Харківський національний університет імені В.Н. Каразина
Міністерство освіти і науки України

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І.Вєркіна
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Вишнякова Ганна Марківна

УДК 517.537.32

ДИСЕРТАЦІЯ

МНОГОЧЛЕНИ З ОБМЕЖЕННЯМИ НА РОЗТАШУВАННЯ КОРЕНІВ І ГРАНИЧНІ КЛАСИ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Спеціальність 01.01.01 – “Математичний аналіз”
(Фізико-математичні науки)

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

______________________________ Г.М.Вишнякова

Науковий консультант Фаворов Сергій Юрійович, доктор фізико-математичних наук, професор

Харків – 2019

АНОТАЦІЯ

Вишнякова Г.М. Многочлени з обмеженнями на розташування коренів і граничні класи цілих функцій. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз (Фізико-математичні науки). – Харківський національний університет імені В.Н. Каразина Міністерства освіти і науки України; Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І.Вєркіна Національної академії наук України, Харків, 2019.

В дисертаційній роботі побудовано нову теорію і знайдено нові методи дослідження зв'язків розташування коренів многочленів і цілих функцій з властивостями коефіцієнтів цих функцій, а також отримані описи і досліджено властивості лінійних операторів, які зберігають гіперболічність, стійкість і позитивність.

В роботі вивчаються тотально додатні і кратно додатні матриці. Матриця A із дійсними елементами називається k-кратно додатною, якщо усі мінори A, що їх порядки не перевищують k, є невід'ємними. Матриця A із дійсними елементами називається тотально додатною, або нескінченно додатною, якщо усі мінори A є невід'ємними. Тотально додатні і кратно додатні матриці знаходять численні застосування у різних розділах математики, статистики і механіки. В дисертаційній роботі отримано нову достатню умову кратної додатності, а також тотальної додатності для дійсних матриць. Доведено, що ця умова є точною для кожного розміру матриці (а також точною в множині нескінченних матриць) як в класі ганкелевих матриць, так і в в класі тепліцевих матриць. В дисертаційній роботі наведені деякі застосування цієї достатньої умови для матриць: отримані нові достатні умови для того, щоб задана дійсна послідовність була частотною послідовністю Поліа, для того, щоб твірна функція даної послідовності не

мала коренів в заданому куті, який містить додатну піввісь; отримано нову достатню умову для додатної послідовності, щоб вона була моментною послідовністю Гамбургера; а також отримано нову достатню умову додатності на всій дійсній осі многочлена з додатними коефіцієнтами.

В дисертації досліджуються стійкі многочлени і цілі функції з коренями в лівій півплощині. Дійсний многочлен F називається стійким (іноді стабільним, або гурвіцевим), якщо усі його корені мають від'ємні дійсні частини, тобто $F(z_0) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} z_0 < 0$. Різноманітні питання поліноміальної стійкості виникають у численних проблемах математики, фізики, інженерії тощо. В роботі отримано нову зручну достатню умову стійкості комплексних многочленів, а також достатню умову розташування усіх коренів цілої функції у відкритій лівій півплощині. Перевірено, що отримані достатні умови не можуть бути покращеними. В роботі знайдено необхідні і достатні умови для того, щоб важлива спеціальна функція: часткова тета-функція, – мала стійкі відрізки ряду Тейлора, а також мала усі корені у відкритій лівій півплощині.

В роботі досліджуються властивості дійсних многочленів, які є додатними на всій дійсній осі. Доведена нова зручна достатня умова для додатності многочлена на дійсній осі. Знайдено повний опис крайніх напрямків конусу многочленів з додатними коефіцієнтами, які є невід'ємними на дійсній осі і мають степінь не більшу за задане число. Крім того, знайдено повний опис діагональних в стандартному мономіальному базисі лінійних операторів, які зберігають вказаний конус. В роботі досліджуються деякі інші спеціальні види лінійних операторів, які зберігають вказаний конус. Зокрема, знайдено найменший можливий порядок нескалярного лінійного диференціального оператора з поліноміальними коефіцієнтами, який зберігає вказаний конус.

В дисертації досліджуються нульові множини цілих абсолютно монотонних функцій, тобто цілих функцій, які є перетвореннями Лапласа невід'ємних скінченних Борелевських мір з носіями на додатній півосі. Цілі абсолютно монотонні функції є обмеженими в кожній півплощини вигляду $\mathbb{C}_w := \{z : \operatorname{Re} z \leqslant w\}$, $w \in \mathbb{R}$. В роботі отримано повний опис нульових множин цілих функцій, які є обмеженими в кожній півплощині $\mathbb{C}_w$, $w \in \mathbb{R}$. В роботі отримано також характеризацію нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, якщо ці множини не перетинають деякий кут $\{z : |\arg z - \pi| < \alpha\}$ для $\alpha > 0$. Знайдено нову необхідну умову для тих частин нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, які розташовані у вказаному куті, перевірено, що ця умова не випливає із сукупності попередньо відомих умов, розглянуті деякі важливі приклади. Отримано неперервний аналог відомої теореми М. Фекете і Дж. Поліа про домноження додатного на дійсній осі многочлена на експоненту. В роботі доведено, що кожну неперервну щільність на півосі, модуль якої має скінченне перетворення Лапласу, і яка є додатною в кінцях носія, можна згорнути зі спеціальною мірою (мірою Пуассона) так, що згортка є невід'ємною щільністю на півосі. Аналогічна теорема доведена для щільностей з носієм на відрізку.

В роботі досліджуються гіперболічні многочлени, тобто дійсні многочлени з усіма дійсними коренями. Замикання в топології рівномірної збіжності на компактах множини гіперболічних многочленів формує знаменитий клас Лаґерра-Поліа цілих функцій. Функції класу Лаґерра-Поліа знаходять численні застосування в аналізі. В дисертаційній роботі досліджується часткова тета-функція, а саме ціла функція $g_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^{k^2}}$, $a > 1$, і її відрізки ряду Тейлора. Вперше знайдено, при яких значеннях параметру a часткова тета-функція, а також її відрізки ряду Тейлора належать до класу Лаґерра-Поліа. Доведено, наприклад, що, якщо для деякого a часткова тета-функція належить до класу Лаґерра-Поліа, то усі її відрізки з непарними номерами є гіперболічними многочленами. Досліджується належність до класу Лаґерра-Поліа низки інших важливих спеціальних цілих функцій і їх відрізків ряду Тейлора, наприклад, детально досліджується сім'я цілих функцій вигляду $f^{(m,a)}(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k (k!)^m}{a^{k^2}}, \quad a > 1,\ m \geqslant 1$. Крім того, в роботі знайдена нова характеризація класу Лаґерра-Поліа: доведено, що узагальнені нерівності Лаґерра є необхідними і достатніми умовами належності цілої функції до класу Лаґерра-Поліа. Доведено також, що комплексні нерівності Лаґерра є необхідними і достатніми умовами належності цілої функції до класу Лаґерра-Поліа. Ми дослідили цілі функції з додатними коефіцієнтами, для яких другі відношення коефіцієнтів Тейлора формують спадну послідовність і знайшли нові умови для того, щоб такі функції належали до класу Лаґерра-Поліа. Крім того, розроблені методи застосовано для оцінки числа дійсних коренів спеціальних квазімногочленів і для оцінки локального модуля опуклості банахової алгебри в одиниці.

В дисертації вивчаються важливі міри відділення коренів гіперболічних многочленів: меш і логарифмічний меш. Мешем гіперболічного многочлена називається мінімальна відстань між його різними коренями. Логарифмічним мешем гіперболічного многочлена з усіма коренями одного знаку називається мінімальне відношення між його послідовними коренями. Отримані нові оцінки для мешу гіперболічного многочлена і логарифмічного мешу гіперболічного многочлена з додатними коефіцієнтами через коефіцієнти многочлену. Перевірено, що отримані оцінки є точними. Крім того, ми вивчили поняття знаконезалежно гіперболічного многочлена, тобто гіперболічного многочлена, який залишається гіперболічним після довільної зміни знаків його коефіцієнтів Ми знайшли достатні умови знаконезалежної гіперболічності многочлена і перевірили, що ці умови є точними. В роботі доведено, що логарифмічний меш згортки Шура-Сеге двох гіперболічних многочленів не є меншим за максимум логарифмічних мешів многочленів. Отримано точну оцінку знизу на меш образу гіперболічного многочлена під дією центрально-різничного лінійного оператора зі сталими коефіцієнтами.

В роботі вивчаються лінійні скінчено-різничні оператори і образ множини гіперболічних многочленів під дією таких операторів. В дисертації отримано повний опис лінійних скінчено-різничних операторів зі сталими коефіцієнтами, які зберігають множину гіперболічних многочленів. Також отримано опис лінійних скінчено-різничних операторів зі сталими коефіцієнтами, які зберігають множину многочленів з коренями у смузі. В роботі доведені важливі властивості коренів образу центрально-різничного лінійного оператора від цілої функціях класу Лаґерра-Поліа, такі як простота коренів і мінімальний можливий меш образу. Доведено, що меш образу гіперболічного многочлена степеня n під дією центрально-різничного лінійного оператора не є меншим за меш образу многочлена x^n. Отримані точні оцінки найбільшого і найменшого кореня образу гіперболічного многочлена під дією центрально-різничного лінійного оператора. Отримано асимптотику коренів образу довільного комплексного многочлена під дією центрально-різничного лінійного оператора, коли величина зсуву прямує до нескінченості. Отримано також повний опис лінійних скінчено-різничних операторів, коефіцієнти яких є цілими функціями, що вони зберігають клас цілих функцій Лаґерра-Поліа.

Усі основні результати дисертації наведено з повними доведеннями. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Результати, що їх отримано в дисертаційній роботі, поглиблюють наші знання про розподіл і розташування коренів комплексних многочленів і цілих функцій, а також про лінійні оператори, які зберігають гіперболічність, стійкість або позитивність многочленів. Результати і методи дисертаційної роботи можуть бути використаними в різноманітних математичних областях, у яких важливо отримати точну інформацію щодо розташування коренів многочленів або цілих функцій, таких як дійсний аналіз, теорія функцій комплексної змінної, диференціальні рівняння, лінійна алгебра, функціональний аналіз і багато інших.

Ключові слова: тотально додатні матриці, кратно додатні матриці, гіперболічні многочлени, клас цілих функцій Лагера-Поліа, стійкі многочлени, позитивні многочлени, цілі абсолютно монотонні функції, лінійні оператори, які зберігають гіперболічність, стійкість і позитивність, меш многочлена, логарифмічний меш многочлена.

ABSTRACT

Anna M. Vishnyakova. Polynomials with restrictions on the location of roots and the limiting classes of entire functions. – Qualifcation scientific paper, manuscript.

Thesis for a Doctoral Degree in Physics and Mathematics: Speciality 01.01.01 – Mathematical Analysis (Physics and Mathematics). – V. N. Karazin Kharkiv National University, the Ministry of Education and Science of Ukraine; B.I.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2019.

In this thesis, we develop a new theory and find new methods for studying the connection between the zero location of polynomials and entire functions and the properties of the coefficients of these functions. We also find descriptions and investigate properties of linear operators that preserve hyperbolicity, stability and positivity.

The present work is concerned with totally positive and multiply positive matrices. A real matrix A is called k-times positive if all minors of A of rank at most k are nonnegative. A real matrix A is called totally positive if all minors of A are nonnegative. Totally positive and multiply positive matrices have a widespread use in mathematics, statistics, and mechanics. In the thesis we obtain a new sufficient condition of total positivity and of multiple positivity for real matrices. We prove that this sufficient condition is sharp for matrices of arbitrary size (as well as for infinite matrices) in the classes of Hankel and Toepliz matrices. We study various applications of this sufficient condition for matrices: we obtain new sufficient conditions for a sequence to be a Polya frequency sequence, sufficient conditions for a generating function of a sequence to have no roots in a given angle containing real half-axis, we obtain new sufficient condition for a positive sequence to be a Hamburger moment sequence, a sufficient condition for a positive-coefficient polynomial to be positive on the real line.

The thesis deals with stable polynomials and entire functions whose roots

are situated in the left half plane. A real polynomial F is called stable (or Hurwitz) if all of its roots have negative real parts, i.e $F(z_0) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} z_0 < 0$. Various questions about polynomial stability arise in mathematics, physics, and engineering. In this work we obtain a new useful sufficient condition for stability of complex polynomials and a sufficient condition for an entire function to have all roots in the left half plane. We verify that these sufficient conditions cannot be improved. We find necessary and sufficient conditions for the partial theta function (an important special function) to have stable Taylor sections and to have all roots in the left half plane.

We study properties of real polynomials that are positive on the real axis. We establish a new useful sufficient condition for positivity of a polynomial on the real axis. We find a complete description of extremal rays of the cone of polynomials with positive coefficients that are nonnegative on the real line and have degree bounded by a given number. We also describe linear operators that are diagonal in the standard monomial basis and preserve the aforementioned cone. In this work we also describe some other special kinds of linear operators that preserve this cone. In particular, we find the lowest possible order of a non-scalar linear differential operator with polynomial coefficients, that preserves this cone.

In this thesis we study zero sets of entire absolutely monotonic functions, or equivalently zero sets of entire functions that are Laplace transforms of nonnegative finite Borel measures supported on the positive half axis. Entire absolutely monotone functions are bounded in every half plane of the form $\mathbb{C}_w := \{z : \operatorname{Re} z \leqslant w\}$, $w \in \mathbb{R}$. In this work we obtain a complete description of the zero sets of entire functions that are bounded in each of the half planes $\mathbb{C}_w$, $w \in \mathbb{R}$. We also obtain a characterization of zero sets of entire absolutely monotonic functions when the zero sets are known not to intersect the angle $\{z : |\arg z - \pi| < \alpha\}$ for some $\alpha > 0$. We find a new necessary condition for the part of the zero locus of an entire absolutely monotonic function that is contained in this angle. We verify that this condition is not a consequence of the totality of previously known results; some important examples are described. We obtain a continuous analogue of the well-known theorem of M. Fekete and G. Polya on the multiplication of a polynomial positive on the real axis by an exponential function. In the work we prove that for every continuous density whose modulus has finite Laplace transform and who is positive near the endpoints of its support the convolution of this density with the special measure (the Poisson measure) is a nonnegative density on the positive half axis. A similar theorem is proved for densities with the compact supports.

In this work we study hyperbolic polynomials, which are real polynomials with all real roots. The closure of the set of hyperbolic polynomials in the uniform convergence topology is the famous Laguerre-Polya class of entire functions. Functions of the Laguerre-Polya class have numerous applications in analysis. In this thesis we study the partial theta function, namely the function $g_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^{k^2}}, a > 1$, as well as its Taylor sections. We describe the values of a for which the partial theta function belongs to the Laguerre-Polya class. In particular, we prove that if for a given a the partial theta function belongs to the Laguerre-Polya class, then so do its odd degree Taylor sections. We study the question of belonging to the Laguerre-Polya class for various other special functions and their Taylor sections, such as the family of entire functions of the form $f^{(m,a)}(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k (k!)^m}{a^{k^2}}, \quad a > 1, \ m \geqslant 1$. Moreover, we find a new characterization of the Laguerre-Polya class: we prove that the generalized Laguerre inequalities are necessary and sufficient conditions for an entire function to belong to the Laguerre-Polya class. It is proved also that the complex Laguerre inequalities are necessary and sufficient conditions for an entire function to belong to the Laguerre-Polya class. We study entire functions with positive coefficients and such that the second quotients of Taylor coefficients form a decreasing sequence, and we find new conditions for such functions to belong to the Laguerre-Polya class. The methods thus developed are applied to bounding the number of real roots of special quasipolynomials and to estimation of modulus of local uniform convexity of a Banach algebra at its unit.

In the thesis we study important measures of separation for roots of hyperbolic polynomials: the mesh and the logarithmic mesh. The mesh of a hyperbolic polynomial is the minimal distance between its roots. The logarithmic mesh of a hyperbolic polynomial with positive roots is the minimal ratio of its roots. We obtain new bounds for the mesh of a hyperbolic polynomial and the logarithmic mesh of a hyperbolic polynomial with positive coefficients in terms of their coefficients. The resulting bounds are sharp. We also study the concept of a sign-independently hyperbolic polynomial, i.e. the concept of a hyperbolic polynomial that remains hyperbolic when the signs of its coefficients is arbitrarily changed. We find a sufficient condition for a sign-independently hyperbolic polynomial and verify that this condition is sharp. In this work we prove that the logarithmic mesh of the Schur-Szego convolution of two hyperbolic polynomials with all zeros of the same signs is at least the maximum of the logarithmic meshes of the individual polynomials. We obtain a sharp from below bound for the mesh of the image of a hyperbolic polynomial under the action of a central-difference linear operator.

In this work we study finite-difference linear operators and the image of the set of hyperbolic polynomials under the action of such operators. In the thesis we obtain a complete description of linear finite-difference operators with constant coefficients that preserve the set of hyperbolic polynomials. We also obtain a complete description of linear finite-difference operators with constant coefficients that preserve the set of polynomials with roots in a strip. In this work we prove important properties of the roots of the image of an entire function of the Laguerre-Polya class under the action of a central-difference linear operator, such as root simplicity and minimal possible mesh. We prove that the mesh of the image of a hyperbolic polynomial of degree n under the action of a central-difference linear operator is at least the mesh of the image of x^n. We obtain sharp estimates for the minimal and the maximal root of the image of a hyperbolic polynomial under the action of a central-difference linear operator. We obtain an asymptotic for the roots of the image of an arbitrary complex polynomial under the action of a central-difference linear operator when the value of the shift approaches infinity. We obtain a complete description of linear finite-difference operators with entire functions for coefficients that preserve the Laguerre-Polya class.

All basic results are given with complete proofs. Obtained results are of theoretical character. Results of this thesis deepen our knowledge of distribution of zeros of complex polynomials and entire functions and of linear operators that preserve hyperbolicity, stability and positivity of polynomials. Results and methods of the thesis can be used in various areas of mathematics where it is imperative to have precise information on distribution of zeroes of polynomials or entire functions, such as real analysis, complex analysis, theory of ordinary differential equations, linear algebra, functional analysis, etc.

Key words: totally positive matrices, multiply positive matrices, hyperbolic polynomials, entire functions from the Laguerre-Polya class, stable polynomials, positive polynomials, entire absolutely monotonic functions, linear operators, preserving hyperbolicity, stability and positivity, mesh of polynomials, logarithmic mesh of polynomials.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

Публікації у фахових виданнях України

1. Katkova O.M. A note on zero sets of absolutely monotonic functions / O.M.Katkova and A.M.Vishnyakova // Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics – 2000. – Vol. 49, N 47. – P. 70–75 (Zentralblatt MATH: Zbl 1054.30526).

2. Katkova O.M. On the zeros of entire absolutely monotonic functions / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2004. – Vol. 11, N 1. – P. 25 – 44 (Zentralblatt MATH: Zbl 1076.30030, MathSciNet: MR2046352).

3. Katkova O.M. On entire functions having Taylor sections with only real zeros / Olga M. Katkova, Tatjana Lobova and Anna M. Vishnyakova // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2004. – Vol. 11, N 4. – P. 449 – 469 (Zentralblatt MATH: Zbl 1078.30022, MathSciNet: MR2114005).

Публікації у виданнях, які входять до міжнародних наукометричних баз

4. Katkova O.M. A continual analogue of a theorem by M. Fekete and G. Pólya / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Positivity. – 2001. – Vol. 5, N 1. – P. 1–11 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 0972.44001, MathSciNet: MR1813092).

5. Behrends E. A note on l^p-norms / Ehrhard Behrends, Olga Katkova and Anna Vishnyakova // Archiv der Mathematik. – 2001. – Vol. 76, N 1. – P. 67–72 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 0971.46008, MathSciNet: MR1808744).

6. Katkova O.M. On sufficient conditions for the total positivity and for the multiple positivity of matrices / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova //

Linear Algebra and its Applications. – 2006. – Vol. 416, N 2-3. – P. 1083–1097 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1106.15014, MathSciNet: MR2242482).

7. Katkova O.M. A sufficient condition for a polynomial to be stable / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – Vol. 347, N 1. – P. 81–89 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1146.30005, MathSciNet: MR2433826).

8. Katkova O.M. Linear operators preserving the set of positive (nonnegative) polynomials / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Proceedings of the third Multidisciplinary International Symposium on Positive Systems: Theory and Applications (POSTA 09) Valencia, Spain, September 2-4, 2009; Series: Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 389, P. 83–90 Bru, Rafael; Romero-Vivo, Sergio (Eds.), 2009, XII, 398 p., ISSN: 0170-8643 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1182.93061, MathSciNet: MR2596604).

9. Katkova O.M. A remark about positive polynomials / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Mathematical Inequalities and Applications. – 2010. – Vol. 13, N 4. – P. 753–759 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1205.30008, MathSciNet: MR2760498).

10. Katkova O.M. Multiplier sequences and logarithmic mesh / Olga Katkova, Boris Shapiro and Anna Vishnyakova // Comptes rendus – Mathematique. – 2011. – Vol. 349, N 1-2. – P. 35–38, DOI: 10.1016/j.crma.2010.11.031 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1225.26030, MathSciNet: MR2755692).

11. Csordas G. The generalized Laguerre inequalities and functions in the Laguerre- Pólya class / George Csordas and Anna Vishnyakova // Cent. Eur. J. Math. – 2013. – Vol. 11, N 9. – P. 1643—1650, DOI: 10.2478/s11533-013-0269-x (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1291.30167, MathSciNet: MR3071931).

12. Katkova O.M. The cone of nonnegative polynomials with nonnegative

coefficients and linear operators preserving this cone / Olga Katkova and Anna Vishnyakova // Cent. Eur. J. Math. – 2014. – Vol. 12, N 5. – P. 752–760, DOI: 10.2478/s11533-013-0380-z (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1291.11063, MathSciNet: MR3182557).

13. Bohdanov A. On the conditions for entire functions related to the partial theta function to belong to the Laguerre-Pólya class / Anton Bohdanov and Anna Vishnyakova // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2016. – Vol. 434, N 2. – P. 1740–1752, DOI:10.1016/j.jmaa.2015.09.084 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1327.30029, MathSciNet: MR3415748).

14. Karpenko I. On sufficient conditions for a polynomial to be sign-independently hyperbolic or to have real separated zeros / Irina Karpenko and Anna Vishnyakova // Mathematical Inequalities and Applications. – 2017. – Vol. 20, N 1. – P. 237–245, DOI:10.7153/mia-20-18 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1361.30010, MathSciNet: MR3610898).

15. Katkova O.M. Linear finite difference operators preserving Laguerre-Pólya class / Olga Katkova, Mikhail Tyaglov and Anna Vishnyakova // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2018. – Vol. 63, N 11. – P. 1604–1619, DOI:10.1080/17476933.2017.1400539 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1395.30007, MathSciNet: MR3847101).

16. Nguyen T.H. On the entire functions from the Laguerre-Pólya class having the decreasing second quotients of Taylor coefficients / Thu Hien Nguyen and Anna Vishnyakova // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2018. – Vol. 465, N 1. – P. 348–358, DOI:10.1016/j.jmaa.2018.05.018 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1391.30040, MathSciNet: MR3806708).

Публікації у наукових періодичних спеціалізованих зарубіжних виданнях

17. Katkova O.M. Zero sets of entire absolutely monotonic functions / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Entire functions in modern analysis, Israel Mathematical Conference Proceedings. – 2001. – Vol. 15. – P.

173–205, ISSN: 0792-4119 (Zentralblatt MATH: Zbl 1010.30005, MathSciNet: MR1890537).

18. Katkova O.M. On Power Series Having Sections with Only Real Zeros / Olga M. Katkova, Tetyana Lobova and Anna M. Vishnyakova // Comput. Methods Funct. Theory. – 2003. – Vol. 3, N 2. – P. 425–441 (Zentralblatt MATH: Zbl 1058.30009, MathSciNet: MR2082027).

19. Kadets V. Convexity around the unit of a Banach algebra / Vladimir Kadets, Olga Katkova, Miguel Martin and Anna Vishnyakova // Serdica Math. J. – 2008. – Vol. 34. – P. 619–628 (Zentralblatt MATH: Zbl 1224.46025, MathSciNet: MR2455795).

20. Katkova O.M. On the stability of Taylor sections of a function $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^{k^2}},\ a > 1$ / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Comput. Methods Funct. Theory. – 2009. – Vol. 9, N 1. – P. 305–322 (Zentralblatt MATH: Zbl 1167.30004, MathSciNet: MR2478278).

Публікації, які засвідчують апробацію дисертації

Публікації у матеріалах міжнародних наукових конференцій:

21. Katkova O.M. On the zero sets of absolutely monotonic functions / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Computational Methods and Function Theory : International Conference, June 25-29, 2001 : abstracts. – University of Aveiro, Portugal, 2001. – P. 99.

22. Katkova O.M. On the entire functions with the sections having only real zeros / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // International Akhiezer Centenary Conference "Theory of Functions and Mathematical Phisics" : International Conference, August 13-17, 2001 : abstracts. – Kharkiv, Ukraine, 2001. – P. 44.

23. Vishnyakova A.M. On the power series having sections with only real zeros / Anna M. Vishnyakova, Olga M. Katkova and Tatyana Lobova // Second International Conference "Mathematical Analysis and Economics" :

International Conference, April 1-4, 2003 : abstracts. – Sumy, Ukraine, 2003. – P. 55.

24. Vishnyakova A.M. On the class of entire functions having sections with only real zeros / A.M.Vishnyakova, O.M.Katkova, T.Lobova // International conference dedicated to 125-th anniversary of Hans Hahn : International Conference, June 27 - July 3, 2004 : abstracts. – Chernivtsi, Ukraine, 2004. – P. 165.

