ еди-

ничные (внутренние) нормали ν и ν_λ к, соответственно, Σ и \mathcal{S}_λ могут быть записаны как

$$\begin{aligned} -\nu(q) &= \frac{\nabla(t-f)}{|\nabla(t-f)|}(q) = \frac{\partial_t - g^{ij}\partial_i(f) \cdot \partial_j}{\sqrt{1 + g^{ij}\partial_i(f)\partial_j(f)}}(q) = \frac{\partial_t - g^{ij}\partial_i(f) \cdot \partial_j}{\sqrt{1 + |\nabla^\Sigma f|^2}}(q), \\ -\nu_\lambda(q_\lambda) &= \frac{\nabla(t-\rho)}{|\nabla(t-\rho)|}(q_\lambda) = \frac{\partial_t - g^{ij}\partial_i(\rho) \cdot \partial_j}{\sqrt{1 + g^{ij}\partial_i(\rho)\partial_j(\rho)}}(q_\lambda) = \frac{\partial_t - g^{ij}\partial_i(\rho) \cdot \partial_j}{\sqrt{1 + |\nabla^{\mathcal{S}_\lambda} \rho|^2}}(q_\lambda), \end{aligned} \quad (2.19)$$

где все производные рассматриваются в соответствующих точках q или q_λ ; $\partial_t, \partial_i, i \in \{1, \dots, m\}$ – координатные базисные векторы в соответствующих касательных пространствах $T_q M(c)$ или $T_{q_\lambda} M(c)$.

В силу (2.19), функции радиальных углов в точках q и q_λ равны

$$\begin{aligned} \cos \varphi(q) &= |\langle \nu, \partial_t \rangle|(q) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla^\Sigma f|^2}}(q), \\ \cos \varphi_\lambda(q_\lambda) &= |\langle \nu_\lambda, \partial_t \rangle|(q_\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla^{\mathcal{S}_\lambda} \rho|^2}}(q_\lambda). \end{aligned} \quad (2.20)$$

И так как по условию леммы $\varphi(q) \leq \varphi_\lambda(q_\lambda)$, то из (2.20) окончательно получаем в соответствующих точках

$$|\nabla^\Sigma f|(q) \leq |\nabla^{\mathcal{S}_\lambda} \rho|(q_\lambda). \quad (2.21)$$

Покажем, что для всех $\theta \in \mathbb{S}^m$ выполняется

$$f(\theta) \leq \rho(\theta), \quad (2.22)$$

и $\{\theta \in \mathbb{S}^m(1) : f(\theta) = \rho(\theta)\}$ – замкнутое в $\mathbb{S}^m(1)$ множество, содержащее точку 0.

Из этого, в силу выбора начала координат, и будет следовать утверждение леммы.

А) Докажем (2.22) для случая $m = 1$.

В полярной системе координат на многообразии $M^2(c)$ есть ровно один метрический коэффициент $g_{11}(t, \theta)$, причем $g^{11}(t, \theta) = \operatorname{sn}_c^{-2}(t)$. Таким образом, $g^{11}(t, \theta) > 0$ и не зависит от величины угла θ . А это значит, что из неравен-

ства (2.21) для тех значений θ_1 и θ_2 , в которых $f(\theta_1) = \rho(\theta_2)$, следует

$$f'^2(\theta_1) \leq \rho'^2(\theta_2), \quad (2.23)$$

где штрихом обозначена производная функции по параметру θ .

Для окружности $\mathcal{S}_\lambda(s)$ известно, что $\rho(\theta)$ является строго монотонно возрастающей функцией на $[0, \pi]$, если радиус окружности $\mathcal{S}_\lambda(s)$ не равен d . Если же он равен d , то $\rho \equiv d$, и из (2.23) следует, что $f \equiv d$, поэтому (2.22) при $m = 1$ будет выполнено.

В силу того, что $d = f(0)$ – расстояние от p до Σ , то в некоторой правой окрестности нуля $[0, \tilde{\theta}]$, $\tilde{\theta} < \pi$, функция $f(\theta)$ будет строго монотонно возрастающей.

Предположим, что это не так, и в любой правой окрестности нуля равенство $f(\theta) = d$ выполняется для бесконечного числа значений θ . В силу следствия 2.15, мы можем заменить точку p на точку $\tilde{p} \in ps$ такую, что $\text{dist}(\tilde{p}, s) < d$ (соответственно, и для точки p_λ). Но тогда для \tilde{p} функция f будет строго монотонно возрастающей в некоторой правой окрестности нуля. Поэтому изначально можем считать $p = \tilde{p}$.

При необходимости уменьшая отрезок $[0, \tilde{\theta}]$ до $[0, \tilde{\theta}_1]$, можно также считать, что

$$f: [0, \tilde{\theta}_1] \rightarrow [d, \tilde{d}] \text{ и } \rho: [0, \tilde{\theta}_2] \rightarrow [d, \tilde{d}]$$

есть биективные (строго монотонные) отображения.

Таким образом, в силу монотонности функций и соотношения (2.23), для любых $\theta_1 \in (0, \tilde{\theta}_1]$, $\theta_2 \in (0, \tilde{\theta}_2]$ таких, что $f(\theta_1) = \rho(\theta_2)$, выполняется неравенство

$$0 < f'(\theta_1) \leq \rho'(\theta_2). \quad (2.24)$$

Неравенство (2.24) гарантирует, что на отрезке $(d, \tilde{d}]$ определены обратные функции $f^{-1}(t)$ и $\rho^{-1}(t)$, удовлетворяющие

$$(f^{-1})'(t_0) = \frac{1}{f'(\theta_1)} \geq \frac{1}{\rho'(\theta_2)} = (\rho^{-1})'(t_0) > 0 \quad (2.25)$$

для любого $t_0 \in (d, \tilde{d}]$.

А значит, f^{-1} монотонно возрастает быстрее, чем ρ^{-1} . И так как $f^{-1}(d) = \rho^{-1}(d) = 0$, то

$$\theta_1 = f^{-1}(t_0) \geq \rho^{-1}(t_0) = \theta_2.$$

Но тогда $[0, \tilde{\theta}_2] \subset [0, \tilde{\theta}_1]$ и, в силу монотонности функции f ,

$$f(\theta_2) \leq f(\theta_1) = \rho(\theta_2). \quad (2.26)$$

Ввиду произвольности $\theta_2 \in (0, \tilde{\theta}_2]$, последнее неравенство влечет за собой (2.22) для $\theta \in [0, \tilde{\theta}_2]$.

Проследим за случаем равенства. Если $f(\theta_2) = \rho(\theta_2)$ для некоторого $\theta_2 \in [0, \tilde{\theta}_2]$, то ввиду строгой монотонности f из (2.26) следует, что $\theta_1 = \theta_2$. Но f^{-1} растет не медленнее ρ^{-1} в силу (2.25). Поэтому $\theta_1 = \theta_2$ возможно только в случае, если $f^{-1}(t) = \rho^{-1}(t)$ для всех $t \in [0, t_0]$. Но это означает, что $f(\theta) = \rho(\theta)$ для всех $\theta \in [0, \theta_1] = [0, \theta_2]$, то есть кривая Σ совпадает с окружностью на соответствующем отрезке. Более того, из рассуждений выше также следует, что в таком случае либо f и ρ продолжают совпадать для всех значений $\theta > \theta_1 = \theta_2$, либо в (2.22) для $\theta > \theta_1 = \theta_2$ будет строгое неравенство.

Аналогичные рассуждения, но примененные к левой окрестности 0, гарантируют, что $\mathcal{S}_\lambda(s)$ является локально опорной окружностью в точке s , т.е. Σ локально лежит внутри окружности $\mathcal{S}_\lambda(s)$ или совпадает с ней по какой-то дуге, содержащей точку s . Покажем, что такое поведение имеет место для всех $\theta \in \mathbb{S}^1(1)$.

Предположим противное. Тогда кривая Σ должна выходить за пределы \mathcal{S}_λ . Пусть θ_0 – первая точка, в которой Σ пересекает $\mathcal{S}_\lambda(s)$ и выходит за ее пределы. Не ограничивая общности можем считать $\theta_0 \in (0, \pi]$. При этом, на дуге от s до q_0 кривая Σ не тождественно совпадает с $\mathcal{S}_\lambda(s)$.

Для значения θ_0 получаем, что $f(\theta_0) = \rho(\theta_0) = d_0$. А значит, по условию леммы, в точке $q_0 = (f(\theta_0), \theta_0) = (\rho(\theta_0), \theta_0) \in \Sigma \cap \mathcal{S}_\lambda(s)$ для соответствующих

радиальных углов выполняется неравенство

$$\varphi(q_0) \leq \varphi_\lambda(q_0). \quad (2.27)$$

Если в (2.27) строгое неравенство, то получаем противоречие с тем, что кривая выходит за пределы окружности (см. рис. 2.5).

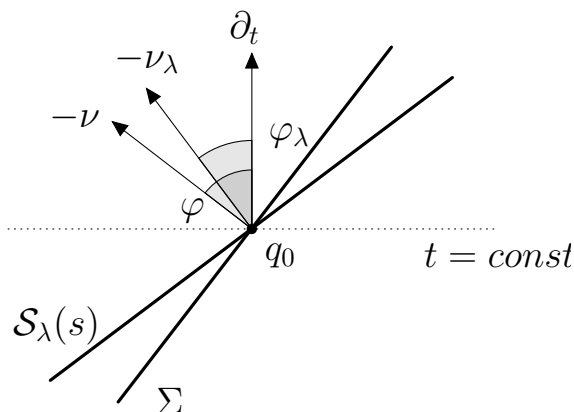


Рис. 2.5. Величины радиальных углов, если в точке q_0 кривая Σ выходит за пределы окружности $\mathcal{S}_\lambda(s)$ трансверсально.

Значит, единственный оставшийся случай когда $\varphi(q_0) = \varphi_\lambda(q_0)$, т.е. кривая Σ касается кривой $\mathcal{S}_\lambda(s)$ в точке q_0 . Поэтому, ввиду того, что Σ и $\mathcal{S}_\lambda(s)$ на дуге от s до q_0 не тождественно совпадают, в правой окрестности точки θ_0 функции f и ρ строго монотонно возрастают. Следовательно, существуют такие $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{d}$, что

$$f: [\hat{\theta}_1, \theta_0] \rightarrow [\hat{d}, d_0] \text{ и } \rho: [\hat{\theta}_2, \theta_0] \rightarrow [\hat{d}, d_0]$$

есть биективные (строго монотонные) отображения, причем $f(\hat{\theta}_1) < \rho(\hat{\theta}_2)$. Но тогда можно повторить рассуждения выше. При этом строгое неравенство $f(\hat{\theta}_1) < \rho(\hat{\theta}_2)$ влечет за собой строгое неравенство для обратных функций $f^{-1} > \rho^{-1}$ на $[\hat{d}, d_0]$, а значит $f(\theta_0) < \rho(\theta_0)$. Противоречие с равенством $f(\theta_0) = \rho(\theta_0)$.

Таким образом, мы пришли к противоречию, что и доказывает (2.22), а вместе с ним и лемму, в случае $m = 1$.

В) Если $m > 1$, рассмотрим в $M^{m+1}(c)$ произвольную двумерную вполне геодезическую плоскость $\pi \simeq M^2(c)$, содержащую геодезическую ps . Она пересе-

чет сферу $\mathcal{S}_\lambda(s)$ по двумерной окружности, а гиперповерхность Σ по двумерной кривой. Пусть $\tilde{\varphi}(\cdot)$, $\tilde{\varphi}(\cdot)$ функции радиальных углов по отношению к точке p для соответствующих кривых в сечении.

Пусть $q \in \Sigma \cap \pi$ – произвольная точка. Если $\sigma(q) \subset T_q M(c)$ – двумерная плоскость, натянутая на нормальный $\nu_{\Sigma \cap \pi}$ и касательный векторы к $\Sigma \cap \pi$ в точке q , то $\partial_t(q)$ также лежит в $\sigma(q)$. Так как ортогональная проекция $\nu(q)$ на $\sigma(q)$ (в $T_q M(c)$) коллинеарна $\nu_{\Sigma \cap \pi}$, то справедливо неравенство

$$\tilde{\varphi}(q) \leq \varphi(q).$$

Учитывая также, что

$$\varphi_\lambda(q_\lambda) = \tilde{\varphi}_\lambda(q_\lambda), \quad \varphi(q) \leq \varphi_\lambda(q_\lambda).$$

получаем, что функции $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}_\lambda$ в точках q и q_λ удовлетворяют условиям леммы. Значит, можно применить рассуждения пункта А), и получить, что кривая $\Sigma \cap \pi$ лежит в $D_{\mathcal{S}_\lambda(s) \cap \pi}$. Но так как это верно для любой плоскости $\pi \simeq M^2(c)$, то мы получаем, что $D_\Sigma \subset D_{\mathcal{S}_\lambda(s)}$, и Σ совпадает с $\mathcal{S}_\lambda(s)$ по замкнутому множеству, содержащему точку s . Лемма доказана. □

Покажем, что для модельных пространств $M^{m+1}(c)$ теорема Бляшке (теорема 1.16) для гладких λ -выпуклых гиперповерхностей эквивалентна теореме сравнения радиальных углов (теорема 2.6). Везде ниже для выпуклых областей нормальные кривизны считаются относительно внутренних нормалей, а функции радиальных углов – относительно внешних. Имеет место следующий результат.

Теорема 2.17. Пусть $D_\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ – замкнутая выпуклая область с непустой внутренностью и гладкой границей. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. D_Σ – λ -выпуклая область ($\lambda > 0$, при этом для $c < 0$ считаем, что $\lambda > \sqrt{-c}$).

2. Для любых точек $p \in D_\Sigma \setminus \Sigma$ и $p_\lambda \in D_{\mathcal{S}_\lambda}$ таких, что $\text{dist}(p, \Sigma) = \text{dist}(p_\lambda, \mathcal{S}_\lambda)$

для соответствующих p, Σ и $p_\lambda, \Sigma_\lambda$ функций радиальных углов φ и φ_λ справедливо неравенство

$$\varphi(q) \leq \varphi_\lambda(q_\lambda) \quad (2.28)$$

в тех точках $q \in \Sigma$ и $q_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$ для которых $\tau_p(q) = \tau_{p_\lambda}(q_\lambda)$.

3. Для любой точки $s \in \Sigma$ существует сфера $\mathcal{S}_\lambda(s)$ кривизны, равной λ , такая, что $s \in \mathcal{S}_\lambda(s)$ и

$$D_{\mathcal{S}_\lambda(s)} \subset D_\Sigma.$$

Доказательство. Докажем следующую цепочку импликаций: $3 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$.

Импликация $3 \Rightarrow 1$ следует из определения λ -выпуклости. Импликация $1 \Rightarrow 2$ есть теорема сравнения радиальных углов (теорема 2.6).

Докажем импликацию $2 \Rightarrow 3$. Она непосредственно следует из леммы 2.16, примененной к произвольной точке p . Здесь мы приведем более простое, чем в лемме 2.16, синтетическое доказательство импликации $2 \Rightarrow 3$, но которое существенно использует факт выполнения неравенства (2.28) для любой точки p .

Пусть $s \in \Sigma$ – произвольная точка, а точка $p \in D_\Sigma \setminus \Sigma$ такая, что $\text{dist}(p, \Sigma) = \tau_p(s)$. На геодезическом луче sp найдем такую точку \hat{s} , что $|\hat{s}s| = R_\lambda$. Пусть теперь $q \in \Sigma$ – произвольная точка. Покажем, что $|\hat{s}q| \leq R_\lambda$. Из этого и будет следовать то, что сфера $\mathcal{S}_\lambda(s)$, с центром в точке \hat{s} и радиуса R_λ (т.е. кривизны λ), проходит через s и содержит в себе Σ .

Для точки q найдем такую точку $q' \in D_\Sigma$, что $\tau_{q'}(q) = \text{dist}(q', \Sigma)$. Рассмотрим функции радиальных углов φ' и φ'_λ , определенных для пары q', Σ и соответствующей ей $q'_\lambda, \mathcal{S}_\lambda$. Для этих функций в соответствующих точках выполнено

неравенство (2.28). В частности, это неравенство выполнено в точке s (и соответствующей ей точке s_λ):

$$\varphi'(s) \leq \varphi'_\lambda(s_\lambda). \quad (2.29)$$

По лемме 2.14, неравенство (2.29) эквивалентно $|\bar{s}q| \leq R_\lambda$. Но по построению, $\bar{s} = \hat{s}$. Таким образом, для произвольной точки $q \in \Sigma$ мы получили $|\hat{s}q| \leq R_\lambda$. Это и доказывает импликацию $2 \Rightarrow 3$, а с ней и теорему. \square

Замечание 2.18. В силу синтетического характера доказательства, импликация $2 \Rightarrow 3$ может быть получена в случае, когда Σ – произвольная, не обязательно гладкая, λ -выпуклая поверхность. В таком случае, функция радиального угла становится многозначной функцией. В негладких точках q (где нет однозначно определенной нормали ν), эта функция может принимать множество значений $\varphi(q) := \{\varphi^\pi(q)\}$ – углов между радиальным направлением pq , $p \in D_\Sigma$, и всевозможными внешними нормальными к вполне геодезическим гиперплоскостям π , которые являются опорными для Σ в q . Неравенство (2.28) понимается выполненным для всех значений из множества $\varphi(q)$. При такой негладкой интерпретации функции радиального угла для λ -выпуклых гиперповерхностей теорема прокатывания Бляшке (условие 3 теоремы 2.17) равносильна теореме сравнения радиальных углов (условие 2 теоремы 2.17).

Импликация $1 \Rightarrow 3$ есть теорема Бляшке, пункт A . Мы показали, что она следует из теоремы сравнения радиальных углов (теорема 2.6). Аналогично, можно показать, что из двойственной теоремы сравнения углов (теорема 2.9) следует пункт B теоремы прокатывания Бляшке.

Теорема 2.19. Пусть $D_\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ – замкнутая выпуклая область с непустой внутренностью и гладкой границей. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. D_Σ – λ -вогнутая область ($\lambda > 0$, при этом для $c < 0$ считаем, что $\lambda > \sqrt{-c}$).

2. Для любых точек $p \in D_\Sigma \setminus \Sigma$ и $p_\lambda \in D_{\mathcal{S}_\lambda}$ таких, что $\text{dist}(p, \Sigma) = \text{dist}(p_\lambda, \mathcal{S}_\lambda)$ для соответствующих p, Σ и $p_\lambda, \Sigma_\lambda$ функций радиальных углов φ и φ_λ справедливо неравенство

$$\varphi(q) \geq \varphi_\lambda(q_\lambda) \quad (2.30)$$

в тех точках $q \in \Sigma$ и $q_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$ для которых $\tau_p(q) = \tau_{p_\lambda}(q_\lambda)$.

3. Для любой точки $s \in \Sigma$ существует сфера $\mathcal{S}_\lambda(s)$ кривизны, равной λ , такая, что $s \in \mathcal{S}_\lambda(s)$ и

$$D_\Sigma \subset D_{\mathcal{S}_\lambda(s)}.$$

Доказательство. Импликации $3 \Rightarrow 1$ и $1 \Rightarrow 2$ верны по тем же причинам, как и в теореме 2.17.

Докажем ключевую импликацию $2 \Rightarrow 3$. Пусть $s \in \Sigma$ – произвольная точка, а точка $p \in D_\Sigma \setminus \Sigma$ такова, что $\text{dist}(p, \Sigma) = \tau_p(s) = \varepsilon$. Как и в доказательстве выше, на луче sp найдем такую точку \hat{s} , что $|\hat{s}s| = R_\lambda$.

Пусть теперь $q \in \Sigma$ – произвольная точка. Для достаточно малых ε мы можем найти такую точку $q' \in D_\Sigma$, что $\tau_{q'}(q) = \text{dist}(q', \Sigma) = \varepsilon$. Рассмотрим функции радиальных углов φ' и φ'_λ для пар q', Σ и соответствующей ей $q'_\lambda, \mathcal{S}_\lambda$.

Если $s_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$ такая точка, что $\tau_{q'}(s) = \tau_{q'_\lambda}(s_\lambda)$, то в них выполняется неравенство (2.30):

$$\varphi'(s) \geq \varphi'_\lambda(s_\lambda).$$

Построим точки \bar{s} и \bar{s}_λ также, как это было сделано в конструкции леммы 2.14. Тогда, следуя выкладкам этой леммы, в силу неравенства между углами выше, получим $|\bar{s}q'| \geq |\bar{s}_\lambda q'_\lambda| = R_\lambda - \varepsilon$. Но $\bar{s} = \hat{s}$. Значит, для любой выбранной

точки q , имеем $|\hat{s}q'| \geq R_\lambda - \varepsilon$.

Так как точка q' лежит в D_Σ для достаточно малых ε , в силу произвольности q , получаем, что геодезическая сфера $\mathcal{S}(\hat{s}, R_\lambda - \varepsilon)$ с центром в точке \hat{s} радиуса $R_\lambda - \varepsilon$ лежит в D_Σ . При $\varepsilon \rightarrow 0$, эта сфера стремится к $\mathcal{S}_\lambda(s)$. Переходя к пределу, получим требуемый результат. \square

Два предыдущих результата допускают прямое обобщение на случай римановых многообразий ограниченной кривизны. Используя теорему В. А. Топоногова сравнения углов треугольников покажем, что имеет место следующее обобщение теоремы прокатывания Бляшке (теорема 1.16) на случай общих римановых многообразий.

Теорема 2.20. Пусть M^{m+1} – полное односвязное гладкое $(m+1)$ -мерное риманово многообразие, секционные кривизны которого по каждой двумерной площадке $\sigma \subset TM^{m+1}$ в каждой точке удовлетворяют неравенству

$$K_\sigma \geq c \quad (\text{или } K_\sigma \leq c);$$

$\Sigma \subset M^{m+1}$ – полная гладкая вложенная λ -выпуклая (вогнутая) гиперповерхность (при $c < 0$ считаем $\lambda > \sqrt{-c}$), лежащая в шаре радиуса $\text{inj}_M / 2$, где inj_M – радиус инъективности многообразия M ; тогда для любой точки $s \in \Sigma$ справедливо

$$D_\Sigma \subset D_{\mathcal{S}(s, R_\lambda)} \quad (\text{соответственно, } D_\Sigma \supset D_{\mathcal{S}(s, R_\lambda)}) \quad (2.31)$$

где $\mathcal{S}(s, R_\lambda) \subset M^{m+1}$ – геодезическая сфера, проходящая через точку s , радиуса R_λ и имеющая с Σ в точке s совпадающие внешние нормали (тут R_λ – радиус окружности кривизны λ в $M^2(c)$).

Доказательство. Заметим, что из теоремы 1.7 следует, что в римановом многообразии кривизны не меньше c нормальные кривизны геодезических сфер $\mathcal{S}(s, R_\lambda)$ радиуса R_λ не превосходят нормальной кривизны сферы радиуса R_λ в модельном пространстве кривизны c , т.е. не превосходят λ . В случае $K_\sigma \leq c$, нормальные кривизны сфер $\mathcal{S}(s, R_\lambda)$ не меньше λ .

В начале, докажем теорему для $K_\sigma \geq c$. Воспользуемся идеей доказательства импликации $2 \Rightarrow 3$ теоремы 2.17. Пусть $s \in \Sigma$ – произвольная точка, и пусть точка \bar{s} такова, что $|\bar{s}s| = R_\lambda$ и геодезический луч $\bar{s}s$ в точке s имеет направление внешней нормали к Σ . По построению $\mathcal{S}(s, R_\lambda)$, точка \bar{s} будет центром сферы $\mathcal{S}(s, R_\lambda)$. Для доказательства (2.31) достаточно показать, что

$$|\bar{s}q| \leq R_\lambda \quad (2.32)$$

для любой точки $q \in \Sigma$. Заметим, что для s это неравенство выполняется. Пусть $q \in \Sigma$ – произвольная точка на гиперповерхности. Рассмотрим точку $p \in D_\Sigma$ такую, что $\text{dist}(p, \Sigma) = |pq| < R_\lambda$. Такая точка, очевидно, всегда найдется. Внутри сферы \mathcal{S}_λ кривизны λ в модельном пространстве $M^{m+1}(c)$ рассмотрим построим точку p_λ такую, что $\text{dist}(p_\lambda, \mathcal{S}_\lambda) = \text{dist}(p, \Sigma)$. Для пар p, Σ и $p_\lambda, \mathcal{S}_\lambda$ определим функции радиальных углов φ и φ_λ , соответственно.

Если $s_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$ такая точка, что

$$\tau_p(s) = \tau_{p_\lambda}(s_\lambda), \quad (2.33)$$

то по теореме сравнения радиальных углов (теорема 2.6)

$$\varphi(s) \leq \varphi_\lambda(s_\lambda). \quad (2.34)$$

Пусть \bar{s}_λ – центр сферы \mathcal{S}_λ . Обозначим через Δ геодезический треугольник $\Delta \bar{s}sp$ в римановом многообразии M^{m+1} , а через Δ_λ – геодезический треугольник $\Delta \bar{s}_\lambda s_\lambda p_\lambda$ в $M^{m+1}(c)$. И наконец, в многообразии $M^{m+1}(c)$ рассмотрим треугольник сравнения $\tilde{\Delta} = \Delta \tilde{s}\tilde{s}\tilde{p}$ такой, что

$$|\tilde{s}\tilde{s}| = |\bar{s}s| (= R_\lambda), \quad |\tilde{s}\tilde{p}| = |sp| (= \tau_p(s)), \quad \angle \tilde{s}\tilde{s}\tilde{p} = \angle \bar{s}sp (= \varphi(s)).$$

Из теоремы сравнения углов Топоногова (см., например, [15, п. 24.4.4]) следует, что для треугольников Δ и $\tilde{\Delta}$ справедливо неравенство

$$|\bar{s}p| \leq |\tilde{s}\tilde{p}|. \quad (2.35)$$

В тоже время, из (2.33), (2.34) и построения точки \bar{s}_λ следует, что для элементов треугольников $\tilde{\Delta}$ и Δ_λ в $M^{m+1}(c)$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (R_\lambda =) |\bar{s}_\lambda s_\lambda| &= |\tilde{s}\tilde{s}|, & (\tau_{p_\lambda}(s_\lambda) =) |s_\lambda p_\lambda| &= |\tilde{s}\tilde{p}|, \\ (\varphi_\lambda(s_\lambda) =) \angle \bar{s}_\lambda s_\lambda p_\lambda &\geq \angle \tilde{s}\tilde{s}\tilde{p} (= \varphi(s)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\bar{s}_\lambda p_\lambda| \geq |\tilde{s}\tilde{p}|,$$

из чего, в силу неравенства (2.35), следует ключевое соотношение

$$|\bar{s}p| \leq |\bar{s}_\lambda p_\lambda|. \quad (2.36)$$

По построению, $|\bar{s}_\lambda p_\lambda| = R_\lambda - \text{dist}(p_\lambda, \mathcal{S}_\lambda) = R_\lambda - \text{dist}(p, \Sigma) = R_\lambda - |pq|$.