25. Vishnyakova A.M. A sufficient condition for a sequence to be Pólya frequency sequence and it applications / Anna Vishnyakova // Computational Methods and Function Theory : International Conference, June 13-17, 2005 : abstracts. – Joensuu, Finland, 2005. – P. 15, `http://www.oppi.uef.fi/wanda/cmft/program.html`

26. Vishnyakova A.M. A sufficient condition for a polynomial to be stable / Anna M. Vishnyakova and Olga M. Katkova // Analysis and related topics : International Conference, November 17-20, 2005 : abstracts. – Lviv, Ukraine, 2005. – P. 110, `http://analysis13.mathlviv.org.ua/analysis-and-related-topics-lviv-ukraine-november-17-20-2005/`

27. Vishnyakova A.M. Some remarks about Hurwitz (stable) polynomials / Anna Vishnyakova and Olga Katkova // Entire and Subharmonic Functions and Related Topics", International Conference dedicated to the centennial of B.Ya.Levin (1906-1993) : International Conference, August 14-17, 2006 : abstracts. – Kharkiv, Ukraine, 2006. – P. 39, `http://www.ilt.kharkov.ua/esfrt06/`

28. Vishnyakova A.M. On real polynomials having at most one real zero / Anna M. Vishnyakova // Analysis and Topology : International Conference, May 26-June 7, 2008 : abstracts. – Lviv, Ukraine, 2008. – P. 53, `http://analysis13.mathlviv.org.ua/analysis-and-topology-lviv-2008-lviv-ukraine-may-26-june-7-2008/`

29. Katkova O.M. Non-asymptotic results on the zero distribution of real polynomials and entire functions / Olga M. Katkova and

Anna M. Vishnyakova // Conference on complex analysis dedicated to the memory of Anatolii Asirovich Goldberg (1930-2008) : International Conference, May 31-June 5, 2010 : abstracts. – Lviv, Ukraine, 2010. – P. 28, http://analysis13.mathlviv.org.ua/conference-on-complex-analysis-dedicated-to-the-memory-of-anatolii-asirovich-goldberg-1930-2008-lviv-ukraine-may-31-june-5-2010/

30. Vishnyakova A. On sufficient conditions for the total positivity of matrices and applications / A. Vishnyakova // IWOTA 2010 : International Conference, July 12-16, 2010 : abstracts. – Technische Universitat Berlin, Germany, 2010. – P. 197, https://www3.math.tu-berlin.de/numerik/iwota_2010/

31. Vishnyakova A.M. Multiplier sequences and logarithmic mesh / A.M. Vishnyakova // Complex analysis and its applications, dedicated to the 70th anniversary of A.F. Grishin : International Conference, August 15-18, 2011 : abstracts. – Kharkov National University, Ukraine, 2011. – P. 40.

32. Bohdanov A. On necessary and sufficient conditions for a function to belong to the Laguerre-Pólya class / Anton Bohdanov and Anna Vishnyakova // III International Conference ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS : International Conference, June 15–19, 2015 : abstracts. – B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine, 2015. – P. 18, http://www.ilt.kharkov.ua/amph2015/

33. Vishnyakova A. Linear finite difference operators and zeros of finite differences of polynomials and entire functions / Anna Vishnyakova // Complex Analysis and Related Topics : International Conference, May 30-June 4, 2016 : abstracts. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine, 2016. – P. 93, http://analysis16.mathlviv.org.ua/

34. Nguyen T.H. On the entire functions from the Laguerre-Pólya class having the decreasing second quotients of Taylor coefficients / Thu Hien

Nguyen and Anna Vishnyakova // International Conference in Functional Analysis Dedicated to the 125th Anniversary of Stefan Banach : International Conference, September 18-23, 2017 : abstracts. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine, 2017. – P. 128, http://www.math.lviv.ua/banach125/BanachAbstract.pdf

35. Vishnyakova A. On the conditions for entire functions related to the partial theta function to belong to the Laguerre-Pólya class / Anna Vishnyakova // Hausdorff Geometry of Polynomials and Polynomial Sequences : International Conference, May 28 - June 1, 2018 : abstracts. – Institut Mittag-Leffler, Sweeden, 2018. – P. 3, http://www.mittag-leffler.se/konferens/hausdorff-geometry-polynomials-and-polynomial-sequences

36. Nguyen T.H. On the conditions for special entire functions to belong to the Laguerre–Pólya class / Thu Hien Nguyen and Anna Vishnyakova // VI International Conference ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS dedicated to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory : International Conference, June 18–22, 2018 : abstracts. –B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine – P. 24, http://www.ilt.kharkov.ua/amph2018/book-ab.pdf

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

У тексті роботи багаторазово зустрічаються наступні (в основному загальноприйняті) позначення:

$\mathcal{CZDS}$ – множина дійсних послідовностей $(\gamma_k)_{k=0}^{\infty}$, таких що для довільного дійсного многочлена $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ число недійсних коренів P не є більшим за число недійсних коренів многочлена $\sum_{k=0}^{n} \gamma_k a_k x^k$.

$\mathcal{HB}$ – клас цілих функцій M, які не мають коренів в замкненій нижній півплощині $\Im z \leqslant 0$ і задовольняють умову $\left|\frac{M(z)}{\overline{M(\bar{z})}}\right| < 1, \quad \Im z > 0$.

$\overline{\mathcal{HB}}$ – клас цілих функцій M, які які не мають коренів у відкритій нижній півплощині $\Im z < 0$ і задовольняють умову $\left|\frac{M(z)}{\overline{M(\bar{z})}}\right| \leqslant 1, \quad \Im z > 0$.

$\mathcal{HP}$ – множина гіперболічних многочленів, тобто дійсних многочленів з усіма дійсними коренями.

$\mathcal{HP}_+$ – множина гіперболічних многочленів з усіма додатними коефіцієнтами.

$\mathcal{L} - \mathcal{P}$ – клас цілих функцій Лаґерра-Поліа, тобто замкнення в топології рівномірної збіжності на компактах множини гіперболічних многочленів.

$\mathcal{L} - \mathcal{P}I$ – клас цілих функцій Лаґерра-Поліа типу I, тобто замкнення в топології рівномірної збіжності на компактах множини гіперболічних многочленів з усіма недодатними коренями.

$\mathcal{MS}$ – клас послідовностей множників, тобто таких дійсних послідовностей $(\gamma_k)_{k=0}^{\infty}$, що для кожного дійсного многочлена $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ з усіма дійсними коренями, многочлен $\sum_{k=0}^{n} \gamma_k a_k z^k$ також має усі дійсні корені.

PF_∞ – клас тотально додатних послідовностей, тобто дійсних послідовностей $(a_k)_{k=0}^{\infty}$, таких що усі мінори нескінченої матриці $\|a_{j-i}\|_{i,j=0}^{\infty}$ є невід'ємними (тут $a_k = 0$ при $k < 0$).

$\widetilde{PF}_\infty$ – клас твірних функцій тотально додатних послідовностей.

PF_m – клас m-кратно додатних послідовностей, тобто дійсних послідовностей $(a_k)_{k=0}^{\infty}$, таких що усі мінори нескінченої матриці $\|a_{j-i}\|_{i,j=0}^{\infty}$ порядків не більше за m є невід'ємними (тут $a_k = 0$ при $k < 0$).

$\widetilde{PF}_m$ – клас твірних функцій m-кратно додатних послідовностей.

$P{*}Q$ – згортка Шура-Сегьо двох многочленів $P(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j x^j$ і $Q(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} b_j x^j$, яка задається формулою $P * Q(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j b_j x^j$.

$P \boxplus Q$ – згортка Уолша многочленів P і Q степеня n, а саме $P \boxplus Q\ (x) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0) \cdot Q^{(n-k)}(x)$.

$\mathbb{R}_m[x]$ – множина дійсних многочленів від змінної x степеня не вище за m.

$\mathbb{R}_m^+[x]$ – множина дійсних многочленів від змінної x степеня не вище за m з усіма невід'ємними коефіцієнтами.

$\mathbb{R}_m^{\geqslant 0}[x]$ – множина дійсних многочленів від змінної x степеня не вище за m, що вони є невід'ємними на всій дійсній осі.

$\mathbb{R}_m^{>0}[x]$ – множина дійсних многочленів від змінної x степеня не вище за m, що вони є додатними на всій дійсній осі.

S_λ – оператор зсуву на $\lambda \in \mathbb{C}$, $S_\lambda : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x] : S_\lambda(P)(x) := P(x - \lambda)$.

STP – множина строго тотально додатних матриць, тобто таких дійсних матриць, у яких усі мінори є додатними.

STP_k – множина строго k-кратно додатних матриць, тобто таких дійсних матриць, у яких усі мінори, що їх порядки не перевищують k, є додатними.

$STP_2(c)$ – клас матриць $M = (a_{ij}),\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ (m, n \in \mathbf{N} \cup \infty)$ з додатними елементами, що вони задовольняють наступну умову: $a_{ij}a_{i+1,j+1} > c\ a_{i,j+1}a_{i+1,j} \quad (1 \leqslant i < m-1,\ 1 \leqslant j < n-1)$.

TP – множина тотально додатних матриць, тобто таких дійсних матриць, у яких усі мінори є невід'ємними.

TP_k – множина k-кратно додатних матриць, тобто таких дійсних матриць, у яких усі мінори, що їх порядки не перевищують k, є невід'ємними.

$TP_2(c)$ – клас матриць $M = (a_{ij}),\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ (m, n \in \mathbf{N} \cup \infty)$ з додатними елементами, що вони задовольняють наступну умову: $a_{ij}a_{i+1,j+1} \geqslant c\ a_{i,j+1}a_{i+1,j} \quad (1 \leqslant i < m-1,\ 1 \leqslant j < n-1)$.

$Z_c(P)$ – число недійсних коренів дійсного многочлена P із урахуванням кратностей.

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Дисертаційна робота присвячена проблемам локалізації коренів комплексних многочленів і цілих функцій. Актуальність задач такого типу не потребує пояснень і посилань, але ми наведемо деякі приклади і історичні факти. Підкреслимо, що нас цікавлять не асимптотичні, а точні твердження щодо розташування коренів, такі як розташування усіх коренів комплексного многочлена в відкритій лівій півплощині (так звані стійкі многочлени), розташування усіх коренів дійсного многочлена на дійсній осі (так звані гіперболічні многочлени), або розташування усіх коренів многочленів з додатними коефіцієнтами поза дійсної осі (позитивні многочлени). Нагадаємо, що одну з найважливіших і найвідоміших відкритих проблем сучасної математики: гіпотезу Рімана, – можна еквівалентно переформулювати як проблему про розташування усіх коренів спеціальної дійсної цілої функції порядку одна друга на дійсної осі.

З теореми Гурвиця випливає, що гіперболічні многочлени (тобто дійсні многочлени з усіма дійсними коренями) можуть збігатися рівномірно на компактах лише до дійсної цілої функції з усіма дійсними коренями. Але виявляється, що не кожна дійсна ціла функція з усіма дійсними коренями є рівномірною на компактах границею гіперболічних многочленів. Видатна теорема Е.Лаґерра і Дж.Поліа (дивись, наприклад, [99, с. 42-46] і [161, глава VIII, §3]) дає повний опис замикання в топології рівномірної збіжності на компактах множини гіперболічних многочленів (клас цілих функцій Лаґерра-Поліа) і множини гіперболічних многочленів з усіма додатними коефіцієнтами (клас цілих функцій Лаґерра-Поліа типу I). Класи Лаґерра-Поліа і Лаґерра-Поліа типу I відіграють визначну роль в комплексному аналізі; щодо цікавих властивостей функцій класів Лаґерра-Поліа і Лаґерра-Поліа типу I, а також різноманітних застосувань і різних еквівалентних характеризацій цих класів, дивись [186, с. 100], [190] або [173, глава II]. Функціям класу Лаґерра-Поліа присвячена велика кількість робіт, ми відзначимо лише декілька з них. В роботах [60] Т.Кравена, Дж.Ксордаша і В.Сміта, [136] Х.Кі і Й.Кіма доводиться гіпотеза Дж.Поліа про те, що для дійсної цілої функції порядку меншого за два зі скінченою кількістю недійсних коренів похідна деякого порядку належить до класу Лаґерра-Поліа. В роботах [25] В.Бергвайлера, А.Еременко і Дж. Ленглі, а також [24] В.Бергвайлера і А.Еременко доводиться гіпотеза А. Вімана про кількість недійсних коренів похідних дійсних цілих функцій порядку більше за два. Серед нещодавніх робіт, пов'язаних з класом Лаґерра-Поліа, відзначимо роботи Д.Кардона [49], М.Лампрехта [159], Дж. Ксордаша і Т.Фордаша [61], А.Богданова [32], А.Барича і С.Сінгха [19] і П.Батри [21].

Питання про те, чи належить дана ціла функція порядку меншого за два до класу Лаґерра-Поліа, тобто чи має вона тільки дійсні корені, може бути дуже складним. В нашій роботі особливу роль відіграє спеціальна ціла функція: так звана часткова тета-функція $g_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^{k^2}}, \ a > 1$. Ця функція має багату історію досліджень. Наведена нижче історія дослідження часткової тета-функції була повідомлена нам відомим дослідником часткової тета-функції та інших важливих спеціальних функцій С.О.Варнааром (приватне повідомлення). Як повідомляє С.О.Варнаар, мабуть, вперше часткова тета-функція з'являється (не під цим ім'ям) в 1844 році в двох роботах Дж.Еізенштейна (дивись [72] і [73]). В цих роботах Дж.Еізенштейн досліджує представлення часткової тета-функції ланцюговим дробом, з якого отримує ірраціональність деяких спеціальних чисел. Двома роками пізніше Е.Гейне [97] перевідкриває представлення цієї функції ланцюговим дробом, а також представляє ланцюговими дробами деякі гіпергеометричні функції. У 1915 році результати Дж.Еізенштейна про ірраціональність спеціальних чисел були посилені в сумісній роботі Ф.Берштейна і О.Сатца ([26]), а пізніше ще в одній в роботі О.Сатца ([209]). Невдовзі після цього Л.Шакалов (дивись [214] і [215]) дослідив не тільки ірраціональність, але лінійну незалежність над $\mathbb{Q}$ тих самих чисел. Крім того, Л.Шакалов вперше відзначив функціональне рівняння для часткової тета-функції: $g_a(az) = 1 + g_a\left(\frac{z}{a}\right)$. Пізніше часткова тета-функція неодноразово з'являється в роботах С.Рамануджана. У "втраченому записнику" С.Рамануджана є багато красивих тотожностей з частковою тета-функцією. Саму назву "часткова тета-функція" (англійською "partial theta-function") дав Дж.Андрюс в роботах [16] і [17] (дивись також [233]). Відмітимо, що дослідження цікавих властивостей коренів часткової тета-функції і коренів її похідних, а також інші результати, пов'язані з частковою тета-функцією, можна знайти у великої серії цікавих робіт В.П.Костова [141], [142], [143], [144], [147], [145], [146], [148], [149] і [150]. Вивченню властивостей часткової тета-функції присвячені, наприклад, роботи [108] С.Йо і Б.Кіма, [137] Б.Кіма, Е.Кіма і Й.Сео, [138] С.Кімпорта, [206] А.Сокала, [102] С.Ху і М.-С. Кіма. У нещодавньому препринті Р.Флореса і Ж.Гонзалеса-Менесеса обговорюється важлива роль часткової тета-функції при дослідженні зростання моноїдів Артіна-Тітса (дивись [81]).

Концепція тотальної додатності (в тому числі, тотальна додатність матриць) відіграє важливу роль у різних розділах математики, статистики і механіки. В математиці тотально додатні функції і матриці виникають в проблемах, пов'язаних з розташуванням коренів дійсних многочленів, опуклістю, проблемами моментів, власними значеннями інтегральних операторів, осциляційними властивостями рішень лінійних диференціальних рівнянь, в теорії апроксимації і інших областях дійсного аналізу. Тотально додатним матрицям присвячена низка важливих робіт, і, в силу особливої важливості цього поняття, о тотально додатних матрицях написано декілька монографій і великих оглядових робіт, таких як класична монографія С.Карліна "Total positivity" 1968 року ([111]), великий огляд Т.Андо "Totally Positive Matrices" 1987 року ([15]), монографія А.Пінкуса "Totally Positive Matrices" 2010 року ([185]), монографія Ш.Фаллата і Ч.Джонсона "Totally Nonnegative Matrices" 2011 року ([75]), та інші. Монографія Аллана Пінкуса [185] присвячена пам'яті І.Дж.Шонберга, М.Г.Крейна, Ф.Р.Гантмахера і С.Карліна – "чотирьом піонерам теорії тотальної додатності". Знаменита теорема М.Еіссена, А.Едрея, І.Шонберга і А.Уітні [11] (дивись також [111, с. 412]) стверджує, зокрема, що многочлен з додатними коефіцієнтами має усі дійсні (від'ємні) корені тоді і тільки тоді, коли побудована по коефіцієнтах многочлена нескінченна тепліцева матриця є тотально додатною. Ця важлива теорема встановлює зв'язок між гіперболічними многочленами (а також цілими функціями класу Лагера-Поліа) і тотально додатними матрицями. Серед нещодавніх досліджень тотально додатних матриць відмітимо роботи [79] М.Фідлера, [183] Х.Пеньї, [21] П.Батри, [8] М.Адма і Ю.Гарлоффа, [9] М.Адма, Ю.Гарлоффа і М.Тяглова, [76] Ш.Фаллата, Ч.Джонсона і А.Сокала. Відзначимо, що перевірка тотальної додатності для заданої матриці потребує, взагалі кажучи, не аби яких зусиль, тому отримання будь-якої зручної достатньої умови тотальної додатності є дуже актуальним завданням.

Можливо, найбільш наглядно практична необхідність точних методів локалізації коренів комплексних многочленів демонструється у зв'язку з проблемами стійкості положення рівноваги динамічної системи. Як добре відомо, при досить загальних припущеннях, положення рівноваги є стійким, коли характеристичний многочлен лінеаризованої системи має усі корені у відкритій лівій півплощині. Комплексні многочлени, усі корені яких розташовані у відкритій лівій півплощині $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$, називаються стабільними, або стійкими. Задачі дослідження стійкості рішень систем диференціальних рівнянь виникли в середині XIX віку у зв'язку з ненадійною роботою (і навіть вибухами) парових машин. Першим видатним результатом про стійкість комплексних многочленів був знаменитий критерій стійкості Ерміта-Білера (дивись [28] і [98], або [161, глава VII]). Цей критерій встановлює глибокий зв'язок між стійкими многочленами і гіперболічними многочленами. Існує інший знаменитий критерій стабільності для дійсного многочлена – критерій Рауса і Гурвиця (дивись, наприклад, [84, с. 225-230], або [5, с. 83-87]). Цей критерій пов'язує стійкість дійсного многочлена з додатністю головних мінорів спеціальної матриці, побудованої по коефіцієнтах многочлена (так званої матриці Гурвиця). Виявляється, що матриця Гурвіця стійкого многочлена є тотально додатною, дивись на цю тему роботи [18] Б.А.Аснера-молодшого, [135] Дж.Кемпермана і [182] Х.Пеньї. Таким чином, є прямий глибокий зв'язок між тотальною додатністю матриць, гіперболічністю многочленів і стійкістю многочленів. Вивченню стійкості спеціальних многочленів присвячено багато досліджень, ми згадаємо тільки декілька робіт останніх років: [229] Д.Вагнера, [236] Л.Хи, [181] Р.Пемантла, [235] Х.Й.Вердермана, [171] Ю.Нургеса, Ю.Белікова і І.Артемчука, [9] М.Адма, Ю.Гарлоффа і М.Тяглова, [192] К.Пурбху і [20] А.Барвінока.

Одною з дуже важливих проблем в теорії розподілу коренів многочленів і трансцендентних цілих функцій є опис лінійних операторів, які переводять сукупність многочленів з усіма коренями в заданій множині у сукупність многочленів з усіма коренями в іншій заданій множині. Дуже важливими є випадки, коли обидві множини дорівнюють дійсній осі, лівій півплощині або комплексній площині без дійсної осі. Ш. Ерміт і, пізніше, Е. Лаґерр були, можливо, першими, хто почав вивчати подібні типи проблем систематично. В 1914 році Дж.Поліа і Г.Сеге [190] дали повний опис лінійних операторів, які є діагональними в стандартному мономіальному базисі 1, x, x^2, ... простору $\mathbb{R}[x]$ і зберігають множину гіперболічних многочленів. Дж.Поліа отримав, мабуть, перший результат про збереження класу $\mathcal{L}-\mathcal{P}$ лінійними скінченно-різничними операторами. Пізніше вивчення лінійних операторів, які переводять множину гіперболічних многочленів в себе, було продовжено багатьма відомими авторами, включаючи Н.Обрешкова, С.Карліна, Б.Я.Левіна, Дж.Ксордаша, Т.Кравена, К. де Бура, Р.Варгу, А.Ісерліса, С.Норсетта, Е.Саффа і багатьох інших. Серед сучасних авторів варто особливо відмітити П.Брандена і Дж.Борсеа [37] (дивись також [38, 39]), які повністю характеризували усі лінійні оператори, які зберігають гіперболічність (а також оператори, які зберігають корені в деяких інших множинах, таких як відкрита півплощина або коло). Важливим окремим випадком є оператори, які зберігають множину додатних многочленів. Додатні многочлени виникають у багатьох важливих областях математики. Велика кількість робіт видатних математиків присвячена лінійним операторам, що вони зберігають множину додатних (невід'ємних) многочленів, та пов'язаних з цим питань (дивись, наприклад, [12], [93] і [202], а також посилання в цих джерелах, дивись також [36] для численних відкритих питань, пов'язаних з цією темою). Серед нещодавніх робіт, присвячених операторам, які переводять многочлени з усіма коренями в заданій множині у многочлени з усіма коренями в іншій заданій множині, ми відмітимо [41] П.Брандена, в якій вивчаються важливі нелінійні оператори, [49] Д.Кардона, [61] Дж.Ксордаша і Т.Фордаша, [46] П.Брандена, І.Красікова і Б.Шапіро, [90] М.Голіциної і І.Карпенко, [159] М.Лампрехта, [43] П.Брандена і М.Чассе, [42] П.Брандена і [44] П.Брандена і Л.Солюса.

Один з перших результатів про лінійні оператори, які не зменшують меш гіперболічних многочленів (тобто мінімальну відстань між різними коренями многочлена), належить М.Рису, але став відомим завдяки А.Стоянову (дивись [208]). А.Стоянов у своїй роботі дає просте доведення того факту, що оператор диференціювання не зменшує меш гіперболічного многочлена, про цей результат А.Стоянов пише, що формулювання і досить складне доведення належить М.Рису. Пізніше теорема М.Риса перевідкривалася і заново доводилася багатьма авторами, дивись, наприклад, роботу Р.Гелки [86], або П.Волкера [230] і [231]. Велика увага надається проблемам відділення коренів многочленів і властивостям лінійних операторів, які не зменшують меш гіперболічних многочленів, у фундаментальному томі С.Фіска [80]. Зокрема, С.Фіск довів, що лінійний оператор, який зберігає гіперболічність і комутує з операторами зсуву, не зменшує меш гіперболічного многочлена. Відмітимо, що сам С.Фіск формулював цю теорему в зовсім інших термінах. Не дуже легко з'ясувати, що теорема С.Фіска дає твердження, що воно сформульоване вище. В роботі

[46] П.Брандена, І.Красікова і Б.Шапіро доведено, що жоден нетривіальний лінійний скінченно-різничний оператор з дійсним зсувом не зберігає множину гіперболічних многочленів. Також в [46] доведено, що лінійний скінченно-різничний оператор з дійсним зсувом λ зберігає множину гіперболічних многочленів з мешем не меншим за λ тоді і тільки тоді, коли усі корені твірної функції є дійсними і невід'ємними. Це твердження є аналогом знаменитої теореми Лагера-Поліа для скінченно-різничних операторів. Серед нещодавніх робіт, присвячених мірам відділення коренів гіперболічних многочленів і цілих функцій відмітимо роботи [168] М.Мігнота, [51] С.Чайі, [66] М.Демера і А.Іліча, [77] Д.Фармера, [89] М.Голіциної, в якої описано замкнення в топології рівномірної збіжності на компактах множини гіперболічних многочленів з мешем (гіперболічним мешем), більшим за дане число, [70] А.Дуджели і Т.Пейковича, а також роботу [204] Б.Шапіро, яка містить декілька цікавих гіпотез щодо мешу многочленів. Тому дослідження мір відділення коренів многочленів і цілих функцій під дією важливих лінійних операторів є надзвичайно актуальними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі теорії функцій і функціонального аналізу і на кафедрі фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Результати дисертації є складовою частиною держбюджетних науково-дослідних робіт "Алгебраїчні та аналітичні методи дослідження груп, класів функцій, операторів та пов'язаних з ними об'єктів" (номер державної реєстрації 0106U003141), "Дослідження з гомологічної алгебри та теорії функцій" (номер державної реєстрації 0109U000613), "Розробка і застосування алгебраїчних і теоретико-функціональних методів" (номер державної реєстрації 0112U001059), "Розробка теоретико-функціональних методів та їх застосування в теорії операторів та математичній статистиці" (номер державної реєстрації 0115U000481) та "Оператори в банахових, гільбертових, функціональних просторах та квазікришталі Фур'є" (номер державної реєстрації 0118U002036).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є побудова нової теорії і знаходження нових методів дослідження локалізації і розділення коренів многочленів і цілих функцій, зв'язку розташування коренів з властивостями коефіцієнтів цих функцій, а також отримання опису і дослідження властивостей лінійних операторів, які зберігають гіперболічність, стійкість і позитивність.

Об'єкт дослідження – гіперболічні, стійкі і позитивні многочлени, цілі функції класів Лаґерра-Поліа і Лаґерра-Поліа типу I, лінійні оператори, які зберігають гіперболічність, стійкість і позитивність.

Предметом дослідження служить зв'язок властивостей розташування коренів многочленів і цілих функцій з властивостями коефіцієнтів цих функцій, властивості цілих функцій класів Лаґерра-Поліа і Лаґерра-Поліа типу I, а також опис і властивості лінійних операторів, які зберігають гіперболічність, стійкість і позитивність.

Основні завдання дослідження:

– отримати зручну достатню умову кратної позитивності і тотальної позитивності матриць, застосувати її для дослідження розташування коренів частотних послідовностей Поліа, властивостей моментних послідовностей Гамбургера і позитивних многочленів;

– отримати достатні умови стійкості комплексних многочленів і умови розташування коренів цілих функцій у лівій півплощині; дослідити необхідні і достатні умови для того, щоб часткова тета-функція мала стійкі відрізки ряду Тейлора;

– отримати достатню умову додатності на дійсній осі многочлена з додатними коефіцієнтами; знайти опис крайніх напрямків конуса многочленів з додатними коефіцієнтами, які є невід'ємними на дійсній осі і мають степінь не більшу за дане число; знайти опис діагональних в стандартному мономіальному базисі лінійних операторів, які зберігають вказаний конус; знайти найменший можливий порядок нескалярного лінійного диференціального оператора з поліноміальними коефіцієнтами, який зберігає вказаний конус;

- отримати характеризацію нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, якщо ці множини не перетинають деякий кут $\{z : |\arg z - \pi| < \alpha\}$ для $\alpha > 0$; знайти нову необхідну умову для тих частин нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, які розташовані у вказаному куті; отримати неперервний аналог відомої теореми М. Фекете і Дж. Поліа про домноження додатного многочлена на експоненту;
- дослідити належність до класу Лаґерра-Поліа часткової тета-функції і її відрізків ряду Тейлора; а також належність до класу Лаґерра-Поліа деяких інших важливих спеціальних цілих функцій і їх відрізків ряду Тейлора; отримати нові необхідні і достатні умови належності цілої функції до класу Лаґерра-Поліа (узагальнені нерівності Лаґерра і комплексні нерівності Лаґерра);
- отримати оцінки для мешу гіперболічного многочлена і логарифмічного мешу гіперболічного многочлена з додатними коефіцієнтами через коефіцієнти многочлену; дослідити логарифмічний меш згортки Шура-Сеге двох гіперболічних многочленів; знайти точну оцінку знизу на меш образу гіперболічного многочлена під дією центрально-різничного лінійного оператора;
- знайти повний опис лінійних скінченно-різничних операторів зі сталими коефіцієнтами, які зберігають множину гіперболічних многочленів, і які зберігають множину многочленів з коренями у смузі; дослідити властивості коренів образу центрально-різничного лінійного оператора від цілої функції класу Лаґерра-Поліа; отримати повний опис лінійних скінченно-різничних операторів з цілими коефіцієнтами, які зберігають клас цілих функцій Лаґерра-Поліа.

Методами дослідження служать методи комплексного аналізу, дійсного аналізу, лінійної алгебри і функціонального аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. В дисертаційній роботі побудовано нову теорію і знайдено нові методи дослідження зв'язків розташування коренів многочленів і цілих функцій з властивостями коефіцієнтів цих функцій, а також отримані описи і досліджено властивості лінійних операторів, які зберігають гіперболічність, стійкість і позитивність. Зокрема, в дисертаційній роботі отримані наступні нові наукові результати:

- отримано нову достатню умову кратної позитивності і тотальної позитивності дійсних матриць заданого розміру; доведено, що ця умова є точною для кожного фіксованого розміру матриць в класі ганкелевих матриць і в класі тепліцевих матриць; отримані нові достатні умови для послідовності, щоб вона була частотною послідовністю Поліа, а також для того, щоб твірна функція послідовності не мала коренів в заданому куті; отримано нову достатню умову для додатної послідовності, щоб вона була моментною послідовністю Гамбургера; отримано нову достатню умову додатності на всій дійсній осі многочлена з додатними коефіцієнтами;
- отримано нову зручну достатню умову стійкості комплексних многочленів, а також достатню умову розташування коренів цілих функцій у відкритій лівій півплощині, а також перевірено, що ці умову не можна покращити; знайдено необхідні і достатні умови для того, щоб часткова тета-функція мала стійкі відрізки ряду Тейлора, а також мала усі корені у відкритій лівій півплощині;
- знайдено повний опис крайніх напрямків конусу многочленів з додатними коефіцієнтами, які є невід'ємними на дійсній осі і мають степінь не більшу за дане число; знайдено повний опис діагональних в стандартному мономіальному базисі лінійних операторів, які зберігають вказаний конус; знайдено найменший можливий порядок нескалярного

лінійного диференціального оператора з поліноміальними коефіцієнтами, який зберігає вказаний конус;

- отримано неперервний аналог відомої теореми М. Фекете і Дж. Поліа про домноження додатного многочлена на експоненту; отримано характеризацію нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, якщо ці множини не перетинають деякий кут $\{z : |\arg z - \pi| < \alpha\}$ для $\alpha > 0$; знайдено нову необхідну умову для тих частин нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, які розташовані у вказаному куті;

- знайдено, при яких значеннях параметру часткова тета-функція, а також її відрізки ряду Тейлора належать до класу Лаґерра-Поліа; досліджено належність до класу Лаґерра-Поліа низки інших важливих спеціальних цілих функцій і їх відрізків ряду Тейлора; доведено, що узагальнені нерівності Лаґерра, а також комплексні нерівності Лаґерра, є необхідними і достатніми умовами належності цілої функції до класу Лаґерра-Поліа;

- отримані оцінки для мешу гіперболічного многочлена і логарифмічного мешу гіперболічного многочлена з додатними коефіцієнтами через коефіцієнти многочлену; доведено, що логарифмічний меш згортки Шура-Сеге двох гіперболічних многочленів не є меншим за максимум логарифмічних мешів многочленів; отримано точну оцінку знизу на меш образу гіперболічного многочлена під дією центрально-різничного лінійного оператора зі сталими коефіцієнтами;

- отримано повний опис лінійних скінченно-різничних операторів зі сталими коефіцієнтами, які зберігають множину гіперболічних многочленів і які зберігають множину многочленів з коренями у смузі; доведені важливі властивості коренів образу центрально-різничного лінійного оператора від цілої функціях класу Лаґерра-Поліа, такі як простота коренів і мінімальний меш образу; отримано повний опис лінійних скінченно-різничних операторів, коефіцієнти яких є цілими функціями, що вони зберігають клас цілих функцій Лаґерра-Поліа.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Результати, що їх отримано в дисертаційній роботі, поглиблюють наші знання про розподіл і розташування коренів комплексних многочленів і цілих функцій, а також про лінійні оператори, які зберігають гіперболічність, стійкість або позитивність многочленів. Результати і методи дисертаційної роботи можуть бути використаними в в різноманітних математичних областях, у яких важливо отримати точну інформацію щодо розташування коренів многочленів або цілих функцій, таких як дійсний аналіз, теорія функцій комплексної змінної, диференціальні рівняння, лінійна алгебра, функціональний аналіз і багато інших.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати, включені в дисертацію, отримані її автором особисто. Результати, які належать співавторам і іншим математикам, цитуються в роботі без доведень. Всі результати інших математиків, що вони використовуються в роботі, супроводжуються відповідними посиланнями. З результатів праць, виконаних у співавторстві, на захист виносяться лише положення, які одержані автором дисертації. Тепер детальніше по кожній із статей.

Ольга Каткова – мій співавтор по роботі [116]. В дисертаційній роботі наведені теорема і приклад, які належать автору. Інша теорема цієї роботи, яка належить О.Катковій, сформульована в роботі без доведення.

Ольга Каткова – мій співавтор по роботі [117]. Ользі Катковій належить постановка задачі і цінні обговорення щодо методів доведення. Наведена в дисертації теорема належить автору.

Ольга Каткова і Ерхард Беренс – мої співавтори по роботі [22]. Ерхарду Беренсу належить постановка задачі. Ользі Катковій належить інше доведення теореми, яке не увійшло в кінцевий варіант статті. Наведена в дисертації теорема належить автору.

Ольга Каткова – мій співавтор по роботі [118]. В дисертацію включена лише одна теорема з цієї роботи, яка належить автору. Інші теореми цієї роботи, які належать Ользі Катковій, в дисертацію не включені і не цитуються в ній.

Ольга Каткова і Тетяна Лобова – мої співавтори по роботі [121]. Тетяна Лобова на той час була моєю дипломницею. Теореми, які належать Ользі Катковій і Тетяні Лобовій, не включені в дисертаційну роботу і не цитуються в ній.

Ольга Каткова – мій співавтор по роботі [122]. Ользі Катковій належить остаточна постановка задачі, важливі поради щодо методів розв'язання проблеми і перевірка результатів. Наведені в дисертації результати належать автору.

Ольга Каткова і Тетяна Лобова-Ейснер – мої співавтори по роботі [123]. Результати, які належать Ользі Катковій і Тетяні Лобовій-Ейснер, цитуються в дисертаційній роботі без доведень. Результати, які включені в дисертаційну роботу з доведеннями, належать автору.

Ольга Каткова – мій співавтор по роботі [124]. Ользі Катковій належить постановка задачі, обговорення методів доведення, деякі технічні обчислення і перевірка результатів. Теореми, які наведені в дисертаційній роботі, належать автору.

Ольга Каткова – мій співавтор по роботі [125]. Ользі Катковій належать постановка задачі і перевірка отриманих результатів. Результати, які включені в дисертаційну роботу, належать автору.

Володимир Кадець, Мігель Мартін і Ольга Каткова – мої співавтори по роботі [110]. Володимиру Кадецю і Мігелю Мартіну належить постановка задачі, а також результати цієї статті, які не включені в дисертацію. Ользі Катковій належить інший доказ теореми, який не увійшов до кінцевого варіанту статті. Теорема, яка наведена в дисертаційній роботі, належить автору.

Ольга Каткова – мій співавтор по роботі [126]. Ользі Катковій належить постановка задачі, а також обговорення методів доведення і перевірка результатів. Теорема, яка наведена в дисертаційній роботі, належить автору.

Ольга Каткова – мій співавтор по роботі [127]. Результат, який належить Ользі Катковій, наводиться в дисертації без доведення. Інші результати цієї роботи, які включені до дисертації, належать автору.

Ольга Каткова – мій співавтор по роботі [128]. Ользі Катковій в цій роботі належить теорема, яка цитується в дисертаційній роботі без доведення. Результати, які наведені в дисертаційній роботі з доведеннями, належать автору.

Ольга Каткова і Борис Шапіро – мої співавтори по роботі [130]. Борису Шапіро належить постановка задачі і обговорення результатів. Ользі Катковій належать обговорення отриманих результатів і деякі цікаві приклади, які не увійшли в остаточний варіант статті. Теорема, яка наведена в дисертаційній роботі, належить автору.

Джордж Ксордаш – мій співавтор по роботі [65]. Джорджу Ксордашу належать постановки задач і деякі технічні обговорення. Результати цієї роботи, які включені в дисертацію, належать автору.

Ольга Каткова – мій співавтор по роботі [131]. Ользі Катковій належать постановка задачі, обговорення щодо методів доведення і перевірка отриманих результатів. Результати, які включені в дисертаційну роботу, належать автору.

Антон Богданов – мій співавтор по роботі [33]. Автору належать постановки задач і методи їх розв'язання. Антону Богданову належать деякі технічні обчислення і перевірка результатів. Включені в дисертаційну роботу результати належать автору.

Ірина Карпенко (на той час моя дипломниця) – мій співавтор по роботі [133]. Теорема із цієї роботи, яка належить Ірині Карпенко, не включена в дисертацію і не цитується в ній. Включені в дисертаційну роботу результати належать автору.

Ольга Каткова і Михаїл Тяглов – мої співавтори по роботі [134]. Михаїлу Тяглову належать постановки деяких задач і цікаві комп'ютерні обчислення, які не увійшли в остаточний текст роботи. Ользі Катковій належить теорема, яка наведена в дисертаційній роботі без доведення. Включені в дисертацію результати [134] належать автору.

Тху Хієн Нгуєн (на той час моя дипломниця, а зараз аспірантка) – співавтор по роботі [213]. Тху Хієн Нгуєн належать деякі технічні обчислення і перевірка результатів. Включені в дисертаційну роботу результати належать автору.

Апробація матеріалів дисертації. Усі публікації автора за темою дисертації є у вільному доступі на інтернет-ресурсі Research Gate (`https://www.researchgate.net/profile/Anna_Vishnyakova/contributions/`).

Матеріали дисертації доповідалися на Харківському міському семінарі по теорії функцій (багаторазово, починаючи з 2000 року), на математичному семінарі університету Альгарве, Португалія (2001 рік), на математичному семінарі університету Тюбінгена, Німеччина (2004 рік), на міні-семінарах під час семінару «Проблеми Поліа-Шура-Лакса: збереження гіперболічності і стабільності" в Американському інституті математики, Пало-Алто, США (2007 рік), на семінарі математичного факультету університету Анкари, Турція (2009 рік), на семінарі математичного відділення Стокгольмського університету, Швеція (2010 рік), на міні-семінарах під час семінару «Стабільність, гіперболічність і локалізація коренів функцій" в Американському інституті математики, Пало-Алто, США (2011 рік), двічі на семінарах з аналізу математичного факультету Шанхайського університету, Китай (2015 рік).

По матеріалах дисертаційної роботи були зроблені доповіді на 16 міжнародних конференціях: "Computational Methods and Function Theory", Авейро, Португалія (2001 рік, [119]), International Akhiezer Centenary Conference "Theory of Functions and Mathematical Phisics", Харків, Україна (2001 рік, [120]), Second International Conference "Mathematical Analysis and Economics", Суми, Україна (2003 рік, [218]), "International conference dedicated to 125-th anniversary of Hans Hahn", Чернівці, Україна (2004 рік, [219]), "Computational Methods and Function Theory", Джонсу, Фінляндія (2005 рік, [220]), "Analysis and related topics", Львів, Україна (2005 рік, [221]), "Entire and Subharmonic Functions and Related Topics", International Conference dedicated to the centennial of B.Ya.Levin (1906-1993), Харків, Україна (2006 рік, [222]), "Analysis and Topology", Львів, Україна (2008 рік, [223]), "Conference on complex analysis dedicated to the memory of Anatolii Asirovich Goldberg (1930-2008)", Львів, Україна (2010 рік, [129]), IWOTA 2010, Берлін, Німеччина (2010 рік, [224]), "Complex analysis and its applications" dedicated to the 70th anniversary of A.F. Grishin, Харків, Україна (2011 рік, [225]), III International Conference ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS, Харків, Україна (2015, рік, [31]), "Complex Analysis and Related Topics", Львів, Україна (2016 рік, [226]), "International Conference in Functional Analysis Dedicated to the 125th Anniversary of Stefan Banach", Львів, Україна (2017 рік, [169]), "Hausdorff Geometry of Polynomials and Polynomial Sequences", Стокгольм, Швеція (2018 рік, [227]) і VI International Conference ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS dedicated to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory, Харків, Україна (2018 рік, [170]).

Публікації. Включені до дисертації результати автора опубліковані у 20 наукових статтях, з них 13 статей в міжнародних журналах, які мають імпакт-фактор і входять до міжнародних наукових баз (Scopus і Web of Science): [117], [22], [124], [125], [127], [128], [130], [65], [131], [33], [133], [134] і [213]. Ще три статті опубліковані в у фахових виданнях України: стаття [116] – в журналі " Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics ", статті [122] і [123] – в журналі Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. Ще чотири статті опубліковані у спеціалізованих зарубіжних виданнях: [118] – в спеціальному випуску серії "Israel Mathematical Conference Proceedings", статті [121] і [126]

– в міжнародному журналі “Computational Methods and Functional Theory” і стаття [110] – в міжнародному журналі “Serdica Mathematical Journal”. Усі 20 статей реферуються у міжнародній математичній реферативній базі даних Zentralblatt, 19 статей (усі, окрім [116]) реферуються у міжнародній математичній реферативній базі даних MathSciNet (MathReviews).

Результати дисертації також викладені в наступних 16 публікаціях апробаційного характеру (тезах доповідей на міжнародних конференціях): [119], [120], [218], [219], [220], [221], [222], [223], [129], [224], [225], [31], [169], [227] і [170].

Жоден результат кандидатської дисертації автора, захищеної в Харківському національному університеті ім. В.Н.Каразина (на той час Харківський державний університет ім. А.М.Горького) у 1993 році, не є включеним в цю дисертаційну роботу.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається з анотацій, списку публікацій здобувача за темою дисертації, “змісту”, переліку умовних позначень, вступу, п’яти розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 237 найменувань і займає 26 сторінок, а також додатку А. Список використаних джерел побудований в алфавітному порядку, при цьому спочатку цитуються роботи кирилицею, а потім латиницею.

Повний обсяг дисертаційної роботи – 324 сторінок. Обсяг основної частини дисертації – 266 сторінок.

РОЗДІЛ 1

ДОСТАТНІ УМОВИ ДЛЯ ТОТАЛЬНОЇ ДОДАТНОСТІ І ДЛЯ КРАТНОЇ ДОДАТНОСТІ МАТРИЦЬ ІЗ НЕВІД'ЄМНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

1.1 Деякі визначення, базові факти та формулювання результатів

Добре відомо, що відповіді на багато важливих математичних питань можуть бути надані у вигляді умов додатності мінорів спеціальних матриць (або умови, що деякі мінори не дорівнюють нулю). У цьому розділі ми наведемо достатні умови для того, щоб усі мінори матриці були додатними.

Ми нагадуємо, що матриця A із дійсними елементами називається k-кратно додатною, якщо усі мінори A, що їх порядки не перевищують k, є невід'ємними. Матриця A із дійсними елементами називається тотально додатною, або нескінченно додатною, якщо усі мінори A є невід'ємними. Більш детально про введені поняття та їх численні застосування у різних розділах математики, статистики і механіки дивись фундаментальний огляд Т.Андо [15], монографію С.Карліна ([111]), монографію А.Пінкуса ([185]), монографію Ш.Фаллата і Ч.Джонсона [75], та списки використаної літератури у цих джерелах. Згідно з монографією С.Карліна ([111]), ми будемо позначати клас k-кратно додатних матриць через TP_k, і клас тотально додатних матриць через TP (від англійського "totally positive"). Крім того, ми будемо позначати через STP_k клас дійсних матриць, для яких усі мінори порядків не вище за k є додатними, і через STP клас дійсних матриць, усі мінори яких є додатними (від англійського "strictly totally positive").

Відзначимо, що перевірка тотальної додатності для заданої матриці потребує, взагалі кажучи, не аби яких зусиль, оскільки матриця розміру $n\times n$

має $\binom{2n}{n} - 1 \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}, \ n \to \infty$, мінорів. В деяких випадках кількість мінорів, що їх треба обчислити, можна значно скоротити. Відома теорема М.Фекете (дивись, наприклад, [78], або [111, стор. 58, теорема 3.1]) твердить, що, якщо у матриці усі мінори, побудовані з рядків і стовпців з підряд взятими номерами, є строго додатними, то усі мінори цієї матриці є строго додатними. Кількість мінорів, побудованих з рядків і стовпців з підряд взятими номерами, у матриці розміру $n \times n$ дорівнює $\sum_{j=1}^{n} j^2 \approx \frac{n^3}{3}, \ n \to \infty$. Таким чином, перевірка тотальної додатності потребує великої кількості обчислень.

Наступна теорема Т.Кравена і Дж.Ксордаша дає зручну для застосування достатню умову тотальної додатності.

Теорема 1.1.1. (Т.Кравен і Дж.Ксордаш, [54]). Позначимо через $\tilde{c}$ єдиний дійсний корінь рівняння $x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0$ ($\tilde{c} \approx 4.0796$). Нехай $M = (a_{ij})$ є матрицею розміру $n \times n$, яка має наступні властивості:
(a) $a_{ij} > 0, \ 1 \leqslant i, j \leqslant n$;
(b) $a_{ij} a_{i+1,j+1} \geqslant \tilde{c} \ a_{i,j+1} a_{i+1,j}, \ 1 \leqslant i, j \leqslant n - 1$.
Тоді $M \in STP$, тобто усі мінори матриці M є додатними.

Оскільки питання додатності визначника матриці, або твердження, що визначник матриці не дорівнює нулю, є дуже важливими, існує велика кількість достатніх умов додатності визначника, або невиродженості матриці. Як приклад приведемо відому теорему С.Гершгоріна.

Теорема 1.1.2. ([84, глава XIV, параграф 5]). Нехай $M = (a_{ij})$ є матрицею розміру $n \times n$ з комплексними елементами. Для кожного $i = 1, 2, \ldots, n$ позначимо через $R_i = \sum_{j: j \neq i} |a_{ij}|$ і через $D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leqslant R_i\}$ (так звані кола Гершгоріна). Тоді кожне власне число матриці M належить до області $\cup_{i=1}^{n} D_i$. Зокрема, якщо матриця $M = (a_{ij})$ задовольняє умову $\sum_{j: j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ для усіх i, то визначник матриці не дорівнює нулю.

Існують і інші достатні умови невиродженості матриці. Зазвичай, такі умови формулюються наступним чином: якщо матриця M має представлення $M = I + T$, де I є одиничною матрицею, а T є в деякому сенсі "маленькою" (наприклад, має деяку операторну норму, строго меншу за одиницю), то матриця M є невиродженою. Тобто, зазвичай умови невиродженості матриці формулюються як умови лідирування головної діагоналі матриці над іншими елементами цієї матриці (головна діагональ може бути замінена на інший фіксований доданок визначника). Відмітимо, що всі умови такого типу не наслідуються підматрицями даної матриці (наприклад, головна діагональ підматриці не складаються, взагалі кажучи, з елементів головної діагоналі самої матриці). Теорема Т.Кравена і Дж.Ксордаша дає умову додатності визначника нового типу. Як буде доведено далі в лемі 1.2.2, якщо матриця з додатними елементами задовольняє умову типа умови (b) теореми 1.1.1, то кожна її підматриця задовольняє цю ж умову.

Для формулювання нашого результату нам потрібне нове визначення.

Означення 1.1.3. Для даного фіксованого $c \geqslant 1$ ми будемо позначати через $TP_2(c)$ клас матриць $M = (a_{ij}),\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ (m, n \in \mathbf{N} \cup \infty)$ з додатними елементами, що вони задовольняють наступну умову:

$$a_{ij}a_{i+1,j+1} \geqslant c\ a_{i,j+1}a_{i+1,j} \quad (1 \leqslant i < m-1,\ 1 \leqslant j < n-1). \tag{1.1}$$

Ми будемо позначати через $STP_2(c)$ клас матриць $M = (a_{ij}),\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ (m, n \in \mathbf{N} \cup \infty)$ з додатними елементами, що вони задовольняють наступну умову:

$$a_{ij}a_{i+1,j+1} > c\ a_{i,j+1}a_{i+1,j} \quad (1 \leqslant i < m-1,\ 1 \leqslant j < n-1). \tag{1.2}$$

Легко перевірити, що $TP_2 = TP_2(1)$ і $STP_2 = STP_2(1)$. Теорема 1.1.1 стверджує, що $TP_2(\tilde{c}) \cap STP_1 \subset STP$.

Введемо ще одне позначення: для кожного $k = 2, 3, 4, \ldots$ позначимо через c_k наступну константу

$$c_k := 4\cos^2 \frac{\pi}{k+1}. \tag{1.3}$$

Наступна таблиця містить числові значення перших констант.

n	$c_n = 4\cos^2\frac{\pi}{n+1}$	Приблизне значення
2	1	1
3	2	2
4	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	2.618
5	3	3
6	$4\cos^2\frac{\pi}{7}$	3.247
7	$2+\sqrt{2}$	3.414
8	$4\cos^2\frac{\pi}{9}$	3.532
9	$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$	3.618

Крім того, очевидно, що $\lim_{k\to\infty} c_k = 4$.

Основним результатом цього розділу є наступна теорема.

Теорема 1.1.4. ([124]). Для кожного $k = 2, 3, 4, \ldots$, і для кожного $c \geqslant c_k$, ми маємо

(i) якщо $M \in TP_2(c)$, то $M \in TP_k$;

(ii) якщо $M \in STP_2(c)$, то $M \in STP_k$.

Простим наслідком цієї теореми є таке твердження.

Наслідок 1.1.5. Для кожного $c \geqslant 4$ ми маємо

(i) якщо $M \in TP_2(c)$, то $M \in TP$;

(ii) якщо $M \in STP_2(c)$, то $M \in STP$.

Наступна теорема демонструє, що константи $c_k = 4\cos^2\frac{\pi}{k+1}$ в теоремі 1.1.4 є найменшими можливими для кожного k не тільки в класі усіх матриць з додатними елементами, а і у класі тепліцевих матриць, а також у класі ганкелевих матриць. Ми нагадуємо, що матриця M називається тепліцевою, якщо вона має вигляд $M = (a_{j-i})$, і матриця M називається ганкелевою, якщо вона має вигляд $M = (a_{j+i})$.

Теорема 1.1.6. ([124]).

(i) Для кожного c, $1 \leqslant c < c_k$, існує тепліцева матриця $M \in TP_2(c)$ розміру $k \times k$, така що $\det M < 0$;

(ii) для кожного c, $1 \leqslant c < c_k$, існує ганкелева матриця $M \in TP_2(c)$ розміру $k \times k$, така що $\det M < 0$.

Простим наслідком цього твердження є наступний факт.

Теорема 1.1.7. ([124]).

(i) Для кожного c, $1 \leqslant c < 4$, існує тепліцева матриця $M \in TP_2(c)$, така що $M \notin TP$;

(ii) для кожного c, $1 \leqslant c < 4$, існує ганкелева матриця $M \in TP_2(c)$, така що $M \notin TP$.

Зауваження 1.1.8. Відмітимо, що константи $c_k = 4\cos^2\frac{\pi}{k+1}$ є добре відомими в комбінаториці і теорії графів, де їх називають константами С.Берахи (дивись, наприклад, ([23])). З константами С.Берахи пов'язана відома гіпотеза С.Берахи про корені хроматичних многочленів планарних графів (дивись, наприклад, ([200])). На нашу думку, ця гіпотеза має пряме відношення до результатів цього розділу, але, на жаль, ми не можемо довести гіпотезу С.Берахи.