Значит, из (2.36) получается оценка

$$|\bar{s}p| \leq R_\lambda - |pq|. \quad (2.37)$$

Рассмотрим геодезический треугольник $\Delta \bar{s}pq$. Используя неравенство треугольника, которое выполняется на римановых многообразиях, и неравенство (2.37), имеем

$$|\bar{s}q| \leq |\bar{s}p| + |pq| \leq R_\lambda - |pq| + |pq| = R_\lambda.$$

Неравенство (2.32) доказано, а с ним и включение $D_{\mathcal{S}(s, R_\lambda)} \subset D_\Sigma$.

Рассмотрим случай $K_\sigma \leq c$. Выберем достаточно малое ϵ и для произвольной точки $q \in \Sigma$ построим точку $p \in D_\Sigma$ как и выше, но с условием $|pq| = \epsilon$. Дословно, как и в предыдущем рассуждении, определим три треугольника $\Delta \subset M^{m+1}$, $\tilde{\Delta} \subset M^{m+1}(c)$ и $\Delta_\lambda \subset M^{m+1}(c)$. В силу теоремы Топоногова для многообразий кривизны не больше c и теоремы сравнения радиальных углов для таких пространств (теорема 2.9), опять же дословно повторяя выкладки из предыдущего

рассуждения, но с обратными неравенствами (ввиду используемых теорем), получим аналогичную (2.37) оценку

$$|\bar{s}p| \geq |\bar{s}_\lambda p_\lambda| = R_\lambda - \epsilon. \quad (2.38)$$

И так как точка q была выбрана произвольно, то оценка (2.38) гарантирует, что геодезическая сфера $\mathcal{S}(R_\lambda - \epsilon)(\bar{s})$ радиуса $R_\lambda - \epsilon$ с центром в точке \bar{s} лежит внутри Σ :

$$D_{\mathcal{S}(R_\lambda - \epsilon)(\bar{s})} \subset D_\Sigma.$$

Устремляя ϵ к 0, получим включение $D_{\mathcal{S}(s, R_\lambda)} \subset D_\Sigma$, что и требовалось. □

Замечание 2.21. В силу теоремы 1.7 сравнения нормальных кривизн сфер, радиус R_λ монотонно убывает по s при заданном λ . Поэтому в предыдущей теореме, если $C \geq K_\sigma \geq c$ для некоторых вещественных констант C и c , то для λ_1, λ_2 -выпуклой области D_Σ ($\lambda_1 > \sqrt{-c}$ при $c < 0$), в любой точке $s \in \Sigma$ выполняется включение

$$D_{\mathcal{S}(s, R_{\lambda_2})} \subset D_\Sigma \subset D_{\mathcal{S}(s, R_{\lambda_1})},$$

где R_{λ_i} – радиус сферы кривизны λ_i в $M^{m+1}(c)$.

Замечание 2.22. Используя [53, лемма 3.1], можно доказать эквивалентность теоремы Бляшке и теоремы сравнения радиальных углов, следуя схеме доказательства теорем 2.17 и 2.19.

2.5. Теоремы сравнения и оценки функции гиперболического угла для гиперповерхностей ограниченной нормальной кривизны в лоренцевых пространствах.

В этом подразделе мы получим лоренцевы аналоги результатов подразделов 2.2 и 2.3.

Будем использовать обозначения подразделов 1.2 и 2.1. Имеет место следующий аналог леммы 2.10.

Лемма 2.23. Пусть $\Sigma_\lambda \subset I^+(\mathcal{S}_0)$ – пространственноподобная вполне омбилическая гиперповерхность в пространстве де Ситтера $\mathbb{S}_1^{m+1}(k^2)$, $d(\mathcal{S}_0, \Sigma_\lambda) = t_0$. Если нормальная кривизна Σ_λ равна λ ($\lambda > 0$), то для φ_λ – функции гиперболического угла Σ_λ в зависимости от значений λ справедливы неравенства

1. в случае $\lambda < k$,

$$\operatorname{sh} \varphi_\lambda \leq \frac{\operatorname{sh}((\beta - t_0)k)}{\operatorname{ch}(\beta k)}; \quad (2.39)$$

где $\beta = 1/k \operatorname{arcth}(\lambda/k)$;

2. в случае $\lambda = k$,

$$\operatorname{sh} \varphi_\lambda \leq e^{-t_0 k}; \quad (2.40)$$

3. в случае $\lambda > k$,

$$\operatorname{sh} \varphi_\lambda \leq \frac{\operatorname{ch}((\beta - t_0)k)}{\operatorname{sh}(\beta k)}, \text{ для } \beta > t_0, \quad (2.41)$$

и

$$\operatorname{sh} \varphi_\lambda < \frac{1}{\operatorname{sh}(\beta k)}, \text{ для } \beta \leq t_0, \quad (2.42)$$

где $\beta = 1/k \operatorname{arccth}(\lambda/k)$.

Кроме того, для всех значений λ выполняется оценка

$$\operatorname{sh} \varphi_\lambda \leq \frac{\lambda}{k}. \quad (2.43)$$

Более того, оценки (2.39) – (2.42), (2.43) – точны.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $k = 1$, а в силу симметрии Σ_λ , что $m = 1$. Тогда Σ_λ – пространственноподобная кривая постоянной геодезической кривизны, равной λ . Для простоты, будем обозначать кривую γ . Как мы уже отмечали, γ с внешней точки зрения может быть получена как пересечение \mathcal{H}^+ с некоторой двумерной плоскостью $\Pi \subset \mathbb{M}_1^3$. Пусть x, y, z обозначают стандартные координаты в \mathbb{M}_1^3 с временной координатой z . Можем считать, что Π задана уравнением $Ax - Cz + D = 0$, где $n = (A, 0, C)$ – нормаль к Π . Более того, так как $\lambda \neq 0$, имеем $D \neq 0$.

Если мы выберем стандартную параметризацию \mathcal{H}^+ , а именно

$$\mathcal{H}^+ = \{(\cos \theta \operatorname{ch} t, \sin \theta \operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) \in \mathbb{M}_1^3 : t \in [0, +\infty), \theta \in [-\pi, \pi)\},$$

то γ в координатах (t, θ) задается неявным уравнением

$$\Phi(t, \theta) := A \cos \theta \operatorname{ch} t - C \operatorname{sh} t + D = 0. \quad (2.44)$$

В тоже время, так как γ – связный компонент пересечения $\Pi \cap \mathcal{H}^+$ и $D \neq 0$, то в координатах (t, θ) она допускает явное задание

$$t = \rho(\theta), \quad (2.45)$$

для некоторой гладкой функции $\rho: I_0 \rightarrow [0, +\infty)$, где $I_0 = \mathbb{S}^1$, если γ – замкнута, или $I_0 = (-\theta_0, \theta_0) \subset (-\pi, \pi)$ – в противном случае.

Как известно, градиент $\nabla \Phi$ функции Φ как функции на сфере \mathbb{S}_1^2 является нормальным векторным полем для γ . Найдем $\nabla \Phi$ в координатах (t, θ) :

$$\nabla \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \partial_t + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \partial_\theta = (-A \cos \theta \operatorname{sh} t + C \operatorname{ch} t) \partial_t - \frac{A \sin \theta}{\operatorname{ch} t} \partial_\theta,$$

где ∂_t и ∂_θ – координатные векторные поля на \mathbb{S}_1^2 .

В силу того, что γ – пространственноподобная кривая, ее нормальное векторное поле $\nabla\Phi$ должно быть времениподобным или, другими словами, $\langle\nabla\Phi, \nabla\Phi\rangle < 0$. Имеем

$$\langle\nabla\Phi, \nabla\Phi\rangle = -(A \cos \theta \operatorname{sh} t - C \operatorname{ch} t)^2 + A^2 \sin^2 \theta. \quad (2.46)$$

Возведя в квадрат обе части в (2.44), получим

$$2AC \cos \theta \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t = A^2 \cos^2 \theta \operatorname{ch}^2 t + C^2 \operatorname{sh}^2 t - D^2. \quad (2.47)$$

Подставим (2.47) в (2.46):

$$\begin{aligned} \langle\nabla\Phi, \nabla\Phi\rangle &= -A^2 \cos^2 \theta \operatorname{sh}^2 t - C^2 \operatorname{ch}^2 t + A^2 \cos^2 \theta \operatorname{ch}^2 t \\ &\quad + C^2 \operatorname{sh}^2 t - D^2 + A^2 \sin^2 \theta = -(-A^2 + C^2 + D^2). \end{aligned}$$

Следовательно, $\langle\nabla\Phi, \nabla\Phi\rangle < 0$ тогда и только тогда, когда

$$-A^2 + C^2 + D^2 > 0. \quad (2.48)$$

В дальнейшем мы будем считать (2.48) выполненным. Кроме того, будем считать $\nabla\Phi$ направленным в прошлое, т.е.

$$\langle\nabla\Phi, \partial_t\rangle = A \cos \theta \operatorname{sh} t - C \operatorname{ch} t > 0. \quad (2.49)$$

Используя (2.44), последнее неравенство равносильно неравенству

$$C + D \operatorname{sh} t < 0, \quad (2.50)$$

которое, как и (2.49), должно выполняться вдоль γ .

Таким образом, учитывая условия (2.48) и (2.50), направленное в прошлое нормальное векторное поле к γ имеет вид

$$\nu = \frac{\nabla\Phi}{\sqrt{-A^2 + C^2 + D^2}}.$$

Посчитаем геодезическую кривизну γ в терминах коэффициентов A , C и D . Для начала, заметим, что функция $\rho(\theta)$ должна удовлетворять (2.44) для всех

значений θ . Подставляя $\rho(\theta)$ в (2.44) и дифференцируя получившееся выражение по θ , получим

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{A \sin \theta \operatorname{ch} \rho}{A \cos \theta \operatorname{sh} \rho - C \operatorname{ch} \rho}, \quad (2.51)$$

где знаменатель не обращается в ноль ввиду условия (2.49).

Из (2.47), учитывая (2.49), несложно получить следующее вспомогательное равенство

$$\sqrt{-A^2 \cos^2 \theta + C^2 + D^2} = A \cos \theta \operatorname{sh} \rho - C \operatorname{ch} \rho, \quad (2.52)$$

из которого следует

$$\rho' = \frac{A \sin \theta \operatorname{ch} \rho}{\sqrt{-A^2 \cos^2 \theta + C^2 + D^2}}. \quad (2.53)$$

Дифференцируя (2.44) по θ дважды, после сокращений получим

$$\rho'' = \frac{d^2 \rho}{d\theta^2} = \frac{A \cos \theta \operatorname{ch} \rho + 2A \sin \theta \operatorname{sh} \rho \cdot \rho' + D \cdot \rho'^2}{A \cos \theta \operatorname{sh} \rho - C \operatorname{ch} \rho}. \quad (2.54)$$

Адаптируя стандартные формулы из дифференциальной геометрии (например, [50]), что геодезическая кривизна k_g кривой γ , которая задана явно в виде (2.45), по отношению к направленному в прошлое полю нормалей ν , равна

$$k_g = \frac{\operatorname{ch} \rho}{(\operatorname{ch}^2 \rho - \rho'^2)^{3/2}} (\rho'' - 2\rho'^2 \operatorname{th} \rho + \operatorname{ch} \rho \operatorname{sh} \rho). \quad (2.55)$$

Подставляя (2.51), (2.53) и (2.54) в (2.55), и используя равенство (2.52), после сокращений получим

$$k_g = \frac{-D}{\sqrt{-A^2 + C^2 + D^2}} = \lambda. \quad (2.56)$$

С другой стороны, используя найденное выражение для поля нормалей ν , мы можем явно посчитать функцию гиперболического угла γ , а именно, учитывая (2.49),

$$\operatorname{ch} \varphi_\lambda = \langle \nu, \partial_t \rangle = \frac{1}{\sqrt{-A^2 + C^2 + D^2}} (A \cos \theta \operatorname{sh} t - C \operatorname{ch} t).$$

Значит, опять используя (2.47) и учитывая, что по определению $\varphi_\lambda \geq 0$, мы получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \varphi_\lambda &= \frac{\sqrt{A^2 \cos^2 \theta \operatorname{sh}^2 t - 2AC \cos \theta \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t + A^2 - C^2 - D^2}}{\sqrt{-A^2 + C^2 + D^2}} \\ &= \frac{|A|}{\sqrt{-A^2 + C^2 + D^2}} |\sin \theta|. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Из последнего равенства следует, что для нахождения точной верхней оценки для $\operatorname{sh} \varphi_\lambda$ необходимо исследовать значение $\sup_{\theta \in I_0} |\sin \theta|$, где I_0 – область определения функции (2.45). Проведем это исследование.

Заметим, что, в зависимости от типа нормали n плоскости Π , кривая γ будет иметь различные значения для λ (см. [75]). А именно, если n – времениподобный, т.е. $\langle n, n \rangle < 0$, то $\lambda \in (0, 1)$; если n – светоподобный, т.е. $\langle n, n \rangle = 0$, то $\lambda = 1$; и, наконец, если n – пространственноподобный ($\langle n, n \rangle > 0$) вектор, то $\lambda > 1$. Эти отличия как раз и приводят к трем случаям в формулировке леммы 2.23 (и, в последующем, теоремы 2.25).

Рассмотрим детально третий случай, когда $\lambda > 1$, как наиболее трудный. Первые два случая рассматриваются аналогично.

Как мы говорили выше, условие $\lambda > 1$ влечет за собой $\langle n, n \rangle^2 = A^2 - C^2 > 0$. Без ограничения общности можем считать, что $A = \operatorname{ch} \alpha$, $C = \operatorname{sh} \alpha$ для некоторого α . Так как γ симметрична относительно плоскости $y = 0$, то существует точка $q_0 \in \gamma$ такая, что $d_{S_0}(q_0) = t_0$. Как точка в объемлющем пространстве \mathbb{M}_1^3 , q_0 имеет координаты $(\operatorname{ch} t_0, 0, \operatorname{sh} t_0)$. Более того, $(\operatorname{ch} t_0, 0, \operatorname{sh} t_0)$ является направленной в будущее нормалью к плоскости, которая проходит через q_0 и касается \mathcal{H}^+ . Эта плоскость является предельным возможным положением для Π . Следовательно,

$$\alpha < t_0. \quad (2.58)$$

Найдем D в терминах α и t_0 . Так как $q_0 = (\operatorname{ch} t_0, 0, \operatorname{sh} t_0) \in \Pi$, мы получаем $\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} t_0 - \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} t_0 + D = 0$. Следовательно, $D = -\operatorname{ch}(t_0 - \alpha)$. Заметим, что для $A = \operatorname{ch} \alpha$, $C = \operatorname{sh} \alpha$, $D = -\operatorname{ch}(t_0 - \alpha)$ и $\alpha < t_0 \leq \rho(\theta)$ оба предположения (2.48) и (2.50) выполнены.

Подставляя найденные значения для A , C и D в (2.56), учитывая (2.58), получим

$$\lambda = \frac{\operatorname{ch}(t_0 - \alpha)}{\operatorname{sh}(t_0 - \alpha)} = \operatorname{coth} \beta, \quad (2.59)$$

где мы положили $\beta := t_0 - \alpha (> 0)$.

В силу того, что $\lambda > 1$, кривая γ не является замкнутой. Значит, $I_0 = (-\theta_0, \theta_0) \subset (-\pi, \pi)$. Если $\theta_0 > \pi/2$, то $\sup_{(-\theta_0, \theta_0)} |\sin \theta| = \max_{(-\theta_0, \theta_0)} |\sin \theta| = 1$, в противном случае, этот супремум равен $\sin \theta_0$ и меньше 1. Важно отметить, что условие $\theta_0 > \pi/2$ эквивалентно условию $\alpha < 0$, которое в свою очередь, ввиду (2.59), эквивалентно $\lambda < \operatorname{coth} t_0$.

Следовательно, мы должны рассмотреть два случая: 1) $\alpha < 0$; 2) $\alpha \geq 0$.

В первом случае, как мы уже сказали, $\max_{(-\theta_0, \theta_0)} |\sin \theta| = 1$. Значит, из (2.57) подставляя A , C и D , получим

$$\operatorname{sh} \varphi_\lambda \leq \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{sh}(t_0 - \alpha)} = \frac{\operatorname{ch}(\beta - t_0)}{\operatorname{sh} \beta},$$

что доказывает (2.41). Более того, так как $\beta > 0$ и $\alpha < 0$, а значит $\beta > t_0$, то $\operatorname{sh} \varphi_\lambda \leq \operatorname{ch} \beta / \operatorname{sh} \beta = \lambda$ в силу (2.59), что и требовалось.

Рассмотрим (более трудный) второй случай, когда $\alpha \geq 0$, и найдем максимальное значение для θ_0 . Для этой цели спроектируем γ как пространственную кривую в \mathbb{M}_1^3 ортогонально на плоскость $z = 0$. Проекция γ^{pr} будет гиперболой на (евклидовой) плоскости xy , при этом величина того угла между двумя асимптотами γ^{pr} , где лежит γ^{pr} , равна $2\theta_0$. Для нахождения этого значения, найдем сперва задание для γ^{pr} в координатах xy . Заметим, что γ как пространственная кривая в \mathbb{M}_1^3 неявно может быть задана в виде пресечения

$$\begin{cases} \operatorname{ch} \alpha \cdot x - \operatorname{sh} \alpha \cdot z - \operatorname{ch}(t_0 - \alpha) = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 1. \end{cases} \quad (2.60)$$

Избавляясь от z в системе (2.60), приходим к искомому уравнению для гиперболы

γ^{pr} :

$$\frac{(x - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch}(t_0 - \alpha))^2}{(\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}(t_0 - \alpha))^2} - \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2(t_0 - \alpha)} = 1. \quad (2.61)$$

Наконец, используя стандартную формулу для угла между двумя асимптотами (2.61), получим

$$\sin \theta_0 = \frac{\operatorname{sh}(t_0 - \alpha)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(t_0 - \alpha) + \operatorname{sh}^2(t_0 - \alpha) \operatorname{sh}^2 \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha}. \quad (2.62)$$

Таким образом, из (2.57) и (2.62) имеем оценку для супремума

$$\sin \varphi_\lambda \leq \frac{\operatorname{ch}(t_0 - \beta)}{\operatorname{sh} \beta} \sin \theta_0 = \frac{\operatorname{ch}(t_0 - \beta)}{\operatorname{sh} \beta} \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sh} \beta},$$

так как $t_0 - \beta = \alpha$. Это завершает доказательство третьего случая леммы 2.23.

Как мы сказали выше, оставшиеся два случая леммы 2.23 могут быть получены похожим образом. При этом оба они являются более простыми, так как для них $\sup_{I_0} |\sin \theta| = 1$.

Правые части оценок (2.39) – (2.42) монотонно убывают по t_0 . Взяв $t_0 = 0$, во всех случаях приходим к оценке (2.43).

□

Следующая теорема сравнения функций гиперболического угла является лоренцевым аналогом теоремы сравнения функции радиального угла (теорема 2.6).

Теорема 2.24. Пусть M^{m+1} – $(m + 1)$ -мерное пространство–время, N – гладкая выпуклая ахроническая пространственноподобная гиперповерхность в M с $\mathcal{I}^+(N) \neq \emptyset$. Предположим, что вдоль любой времениподобной направленной в будущее геодезической $\gamma: [0, s_0) \rightarrow \mathcal{I}^+(N)$, выпущенной ортогонально N , сессионные кривизны K_{σ_s} многообразия M^{m+1} удовлетворяют

$$K_{\sigma_s} \geq k^2,$$

для некоторой положительной константы k и всевозможных двумерных временноподобных плоскостей σ_s , содержащих $\dot{\gamma}(s)$, $s \geq 0$. Пусть $\Sigma \subset \mathcal{I}^+(N)$ – гладкая полная пространственноподобная гиперповерхность, нормальные кривизны k_n^ν относительно направленного в прошлое нормального векторного поля ν удовлетворяют

$$k_n^\nu \leq \lambda, \quad \lambda > 0,$$

$\Sigma_\lambda \subset \mathbb{S}_1^{m+1}(c)$ – вполне омбилическая гиперповерхность кривизны λ такая, что $\text{dist}(N, \Sigma) = \text{dist}(\mathcal{S}_0, \Sigma_\lambda)$. Тогда для φ и φ_λ – функций гиперболического угла для Σ , Σ_λ по отношению, соответственно, к N и \mathcal{S}_0 – в тех точках $q \in \Sigma$ и $q_\lambda \in \Sigma_\lambda$, для которых

$$\tau_N(q) = \tau_{\mathcal{S}_0}(q_\lambda),$$

выполняется неравенство

$$\text{ch } \varphi(q) \leq \text{ch } \varphi_\lambda(q_\lambda).$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы совпадает с доказательством аналогичной теоремы для радиальных углов (теорема 2.6) с заменой римановой леммы 2.2 на лемму 2.5, и теоремы сравнения нормальных кривизн сфер в римановом случае (теорема 1.7) на теорему сравнения для нормальных кривизн временных срезов (теорема 1.8). \square

Из леммы 2.23 и теоремы сравнения функций гиперболического угла (теорема 2.24), как и в римановом случае, следует теорема об оценке гиперболического

угла.

Теорема 2.25. Пусть M^{m+1} – $(m + 1)$ -мерное пространство-время, N – гладкая выпуклая ахроническая пространственноподобная гиперповерхность в M с $\mathcal{I}^+(N) \neq \emptyset$. Предположим, что вдоль любой времениподобной направленной в будущее геодезической $\gamma: [0, s_0) \rightarrow \mathcal{I}^+(N)$, выпущенной ортогонально N , сеченные кривизны K_{σ_s} многообразия M^{m+1} удовлетворяют

$$K_{\sigma_s} \geq k^2, \quad k > 0,$$

для всевозможных двумерных времениподобных плоскостей σ_s , содержащих $\dot{\gamma}(s)$, $s \geq 0$. Пусть $\Sigma \subset \mathcal{I}^+(N)$ – гладкая пространственноподобная гиперповерхность, ν – направленное в прошлое нормальное векторное поле для Σ , и предположим, что $d(N, \Sigma) = d(p_0, q_0) = t_0$ для некоторых $p_0 \in N, q_0 \in \Sigma$. Если нормальные кривизны k_n^ν гиперповерхности Σ в каждой точке и в каждом направлении удовлетворяют неравенству

$$k_n^\nu \leq \lambda, \quad \lambda > 0,$$

то функция гиперболического угла φ гиперповерхности Σ по отношению к N ограничена и удовлетворяет следующим неравенствам:

1. в случае $\lambda < k$,

$$\text{sh } \varphi \leq \frac{\text{sh}((\beta - t_0)k)}{\text{ch}(\beta k)};$$

где $\beta = 1/k \operatorname{arcth}(\lambda/k)$;

2. в случае $\lambda = k$,

$$\operatorname{sh} \varphi \leq e^{-t_0 k};$$

3. в случае $\lambda > k$,

$$\operatorname{sh} \varphi \leq \frac{\operatorname{ch}((\beta - t_0)k)}{\operatorname{sh}(\beta k)}, \text{ для } \beta > t_0,$$

и

$$\operatorname{sh} \varphi < \frac{1}{\operatorname{sh}(\beta k)}, \text{ для } \beta \leq t_0,$$

где $\beta = 1/k \operatorname{arccth}(\lambda/k)$.

Более того, приведенные оценки точны.

Универсальная оценка (2.43) вместе с теоремой сравнения для функций гиперболического угла дают следующий результат. Заметим, что эта теорема не имеет риманова аналога.

Теорема 2.26. В условиях теоремы 2.25, функция гиперболического угла φ для Σ по отношению к N всегда ограничена и удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{sh} \varphi \leq \frac{\lambda}{k}.$$

Более того, приведенная оценка точна.

Замечание 2.27. Если в условиях теорем 2.24 и 2.25 дополнительно предполагать, что M^{m+1} – глобально гиперболическое односвязное в будущем пространство-

время положительной времениподобной секционной кривизны, а N – компактно, то из [46] будет следовать, что N – *поверхность Коши* в M , а из теоремы Картана-Адамара (см. [2]) мы получим $\mathcal{I}^+(N) = I^+(N) \neq \emptyset$.

Несложно показать, что аналог теорем 2.25 и 2.26 в пространстве Минковского, вообще говоря, не имеет места. Действительно, рассмотрим двумерное пространство Минковского $\mathbb{M}^{1,1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ с метрикой $g = dx^2 - dy^2$ и кривую γ , заданную параметрически как $x = \operatorname{sh} t$, $y = \operatorname{ch} t$, $t \in \mathbb{R}$. Это пространственноподобная кривая постоянной кривизны, равной 1. И предположим, что $N = \{(x, y) \in \mathbb{M}^{1,1} : y = 0\}$. В этом случае N будет выпуклой ахронической гиперповерхностью (Коши), $\mathcal{I}^+(N) = \mathbb{M}^{1,1}$. Непосредственным подсчетом легко убедиться, что соответствующая γ и N функция гиперболического угла $\varphi(t)$ в точке $\gamma(t)$ равна $|t|$. А следовательно, эта функция неограниченна вдоль γ .

Открытым остается вопрос существования аналога теоремы 2.25 в отрицательно искривленных лоренцевых многообразиях.

2.6. Выводы к разделу 2

Данный раздел был посвящен доказательству результатов, связанных с функцией радиального (гиперболического) угла, определенной для данной гиперповерхности по отношению к некоторой фиксированной точке в римановых (лоренцевых) многообразиях.

В подразделе 2.1 было введено понятия функции радиального (в римановом многообразии) и гиперболического (в лоренцевом многообразии для пространственноподобной гиперповерхности) угла. Там же формулируется, и в лоренцевом случае доказывается, формула, связывающая нормальную кривизну гиперповерхности, функцию угла и нормальную кривизну линий уровня функции расстояния.

В подразделе 2.2 доказаны теоремы сравнения радиальных углов для λ -выпуклых (теорема 2.6) и λ -вогнутых (теорема 2.9) гиперповерхностей в римановых многообразиях ограниченной кривизны. Эти теоремы составляют один из центральных результатов диссертационной работы. Как одно из следствий, были

получены точные оценки величин радиальных углов для λ -выпуклых гиперповерхностей в римановых многообразиях ограниченной кривизны (теоремы 2.11 и 2.12 подраздела 2.3).

В подразделе 2.4 было доказано, что в модельных пространствах теорема прокатывания Бляшке для сфер эквивалентна теореме сравнения углов. Кроме того, используя теорему сравнения углов и теорему сравнения углов Топоногова, был получен аналог теоремы Бляшке для сфер в римановых многообразиях ограниченной кривизны (теорема 2.20).

В подразделе 2.5 доказана теорема сравнения для функции гиперболического угла пространственноподобной гиперповерхности в пространстве – времени положительной кривизны, из которой как следствия получены точные оценки этой функции. Оказывается, эта функция ограничена (что было очевидно в римановом случае, и не очевидно в лоренцевом). При этом, было продемонстрировано, что функция гиперболического угла допускает точную оценку сверху константой, не зависящей от расстояния до нулевого временного сечения (теорема 2.26). Такое поведение резко контрастирует с поведением функции радиального угла в римановом многообразии.

В заключение отметим следующие вопросы, представляющие интерес для дальнейшего развития результатов, изложенных в данном разделе:

1. Являются ли теоремы Бляшке и теорема сравнения радиальных углов эквивалентными в римановых многообразиях ограниченной кривизны? В модельных пространствах – да (теоремы 2.17 и 2.19). По всей видимости, это верно и для общих римановых многообразий (см. замечание 2.22). Более того, синтетический характер доказательства теоремы 2.20 делает обозримым перенесение этой эквивалентности на случай метрических пространств Александрова.