Деякий спеціальний випадок теореми 1.1.5(i) був доведений Дж.Хатчинсоном у роботі ([105]). Для формулювання його результату нам потрібні деякі означення і позначення.

Означення 1.1.9. Дійсна послідовність $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ називається m-кратно додатною, якщо усі мінори нескінченної матриці

$$\left\| \begin{array}{ccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right\| \tag{1.4}$$

порядків не більше за m є невід'ємними. Клас m-кратно додатних послідовностей ми будемо позначати через PF_m. Клас твірних функцій m-кратно додатних послідовностей ми будемо позначати через $\widetilde{PF}_m$.

Означення 1.1.10. Дійсна послідовність $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ називається тотально додатною, якщо усі мінори матриці (1.4) є невід'ємними. Клас тотально додатних послідовностей ми будемо позначати PF_∞. Клас твірних функцій тотально додатних послідовностей ми будемо позначати через $\widetilde{PF}_\infty$.

Поняття кратно додатних послідовностей (також їх називають частотними послідовностями Дж.Поліа) було введене М.Фекете у 1912 році (дивись [78]) у зв'язку із задачею точного обчислення числа додатних коренів дійсного многочлена.

Клас $\widetilde{PF}_\infty$ був повністю описаний М.Еіссеном, А.Едреєм, І.Шонбергом і А.Уітні у [11] (дивись також [111, с. 412]):

Теорема 1.1.11. (М.Еіссен, А.Едрей, І.Шонберг і А.Уітні, [111, с. 412]). Функція $f \in \widetilde{PF}_\infty$ тоді і тільки тоді, коли

$$f(z) = Cz^n e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\alpha_k z)}{(1-\beta_k z)},$$

де $C \geqslant 0, n \in \mathbb{Z}, \gamma \geqslant 0, \alpha_k \geqslant 0, \beta_k \geqslant 0, \sum(\alpha_k + \beta_k) < \infty$.

Про клас твірних функцій кратно додатних послідовностей ми досі знаємо небагато. В роботі [113] (дивись також [114]) О.М.Каткової і І.В.Островського були повністю описані нульові множини цілих функцій скінченого порядку із $\widetilde{PF}_m$. В роботі [140] О.М.Каткової було доведено, що для довільного m і довільного уточненого порядку $\rho(r)$ можна побудувати цілу функцію із $\widetilde{PF}_m$, яка має уточнений порядок $\rho(r)$ (в той час як цілі функції із $\widetilde{PF}_\infty$, як це видно із теореми 1.1.11, мають порядок зростання не вище за одиницю). В роботі [14] М.Т.Альзугарай аналогічний результат було доведено для функцій із $\widetilde{PF}_m$, які є аналітичними в колі. Деякі важливі результати про аналітичні властивості класу $\widetilde{PF}_m$ і близьких до нього були отримані І.В.Островським і Н.А.Желтухіною в роботах [176], [177] і [178].

Із теореми 1.1.11 випливає важливий наслідок: дійсний многочлен $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ a_k \geqslant 0$, має усі дійсні корені тоді і тільки тоді, коли послідовність його коефіцієнтів $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) \in PF_\infty$.

У 1926 році Дж.Хатчинсон ([105], с. 327) узагальнив роботу М.Петровича ([184]) і Ґ.Харді ([94] або [95, с. 95-100]) і довів таку теорему.

Теорема 1.1.12. (Дж.Хатчинсон). Нехай задана функція $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, така що $a_k > 0$ для усіх $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Виконання системи нерівностей $a_n^2 \geqslant 4a_{n-1}a_{n+1}$ для усіх $n \geqslant 1$ еквівалентно виконанню двох наступних умов:
(i) усі корені функції f є дійсними, простими і від'ємними;
(ii) усі корені кожного многочлена $\sum_{k=m}^{n} a_k x^k$, сформованого довільною кількістю послідовних членів ряду для f, є дійсними і недодатними.

Користуючись теоремою 1.1.11, ми отримуємо такий наслідок з теореми 1.1.12:

$$a_n^2 \geqslant 4\ a_{n-1}a_{n+1},\ \forall n \geqslant 1 \Rightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} \in PF_{\infty}. \tag{1.5}$$

В багатьох роботах зазначалося, що константа 4 в (1.5) є точною (дивись, наприклад, [121]) або [155])).

Таким чином, теорема Хатчинсона 1.1.12 дає просту достатню умову тотальної додатності послідовності. Наслідком теореми 1.1.4 є наступна достатня умова кратної додатності для послідовності.

Наслідок 1.1.13. Нехай задана послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ невід'ємних чисел. Тоді

$$a_n^2 \geqslant c_m a_{n-1}a_{n+1},\ \forall n \geqslant 1 \Rightarrow \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in PF_m.$$

У 1955 році І.Шонберг досліджував розподіл коренів многочленів з кратно додатними коефіцієнтами. Зокрема, він довів наступну теорему.

Теорема 1.1.14. (І.Шонберг, [201]). Нехай задана послідовність додатних чисел $(a_k)_{k=0}^{n}$. Якщо $(a_k)_{k=0}^{n} \in PF_m$, $m \in \mathbb{N}$, то твірний многочлен цієї послідовності $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ не має коренів у секторі $\{z : |\arg z| < \frac{m\pi}{m+n-1}\}$.

В роботі [201] доведено також, що для усіх n, m величина кута цього сектору є найбільшою можливою.

З теореми 1.1.4 і теореми 1.1.14 випливає такий наслідок.

Наслідок 1.1.15. Нехай задана послідовність $(a_k)_{k=0}^n$ невід'ємних чисел. Тоді, якщо виконується умова $a_k^2 \geqslant c_m a_{k-1} a_{k+1}$ для усіх k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, то твірний многочлен послідовності $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ не має коренів у секторі $\{z : |\arg z| < \frac{m\pi}{m+n-1}\}$.

Наш результат можливо використати також до деяких питань проблеми моментів. Нагадуємо, що додатна послідовність $(s_k)_{k=0}^\infty$ називається моментною послідовністю функції $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка не спадає, якщо

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k dF(t).$$

Послідовність додатних чисел називається моментною послідовністю Гамбургера, якщо ця послідовність є моментною послідовністю функції F, яка має нескінченно багато точок зростання. Наступна знаменита теорема дає повний опис моментних послідовностей Гамбургера.

Теорема 1.1.16. ([93], дивись також [12, глава 2]). Послідовність додатних чисел $(s_k)_{k=0}^\infty$ є послідовністю моментів Гамбургера тоді і тільки тоді, коли

$$\det \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k} \end{pmatrix} > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \tag{1.6}$$

Наступне твердження було доведено Т.Бісгаардом і З.Сасварі в [29].

Теорема 1.1.17. ([29]). Нехай d є додатним рішенням рівняння $\sum_{n=1}^\infty d^{-n^2} = 1/4$ ($d \approx 4.06$). Тоді довільна додатна послідовність $(s_k)_{k=0}^\infty$, яка задовольняє умову

$$s_{n-1}s_{n+1} \geqslant d s_n^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

є моментною послідовністю Гамбургера.

Теорема 1.1.5 має наступний простий наслідок.

Наслідок 1.1.18. Довільна додатна послідовність $(s_k)_{k=0}^\infty$, яка задовольняє умову

$$s_{n-1}s_{n+1} \geqslant 4 s_n^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

є моментною послідовністю Гамбургера.

Нескладно перевірити, що константа 4 в цьому твердженні є найменшою можливою.

1.2 Доведення теореми 1.1.4

Нам потрібна така функціональна послідовність

$$F_m(c) := \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} C_{m-j}^j (-1)^j \frac{1}{c^j}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \; c \geqslant 1, \tag{1.7}$$

де через $\lfloor x \rfloor$ позначена ціла частина числа x, а через C_n^k – біноміальні коефіцієнти.

Наступна технічна лема описує деякі властивості цієї функціональної послідовності.

Лема 1.2.1. (i) Виконуються наступні тотожності

$$F_0(c) = F_1(c) = 1 \tag{1.8}$$
$$F_m(c) = F_{m-1}(c) - \tfrac{1}{c} F_{m-2}(c), \quad m = 2, 3, 4, \ldots .$$

(ii) Для $c = 4\cos^2\phi$ маємо

$$F_m(c) = \frac{\sin(m+1)\phi}{c^{m/2}\sin\phi}. \tag{1.9}$$

(iii) Для $c_k = 4\cos^2\frac{\pi}{k+1}$ маємо

$$F_{j-1}(c_k) - \frac{1}{c_k^2} F_{j-2}(c_k) - \frac{1}{c_k^j} \geqslant F_j(c_k), \quad k \geqslant 3, \; j = 2, 3, \ldots, k-1. \tag{1.10}$$

Доведення. Формула (1.8) є прямим наслідком (1.7). Формула (1.9) є простим наслідком добре відомої тригонометричної тотожності

$$\frac{\sin(m+1)\phi}{\sin\phi} = \sum_{j=0}^{[m/2]} C_{m-j}^j (-1)^j (2\cos\phi)^{m-2j}.$$

Використовуючи тотожність $4\cos^2\phi - 1 = \frac{\sin(3\phi)}{\sin\phi}$ ми маємо

$$F_{j-1}(c_k) - \frac{1}{c_k^2} F_{j-2}(c_k) - \frac{1}{c_k^j} - F_j(c_k) = \left(\frac{1}{c_k} - \frac{1}{c_k^2}\right) F_{j-2}(c_k) - \frac{1}{c_k^j}$$

$$= \frac{1}{c_k^{(j+2)/2}} \left(\frac{\sin(3\frac{\pi}{k+1})}{\sin\frac{\pi}{k+1}} \cdot \frac{\sin((j-1)\frac{\pi}{k+1})}{\sin\frac{\pi}{k+1}} - \frac{1}{(2\cos\frac{\pi}{k+1})^{j-2}} \right) \geqslant$$

$$\frac{1}{c_k^{(j+2)/2}} \left(\frac{\sin(3\frac{\pi}{k+1})}{\sin\frac{\pi}{k+1}} \cdot \frac{\sin((j-1)\frac{\pi}{k+1})}{\sin\frac{\pi}{k+1}} - 1 \right) \geqslant 0,$$

для $k \geqslant 3$ і $j = 2, 3, \ldots, k-1$. Нерівність (1.10) доведена. □

Наступна лема була доведена Т.Кравеном і Дж.Ксордашем.

Лема 1.2.2. ([54]). Нехай $M = (a_{ij}),\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n$ є матрицею з додатними елементами, і припустимо, що $M \in TP_2(c), c \geqslant 1$. Тоді $a_{ij}a_{kl} \geqslant c^{(l-j)(k-i)}a_{il}a_{kj},\quad i = 1, 2, \ldots, m-1,\ j = 1, 2, \ldots, n-1,\ i < k \leqslant m,\ j < l \leqslant n$.

Для зручності читача ми приведемо коротке доведення.

Доведення. За означенням класу $TP_2(c)$, виконуються наступні нерівності $a_{rs}a_{r+1,s+1} \geqslant c\ a_{r,s+1}a_{r+1,s},\ 1 \leqslant r \leqslant m-1,\ 1 \leqslant s \leqslant n-1$. Фіксуємо довільне $r,\ 1 \leqslant r \leqslant m-1$, розглянемо ці нерівності для $s = j, j+1, \ldots l-1$ і помножимо їх. Ми отримуємо

$$\prod_{s=j}^{l-1} a_{rs} \cdot \prod_{s=j}^{l-1} a_{r+1,s+1} \geqslant c^{l-j} \prod_{s=j}^{l-1} a_{r,s+1} \cdot \prod_{s=j}^{l-1} a_{r+1,s}.$$

Оскільки усі елементи матриці M є додатними, ми можемо скоротити попередню нерівність на $\prod_{s=j+1}^{l-1} a_{rs} \cdot \prod_{s=j}^{l-2} a_{r+1,s+1}$, після скорочення отримуємо

$$a_{rj}a_{r+1,l} \geqslant c^{l-j}a_{rl}a_{r+1,j}.$$

Зафіксуємо тепер j і l, $1 \leqslant j < l \leqslant n$, розглянемо останні нерівності для $r = i, i+1, \ldots k-1$ і помножимо їх. Ми отримуємо

$$\prod_{r=i}^{k-1} a_{rj} \cdot \prod_{r=i}^{k-1} a_{r+1,l} \geqslant c^{(l-j)(k-i)} \prod_{r=i}^{k-1} a_{rl} \cdot \prod_{r=i}^{k-1} a_{r+1,j}.$$

Після скорочення останньої нерівності на $\prod_{r=i+1}^{k-1} a_{rj} \cdot \prod_{r=i}^{k-2} a_{r+1,l}$, ми отримуємо потрібну нерівність

$$a_{ij}a_{kl} \geqslant c^{(l-j)(k-i)}\ a_{kj}a_{il}.$$

□

Простим наслідком леми 1.2.2 є такий важливий факт: якщо $M \in TP_2(c)$, то кожна підматриця матриці M також належить до класу $TP_2(c)$. Аналогічно, якщо $M \in STP_2(c)$, то кожна підматриця матриці M також належить до класу $STP_2(c)$.

Нехай M є матрицею розміру $n \times n$, і задані числа $k, 1 \leqslant k \leqslant n$, і два набори індексів $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$ і $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant n$. Через $\det M \binom{j_1, j_2, \ldots, j_k}{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ ми будемо позначати мінор матриці M, сформований рядками $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ і стовпцями $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$.

Ми будемо доводити наступну гіпотезу (яка складається із трьох тверджень) індукцією по n. Нехай $M = (a_{ij})$ є матрицею розміру $n \times n$, і припустимо, що $M \in TP_2(c)$, де $c \geqslant 4\cos^2 \frac{\pi}{n+1}$. Тоді виконуються наступні три нерівності:

$$\det M \geqslant 0. \tag{1.11}$$

$$\det M \geqslant a_{11} \det M \binom{2,3,\ldots,n}{2,3,\ldots,n} - a_{12}a_{21} \det M \binom{3,4,\ldots,n}{3,4,\ldots,n}. \tag{1.12}$$

$$\det M \leqslant a_{11} \det M \binom{2,3,\ldots,n}{2,3,\ldots,n}. \tag{1.13}$$

Оскільки $M \in TP_2(c)$, то гіпотези (1.11), (1.12) і (1.13) виконуються для $n = 2$. Подальше доведення базується на такій лемі.

Лема 1.2.3. Нехай $c_0 \geqslant 1$, і $M = (a_{ij}) \in TP_2(c_0)$ є матрицею розміру $n \times n$, що вона задовольняє наступні умови

(i) $\forall i = 2, 3, \ldots, n \quad \det M \binom{i,i+1,\ldots,n}{i,i+1,\ldots,n} \geqslant 0$;

(ii) $\forall i = 1, 2, \ldots, n-2$

$$\det M \binom{i,i+1,\ldots,n}{i,i+1,\ldots,n} \geqslant a_{ii} \det M \binom{i+1,i+2,\ldots,n}{i+1,i+2,\ldots,n} - a_{i,i+1}a_{i+1,i} \det M \binom{i+2,i+3,\ldots,n}{i+2,i+3,\ldots,n}.$$

Тоді для усіх $c, 1 \leqslant c \leqslant c_0$ виконуються наступні чотири нерівності:

$$\det M \binom{m+1,m+2,\ldots,n}{m+1,m+2,\ldots,n} \geqslant \tag{1.14}$$
$$a_{m+1,m+1} \times \left(\det M \binom{m+2,m+3,\ldots,n}{m+2,m+3,\ldots,n} - \frac{1}{c} a_{m+2,m+2} \det M \binom{m+3,m+4,\ldots,n}{m+3,m+4,\ldots,n} \right),$$

$m = 0, 1, \ldots, n-3$.

$$\det M \geqslant a_{11}a_{22} \times \cdots \times a_{m,m} \times \tag{1.15}$$
$$\Big(F_m(c) \det M \binom{m+1,m+2,\ldots,n}{m+1,m+2,\ldots,n}$$
$$-\frac{1}{c}F_{m-1}(c)a_{m+1,m+1} \det M \binom{m+2,m+3,\ldots,n}{m+2,m+3,\ldots,n}\Big),$$
$$m = 1, 2, \ldots, n-2.$$

$$F_m(c) \det M \binom{m+1,m+2,\ldots,n}{m+1,m+2,\ldots,n} - \tag{1.16}$$
$$\frac{1}{c}F_{m-1}(c)a_{m+1,m+1} \det M \binom{m+2,m+3,\ldots,n}{m+2,m+3,\ldots,n} \geqslant$$
$$a_{m+1,m+1}\Big(F_{m+1}(c) \det M \binom{m+2,m+3,\ldots,n}{m+2,m+3,\ldots,n} -$$
$$\frac{1}{c}F_m(c)a_{m+2,m+2} \det M \binom{m+3,m+4,\ldots,n}{m+3,m+4,\ldots,n}\Big),$$
$$m = 1, 2, \ldots, n-3.$$

$$F_m(c) \det M \binom{m+1,m+2,\ldots,n}{m+1,m+2,\ldots,n} - \tag{1.17}$$
$$\frac{1}{c}F_{m-1}(c)a_{m+1,m+1} \det M \binom{m+2,m+3,\ldots,n}{m+2,m+3,\ldots,n}$$
$$\geqslant a_{m+1,m+1}a_{m+2,m+2} \times \cdots \times a_{n,n}F_n(c),$$
$$m = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Доведення. Спочатку ми доведемо (1.14). З того, що $M \in TP_2(c)$, і із умови (ii), маємо

$$\det M \binom{m+1,m+2,\ldots,n}{m+1,m+2,\ldots,n} \geqslant a_{m+1,m+1} \det M \binom{m+2,m+3,\ldots,n}{m+2,m+3,\ldots,n} -$$
$$a_{m+1,m+2}a_{m+2,m+1} \det M \binom{m+3,m+4,\ldots,n}{m+3,m+4,\ldots,n} \geqslant a_{m+1,m+1} \det M \binom{m+2,m+3,\ldots,n}{m+2,m+3,\ldots,n}$$
$$-\frac{1}{c}a_{m+1,m+1}a_{m+2,m+2} \det M \binom{m+3,m+4,\ldots,n}{m+3,m+4,\ldots,n},\ m = 0, 1, \ldots, n-3.$$

Нерівність (1.14) доведено.

Доведемо тепер (1.16). Із (1.14) маємо

$$F_m(c) \det M \binom{m+1,m+2,\ldots,n}{m+1,m+2,\ldots,n} - \frac{1}{c}F_{m-1}(c)a_{m+1,m+1} \det M \binom{m+2,m+3,\ldots,n}{m+2,m+3,\ldots,n} \geqslant$$

$$a_{m+1,m+1} \times \left(\left(F_m(c) - \frac{1}{c} F_{m-1}(c) \right) \det M \binom{m+2,m+3,\dots,n}{m+2,m+3,\dots,n} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c} F_m(c) a_{m+2,m+2} \det M \binom{m+3,m+4,\dots,n}{m+3,m+4,\dots,n} \right), m = 1, 2, \dots, n-3,$$

і, користуючись (1.8) ми отримуємо (1.16).

Для того, щоб довести (1.17), ми застосуємо (1.16) $(n-2-m)$ разів. Ми отримуємо

$$F_m(c) \det M \binom{m+1,m+2,\dots,n}{m+1,m+2,\dots,n} - \frac{1}{c} F_{m-1}(c) a_{m+1,m+1} \det M \binom{m+2,m+3,\dots,n}{m+2,m+3,\dots,n} \geqslant$$

$$a_{m+1,m+1} a_{m+2,m+2} \times \dots \times a_{n-2,n-2} \left(F_{n-2}(c) \det M \binom{n-1,n}{n-1,n} - \right.$$

$$\left. \frac{1}{c} F_{n-3}(c) a_{n-1,n-1} a_{n,n} \right).$$

Із того, що $M \in TP_2(c_0)$, випливає наступна нерівність для усіх $c, 1 \leqslant c \leqslant c_0$,

$$det M \binom{n-1,n}{n-1,n} \geqslant (1 - \frac{1}{c}) a_{n-1,n-1} a_{n,n}, \tag{1.18}$$

тому з (1.8) ми маємо

$$F_m(c) \det M \binom{m+1,m+2,\dots,n}{m+1,m+2,\dots,n} - \frac{1}{c} F_{m-1}(c) a_{m+1,m+1} \det M \binom{m+2,m+3,\dots,n}{m+2,m+3,\dots,n} \geqslant$$

$$a_{m+1,m+1} a_{m+2,m+2} \times \dots \times a_{n,n} \left(\left(F_{n-2}(c) - \frac{1}{c} F_{n-3}(c) \right) - \frac{1}{c} F_{n-2}(c) \right) =$$

$$a_{m+1,m+1} a_{m+2,m+2} \times \dots \times a_{n,n} \left(F_{n-1}(c) - \frac{1}{c} F_{n-2}(c) \right) =$$

$$a_{m+1,m+1} a_{m+2,m+2} \times \dots \times a_{n,n} F_n(c).$$

Нерівність (1.16) доведено.

Використовуючи (1.8) ми перепишемо (1.14) для $m = 0$ у наступному вигляді:

$$\det M \geqslant a_{11} \left(F_1(c) \det M \binom{2,3,\dots,n}{2,3,\dots,n} - \frac{1}{c} F_0(c) a_{22} \det M \binom{3,4,\dots,n}{3,4,\dots,n} \right).$$

Для доведення (1.15) ми застосуємо (1.16) $(m-1)$ разів.

$\square$

Зауваження 1.2.4. Якщо матриця M задовольняє умови леми 1.2.3 і, крім того,

(iii) для усіх $i = 1, 2, \ldots, n$ виконується $a_{ii} > 0$,

(iv) $a_{n-1,n-1}a_{n,n} > c_0 a_{n-1,n}a_{n,n-1}$,

то нерівність (1.18) є строгою, звідки випливає, що нерівність також (1.17) є строгою, тобто

$$F_m(c)\det M\begin{pmatrix} m+1,m+2,\ldots,n \\ m+1,m+2,\ldots,n \end{pmatrix} - \frac{1}{c}F_{m-1}(c)a_{m+1,m+1}\det M\begin{pmatrix} m+2,m+3,\ldots,n \\ m+2,m+3,\ldots,n \end{pmatrix} \tag{1.19}$$
$$> a_{m+1,m+1}a_{m+2,m+2}\times\cdots\times a_{n,n}F_n(c), \quad m = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Зокрема, для усіх матриць $M \in STP(c_0)$ нерівність (1.19) виконується для усіх $c, 1 \leqslant c \leqslant c_0$.

Припустимо, що три гіпотези (1.11), (1.12) і (1.13) виконуються для усіх матриць, розміри яких менше за k. Виведемо з цього ці гіпотези для $n = k$. Нехай $M = (a_{ij})$ є матрицею розміру $k \times k$, $M \in TP_2(c)$, де константа c задовольняє нерівність $c \geqslant c_k := 4\cos^2\frac{\pi}{k+1}$.

Лема 1.2.5. Для усіх $j = 2, 3, \ldots, k-1$ виконуються наступні нерівності:

$$a_{1j}\det M\begin{pmatrix} 2,3,\ldots,k \\ 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k \end{pmatrix} - a_{1,j+1}\det M\begin{pmatrix} 2,3,\ldots,k \\ 1,2,\ldots,j,j+2,\ldots,k \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Доведення. Оскільки $M \in TP_2(c)$, ми маємо $M\begin{pmatrix} 2,3,\ldots,k \\ 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k \end{pmatrix} \in TP_2(c)$ і $M\begin{pmatrix} 2,3,\ldots,k \\ 1,2,\ldots,j,j+2,\ldots,k \end{pmatrix} \in TP_2(c)$. З того, що $4\cos^2\frac{\pi}{n+1} \leqslant 4\cos^2\frac{\pi}{k+1}$ для $n = 2, 3, \ldots, k-1$, ми можемо застосувати індуктивну гіпотезу до матриць $M\begin{pmatrix} 2,3,\ldots,k \\ 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k \end{pmatrix}, M\begin{pmatrix} 2,3,\ldots,k \\ 1,2,\ldots,j,j+2,\ldots,k \end{pmatrix}$ і до довільних їх квадратних підматриць. Застосуємо j разів нерівність (1.13) і будемо мати

$$\det M\begin{pmatrix} 2,3,\ldots,k \\ 1,2,\ldots,j,j+2,\ldots,k \end{pmatrix} \leqslant a_{21}a_{32}\times\cdots\times a_{j+1,j}\det M\begin{pmatrix} j+2,j+3,\ldots,k \\ j+2,j+3,\ldots,k \end{pmatrix}.$$

Отже, із леми 1.2.2 ми отримуємо

$$a_{1,j+1}\det M\begin{pmatrix} 2,3,\ldots,k \\ 1,2,\ldots,j,j+2,\ldots,k \end{pmatrix} \leqslant \tag{1.20}$$
$$\frac{1}{c_k^j}a_{1,j}a_{21}a_{32}\times\cdots\times a_{j,j-1}a_{j+1,j+1}\det M\begin{pmatrix} j+2,j+3,\ldots,k \\ j+2,j+3,\ldots,k \end{pmatrix}.$$

За індуктивною гіпотезою матриця $M\begin{pmatrix} 2,3,\ldots,k \\ 1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k \end{pmatrix}$ задовольняє умови леми 1.2.3. Застосовуючи для цієї матриці (1.15) з $m = j-2$, ми маємо

$$\det M\binom{2,3,\dots,k}{1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,k} \geqslant a_{21}a_{32}\times\dots\times a_{j-1,j-2}\times$$

$$\left(F_{j-2}(c_k)\det M\binom{j,j+1,j+2\dots,k}{j-1,j+1,j+2\dots,k} - \frac{1}{c_k}F_{j-3}(c_k)a_{j,j-1}\det M\binom{j+1,j+2,\dots,k}{j+1,j+2,\dots,k}\right).$$

Застосовуючи (1.12) до матриці $M\binom{j,j+1,j+2\dots,k}{j-1,j+1,j+2\dots,k}$, ми отримуємо

$$\det M\binom{2,3,\dots,k}{1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,k} \geqslant a_{21}a_{32}\times\dots\times a_{j-1,j-2}\times\left((F_{j-2}(c_k)-\frac{1}{c_k}F_{j-3}(c_k))\right.$$

$$\left.\times a_{j,j-1}\det M\binom{j+1,j+2\dots,k}{j+1,j+2\dots,k} - a_{j,j+1}a_{j+1,j-1}F_{j-2}(c_k)\det M\binom{j+2,j+3,\dots,k}{j+2,j+3,\dots,k}\right),$$

звідки, з леми 1.2.2 і (1.8), ми маємо

$$\det M\binom{2,3,\dots,k}{1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,k} \geqslant a_{21}a_{32}\times\dots\times a_{j-1,j-2}a_{j,j-1}\times$$

$$\left(F_{j-1}(c_k)\det M\binom{j+1,j+2\dots,k}{j+1,j+2\dots,k} - \frac{1}{c_k^2}a_{j+1,j+1}F_{j-2}(c_k)\det M\binom{j+2,j+3,\dots,k}{j+2,j+3,\dots,k}\right).$$

Далі, застосовуючи (1.14) до матриці $M\binom{j+1,j+2\dots,k}{j+1,j+2\dots,k}$, ми маємо

$$\det M\binom{2,3,\dots,k}{1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,k} \geqslant \tag{1.21}$$
$$a_{21}a_{32}\times\dots\times a_{j,j-1}a_{j+1,j+1}\left(\det M\binom{j+2,j+3\dots,k}{j+2,j+3\dots,k}\times(F_{j-1}(c_k)-\right.$$
$$\left.\tfrac{1}{c_k^2}F_{j-2}(c_k)) - \tfrac{1}{c_k}a_{j+2,j+2}F_{j-1}(c_k)\det M\binom{j+3,j+4,\dots,k}{j+3,j+4,\dots,k}\right).$$

Із (1.20) і (1.21) ми виводимо

$$a_{1,j}\det M\binom{2,3,\dots,k}{1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,k} - a_{1,j+1}\det M\binom{2,3,\dots,k}{1,2,\dots,j,j+2,\dots,k} \tag{1.22}$$
$$\geqslant a_{1,j}a_{21}a_{32}\times\dots\times a_{j,j-1}a_{j+1,j+1}\left((F_{j-1}(c_k)-\tfrac{1}{c_k^2}F_{j-2}(c_k)-\tfrac{1}{c_k^j})\right.$$
$$\left.\times\det M\binom{j+2,j+3\dots,k}{j+2,j+3\dots,k} - \tfrac{1}{c_k}a_{j+2,j+2}F_{j-1}(c_k)\det M\binom{j+3,j+4,\dots,k}{j+3,j+4,\dots,k}\right).$$

З оцінок (1.22),(1.10) і (1.17) випливає, що

$$a_{1,j}\det M\binom{2,3,\dots,k}{1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,k} - a_{1,j+1}\det M\binom{2,3,\dots,k}{1,2,\dots,j,j+2,\dots,k}$$

$$\geqslant a_{1,j}a_{21}a_{32}\times\dots\times a_{j,j-1}a_{j+1,j+1}\left(F_j(c_k)\det M\binom{j+2,j+3\dots,k}{j+2,j+3\dots,k}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{c_k}a_{j+2,j+2}F_{j-1}(c_k)\times\det M\binom{j+3,j+4,\dots,k}{j+3,j+4,\dots,k}\right)\geqslant$$

$$a_{1,j}a_{21}a_{32}\times\cdots\times a_{j,j-1}a_{j+1,j+1}a_{j+2,j+2}\times\cdots\times a_{k,k}F_{k-1}(c_k).$$

Таким чином, із леми 1.2.1 ми виводимо, що

$$a_{1,j}\det M\begin{pmatrix}2,3,\ldots,k\\1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k\end{pmatrix}-a_{1,j+1}\det M\begin{pmatrix}2,3,\ldots,k\\1,2,\ldots,j,j+2,\ldots,k\end{pmatrix}$$

$$\geqslant a_{1,j}a_{21}a_{32}\times\cdots\times a_{j,j-1}a_{j+1,j+1}a_{j+2,j+2}\times\cdots\times a_{k,k}\frac{\sin(k\frac{\pi}{k+1})}{c_k^{(k-1)/2}\sin\frac{\pi}{k+1}}\geqslant 0.$$

□

Тепер доведемо (1.12). Використовуючи лему 1.2.3, маємо

$$\det M\begin{pmatrix}1,2,\ldots,k\\1,2,\ldots,k\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}a_{1,j}M\begin{pmatrix}2,3,\ldots,k\\1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k\end{pmatrix}$$

$$\geqslant a_{1,1}\det M\begin{pmatrix}2,3,\ldots,k\\2,3\ldots,k\end{pmatrix}-a_{1,2}\det M\begin{pmatrix}2,3,\ldots,k\\1,3,4,\ldots,k\end{pmatrix}.$$

Застосовуємо індуктивну гіпотезу (1.13) до матриці $M\begin{pmatrix}2,3,\ldots,k\\1,3,4,\ldots,k\end{pmatrix}$. Ми маємо

$$\det M\begin{pmatrix}1,2,\ldots,k\\1,2,\ldots,k\end{pmatrix}\geqslant a_{1,1}\det M\begin{pmatrix}2,3,\ldots,k\\2,3\ldots,k\end{pmatrix}-a_{1,2}a_{21}\det M\begin{pmatrix}3,4,\ldots,k\\3,4,\ldots,k\end{pmatrix}.$$

Тобто, нерівність (1.12) доведено.

За лемою 1.2.3

$$\det M\begin{pmatrix}1,2,\ldots,k\\1,2,\ldots,k\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}a_{1,j}M\begin{pmatrix}2,3,\ldots,k\\1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k\end{pmatrix}\leqslant a_{1,1}\det M\begin{pmatrix}2,3,\ldots,k\\2,3\ldots,k\end{pmatrix}.$$

Нерівність (1.13) доведено.

Щоб довести (1.11) ми відмічаємо, що з нерівності (1.12) і індуктивної гіпотези випливає, що матриця M задовольняє умови леми 1.2.2. Із (1.15), (1.17) і леми 1.2.1 ми маємо

$$\det M\geqslant a_{11}a_{22}\times\cdots\times a_{kk}F_k(c_k)=a_{11}a_{22}\times\cdots\times a_{kk}\frac{\sin\pi}{c_k^{k/2}\sin\frac{\pi}{k+1}}=0.$$

Таким чином, твердження (i) в теоремі 1.1.4 доведено.

Доведемо тепер твердження (ii) в теоремі 1.1.4. Якщо $M\in STP_k(c_k)$, то, користуючись (1.19) ми можемо переписати останню нерівність таким чином

$$\det M>a_{11}a_{22}\times\cdots\times a_{kk}F_k(c_k)=a_{11}a_{22}\times\cdots\times a_{kk}\frac{\sin\pi}{c_k^{k/2}\sin\frac{\pi}{k+1}}=0.$$

Твердження (ii) в теоремі 1.1.4 доведено.

Теорему 1.1.4 доведено.

Зауваження 1.2.6. Фактично ми довели наступну теорему.

Припустимо, що $c \geqslant 4\cos^2\frac{\pi}{k+1}$. Нехай $M = (a_{ij}) \in TP_2(c)$ є матрицею розміру $k \times k$. Тоді

$$\det M \geqslant a_{11}a_{22} \times \cdots \times a_{kk}F_k(c).$$

1.3 Доведення теореми 1.1.6

Розглянемо наступну тепліцеву матрицю розміру $n \times n$.

$$M_n(\phi) := \left\| \begin{array}{ccccccc} 2\cos\phi & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\phi & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\phi & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\phi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\phi \end{array} \right\|, \qquad (1.23)$$

де $0 \leqslant \phi < \pi/2$. Добре відомо (і легко перевірити), що визначник матриці $M_n(\phi)$ задовольняє наступне рекурентне співвідношення: $\det M_n(\phi) = 4\cos^2\phi \det M_{n-1}(\phi) - \det M_{n-2}(\phi)$, і $M_1(\phi) = 2\cos\phi, M_2(\phi) = 4\cos^2\phi - 1$. Нескладно обчислити, що $\det M_n(\phi) = \frac{\sin(n+1)\phi}{\sin\phi}$. Таким чином, для усіх $\phi \in (\frac{\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n+1})$ ми маємо $\det M_n(\phi) < 0$. Однак, матриця $M_n(\phi)$ не є матрицею з усіма додатними елементами, тобто вона не є потрібним нам прикладом.

Тепер для кожного $\phi \in (\frac{\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n+1})$ розглянемо наступну тепліцеву матрицю розміру $n \times n$ з додатними елементами

$$M_n(\phi, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2}) := \tag{1.24}$$

$$\left\| \begin{matrix} 2\cos\phi & 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \ldots & \varepsilon_{n-3} & \varepsilon_{n-2} \\ 1 & 2\cos\phi & 1 & \varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_{n-4} & \varepsilon_{n-3} \\ \varepsilon_1 & 1 & 2\cos\phi & 1 & \varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_{n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{n-3} & \varepsilon_{n-4} & \ldots & \varepsilon_1 & 1 & 2\cos\phi & 1 \\ \varepsilon_{n-2} & \varepsilon_{n-3} & \varepsilon_{n-4} & \ldots & \varepsilon_1 & 1 & 2\cos\phi \end{matrix} \right\|,$$

де $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_{n-2} > 0$. Ми будемо послідовно обирати числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-2}$ таким чином, щоб матриця $M_n(\phi, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2})$ належала до множини $TP_2(4\cos^2\phi)$. Сталу ε_1 будемо обирати так, щоб виконувалася умова $1 \geqslant 4\cos^2\phi \cdot 2\cos\phi \cdot \varepsilon_1$, далі ε_2 будемо обирати так, щоб виконувалася умова $\varepsilon_1^2 \geqslant 4\cos^2\phi \cdot \varepsilon_2$, далі ε_3 будемо обирати так, щоб виконувалася умова $\varepsilon_2^2 \geqslant 4\cos^2\phi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3$, ..., наприкінці ε_{n-2} будемо обирати так, щоб виконувалася умова $\varepsilon_{n-3}^2 \geqslant 4\cos^2\phi \cdot \varepsilon_{n-4} \cdot \varepsilon_{n-2}$. Після такого вибору параметрів ми маємо $M_n(\phi, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2}) \in TP_2(4\cos^2\phi)$. Оскільки $M_n(\phi, 0, 0, \ldots, 0) = M_n(\phi)$, ми отримуємо $\det M_n(\phi, 0, 0, \ldots, 0) < 0$ для $\phi \in (\frac{\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n+1})$. Отже ми маємо $\det M_n(\phi, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2}) < 0$ для $\phi \in (\frac{\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n+1})$, якщо вибрані числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-2}$ є достатньо малими.

Отже, для кожного $c \in (4\cos^2\frac{2\pi}{n+1}, c_n)$ твердження (i) теореми 1.1.6 доведено. Оскільки $TP_2(c_1) \subset TP_2(c_2)$ для $c_1 \geqslant c_2$, ми отримуємо твердження (i) теореми 1.1.6.

Побудувати приклад відповідної ганкелевої матриці значно складніше. Для доведення твердження (ii) теореми 1.1.6 ми розглянемо наступну ганкелеву матрицю з додатними елементами:

$$D_n(p, q) := \left(p^{[(i+j-2)/2][(i+j-1)/2]} q^{[(i+j-3)/2][(i+j-2)/2]}\right), \ 1 \leqslant i, j \leqslant n, \tag{1.25}$$

або

$$D_n(p,q) = \tag{1.26}$$
$$\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & p & p^2q & \dots & * & * \\ 1 & p & p^2q & p^4q^2 & \dots & * & * \\ p & p^2q & p^4q^2 & p^6q^4 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \dots & p^{(n-2)^2}q^{(n-2)(n-3)} & p^{(n-1)(n-2)}q^{(n-2)^2} \\ * & * & * & * & \dots & p^{(n-1)(n-2)}q^{(n-2)^2} & p^{(n-1)^2}q^{(n-1)(n-2)} \end{matrix}\right\|.$$

Очевидно, що $D_n(p,q) \in TP_2(\min(p,q))$.

Лема 1.3.1. Для усіх $n \geqslant 3$ ми маємо

$$\det D_n(p,q) = p^{\beta_n} q^{\alpha_n} F_n(p) + Q_{\alpha_n - 1}(p,q), \tag{1.27}$$

де $\alpha_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}, \beta_n = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ і $Q_{\alpha_n-1}(p,q)$ є таким многочленом від змінних p, q, що $\deg_q Q_{\alpha_n-1}(p,q) \leqslant \alpha_n - 1$. (Тут і в подальшому через $\deg_q Q(p,q)$ ми будемо позначати степінь многочлена $Q(p,q)$ по відношенню до змінної q).

Доведення. Будемо доводити цю лему індукцією за n. Легко обчислити, що для $n = 3$ твердження леми виконується. Розкладання $\det D_n(p,q)$ по стовпцю із номером n дає формулу

$$\det D_n(p,q) = R_{\alpha_n-1}(p,q) + \tag{1.28}$$
$$\det \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & p & p^2q & \dots & * & 0 \\ 1 & p & p^2q & p^4q^2 & \dots & * & 0 \\ p & p^2q & p^4q^2 & p^6q^4 & \dots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \dots & * & 0 \\ * & * & * & * & \dots & p^{(n-2)^2}q^{(n-2)(n-3)} & p^{(n-1)(n-2)}q^{(n-2)^2} \\ * & * & * & * & \dots & p^{(n-1)(n-2)}q^{(n-2)^2} & p^{(n-1)^2}q^{(n-1)(n-2)} \end{matrix}\right\|,$$

де $R_{\alpha_n-1}(p,q)$ є многочленом від змінних p,q, і $\deg_q R_{\alpha_n-1}(p,q) \leqslant \alpha_n - 1$. Розкладання детермінанту із правої частини останньої формули по рядку із номером n дає формулу

$$\det D_n(p,q) = S_{\alpha_n-1}(p,q) + \tag{1.29}$$

$$\det \begin{Vmatrix} 1 & 1 & p & p^2q & \dots & * & 0 \\ 1 & p & p^2q & p^4q^2 & \dots & * & 0 \\ p & p^2q & p^4q^2 & p^6q^4 & \dots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \dots & * & 0 \\ * & * & * & * & \dots & p^{(n-2)^2}q^{(n-2)(n-3)} & p^{(n-1)(n-2)}q^{(n-2)^2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p^{(n-1)(n-2)}q^{(n-2)^2} & p^{(n-1)^2}q^{(n-1)(n-2)} \end{Vmatrix},$$

де $S_{\alpha_n-1}(p,q)$ є многочленом від змінних p,q, при цьому $\deg_q S_{\alpha_n-1}(p,q) \leqslant \alpha_n - 1$. Остання рівність дає наступне рекурентне співвідношення

$$D_n(p,q) = p^{(n-1)^2}q^{(n-1)(n-2)}D_{n-1}(p,q) -$$

$$p^{2(n-1)(n-2)}q^{2(n-2)^2}D_{n-2}(p,q) + T_{\alpha_n-1}(p,q),$$

де $T_{\alpha_n-1}(p,q)$ є многочленом відносно змінних p,q, при цьому $\deg_q T_{\alpha_n-1}(p,q) \leqslant \alpha_n - 1$. Використовуючи індуктивну гіпотезу ми отримуємо твердження леми 1.3.1. $\square$

Відзначимо, що $p^{[n/2]}F_n(p)$ є многочленом від p степеня $[n/2]$. Рівність (1.9) показує, що цей многочлен має наступні $[n/2]$ коренів:

$$4\cos^2\frac{\pi}{n+1}, 4\cos^2\frac{2\pi}{n+1}, \dots, 4\cos^2\frac{[n/2]\pi}{n+1}.$$

Очевидно, що $4\cos^2\frac{\pi}{n+1}$ є самим великим коренем цього многочлену. Отже, для $p \in (4\cos^2\frac{2\pi}{n+1}, 4\cos^2\frac{\pi}{n+1})$ маємо $F_n(p) < 0$.

Зафіксуємо довільне $p_0 \in (4\cos^2\frac{2\pi}{n+1}, 4\cos^2\frac{\pi}{n+1})$. Оскільки

$$\det D_n(p_0,q) = q^{\alpha_n}(p_0^{\beta_n}F_n(p_0) + q^{-\alpha_n}Q_{\alpha_n-1}(p_0,q)),$$

де $Q_{\alpha_n-1}(p_0,q)$ є многочленом від змінної q, і $\deg Q_{\alpha_n-1}(p_0,q) \leqslant \alpha_n - 1$, для усіх досить великих q (і таких, що $q > p_0$) ми отримуємо $D_n(p_0,q) \in TP_2(p_0)$, але $\det D_n(p_0,q) < 0$.

Таким чином, для кожного $p \in (4\cos^2\frac{2\pi}{n+1}, c_n)$ твердження (ii) теореми 1.1.6 доведено. Оскільки $TP_2(c_1) \subset TP_2(c_2)$ для $c_1 \geqslant c_2$, твердження (ii) теореми 1.1.6 доведено.

Теорема 1.1.6 доведена.

Висновки до розділу 1

В цьому розділі ми ввели поняття k-кратно додатної і тотально додатної матриці, k-кратно додатних і тотально додатних послідовностей (так званих частотних послідовностей Поліа), привели важливу для подальших розділів відому теорему Хатчинсона і обговорили властивості моментних послідовностей Гамбургера. Ми довели нову достатню умову для того, щоб усі мінори матриці з додатними елементами були невід'ємними (додатними).

До основних результатів розділу відносяться:

– Теорема 1.1.4 про те, що для кожної матриці $M = (a_{ij})$ з додатними елементами розміру $n \times n$ із виконання нерівностей $a_{ij}a_{i+1,j+1} > 4\cos^2\frac{\pi}{n+1}\, a_{i,j+1}a_{i+1,j}$ для усіх $1 \leqslant i, j \leqslant n-1$ випливає, що усі мінори матриці M є додатними.

– Теорема 1.1.6 про те, що константа $4\cos^2\frac{\pi}{n+1}$ в теоремі 1.1.4 (так звана константа Берахи) є точною для кожного n як у класі ганкелевих матриць, так і в класі тепліцевих матриць.

– Наслідки 1.1.13 і 1.1.15 теореми 1.1.4, які дають достатню умову кратної позитивності додатної послідовності і величину кута без нулів для твірного многочлена додатної послідовності.

– Наслідок 1.1.18 теореми 1.1.4, який дає просту достатню умову для того, щоб дана додатна послідовність була моментною послідовністю Гамбургера.

– Наслідок 1.2.6, який дає зручну оцінку знизу для визначника матриці з додатними елементами, якщо ця матриця задовольняє умови теореми 1.1.4.

РОЗДІЛ 2

СТІЙКІ МНОГОЧЛЕНИ

2.1 Історія питання і формулювання результатів

Дійсний многочлен F називається стійким (іноді стабільним, або гурвіцевим), якщо усі його корені мають від'ємні дійсні частини, тобто $F(z_0) = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\, z_0 < 0$. Різноманітні питання поліноміальної стійкості виникають у численних проблемах математики, фізики, інженерії тощо. Ми згадаємо тут лише добре відомий зв'язок між стійкістю розв'язків систем диференціальних рівнянь і стійкістю відповідного характеристичного многочлена системи. Ми відсилаємо до робіт Ф.Р.Гантмахера [84, глава 15] або М.Мардена [165, глава 9] щодо глибоких оглядів теорії стабільності.

Наступне твердження, яке належить А.Стодолі, є добре відомою (і такою, що легко перевіряється) необхідною умовою стійкості для дійсного многочлена.

Твердження 2.1.1. ([5, с. 18]). *Якщо* $F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \in \mathbb{R}[z],\ a_n > 0$, *є стійким многочленом, то* $a_j > 0,\ 0 \leqslant j \leqslant n-1$.

Наступна знаменита теорема Рауса і Гурвиця дає необхідні і достатні умови для стабільності дійсного многочлена.

Теорема 2.1.2. (Критерій Рауса-Гурвіця, дивись, наприклад, [84, с. 225-230], або [5, с. 83-87]). *Многочлен* $F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \in \mathbb{R}[z]$ *з* $a_n > 0$ *є стійким многочленом тоді і тільки тоді, коли перші* n *головних кутових мінорів відповідної матриці Гурвіця цього многочлена*

$$H(F) := \begin{Vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{Vmatrix}$$

є додатними.

Відмітимо, що перевірка додатності головних кутових мінорів для матриць великого розміру є, взагалі кажучи, дуже складною проблемою (а якщо, як це часто буває в важливих задачах, коефіцієнти многочлена залежать від параметрів, то така перевірка є майже нерозв'язною проблемою). Тому важливо знайти зручні і легко перевірянні достатні умови стійкості.

Д.К.Дімітров і Х.М.Пенья, використовуючи теорему 1.1.1 з розділу 1 Т.Кравена і Дж.Ксордаша про достатню умову тотальної додатності матриць, а також міркування неперервності, довели наступну теорему.

Теорема 2.1.3. ([69]). Нехай $\tilde{c}$ – константа із теореми 1.1.1. Якщо усі коефіцієнти многочлена $F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ є додатними і задовольняють нерівності

$$a_k a_{k+1} \geqslant \tilde{c} a_{k-1} a_{k+2} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, n-2,$$

то F є стійким многочленом. Зокрема, F є стійким, якщо

$$a_k^2 \geqslant \sqrt{\tilde{c}} a_{k-1} a_{k+1} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Користуючись доведеною в розділі 1 теоремою 1.1.4 і міркуваннями, аналогічними до ([69]), ми можемо довести таке узагальнення теореми 2.1.3

Теорема 2.1.4. *Якщо усі коефіцієнти многочлена $F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ є додатними і задовольняють нерівностям*

$$a_k a_{k+1} \geqslant \; 4 \cos^2 \frac{\pi}{n+1} a_{k-1} a_{k+2} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, n-2,$$

то F є стійким многочленом. Зокрема, F є стійким, якщо

$$a_k^2 \geqslant 2 \cos \frac{\pi}{n+1} a_{k-1} a_{k+1} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

В розділі 1 було доведено також, що константа $c_n := 4 \cos^2 \frac{\pi}{n+1}$ є найменшою можливою в теоремі 1.1.4 не тільки в класі усіх матриць розміру $n \times n$ з додатними елементами, а і у класі тепліцевих матриць з додатними елементами, а також у класі ганкелевих матриць з додатними елементами. Виникає природне питання щодо знаходження найменшої можливої константи в важливому класі гурвіцевих матриць. У цьому розділі ми покажемо, що в класі гурвіцевих матриць константа $c_n := 4\cos^2\frac{\pi}{n+1}$ не є найменшою можливою в твердженні теореми 1.1.4.

Наступна теорема дає відповідь на таке питання: для заданого $n \in \mathbb{N}$ якою є найменша можлива константа d_n, така що, якщо коефіцієнти многочлена $F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ є додатними і задовольняють умову $a_k a_{k+1} > d_n a_{k-1} a_{k+2} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, n-2$, то $F(z)$ є стійким?

Теорема 2.1.5. ([125]). Нехай x_0 – єдиний додатний корінь многочлена $x^3 - x^2 - 2x - 1$ ($x_0 \approx 2.1479$).

1. Якщо коефіцієнти многочлена $F(z) = \sum_{k=0}^{4} a_k z^k$ є додатними і задовольняють нерівності $a_k a_{k+1} > 2a_{k-1}a_{k+2} \quad \text{для} \quad k = 1, 2$, то F є стійким многочленом. Зокрема, F є стійким, якщо $a_k^2 > \sqrt{2}a_{k-1}a_{k+1} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, 3.$

2. Якщо коефіцієнти многочлена $F(z) = \sum_{k=0}^{5} a_k z^k$ є додатними і задовольняють нерівності $a_k a_{k+1} > x_0 a_{k-1} a_{k+2} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, 3$, то F є стійким многочленом. Зокрема, F є стійким, якщо $a_k^2 > \sqrt{x_0}a_{k-1}a_{k+1} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, 3, 4.$

3. Якщо коефіцієнти многочлена $F(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ n > 5$, є додатними і задовольняють нерівності $a_k a_{k+1} \geqslant x_0 a_{k-1} a_{k+2} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, n-2$, то F є стійким многочленом. Зокрема, F є стійким, якщо $a_k^2 \geqslant \sqrt{x_0}a_{k-1}a_{k+1} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$

Відмітимо, що

$$\frac{a_k a_{k+1}}{a_{k-1}a_{k+2}} = \frac{a_k^2}{a_{k-1}a_{k+1}} \frac{a_{k+1}^2}{a_k a_{k+2}},$$

таким чином, наступна теорема демонструє, що усі сталі в теоремі 2.1.5 є найменшими можливими для кожного n.

Теорема 2.1.6. ([125]). 1. Для кожного $d \leqslant \sqrt{2}$ існує многочлен $F(z) = \sum_{k=0}^{4} a_k z^k$ з додатними коефіцієнтами, які задовольняють умову $a_k^2 = d a_{k-1} a_{k+1} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, 3$, але многочлен F не є стійким.

2. Для кожного $d \leqslant \sqrt{x_0}$ існує многочлен $F(z) = \sum_{k=0}^{5} a_k z^k$ з додатними коефіцієнтами, які задовольняють умову $a_k^2 = d a_{k-1} a_{k+1} \quad \text{для} \quad k =$

$1, 2, 3, 4$, але многочлен F не є стійким.

3. Для кожного $n > 5$ і кожного $\varepsilon > 0$ існує многочлен $F(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ з додатними коефіцієнтами, які задовольняють умову $a_k^2 > (\sqrt{x_0} - \varepsilon) a_{k-1} a_{k+1}$ для $k = 1, 2, \ldots, n-1$, але многочлен F не є стійким.