2. Каков аналог теоремы сравнения углов в случае метрических пространств Александрова?

3. Целый ряд интересных вопросов связан с результатами подраздела 2.5. Два из них: каков аналог теоремы прокатывания Бляшке в пространстве – времени?

Существует ли аналог теоремы 2.25 в отрицательно искривленных лоренцевых многообразиях? Такие многообразия допускают наличие замкнутых времениподобных геодезических.

Результаты раздела частично опубликованы в [6], [9], [11].

РАЗДЕЛ 3

ТЕОРЕМЫ ОБ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ, ВМЕЩАЮЩЕГО В СЕБЯ ВЫПУКЛУЮ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬ

В этом разделе мы оценим степень близости заданной полной λ - или λ_1, λ_2 -выпуклой гиперповерхности Σ к сфере. Такую оценку можно провести, поместив Σ внутрь так называемого *сферического слоя* – замкнутой области между двумя концентрическими геодезическими сферами радиусов R и r , $R \geq r$ (см. рис. 3.1).

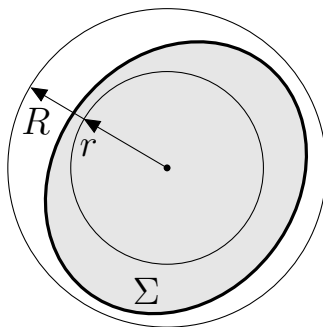


Рис. 3.1. Гиперповерхность Σ внутри сферического слоя с радиусами R и r .

Для сферического слоя естественно возникают два параметра – *ширина* $R-r$ и *отношение радиусов* R/r . Чем ближе первый к 0 или второй – к 1, тем ближе (например, в метрике Хаусдорфа) гиперповерхность к геодезической сфере соответствующего пространства. Этот раздел будет посвящен получению точных оценок для $R-r$ и R/r для λ - и λ_1, λ_2 -выпуклых поверхностей в различных римановых пространствах.

Как мы уже отмечали во введении, в [40, 34, 41, 35] для пространств Адамара кривизны $0 > k_1^2 \geq K_\sigma \geq k_2^2$ были получены оценки для ширины слоя, в который вмещается компактная λ -выпуклая гиперповерхность при $\lambda \leq k_2$. В дальнейшем изложении мы воспользуемся некоторыми идеями и конструкциями, почерпнутыми в цитированных работах.

Во всем разделе мы считаем $\lambda > \sqrt{-c}$ и $\lambda_1 > \sqrt{-c}$, как только $c < 0$.

3.1. Оценка ширины и отношения радиусов сферического слоя для специальных гиперповерхностей в $M^{m+1}(c)$

Для получения оценок близости к сфере для λ - и λ_1, λ_2 -выпуклых гиперповерхностей в этом подразделе мы построим наиболее “несферичные” поверхности из соответствующих классов.

Начнем с λ -выпуклых гиперповерхностей в $M^{m+1}(c)$. Возьмем произвольную меньшую дугу окружности кривизны λ с концами в точках p и q . Поверхность, образованная вращением этой дуги вокруг геодезической pq называется *веретенообразной гиперповерхностью* (см. рис. 4.2(a)). Такая гиперповерхность, по построению, будет полной и λ -выпуклой. Точки p и q являются нерегулярными точками на этой гиперповерхности, и мы будем называть их *вершинами*. В случае $m = 1$ будем называть нашу веретенообразную гиперповерхность *криволинейным двуугольником* или *луночкой*.

Построим теперь наиболее “несферичную” λ_1, λ_2 -выпуклую гиперповерхность. Для этого, в $M^{m+1}(c)$ рассмотрим веретенообразную λ_1 -выпуклую гиперповерхность с вершинами в точках p и q . Сгладим эти вершины при помощи двух сферических шапочек кривизны λ_2 ($\lambda_2 \leq \lambda_1$), центры которых расположены на геодезической pq , а сами шапочки касаются веретенообразной гиперповерхности. После такого сглаживания мы получим $C^{1,1}$ -гладкую гиперповерхность (см. рис. 4.2). Мы будем называть такие поверхности *закругленными λ_1, λ_2 -выпуклыми веретенообразными гиперповерхностями* или просто *закругленными веретенообразными гиперповерхностями*. По построению, закругленная веретенообразная гиперповерхность будет полной и λ_1, λ_2 -выпуклой.

Замечание 3.1. Закругленная λ_1, λ_2 -выпуклая гиперповерхность является контр-примером оценки сферической близости при некоторых интегральных ограничениях в классе $C^{1,1}$ -гладких гиперповерхностей (см. [76, теор. 4.1], где приводится другой контр-пример в классе более гладких гиперповерхностей).

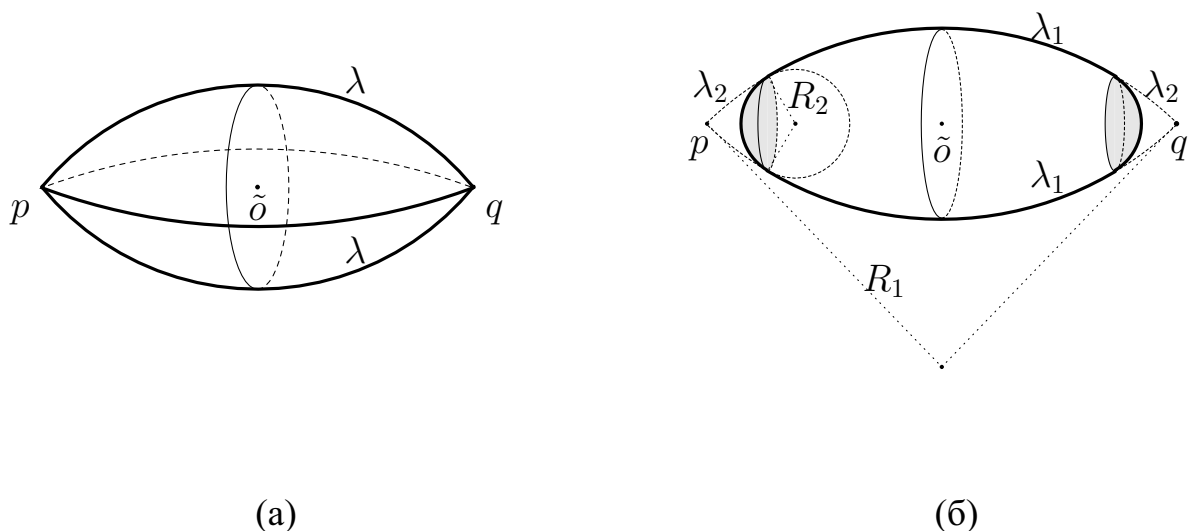


Рис. 3.2. (а) λ -выпуклая веретенообразная гиперповерхность; (б) закругленная λ_1, λ_2 -выпуклая веретенообразная гиперповерхность.

Построенные выше гиперповерхности являются центрально симметричными по отношению к середине \tilde{o} геодезического отрезка pq (см. рис. 4.2). Поэтому центр вписанных в них шаров совпадает с \tilde{o} , и радиус \tilde{r} этого шара равен расстоянию от \tilde{o} до гиперповерхности. Заметим, что \tilde{r} может лежать в пределах от 0 до R_λ для веретенообразной гиперповерхности и от R_2 до R_1 – для закругленной веретенообразной гиперповерхности. Тут и везде далее, для краткости,

$$R_1 = R_{\lambda_1}, \quad R_2 = R_{\lambda_2}$$

являются радиусами сфер кривизны λ_i в $M^{m+1}(c)$. При этом, для любого \tilde{r} в указанных пределах существует единственная (закругленная) веретенообразная гиперповерхность с радиусом вписанного шара, равным \tilde{r} . Таким образом, в каждом из случаев мы получаем однопараметрическое семейство таких гиперповерхностей, задаваемое параметром \tilde{r} .

Отметим, что закругленная λ_1, λ_2 -выпуклая веретенообразная гиперповерхность при $\lambda_2 \rightarrow \infty$ стремится к λ_1 -выпуклой веретенообразной гиперповерхности. Мы будем пользоваться этим наблюдением в дальнейшем.

В силу симметрии, для построенных выше специальных гиперповерхностей удастся явно посчитать и оценить параметры сферического слоя, в который их

можно поместить. В частности, оба типа поверхностей содержатся в сферическом слое между описанной и вписанной сферами. Мы начнем с закругленных λ_1, λ_2 -выпуклых гиперповерхностей. Имеет место следующая лемма.

Лемма 3.2. Пусть $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{M}^{m+1}(c)$ – закругленная λ_1, λ_2 -выпуклая веретенообразная гиперповерхность, \tilde{r} и \tilde{R} – радиусы ее вписанной и описанной сфер, соответственно; тогда для ширины $\tilde{R} - \tilde{r}$ сферического слоя справедливы следующие оценки:

1. для $c = 0$,

$$\tilde{R} - \tilde{r} \leq (\sqrt{2} - 1) (R_1 - R_2), \quad (3.1)$$

причем равенство достигается для $\tilde{\Sigma}$ с радиусом вписанной сферы, равным $R_2/\sqrt{2} + R_1(1 - 1/\sqrt{2})$;

2. для $c = k^2, k > 0$,

$$\tilde{R} - \tilde{r} \leq \frac{2}{k} \arccos \sqrt{\cos(k(R_1 - R_2))} - (R_1 - R_2), \quad (3.2)$$

причем равенство достигается для $\tilde{\Sigma}$ с радиусом вписанной сферы, равным $R_1 - 1/k \cdot \arccos \sqrt{\cos k(R_1 - R_2)}$;

3. для $c = -k^2, k > 0$,

$$\tilde{R} - \tilde{r} \leq \frac{2}{k} \operatorname{arccosh} \sqrt{\operatorname{ch}(k(R_1 - R_2))} - (R_1 - R_2), \quad (3.3)$$

причем равенство достигается для $\tilde{\Sigma}$ с $\tilde{r} = R_1 - 1/k \cdot \operatorname{arccch} \sqrt{\operatorname{ch} k(R_1 - R_2)}$

(везде выше R_i – радиус вполне омбилической сферы кривизны $\lambda_i, i \in \{1, 2\}$, в

соответствующем модельном пространстве постоянной кривизны.)

Более того, в случае $c = 0$ для отношения радиусов \tilde{R}/\tilde{r} сферического слоя выполняется следующая оценка

$$\frac{\tilde{R}}{\tilde{r}} \leq \frac{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} + \sqrt{2}}, \quad (3.4)$$

причем равенство достигается для закругленной веретенообразной поверхности $\tilde{\Sigma}$ с радиусом вписанной сферы, равным

$$\frac{\sqrt{2\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \sqrt{2} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} - 1 \right).$$

Доказательство. Обозначим через o_2 центр одной из сферических шапочек, которые были использованы для построения поверхности, и пусть o_1 – центр произвольной меньшей дуги радиуса R_1 , соединяющей точки p и q (см. рис. 3.3). В силу вращательной симметрии поверхности, геодезический треугольник $\triangle o_1\tilde{o}o_2$ – прямоугольный ($\angle o_1\tilde{o}o_2 = \pi/2$), причем

$$|o_1\tilde{o}| = R_1 - \tilde{r}, \quad |o_2\tilde{o}| = \tilde{R} - R_2, \quad |o_1o_2| = R_1 - R_2. \quad (3.5)$$

Начнем с доказательства оценок ширины $\tilde{R} - \tilde{r}$ сферического слоя.

1) Рассмотрим евклидов случай $c = 0$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника $\triangle o_1\tilde{o}o_2$ получаем

$$\tilde{R} = \sqrt{(R_1 - R_2)^2 - (R_1 - \tilde{r})^2} + R_2. \quad (3.6)$$

Рассмотрим функцию

$$w(\tilde{r}) = \tilde{R} - \tilde{r} = \sqrt{(R_1 - R_2)^2 - (R_1 - \tilde{r})^2} + R_2 - \tilde{r} \quad (3.7)$$

заданную и непрерывно дифференцируемую на $[R_2, R_1]$. По построению, $w \geq 0$ и $w(R_1) = w(R_2) = 0$. Значит, эта функция достигает своего глобального максимума

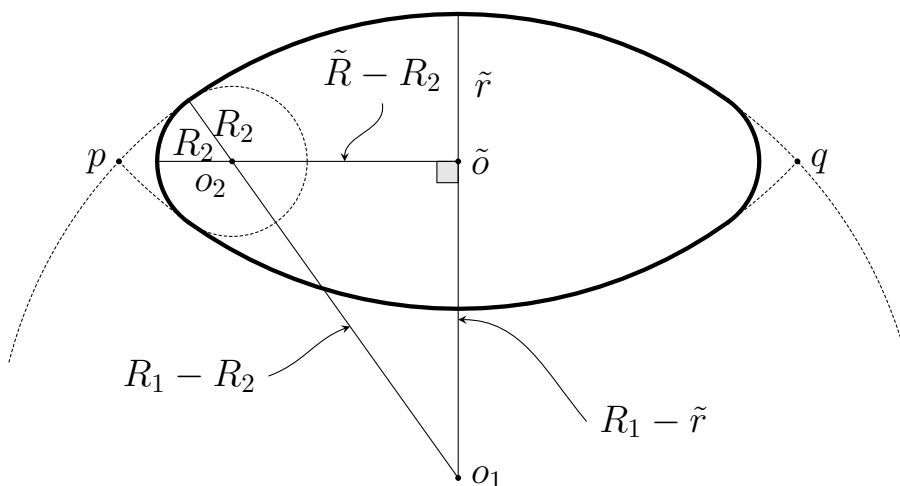


Рис. 3.3. Построения для оценки параметров сферического слоя, содержащего λ_1, λ_2 -выпуклую гиперповерхность.

на (R_2, R_1) . Решим уравнение $dw/d\tilde{r} = 0$ для нахождения точки максимума \tilde{r}_0 .
Имеем:

$$\frac{dw}{d\tilde{r}}(\tilde{r}_0) = 0 \Leftrightarrow R_1 - R_2 = \sqrt{2} (R_1 - \tilde{r}_0),$$

откуда точка максимума

$$\tilde{r}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} R_2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) R_1.$$

Подставив $\tilde{r} = \tilde{r}_0$ в (3.7), получим

$$w(\tilde{r}_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (R_1 - R_2) - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) (R_1 - R_2) = (\sqrt{2} - 1) (R_1 - R_2),$$

что и доказывает оценку (3.1) для евклидова случая.

2) Пусть $c = k^2$, $k > 0$. Проведем выкладки, аналогичные выкладкам выше. По сферической теореме Пифагора из прямоугольного треугольника $\triangle o_1 \tilde{o}_2$ имеем

$$\cos k(R_1 - R_2) = \cos k(\tilde{R} - R_2) \cdot \cos k(R_1 - \tilde{r}),$$

откуда

$$\tilde{R} = \frac{1}{k} \arccos \frac{\cos k(R_1 - R_2)}{\cos k(R_1 - \tilde{r})} + R_2. \quad (3.8)$$

Аналогично пункту 1), на отрезке $[R_2, R_1]$ рассмотрим функцию ширины

$$w(\tilde{r}) = \tilde{R} - \tilde{r} = \frac{1}{k} \arccos \frac{\cos k(R_1 - R_2)}{\cos k(R_1 - \tilde{r})} + R_2 - \tilde{r}. \quad (3.9)$$

Заметим, что функция ширины, как и в случае $c = 0$, является непрерывно дифференцируемой на $[R_2, R_1]$ неотрицательной функцией, причем $w(R_2) = w(R_1) = 0$. Значит, $w(\cdot)$ достигает своего глобального максимального значения на (R_2, R_1) в некоторой точке \tilde{r}_0 . Найдем эту точку. В силу того, что все стороны $\triangle o_1 \tilde{o} o_2$ по длине не превосходят $\pi/2k$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tilde{r}}(\tilde{r}_0) = 0 &\Leftrightarrow \cos k(R_1 - \tilde{r}_0) \sqrt{\cos^2 k(R_1 - \tilde{r}_0) - \cos^2 k(R_1 - R_2)} \\ &= \cos k(R_1 - R_2) \sin k(R_1 - \tilde{r}_0) \\ &\Leftrightarrow \cos k(R_1 - R_2) = \cos^2 k(R_1 - \tilde{r}_0). \end{aligned} \quad (3.10)$$

откуда точка максимума

$$\tilde{r}_0 = R_1 - \frac{1}{k} \arccos \sqrt{\cos k(R_1 - R_2)}.$$

Подставляя найденное значение для \tilde{r}_0 в (3.9) и используя последнее равенство в (3.10) для упрощения, получим требуемое неравенство (3.2).

3) Доказательство пункта 3) дословно повторяет доказательство пункта 2) с заменой сферической теоремы Пифагора на гиперболическую.

Наконец, докажем оценку (3.4).

Аналогично пунктам 1) – 3), используя (3.6), введем в рассмотрение функцию

$$q(\tilde{r}) = \frac{\tilde{R}}{\tilde{r}} = \frac{1}{\tilde{r}} \left(\sqrt{(R_1 - R_2)^2 - (R_1 - \tilde{r})^2} + R_2 \right) \quad (3.11)$$

определенную и непрерывно дифференцируемую на $[R_2, R_1]$. По построению, $q \geq 1$, и несложно видеть, что $q(R_1) = q(R_2) = 1$. Следовательно, она достигает своего глобального максимума на (R_2, R_1) (за исключением тривиального случая $R_1 = R_2$). Найдем это максимальное значение.

Уравнение $dq/d\tilde{r}(\tilde{r}_0) = 0$ относительно \tilde{r}_0 равносильно следующему квад-

ратному уравнению

$$\tilde{r}_0^2 (R_1^2 + R_2^2) - 4\tilde{r}_0 R_1^2 R_2 + 2R_1 R_2^2 (2R_1 - R_2) = 0,$$

единственным подходящим корнем которого является

$$\tilde{r}_0 = \frac{1}{R_1^2 + R_2^2} \left(2R_1^2 R_2 - R_2 (R_1 - R_2) \sqrt{2R_1 R_2} \right).$$

Функция q достигает своего максимального значения в точке \tilde{r}_0 . Следовательно,

$$q(\tilde{r}) \leq q(\tilde{r}_0) \text{ для всех } \tilde{r} \text{ из } [R_2, R_1]. \quad (3.12)$$

Найдем значение $q(\tilde{r}_0)$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$(R_1 - R_2)^2 - (R_1 - \tilde{r}_0)^2 = \frac{(R_1 - R_2)^2}{(R_1^2 + R_2^2)^2} \left(R_2 (R_1 - R_2) - R_1 \sqrt{2R_1 R_2} \right)^2.$$

Значит, так как $R_1 \sqrt{2R_1 R_2} > R_2 (R_1 - R_2)$,

$$\begin{aligned} & \sqrt{(R_1 - R_2)^2 - (R_1 - \tilde{r}_0)^2} + R_2 = \\ & = \frac{\sqrt{2R_1 R_2}}{R_1^2 + R_2^2} \left(R_1 + \sqrt{2R_1 R_2} \right) \left(R_1 + R_2 - \sqrt{2R_1 R_2} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Мы можем переписать \tilde{r}_0 таким же образом:

$$\tilde{r}_0 = \frac{\sqrt{2R_1 R_2}}{R_1^2 + R_2^2} \left(R_2 + \sqrt{2R_1 R_2} \right) \left(R_1 + R_2 - \sqrt{2R_1 R_2} \right). \quad (3.14)$$

Комбинируя (3.13) и (3.14), и вспоминая, что $R_i = 1/\lambda_i$, $i \in \{1, 2\}$, получим

$$q(\tilde{r}_0) = \frac{R_1 + \sqrt{2R_1 R_2}}{R_2 + \sqrt{2R_1 R_2}} = \frac{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} + \sqrt{2}}. \quad (3.15)$$

Таким образом, из (3.11), (3.12) и (3.15) мы окончательно получаем

$$\frac{\tilde{R}}{\tilde{r}} \leq \frac{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} + \sqrt{2}},$$

что и требовалось.

Все полученные выше оценки для ширины и отношения радиусов точны и достигаются для закругленной λ_1, λ_2 -выпуклой гиперповерхности, радиус вписан-

ной сферы которой равен \tilde{r}_0 . Лемма 3.2 доказана. \square

Замечание 3.3. При $k \rightarrow 0$ метрики пространств $\mathbb{S}^{m+1}(k^2)$ и $\mathbb{H}^{m+1}(-k^2)$ стремятся к евклидовой метрике. Легко показать, что оценки (3.2) и (3.3) леммы 3.2 стремятся к оценке (3.1) при $k \rightarrow 0$.

Как мы уже отмечали, закругленная λ_1, ∞ -выпуклая веретенообразная гиперповерхность является просто λ_1 -выпуклой веретенообразной гиперповерхности. Таким образом, полагая $R_2 = 0$ (что эквивалентно $\lambda_2 = \infty$) в пунктах 1) – 3) леммы 3.2, получаем, что справедлива аналогичная лемма для λ -выпуклых веретенообразных гиперповерхностей.

Лемма 3.4. Если $\tilde{\Sigma} \subset M^{m+1}(c)$ – λ -выпуклая веретенообразная гиперповерхность, а \tilde{R}, \tilde{r} – радиусы описанной и вписанной сфер для $\tilde{\Sigma}$, соответственно, то для ширины $\tilde{R} - \tilde{r}$ сферического слоя, вмещающего в себе $\tilde{\Sigma}$, выполняются оценки:

1. в случае евклидова пространства ($c = 0$)

$$\tilde{R} - \tilde{r} \leq (\sqrt{2} - 1) R_\lambda,$$

и равенство достигается при $\tilde{r} = (1 - 1/\sqrt{2}) R_\lambda$;

2. в случае сферического пространства $\mathbb{S}^{m+1}(k^2)$ ($c = k^2$)

$$\tilde{R} - \tilde{r} \leq \frac{2}{k} \arccos \sqrt{\cos k R_\lambda} - R_\lambda,$$

и равенство достигается при $\tilde{r} = R_\lambda - 1/k \cdot \arccos \sqrt{\cos k R_\lambda}$;

3. в случае пространства Лобачевского $\mathbb{H}^{m+1}(-k^2)$ ($c = -k^2$)

$$\tilde{R} - \tilde{r} \leq \frac{2}{k} \operatorname{arcch} \sqrt{\operatorname{ch} k R_\lambda} - R_\lambda,$$

и равенство достигается при $\tilde{r} = R_\lambda - 1/k \cdot \operatorname{arcch} \sqrt{\operatorname{ch} k R_\lambda}$.

(везде выше R_λ – радиус вполне омбилической сферы кривизны λ в $M^{m+1}(c)$.)

Замечание 3.5. Заметим, что для λ -выпуклых веретенообразных гиперповерхностей отношения радиусов сферического слоя \tilde{R}/\tilde{r} может быть сколь угодно большим для заданного λ . Поэтому для такого класса поверхностей, а значит, вообще говоря, для всех λ -выпуклых гиперповерхностей, которые не являются λ, λ_2 -выпуклыми ни для какого конечного $\lambda_2 > \lambda$, для отношения радиусов R/r нельзя привести оценок вида $R/r \leq f(\lambda)$, аналогичных (3.4).

3.2. Теоремы об оценках параметров сферического слоя, вмещающего полные λ - или λ_1, λ_2 -выпуклые гиперповерхности в $M^{n+1}(c)$, и следствия из них

Для перенесения полученных в предыдущем подразделе оценок с веретенообразных гиперповерхностей на случай произвольных λ - и λ_1, λ_2 -выпуклых гиперповерхностей, нам понадобится следующая ключевая лемма сравнения. Эта лемма показывает, что построенные выше классы специальных гиперповерхностей в действительности являются наименее “сферичными” среди всех полных λ - (или λ_1, λ_2 -) выпуклых гиперповерхностей.

Лемма 3.6. Пусть $\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ – полная вложенная λ_1, λ_2 -выпуклая гиперповерхность, r – радиус вписанной в Σ сферы с центром в точке o . И пусть $\tilde{\Sigma} \subset M^{m+1}(c)$ – закругленная λ_1, λ_2 -выпуклая веретенообразная гиперповерхность, \tilde{r}, \tilde{R} – радиусы вписанной и описанной сфер для $\tilde{\Sigma}$. Если

$$\tilde{r} = r,$$

то

$$\max_{s \in \Sigma} \text{dist}(o, q) \leq \tilde{R}. \quad (3.16)$$

Более того, эта оценка точна.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что Σ ограничивает выпуклую область D_Σ .

Будем доказывать лемму от противного. Предположим, что (3.16) неверно, и обратное неравенство имеет место

$$\max_{s \in \Sigma} \text{dist}(o, s) > \tilde{R}. \quad (3.17)$$

Так как Σ – компакта, найдем точку $m \in \Sigma$ такую, что $\max_{s \in \Sigma} \text{dist}(o, s) = |om|$; тогда из (3.17) следует, что на геодезическом отрезке om существует точка a такая, что

$$|oa| = \tilde{R} < |om|. \quad (3.18)$$

Предположим, что центр $\tilde{\Sigma}$ совпадает с точкой o , а ее ось направлена вдоль геодезической oa . Тогда $a \in \tilde{\Sigma}$.

Пусть $\omega_2 \subseteq D_\Sigma$ – вполне омбилическая сфера с центром в точке o_2 и кривизны λ_2 , касающаяся изнутри гиперповерхности Σ в точке m (такая сфера существует по теореме прокатывания Бляшке, теорема 1.16). Так как точка m есть точкой, для которой достигается максимальное расстояние от o , то вполне геодезическая гиперповерхность, касающаяся Σ в m , перпендикулярна геодезической om . Следовательно, центр o_2 сферы ω_2 лежит на отрезке om . Заметим, что из (3.18) следует, что

$$|oo_2| > \tilde{R} - R_2, \quad (3.19)$$

где R_2 – радиус ω_2 .

Обозначим через ω вписанную в Σ сферу. Так как гиперповерхность Σ явля-

ется λ_1, λ_2 -выпуклой, то по теореме прокатывания Бляшке Σ лежит в шаре радиуса R_1 (напомним, что R_1 – радиус сферы кривизны λ_1). А значит, обе сферы ω и ω_2 лежат в этом шаре. Покажем, что существует сфера радиуса R_1 , которая касается внешним образом одновременно ω и ω_2 .

Обозначим $|oo_2|$ через d . Понятно, что описанная выше сфера существует тогда и только тогда, когда три числа $d, R_1 - r$ и $R_1 - R_2$ удовлетворяют неравенству треугольника. Проверим это:

1. $(R_1 - r) + (R_1 - R_2) = 2R_1 - (r + R_2) > d$, т.к. ω и ω_2 лежат в шаре радиуса R_1 ;

2. $(R_1 - R_2) + d > R_1 - r$, т.к. ω является вписанной сферой, а значит или $\omega \equiv \omega_2$ и $r = R_1 = R_2$, что есть тривиальный случай, когда Σ – сфера, или ω_2 касается ω изнутри, что опять возможно только для сферы, или ω_2 не может полностью лежать внутри ω , что влечет $r + d < R_2$.

3. $(R_1 - r) + d > R_1 - R_2$, что, очевидно, верно.

В силу вращательной симметрии, вместе с одной сферой радиуса R_1 существует целое семейство сфер того же радиуса, которые касаются одновременно ω и ω_2 вдоль малых $(m - 1)$ -мерных сфер σ и σ_2 , соответственно.

Так как D_Σ , в частности, является λ_1 -выпуклой областью, то по лемме 1.17, та часть огибающей этого семейства (назовем ее Θ), которая лежит между вполне геодезическими гиперплоскостями π и π_2 (соответствующими сферам $\sigma = \pi \cap \omega$ и $\sigma_2 = \pi_2 \cap \omega_2$), лежит также внутри D_Σ (см. рис. 3.4).

Пусть ω^- и ω_2^+ – ферические шапочки, отсекаемые от, соответственно, ω и ω_2 плоскостями π и π_2 . Причем, будем выберем ω^-, ω_2^+ так, чтобы Θ и ω^-, Θ и ω_2^+ лежали по разные стороны относительно π и π_2 , соответственно.

Рассмотрим гиперповерхность $\omega^- \cup \Theta \cup \omega_2^+$, которую мы обозначим как Ω . По построению, Ω – $C^{1,1}$ -гладкая гиперповерхность. По доказанному выше, Ω лежит внутри D_Σ .

Сейчас, используя (3.19), мы покажем, что в Ω можно вписать сферу радиуса \tilde{r} строго больше радиуса r вписанной сферы для Σ . Это даст нам требуемое

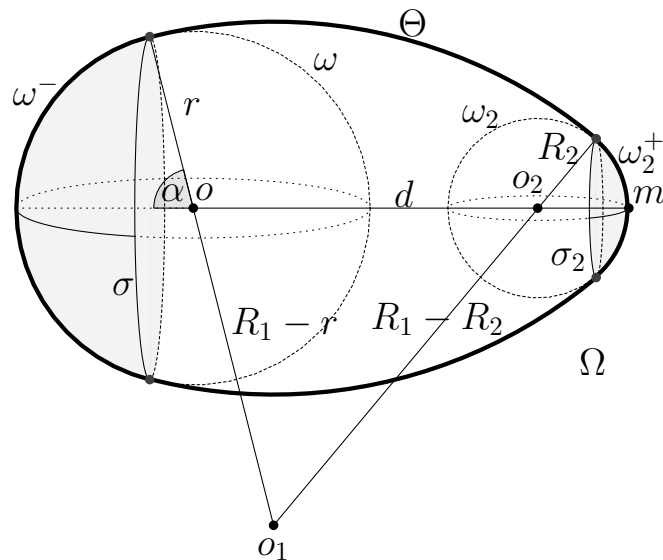


Рис. 3.4. Гиперповерхность $\Omega = \omega^- \cup \Theta \cup \omega_2^+$.

противоречие, так как, по определению, вписанная сфера – это сфера наибольшего радиуса, которая лежит внутри области.

В силу симметрии, центр вписанной в Ω сферы лежит на геодезической oo_2 . Рассмотрим сечение Ω вполне геодезическим двумерным подпространством Π , проходящим через oo_2 . Тогда кривая Ω' , определяемая как $\Omega \cap \Pi$, будет состоять из четырех кусков: дуга ω' окружности $\omega \cap \Pi$ радиуса r , дуга ω_2' окружности $\omega_2 \cap \Pi$ радиуса R_2 и две круговых дуги радиуса R_1 . Обозначим через o_1 центр одной из них (см. рис. 3.4). Тогда $|oo_1| = R_1 - r$, $|o_2o_1| = R_1 - R_2$. Пусть α – угол между геодезическими oo_2 и oo_1 . Будем считать $\alpha \leq \pi/2$.

Из конструкции для $\tilde{\Sigma}$ следует, что треугольник с длинами сторон $R_1 - r$, $R_1 - R_2$ и $\tilde{R} - R_2$ – прямоугольный. Обозначим $\tilde{R} - R_2$ как \tilde{d} . Тогда из (3.19) следует, что $d > \tilde{d}$. По теореме косинусов для геодезического треугольника Δoo_2o_1 имеем:

1. в случае $c = 0$,

$$\begin{aligned} (R_1 - R_2)^2 &= (R_1 - r)^2 + d^2 - 2d(R_1 - r)\cos\alpha \\ &> (R_1 - r)^2 + \tilde{d}^2 - 2d(R_1 - r)\cos\alpha. \end{aligned}$$

Так как $(R_1 - R_2)^2 = (R_1 - r)^2 + \tilde{d}^2$, то из выкладок выше следует, что $\cos\alpha > 0$, а значит $\alpha < \pi/2$.

2. в случае $c > 0$ (можем считать, без ограничения общности, $c = 1$),

$$\begin{aligned} \cos(R_1 - R_2) &= \cos(R_1 - r) \cos d + \sin(R_1 - r) \sin d \cos \alpha \\ &< \cos(R_1 - r) \cos \tilde{d} + \sin(R_1 - r) \sin d \cos \alpha. \end{aligned}$$

Вспоминая, что по сферической теореме Пифагора $\cos(R_1 - R_2) = \cos(R_1 - r) \cdot \cos \tilde{d}$, получаем $\cos \alpha > 0$, $\alpha < \pi/2$.

3. в случае $c < 0$ (без ограничения общности, считаем $c = -1$),

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(R_1 - R_2) &= \operatorname{ch}(R_1 - r) \operatorname{ch} d - \operatorname{sh}(R_1 - r) \operatorname{sh} d \cos \alpha \\ &> \operatorname{ch}(R_1 - r) \operatorname{ch} \tilde{d} + \operatorname{sh}(R_1 - r) \operatorname{sh} d \cos \alpha. \end{aligned}$$

По гиперболической теореме Пифагора $\operatorname{ch}(R_1 - R_2) = \operatorname{ch}(R_1 - r) \operatorname{ch} \tilde{d}$, следовательно и в этом случае $\alpha < \pi/2$.

Таким образом, во всех случаях угол α строго меньше $\pi/2$. Следовательно, из прямоугольного треугольника $\triangle oo_1c$ видно, что $|oo_1| > |o_1c|$. Значит, если r' — радиус вписанной в Ω' окружности, то $r' = R_1 - |o_1c|$ и $r' > R_1 - |oo_1| = r$. А в силу того, что это верно для любой плоскости Π , мы приходим к анонсированному противоречию, которое и доказывает (3.16).

В неравенстве (3.16) равенство, очевидно, достигается для $\Sigma = \tilde{\Sigma}$. Лемма 3.6 доказана. □

Доказанная лемма 3.6 является ключевой составляющей, из которой мы сейчас будем получать основные результаты об оценках параметров сферического слоя, построенного для произвольных полных λ_1, λ_2 -выпуклых гиперповерхностей в $M^{m+1}(c)$.

Первым результатом из этой серии есть следующая теорема, дающая точную оценку вида $R \leq f(\lambda_1, \lambda_2, r)$ для радиусов описанной (R) и вписанной (r) сфер.

Теорема 3.7. *Произвольная полная вложенная λ_1, λ_2 -выпуклая гиперповерхность*

$\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ (при $c < 0$ считаем $\lambda_1 > \sqrt{-c}$) *может быть заключена в сфериче-*

ский слой между двумя концентрическими сферами радиусов R и r ($R \geq r$) такой, что

1. для $c = 0$,

$$R \leq \sqrt{(R_1 - R_2)^2 - (R_1 - r)^2} + R_2; \quad (3.20)$$

2. для $c = k^2$ ($k > 0$),

$$R \leq \frac{1}{k} \arccos \frac{\cos(k(R_1 - R_2))}{\cos(k(R_1 - r))} + R_2; \quad (3.21)$$

3. для $c = -k^2$ ($k > 0$),

$$R \leq \frac{1}{k} \operatorname{arccosh} \frac{\operatorname{ch}(k(R_1 - R_2))}{\operatorname{ch}(k(R_1 - r))} + R_2, \quad (3.22)$$

где R_1 и R_2 – радиусы вполне омбилических сфер кривизны, соответственно, λ_1 и λ_2 в $M^{m+1}(c)$.

Более того, оценки (3.20) – (3.22) – точны.

Доказательство. Теорема является прямым следствием леммы 3.6. Действительно, если r – радиус вписанной сферы для Σ , то существует единственная с точностью до движения закругленная λ_1, λ_2 -выпуклая веретенообразная гиперповерхность с $\tilde{r} = r$. Откуда из (3.16), в силу (3.6), (3.8) и аналогичной формулы для веретенообразной гиперповерхности в пространстве Лобачевского, следуют оценки (3.20) – (3.22). \square

Из леммы сравнения 3.6 и леммы об оценке ширины слоя для специальных веретенообразных гиперповерхностей (лемма 3.2) следуют следующие две теоремы, являющиеся одними из основных результатов работы.

Теорема 3.8. Произвольная полная вложенная λ_1, λ_2 -выпуклая гиперповерхность $\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ (при $c < 0$ считаем $\lambda_1 > \sqrt{-c}$) может быть заключена в сферический слой между двумя концентрическими сферами радиусов R и r ($R \geq r$) такой, что

1. для $c = 0$,

$$R - r \leq (\sqrt{2} - 1) (R_1 - R_2); \quad (3.23)$$

2. для $c = k^2$ ($k > 0$),

$$R - r \leq \frac{2}{k} \arccos \sqrt{\cos(k(R_1 - R_2))} - (R_1 - R_2); \quad (3.24)$$

3. для $c = -k^2$ ($k > 0$),

$$R - r \leq \frac{2}{k} \operatorname{arccosh} \sqrt{\operatorname{ch}(k(R_1 - R_2))} - (R_1 - R_2), \quad (3.25)$$

где R_1 и R_2 – радиусы вполне омбилических сфер кривизны, соответственно, λ_1 и λ_2 в $M^{m+1}(c)$.

Более того, эти оценки точны.

Теорема 3.9. Если $\Sigma \subset \mathbb{E}^{m+1}$ – полная вложенная λ_1, λ_2 -выпуклая гиперповерхность в евклидовом пространстве, то она может быть заключена в сферический

слой между двумя концентрическими сферами радиусов R и r ($R \geq r$) такой, что

$$\frac{R}{r} \leq \frac{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} + \sqrt{2}}. \quad (3.26)$$

Более того, эта оценка точна.

Из теоремы 3.8, устремляя $\lambda_2 \rightarrow \infty$ (или, эквивалентно, полагая $R_2 = 0$), или дословно повторяя доказательство леммы 3.6 для λ -выпуклых гиперповерхностей и используя лемму 3.4, получаем следующий результат для полных λ -выпуклых гиперповерхностей.

Теорема 3.10. *Если Σ – полная вложенная λ -выпуклая гиперповерхность в $M^{m+1}(c)$, то Σ можно заключить в сферический слой между двумя концентрическими сферами радиусов R и r ($R \geq r$) такой, что*

1. для $c = 0$,

$$R - r \leq (\sqrt{2} - 1) R_\lambda; \quad (3.27)$$

2. для $c = k^2$ ($k > 0$)

$$R - r \leq \frac{2}{k} \arccos \sqrt{\cos kR_\lambda} - R_\lambda. \quad (3.28)$$

3. для $c = -k^2$ ($k_1 > 0$, считая $\lambda > k$)

$$R - r \leq \frac{2}{k} \operatorname{arcch} \sqrt{\operatorname{ch} kR_\lambda} - R_\lambda, \quad (3.29)$$

где R_λ – радиус вполне омбилической сферы кривизны λ в $M^{m+1}(c)$. Более того, оценки (3.27) – (3.29) – точны.

В тоже время, непосредственной проверкой можно убедиться, что правая часть в оценке из теоремы 3.9 никогда не превосходит λ_2/λ_1 . Поэтому получаем такое следствие.

Следствие 3.11. *В условиях теоремы 3.9 справедливо*

$$\frac{R}{r} \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Сделаем несколько замечаний, касающихся полученных результатов.

Замечание 3.12. В теоремах и следствии выше, как это видно из доказательства леммы 3.6, на которой они все основываются, центр слоя может быть взят совпадающим с центром вписанной для Σ сферы, а радиус r – равный радиусу описанной сферы. Сравните это с [81], где следствие 3.11 доказано, когда центр слоя является одним из центров кривизны Σ .

Замечание 3.13. Заметим, что если в теоремах 3.8, 3.9 и следствии 3.11 положить $\lambda_1 = \lambda_2$, то из оценок (3.23) – (3.26) будет следовать, что $R = r$, а значит Σ – вполне омбилическая сфера.

Замечание 3.14. Известно, что в евклидовом пространстве $R_i = 1/\lambda_i$; $R_i = 1/k \cdot \operatorname{arccotg} \lambda_i/k$ в $\mathbb{S}^{m+1}(k)$; $R_i = 1/k \operatorname{arcctg} \lambda_i/k$ в $\mathbb{H}^{m+1}(-k^2)$. Поэтому, все полученные оценки могут переписаны через c , λ_1 , λ_2 . Например, в теореме 3.10 оценки (3.27) – (3.29) примут (довольно громоздкий) вид:

1. $R - r \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\lambda}$;
2. $R - r \leq \frac{1}{k} \left(2 \arccos \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda^2+k^2}} - \operatorname{arccotg} \frac{\lambda}{k} \right)$;
3. $R - r \leq \frac{1}{k} \left(2 \operatorname{arcch} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} - \operatorname{arcctg} \frac{\lambda}{k} \right)$.

Полученные теоремы 3.8 и 3.9 позволяют нам вывести, как следствие, результаты по устойчивости для практически омбилических гиперповерхностей.

Следствие 3.15. Если $\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ – полная вложенная $\lambda, (1 + \varepsilon)\lambda$ -выпуклая гиперповерхность для достаточно малого $\varepsilon \geq 0$, то Σ может быть заключена в сферический слой между двумя концентрическими сферами радиусов R и r ($R \geq r$) такой, что

$$R - r \leq C(\lambda, c) \cdot \varepsilon,$$

$$\text{где } C(\lambda, c) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + c} (\sqrt{2} - 1).$$

Более того, для $c = 0$, гиперповерхность Σ может быть заключена в сферической слой между двумя концентрическими сферами радиусов R, r такой, что

$$\frac{R}{r} - 1 \leq C \cdot \varepsilon,$$

$$\text{где } C = \sqrt{2} - 1.$$

Доказательство. Теорема является следствием теорем 3.8 и 3.9 и получается подстановкой $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = (1 + \varepsilon)\lambda$ в правые части (3.23) – (3.25) и (3.26) с последующим разложением в ряд Тейлора относительно ε в точке $\varepsilon = 0$. \square

3.3. Оценка ширины сферического слоя для λ -выпуклой гиперповерхности в римановом многообразии знакопостоянной кривизны

Оценку ширины сферического слоя, вмещающего полную λ -выпуклую гиперповерхность (теорема 3.10), можно обобщить на случай объемлющего риманова многообразия знакопостоянной секционной кривизны. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.16. Пусть Σ – полная вложенная C^2 -гладкая λ -выпуклая ($\lambda > 0$) гиперповерхность в полном односвязном $(m + 1)$ -мерном римановом многообразии M^{m+1} .

1. Если секционные кривизны K_σ многообразия M^{m+1} по всем двумерным площадкам σ удовлетворяют неравенству $K_\sigma \geq k^2$, $k > 0$, а область D_Σ лежит в шаре радиуса $\text{inj}_M(o)$ с центром в точке o , где o – центр вписанного в Σ шара, то гиперповерхность Σ можно заключить в сферический слой, ширина $R - r$ которого удовлетворяет (3.28);

2. Если для любой двумерной площадки $0 \geq K_\sigma \geq -k^2$, и $\lambda > k > 0$, то Σ можно заключить в сферический слой, ширина $R - r$ которого удовлетворяет (3.29).

Доказательство. Пусть o – центр вписанного в Σ шара B , r – его радиус. В касательном пространстве T_oM рассмотрим область $D := \exp_o^{-1}(D_\Sigma)$. Тогда $\partial D = \exp_o^{-1}(\Sigma)$.

Для краткости, пусть в первом случае $c = k^2$, а во втором $c = -k^2$. Обозначим через $\bar{o} \in M^{m+1}(c)$ некоторую произвольную фиксированную точку. отождествим касательные пространства T_oM и $T_{\bar{o}}M(c)$ по изометрии (т.к. оба они изометричны \mathbb{R}^{m+1}), отождествляя o и \bar{o} . После этого мы можем считать $D \subset T_{\bar{o}}M(c)$ и определить $D_{\bar{\Sigma}} := \exp_{\bar{o}} D$. Тогда $\bar{\Sigma} = \partial D_{\bar{\Sigma}} = \exp_{\bar{o}}(\partial D)$. Также, обозначим $\bar{B} := \exp_{\bar{o}}(\exp_o^{-1} B)$. Это будет шар радиуса r .

Для произвольной точки $q \in M^{m+1}$, $q \neq o$, введем следующее обозначение $\bar{q} = \exp_{\bar{o}}(\exp_o^{-1} q)$, где $\exp_o^{-1} q$ отождествляется с соответствующей точкой в $T_{\bar{o}}M(c)$ по изометрии.

Введем на многообразиях M^{m+1} и $M^{m+1}(c)$ полярные системы координат с

центрами в точках o и \bar{o} , соответственно. Тогда метрики многообразий могут быть записаны

$$M^{m+1} : ds^2 = dt^2 + g_{ij}(t, \theta)d\theta^i d\theta^j, \quad M^{m+1}(c) : ds^2 = dt^2 + G_{ij}(t, \theta)d\theta^i d\theta^j,$$

где, как и в лемме 2.16, t – параметр длины, $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^m)$ – координаты на стандартной евклидовой сфере $\mathbb{S}^m(1)$.

При этом, как мы отмечали в разделе 1, если секционные кривизны K_σ многообразия M^{m+1} отрицательны, то такая система координат будет регулярной всюду, кроме точки o . Если же секционные кривизны M^{m+1} – положительны, то система координат будет заведомо регулярной в шаре радиуса $\text{inj}_M(o)$ с выколотым центром. Таким образом, в силу условия теоремы, область $D_\Sigma \subset M^{m+1}$ лежит в области регулярности выбранной на M^{m+1} полярной системы координат.

Так как секционные кривизны $K_\sigma \geq c$ ($c = \pm k^2$ в зависимости от пункта), то по теореме сравнения 1.1, для любого ко-вектора (a_1, \dots, a_m) в $T_{(t,\theta)}^*M$ и $T_{(t,\theta)}^*M(c)$,

$$g^{ij}(t, \theta)a_i a_j \geq G^{ij}(t, \theta)a_i a_j, \quad (3.30)$$

где g^{ij} , G^{ij} – компоненты соответствующих обратных метрических тензоров.

Так как D_Σ – выпуклая область, гиперповерхность Σ может быть явно задана как $t = f(\theta^1, \dots, \theta^m)$. Тогда, по построению, $\bar{\Sigma}$ задается тем же уравнением.

Если ν и $\bar{\nu}$ – единичные внутренние нормали к Σ и $\bar{\Sigma}$ в точках $q \in \Sigma$ и $\bar{q} \in \bar{\Sigma}$, то, аналогично лемме 2.16,

$$-\nu(q) = \frac{\partial_t - g^{ij}\partial_i(f) \cdot \partial_j}{\sqrt{1 + |\nabla^\Sigma f|_M^2}} \quad \text{и} \quad -\bar{\nu}(\bar{q}) = \frac{\partial_t - G^{ij}\partial_i(f) \cdot \partial_j}{\sqrt{1 + |\nabla^{\bar{\Sigma}} f|_{M(c)}^2}}, \quad (3.31)$$

где $|\cdot|_M$, $|\cdot|_{M(c)}$ – модули соответствующих градиентов, посчитанные в метрике многообразия M^{m+1} и $M^{m+1}(c)$, соответственно.

Тогда в точках q и \bar{q} косинусы функций радиальных углов φ и $\bar{\varphi}$, определен-

ных для Σ , o и $\bar{\Sigma}$, \bar{o} , соответственно, в силу (3.31) равны

$$\cos \varphi(q) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla^\Sigma f|_M^2}} \quad \text{и} \quad \cos \bar{\varphi}(\bar{q}) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla^{\bar{\Sigma}} f|_{M(c)}^2}}.$$

В силу (3.30), $|\nabla^\Sigma f|_M \geq |\nabla^{\bar{\Sigma}} f|_{M(c)}$. А значит, из выражений для косинусов в соответствующих точках получаем

$$\cos \varphi(q) \leq \cos \bar{\varphi}(\bar{q}). \quad (3.32)$$

Пусть $p \in \Sigma \cap B$ – одна из точек касания вписанного шара B радиуса r с гиперповерхностью Σ , $\text{dist}(o, \Sigma) = \text{dist}(o, p) = r$, и пусть $\bar{p} \in \bar{\Sigma}$ – соответствующая ей по изометрии точка, $\text{dist}(\bar{o}, \bar{\Sigma}) = \text{dist}(\bar{o}, \bar{p}) = r$, $\bar{p} \in \bar{\Sigma} \cap \bar{B}$.

В многообразии $M^{m+1}(c)$ рассмотрим сферу $\mathcal{S}_\lambda(\bar{p})$ кривизны λ , проходящую через точку \bar{p} перпендикулярно геодезической $\bar{o}\bar{p}$ так, что точка \bar{o} лежит в соответствующем шаре $B_\lambda(\bar{p}) = D_{\mathcal{S}_\lambda(\bar{p})}$. Заметим, что $\text{dist}(\bar{o}, \mathcal{S}_\lambda(\bar{p})) = r$.

Для сферы $\mathcal{S}_\lambda(\bar{p})$ и точки $\bar{o} \in B_\lambda(\bar{p})$ определим функцию радиального угла, которую обозначим φ_λ . Тогда из теоремы 2.6 сравнения радиальных углов следует, что в точках $q \in \Sigma$ и $q_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda(\bar{p})$ таких, что $\tau_o(Q) = \tau_{\bar{o}}(q_\lambda)$ справедливо неравенство

$$\cos \varphi_\lambda(q_\lambda) \leq \cos \varphi(q). \quad (3.33)$$

Из (3.32) и (3.33) получаем, что в любых точках $\bar{q} \in \bar{\Sigma}$ и $q_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda(\bar{p})$ таких, что $\tau_{\bar{o}}(\bar{q}) = \tau_{\bar{o}}(q_\lambda)$ справедливо

$$\cos \varphi_\lambda(q_\lambda) \leq \cos \bar{\varphi}(\bar{q}).$$

Но тогда, по лемме 2.16, сфера $\mathcal{S}_\lambda(\bar{P})$ является опорной для гиперповерхности $\bar{\Sigma}$, а область $D_{\bar{\Sigma}}$ полностью содержится в шаре $B_\lambda(\bar{p})$:

$$D_{\bar{\Sigma}} \subset B_\lambda(\bar{p}). \quad (3.34)$$

Полученное включение справедливо для любой точки $\bar{p} \in \bar{\Sigma} \cap \bar{B}$. Рассмотрим

область

$$\mathcal{C} = \bigcap_{\bar{p} \in \bar{\Sigma} \cap \bar{B}} B_\lambda(\bar{p}).$$

По построению, гиперповерхность $\partial\mathcal{C}$ является полной и λ -выпуклой. Также, в силу (3.34),

$$D_{\bar{\Sigma}} \subset \mathcal{C}. \quad (3.35)$$

Применяя рассуждения, аналогичные таковым в доказательстве леммы 3.6, покажем, что шар \bar{B} является вписанным и для гиперповерхности $\partial\mathcal{C}$.

Действительно, так как шар B – вписанный для Σ , то, как известно, множество $\Sigma \cap B$ не содержится ни в одной открытой полусфере ∂B . По построению, тоже самое верно и для множества $\bar{\Sigma} \cap \bar{B}$. Предположим противное, пусть \bar{B} не является вписанным шаром для $\partial\mathcal{C}$. Тогда существует шар $B_1 \subset \mathcal{C}$ того же радиуса, не совпадающий с \bar{B} . Пусть o_1 – центр B_1 .

Обозначим π_0 и π_1 два вполне геодезических m -мерных подмногообразия $M^{m+1}(c)$, проходящих через точки \bar{o} и o_1 перпендикулярно геодезической $\bar{o}o_1$. Для произвольной точки $\bar{p} \in \pi_0 \cap \bar{B}$, пусть $p_1 \in \pi_1 \cap B_1$ будет такая точка, что p_1, o_1, \bar{p} и \bar{o} лежат в одном двумерном вполне геодезическом подпространстве, и геодезические отрезки $p_1o_1, \bar{p}\bar{o}$ лежат по одну сторону от геодезической o_1o .

И так как гиперповерхность $\partial\mathcal{C}$ является λ -выпуклой, то по лемме 1.17 любая меньшая дуга окружности кривизны λ для точек \bar{p} и p_1 содержится в \mathcal{C} . Выберем среди них такую дугу γ , которая образует с геодезическими $\bar{o}\bar{p}$ и o_1p_1 угол, больший $\pi/2$. Так как такое возможно сделать для любой точки $\bar{p} \in \pi_0 \cap \bar{B}$, то часть $\partial\bar{B}$, лежащая в том же полупространстве относительно π_0 , что и точка o_1 , не содержит ни одной точки $\partial\mathcal{C}$, а значит и множества $\bar{\Sigma} \cap \bar{B}$.

Таким образом, некоторые точки $\bar{p} \in \bar{\Sigma} \cap \bar{B}$ должны лежать на экваториальной окружности $\pi_0 \cap \partial\bar{B}$. Но в них опорная сфера кривизны λ перпендикулярна геодезической $\bar{o}\bar{p}$. Значит, дуга γ не содержится в этой сфере, что противоречит построению \mathcal{C} и тому, что γ лежит в \mathcal{C} . Пришли к противоречию, которое доказывает,

что шар \bar{B} радиуса r является вписанным для $\partial\mathcal{C}$.

Но тогда, в силу того, что $\partial\mathcal{C}$ является полной λ -выпуклой гиперповерхностью, для ширины $\max_{s \in \partial\mathcal{C}} \text{dist}(\bar{o}, s) - r$ сферического слоя с радиусами r и $\max_{s \in \partial\mathcal{C}} \text{dist}(\bar{o}, s)$, в который можно, очевидно, заключить гиперповерхность $\partial\mathcal{C}$, выполнены оценки из теоремы 3.10.

В силу (3.35),

$$\max_{s \in \bar{\Sigma}} \text{dist}(\bar{o}, s) - r \leq \max_{s \in \partial\mathcal{C}} \text{dist}(\bar{o}, s) - r.$$

А по построению,

$$\max_{s \in \bar{\Sigma}} \text{dist}(\bar{o}, s) - r = \max_{s \in \Sigma} \text{dist}(o, s) - r.$$

Следовательно,

$$\max_{s \in \Sigma} \text{dist}(o, s) - r \leq \max_{s \in \partial\mathcal{C}} \text{dist}(\bar{o}, s) - r,$$

из чего, с учетом теоремы 3.10, и получаются оценки для ширины сферического слоя в случае гиперповерхности, лежащей в римановом многообразии знакопостоянной секционной кривизны кривизны. Теорема доказана. □

3.4. Выводы к разделу 3

В данном разделе были получены оценки ширины и отношения радиусов сферического слоя, в который можно поместить полную вложенную λ - или λ_1, λ_2 -выпуклую гиперповерхность. Полученные результаты являются C^0 -оценками близости таких гиперповерхностей к сферам соответствующих пространств.