Теорема 2.1.5 може бути узагальнена для цілих функцій наступним чином.

Теорема 2.1.7. ([125]). Якщо усі коефіцієнти функції $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ є додатними, і вони задовольняють умови $a_k a_{k+1} \geqslant x_0 a_{k-1} a_{k+2}$ для усіх $k \in \mathbb{N}$, то усі корені функції G мають від'ємні дійсні частини. Зокрема, твердження є вірним, якщо $a_k^2 \geqslant \sqrt{x_0} a_{k-1} a_{k+1}$ для усіх $k \in \mathbb{N}$.

При доведенні теореми 2.1.6 ми покажемо, що константа в твердженні теореми 2.1.7 також є найменшою можливою.

Для доведення теореми 2.1.5 ми будемо використовувати знаменитий критерій стійкості Ерміта-Білера. Наступне твердження є одним із варіантів теореми Ш.Ерміта і М.Білера.

Теорема 2.1.8. (Критерій Ерміта-Білера, дивись [28] і [98], або [161, глава VII]). Нехай $F(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ є многочленом з додатними коефіцієнтами. Многочлен F є стійким тоді і тільки тоді, коли наступні два многочлена $f(z) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m a_{2m} z^m$ і $g(z) = z \sum_{m=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^m a_{2m+1} z^m$ мають прості дійсні корені, які перемежовуються.

Ми будемо використовувати також цитовану у першому розділі відому теорему Дж.Хатчинсона 1.1.12 ([105, с. 327]).

2.2 Доведення теореми 2.1.5 і теореми 2.1.7

Добре відомо (і легко перевірити), що многочлени степенів 1 і 2 з додатними старшими коефіцієнтами є стійкими тоді і тільки тоді, коли усі їх коефіцієнти є додатними.

Нехай $F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ є многочленом з додатними коефіцієнтами. Позначимо через

$$s_j = \frac{a_j a_{j+1}}{a_{j-1} a_{j+2}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-2. \tag{2.1}$$

Нехай $F(z) = \sum_{j=0}^{3} a_j z^j$ є многочленом з додатними коефіцієнтами. Многочлен F є стійким тоді і тільки тоді, коли $s_1 > 1$ (дивись, наприклад, [5, с. 34]). Дійсно, для $F(z) = \sum_{j=0}^{3} a_j z^j$ ми маємо $f(z) = a_0 - a_2 z$ і $g(z) = z(a_1 - a_3 z)$. Обидва многочлена мають прості дійсні корені, і ці корені перемежовуються тоді і тільки тоді, коли $0 < \frac{a_0}{a_2} < \frac{a_1}{a_3} \Leftrightarrow s_1 > 1$.

Доведемо твердження 1 теореми 2.1.5

Для многочлена $F(z) = \sum_{j=0}^{4} a_j z^j$ ми маємо $f(z) = a_0 - a_2 z + a_4 z^2$ і $g(z) = z(a_1 - a_3 z)$. Використовуючи наші позначення ми можемо виразити два кореня многочлена f наступним чином:

$$t_{1,2} = \frac{a_0}{a_2} \frac{s_1 s_2}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4}{s_1 s_2}}\right).$$

Ці корені є простими і дійсними, тому що $\min(s_1, s_2) > 2$. Два кореня многочлена g – це $t_0^* = 0, \quad t_1^* = \frac{a_0}{a_2} s_1$, вони є дійсними і простими. Многочлен F є стійким тоді і тільки тоді, коли ці корені перемежовуються, тобто

$$0 < \frac{a_0}{a_2} \frac{s_1 s_2}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{s_1 s_2}}\right) < \frac{a_0}{a_2} s_1 < \frac{a_0}{a_2} \frac{s_1 s_2}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{s_1 s_2}}\right). \tag{2.2}$$

Перша нерівність у (2.2), очевидно, виконується. Друга нерівність у (2.2) є еквівалентною такої: $s_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{s_1 s_2}}\right) < 2$. Ліва частина цієї нерівності строго спадає по змінної s_1, тому ця нерівність є наслідком такої: $s_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{s_2}}\right) \leqslant 2$ (ми підставили $s_1 = 2$). Ліва частина цієї нерівності строго спадає по змінної s_2, і для $s_2 = 2$ ліва частина дорівнює правій. Ці міркування доводять другу нерівність у (2.2).

Третя нерівність в in (2.2) еквівалентна наступної $s_2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{s_1 s_2}}\right) > 2$. Оскільки $\min(s_1, s_2) > 2$, остання нерівність є вірною. Таким чином, многочлен $F(z) = \sum_{j=0}^{4} a_j z^j$ з додатними коефіцієнтами є стійким, якщо $\min(s_1, s_2) > 2$.

Доведемо твердження 2 теореми 2.1.5. Для многочлена $F(z) = \sum_{j=0}^{5} a_j z^j$ ми маємо $f(z) = a_0 - a_2 z + a_4 z^2$ і $g(z) = z(a_1 - a_3 z + a_5 z^2)$. Використовуючи наші позначення, ми можемо виразити корені многочлена f наступним чином:

$$t_{1,2} = \frac{a_0}{a_2}\frac{s_1 s_2}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4}{s_1 s_2}}\right).$$

Ці корені є дійсними і простими, оскільки $\min(s_1, s_2) > x_0 > 2$. Многочлен g має три простих дійсних кореня, які можна записати наступним чином:

$$t_0^* = 0,\ t_1^* = \frac{a_0}{a_2}\frac{s_1 s_2 s_3}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{s_2 s_3}}\right),\ t_2^* = \frac{a_0}{a_2}\frac{s_1 s_2 s_3}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{s_2 s_3}}\right).$$

Многочлен F є стійким тоді і тільки тоді, коли

$$0 < \frac{a_0}{a_2}\frac{s_1 s_2}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{s_1 s_2}}\right) < \frac{a_0}{a_2}\frac{s_1 s_2 s_3}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{s_2 s_3}}\right) < \frac{a_0}{a_2}\frac{s_1 s_2}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{s_1 s_2}}\right) < \frac{a_0}{a_2}\frac{s_1 s_2 s_3}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{s_2 s_3}}\right). \tag{2.3}$$

Перша нерівність в (2.3), очевидно, виконується. Друга нерівність в (2.3) еквівалентна наступної $\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{s_1 s_2}}\right) < s_3\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{s_2 s_3}}\right)$. Ліва частина цієї нерівності строго спадає по змінної s_1, при цьому $s_1 > x_0 > 2$, таким чином ця нерівність є наслідком наступної: $\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{s_2}}\right) \leqslant s_3\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{s_2 s_3}}\right)$ (ми підставили $s_1 = 2$). Права частина останньої нерівності строго спадає по змінної s_3 і $\lim_{s_3 \to \infty} s_3\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{s_2 s_3}}\right) = \frac{2}{s_2}$, тому друга нерівність в (2.3) є наслідком очевидної оцінки $\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{s_2}}\right) \leqslant \frac{2}{s_2}$. Таким чином, друга нерівність в (2.3) є вірною.

Перевіримо, що за нашими припущеннями виконується третя нерівність в (2.3), або, еквівалентно, $s_3\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{s_2 s_3}}\right) < \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{s_1 s_2}}\right)$. Ліва частина цієї нерівності строго спадає за змінною s_3, а права частина строго зростає за змінною s_1, тому ця нерівність випливає з $x_0\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{s_2 x_0}}\right) \leqslant \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x_0 s_2}}\right)$, або, еквівалентно, $(1 + x_0)\sqrt{1 - \frac{4}{s_2 x_0}} \geqslant x_0 - 1$. Ліва частина останньої нерівності строго зростає за змінною s_2, тому остання нерівність випливає з такої: $(1 + x_0)\sqrt{1 - \frac{4}{x_0^2}} \geqslant x_0 - 1$, або, еквівалентно, $x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 - 1 \geqslant 0$. За означенням сталої x_0 ця нерівність є вірною. Тому третя нерівність в (2.3) є вірною.

Перевіримо, що за нашими припущеннями виконується четверта нерівність в (2.3) , або, еквівалентно, $1 + \sqrt{1 - \frac{4}{s_1 s_2}} < s_3 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{s_2 s_3}}\right)$. Ліва частина строго зростає за змінною s_1 і $\lim_{s_1 \to \infty} 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{s_1 s_2}} = 2$, тому остання нерівність випливає з такої: $2 \leqslant s_3 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{s_2 s_3}}\right)$. Права частина строго зростає за змінною $s_2 > x_0 > 2$, тому остання нерівність випливає з такої очевидної нерівності $2 \leqslant s_3 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{s_3}}\right)$. Тому четверта нерівність в (2.3) є вірною.

Таким чином, многочлен $F(z) = \sum_{j=0}^{5} a_j z^j$ з додатними коефіцієнтами є стійким, якщо $\min(s_1, s_2, s_3) > x_0$.

Зауваження 2.2.1. Із доведення твердження 2 теореми 2.1.5 випливає, що, якщо $\min(s_1, s_2, s_3) \geqslant x_0$, то $t_0^* < t_1 < t_1^* \leqslant t_2 < t_2^*$ (позначення ті самі, як в доведенні твердження 2 теореми 2.1.5).

Нехай $F(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ a_k > 0$, є многочленом, який задовольняє умову $s_j \geqslant x_0$ для $j = 1, 2, \ldots, n-2$. Без обмеження загальності ми можемо вважати, що $a_0 = 1$. Введемо позначення:

$$p_j = \frac{a_{j-1}}{a_j},\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Використовуючи це позначення, ми можемо написати

$$F(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 1 + \frac{z}{p_1} + \frac{z^2}{p_1 p_2} + \ldots + \frac{z^n}{p_1 p_2 \ldots p_n}.$$

Для доведення твердження 3 теореми 2.1.5 нам потрібні кілька лем. Наступне твердження є прямим наслідком тверджень 1 і 2 теореми 2.1.5, а також зауваження 2.2.1.

Лема 2.2.2. Нехай $\tilde{f}(z) = 1 - \frac{z}{p_1 p_2} + \frac{z^2}{p_1 p_2 p_3 p_4}, \quad \tilde{g}(z) = 1 - \frac{z}{p_2 p_3} + \frac{z^2}{p_2 p_3 p_4 p_5}$, де $p_j > 0, 1 \leqslant j \leqslant 5$. Припустимо, що $p_{j+2}/p_j \geqslant x_0$, де x_0 є єдиним додатним коренем многочлена $x^3 - x^2 - 2x - 1$. Позначимо через $0 < x_1 < x_2$ корені $\tilde{f}$, $0 < x_1^* < x_2^*$ – корені $\tilde{g}$. Тоді

$$\tilde{g}(x_2) \leqslant 0, \quad \tilde{f}(x_1^*) \leqslant 0. \tag{2.5}$$

Якщо $\hat{f} = -1 + \frac{z}{p_3 p_4}$, $\hat{g} = 1 - \frac{z}{p_2 p_3}$, то

$$\hat{g}(x_2) < 0, \quad \hat{f}(x_1^*) < 0. \tag{2.6}$$

Лема 2.2.3. Нехай

$$F(z) = 1 - \frac{z}{\rho_1} + \frac{z^2}{\rho_1 \rho_2} - \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n}, \ n \geqslant 3, \tag{2.7}$$

є многочленом з $\rho_j > 0$ і $\min\{\frac{\rho_{j+1}}{\rho_j}, \ 1 \leqslant j \leqslant n-1\} > 1$. Введемо наступне позначення:

$$R_j(z, F) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{\rho_j} + \frac{z^2}{\rho_j \rho_{j+1}}, & \text{якщо } j = 1, 2, \ldots, n-1; \\ -1 + \frac{z}{\rho_1}, & \text{якщо } j = 0; \\ 1 - \frac{z}{\rho_n}, & \text{якщо } j = n. \end{cases} \tag{2.8}$$

Тоді

$$(-1)^j F(x) > -K_j(x) R_j(x, F), \ \rho_{j-2} < x < \rho_{j+3}, \ j = 0, 1, \ldots, n, \tag{2.9}$$

де $K_j(x) > 0$, $\rho_j = 0$ для $j < 1$, і $\rho_j = \infty$ для $j > n$.

Доведення. Зафіксуємо довільне $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Ми маємо

$$\begin{gathered} (-1)^j F(x) = \left((-1)^j + \textstyle\sum_{k=1}^{j-2} (-1)^{k+j} \frac{x^k}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k}\right) + \\ [-\frac{x^{j-1}}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_{j-1}} + \frac{x^j}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_j} - \frac{x^{j+1}}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_{j+1}}] + \textstyle\sum_{k=j+2}^{n} (-1)^{j+k} \frac{x^k}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k} =: \\ \Sigma_1(x) + [-\frac{x^{j-1}}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_{j-1}} + \frac{x^j}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_j} - \frac{x^{j+1}}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_{j+1}}] + \Sigma_2(x). \end{gathered} \tag{2.10}$$

Для кожного $x \in (\rho_{j-2}, \rho_{j+3})$ оцінка $\frac{x^k}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k} < \frac{x^{k+1}}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_{k+1}}$ виконується для $0 \leqslant k \leqslant j-3$. Тому для усіх $x \in (\rho_{j-2}, \rho_{j+3})$ доданки в $\Sigma_1(x)$ є знакозмінними і їхні модулі зростають. Аналогічно, для усіх $x \in (\rho_{j-2}, \rho_{j+3})$ доданки в $\Sigma_2(x)$ є знакозмінними і їхні модулі спадають. Тому, $\Sigma_1(x) \geqslant 0$, $\Sigma_2(x) \geqslant 0$ для усіх $x \in (\rho_{j-2}, \rho_{j+3})$, звідки для усіх $j = 1, 2, \ldots, n-1$ виконується наступна нерівність

$$\begin{gathered} (-1)^j F(x) \geqslant -\frac{x^{j-1}}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_{j-1}} + \frac{x^j}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_j} - \frac{x^{j+1}}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_{j+1}}, \\ x \in (\rho_{j-2}, \rho_{j+3}). \end{gathered} \tag{2.11}$$

Таким чином, нерівність (2.9) доведено для усіх $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Для $j=0$ (2.9) є наслідком нерівності

$$F(x)=-(-1+\frac{x}{\rho_1})+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_k}>-R_0(x,F),\ 0<x<\rho_3.$$

Ми використовуємо той факт, що для $0<x<\rho_3$ доданки в $\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_k}$ є знакозмінними і їхні модулі спадають. Таким чином, знак цієї суми збігається зі знаком першого доданка (для $k=2$), і цей знак є додатним.

Для $j=n$ (2.9) є наслідком нерівності

$$(-1)^nF(x)=-\frac{x^{n-1}}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_{n-1}}(1-\frac{x}{\rho_n})+(-1)^n+$$

$$\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^{k+n}\frac{x^k}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_k}>-\frac{x^{n-1}}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_{n-1}}R_n(x,F),\ \rho_{n-2}<x<\infty.$$

Ми використали той факт, що для $\rho_{n-2}<x<\infty$ доданки у виразі $\left((-1)^n+\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^{k+n}\frac{x^k}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_k}\right)$ є знакозмінними і їхні модулі зростають. Таким чином, знак цього виразу збігається зі знаком останнього доданка (для $k=n-2$), і цей знак є додатним. □

Лема 2.2.4. Нехай $F(z)=1-\frac{z}{\rho_1}+\frac{z^2}{\rho_1\rho_2}-\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n}$, $n\geqslant 3$, є многочленом з $\rho_j>0$ і $\min\{\frac{\rho_{j+1}}{\rho_j},\ 1\leqslant j\leqslant n-1\}>4$. Нехай многочлени $R_j(z,F), j=0,1,\ldots,n$, визначаються як в (2.8).

1. Многочлен $R_j, j=1,2,\ldots,n-1$, має прості дійсні корені, які ми позначимо через $0<\omega_1(j)<\omega_2(j)$.

2. Многочлен F має прості дійсні корені $0<x_1<x_2<\ldots<x_n$.

3. $\omega_1(j)>\rho_j$, $\omega_2(j)<\rho_{j+1}$.

4. $\sqrt{\rho_{j-1}\rho_j}<x_j<\sqrt{\rho_j\rho_{j+1}}$, $j=1,2,\ldots,n$, (тут ми позначаємо $\rho_0=1$, $\rho_{n+1}=+\infty$).

5. $x_j<\omega_1(j)$, $x_{j+1}>\omega_2(j)$, $j=1,2,\ldots,n-1$.

Доведення. Оскільки $\min\{\frac{\rho_{j+1}}{\rho_j},\ 1\leqslant j\leqslant n-1\}>4$, то маємо

$$R_j\left(\sqrt{\rho_j\rho_{j+1}},F\right)=2-\sqrt{\frac{\rho_{j+1}}{\rho_j}}<0,\quad 1\leqslant j\leqslant n-1.$$

Твердження 1 і 3 леми 2.2.4 одразу випливають з цього. Той факт, що з $\min\{\frac{\rho_{j+1}}{\rho_j},\ 1 \leqslant j \leqslant n-1\} > 4$ випливає, що многочлен F має прості дійсні корені є добре відомим (дивись теорему Хатчинсона 1.1.12 з першого розділу). Цей факт і твердження 4 леми 2.2.4 є наслідками того, що

$$F(\sqrt{\rho_0\rho_1}) > 0,\ -F(\sqrt{\rho_1\rho_2}) > 0,\ F(\sqrt{\rho_2\rho_3}) > 0,\ \ldots, \qquad (2.12)$$
$$(-1)^{n-1}F(\sqrt{\rho_{n-1}\rho_n}) > 0,\ \ \lim_{x\to\infty}[(-1)^n F(x)] = +\infty.$$

Останнє твердження є очевидним, нерівності, що вони залишились, є прямими наслідками (2.9).

Оскільки для усіх $z \in (\omega_1(j), \omega_2(j))$ ми маємо $R_j(z,F) < 0,\ j = 1, 2, \ldots, n-1$, то твердження 5 є прямим наслідком (2.9). $\square$

Доведемо тепер твердження 3 теореми 2.1.5. За критерієм Ерміта-Білера многочлен F є стійким тоді і тільки тоді, коли наступні два многочлени

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2\rfloor} (-1)^m a_{2m} z^m$$

і

$$g(z) = z \sum_{m=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} (-1)^m a_{2m+1} z^m$$

мають прості дійсні корені, які перемежовуються.

Оскільки

$$\frac{a_{2m}^2}{a_{2m-2}a_{2m+2}} = \frac{a_{2m-1}a_{2m}}{a_{2m-2}a_{2m+1}} \frac{a_{2m}a_{2m+1}}{a_{2m-1}a_{2m+2}} \geqslant x_0^2 > 4$$
$$\text{для усіх } m = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor,$$

і

$$\frac{a_{2m+1}^2}{a_{2m-1}a_{2m+3}} = \frac{a_{2m}a_{2m+1}}{a_{2m-1}a_{2m+2}} \frac{a_{2m+1}a_{2m+2}}{a_{2m}a_{2m+3}} \geqslant x_0^2 > 4$$
$$\text{для усіх } \ m = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor,$$

то за теоремою Хатчинсона многочлени f і g мають прості дійсні корені. Залишилося довести, що, за нашими припущеннями, корені многочленів f і g перемежовуються.

Нам потрібні ще наступні позначення. Нехай P є дійсним многочленом. Позначимо через $N_{(a,b)}(P)$ число коренів многочлена P в інтервалі (a,b). Позначимо через $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ корені f і через $0 = t_0^* < t_1^* < t_2^* < \ldots < t^*_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$ корені g. Ми отримуємо той факт, що корені многочленів f і g перемежовуються як наслідок наступної леми.

Лема 2.2.5.

$$N_{(t_j,t_{j+1})}(g) \geqslant 1,\ j = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1. \tag{2.13}$$

$$N_{(t_j^*,t_{j+1}^*)}(f) \geqslant 1,\ j = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1. \tag{2.14}$$

Доведення. Для $F(z) = 1+\frac{z}{p_1}+\frac{z^2}{p_1p_2}+\ldots+\frac{z^n}{p_1p_2\ldots p_n}$ ми маємо $f(z) = 1-\frac{z}{p_1p_2}+\frac{z^2}{p_1p_2p_3p_4}+\ldots$ і $g(z) = \frac{z}{p_1}(1-\frac{z}{p_2p_3}+\frac{z^2}{p_2p_3p_4p_5}+\ldots)$. Положимо $g_1(z) = g(z)p_1/z$. Відзначимо, що многочлен f має форму (2.7) з $\rho_j = p_{2j-1}p_{2j}$, і многочлен g_1 має форму (2.7) з $\rho_j = p_{2j}p_{2j+1}$. Ми будемо розглядати многочлени $R_j(z,f)$ для $j = 0, 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ і $R_j(z, g_1)$ для $j = 0, 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, ці поліноми введені в (2.8).

Спершу ми доведемо (2.13) з $n \geqslant 7$. За лемою 2.2.4 ми маємо $t_j < \omega_1(j)$, $t_{j+1} > \omega_2(j)$, де $\omega_1(j), \omega_2(j)$ є коренями $R_j(z,f)$. Для того, щоби довести (2.13), достатньо довести, що

$$(-1)^{j-1}g_1(\omega_1(j)) > 0,\ j = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, \tag{2.15}$$

$$(-1)^{j-1}g_1(\omega_2(j)) < 0,\ j = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1. \tag{2.16}$$

З (2.9) ми маємо

$$(-1)^{j-1}g_1(t) > -K_{j-1}(t)R_{j-1}(t, g_1), \tag{2.17}$$

де $p_{2j-6}p_{2j-5} < t < p_{2j+4}p_{2j+5}, \quad j = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$;

$$(-1)^{j}g_1(t) > -K_{j}(t)R_{j}(t, g_1), \tag{2.18}$$

де $p_{2j-4}p_{2j-3} < t < p_{2j+6}p_{2j+7}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$. В (2.17) і (2.18) функції $K_j(t)$ є додатними. Із твердження 3 леми 2.2.4 ми маємо

$p_{2j-1}p_{2j} < \omega_1(j) < \omega_2(j) < p_{2j+1}p_{2j+2}$, тому нерівності (2.17) і (2.18) виконуються для $t \in (\omega_1(j), \omega_2(j)), \quad j = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$. У (2.17) ми застосуємо лему 2.2.3 з $\tilde{f}(t) = R_{j-1}(t, g_1), \quad j = 2, 3, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, \quad \hat{f}(t) = R_0(t, g_1)$ і $\tilde{g}(t) = R_j(t, f), \quad j = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$. Ми отримуємо

$$R_j(\omega_1(j), g_1) < 0, \ j = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1. \tag{2.19}$$

□

З (2.17), (2.19) ми отримуємо (2.15).

У (2.18) ми використовували лему 2.2.2 з $\tilde{f}(t) = R_j(t, f)$ і $\tilde{g}(t) = R_j(t, g_1), \quad j = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Якщо n є непарним числом, то $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Якщо n є парним числом, ми також застосовуємо лему 2.2.2 з $\hat{g}(t) = R_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}(t, g_1)$ і $\tilde{f}(t) = R_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}(t, f)$. Ми маємо

$$R_j(\omega_2(j), g_1) < 0, \ j = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1. \tag{2.20}$$

З (2.18), (2.20) ми отримуємо (2.16).

Твердження (2.14) з $n \geqslant 6$ можуть бути доведені аналогічно. З леми 2.2.4 ми маємо $t_j^* < \omega_1^*(j), \ t_{j+1}^* > \omega_2^*(j)$, де $\omega_1^*(j), \omega_2^*(j)$ є коренями $R_j(z, g_1)$. Для доведення (2.14) достатньо показато, що

$$(-1)^{j-1} f(\omega_1^*(j)) < 0, \ j = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1, \tag{2.21}$$

$$(-1)^{j-1} f(\omega_2^*(j)) > 0, \ j = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1. \tag{2.22}$$

З (2.9) ми маємо

$$(-1)^j f(t) > -K_j(t) R_j(t, f), \tag{2.23}$$

де $p_{2j-5}p_{2j-4} < t < p_{2j+5}p_{2j+6}, \quad j = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ і

$$(-1)^{j+1} f(t) > -K_{j+1}(t) R_{j+1}(t, f), \tag{2.24}$$

де $p_{2j-3}p_{2j-2} < t < p_{2j+7}p_{2j+8}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1$. У (2.23) і (2.24) функції $K_j(t)$ є додатними. З твердження 3 леми 2.2.4 ми маємо $p_{2j}p_{2j+1} < \omega_1^*(j) < \omega_2^*(j) < p_{2j+2}p_{2j+3}$, звідки нерівності (2.23) і (2.24) виконуються для $t \in (\omega_1^*(j), \omega_2^*(j)), \quad j = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1$. Використовуючи (2.23), (2.24) і лему 2.2.2 (аналогічно до доведення (2.15) і (2.16)) ми можемо отримати (2.21) і (2.22). Таким чином, (2.14) доведено.

Застосовуючи (2.21) і (2.22) для $n = 6$ ми маємо

$$f(\omega_1^*) < 0, \; f(\omega_2^*) > 0,$$

де ω_1^*, ω_2^* є коренями многочлена $R_1(z, g_1) = g_1(z)$. Крім того,

$$f(0) = 1 > 0, \; \lim_{t\to\infty} f(t) = -\infty.$$

Тобто, (2.13) доведено для $n = 6$.

Таким чином, корені многочленів f і g перемежовуються. Застосовуючи (2.13) для $j = 1$ маємо

$$g_1(\omega_1(1)) > 0,$$

де $\omega_1(1)$ є найменшим коренем многочлена $R_1(z, f)$. Крім того, $g_1(0) = 1 > 0$. Таким чином, $t_1 < \omega_1(1) < t_1^*$.

Теорема 2.1.5 доведена.

Доведемо тепер теорему 2.1.7. Ми будемо використовувати ті самі міркування, як при доведенні теореми 2.1.5. Замість критерію стійкості Ерміта-Білера ми застосуємо наступне узагальнення теореми Ерміта-Білера для цілих функцій, зріст яких не перевищує першого порядку мінімального типу.

Теорема 2.2.6. (Теорема Ерміта-Білера, дивись [161, глава 7]). Нехай $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $a_k > 0$, є цілою функцією, яка зростає не вище першого порядку мінімального типу. Усі корені функції G мають від'ємні дійсні частини тоді і тільки тоді, коли наступні дві цілі функції $f(z) = \sum_0^{\infty}(-1)^m a_{2m} z^m$ і $g(z) = z\sum_0^{\infty}(-1)^m a_{2m+1} z^m$ мают прості дійсні корені, і ці корені перемежовуються.

Розглянемо цілу функцію $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ з додатними коефіцієнтами, які задовольняють умову $a_k a_{k+1} \geqslant x_0 a_{k-1} a_{k+2}$ для $k \in \mathbb{N}$. Відзначимо, що

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k+2}} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_{2k+1}a_{2k}}{a_{2k+2}a_{2k-1}} \cdot \frac{a_{2k-1}a_{2k-2}}{a_{2k}a_{2k-3}} \cdots \frac{a_3 a_2}{a_4 a_1} \geqslant x_0^k, \quad k \geqslant 1,$$

і

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k+1}} \cdot \frac{a_1}{a_0} = \frac{a_{2k}a_{2k-1}}{a_{2k+1}a_{2k-2}} \cdot \frac{a_{2k-2}a_{2k-3}}{a_{2k-1}a_{2k-4}} \cdots \frac{a_2 a_1}{a_3 a_0} \geqslant x_0^k, \quad k \geqslant 1.$$

Таким чином ми маємо

$$a_{2k+2} \leqslant \frac{1}{x_0^k} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_{2k+1}, \quad a_{2k+1} \leqslant \frac{1}{x_0^k} \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot a_{2k}, \quad k \geqslant 1.$$

Звідки отримуємо

$$a_{2k+2} \leqslant \frac{1}{x_0^k} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_{2k+1} \leqslant \frac{1}{x_0^{2k}} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot a_{2k} \leqslant$$

$$\frac{1}{x_0^{2k+2(k-1)}} \cdot \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^2 a_{2k-2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{1}{x_0^{k(k+1)}} \cdot \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^k a_2, \quad k \geqslant 1.$$

Аналогічно

$$a_{2k+1} \leqslant \frac{1}{x_0^k} \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot a_{2k} \leqslant \frac{1}{x_0^{2k-1}} \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_{2k-1} \leqslant$$

$$\frac{1}{x_0^{2k-1+2k-3}} \cdot \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^2 a_{2k-3} \leqslant \ldots \leqslant \frac{1}{x_0^{k^2}} \cdot \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^k a_1, \quad k \geqslant 1.$$

Добре відомо, що порядок цілої функції з коефіцієнтами a_k обчислюється за формулою $\limsup_{n\to\infty} \frac{n \log n}{\log |a_n|^{-1}}$ (дивись, наприклад, [161, глава 1]). Тобто, наша функція G є цілою функцією порядку 0.

Легко довести, що твердження лем 2.2.3, 2.2.4 і 2.2.5 виконуються не тільки для многочленів, але і для цілої функції G. З цього випливає твердження теореми 2.1.7.

Теорема 2.1.7. доведена.

2.3 Доведення теореми 2.1.6

Доведемо твердження 1 теореми 2.1.6. Ми розглянемо многочлен $T_\beta(z) = \sum_{j=1}^4 a_j(\beta)z^j = 1+\beta^3 z+\beta^4 z^2+\beta^3 z^3+z^4, \beta > 0$, і відмітимо, що для цього многочлена $s_j(\beta) = \frac{a_j(\beta)a_{j+1}(\beta)}{a_{j-1}(\beta)a_{j+2}(\beta)} = \beta^4,\ j = 1, 2$. Ми маємо $T_\beta(z) = z^2\left((z^2 + z^{-2}) + \beta^3(z + z^{-1}) + \beta^4\right)$. Позначимо через $w = z + z^{-1}$, і зазначимо, що $Re\ z < 0 \Leftrightarrow Re\ w < 0$. Ми маємо $T_\beta(z) = z^2(w^2 + \beta^3 w + \beta^4 - 2)$. Очевидно, что дійсний квадратний многочлен є стійким тоді і тільки тоді, коли усі його коефіцієнти мають однакові знаки. Таким чином, $T_\beta(z)$ є стійким тоді і тільки тоді, коли $\beta^4 - 2 > 0$. Іншими словами, якщо $s_1(\beta) = s_2(\beta) = \beta^4 \leqslant 2$, то многочлен $T_\beta(z)$ не є стійким.

Для доведення твердження 2 теореми 2.1.6 ми розглянемо многочлен $M_\beta(z) = \sum_{j=1}^{5} b_j(\beta) z^j = 1 + \beta^4 z + \beta^6 z^2 + \beta^6 z^3 + \beta^4 z^4 + z^5, \beta > 0$, і відмітимо, що для цього многочлена $s_j(\beta) = \frac{b_j(\beta) b_{j+1}(\beta)}{b_{j-1}(\beta) b_{j+2}(\beta)} = \beta^4,\ j = 1, 2, 3$. Ми маємо

$$M_\beta(z) = (z+1)\left(z^4 + (\beta^4 - 1)z^3 + (\beta^6 - \beta^4 + 1)z^2 + (\beta^4 - 1)z + 1\right) =$$

$$(z+1)z^2\left((z^2 + z^{-2}) + (\beta^4 - 1)(z + z^{-1}) + (\beta^6 - \beta^4 + 1)\right)$$

Використовуючи позначення $w = z + z^{-1}$, ми можемо записати

$$M_\beta(z) = (z+1)z^2\left(w^2 + (\beta^4 - 1)w + (\beta^6 - \beta^4 - 1)\right).$$

Оскільки $sign(Re\, z) = sign(Re\, w)$, многочлен $M_\beta(z)$ є стійким тоді і тільки тоді, коли $\beta^6 - \beta^4 - 1 > 0$. Відзначимо, що $(\beta^6 - \beta^4 - 1)(\beta^6 + \beta^4 + 1) = \beta^{12} - \beta^8 - 2\beta^4 - 1$, і що многочлен $\beta^6 + \beta^4 + 1$ не має додатних коренів. Звідки $M_\beta(z)$ є стійким тоді і тільки тоді, коли $\beta^4 > x_0$, де x_0 є єдиним додатним коренем многочлена $x^3 - x^2 - 2x - 1$, і для $\beta^4 < x_0$ многочлен $M_\beta(z)$ має корені з додатними дійсними частинами. Тобто, якщо $s_1(\beta) = s_2(\beta) = s_3(\beta) = \beta^4 < x_0$, то многочлен $M_\beta(z)$ має корені з додатними дійсними частинами, отже він не є стійким.

Доведемо твердження 3 теореми 2.1.6. Очевидно, що для кожного $\varepsilon > 0$ ми можемо вибрати β таким чином, що $x_0 - \varepsilon < \beta^4 < x_0$. Тобто, многочлен $M_\beta(z)$ має корені з додатними дійсними частинами. Для кожного $\varepsilon \in (0, x_0)$ ми позначимо через $\delta = (x_0 - \varepsilon/2)^{\frac{1}{4}}$, тобто $\delta > 0,\ \delta^4 > x_0 - \varepsilon$. Для $n = 6$ ми положимо $Q_{\gamma_1,6}(z) = M_\delta(z) + \gamma_1 z^6, \gamma_1 > 0$. Оскільки $M_\delta(z)$ має корені з додатними дійсними частинами, $Q_{\gamma_1,6}(z)$ має корені з додатними дійсними частинами для усіх достатньо маленьких γ_1. Для многочлена $Q_{\gamma_1,6}(z)$ ми маємо $s_1 = s_2 = s_3 = \delta^4 > x_0 - \varepsilon$, і $s_4 = \frac{1}{\delta^2 \gamma_1} > x_0 - \varepsilon$ для достатньо маленьких γ_1. Для γ_1, яке вибране вище, і $n = 7$ ми положимо $Q_{\gamma_2,7}(z) = Q_{\gamma_1,6}(z) + \gamma_2 z^7, \gamma_2 > 0$. Оскільки $Q_{\gamma_1,6}(z)$ має корені з додатними дійсними частинами, $Q_{\gamma_2,7}(z)$ має корені з додатними дійсними частинами для усіх достатньо маленьких γ_2. Для многочлена $Q_{\gamma_2,7}(z)$ ми маємо $s_1 = s_2 = s_3 = \delta^4 > x_0 - \varepsilon$, $s_4 = \frac{1}{\delta^2 \gamma_1} > x_0 - \varepsilon$ і $s_5 = \frac{\gamma_1}{\delta^4 \gamma_2} > x_0 - \varepsilon$ для достатньо маленьких γ_2. Міркуючи аналогічним чином, ми побудуємо необхідний приклад для кожного $n \geqslant 5$, а також необхідний приклад цілої функції.

Теорема 2.1.6 доведена.

Висновки до розділу 2

В цьому розділі ми ввели важливе поняття стійкого многочлена, обговорили необхідні умови і різні критерії стабільності і отримали нову просту для перевірки достатню умову стійкості.

До основних результатів розділу відносяться:

– Теорема 2.1.5, яка дає достатню умову стійкості многочлена з додатними коефіцієнтами.

– Теорема 2.1.6, яка демонструє, що константи в теоремі 2.1.5 є точними для кожного степеня многочлену.

– Теорема 2.1.7, яка узагальнює результати теореми 2.1.5 і дає просту достатню умову для того, щоб усі корені цілої функції з додатними коефіцієнтами були розташовані в лівій півплощині.

В розділі 4 ми дослідимо стійкість відрізків ряду Тейлора важливої спеціальної функції, а саме часткової тета-функції $g_a(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^{k^2}},\ a > 1$.

РОЗДІЛ 3

МНОЖИНА ДОДАТНИХ МНОГОЧЛЕНІВ І ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ, ЩО ЇЇ ЗБЕРІГАЮТЬ

3.1 Додатні многочлени

Додатні многочлени виникають у багатьох важливих областях математики. Велика кількість робіт видатних математиків присвячена лінійним операторам, що вони зберігають множину додатних (невід'ємних) многочленів, та пов'язаних з цим питань (дивись, наприклад, відому монографію Н.І.Ахієзера [12], роботу Г.Гамбургера [93] і роботу І.Шура [202], а також посилання в цих джерелах, дивись також матеріали Дж.Борсеа, П.Брандена, Дж.Ксордаша і В.Віннікова [36] для численних відкритих питань, пов'язаних з цією темою). В цьому параграфі, базуючись на результатах першого розділу, ми отримаємо просту достатню умову для того, щоб многочлен парного степеня з додатними коефіцієнтами був додатним на всій дійсній осі.

Теорема 3.1.1. ([128]). Нехай $P(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$ є многочленом з додатними коефіцієнтами. Якщо нерівності

$$\frac{a_{2k+1}^2}{a_{2k}a_{2k+2}} < \frac{1}{cos^2(\frac{\pi}{n+2})}$$

виконуються для усіх $k = 0, 1, \ldots, n-1$, то $P(x) > 0$ для усіх $x \in \mathbb{R}$.

Доведення. Нехай $P(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$ є многочленом з додатними коефіцієнтами. Розглянемо наступну квадратичну форму

$$Q_P(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 x_0^2 + a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1 x_2 \tag{3.1}$$
$$+ a_4 x_2^2 + \ldots + a_{2n-2} x_{n-1}^2 + a_{2n-1} x_{n-1} x_n + a_{2n} x_n^2 =$$
$$\sum_{k=0}^{n} a_{2k} x_k^2 + \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1} x_k x_{k+1}.$$

Для кожного $x \in \mathbb{R}$ ми маємо

$$P(x) = Q_P(1, x, x^2 \dots, x^n). \tag{3.2}$$

Таким чином, якщо квадратична форма Q_P є додатно визначеною, то, зокрема, для кожного $x \in \mathbb{R}$ ми маємо $P(x) > 0$. Залишилося показати, що при виконанні умов теореми 3.1.1, квадратична форма Q_P є додатно визначеною. Наступна матриця розміру $(n+1)\times(n+1)$ відповідає квадратичній формі Q_P

$$M_{Q_p} := \begin{Vmatrix} a_0 & \frac{a_1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_1}{2} & a_2 & \frac{a_3}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_3}{2} & a_4 & \frac{a_5}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a_{2n-3}}{2} & a_{2n-2} & \frac{a_{2n-1}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a_{2n-1}}{2} & a_{2n} \end{Vmatrix}. \tag{3.3}$$

За критерієм Сильвестра додатної визначеності (дивись, наприклад, [84, глава 10, §4]) нам потрібно довести, що усі головні кутові мінори матриці M_{Q_p} є додатними. Щоб довести це, ми будемо використовувати теорему 1.1.4 з першого розділу.

Розглянемо наступну симетричну тепліцеву матрицю розміру $(n+1)\times(n+1)$:

$$T(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) := \begin{Vmatrix} a_0 & \frac{a_1}{2} & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_{n-2} & \varepsilon_{n-1} \\ \frac{a_1}{2} & a_2 & \frac{a_3}{2} & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_{n-3} & \varepsilon_{n-2} \\ \varepsilon_1 & \frac{a_3}{2} & a_4 & \frac{a_5}{2} & \dots & \varepsilon_{n-4} & \varepsilon_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{n-2} & \varepsilon_{n-3} & \dots & \varepsilon_1 & \frac{a_{2n-3}}{2} & a_{2n-2} & \frac{a_{2n-1}}{2} \\ \varepsilon_{n-1} & \varepsilon_{n-2} & \varepsilon_{n-3} & \dots & \varepsilon_1 & \frac{a_{2n-1}}{2} & a_{2n} \end{Vmatrix}, \tag{3.4}$$

де $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_{n-1} > 0$ будуть вибиратися таким чином, щоб матриця $T(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ задовольняла умови теореми 1.1.4. Спочатку ми виберемо ε_1 так, що

$$\frac{a_{2j-1}a_{2j+1}}{4} > 4\cos^2\frac{\pi}{n+2}\, a_{2j}\varepsilon_1, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Потім ми виберемо ε_2 так, що

$$\varepsilon_1^2 > 4\cos^2\frac{\pi}{n+2}\,a_{2j+1}\varepsilon_2, \quad j = 1, 2, \dots, n-2.$$

Потім ми будемо послідовно обирати числа $\varepsilon_3 > \varepsilon_4 > \dots > \varepsilon_{n-1} > 0$ один за одним так, що

$$\varepsilon_j^2 > 4\cos^2\frac{\pi}{n+2}\varepsilon_{j-1}\varepsilon_{j+1}, \quad j = 2, 3, \dots, n-2.$$

За нашим вибором $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_{n-1} > 0$, і за умовами теореми щодо коефіцієнтів $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$, матриця $T(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ задовольняє умови теореми 1.1.4. Тому, за теоремою 1.1.4, усі мінори $T(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ є додатними. Роблячи граничні переходи $\varepsilon_{n-1} \to 0$, $\varepsilon_{n-2} \to 0, \dots, \varepsilon_1 \to 0$, ми отримуємо, що усі мінори M_{Q_p} є невід'ємними. Залишилося показати, що усі головні кутові мінори матриці M_{Q_p}

$$\Delta_1(M_{Q_p}) = a_0,\ \Delta_2(M_{Q_p}) = \det\begin{pmatrix} a_0 & \frac{a_1}{2} \\ \frac{a_1}{2} & a_2 \end{pmatrix}, \dots,\ \Delta_{n+1}(M_{Q_p}) = \det M_{Q_p}$$

є додатними.

Припустимо, що існує головний кутовий мінор матриці M_{Q_p}, який дорівнює нулю. Позначимо через j найменший порядок головного кутового мінору, який дорівнює нулю. Оскільки $\Delta_1(M_{Q_p}) = a_0 > 0$, ми маємо $j \geqslant 2$ і $\Delta_{j-1}(M_{Q_p}) > 0, \Delta_j(M_{Q_p}) = 0$. Розглянемо многочлен $P_\varepsilon(x) = P(x) - \varepsilon x^{2j-2}$, де $\varepsilon > 0$ є настільки малим, що $P_\varepsilon(x)$ задовольняє умови теореми 1.1.4. Як ми довели, з цього випливає, що усі мінори відповідної матриці $M_{Q_{p_\varepsilon}}$ є невід'ємними, зокрема,

$$\Delta_j(M_{Q_{p_\varepsilon}}) = \det\begin{pmatrix} a_0 & \frac{a_1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_1}{2} & a_2 & \frac{a_3}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_3}{2} & a_4 & \frac{a_5}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a_{2j-5}}{2} & a_{2j-4} & \frac{a_{2j-3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a_{2j-3}}{2} & a_{2j-2} - \varepsilon \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Оскільки $\Delta_{j-1}(M_{Q_p}) > 0$, ми отримуємо, що визначник $\Delta_j(M_{Q_{p_\varepsilon}})$ є строго спадаючим по змінної $\varepsilon > 0$, і тому $\Delta_j(M_{Q_p})$ (який дорівнює $\Delta_j(M_{Q_{p_\varepsilon}})$ при

$\varepsilon = 0$) є строго додатним. Тому жоден з головних кутових мінорів матриці M_{Q_p} не дорівнює нулю, усі головні кутові мінори матриці M_{Q_p} є додатними. За критерієм Сильвестра це означає, що квадратична форма Q_P є додатно визначеною, зокрема, із (3.2) ми отримуємо, що $P(x) > 0$ для кожного $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Наступне твердження демонструє, що константа $\frac{1}{cos^2(\frac{\pi}{n+2})}$ в теоремі 3.1.1 є точною для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.1.2. ([128]). Для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує многочлен $Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$ з додатними коефіцієнтами, які задовольняють умови

$$\frac{a_{2k+1}^2}{a_{2k}a_{2k+2}} = \frac{1}{cos^2(\frac{\pi}{n+2})}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

і такий, що Q має не менш за два дійсних кореня.

Доведення. Зафіксуємо довільне $n \in \mathbb{N}$ і позначимо через $\alpha := \frac{\pi}{n+2}$. Розглянемо наступний многочлен

$$Q(x) := \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha \sin(k+1)\alpha\ (1+x)^2 x^{2k-2}.$$

Очевидно, $Q(x)$ є многочленом з додатними коефіцієнтами степеня $2n$, і число -1 є коренем Q кратності не нижче за 2. Ми маємо

$$\begin{gathered} Q(x) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha \sin(k+1)\alpha\ (x^{2k-2} + x^{2k}) \\ +2\textstyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha \sin(k+1)\alpha\ x^{2k-1} = \\ \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k+1)\alpha \sin(k+2)\alpha\ x^{2k} + \\ \textstyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha \sin(k+1)\alpha\ x^{2k} + \\ 2\textstyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha \sin(k+1)\alpha\ x^{2k-1} \\ = \sin\alpha \sin 2\alpha + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} \sin(k+1)\alpha(\sin(k+2)\alpha + \sin k\alpha)x^{2k} + \\ \sin(n+1)\alpha(\sin n\alpha + \sin(n+2)\alpha)x^{2n} + \\ 2\textstyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha \sin(k+1)\alpha\ x^{2k-1} \\ = 2\sin^2\alpha \cos\alpha + 2\textstyle\sum_{k=1}^{n-1} \sin^2(k+1)\alpha \cos\alpha\ x^{2k} + \\ 2\sin^2(n+1)\alpha \cos\alpha\ x^{2n} + \end{gathered} \tag{3.5}$$

$$2\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha\sin(k+1)\alpha\ x^{2k-1}=$$

$$2\sum_{k=0}^{n}\sin^2(k+1)\alpha\cos\alpha\ x^{2k}+2\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha\sin(k+1)\alpha\ x^{2k-1}$$

(ми використали той факт, що $\sin(n+2)\alpha=0$). Таким чином, якщо ми визначимо через a_j, $j=0,1,\dots,2n$, коефіцієнти многочлена Q, то ми довели наступні формули

$$a_{2k}=2\sin^2(k+1)\alpha\cos\alpha,\ a_{2k-1}=2\sin k\alpha\sin(k+1)\alpha.$$

Отже, ми маємо

$$\frac{a_{2k+1}^2}{a_{2k}a_{2k+2}}=\frac{4\sin^2(k+1)\alpha\sin^2(k+2)\alpha}{2\sin^2(k+1)\alpha\cos\alpha\cdot 2\sin^2(k+2)\alpha\cos\alpha},$$

звідки

$$\frac{a_{2k+1}^2}{a_{2k}a_{2k+2}}==\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

для усіх $k=0,1,\dots,n-1$. $\square$

Наступне твердження є простим наслідком теореми 3.1.1.

Наслідок 3.1.3. ([128]). Нехай $P(x)=\sum_{k=0}^{2n+1}a_kx^k$ є многочленом з додатними коефіцієнтами. Якщо нерівності

$$\frac{a_{2k}^2}{a_{2k-1}a_{2k+1}}<\frac{4k^2-1}{4k^2}\cdot\frac{1}{cos^2(\frac{\pi}{n+2})}$$

виконуються для усіх $k=1,2,\dots,n$, то P має тільки один дійсний корінь (з урахуванням кратності).

Ми покажемо, що константа в останньому твердженні є також точною для кожного $n\in\mathbb{N}$.

Теорема 3.1.4. ([128]). Для кожного $n\in\mathbb{N}$ існує многочлен $Q(x)=\sum_{k=0}^{2n+1}a_kx^k$ з додатними коефіцієнтами, які задовольняють умовам

$$\frac{a_{2k}^2}{a_{2k-1}a_{2k+1}}=\frac{4k^2-1}{4k^2}\cdot\frac{1}{cos^2(\frac{\pi}{n+2})},\quad k=1,2,\dots,n,$$

і такий, що Q має не менше трьох дійсних коренів.

Доведення. Зафіксуємо довільне $n \in \mathbb{N}$ і позначимо через $\alpha := \frac{\pi}{n+2}$. Розглянемо наступну первісну многочлена Q, що його побудовано при доведенні теореми 3.2:

$$H(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha \sin(k+1)\alpha \left(\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + 2\frac{x^{2k}}{2k} + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right).$$

Ми маємо

$$H(-1) = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha \sin(k+1)\alpha \left(-\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha \sin(k+1)\alpha \left(\frac{-1}{k(2k-1)(2k+1)} \right) < 0.$$

Таким чином наступний многочлен

$$S(x) = H(x) - H(-1)$$

має усі додатні коефіцієнти, його степінь дорівнює $2n+1$, крім того число -1 є коренем S кратності не нижче за 3. Використовуючи (3.5) можна переписати S у вигляді

$$S(x) = -H(-1) + 2\sum_{k=0}^{n} \sin^2(k+1)\alpha \cos\alpha \ \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$+2\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha \sin(k+1)\alpha \ \frac{x^{2k}}{2k}.$$

Тобто, якщо ми позначимо $b_j, \ j = 0, 1, \ldots, 2n+1$, коефіцієнти многочлена Q, то $b_0 = -H(-1)$ і

$$b_{2k+1} = \frac{2\sin^2(k+1)\alpha\cos\alpha}{2k+1}, \ k = 0, 1, \ldots, n;$$

$$b_{2k} = \frac{2\sin k\alpha \sin(k+1)\alpha}{2k}, \ k = 1, 2 \ldots, n.$$

Ми маємо

$$\frac{b_{2k}^2}{b_{2k-1}b_{2k+1}} = \frac{4\sin^2 k\alpha \sin^2(k+1)\alpha}{4k^2} \cdot$$

$$\frac{2k-1}{2\sin^2 k\alpha\cos\alpha} \frac{2k+1}{2\sin^2(k+1)\alpha\cos\alpha}$$

звідки

$$\frac{b_{2k}^2}{b_{2k-1}b_{2k+1}} = \frac{4k^2-1}{4k^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

для усіх $k = 1, 2 \ldots, n$. $\square$

Зауваження 3.1.5. В роботі [204] Б.Шапіро висувається така гіпотеза, яка є певним узагальненням відомого правила знаків Декарта. Нехай $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ є многочленом з додатними коефіцієнтами. Розглянемо наступну числову послідовність $\tilde{c}_k = a_k^2 - a_{k-1}a_{k+1}$, де за означенням $a_{-1} = a_{n+1} = 0$. Нехай $0 = k_1 < k_2 < \ldots < k_m = n$ є послідовністю тих індексів з набору $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, для яких числа $\tilde{c}_k$ є додатними. Позначимо через $\nu(P)$ число знакозмін в послідовності $\left((-1)^{k_j}\right)_{j=0}^m$. Тоді число дійсних коренів P (з урахуванням кратності) не перевищує $\nu(P)$. Відмітимо, що теорему 3.1.1 можна розглядати як (посилений) окремий випадок цієї гіпотези. А саме, якщо виконуються умови теореми 3.1.1, то серед індексів $0 = k_1 < k_2 < \ldots < k_m = n$ немає непарних, тому в цьому випадку $\nu(P) = 0$, і ми довели, що в цьому випадку многочлен не має дійсних коренів. Ми витратили багато часу на доведення цієї гіпотези, але, на жаль, поки нам не вдається довести цю гіпотезу навіть для окремого випадку $\nu(P) = 1$.

3.2 Крайні напрямки конусу невід'ємних многочленів з невід'ємними коефіцієнтами

Оскільки додатні (невід'ємні) многочлени виникають в багатьох важливих задачах, існує велика кількість математичних робіт, в яких розглядаються лінійні оператори, що вони зберігають множину таких многочленів (дивись, наприклад, монографію Н.І.Ахієзера [12], роботу Г.Гамбургера [93], монографію М.Г.Крейна і А.А.Нудельмана [153], роботу І.Шура [202] і посилання в цих джерелах).