В частности, в подразделе 3.1 для модельных пространств был введен класс поверхностей, которые являются наименее “сферичными” среди всех λ_1, λ_2 -выпуклых гиперповерхностей. Слово наименее в предыдущем предложении поясняет доказанная в следующем подразделе 3.2 ключевая лемма сравнения радиусов описанных сфер (лемма 3.6). Используя эту лемму, были получены оценки для

ширины слоя для модельных пространств и полных вложенных λ_1, λ_2 -выпуклых (теорема 3.7) или λ -выпуклых (теорема 3.10) гиперповерхностей в них. Также, используя лемму сравнения, была доказана точная оценка для отношения радиусов слоя для λ_1, λ_2 -выпуклых гиперповерхностей в евклидовом пространстве (теорема 3.9). Тут стоит отметить, что для λ -выпуклых поверхностей отношение радиусов описанной и вписанной сфер может быть сколь угодно большим. Это означает, что для таких поверхностей не существует аналога теоремы 3.9. В конце подраздела 3.2, как следствия, были получены результаты C^0 сферической устойчивости для $\lambda, (1 + \varepsilon)\lambda$ -выпуклых поверхностей. Такие поверхности являются практически омбилическими.

В заключительном подразделе 3.3 оценка ширины сферического слоя переносится из модельных пространств (теорема 3.10) на случай римановых многообразий знакопостоянной кривизны (теорема 3.16).

В связи с результатами, полученными в данном разделе, естественно возникают несколько интересных вопросов и направлений дальнейших исследований, среди которых:

1. Как перенести результаты ключевой леммы сравнения (лемма 3.6) для λ_1, λ_2 -выпуклых гиперповерхностей с модельных пространств на произвольные римановы многообразия, например, ограниченной секционной кривизны? Если такое перенесение возможно, это автоматически даст оценки для ширины и отношения радиусов слоя в таком римановом пространстве.

2. Каковы аналоги результатов данного раздела в пространстве – времени для пространственноподобных гиперповерхностей ограниченной или зажатой нормальной кривизны?

Результаты данного раздела изложены в статьях [9], [19].

РАЗДЕЛ 4

ОБРАТНАЯ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ λ -ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

В этом разделе речь пойдет об изопериметрической задаче для полных λ -выпуклых гиперповерхностей в пространствах постоянной кривизны. Мы решим задачу минимизации ограничиваемой площади при фиксированной длине для замкнутых вложенных λ -выпуклых кривых в $M^2(c)$.

4.1. Изопериметрические свойства луночек в $M^2(c)$: формулировка результатов

Дадим два ключевых определения.

Определение 4.1. Для произвольного $\lambda > 0$, замкнутая выпуклая кривая в $M^2(c)$, составленная из двух равных дуг кривых постоянной геодезической кривизны, равной λ , называется λ -выпуклой луночкой.

Заметим, что в случае $c \geq 0$ или $c < 0$, $\lambda > \sqrt{-c}$, λ -выпуклая луночка есть граница пересечения двух кругов радиуса R_λ . Если $c < 0$, а $\lambda = \sqrt{-c}$, то луночка состоит из двух равных дуг орициклов, а когда $\lambda < \sqrt{-c}$ – из двух равных дуг эквидистант.

Для произвольной замкнутой вложенной λ -выпуклой кривой γ на $M^2(c)$ обозначим через $L(\gamma)$ и $A(\gamma)$ ее длину и площадь выпуклой области, которую она ограничивает.

Имеют место следующий результат, который составляет основное содержание данного раздела работы. Эти результаты выражают *изопериметрическое свойство λ -выпуклых луночек*.

Теорема 4.2. Пусть $\gamma \subset M^2(c)$ – замкнутая вложенная λ -выпуклая кривая, $\lambda > 0$.

Если $\gamma_0 \subset M^2(c)$ – λ -выпуклая луночка такая, что

$$L(\gamma) = L(\gamma_0),$$

то

$$A(\gamma) \geq A(\gamma_0),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\gamma = \gamma_0$.

4.2. Обратное изопериметрическое неравенство для λ -выпуклых кривых в $M^2(c)$

Изопериметрическое свойство λ -выпуклых луночек эквивалентно выполнению так называемого *обратного изопериметрического неравенства*. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. Пусть $\gamma \subset M^2(c)$ – замкнутая вложенная λ -выпуклая кривая, $\lambda > 0$.

Если L и A – соответственно, длина γ и площадь области, ограничиваемой γ , то

1. для евклидовой плоскости ($c = 0$),

$$A \geq \frac{L}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \sin \frac{L\lambda}{2}; \quad (4.1)$$

2. для сферического пространства ($c = k^2$ ($k > 0$)),

$$A \geq \frac{4}{k^2} \arctg \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2}}{4} L \right) \right) - \frac{L\lambda}{k^2}; \quad (4.2)$$

3. для плоскости Лобачевского ($c = -k^2$ ($k > 0$))

а) при $\lambda > k$,

$$A \geq \frac{L\lambda}{k^2} - \frac{4}{k^2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{4} L \right) \right); \quad (4.3)$$

б) при $\lambda = k$,

$$A \geq \frac{L}{k} - \frac{4}{k^2} \operatorname{arctg} \frac{kL}{4}; \quad (4.4)$$

в) при $k > \lambda > 0$,

$$A \geq \frac{L\lambda}{k^2} - \frac{4}{k^2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{k^2 - \lambda^2}}{4} L \right) \right). \quad (4.5)$$

Более того, во всех случаях равенство достигается только для λ -выпуклой луночки.

Эквивалентность изопериметрического свойства луночек и обратных изопериметрических неравенств устанавливается путем непосредственного подсчета зависимости площади луночки от ее длины. Эти зависимости собраны в следующей технической лемме:

Лемма 4.4. Если $\gamma_0 \subset M^2(c)$ – λ -выпуклая луночка, а $A(\gamma_0) = F(L(\gamma_0))$ – зависимость площади области D_{γ_0} от длины луночки γ_0 , то $F(\cdot)$ имеет вид:

1. для евклидовой плоскости ($c = 0$),

$$F: [0, 2\pi/\lambda] \rightarrow [0, +\infty), \quad F(x) = \frac{x}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \sin \frac{x\lambda}{2}; \quad (4.6)$$

2. для сферического пространства ($c = k^2$ ($k > 0$)), $F: [0, 2\pi/\sqrt{\lambda^2 + k^2}] \rightarrow$

$[0, +\infty)$ и

$$F(x) = \frac{4}{k^2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2}}{4} x \right) \right) - \frac{x\lambda}{k^2}; \quad (4.7)$$

3. для плоскости Лобачевского ($c = -k^2$ ($k > 0$))

а) при $\lambda > k$, $F: [0, 2\pi/\sqrt{\lambda^2 - k^2}] \rightarrow [0, +\infty)$ и

$$F(x) = \frac{\lambda x}{k^2} - \frac{4}{k^2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{4} x \right) \right); \quad (4.8)$$

б) при $\lambda = k$, $F: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ и

$$F(x) = \frac{x}{k} - \frac{4}{k^2} \operatorname{arctg} \frac{kx}{4}; \quad (4.9)$$

в) при $k > \lambda > 0$, $F: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ и

$$F(x) = \frac{\lambda x}{k^2} - \frac{4}{k^2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{k^2 - \lambda^2}}{4} x \right) \right). \quad (4.10)$$

При этом, во всех случаях функции $F(\cdot)$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми, строго выпуклыми и строго монотонно возрастающими на своих областях определения.

Доказательство. Доказательство леммы основано на непосредственных вычислениях.

1. Действительно, пусть γ_0 состоит из двух одинаковых дуг длины $x/2$ окружности радиуса $R_\lambda = 1/\lambda$, a и b – их две общие точки, o – центр одной из этих окружностей (см. рис. 4.1).

Тогда, площадь $F(x)$, ограничиваемая γ_0 , равна двум площадям сегмента, соответствующего дуге $\overset{\frown}{ab}$, видной из центра O под углом $\alpha = x\lambda/2$. Очевидно,

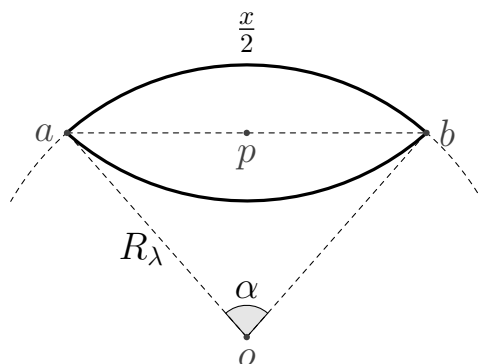


Рис. 4.1. λ -выпуклая луночка γ_0 длины x .

что площадь сектора aob равна $A_{\text{сект.}} = x/4\lambda$, а площадь треугольника $\triangle aob$ равна $A_{\text{треуг.}} = 1/2\lambda^2 \cdot \sin(x\lambda/2)$. Значит,

$$F(x) = 2(A_{\text{сект.}} - A_{\text{треуг.}}) = \frac{x}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \sin \frac{x\lambda}{2},$$

что и требовалось.

Функция F определена для всех возможных длин λ -выпуклых луночек. По теореме Бляшке (теорема 1.16), все эти длины не превосходят длины окружности радиуса $1/\lambda$. Поэтому функция F определена для всех значений на отрезке $[0, 2\pi/\lambda]$. Более того, на $(0, 2\pi/\lambda)$

$$F'(x) = \frac{1}{2\lambda} \left(1 - \cos \frac{x\lambda}{2} \right) > 0,$$

$$F''(x) = \frac{1}{4} \sin \frac{x\lambda}{2} > 0,$$

что и доказывает необходимые свойства функции F в случае 1.

2. Пусть теперь γ_0 лежит на сфере и состоит из двух дуг радиуса $R_\lambda = 1/k \operatorname{arccotg}(\lambda/k)$ (см. тот же рисунок 4.1). Если обозначить через β меньший угол между геодезическим сегментом ab и (произвольной) полукасательной к γ_0 в точке a (или b), то из формулы Гаусса – Бонне для луночки γ_0 получим

$$F(x) = \frac{1}{k^2} (4\beta - \lambda x). \quad (4.11)$$

Для нахождения угла β заметим, что длина окружности радиуса R_λ на сфере

равна $2\pi/k \cdot \sin(kR_\lambda) = 2\pi/\sqrt{\lambda^2 + k^2}$. Значит, угловая мера дуги $\overset{\circ}{ab}$ равна

$$\alpha = \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2}}{2}x.$$

Кроме этого, $\angle oab = \pi/2 - \beta$. Поэтому, если p – середина ab , то из прямоугольного треугольника $\triangle apo$, используя двойственную теорему косинусов

$$\cos kR_\lambda = \cos k|ao| = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

и подставляя R_λ , находим

$$\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2}}{4}x \right) \right).$$

Последнее равенство, вместе с (4.11), и дает (4.7). Более того, как и в евклидовом случае, F определена для всех длин от 0 до длины окружности радиуса R_λ . Как мы уже отмечали, эта длина равна $2\pi/\sqrt{\lambda^2 + k^2}$.

Покажем монотонность и выпуклость F . Действительно, для всех значений $x \in (0, 2\pi/\sqrt{\lambda^2 + k^2})$:

$$F'(x) = \frac{\lambda \sin^2 \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2}}{4}x \right)}{\lambda^2 + k^2 \cos^2 \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2}}{4}x \right)} > 0,$$

$$F''(x) = \frac{\lambda (\lambda^2 + k^2)^{3/2}}{4 \left(\lambda^2 + k^2 \cos^2 \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2}}{4}x \right) \right)^2} \cdot \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2}}{2}x \right) > 0.$$

Пункт 2 доказан.

Доказательства пункта 3 а) дословно повторяет доказательство выше. Докажем пункт 3 в). Доказательство пункта 3 б) аналогично пункту 3 в), но более простое, поэтому опускается.

3. в) Не ограничивая общности можем считать, что $k = 1$. Тогда $1 > \lambda > 0$, и луночка γ_0 состоит из двух равных дуг эквидистант длины $x/2$. Пусть, по прежнему, точка p – центр луночки, a и b – ее вершины.

Рассмотрим модель Пуанкаре геометрии Лобачевского в единичном круге $u^2 + v^2 = 1$ с центром в точке p и метрикой $ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 - u^2 - v^2)^2}$. Тогда в этой моде-

ли каждая из дуг $\overset{\circ}{ab}$ эквидистант кривизны λ есть дуга евклидовой окружности, пересекающей абсолют под некоторым углом β . Известно [4], что

$$\cos \beta = \lambda. \quad (4.12)$$

Пусть o – центр одной из таких окружностей и r – ее евклидов радиус. Тогда из $\triangle epo$ с учетом (4.12) по евклидовой теореме косинусов

$$l^2 = r^2 - 2r\lambda + 1, \quad (4.13)$$

где l – евклидова длина отрезка po , e – точка пересечения евклидовой окружности с центром в точке o с абсолютом.

Можем считать, что половина дуги $\overset{\circ}{ab}$ параметризована в виде

$$\begin{cases} u = r \cos t - l \\ v = r \sin t, \\ 0 \leq t \leq \varphi, \end{cases}$$

где $\varphi = \angle aop = \alpha/2$.

Тогда, с учетом (4.13), имеем

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} &= 2 \int_0^\varphi \frac{r dt}{1 - l^2 - r^2 + 2lr \cos t} = \int_0^\varphi \frac{dt}{\lambda - r + l \cos t} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \operatorname{arcth} \left(\frac{l + r - \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Решим последнее равенство относительно φ . Из $\triangle aop$, $l = r \cos \varphi$. Тогда, используя (4.13), получим

$$r = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\lambda + \sigma \sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi} \right),$$

где $\sigma = \pm 1$. А значит,

$$\begin{aligned} \frac{l + r - \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} &= \frac{r \sin \varphi - \lambda \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - \lambda^2}} = \frac{\sigma \sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi} + \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2} \sin \varphi} \\ &= \frac{\lambda \operatorname{ctg} \varphi + \sigma \sqrt{(\lambda \operatorname{ctg} \varphi)^2 - (1 - \lambda^2)}}{\sqrt{1 - \lambda^2}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Комбинируя (4.14) и (4.15), имеем

$$\lambda \operatorname{ctg} \varphi + \sigma \sqrt{(\lambda \operatorname{ctg} \varphi)^2 - (1 - \lambda^2)} = \sqrt{1 - \lambda^2} \operatorname{th} \left(x \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{8} \right). \quad (4.16)$$

Решив (4.16) относительно $\lambda \operatorname{ctg} \varphi$ (которое определяется однозначно), получим

$$\begin{aligned} \lambda \operatorname{ctg} \varphi &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \lambda^2} \left(\operatorname{th} \left(x \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{8} \right) + \operatorname{cth} \left(x \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{8} \right) \right) \\ &= \sqrt{1 - \lambda^2} \operatorname{cth} \left(x \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{4} \right), \end{aligned}$$

из чего вытекает искомое выражение для угла

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \operatorname{th} \left(x \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{4} \right) \right). \quad (4.17)$$

Таким образом, используя формулу Гаусса – Бонне и учитывая, что угол при вершине каждой луночки γ_0 в точности равен 2φ , получаем

$$F(x) = \lambda x - 4\varphi,$$

что вместе с (4.17) дает формулу (4.10).

Длина λ -выпуклой луночки при $1 > \lambda > 0$ на плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2(-1)$ может принимать любое положительное значение. Поэтому F определена на $[0, +\infty)$. Проверим условие монотонности и выпуклости вниз. Для произвольного $x > 0$ имеем

$$F''(x) = \frac{\lambda(1 - \lambda^2)^{3/2}}{4 \left(\lambda^2 - \operatorname{ch}^2 \left(x \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{4} \right) \right)^2} \cdot \operatorname{sh} \left(x \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{2} \right) > 0,$$

а ввиду того, что $F(0) = 0$, для любого $x > 0$ получаем $F'(x) > 0$. Утверждение 3.в) леммы 4.4, а вместе с ним и само утверждение, доказано.

□

Из доказанной леммы 4.4, очевидно, следует анонсированная в этом подразделе эквивалентность теоремы 4.2 и 4.3.

4.3. Обратная изопериметрическая задача для λ -выпуклых гиперповерхностей: существование решения

Наша стратегия доказательства теоремы 4.2 будет состоять в решении следующей *обратной изопериметрической задачи*

$$\begin{cases} A(\gamma) \longrightarrow \min, \\ L(\gamma) = \text{const}, \end{cases} \quad (4.18)$$

в классе замкнутых вложенных λ -выпуклых кривых $\gamma \subset M^2(c)$, λ – заданное положительное число.

Заметим, что по теореме прокатывания Бляшке (теорема 1.16), при $c \geq 0$ или $c < 0$, $\lambda > \sqrt{-c}$, с необходимостью $L(\gamma) \leq L(\mathcal{S}_\lambda)$. Если же $c < 0$, $\lambda \leq \sqrt{-c}$, то $L(\gamma)$ может принимать любое положительное значение. Покажем, что при допустимых значениях константы const задача (4.18) имеет решение.

Так как постановка задачи (4.18) не зависит от расположения кривых в $M^2(c)$, будем считать, что они все проходят через некоторую фиксированную точку $p \in M^2(c)$ (для $c > 0$, также, лежат в фиксированной открытой полусфере). Замкнутые вложенные λ -выпуклые, удовлетворяющие двум предположениям выше, назовем *допустимыми*. Введем Ω_λ – множество всех допустимых кривых.

Рассмотрим метрическое пространство $(\Omega_\lambda, d_{\mathcal{H}})$, где $d_{\mathcal{H}}$ – метрика Хаусдорфа в $M^2(c)$ [12, разд. 7.3]. Так как при предельных переходах в метрике Хаусдорфа сохраняется выпуклость фигур, а опорные прямые переходят в опорные прямые, то также сохраняется и λ -выпуклость. Значит, $(\Omega_\lambda, d_{\mathcal{H}})$ – полное метрическое пространство.

Кроме того, длина $L(\cdot)$ и площадь ограничиваемой области $A(\cdot)$ – непрерывные функционалы на $(\Omega_\lambda, d_{\mathcal{H}})$ (см. [3]). Для любого положительного числа a (в случае $c \geq 0$ или $c < 0$, $\lambda > \sqrt{-c}$, с необходимостью $a \leq L(\mathcal{S}_\lambda)$), подпространство $(\Omega_{\lambda,a}, d_{\mathcal{H}})$, где $\Omega_{\lambda,a} := \{\gamma \in \Omega_\lambda : L(\gamma) = a\}$, – вполне ограничено. Из полноты и вполне ограниченности получаем, что $(\Omega_{\lambda,a}, d_{\mathcal{H}})$ – компактное подпространство. А значит $A(\cdot)$ достигает на нем свое минимальное значение. Это и доказывает

существование решения обратной изопериметрической задачи (4.18).

Замечание 4.5. В контексте произвольных выпуклых тел последний факт известен как *теорема выбора Бляшке* [3], [12, разд. 7.3]: из любой бесконечной последовательности выпуклых тел в \mathbb{E}^m , лежащих внутри некоторого куба, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (пределом которой в метрике Хаусдорфа есть выпуклое тело).

Замечание 4.6. Заметим, что приведенное доказательство также без труда переносится на случай полных λ -выпуклых гиперповерхностей в пространствах постоянной кривизны. В классе таких поверхностей обратная изопериметрическая задача также имеет решение.

4.4. Лемма о дополнительной симметрии решения для обратной изопериметрической задачи

Оказывается, решения обратной изопериметрической задачи, т.е. задачи минимизации ограничиваемой площади при фиксированной длине, обладают определенной симметрией. Имеет место следующая лемма о дополнительной симметрии.

Лемма 4.7 (о дополнительной симметрии). *Если теорема 4.2 справедлива для центрально-симметричных или для симметричных относительно геодезической прямой замкнутых вложенных λ -выпуклых кривых, то она справедлива и для произвольных замкнутых вложенных λ -выпуклых кривых.*

Доказательство. Пусть $\gamma \subset M^2(c)$ – произвольная замкнутая вложенная λ -выпуклая кривая. Рассмотрим pq – диаметр γ , то есть геодезический отрезок наибольшей длины с концами на кривой. Такой отрезок существует в силу компактности области D_γ (причем в случае $c > 0$, D_γ лежит в открытой полусфере). Более того,

из формулы первой вариации [15] следует, что в точках p и q существуют опорные по отношению к γ геодезические такие, что диаметр pq им перпендикулярен. Обозначим части кривой γ , на которые она разбивается точками p и q , как $\gamma^{+/2}$ и $\gamma^{-/2}$.

Предположим, что теорема 4.2 верна для центральных кривых.

Пусть o – середина геодезического отрезка pq . Построим кривые γ^+ и γ^- следующим образом:

$$\gamma^\pm = \gamma^{\pm/2} \cup \left(\text{образ } \gamma^{\pm/2} \text{ при симметрии относительно } o \right).$$

В силу того, что pq – диаметр γ , построенные кривые будут замкнутыми вложенными λ -выпуклыми центрально – симметричными кривыми. По построению,

$$L(\gamma) = \frac{L(\gamma^+) + L(\gamma^-)}{2}, \quad A(\gamma) = \frac{A(\gamma^+) + A(\gamma^-)}{2}. \quad (4.19)$$

По условию леммы, теорема 4.2 верна для центрально – симметричных λ -выпуклых кривых. Поэтому если γ_0^+ и γ_0^- – λ -выпуклые луночки такие, что

$$L(\gamma^\pm) = L(\gamma_0^\pm), \quad (4.20)$$

то

$$A(\gamma^\pm) \geq A(\gamma_0^\pm). \quad (4.21)$$

Используя строгую выпуклость функции $F(\cdot)$ в силу леммы 4.4, а также учитывая равенства (4.19), (4.20) и неравенство (4.21), имеем

$$\begin{aligned} A(\gamma) &= \frac{A(\gamma^+) + A(\gamma^-)}{2} \geq \frac{A(\gamma_0^+) + A(\gamma_0^-)}{2} = \frac{F(L(\gamma_0^+)) + F(L(\gamma_0^-))}{2} \\ &\geq F\left(\frac{L(\gamma_0^+) + L(\gamma_0^-)}{2}\right) = F\left(\frac{L(\gamma^+) + L(\gamma^-)}{2}\right) \\ &= F(L(\gamma)) = F(L(\gamma_0)) = A(\gamma_0), \end{aligned}$$

где γ_0 – λ -выпуклая луночка той же длины, что и γ . Таким образом, неравенство $A(\gamma) \geq A(\gamma_0)$ доказано для произвольной λ -выпуклой кривой.

Проследим, когда в приведенной цепочке неравенств возможно равенство. В

силу строгой выпуклости $F(\cdot)$, равенство возможно только если $L(\gamma_0^+) = L(\gamma_0^-)$, то есть когда $\gamma_0^+ = \gamma_0^-$. С другой стороны, в силу справедливости теоремы 4.2 (по условию леммы) для центральных кривых, в (4.21) равенство достигается только когда $\gamma^\pm = \gamma_0^\pm$. А значит, по построению γ^\pm , в приведенной цепочке равенство достигается тогда и только тогда, когда $\gamma = \gamma_0$.

В случае, если теорема 4.2 верна для симметричных относительно геодезической прямой кривых, доказательство дословно повторяет изложенное выше с той только разницей, что pq выбирается идущим вдоль этой прямой, а кривые γ^\pm строятся симметричными относительно pq .

Лемма 4.7 о дополнительной симметрии доказана. □

Лемма о дополнительной симметрии позволяет при доказательстве теоремы 4.2 рассматривать только кривые с соответствующими симметриями. Мы будем пользоваться этим для упрощения доказательств в последующих подразделах.

4.5. Доказательство обратного изопериметрического свойства луночек в \mathbb{E}^2 и следствия из него

В этом разделе мы докажем теорему 4.2 для кривых на плоскости ($c = 0$). Не ограничивая общности можем считать $\lambda = 1$. Формализуем обратную изопериметрическую задачу (4.18) в этом случае.

В силу того, что D_γ – строго выпуклая область, кривая γ может быть задана при помощи так называемой *опорной функции* $s: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, определяемой как

$$s(t) := \langle \vec{\gamma}(t), (\cos t, \sin t) \rangle, \quad t \in [0, 2\pi],$$

где $\vec{\gamma}(t)$ – радиус-вектор из начала координат (точка O) в такую точку $\gamma(t)$ на кривой γ , в которой существует опорная прямая для γ с единичной внешней нормалью $(\cos t, \sin t)$ (такая прямая существует и единственна, в силу строгой выпуклости D_γ). С геометрической точки зрения, $|s(t)|$ – это расстояние от O до этой опорной прямой.

Известно, что опорная функция выпуклой кривой, как функция углового параметра, является $C^{1,1}$ -гладкой [13]. Более того, опорная функция однозначно определяет кривую, то есть γ может быть восстановлена по $s(\cdot)$ следующим образом:

$$\vec{\gamma}(t) = (s(t) \cos t - \dot{s}(t) \sin t, s(t) \sin t + \dot{s}(t) \cos t), \quad (4.22)$$

где \dot{s} – производная s по t . Так как $s \in C^{1,1}(\mathbb{S}^1)$, то почти всюду (по отношению к стандартной одномерной мере Лебега) на своей области определения существует вторая производная \ddot{s} и из (4.22) следует формула

$$\ddot{s}(t) + s(t) = R(t) \text{ п.в. на } [0, 2\pi], \quad (4.23)$$

где $R(t)$ – радиус кривизны γ в точке $\gamma(t)$. Для почти всех точек на γ , $R(t) = 1/k(t)$, где $k(t)$ – почти всюду корректно определенная кривизна кривой. Так как γ является 1-выпуклой кривой, то

$$0 \leq R(t) \leq 1 \text{ п.в. на } [0, 2\pi]. \quad (4.24)$$

Заметим, что $R(t) \equiv 0$ для $t \in (t_1, t_2) \subset [0, 2\pi]$ возможно только, когда $\{\gamma(t) : t \in (t_1, t_2)\}$ – вершина кривой γ . Мы говорим, что точка замкнутой кривой γ является вершиной, если в этой точке левая и правая полукасательные не совпадают. В тоже время, $R(t) \equiv 1$ для $t \in (t_1, t_2)$ возможно только, когда $\{\gamma(t) : t \in (t_1, t_2)\}$ является дугой окружности радиуса 1. Мы воспользуемся этими наблюдениями ниже.

Используя опорную функцию и радиус кривизны, выпишем выражения для длины $L(\gamma)$ кривой γ и площади $A(\gamma)$ области, которую она ограничивает:

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} d\sigma(t) = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{dt} dt = \int_0^{2\pi} R(t) dt \quad (4.25)$$

(где под $d\sigma$ понимается элемент длины дуги кривой),

$$A(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} s(t) d\sigma(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} s(t) \frac{d\sigma}{dt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} s(t) R(t) dt. \quad (4.26)$$

Используя условия (4.24) – (4.26), приходим к следующей формальной зада-

че:

$$\begin{aligned}
 A(\gamma) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} s(t)R(t)dt \rightarrow \min \\
 L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} R(t)dt = \text{const} \\
 \ddot{s}(t) + s(t) &= u(t) \text{ п.в. на } [0, 2\pi] \\
 0 \leq R(t) &\leq 1 \text{ п.в. на } [0, 2\pi]
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

в классе всех $C^{1,1}$ -гладких 2π -периодических функций s и измеримых функций $R(\cdot)$, обе заданы на $[0, 2\pi]$.

Для решения задачи (4.27) воспользуемся принципом максимума Понтрягина (см. подраздел 1.5). Идея использования принципа максимума Понтрягина, где в качестве управления берется кривизна или радиус кривизны кривой, встречалась ранее, в частности в работах [65], [58], [59] и [30].

По лемме о дополнительной симметрии (лемма 4.7), мы можем считать, что кривая γ симметрична относительно оси Oy (в стандартной декартовой системе координат xOy). Тогда $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ и $\dot{s}(\pi/2) = \dot{s}(-\pi/2) = 0$. Пусть $x_1 := s$, $x_2 := \dot{s}$ обозначают фазовые переменные и $u := R$ будет управляющий параметр. Тогда из (4.23),

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\
 \dot{x}_2(t) &= u(t) - x_1(t).
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

почти всюду на $[-\pi/2, \pi/2]$. Более того, так как $s \in C^{1,1}(\mathbb{S}^1)$, то обе функции x_1 , x_2 являются абсолютно непрерывными.

Переписывая (4.27) во введенных обозначениях, получаем следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x_1(t)u(t)dt \longrightarrow \min, \\
& \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u(t)dt = \text{const}, \\
& \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) - x_1(t) \end{cases} \quad \text{п.в. на } [-\pi/2, \pi/2], \\
& 0 \leq u(t) \leq 1 \quad \text{п.в. на } [-\pi/2, \pi/2], \\
& x_2(-\pi/2) = x_2(\pi/2) = 0.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Задача (4.29) корректно поставлена, в частности, если пара функций $(\mathbf{x}, u) = ((x_1(\cdot), x_2(\cdot)), u(\cdot))$ удовлетворяет (4.29), то (\mathbf{x}, u) является управляемым процессом, а $\{(\mathbf{x}, u) : t \in [-\pi/2, \pi/2]\}$ – допустимой траекторией в смысле определений подраздела 1.5.

Задача (4.29) имеет решение (см. подраздел 4.3, для кривых, имеющих ось симметрии, рассуждения, приведенные в этом подразделе, остаются верными, так как мы всегда можем считать, что все кривые имеют одну и ту же ось, а значит такую же ось симметрии будет иметь и предельная, в метрике Хаусдорфа, кривая). Пусть тогда $\{(\hat{\mathbf{x}}(t), \hat{u}(t)) : t \in [-\pi/2, \pi/2]\}$ – это решение, то есть оптимальная траектория в поставленной задаче оптимального управления. Тогда она должна удовлетворять принципу максимума Понтрягина (теорема 1.19). Запишем условия (i) – (v) для $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ (для краткости, везде далее мы опустим значок $\hat{\cdot}$, где это не приводит к путанице).

Функция Понтрягина для задачи (4.29) имеет вид

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{x}, u, \mathbf{p}, \mu_0, \mu_1) = -\mu_0 x_1 u + \mu_1 u + p_1 x_2 + p_2 (u - x_1), \tag{4.30}$$

а конечной лагранжиан – вид

$$l(\mathbf{x}(-\pi/2), \mathbf{x}(\pi/2)) = \mu_2 x_2(-\pi/2) + \mu_3 x_2(\pi/2),$$

где μ_0, μ_1, μ_2 и μ_3 – допустимые множители, удовлетворяющие условиям (i) и (ii).

Тогда, из условия трансверсальности (v) следует, что

$$p_1(-\pi/2) = p_1(\pi/2) = 0, \quad p_2(-\pi/2) = \mu_2, \quad p_2(\pi/2) = -\mu_3. \quad (4.31)$$

По условию (iii) сопряженные функции $p_1(\cdot), p_2(\cdot)$ почти всюду на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ должны удовлетворять сопряженной системе, которая в нашем случае имеет вид

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = \mu_0 u + p_2, \quad (4.32)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -p_1. \quad (4.33)$$

И наконец, решение (\mathbf{x}, u) задачи (4.29) удовлетворяет условию максимума (iv), а именно,

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{x}, u, \mathbf{p}, \mu_0, \mu_1) = \max_{v \in [0,1]} \mathcal{H}(t, \mathbf{x}, v, \mathbf{p}, \mu_0, \mu_1) \text{ п.в. на } [-\pi/2, \pi/2]. \quad (4.34)$$

Проанализируем (4.34) детальней. В нашем случае функция Понтрягина (4.30) является линейной по управлению u и может быть записана в виде $\mathcal{H} = u\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, где

$$\mathcal{H}_1 = p_2 - \mu_0 x_1 + \mu_1 \quad (4.35)$$

(заметим, что ввиду (4.33), функция \mathcal{H}_1 является непрерывно дифференцируемой на $(-\pi/2, \pi/2)$). Для таких задач, как мы уже отмечали в подразделе 1.5.2, оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{для } \mathcal{H}_1 > 0 \\ 0, & \text{для } \mathcal{H}_1 < 0 \\ \text{не определено,} & \text{для } \mathcal{H}_1 = 0 \end{cases} \quad \text{п.в. на } [-\pi/2, \pi/2].$$

Покажем, что абнормальные траектории не являются оптимальными. Для абнормальных траекторий $\mu_0 = 0$. Тогда, из сопряженных уравнений (4.32) и (4.33)

(решая их), получим $p_1(t) = -C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $p_2(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$, для некоторых констант C_1 и C_2 . Из условия трансверсальности (4.31) вытекает, что $C_2 = 0$, а значит $p_1(t) = -C_1 \cos t$ и $p_2(t) = C_1 \sin t$. При этом, функция переключения $\mathcal{H}_1 = p_2 + \mu_1$. Из вида этой функции вытекает, что $\mathcal{H}_1 \equiv 0$ только если $C_1 = 0 = \mu_1$, что влечет $0 = p_2(-\pi/2) = \mu_2$, $0 = p_2(\pi/2) = -\mu_3$ и противоречит условию нетривиальности (ii).

Значит, на абнормальной траектории нет особых дуг. Посчитаем количество вершин на профильной кривой, задаваемой абнормальной экстремалью. Вершина соответствует тем значениям t из некоторого отрезка, для которых $u \equiv 0$ и $p_2 + \mu_1 < 0$. Следовательно, $p_2(t) = C_1 \sin t < -\mu_1$ или никогда не выполняется, или выполняется для всех $t \in (t_0, \pi/2]$ или $t \in [-\pi/2, t_0)$, где t_0 – корень уравнения $C_1 \sin t = -\mu_1$. В обоих случаях мы получаем, что или профильная кривая, отвечающая абнормальной экстремали, вырождается в точку, или на ней не более 1 вершины. Ровно одной вершины быть не может, так как эта вершина должна совпадать с концами дуги единичной окружности, что невозможно. Если же на кривой нет вершин, то это единичная окружность. Для обоих крайних случаев (точка, единичная окружность) доказываемая теорема тривиальным образом верна.

Далее можем считать $\mu_0 \neq 0$ и положить (ввиду (i) и того, что множители определены с точностью до положительного сомножителя) $\mu_0 = 1$.

Проанализируем особые траектории для нашей задачи оптимального управления. Это поможет нам определить управления в случае $\mathcal{H}_1 = 0$. Оказывается, что эти траектории имеют очень простой геометрический смысл, который позволит найти решение рассматриваемой задачи минимизации.

Замечание 4.8. Аналогичное поведение особых траекторий мы увидим в задачах оптимального управления в $M^2(c)$.

Для особой траектории $\mathcal{H}_1 \equiv 0$ на некотором отрезке $(t_1, t_2) \subset [-\pi/2, \pi/2]$. Тогда вдоль соответствующей особой дуги имеем (используя (4.35), управляющую

систему (4.28) и сопряженную систему (4.32), (4.33))

$$\begin{aligned} p_2 &= x_1 - \mu_1, \\ \frac{d\mathcal{H}_1}{dt} &= -x_2 - p_1, \\ \frac{d^2\mathcal{H}_1}{dt^2} \Big|_{\text{вдоль особой дуги}} &= -(u - x_1) - (u + p_2) = -2u + \mu_1. \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что порядок q задачи (4.29) равен 1. В тоже время, вдоль любой особой дуги, как это следует из предыдущих вычислений,

$$(-1)^1 \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2\mathcal{H}_1}{dt^2} = 2 > 0,$$

что противоречит необходимому условию Лежандра – Клебша оптимальности особых траекторий (теорема 1.22). Значит, особые траектории нашей задачи не могут быть оптимальными.

Таким образом, на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ оптимальное управление принимает значения 0 или 1, с переключениями при переходе оптимальной траектории через особую дугу, отвечающую $\mathcal{H}_1 \equiv 0$. Найдем эту траекторию в явном виде.

Для этого сперва заметим, что из сопряженной системы (4.32), (4.33) следует, что почти всюду на $[-\pi/2, \pi/2]$

$$\frac{d}{dt}(p_1(t) \sin t + p_2(t) \cos t) = u(t) \sin t. \quad (4.36)$$

Если $x(t)$ – это координата кривой γ по оси Ox , то из формулы (4.22) восстановления кривой по опорной функции получаем, что $x(t) = x_1(t) \cos t - x_2(t) \sin t$. С учетом (4.28),

$$\dot{x}(t) = -u(t) \sin t \quad \text{п.в. на } [-\pi/2, \pi/2].$$

Тогда, из последнего равенства и (4.36) получаем следующий интеграл нашей задачи:

$$p_1(t) \sin t + p_2(t) \cos t + x(t) \equiv \text{const} \quad (4.37)$$

вдоль любой траектории, удовлетворяющей принципу максимума Понтрягина. Бо-

лее того, так как $x(\pi/2) = 0 = p_1(\pi/2)$, то

$$p_1(t) \sin t + p_2(t) \cos t + x(t) = 0 \text{ для всех } t \in [-\pi/2, \pi/2]. \quad (4.38)$$

Аналогично, что если $y(t)$ – координата кривой γ по оси Oy , то

$$y(t) = x_1(t) \sin t + x_2(t) \cos t, \quad \dot{y}(t) = u(t) \cos t \text{ п.в. на } [-\pi/2, \pi/2],$$

и из сопряженной системы получаем

$$p_1(t) \cos t - p_2(t) \sin t - y(t) = p_1(0) \text{ для всех } t \in [-\pi/2, \pi/2]. \quad (4.39)$$

Заметим, что $p_1(0)$ – некоторая константа для решения $\{\hat{x}, \hat{u}\}$.

Вернемся к нахождению особых траекторий. Мы знаем, что вдоль особых дуг таких траекторий $p_2 = x_1 - \mu_1$. Тогда из (4.33), $p_1 = -x_2$. Подставляя найденные p_1 и p_2 в (4.32), получим вдоль особой траектории $u = \mu_1/2$, где, с необходимостью, $\mu_1/2 \in (0, 1)$. Более того, подставляя эти p_1 и p_2 в (4.38) и (4.39), с учетом выражений для $x(t)$ и $y(t)$ через $x_1(t)$ и $x_2(t)$, будем иметь

$$\begin{aligned} x(t) &= \mu_1/2 \cdot \cos t, \\ y(t) &= \mu_1/2 \cdot \sin t - p_1(0)/2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Следовательно, кривая, отвечающая любой особой дуге произвольной особой траектории для задачи (4.29), есть окружность радиуса $\mu_1/2$ с центром в точке $(0, -p_1(0)/2)$ на оси Oy .

Напомним, что выпуклая кривая на плоскости называется *правильным 1-выпуклым n -угольником*, если она составлена из n равных дуг окружностей радиуса 1, соединенных под одинаковыми углами.

Найденный явный вид особой траектории поможет нам установить вид оптимальной траектории. А именно, имеет место следующая лемма.

Лемма 4.9. Пусть $\bar{\gamma}$ – правильный 1-выпуклый n -угольник ($n \geq 2$); тогда оптимальная кривая, соответствующая задаче (4.29), совпадает с многоугольником $\bar{\gamma}$

для некоторого n .

Доказательство. Выше мы показали, что оптимальное управление $\hat{u}(t)$ должно быть вида

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 1, & \text{для } \mathcal{H}_1 > 0 \\ 0, & \text{для } \mathcal{H}_1 < 0, \end{cases} \quad (4.41)$$

с переключениями, когда оптимальная траектория переходит через особую дугу особой траектории (в фазовой плоскости). Но также мы знаем, что любая особая дуга лежит на окружности \mathcal{S}_{sing} радиуса $\mu_1/2$ с центром в точке $O(0, -p_1(0)/2)$. При этом, переключения с 0 на 1 и наоборот происходят при переходе через \mathcal{S}_{sing} . Значит, оптимальная кривая должна иметь следующий радиус кривизны (возвращаясь к геометрическим обозначениям и считая, без ограничения общности, O началом координат):

$$R(t) = \begin{cases} 1, & \text{для } s(t) < \mu_1/2 \\ 0, & \text{для } s(t) \geq \mu_1/2, \end{cases} \quad \text{на } [0, 2\pi]. \quad (4.42)$$

Заметим, что так как управление определяется с точностью до множества меры 0, меняя его на таком множестве, если необходимо, мы действительно можем считать, что (4.42) справедливо на всем $[0, 2\pi]$.

Из вида (4.42) следует, что кривая γ состоит из дуг окружностей радиуса 1, соединяющихся в вершинах, соответствующих значению $R = 0$.

Пусть точка $p \in \gamma$ – вершина, а l_p, r_p – соответственно, левая и правая полукасательные к γ в p . Из (4.42) следует, что $\text{dist}(l_p, O) = \text{dist}(r_p, O) = \mu_1/2$, так как нормальные векторы к l_p и r_p в точности соответствуют моментам переключения. Следовательно,

$$\angle(pO, l_p) = \angle(pO, r_p), \quad (4.43)$$

где pO – луч, выходящий из p и проходящий через начало координат O .

Предположим, что $p, q \in \gamma$ – две последовательные вершины кривой, другими словами, p и q – крайние точки дуги единичной окружности $\gamma_{p,q} \subset \gamma$. Тогда

$\text{dist}(l_q, O) = \mu_1/2$ и $\varphi_{p,q} := \angle(Op, r_p) = \angle(Oq, l_q)$. Последнее равенство следует из однозначной определенности дуги окружности радиуса 1 двумя ее касательными и ориентацией. Тогда, длина дуги $\gamma_{p,q}$, соединяющей p и q , однозначно задается значениями $\mu_1/2$ и $\varphi_{p,q}$ (и радиусом $\gamma_{p,q}$, равным, в общем случае, $1/\lambda$).

Последний факт, вместе с (4.43) означает, что все дуги радиуса 1 между двумя вершинами оптимальной профильной кривой γ должны иметь одну и ту же длину L_0 , а угол между любыми двумя соседними дугами один и тот же и равен φ_0 .

Замечание 4.10. Заметим, что равенство дуг окружностей исключает возможность наличия бесконечного числа переключений за конечное время – так называемого феномена *чаттеринга* (см. [84]).

Из показанного и следует, что γ является правильным λ -выпуклым многоугольником.

□

Таким образом, из леммы 4.9 следует, что оптимальная кривая γ есть правильный 1-выпуклый n -угольник, составленный из равных дуг единичной окружности. Такой многоугольник вписан в некоторую окружность σ радиуса $r < 1$. Будем считать, что длина γ равна L , $L \in (0, 2\pi)$.

Пусть p_1, \dots, p_n – вершины многоугольника γ . Так как его периметр равен L , то в силу правильности получаем, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ длина стороны $p_i p_{i+1}$ равна L/n , а угол $\angle p_i O p_{i+1} = 2\pi/n$.

Тогда площадь A_i части γ , ограниченной углом $\angle p_i O p_{i+1}$ и дугой $p_i p_{i+1}$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ равна

$$A_0 := A_i = \frac{L}{2n} - r \sin \left(\frac{\pi}{n} - \frac{L}{2n} \right), \quad (4.44)$$

где для радиуса r справедливо

$$\sin \frac{L}{2n} = r \sin \frac{\pi}{n} \quad (4.45)$$

Учитывая (4.44) и (4.45), для площади многоугольника γ получаем

$$A(\gamma) = A(n) = nA_0 = \frac{L}{2} - n \frac{\sin \frac{L}{2n} \sin \left(\frac{\pi}{n} - \frac{L}{2n} \right)}{\sin \frac{\pi}{n}} \quad (4.46)$$

Так как n – это число сторон криволинейного многоугольника, то в (4.46) $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$.

Покажем, что площадь $A(n)$ будет достигать своего минимального значения при $n = 2$, то есть когда γ – луночка. Для этого рассмотрим функцию

$$F(t) := \frac{L}{2} - \frac{\sin \left(\frac{Lt}{2} \right) \sin \left(\pi t - \frac{Lt}{2} \right)}{t \sin(\pi t)},$$

принимаящую при $t = \frac{1}{n}$ значения $A(n)$.

Покажем, что $F(t)$ строго монотонно убывает при $0 < t \leq 1/2$. Для этого перепишем $F(t)$ в виде

$$F(t) = \frac{L}{2} - \frac{1}{t \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{Lt}{2} \right) + \operatorname{ctg} \left(\pi t - \frac{Lt}{2} \right) \right)} \quad (4.47)$$

Из (4.47) следует, что строгое монотонное убывание $F(t)$ при $0 < t \leq 1/2$ равносильно строгому монотонному убыванию функции

$$f(t) := t \operatorname{ctg} (Lt/2) + t \operatorname{ctg} ((\pi - L/2)t)$$

на том же промежутке. Заметим, что

$$0 < \frac{L}{2} < \pi \text{ и } 0 < \pi - \frac{L}{2} < \pi. \quad (4.48)$$

На промежутке $0 < t \leq 1/2$ рассмотрим функцию $g(t) = t \cot(bt)$, где $0 < b < \pi$. Имеем

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\sin(2bt) - 2bt}{2 \sin^2(bt)} < 0$$

так как $0 < 2bt \leq \pi$, а на $(0; \pi]$ мы знаем, что $\sin x < x$. Значит, на указанном промежутке $g(t)$ строго монотонно убывает. Из этого, с учетом замечания (4.48), следует, что тем же свойством и на том же промежутке обладает и $f(t)$ (как сумма монотонных). А значит, площадь $A(n)$ достигает своего минимума при $n = 2$, то

есть когда γ – λ -выпуклая луночка.

Теорема 4.2 для $c = 0$ доказана.

4.5.1. Следствие: теорема Бляшке – Лебега. Оказывается, из доказательства изопериметрического свойства λ -выпуклых луночек на евклидовой плоскости можно получить, как следствие, известную теорему Бляшке – Лебега.

Для ее формулировки напомним, что замкнутая вложенная строго выпуклая кривая $\gamma \subset \mathbb{E}^2$ называется *кривой постоянной ширины d* , если расстояние между двумя произвольными параллельными опорными прямыми для γ (а такие всегда найдутся) равно d .

Другими словами, на языке опорной функции $s(\cdot)$ кривой, γ – кривая постоянной ширины d , если

$$s(t) + s(-t) = d \quad \text{для всех } t \in [-\pi, \pi]. \quad (4.49)$$

Окружность радиуса $d/2$ является кривой постоянной ширины d . Еще одной кривой постоянной ширины является так называемый *треугольник Рело*, который совпадает с правильным $1/d$ -выпуклым треугольником, вершины которого образуют правильный треугольник со стороной d . Для заданного d существует, с точностью до движения, ровно один треугольник Рело.

Имеет место следующая теорема, впервые доказанная В. Бляшке [33] и независимо А. Лебегом [69] (см. другие способы доказательства в [58, 60]).

Теорема Бляшке – Лебега. *Среди всех кривых постоянной ширины d треугольник Рело ограничивает наименьшую площадь.*

Доказательство. Как и в случае обратной изопериметрической задачи, задача минимизации ограничиваемой площади при фиксированной ширине имеет решение.

Более того, известно, что все кривые постоянной ширины d имеют одну и ту же длину, равную πd (теорема Барбье, [3, стр. 180]), а из соотношения (4.49) также следует, что все кривые постоянной ширины d являются (замкнутыми вло-

женными) $1/d$ -выпуклыми кривыми [60].

Решим более широкую задачу: минимизировать площадь $A(\gamma)$ при фиксированной длине $L(\gamma) = \pi d$ в классе $1/d$ -выпуклых кривых γ . По доказанной теореме 4.2 (для $c = 0$), решением будет $1/d$ -выпуклая луночка длины πd . Но такая луночка не является кривой постоянной ширины. В тоже время, из доказательства выше следует, что кривая, которая доставляет минимум $A(\gamma)$ и не является луночкой, непременно должна быть $1/d$ -выпуклым треугольником (в силу монотонности функции $F(t)$ выше). $1/d$ -выпуклый треугольник длины πd является треугольником Рело. В более широкой задаче он является “пред”-оптимальным. Следовательно, в задаче минимизации $A(\gamma)$ в классе кривых γ постоянной ширины d он является решением. Теорема доказана. \square

Замечание 4.11. До сих пор открытой остается многомерная проблема Бляшке – Лебега, в общем случае ответ не известен даже в \mathbb{E}^3 . Для трехмерного евклидова пространства гипотеза состоит в том, что так называемая *поверхность Менье* ограничивает минимальный объем среди всех поверхностей заданной постоянной ширины (см. [26]).

4.6. Доказательство обратного изопериметрического свойства луночек в \mathbb{S}^2 и \mathbb{H}^2 и следствия из него

В этом разделе мы докажем теорему 4.2 в случае $c \neq 0$. Мы проведем большинство рассуждения для сферы ($c > 0$). В пространстве Лобачевского все опущенные выкладки выполняются аналогично, а порой и дословно.

Общая схема доказательства будет похожа на доказательство в \mathbb{E}^2 .

Начнем со введения аналога опорной функции. Пусть $O \in M^2(c)$ – точка внутри D_γ (пока считаем c – произвольным). Введем на плоскости $M^2(c)$ полярную систему координат с началом в точке O с угловым параметром $\theta \in [0, 2\pi)$. Для каждого геодезического луча Ol , выходящего из O под углом θ с некоторым фиксированным направлением, рассмотрим перпендикулярную к нему геодезическую, опорную для кривой γ в некоторой точке p (в силу ограничений на кривизну

кривой, такая геодезическая всегда существует, и точка p – единственна). Обозначим $h(\theta)$ расстояние от точки O до этой геодезической, взятое вдоль луча Ol и будем называть $h(\cdot)$ опорной функцией кривой γ .

Заметим, что строго выпуклая кривая восстанавливается по ее опорной функции однозначно как огибающая соответствующего семейства геодезических линий.

Контактным радиусом кривизны кривой $\gamma \subset M^2(c)$ назовем величину

$$g(\theta) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{tg}(\sqrt{c}h(\theta)), & \text{при } c > 0 \\ h(\theta), & \text{при } c = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{th}(\sqrt{-c}h(\theta)), & \text{при } c < 0. \end{cases}$$

Замечание 4.12. Заметим, что для λ -выпуклых кривых ($\lambda > 0$) в случае $c = k^2 > 0$ мы всегда можем выбрать начало системы координат так, чтобы $h(\theta) \leq R_\lambda = 1/k \operatorname{arccctg} \lambda/k_1 < \pi/2k$, или эквивалентно, $g(\theta) \leq 1/\lambda$ для всех $\theta \in [0, 2\pi)$. Это следует из теоремы Бляшке (теорема 1.16). Везде далее будем считать, что в сферическом случае начало координат выбирается именно так.

Следующее утверждение является обобщением теоремы Барбье.

Утверждение 4.13. Пусть $\gamma \subset M^2(c)$ – замкнутая вложенная λ -выпуклая кривая,

$R(\cdot)$ и $g(\cdot)$ – функции ее радиуса и контактного радиуса кривизны, соответственно. Тогда

но. Тогда

$$R = \frac{g'' + g}{\left(1 + \frac{cg'^2}{1+cg^2}\right)^{3/2}} \text{ для п.в. } \theta \in [0, 2\pi] \quad (4.50)$$

(тут штрихом обозначена производная функции по θ).

Доказательство. При $c = 0$ – это классическая формула (4.23). Докажем при $c > 0$.

В случае $c < 0$ – доказательство аналогично.

Не ограничивая общности можем считать $c = 1$ и будем обозначать $\mathbb{S}^2(1)$ как \mathbb{S}^2 .

Введем в рассмотрение $l_\gamma \subset \mathbb{S}^2$ – семейство всех опорных к γ геодезических линий. Для произвольной геодезической $l \in l_\gamma$ определим $\xi(l)$ – единичный нормальный вектор к l , внешний по отношению к кривой γ . Заметим, что если в точке $l \cap \gamma$ геодезическая l является касательной к γ , то $\xi(l)$ будет также вектором внешней нормали к кривой.

Тогда единичные нормали ξ порождают отображение

$$\begin{aligned} \xi: l_\gamma &\rightarrow \mathbb{S}^2, \\ l &\mapsto \xi(l), \end{aligned} \tag{4.51}$$

которое называется *полярным отображением* кривой γ . Кривая $\gamma^* \subset \mathbb{S}^2$, определяемая как $\gamma^* = \xi(l_\gamma)$, называется *полярным образом* γ (или *двойственной кривой*).

Заметим, что в силу строгой выпуклости кривой γ полярное отображение является биекцией l_γ и γ^* . Более того, $(\gamma^*)^* = \gamma$.

Оказывается, что задание полярной кривой эквивалентно заданию исходной кривой при помощи ее опорной функции. А именно, пусть на сфере введена полярная система координат (t, θ) с началом в точке O и $h(\theta)$ – опорная функция кривой γ . Тогда из определения полярного отображения (4.51) легко следует, что если рассматривать двойственную кривую γ^* лежащей на той же сфере, что и γ , то в полярной системе координат она будет задаваться

$$t = \frac{\pi}{2} + h(\theta). \tag{4.52}$$

Из (4.52) следует, что при полярном отображении окружность радиуса r переходит в окружность радиуса $\pi/2 - r$, геодезическая кривизна которой, очевидно, обратна кривизне исходной окружности.

Отсюда легко вытекает еще одно важное для нас свойство полярного отображения (4.51). А именно, если γ – замкнутая вложенная λ -выпуклая кривая, то γ^* будет замкнутой вложенной $1/\lambda$ -вогнутой кривой. Из этого моментально следует, что кривая γ^* является $C^{1,1}$ гладкой, что, в силу (4.52), влечет $C^{1,1}$ гладкость

опорной функции $h(\cdot)$. Тогда, по теореме Радемахера, γ^* почти всюду C^2 -гладкая, то есть у γ^* почти всюду определена геодезическая кривизна k_g^* . Покажем, что

$$k_g^*(\theta) = R(\theta) \text{ п.в. на } [0, 2\pi), \quad (4.53)$$

где $R(\theta)$ – радиус кривизны кривой γ . При этом, в тех точках, где определена и не обнуляется k_g^* определена кривизна $k_g(\theta) \neq 0$ кривой γ и $R(\theta) = 1/k_g(\theta)$. Если же $k_g^* \equiv 0$ на вдоль некоторой дуги γ_g^* , то при полярном отображении эта дуга переходит в вершину, радиус кривизны в которой $R(\theta) = 0$, т.е. (4.53) по прежнему выполняется.

Для регулярных кривых равенство (4.53) является известным, но, за неимением точной ссылки, мы приведем его доказательство для полноты изложения.

Можем считать, что кривая $\gamma^* \subset \mathbb{S}^2 \subset (\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ задана в своей натуральной параметризации радиус вектором $r(s^*)$, $\langle r, r \rangle = 1$. Пусть ξ^* – внутренняя единичная нормаль к γ^* .

Так как все вектора в рассмотрении единичной длины, и γ^* лежит на сфере, то

$$\langle r', \xi^* \rangle = \langle r, \xi^{*'} \rangle = 0, \quad (4.54)$$

$$\langle r', r \rangle = \langle \xi^{*'}, \xi^* \rangle = 0, \quad (4.55)$$

где штрихом обозначена производная по параметру s^* .

Из (4.54) получаем

$$\langle r, \xi^{*'} \rangle = 0. \quad (4.56)$$

Следовательно, вектор r является вектором единичной нормали к полярной кривой γ как кривой в \mathbb{S}^2 , причем эта кривая задается радиус-вектором ξ^* .

Все дальнейшие рассуждения будем вести в точке, где определена и не обнуляется геодезическая кривизна k_g^* кривой γ^* . Тогда в этой точке

$$k_g^* = \langle r'', \xi^* \rangle, \quad (4.57)$$

из чего, учитывая (4.54),

$$\langle r', \xi^{*'} \rangle = -k_g^*. \quad (4.58)$$

Из (4.55) и (4.56) следует, что вектор $\xi^{*'}$ коллинеарен вектору r' . Это вместе с (4.58) означает, что

$$\xi^{*' } = -k_g^* r'. \quad (4.59)$$

Пусть s – параметр длины дуги γ . Тогда из (4.59) имеем

$$\frac{ds}{ds^*} = k_g^*, \quad \frac{d\xi^*}{ds} = -r'. \quad (4.60)$$

Из последнего соотношения следует, что определена вторая производная вектора ξ^* . Следовательно, используя (4.56) и (4.58),

$$\langle \xi^{*''}, r \rangle = k_g^*. \quad (4.61)$$

Окончательно, относительно нормали r , при помощи (4.58) и (4.60), получаем

$$R = \left\langle \frac{d^2 \xi^*}{ds^2}, r \right\rangle^{-1} = \langle \xi^{*''}, r \rangle^{-1} \left(\frac{ds}{ds^*} \right)^2 = k_g^*, \quad (4.62)$$

что и требовалось.

Таким образом, в силу доказанного свойства (4.53), чтобы получить формулу (4.50) нам достаточно просто вычислить геодезическую кривизну кривой γ^* , заданной в полярной системе координат с метрикой $ds^2 = dt^2 + \sin^2 t d\theta^2$ уравнением (4.52). При этом стоит обратить внимание, что так как начало полярной системы координат и полярная кривая лежат в разных полусферах, то при задании (4.52) кривизна γ^* получится отрицательной. Поэтому, считая $k_g^* \geq 0$, при подсчетах следует обратить знак. Проведя стандартные вычисления, получим

$$R = k_g^* = \frac{h'' \cos h + 2h'^2 \sin h + \cos^2(h) \sin h}{(h'^2 + \cos^2(h))^{3/2}}. \quad (4.63)$$

И наконец, сделав замену $h(\theta) = \operatorname{arctg} g(\theta)$, равенство (4.63) преобразуется

к виду

$$R = \frac{g'' + g}{\left(1 + \frac{g'^2}{1+g^2}\right)^{3/2}},$$

что и требовалось.

Как мы уже говорили, в случае пространства Лобачевского рассуждения аналогичны. Для этого достаточно рассмотреть модель плоскости Лобачевского в верхней полости двухполостного гиперboloида, считая начало координат O – вершиной этой полости. При этом, полярная кривая γ^* будет пространственноподобной кривой в двумерном пространстве де Ситтера \mathbb{S}_1^2 [57]. Подразумевая под $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение в объемлющем пространстве Минковского, все выкладки останутся в силе. При этом, в \mathbb{S}_1^2 расстояние меряется от нулевого временного сечения \mathcal{S}_0 . (Также можно провести непосредственный подсчет радиуса кривизны γ в терминах $h(\cdot)$, не прибегая к полярному преобразованию, см. [54]). Утверждение 4.13 доказано.

□

Продолжим доказательство теоремы 4.2 в случае $c = 1$. Для $c < 0$ все дальнейшие рассуждения проводятся аналогично.

Для формализации задачи, помимо уже полученного утверждения 4.13, нам понадобятся выражения для длины $L(\gamma)$ кривой γ и площади $A(\gamma)$ области, которую она ограничивает в терминах контактного радиуса кривизны $g(\theta)$ и радиуса кривизны $R(\theta)$. Не ограничивая общности можем также считать γ 1-выпуклой кривой.

Используя (4.60), (4.62) и полярное уравнение (4.52) для двойственной кривой, получим

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{ds^*} \frac{ds^*}{d\theta} = R \sqrt{h'^2 + \cos^2(h)} = R \frac{\sqrt{1 + g^2 + g'^2}}{1 + g^2}. \quad (4.64)$$

Значит, длина γ может быть записана в терминах g и R следующим образом:

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} ds(\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} R \frac{\sqrt{1+g^2+g'^2}}{1+g^2} d\theta. \quad (4.65)$$

Далее, выразим ограничиваемую площадь $A(\gamma)$ через $g(\theta)$. Если $\{P_i: i \in I\} \subset \gamma$ – не более чем счетное множество вершин кривой γ , то по теореме Гаусса – Бонне

$$A(\gamma) = 2\pi - \int_{\gamma} \frac{1}{R(s)} ds - \sum_{i \in I} \varphi_i, \quad (4.66)$$

где φ_i – углы поворота касательной в вершинах P_i , $i \in I$. Используя (4.64), мы можем переписать (4.66) таким образом:

$$A(\gamma) = 2\pi - \int_{[0,2\pi] \setminus \bigcup_{i \in I} [\alpha_i, \beta_i]} \frac{\sqrt{1+g^2+g'^2}}{1+g^2} d\theta - \sum_{i \in I} \varphi_i, \quad (4.67)$$

где интервалы $[\alpha_i, \beta_i]$ значений θ соответствуют вершине P_i . Покажем, что, на самом деле, для всех $i \in I$

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{\sqrt{1+g^2+g'^2}}{1+g^2} d\theta = \varphi_i. \quad (4.68)$$

Действительно, из (4.50) следует, что контактный радиус кривизны вершины P_i равен

$$g(\theta) = \operatorname{tg}(u_i) \cos(\theta - \theta_i), \quad (4.69)$$

где (u_i, θ_i) – полярные координаты P_i , а u_i – расстояние от начала координат O до P_i . Подставляя (4.69) в левую часть (4.68), получим

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{\sqrt{1+g^2+g'^2}}{1+g^2} d\theta &= \cos u_i \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{1}{\cos^2 u_i + \sin^2 u_i \cos^2(\theta - \theta_i)} d\theta \\ &= \operatorname{arctg}(\cos u_i \cdot \operatorname{tg}(\theta - \theta_i)) \Big|_{\alpha_i}^{\beta_i}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Предположим, что φ_{α_i} и φ_{β_i} есть углы между соответствующими α_i и β_i полука-

сательными к γ и координатной линией $u = u_i$ в точке $P_i = (u_i, \theta_i)$; тогда

$$\varphi_i = \varphi_{\beta_i} - \varphi_{\alpha_i}. \quad (4.71)$$

Более того, непосредственные вычисления на сфере показывают, что

$$\operatorname{tg} \varphi_{\alpha_i} = \cos u_i \cdot \operatorname{tg}(\alpha_i - \theta_i), \quad \operatorname{tg} \varphi_{\beta_i} = \cos u_i \cdot \operatorname{tg}(\beta_i - \theta_i).$$

Последние равенства вместе с (4.70) и (4.71) доказывают предположение (4.68).

Таким образом, комбинируя (4.67) и (4.68), окончательно получаем

$$A(\gamma) = \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{1 + g^2 + g'^2}}{1 + g^2} \right) d\theta. \quad (4.72)$$

Таким образом, нам нужно минимизировать $A(\gamma)$ при условии $L(\gamma) = L_0 = \text{const}$ и с учетом (4.50). Как и в евклидовом случае, интерпретируем эту задачу как задачу оптимального управления, где для $t := \theta$, $u(t) := R(t)$ – управление, $x_1(t) := g(t)$, $x_2(t) = \dot{x}_1(t) = g'(\theta)$ – фазовые переменные.

Заметим, что в силу 1-выпуклости кривой γ , имеем ограничение

$$0 \leq u(t) \leq 1 \text{ п.в. на } [0, 2\pi]. \quad (4.73)$$

Тогда переписывая (4.50), (4.65), (4.72) и (4.73) с учетом введенных обозначений, приходим к следующей формальной задаче:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}}{1 + x_1^2} \right) dt \rightarrow \min \\
& \int_0^{2\pi} u \frac{\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}}{1 + x_1^2} dt = L_0 \\
& \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \left(\frac{1 + x_1^2 + x_2^2}{1 + x_1^2} \right)^{\frac{3}{2}} - x_1 \end{cases} \quad \text{п.в. на } [0, 2\pi] \\
& 0 \leq u(t) \leq 1 \quad \text{п.в. на } [0, 2\pi] \\
& x_1(0) = x_1(2\pi) \\
& x_2(0) = x_2(2\pi).
\end{aligned} \tag{4.74}$$

При этом управление $u(t)$ – ограниченная измеримая функция на $[0, 2\pi]$, а в силу замечания 4.12 и того, что $h(\theta) \in C^{1,1}([0, 2\pi))$, фазовая переменная $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ – абсолютно непрерывная на $[0, 2\pi)$ функция. Также, все функции, входящие в функционал, интегральное ограничение и управляющую систему, очевидно, непрерывны по совокупности переменных вместе с их производными по \mathbf{x} .

Таким образом, пара (\mathbf{x}, u) является управляемым процессом в смысле определения 1.18, а соответствующая траектория $\{(\mathbf{x}(t), u(t)) : t \in [0, 2\pi)\}$, удовлетворяющая интегральному ограничению и граничным условиям задачи (4.74), будет допустимой траекторией.

Ввиду результатов подраздела 4.3, задача (4.74) имеет решение. Следовательно, выполнение принципа максимума Понтрягина является критерием оптимальности траектории.

Пусть $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ – оптимальная траектория задачи (4.74). Тогда для нее выполнены условия (i) – (v) принципа максимума, то есть найдутся числовые множители $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}$ и абсолютно непрерывные на $[0, 2\pi)$ функции $p_1(t), p_2(t)$, такие, что $\lambda_0 \geq 0$ и функции p_i являются решением сопряженной системы п.в. на $[0, 2\pi)$. Эта

система в нашем случае будет иметь вид

$$\dot{p}_1 = p_2 \left(1 + \frac{3ux_1x_2^2\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}{(1+x_1^2)^{\frac{5}{2}}} \right) + \frac{x_1(\mu_0 + \mu_1u)(1+x_1^2+2x_2^2)}{(1+x_1^2)^2\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}, \quad (4.75)$$

$$\dot{p}_2 = -p_1 - p_2 \frac{3ux_2\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}{(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x_2(\mu_0 + \mu_1u)}{(1+x_1^2)\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}, \quad (4.76)$$

и для функции Понтрягина, которая для системы (4.74) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}, \mu_0, \mu_1) = & p_1x_2 + p_2 \left(u \left(\frac{1+x_1^2+x_2^2}{1+x_1^2} \right)^{\frac{3}{2}} - x_1 \right) \\ & + \mu_1 \left(u \frac{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}{1+x_1^2} \right) - \mu_0 \left(1 - \frac{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}{1+x_1^2} \right), \end{aligned} \quad (4.77)$$

выполнено условие максимума

$$\mathcal{H}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}, \mathbf{p}, \mu_0, \mu_1) = \max_{v \in [0,1]} \mathcal{H}(\hat{\mathbf{x}}, v, \mathbf{p}, \mu_0, \mu_1) \text{ п.в. на } [0, 2\pi]. \quad (4.78)$$

Как и в евклидовом случае, функция Понтрягина (4.77) линейна по переменной u и может быть записана в виде

$$\mathcal{H} = u\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2,$$

где

$$\mathcal{H}_1 = \mu_1 \frac{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}{1+x_1^2} + p_2 \left(\frac{1+x_1^2+x_2^2}{1+x_1^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (4.79)$$

Тогда, в силу (4.78), искомое оптимальное управление в задаче (4.74) имеет вид (как и в евклидовом случае, для краткости, оптимальную траекторию $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ мы будем просто обозначать (\mathbf{x}, u))

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } \mathcal{H}_1 > 0 \\ 0, & \text{при } \mathcal{H}_1 < 0 \\ \text{не определено,} & \text{при } \mathcal{H}_1 = 0 \end{cases} \quad \text{п.в. на } [0, 2\pi]. \quad (4.80)$$

Покажем, что никакая особая экстремаль задачи (4.74) не может быть оптимальной.

Из (4.79) условие $\mathcal{H}_1 = 0$ равносильно тому, что на особой дуге особой траектории

$$p_2 = -\mu_1 \frac{\sqrt{1+x_1^2}}{1+x_1^2+x_2^2}. \quad (4.81)$$

Подставляя полученное $p_2(t)$ в дифференциальное уравнение (4.76) и решая последнее относительно $p_1(t)$, после всех необходимых сокращений получим, что на особой дуге особой экстремали

$$p_1 = x_2 \frac{\mu_1 x_1 \sqrt{1+x_1^2} - \mu_0 \sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}{(1+x_1^2)(1+x_1^2+x_2^2)}. \quad (4.82)$$

Но при этом, найденные $p_1(t)$ и $p_2(t)$ должны удовлетворять оставшемуся уравнению (4.75) из сопряженной системы. Подставляя p_1 и p_2 в это уравнение и упрощая получившееся выражение используя значения для \dot{x}_1 и \dot{x}_2 из (4.74) приходим к уравнению

$$\frac{\mu_1 - \mu_0 u}{(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Следовательно, на всей особой дуге должно выполняться условие

$$\mu_1 - \mu_0 u(t) \equiv 0. \quad (4.83)$$

Если $\mu_0 = 0$, то и $\mu_1 = 0$, а из (4.81) и (4.82) следует, что тогда и $p_1 \equiv p_2 \equiv 0$ вдоль особой дуги, что противоречит условию нетривиальности (ii). Поэтому можем рассматривать только нормальные особые траектории с $\mu_0 = 1$.

С учетом сказанного выше, выполнение (4.83) возможно только, если $u(t) \equiv \mu_1$ вдоль особой дуги. Но так как константа μ_1 не зависит от выбора дуги, то управление должно быть тождественно равно этой константе на любой особой дуге особой траектории. Тогда (4.80) может быть переписано следующим образом (при этом мы можем изменить управление на множестве меры ноль так, чтобы

последующее было верным на всем отрезке $[0, 2\pi]$)

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } \mathcal{H}_1 > 0 \\ 0, & \text{при } \mathcal{H}_1 < 0 \\ \mu_1, & \text{при } \mathcal{H}_1 = 0 \end{cases} \quad (4.84)$$

Так как $u(t) \in [0, 1]$, то с необходимостью $1 > \mu_1 > 0$. Заметим, что, как и в евклидовом случае, с геометрической точки зрения особая экстремаль соответствует окружности кривизны $1/\mu_1$.

Как и в евклидовом случае, на сфере любая особая дуга особой траектории задачи (4.74) имеет порядок 1 ($q = 1$). Действительно, с учетом (4.81), (4.82) и условия $\mu_0 = 1$, на произвольной особой дуге

$$-\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2 \mathcal{H}_1}{dt^2} = \frac{(1 + x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + x_1^2)^3} > 0.$$

Последнее неравенство противоречит необходимому условию Лежандра – Клебша (теорема 1.22), из чего следует неоптимальность особых траекторий. А значит, оптимальное управление на отрезке $[0, 2\pi]$ принимает только значения 0 или 1.

С геометрической точки зрения это означает, что оптимальная кривая должна состоять из дуг окружностей кривизны 1. Таким образом, решение задачи (4.74) лежит в классе *1-выпуклых многоугольников*, т.е. 1-выпуклых кривых, составленных из дуг окружностей кривизны 1, причем, с возможным бесконечным (но счетным [25]) количеством вершин.

Замечание 4.14. Как и в евклидовом случае, из геометрической структуры особой траектории можно получить, что оптимальное решение должно лежать в классе правильных 1-выпуклых многоугольников. Тем не менее, ниже мы продемонстрируем другой подход, который с одной стороны не использует дополнительной информации от особой траектории, но с другой стороны, позволяет избежать вычислений на сфере, аналогичных получению и исследованию функции $F(t)$ в конце доказательства евклидова случая.

По лемме о дополнительной симметрии (лемма 4.7) можем считать, что оптимальная кривая γ – это центрально – симметричный 1-выпуклый многоугольник. Для такого класса кривых имеет место следующая геометрическая лемма.

Лемма 4.15. Пусть γ и $\tilde{\gamma}$ – центрально – симметричный λ -выпуклый многоугольник и λ -выпуклая луночка на сфере $\mathbb{S}^2(k^2)$ такие, что

$$L(\gamma) = L(\tilde{\gamma}).$$

Тогда

$$A(\gamma) \geq A(\tilde{\gamma}),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\gamma = \tilde{\gamma}$.

Доказательство. Если у γ в каждой точке существует единственная касательная прямая, то γ – окружность постоянной кривизны λ , что возможно только в случае, когда $L(\gamma) = 2\pi/\sqrt{k^2 + \lambda^2}$. Если $L(\gamma) < 2\pi/\sqrt{k^2 + \lambda^2}$, то у кривой есть как минимум две пары центрально – симметричных точек, в которых правая и левая полукасательные не совпадают. Если такая пара ровно одна, то γ – луночка.

Предположим, что кривая γ содержит две различные пары центрально- симметричных вершин A и \bar{A} , B и \bar{B} (см. рис. 4.2 (а)).

Рассмотрим геодезический четырехугольник $AB\bar{A}\bar{B}$. В силу центральной симметрии γ , противоположные стороны этого четырехугольника равны. Обозначим $|AB| = |\bar{A}\bar{B}| := a$, $|A\bar{B}| = |\bar{A}B| := b$, $\angle\bar{B}AB = \angle\bar{B}\bar{A}B := \alpha$, $\angle A\bar{B}\bar{A} = \angle A\bar{B}A := \beta$. В сферическом случае справедлив следующий аналог тривиального утверждения евклидовой геометрии.

Лемма 4.16. Если $f(\alpha) < \pi/k^2$ – площадь сферического треугольника $BA\bar{B}$ на сфере $\mathbb{S}^2(k^2)$ с $|BA| = a < \pi/k$, $|A\bar{B}| = b < \pi/k$ и $\angle B A \bar{B} = \alpha$, то функция $f(\alpha)$

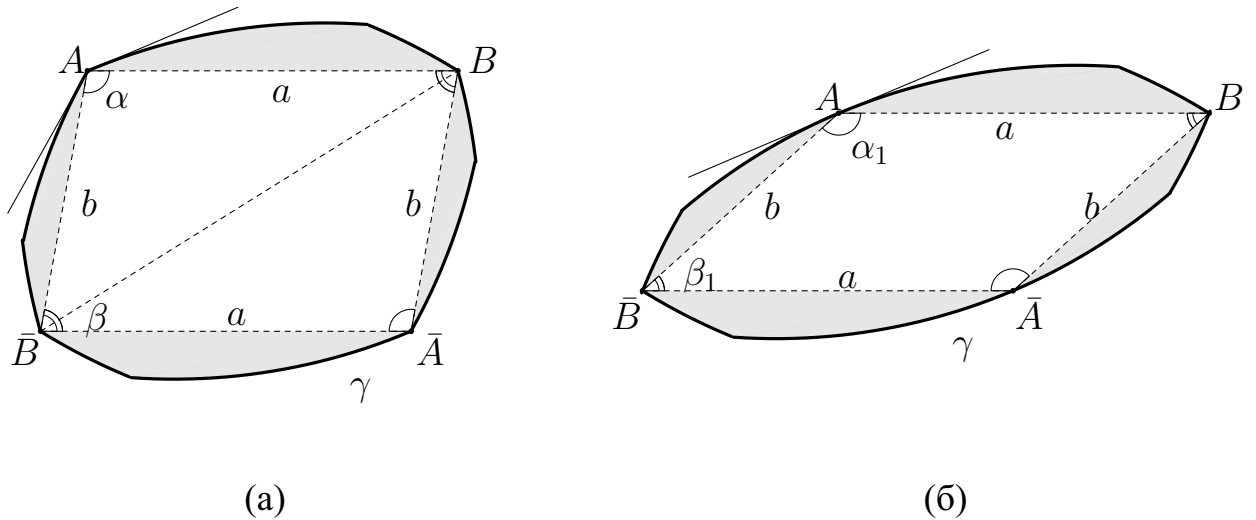


Рис. 4.2. Централно – симметричный λ -выпуклый многоугольник γ перед (а) и после (б) четырехшарнирной изопериметрической деформации вокруг вершины A .
на отрезке $[0, \pi]$ имеет единственную точку максимума, равную α_0 , и f строго монотонна на $[0, \alpha_0)$ и $(\alpha_0, \pi]$ (см. рис. 4.2 (а)).

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $k = 1$.

В сферическом случае имеет место формула, полностью аналогичная формуле на плоскости Лобачевского (см. [83, формула 2.9] и [32]). В частности, если $g(\alpha) = \operatorname{tg} f(\alpha)/2$, то

$$g(\alpha) = \frac{\sin a \sin b \sin \alpha}{(1 + \cos a)(1 + \cos b) + \sin a \sin b \cos \alpha}.$$

Имеем:

$$g'(\alpha) = \frac{\sin a \sin b (\cos \alpha (1 + \cos a)(1 + \cos b) + \sin a \sin b)}{((1 + \cos a)(1 + \cos b) + \sin a \sin c \cos \alpha)^2}.$$

Легко видеть, что на интервале $[0, \pi]$ производная g' пропадает только если $\cos(\alpha) = -\operatorname{tg} a/2 \operatorname{tg} b/2$. Так как косинус монотонен на $[0, \pi]$, последнее уравнение имеет единственное решение α_0 . И так как $g(0) = g(\pi) = 0$, $g \geq 0$, мы получим, что α_0 – точка максимума функции $g(\alpha)$, а значит и для функции $f(\alpha)$. Лемма 4.16 доказана. \square

Из леммы 4.16 следует, что либо $\alpha = \beta = \alpha_0$ или $(\alpha - \alpha_0)(\beta - \alpha_0) < 0$. В обоих случаях, существует угол (α или β), при увеличении которого площадь

четырехугольника $AB\bar{A}\bar{B}$ уменьшается. Не ограничивая общности можем считать, что это угол α . Заметим, что если мы будем увеличивать α , то угол β будет уменьшаться.

Воспользуемся идеей четырехшарнирного метода Штейнера (см. [3], а также [24]). Зафиксируем части кривой γ между точками A, B, \bar{A}, \bar{B} и представим, что в этих точках расположены подвижные шарниры. Не изменяя длин сторон, раздвинем четырехугольник $AB\bar{A}\bar{B}$ в точке A так, чтобы угол между полукасательными к γ в точке A стал равен π (см. рис. 4.2 (а,б)). По рассуждению выше, площадь четырехугольника уменьшится, и так как мы зафиксировали дуги кривых, то общая площадь, ограничиваемая γ , уменьшится, а длина γ не изменится. При этом, угол между полукасательными в вершинах B и \bar{B} может только уменьшиться.

Таким образом, кривая после деформации останется λ -выпуклым центрально – симметричным многоугольником с количеством пар вершин на единицу меньше. И так как минимум ограничиваемой площади достигается (см. раздел 4.3), то это может быть только λ -выпуклая луночка. Лемма 4.15 доказана

□

В силу леммы 4.15, в классе 1-выпуклых многоугольников минимальную площадь ограничивает только 1-выпуклая луночка. А значит, это и будет решением общей задачи (4.74). Теорема 4.2 в случае $c \neq 0$ доказана.

4.6.1. Следствие: некоторые двойственные результаты в $\mathbb{S}^2(k^2)$. В этом пункте, при помощи полярного отображения, мы получим результаты для замкнутых вложенных λ -вогнутых кривых на сфере. Эти результаты являются двойственными по отношению к аналогичным для λ -выпуклых кривых.

Для этого, заметим, что из доказательства утверждения 4.13 следует, что замкнутые вложенные λ -вогнутые кривые на сфере $\mathbb{S}^2(k^2)$ являются полярными образами замкнутых вложенных λ^* -выпуклых кривых с $\lambda^* = k^2/\lambda$.

Для формулировки двойственных результатов, введем понятие кривой, двойственной λ -выпуклой луночке при полярном отображении.

Определение 4.17. Трековой кривой, соответствующей значению $\lambda > 0$, на сфере $\mathbb{S}^2(k^2)$ называется граница выпуклой оболочки двух равных окружностей кривизны, равной λ , лежащих в одной открытой полусфере.

Трековые кривые возникают как решение задачи максимизации радиуса описанной окружности для кривой заданной длины с ограничением на кривизну $|k_g| \leq 1$ (в обобщенном смысле) (см. [65, 28] для двумерного случая, и [22] для кривых в \mathbb{E}^n).

Как мы уже говорили, на единичной сфере трековая кривая, соответствующая параметру λ , является полярным образом $1/\lambda$ -выпуклой луночки.

Мы готовы сформулировать и доказать результат, двойственный теореме 4.3.

Теорема 4.18. Пусть $\gamma \subset \mathbb{S}^2(k^2)$ – замкнутая вложенная λ -вогнутая кривая, $\lambda > 0$. Если $\tilde{\gamma} \subset \mathbb{S}^2(k^2)$ – трековая кривая, соответствующая параметру λ , такая, что

$$A(\gamma) = A(\tilde{\gamma}),$$

то

$$L(\gamma) \leq L(\tilde{\gamma}).$$

Более того, равенство достигается тогда и только тогда, когда $\gamma = \tilde{\gamma}$.

Эта теорема равносильна следующей теореме.

Теорема 4.19. Если $\gamma \subset \mathbb{S}^2(k^2)$ – замкнутая вложенная λ -вогнутая кривая, то

$$L(\gamma) \leq \frac{2\pi}{k} + \frac{1}{\lambda} [2\pi - k^2 A(\gamma)] - \frac{4}{k} \operatorname{arctg} \left(\frac{k}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} \operatorname{tg} \left([2\pi - k^2 A(\gamma)] \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2}}{4\lambda} \right) \right). \quad (4.85)$$

Более того, равенство достигается тогда и только тогда, когда γ – трековая кривая.

Доказательство теорем 4.18 и 4.19. Утверждение теоремы является следствием теорем 4.3 и 4.2. Действительно, при полярном отображении (считая, для простоты, $k = 1$) для взаимно полярных кривых γ и γ^* из формулы Гаусса – Бонне и вычислений при доказательстве утверждения 4.13 легко следует, что

$$\begin{aligned} L(\gamma^*) &= 2\pi - A(\gamma) \\ A(\gamma^*) &= 2\pi - L(\gamma). \end{aligned} \tag{4.86}$$

Пусть γ^* и $\tilde{\gamma}^*$ – полярные образы кривых γ и $\tilde{\gamma}$. Тогда, как мы показали выше, γ^* будет замкнутой вложенной $1/\lambda$ -выпуклой кривой, а $\tilde{\gamma}^*$ – $1/\lambda$ -выпуклой луночкой. В силу первого равенства в (4.86) и условия теоремы, имеем

$$L(\gamma^*) = 2\pi - A(\gamma) = 2\pi - A(\tilde{\gamma}) = L(\tilde{\gamma}^*).$$

А значит, по теореме 4.2,

$$A(\gamma^*) \geq A(\tilde{\gamma}^*),$$

из чего, в силу второго равенства в (4.86), и следует неравенство в теореме 4.18. Случай равенства получается автоматически.

Эквивалентность теорем 4.18 и 4.19 устанавливается прямым вычислением длины трековой кривой, соответствующей параметру λ , ограничивающей фиксированную площадь. Более того, неравенство (4.85) легко следует из неравенства (4.2) при помощи формул (4.86) и связи кривизн полярных кривых. \square

4.6.2. Следствие: теорема Сантало – Янеша в $\mathbb{H}^2(-k^2)$. В этом пункте мы покажем, как из обратного изопериметрического неравенства для λ -выпуклых кривых в пространстве Лобачевского следует теорема Сантало – Янеша [79], обсуждавшаяся во введении, в общем случае доказанная в [40], [41]. Для того, чтобы ее сформулировать, напомним, область $\Omega \subset \mathbb{H}^2(-k^2)$ называется h -выпуклой (от

первой буквы слова *horosphere*), если ее граница $\partial\Omega$ является λ -выпуклой кривой с $\lambda = k$.

Семейство множеств $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ в $\mathbb{H}^2(-k^2)$ называется *распространяющимся на все пространство*, если для любой точки $p \in \mathbb{H}^2(-k^2)$ найдется такое t_0 , что $p \in \Omega(t)$ для всех $t > t_0$.

Теорема Сантало – Янеша. *Если $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ – семейство компактных h -выпуклых областей в $\mathbb{H}^2(-k^2)$, распространяющихся на все пространство, то*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(\Omega(t))}{L(\partial\Omega(t))} = \frac{1}{k}.$$

Доказательство. В пространстве Лобачевского $H^2(-k^2)$ для длины $L(\partial\Omega)$ кривой $\partial\Omega$ и площади $A(\Omega)$ области, которую она ограничивает, выполняется классическое изопериметрическое неравенство (см., например, [14])

$$L^2(\partial\Omega(t)) - 4\pi A(\Omega(t)) - k^2 A^2(\Omega(t)) \geq 0,$$

из которого

$$\frac{A(\Omega(t))}{L(\partial\Omega(t))} \leq \left(\frac{4\pi}{A(\Omega(t)) + k^2} \right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{A(\Omega(t))}{L(\partial\Omega(t))} \leq \frac{1}{k}, \quad (4.87)$$

так как семейство $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ распространяется на все пространство, а значит имеет место $A(\Omega(t)) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

С другой стороны, из обратного изопериметрического неравенства (4.4) получаем:

$$\frac{A(\Omega(t))}{L(\partial\Omega(t))} \geq \frac{1}{k} - \frac{1}{L(\partial\Omega(t))} \cdot \frac{4}{k^2} \operatorname{arctg} \frac{kL(\partial\Omega(t))}{4}.$$

А значит,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{A(\Omega(t))}{L(\partial\Omega(t))} \geq \frac{1}{k}, \quad (4.88)$$

так как $L(\partial\Omega(t)) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Полученные оценки (4.87) и (4.88) доказывают требуемый результат. \square

Замечание 4.20. Заметим, что для семейства $\{\Omega(t)\}_{t>0}$ компактных λ -выпуклых областей в $\mathbb{H}^2(-k^2)$ с $\lambda < k$, распространяющихся на все пространство, используя (4.5) аналогично тому, как это было сделано в теореме выше, получается оценка

$$\frac{\lambda}{k^2} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{A(\Omega(t))}{L(\partial\Omega(t))} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{A(\Omega(t))}{L(\partial\Omega(t))} \leq \frac{1}{k}.$$

4.7. Выводы к разделу 4

Данный раздел был посвящен доказательству обратных изопериметрических неравенств для замкнутых вложенных λ -выпуклых кривых на плоскостях постоянной кривизны (теорема 4.3). Было показано, что эти неравенства эквивалентны изопериметрическому свойству λ -выпуклых луночек (теорема 4.2). А именно, среди всех замкнутых вложенных λ -выпуклых кривых фиксированной длины на плоскостях постоянной кривизны наименьшую площадь ограничивает только λ -выпуклая луночка. Отметим, что это свойство прямо противоположно классическому изопериметрическому свойству окружности, которая максимизирует ограничиваемую площадь среди всех кривых заданной длины.

Также, как следствия полученных неравенств, была доказана теорема Бляшке – Лебега на евклидовой плоскости, были получены некоторые двойственные неравенства на сфере для λ -вогнутых кривых, а также доказана теорема Сантало – Янеша для h -выпуклых областей на плоскости Лобачевского.

Ключевым направлением дальнейших исследований, связанным с обратными изопериметрическими неравенствами, без сомнения, является получение многомерных решений обратной изопериметрической задачи. В виду результатов под-

раздела 4.3, в $M^{m+1}(c)$ существует область, которая имеет наименьший объем среди всех λ -выпуклых областей с заданной площадью (m -мерным объемом) границы. А. А. Борисенко выдвинул следующую гипотезу: *В модельных пространствах $M^{m+1}(c)$ решением обратной изопериметрической задачи в классе замкнутых λ -выпуклых гиперповерхностей является только гиперповерхность, составленная из двух равных вполне омбилических шапочек (λ -выпуклая линза).* Для поверхностей вращения в \mathbb{E}^3 эта гипотеза верна.

Еще одним интересным вопросом является следующий: какова связь в многомерном случае между обратным изопериметрическим неравенством и проблемой Бляшке – Лебега? В двумерном случае на плоскости, как было продемонстрировано, результат Бляшке – Лебега следует из доказательства обратного изометрического неравенства.

Основные результаты раздела опубликованы в [10], [19], [38].

ВЫВОДЫ

В диссертационной работе изучены некоторые экстремальные свойства полных сильно выпуклых (λ -выпуклых, λ -вогнутых, λ_1, λ_2 -выпуклых) гиперповерхностей в римановых и лоренцевых многообразиях ограниченной секционной кривизны. В частности, были получены следующие новые результаты:

1. Доказана теорема сравнения радиальных углов для полных гладких λ -выпуклых (теорема 2.6) и λ -вогнутых гиперповерхностей (теорема 2.9) в полных римановых многообразиях ограниченной секционной кривизны. Как следствия, получены теоремы сравнения для опорных функций таких поверхностей (следствие 2.8 и часть теоремы 2.9).

2. Используя теоремы сравнения для радиальных углов, получены точные оценки сверху величин этих углов для λ -выпуклых гиперповерхностей в модельных пространствах постоянной кривизны (теорема 2.11) и в общих римановых пространствах ограниченной знакопостоянной кривизны (теорема 2.12).

3. В случае лоренцева пространства – времени получена формула, связывающая нормальную кривизну пространственноподобной гиперповерхности, ее функцию гиперболического угла и нормальную кривизну временных сечений (аналог леммы А. А. Борисенко в римановом случае) (лемма 2.5).

4. При помощи формулы из леммы 2.5 для пространства – времени положительной времениподобной секционной кривизны и полной пространственноподобной гиперповерхности кривизны $k_{\perp} \leq \lambda$ была доказана теорема сравнения гиперболических углов (теорема 2.24) и соответствующая ей оценка таких углов (теорема 2.25). Более того, в лоренцевом случае было показано, что функция гиперболического угла всегда ограничена сверху константой, зависящей только от λ и ограничений на времениподобные секционные кривизны многообразия (теоре-

ма 2.26).

5. В модельных римановых многообразиях была доказана эквивалентность теорем сравнения радиальных углов и теоремы прокатывания Бляшке для сфер в случае λ -выпуклых (теорема 2.17) и λ -вогнутых (теорема 2.19) областей с гладкой границей.

6. Используя теорему сравнения радиальных углов и теорему сравнения углов треугольников (теорема Топоногова), было получено обобщение теоремы прокатывания Бляшке для сфер в случае римановых многообразий ограниченной кривизны (теорема 2.20).

7. Были получены точные оценки для ширины $R - r$ слоя, в который можно поместить полную λ_1, λ_2 -выпуклую гиперповерхность в римановых модельных пространствах (теорема 3.8); в евклидовом случае была получена точная оценка для отношения радиусов R/r этого слоя (теорема 3.9). Как следствие, был получен результат по устойчивости для практически омбилических гиперповерхностей (следствие 3.15).

8. Полученные в предыдущем случае оценки ширины слоя были перенесены в λ -выпуклом случае на римановы модельные пространства (теорема 3.10) и многообразия знакопостоянной кривизны (теорема 3.16).

9. Доказаны обратные изопериметрические неравенства для замкнутых вложенных λ -выпуклых кривых, лежащих на двумерных плоскостях постоянной кривизны (теорема 4.3). Эти неравенства эквивалентны тому факту, что единственным решением обратной изопериметрической задачи в соответствующем классе является λ -выпуклая луночка (теорема 4.2). В качестве следствий получены двойственные неравенства на сфере \mathbb{S}^2 (теорема 4.18), доказаны теоремы Бляшке-Лебега в \mathbb{E}^2 и Сантало-Янеша в \mathbb{H}^2 .

Исходя из проведенных исследований можно сделать вывод, что использование техники сравнения для изучения геометрии гиперповерхностей ограниченной нормальной кривизны (в том числе, и их негладких аналогов) оказывается плодотворным для получения новых результатов. Также, в работе был продемонстри-

рован один из путей применения теории оптимального управления и принципа максимума Понтрягина для решения геометрических задач выпуклой оптимизации.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования выпуклых гиперповерхностей, допускающих ограничение на нормальные кривизны. В связи с этим, в выводах к разделам 2-4 были намечены некоторые интересные, с точки зрения автора, открытые вопросы в рассматриваемой области. Результаты могут быть использованы для прочтения специальных курсов по технике сравнения в римановой геометрии, геометрической теории оптимального управления.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Арутюнов А. В. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения / А. В. Арутюнов, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров. – М.: Факториал Пресс, 2006. – 144 с.
2. Бим Дж. Глобальная лоренцева геометрия / Дж. Бим, П. Эрлих; пер. с англ. Е. В. Шикина. – М.: Мир, 1985.
3. Бляшке В. Круг и шар / В. Бляшке. – М.: Наука, 1967. – 232 с.
4. Борисенко А. А. Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий / А. А. Борисенко. – М.:Изд. “Экзамен” 2003. – 672 с.
5. Борисенко А. А. Асимптотическое поведение объемов выпуклых тел в многообразии Адамара / А. А. Борисенко, Д. И. Власенко // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1999. – Т. 6, № 3/4. – С. 223-233.
6. Борисенко А. А. О теореме сравнения углов для замкнутых кривых / А. А. Борисенко, К. Д. Драч // Доповіді НАН України. – 2011. – № 6 – С. 7-11.
7. Борисенко А. А. Об уточнении изопериметрического неравенства / А. А. Борисенко, К. Д. Драч // Тезисы докладов международной конференции «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» посвященной 50-летию механико-математического факультета, Харьков, 17 – 22 апреля 2011 г. – Х., 2011. – С. 139-140.
8. Борисенко А. А. Изопериметрическое неравенство для кривых ограниченной кривизны на сфере / А. А. Борисенко, К. Д. Драч // Матеріали науково-технічної

- конференції ІМА::2013 (Суми, 22 – 27 квітня 2013р.). – Суми, 2013. – С. 136-137.
9. Борисенко А. А. О сферичности гиперповерхностей с ограниченной снизу нормальной кривизной / А. А. Борисенко, К. Д. Драч // Математический сборник. – 2013. – Т. 204, № 11. – С. 21-40. – [English translation: Sb. Math., 204:11 (2013), 1565-1583].
 10. Борисенко А. А. Изопериметрическое неравенство для кривых с ограниченной снизу кривизной / А. А. Борисенко, К. Д. Драч // Математические заметки. – 2014. – Т. 95, № 5. – С. 656-665. – [English translation: Math. Notes, 95:5 (2014), 590-598].
 11. Борисенко А. А. Теорема сравнения для опорных функций гиперповерхностей / А. А. Борисенко, К. Д. Драч // Доповіді НАН України. – 2015. – №3. – С. 11-16. – [English translation: arXiv:1402.2691].
 12. Бураго Д. Ю. Курс метрической геометрии / Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов. – Москва, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 512 с. – (Современная математика).
 13. Бураго Ю. Д. Выпуклые множества в римановых пространствах неотрицательной кривизны / Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер // Успехи мат. наук. – 1977. – Т. 32, № 3(195). – С. 3-55.
 14. Бураго Ю. Д. Геометрические неравенства / Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер. – Л.: Наука, 1980. – 288 с.
 15. Бураго Ю. Д. Введение в риманову геометрию / Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер. – СПб.: Наука, 1994.
 16. Дискант В. И. Некоторые оценки для выпуклых поверхностей с ограниченной функцией кривизны / В. И. Дискант // Сибирский математический журнал. – 1971. – Т. 12. – С. 109-125.

17. Драч К. Д. О теореме сравнения углов для замкнутых кривых / К. Д. Драч // Тезисы докладов IV научной конференции для студентов и аспирантов «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харьков, 14 – 15 мая 2010 г. – X., 2010. – С. 9-10.
18. Драч К. Д. О глобальном поведении полных гиперповерхностей заземленной нормальной кривизны / К. Д. Драч // Тези доповідей 8-ї Міжнародної конференції з топології, геометрії та викладання геометрії: 9 – 15 вересня 2013 року. – Черкаси, 2013. – С. 11-12.
19. Драч К. Д. Об изопериметрическом свойстве λ -выпуклых луночек на плоскости Лобачевского / К. Д. Драч // Доповіді НАН України. – 2014. – № 11. – С. 11-15. – (English version: arXiv:1402.2688).
20. Ионин В. К. Внешнегеометрические свойства выпуклых гиперповерхностей в пространствах постоянной кривизны и некоторые геометрические свойства неполных римановых пространств неположительной кривизны. Автореф. дис. на соиск. учен. степ. д.ф.-м.н. Спец. 01.01.04 / Ионин В. К.; [Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН]. – Новосибирск, 2001. – 13 с.; 20 см. – Библиогр.: С. 12-13 (21 назв.).
21. Милка А. Д. Об одной теореме Шура – Шмидта / А. Д. Милка // Укр. геом. сб. – 1970. – Т. 8. – С. 95-102.
22. Милка А. Д. Оценка размеров кривых ограниченной кривизны / А. Д. Милка // Укр. геом. сб.– 1978.– Т. 21. – С. 88-91.
23. Милютин А. А. Принцип максимума в оптимальном управлении / А. А. Милютин, А. В. Дмитрук, Н. П. Осмоловский. – М.: Изд. Центра прикл. иссл. при мех.-мат. факульт. МГУ, 2004. – 168 с.
24. Петрунин А. М. Уникальносоставленные фигуры / А. М. Петрунин, С. Е. Рукшин // Матем. просв., сер. 3. – 2006. – Т. 10. – С. 161-175.

25. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей / А. В. Погорелов. – Москва: Наука, 1969. – 759 с.
26. Anciaux H. On the Three-Dimensional Blaschke-Lebesgue Problem / H. Anciaux, B. Guilfoyle // Proc. Amer. Math. Soc. – 2011. – Vol. 139. – P. 1831-1839.
27. Aledo J. A. Constant mean curvature spacelike hypersurfaces in Lorentzian warped products and Calabi-Bernstein type problems / J. A. Aledo, A. Romero, R. M. Rubio // Nonlinear Analysis: Theory, Methods, Applications. – 2014. – Vol. 106. – P. 57-69.
28. Alexander S. Racetracks and extremal problems for curves of bounded curvature in metric spaces / S. Alexander, R. Bishop // Geometriae Dedicata. – 1997. – Vol. 66. – P. 331-341.
29. Alexandrov A. D. Almost everywhere existence of the second differential of a convex function and some properties of convex surfaces connected with it / A. D. Alexandrov // Leningrad State Univ. Ann. [Uchenye Zapiski] Math. Ser.. – 1939. – No. 6. – P. 3-35.
30. Bayen T. Analytical parameterization of rotors and proof of a Goldberg conjecture by optimal control theory / T. Bayen // SIAM J. Control Optim. – 2009. – Vol. 47, No. 6. – P. 3007–3036.
31. Beem J. K. Global Lorentzian geometry (2nd edition) / J. K. Beem, P. E. Ehrlich, K. L. Easley. Marcel Dekker, Inc., 1996. – (Monographs and textbooks in pure and applied mathematics).
32. Bilinski S. Zur Begründung der elementaren Inhaltslehre in der hyperbolischen Ebene / S. Bilinski // Math. Ann.– 1969. – Vol. 180.– P. 256-268.
33. Blaschke W. Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinsten Inhalts / W. Blaschke // Math. Ann.. – 1915. – Vol. 76. – P. 504–513.
34. Borisenko A. A. Convex sets in Hadamard manifolds / A. A. Borisenko // Differential geometry and its application. – 2002. – Vol. 17. – P. 111-121.

35. Borisenko A. A. Convex Hypersurfaces in Hadamard Manifolds / A. A. Borisenko // Complex, Contact and Symmetric Manifolds / O. Kowalski, E Musso, D Perrone, eds. – Springer, 2005. – p. 27-39. – (Progress in Mathematics, Vol. 234).
36. Borisenko A. Extreme problems for convex hypersurfaces / A. Borisenko, K. Drach // Abstracts DGA2013 (Czech Republic, Brno, August 19 – 23, 2013). – Brno, 2013. – P. 31.
37. Borisenko A. Geometry of hypersurfaces with bounded normal curvatures / A. Borisenko, K. Drach // Abstracts of the International Congress of Mathematicians 2014: Short Communications, Poster Sessions. – Seoul, 2014. – P. 116-117.
38. Borisenko A. A. Extreme properties of curves with bounded curvature on a sphere / A. A. Borisenko, K. Drach // Journal of Dynamical and Control Systems. – 2015. – Vol. 21, No. 3. – P. 311-327.
39. Borisenko A. A. Relation between area and volume for λ -convex sets in Hadamard manifolds / A. A. Borisenko, E. Gallego, A. Reventos // Differential geometry and its application. – 2001. – Vol. 14. – P. 267-280.
40. Borisenko A. A. Total curvatures of convex hypersurfaces in hyperbolic space / A. A. Borisenko, V. Miquel // Illinois journal of mathematics. – 1999. – Vol. 43, No. 1. – P. 61-78.
41. Borisenko A. A. Comparison Theorems on Convex Hypersurfaces in Hadamard Manifolds / A. A. Borisenko, V. Miquel // Annals of global analysis and geometry. – 2002. – Vol. 21, No. 2. – P. 191-202.
42. Borisenko A. A. Curvatures of spheres in Hilbert geometry / A. A. Borisenko, E. Olin // Pacific Journal of Mathematics. – 2011. – Vol. 254, No. 2. – P. 257–273.
43. Borisenko A. A. On the total curvature of curves in a Minkowski space / A. A. Borisenko, K. Tenenblat // Israel Journal of Mathematics. – 2012. – Vol. 191, No. 2. – P. 755-769.

44. Borisov V.F. Kelley condition and structure of Lagrange manifold in a neighborhood of a first-order singular extremal / V.F. Borisov // *J. Math. Sci.*. – 2008. – Vol. 151, No. 6. – P. 3431-3472.
45. Brendle S. Embedded minimal tori in S^3 and the Lawson conjecture / S. Brendle // *Acta Mathematica*. – 2013. – Vol. 211, No. 2. – P. 177-190.
46. Budic R. On the determination of Cauchy surfaces from intrinsic properties / R. Budic, J. Isenberg, L. Lindblom, Ph. B. Yasskin // *Commun. Math. Phys.*. – 1978. – Vol. 61. – P. 87-95.
47. Caballero M. Complete CMC spacelike surfaces with bounded hyperbolic angle in Generalized Robertson-Walker spacetimes / M. Caballero, A. Romero, R. M. Rubio // *Int. J. in Geometric Methods in Modern Phys.* – 2010. – Vol. 7. – P. 1-18.
48. Caballero M. New Calabi-Bernstein results for some elliptic non-linear equations / M. Caballero, A. Romero, R. M. Rubio // *Anal. Appl.*. – 2013. – Vol. 11. – P. 1-13.
49. Chen B.-Y. *Geometry of Submanifolds* / B.-Y. Chen. – New York: Mercel Dekker, 1973. – 298 p.
50. do Carmo M.P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces* / M. P. do Carmo. Prentice-Hall, 1976.
51. Drach K. Some sharp estimates for convex hypersurfaces of pinched normal curvature / K. Drach // *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*. – 2015. – Vol. 11, No. 2. – P. 111-122.
52. Erkekoğlu F. On level sets of Lorentzian distance function / F. Erkekoğlu, E. García-Río, D. N. Kupeli // *General Relativity and Gravitation*. – 2003. – Vol. 35, No. 9. – P. 1597-1615.
53. Eschenburg J.-H. Local convexity and nonnegative curvature – Gromov's proof of the sphere theorem / J.-H. Eschenburg // *Invent. Math.* – 1986. – Vol. 84. – P. 507-522.

54. Fillmore J. P. Barbier's theorem in the Lobachevski plane / J. P. Fillmore // Proc. Amer. Math. Soc.. – 1970. – Vol. 24. – P. 705-709.
55. Gallego E. Asymptotic behavior of convex sets in the hyperbolic plane / E. Gallego, A. Reventós // Journal of Differential Geometry. – 1985. – Vol. 21. – P. 63-72.
56. Gallego E. Asymptotic Behaviour of λ -Convex Sets in the Hyperbolic Plane / E. Gallego, A. Reventós // Geometriae Dedicata. – 1999. – Vol. 76. – P. 275-289.
57. Gerhardt C. Minkowski type problems for convex hypersurfaces in hyperbolic space / C. Gerhardt. – 2006. – 32 pages. – (preprint, arXiv:math/0602597v2).
58. Ghandehari M. An optimal control formulation of the Blaschke – Lebesgue theorem / M. Ghandehari // J. Math. Ann. Appl. – 1996. – Vol. 200. – P. 322-331.
59. Ghandehari M. Controlling curvature in Minkowski planes / M. Ghandehari // J. Math. Ann. Appl. – 2000. – Vol. 252. – P. 951-958.
60. Harrell, II E. A direct proof of a theorem of Blaschke and Lebesgue / E. Harrell, II // J. Geom. Anal. – 2002. – Vol. 12, No. 1. – P. 81-88.
61. Harris S. G. A triangle comparison theorem for Lorentz manifolds / S. G. Harris // Indiana Univ. Math. J.. – 1982. – Vol. 31. – P. 289-308.
62. Howard R. Blaschke's rolling theorem for manifolds with boundary / R. Howard // Manuscripta Math. – 1999. – Vol. 99, No. 4. – P. 471-483.
63. Howard R. A reverse isoperimetric inequality, stability and extremal theorems for plane curves with bounded curvature / R. Howard, A. Treibergs // Rocky Mountain J. Math. – 1995. – Vol. 25, No. 2. – P. 635-684.
64. Hutchings M. Proof of the double bubble conjecture / M. Hutchings, F. Morgan, M. Ritoré, A. Ros // Annals of Mathematics. – 2002. – Vol. 155, No. 2. – P. 459-489.
65. Johnson H. H. An application of the maximum principle to the geometry of plane curves / H. H. Johnson // Proc. Amer. Math. Soc.. – 1974. – Vol. 4, No. 2. – P. 432-435.

66. Karcher H. Umkreise und Inkreise konvexer Kurven in der sphärischen und der hyperbolischen Geometrie / H. Karcher // *Math. Ann.* – 1968. – Vol. 177. – P. 122-132.
67. Kelley H. J. Singular extremals / H. J. Kelley, R. E. Kopp, H. G. Moyer // *Topics in Optimization* / G. Leitmann, ed. – N.Y.: Academic Press, 1967. – P. 63-103.
68. Kulkarni R. S. The Values of Sectional Curvature of Indefinite Metrics / R. S. Kulkarni // *Comment. Math. Helvetici.* – 1979. – Vol. 54. – P. 173-176.
69. Lebesgue H. Sur le problème des isopérimètres et sur les domaines de largeur constante / H. Lebesgue // *Bull. Soc. Math. France, C.R.* – 1914. – Vol. 7. – P. 72–76..
70. Leichtweiss K. Nearly umbilical ovaloids in the n -space are close to spheres / K. Leichtweiss // *Res. Math.* – 1999. – Vol. 36. – P. 102-109.
71. Marques F. C. Min-Max theory and the Willmore conjecture / F. C. Marques, A. Neves // *Annals of Mathematics.* – 2014. – Vol. 179, No. 2. – P. 683-782.
72. Naveira A. M. Two problems on h -convex sets in the hyperbolic space / A. M. Naveira, A. Tarrío // *Archiv der Mathematik.* – 1997. – Vol. 68, No. 6. – P. 514-519.
73. Parkkonen J. On strictly convex subsets in negatively curved manifolds / J. Parkkonen, F. Paulin // *J. Geom. Anal.* – 2012. – Vol. 22, No. 3. – P. 621-632.
74. Petersen P. Riemannian geometry / P. Petersen. – New York: Springer, 2nd ed., 2006. – (Graduate texts in mathematics, Vol. 171).
75. O’Neil B. Semi-Riemannian geometry (with application to relativity) / B. O’Neil. – New York: Academic Press Inc., 1983.
76. Roth J. Explicit rigidity of almost-umbilical hypersurfaces / J. Roth, J Scheuer. – 2015. – 12. p. – (preprint, arXiv:1504.05749v3).

77. Sachs R. K. *General Relativity for Mathematicians* / R. K. Sachs, H. Wu. – New-York: Springer-Verlag, 1977. – (Grad. Texts Math., Vol. 48).
78. Sakai T. *Riemannian Geometry* / T. Sakai. American Mathematical Soc., 1996. – (Translation of mathematical monographs, Vol. 149).
79. Santaló L. A. *Averages for Polygons Formed by Random Lines in Euclidean and Hyperbolic Planes* / L. A. Santaló, I. Yañez // *Journal of Applied Probability*. – 1972. – Vol. 9, No. 1. – P. 140-157.
80. Scheuer J. *Quantitative oscillation estimates for almost-umbilical closed hypersurfaces in Euclidean space* / J. Scheuer // *Bulletin of the Australian Mathematical Society*. – 2015. – Vol. 92, No. 1. – P. 133-144.
81. Schneider R. *Closed convex hypersurfaces with curvature restrictions* / R. Schneider // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 1988. – Vol. 103, No. 4. – P. 1201-1204.
82. Walter R. *Some analytical properties of geodesically convex sets* / R. Walter // *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*. – 1976. – Vol. 45. – P. 263-282.
83. Walter R. *Polygons in hyperbolic geometry 2: Maximality of area* / R. Walter. – 2010. – 20 p. – (preprint / arXiv:1008.3821v1).
84. Zelikin M. I. *Theory of Chattering Control with applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering* / M. I. Zelikin, V. F. Borisov. – Boston, MA: Birkhäuser, 1994.