Нехай $m \in \mathbb{N}$ є невід'ємним цілим числом. Ми використовуємо наступні позначення:

$$\mathbb{R}_m[x] = \{P \in \mathbb{R}[x] : \deg P \leqslant m\},$$

$$\mathbb{R}_m^+[x] = \{P = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j \in \mathbb{R}_m[x] : a_j \geqslant 0 \text{ для усіх } j = 0, 1, \dots, m\}, \quad (3.6)$$

$$\mathbb{R}_m^{\geqslant 0}[x] = \{P \in \mathbb{R}_m[x] :\ \forall x \in \mathbb{R}\ P(x) \geqslant 0\}, \quad (3.7)$$
$$\mathbb{R}_m^{>0}[x] = \{P \in \mathbb{R}_m[x] :\ \forall x \in \mathbb{R}\ P(x) > 0\},$$

і, нарешті,

$$\mathcal{P}_m = \mathbb{R}_m^+[x] \cap \mathbb{R}_m^{\geqslant 0}[x]. \quad (3.8)$$

Очевидно, якщо многочлен $P \in \mathbb{R}[x]$, і для усіх $x \in \mathbb{R}$ виконується $P(x) \geqslant 0$, то P є многочленом парного степеня. Множина $\mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$ формує замкнений опуклий нормальний конус в $\mathbb{R}_{2n}[x]$, або, іншими словами, ця множина є замкненим опуклим конусом, таким що жодна пряма лінія не належить цілком до цього конусу. Наступне просте твердження дає опис крайніх напрямів конусу $\mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$.

Твердження 3.2.1. Многочлен $P \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$ є крайнім напрямом конуса $\mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$ тоді і тільки тоді, коли $P = C(x - x_1)^2(x - x_2)^2 \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^2$, де $C > 0,\ x_1, \dots x_m \in \mathbb{R}$, і $0 \leqslant m \leqslant n$ ($m = 0$ відповідає випадку, коли P є додатною сталою).

Таким чином, якщо P є крайнім напрямом конуса $\mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$, то усі його корені є дійсними і кратність кожного кореня є парною. Хоча твердження 3.2.1 є добре відомим, ми не змогли знайти посилання, тому ми для зручності наведемо доказ цього твердження.

Доведення. Якщо $P \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$, то $P(x) = (x - x_1)^2 \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^2 Q(x)$, де $x_1, \dots x_k \in \mathbb{R},\ Q \in \mathbb{R}[x]$, $2k + \deg Q \leqslant 2n$ і $Q(x) > 0$ для усіх $x \in \mathbb{R}$. Позначимо через $\mu := \inf_{x \in \mathbb{R}} Q(x)$ (очевидно, $\mu > 0$). Тоді $P(x) = \frac{1}{2}(x - x_1)^2 \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^2 (Q(x) - \mu) + \frac{1}{2}(x - x_1)^2 \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^2 (Q(x) + \mu) =: Q_1(x) + Q_2(x)$, $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$. Якщо P є крайнім напрямком конусу $\mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$, то існує стала $\lambda \geqslant 0$, така що $P = \lambda Q_1$, таким чином $\deg Q = 0$. З іншого боку, нехай $P = C(x - x_1)^2 \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^2 \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$, де $C > 0$, і $P = Q + S,\ Q, S \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$.

Оскільки $P(x_1) = 0$ і $Q(x_1) \geqslant 0, S(x_1) \geqslant 0$, ми отримуємо $Q(x_1) = S(x_1) = 0$. Із $Q, S \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$ ми маємо $(x - x_1)^2 | Q, (x - x_1)^2 | S$. Скорочуючи рівність $P = Q + S$ на $(x - x_1)^2$ і розмірковуючи аналогічно, ми отримуємо, що існують константи $\lambda \geqslant 0, \nu \geqslant 0$, такі що $Q = \lambda P, S = \nu P$. Таким чином, P є крайнім напрямком конусу $\mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$. $\square$

Для даного $n \in \mathbb{N}$ і для послідовності дійсних чисел $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} \subset \mathbb{R}$ ми визначимо лінійний оператор $A_\Lambda : \mathbb{R}_{2n}[x] \to \mathbb{R}_{2n}[x]$ наступним чином:

$$A_\Lambda \left(\sum_{k=0}^{2n} a_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k a_k x^k.$$

Спершу ми нагадаємо знамените твердження щодо дійсних послідовностей Λ, таких що відповідний оператор A_Λ зберігає конус $\mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$. Наступна теорема є класичною, але, на жаль, нам не вдалося розшукати її автора. Можемо сказати тільки, що цей результат базується на ідеях, що вони виникають в роботах Ейлера, Гаусса і Сильвестра.

Теорема 3.2.2. (дивись [12], або [153, глава 3, §2]). Нехай $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n}$ є даною дійсною послідовністю. Оператор A_Λ зберігає множину невід'ємних многочленів $\mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$ тоді і тільки тоді, коли усі головні мінори наступної матриці розміру $(n+1) \times (n+1)$

$$\widehat{\Lambda} := (\lambda_{i+j})_{i,j=0}^{n} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n & \lambda_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_{n-1} & \lambda_n & \lambda_{n+1} & \dots & \lambda_{2n-2} & \lambda_{2n-1} \\ \lambda_n & \lambda_{n+1} & \lambda_{n+2} & \dots & \lambda_{2n-1} & \lambda_{2n} \end{pmatrix}$$

є невід'ємними.

Для зручності читача наведемо коротке доведення цього факту.

Доведення. Добре відомо, що многочлен P належить до $\mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$ тоді і тільки тоді, коли він може бути представленим як сума квадратів двох дійсних многочленів степенів $\leqslant n$ (дивись, наприклад, [12, с.2] або [191, Глава

6, задача 44]). Звідки маємо, що лінійний оператор A_Λ зберігає множину невід'ємних многочленів $\mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$ тоді і тільки тоді, коли $A_\Lambda(Q^2) \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$ для кожного $Q \in \mathbb{R}_n[x]$, тобто для кожного набору дійсних чисел $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ многочлен $A_\Lambda\left((\xi_0 + \xi_1 x + \ldots + \xi_n x^n)^2\right) \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$. Очевидно,

$$A_\Lambda(P) \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x] \text{ для кожного } P \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x] \Leftrightarrow$$

$$A_\Lambda(P)(1) \geqslant 0 \text{ для кожного } P \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x].$$

Ми маємо

$$A_\Lambda\left((\xi_0 + \xi_1 x + \ldots + \xi_n x^n)^2\right)(1) = \sum_{i,j=0}^{n} \xi_i \xi_j A_\Lambda(x^{i+j})(1) = \sum_{i,j=0}^{n} \lambda_{i+j} \xi_i \xi_j.$$

Звідки, A_Λ зберігає множину невід'ємних многочленів тоді і тільки тоді, коли квадратична форма $\sum_{i,j=0}^{n} \lambda_{i+j} \xi_i \xi_j$ є невід'ємно визначеною, і твердження теореми є наслідком добре відомого критерію невід'ємної визначеності квадратичної форми. $\square$

Зауваження 3.2.3. Очевидно, що множина $\mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$ є нормальним замкненим опуклим конусом в $\mathbb{R}_{2n}[x]$. Використовуючи твердження 3.5 можна отримати, що кожен многочлен $P \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$ можна представити як суму $2n + 2$ квадратів дійсних многочленів ступенів $\leqslant n$ з усіма дійсними коренями.

Наступна теорема є наслідком теореми 3.2.2 і результатів А.Гутермана і Б.Шапіро ([91, теорема 2.5], дивись також [127]).

Теорема 3.2.4. ([91, теорема 2.5]). *Нехай $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n}$ є заданою дійсною послідовністю. Оператор A_Λ зберігає множину додатних многочленів $\mathbb{R}_{2n}^{>0}[x]$ тоді і тільки тоді, коли усі головні мінори матриці $\widehat{\Lambda} := (\lambda_{i+j})_{i,j=0}^{n}$ розміру $(n+1) \times (n+1)$ є невід'ємними і $\lambda_0 > 0$.*

У роботі [91] А.Гутермана і Б.Шапіро теорему 3.2.4 формулюють у випадку, коли послідовність Λ є апріорі додатною (невід'ємною). Оскільки нам потрібне це твердження у загальному випадку дійсної послідовності Λ, ми наводимо коротке доведення.

Доведення. Використовуючи міркування неперервності, ми отримуємо, що, якщо A_Λ зберігає множину додатних многочленів $\mathbb{R}_{2n}^{>0}[x]$, то усі головні мінори матриці $\widehat{\Lambda} := (\lambda_{i+j})_{i,j=0}^{n}$ розміру $(n+1)\times(n+1)$ є невід'ємними, крім того $A_\Lambda(x^0) = \lambda_0 > 0$. Припустимо зараз, що усі головні мінори матриці $\widehat{\Lambda}$ є невід'ємними і $\lambda_0 > 0$. З теореми 3.2.2 ми отримуємо, що A_Λ зберігає множину невід'ємних многочленів $\mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$. Нехай $P \in \mathbb{R}_{2n}^{>0}[x]$. Позначимо через $\mu := \min_{x\in\mathbb{R}} P(x)$ (очевидно, $\mu > 0$). Оскільки $Q(x) := P(x) - \frac{\mu}{2} \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$ ми маємо $A_\Lambda(Q) = A_\Lambda(P) - \frac{\mu}{2}\lambda_0 \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$, таким чином маємо $A_\Lambda(P) \in \mathbb{R}_{2n}^{>0}[x]$. $\square$

Ми отримуємо опис крайніх напрямків опуклого конусу $\mathcal{P}_{2n}$. Для формулювання результату нам потрібні додаткові позначення. Для многочлена $P(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k \in \mathcal{P}_{2n}$ ми позначимо через $\mu(P)$ число ненульових коефіцієнтів многочлена P; через $\nu(P)$ – число змін знаку у послідовності $(a_0, -a_1, a_2, -a_3, \ldots, -a_{2n-1}, a_{2n})$ (обчислюючи число змін знаку ми опускаємо ті члени послідовності, які дорівнюють нулю); і через $N(P)$ ми позначаємо число від'ємних коренів многочлена P обчислене з урахуванням кратності.

Теорема 3.2.5. ([128]). Многочлен $P \in \mathcal{P}_{2n}$ є крайнім напрямком конусу $\mathcal{P}_{2n}$ тоді і тільки тоді, коли $N(P) = \mu(P) - 1$.

Зауваження 3.2.6. За правилом знаків Декарта ми маємо $N(P) \leqslant \nu(P)$, і очевидно, що виконується $\nu(P) \leqslant \mu(P) - 1$. Таким чином, для многочлена $P \in \mathcal{P}_{2n}$ з рівності $N(P) = \mu(P) - 1$ випливає, зокрема, що $P(x) = a_{j_0}x^{j_0} + a_{j_1}x^{j_1} + \ldots + a_{j_{2l}}x^{j_{2l}}$, де індекси $j_{2s} \in 2\mathbb{Z},\ s = 0, 1, \ldots, l$; а індекси $j_{2s+1} \in 2\mathbb{Z}+1,\ s = 0, 1, \ldots, l-1$.

Доведення. Для доведення теореми 3.5 нам потрібні дві леми.

Лема 3.2.7. Нехай задані цілі числа

$$l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad 0 \leqslant j_0 < j_1 < \ldots < j_{2l} \leqslant 2n,$$
$$j_{2s} \in 2\mathbb{Z},\ s = 0, 1, \ldots, l, \qquad j_{2s+1} \in 2\mathbb{Z}+1,\ s = 0, 1, \ldots, l-1.$$

І нехай число $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, додатні числа $0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_t$, а також кратності $m_1, m_2, \ldots, m_t \in \mathbb{N}$, такі що

$$2m_1 + 2m_2 + \ldots + 2m_t = 2l$$

задані також. Тоді існує єдиний многочлен $P(x) = a_{j_0}x^{j_0} + a_{j_1}x^{j_1} + \ldots + a_{j_{2l}}x^{j_{2l}} \in \mathcal{P}_{2n}$, такий що $a_{j_{2l}} = 1$ і

$$(x+y_1)^{2m_1}(x+y_2)^{2m_2} \cdot \ldots \cdot (x+y_t)^{2m_t} \,|P(x)$$

(де символ $|$, як завжди, означає подільність).

Доведення. Ми положимо $Q(x) = b_{j_0}x^{j_0} + b_{j_1}x^{j_1} + \ldots + b_{j_{2l-1}}x^{j_{2l-1}}$ і розглянемо наступну систему з $2l$ лінійних рівнянь із $2l$ змінними $b_{j_0}, b_{j_1}, \ldots, b_{j_{2l-1}}$:

$$\begin{aligned}
Q(-y_1) &= -y_1^{j_{2l}} \\
Q^{'}(-y_1) &= j_{2l}y_1^{j_{2l}-1} \\
&\vdots \\
Q^{(2m_1-1)}(-y_1) &= j_{2l}(j_{2l}-1)\cdot\ldots\cdot(j_{2l}-2m_1+2)y_1^{j_{2l}-2m_1+1} \\
Q(-y_2) &= -y_2^{j_{2l}} \\
Q^{'}(-y_2) &= j_{2l}y_2^{j_{2l}-1} \\
&\vdots \\
Q^{(2m_2-1)}(-y_2) &= j_{2l}(j_{2l}-1)\cdot\ldots\cdot(j_{2l}-2m_2+2)y_2^{j_{2l}-2m_2+1} \\
&\vdots \\
Q(-y_t) &= -y_t^{j_{2l}} \\
Q^{'}(-y_t) &= j_{2l}y_t^{j_{2l}-1} \\
&\vdots \\
Q^{(2m_t-1)}(-y_t) &= j_{2l}(j_{2l}-1)\cdot\ldots\cdot(j_{2l}-2m_t+2)y_t^{j_{2l}-2m_t+1},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

або, коротше,

$$Q^{(k)}(-y_s) = \left(y^{j_{2l}}\right)^{(k)}|_{y=-y_s} \text{ для } s = 1, 2, \ldots, t, \quad k = 0, 1, \ldots, 2m_s - 1.$$

Нам необхідно показати, що детермінант D цієї системи лінійних рівнянь не дорівнює нулю. Припустимо, що $D = 0$. Тоді лінійна однорідна система рівнянь, відповідна до неоднорідної системи (3.9), має ненульове рішення. Тому існує ненульовий многочлен $S(x) = c_{j_0}x^{j_0} + c_{j_1}x^{j_1} + \ldots + c_{j_{2l-1}}x^{j_{2l-1}}$, такий що $S^{(k)}(-y_s) = 0$ для усіх $s = 1, 2, \ldots, t, \quad k = 0, 1, \ldots, 2m_s - 1$. Отже, S має $\geqslant 2l$ від'ємних коренів, враховуючи кратності. Але це суперечить правилу знаків Декарта: число ненульових коефіцієнтів многочлена S не перевищує $2l$, і тому число знакозмін в послідовності коефіцієнтів многочлена $S(-x)$ не перевищує $2l - 1$. Ми отримали протиріччя. Тому $D \neq 0$ і таким чином система (3.9) має єдине дійсне рішення.

Нехай $a_{j_0}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_{2l-1}}$ буде єдиним рішенням системи (3.9). Тоді многочлен $P(-x) = a_{j_0}x^{j_0} - a_{j_1}x^{j_1} + a_{j_2}x^{j_2} - a_{j_3}x^{j_3} + \ldots - a_{j_{2l-1}}x^{j_{2l-1}} + x^{j_{2l}}$ має $2l$ додатних коренів (коренями цього многочлену є числа $y_1, y_2, \ldots, y_t$ з відповідними кратностями $2m_1, 2m_2, \ldots, 2m_t$, де $2m_1 + 2m_2 + \ldots + 2m_t = 2l$). За правилом знаків Декарта число додатних коренів многочлена $P(-x)$ (із урахуванням кратностей) не перевищує число змін знаку у послідовності $(a_{j_0}, -a_{j_1}, a_{j_2}, -a_{j_3}, \ldots, -a_{j_{2l-1}}, a_{j_{2l}} = 1)$ ($\nu(P)$ в наших позначеннях). Оскільки послідовність $(a_{j_0}, -a_{j_1}, a_{j_2}, -a_{j_3}, \ldots, -a_{j_{2l-1}}, a_{j_{2l}})$ має не більше за $2l+1$ ненульових членів, число знакозмін в цієї послідовності не перевищує $2l$. Отже, число знакозмін в цієї послідовності дорівнює $2l$, і ми маємо

$$a_{j_0} > 0,\ a_{j_1} > 0,\ a_{j_2} > 0,\ \ldots,\ a_{j_{2l}} = 1 > 0.$$

Таким чином, ми отримали бажаний многочлен $P(x) = a_{j_0}x^{j_0} + a_{j_1}x^{j_1} + \ldots + a_{j_{2l}}x^{j_{2l}}$ з додатними коефіцієнтами і такий, що $(x + y_1)^{2m_1}(x + y_2)^{2m_2} \cdot \ldots \cdot (x + y_t)^{2m_t} \,|P(x)$. Оскільки P має додатні коефіцієнти, ми маємо $P(x) > 0$ для $x \geqslant 0$. До того ж, P має $2l$ від'ємних коренів (враховуючи кратності). Оскільки число ненульових коефіцієнтів P дорівнює to $2l + 1$, за правилом знаків Декарта P не має інших від'ємних коренів, окрім $-y_1, -y_2, \ldots, -y_t$. Тому усі від'ємні корені P мають парні кратності, звідки маємо $P(x) \geqslant 0$ для кожного $x \in \mathbb{R}$. Тому $P(x) \in \mathcal{P}_{2n}$. Єдиність є очевидною.

Лема 3.2.7 доведена. $\square$

Лема 3.2.8. Припустимо, що P належить до множини многочленів, побудованих в лемі 3.2.7. Тоді P є крайнім напрямком конусу $\mathcal{P}_{2n}$.

Доведення. Нехай $P(x) = a_{j_0}x^{j_0} + a_{j_1}x^{j_1} + \ldots + a_{j_{2l}}x^{j_{2l}} \in \mathcal{P}_{2n}$, і нехай $(x+y_1)^{2m_1}(x+y_2)^{2m_2}\cdot\ldots\cdot(x+y_t)^{2m_t}\,|P(x)$, і при цьому $2m_1+2m_2+\ldots+2m_t = 2l$. Припустимо, що існують два многочлени $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}_{2n}$, такі що $P = Q_1+Q_2$. Оскільки Q_1, Q_2 і P мають невід'ємні коефіцієнти, і ненульові коефіцієнти P мають номери $j_0, j_1, \ldots, j_{2l}$, з рівності $P = Q_1+Q_2$ випливає, що виконуються представлення

$$Q_1(x) = c_{j_0}x^{j_0} + c_{j_1}x^{j_1} + \ldots + c_{j_{2l}}x^{j_{2l}},\ (c_j \geqslant 0);$$

$$Q_2(x) = d_{j_0}x^{j_0} + d_{j_1}x^{j_1} + \ldots + d_{j_{2l}}x^{j_{2l}},\ (d_j \geqslant 0).$$

Многочлен P має від'ємні корені $-y_1, -y_2, \ldots, -y_t$ кратностей $2m_1$, $2m_2, \ldots, 2m_t$, при цьому $2m_1 + 2m_2 + \ldots + 2m_t = 2l$. Оскільки ми маємо $0 \leqslant Q_1(x) \leqslant P(x), 0 \leqslant Q_2(x) \leqslant P(x)$, для усіх $x \in \mathbb{R}$, з рівності $P = Q_1 + Q_2$ випливає, що обидва многочлени $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ також мають від'ємні корені $-y_1, -y_2, \ldots, -y_t$ відповідних кратностей не нижче за $2m_1, 2m_2, \ldots, 2m_t$.

Використовуючи єдиність в лемі 3.2.7, ми отримуємо, що існують дві сталі $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, такі що

$$Q_1(x) = \lambda P(x),\ Q_2(x) = \mu P(x).$$

Таким чином, P є крайнім напрямком конусу $\mathcal{P}_{2n}$. Лема 3.2.8 доведена. $\square$

Тепер ми можемо довести теорему 3.5. Припустимо, що $Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} g_k x^k \in \mathcal{P}_{2n}$ є крайнім напрямком конусу $\mathcal{P}_{2n}$, але виконується $N(Q) \neq \mu(Q) - 1$. За правилом знаків Декарта ми маємо $N(Q) \leqslant \nu(Q) \leqslant \mu(Q)-1$, таким чином $N(Q) < \mu(Q)-1$. Послідовність $(g_0, -g_1, g_2, -g_3, \ldots, -g_{2n-1}, g_{2n})$ має $\nu(Q) \geqslant N(Q)$ знакозмін (відзначимо, що $N(Q)$ є парним числом).

Виберемо підпослідовність ненульових коефіцієнтів Q $(g_{k_0}, g_{k_1}, \ldots, g_{k_{N(Q)}})$, таку що $k_{2l} \in 2\mathbb{Z}$, $k_{2l+1} \in 2\mathbb{Z}+1$, і число знакозмін в послідовності $(g_{k_0}, -g_{k_1}, g_{k_2}, -g_{k_3} \ldots, -g_{k_{N(Q)-1}}, g_{k_{N(Q)}})$ дорівнює $N(Q)$. Позначимо через $-y_1, -y_2, \ldots, -y_t$ усі різні від'ємні корені Q, і через $2m_1, 2m_2, \ldots, 2m_t \in 2\mathbb{N}$ – їхні кратності, де $2m_1 + 2m_2 + \ldots + 2m_t = N(Q)$.

Використовуючи лему 3.2.7, побудуємо многочлен $P(x) \in \mathcal{P}_{2n}$, такий що $P(x) = a_{k_0}x^{k_0} + a_{k_1}x^{k_1} + \ldots + a_{k_{N(Q)}}x^{k_{N(Q)}}$, $a_{k_{N(Q)}} = 1$, і $(x+y_1)^{2m_1}(x+y_2)^{2m_2} \cdot \ldots \cdot (x+y_t)^{2m_t} \,|P(x)$.

Відмітимо, що з $N(Q) < \mu(Q)-1$ і $N(Q) = N(P) = \mu(P)-1$, випливає, що не існує такого $\lambda > 0$, що $Q(x) = \lambda P(x)$.

Ми маємо $Q(x) = (x+y_1)^{2m_1}(x+y_2)^{2m_2} \cdot \ldots \cdot (x+y_t)^{2m_t}Q_1(x)$, де $Q_1(x) > 0$ для $x < 0$; і $P(x) = (x+y_1)^{2m_1}(x+y_2)^{2m_2} \cdot \ldots \cdot (x+y_t)^{2m_t}P_1(x)$, де $P_1(x) > 0$ для $x < 0$ (многочлени Q_1 і P_1 не обов'язково мають невід'ємні коефіцієнти). Для $x \leqslant 0$ розглянемо функцію $\psi(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{Q_1(x)}{P_1(x)}$. Ця функція є додатною для $x < 0$. Оскільки ненульові коефіцієнти P формують підпослідовність послідовності ненульових коефіцієнтів Q, ми маємо $\lim_{x\to-\infty} \frac{Q(x)}{P(x)} \neq 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{Q(x)}{P(x)} \neq 0$. Таким чином, ми отримуємо, що $\inf\{\psi(x) : x \in (-\infty; 0]\} =: \alpha > 0$.

Нехай $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \frac{\alpha}{2}$, буде настільки малим числом, що многочлен $F_\varepsilon(x) = Q(x) - \varepsilon P(x)$ має усі невід'ємні коефіцієнти. З цього факту і з нерівності $\varepsilon < \frac{\alpha}{2}$ випливає $F_\varepsilon(x) \in \mathcal{P}_{2n}$. Очевидно, $G_\varepsilon(x) = Q(x) + \varepsilon P(x) \in \mathcal{P}_{2n}$. Оскільки $Q(x) = \frac{F_\varepsilon(x)+G_\varepsilon(x)}{2}$, і многочлени F_ε і G_ε не є пропорційними до Q, ми отримуємо протиріччя з тим фактом, що Q є крайнім напрямком конусу $\mathcal{P}_{2n}$.

Теорема 3.5 доведена. □

Наступна проблема була поставлена нам Борисом Шапіро: для яких послідовностей Λ відповідний лінійний оператор A_Λ зберігає конус $\mathcal{P}_{2n}$?

Наступна теорема дає відповідь на це питання.

Теорема 3.2.9. ([128]). Нехай $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n}$ – задана дійсна послідовність. Тоді A_Λ зберігає конус $\mathcal{P}_{2n}$ тоді і тільки тоді, коли існують дві послідовності $(\alpha_k)_{k=0}^{2n}$ і $(\beta_k)_{k=0}^{2n}$,

$$\alpha_k \geqslant 0 \text{ для усіх } k = 0, 1, \ldots, 2n;$$

усі головні мінори наступної матриці розміру $(n+1)\times(n+1)$

$$(\alpha_{i+j})_{i,j=0}^{n} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n & \alpha_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_{n+1} & \dots & \alpha_{2n-2} & \alpha_{2n-1} \\ \alpha_n & \alpha_{n+1} & \alpha_{n+2} & \dots & \alpha_{2n-1} & \alpha_{2n} \end{pmatrix}$$

є невід'ємними;

$$(-1)^k\beta_k \geqslant 0 \text{ для } \ k=0,1,\dots,2n;$$
$$(-\beta_{2l+1}) \leqslant \alpha_{2l+1} \text{ для } \ l=0,1,\dots,n-1, \tag{3.10}$$

такі, що

$$\lambda_k = \alpha_k + \beta_k \text{ для усіх } k=0,1,\dots,2n.$$

Ми будемо використовувати наступне позначення

$$\mathcal{L}_{2n}^{+} = \{\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} \subset \mathbb{R} : A_\Lambda(P) \in \mathcal{P}_{2n} \ \text{ для усіх } P \in \mathcal{P}_{2n}\}.$$

Приклад 3.2.10. Для $n \geqslant 2$ ми розглянемо додатну послідовність $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n}$, таку що $\lambda_2 = 3$; $\lambda_j = 1$ для усіх $j \neq 2$. Для кожного многочлена $P(x) = \sum_{j=0}^{2n} a_j x^j \in \mathbb{R}_{2n}[x]$ ми маємо $A_\Lambda(P)(x) = P(x) + 2a_2x^2$. Очевидно, що для кожного $P \in \mathcal{P}_{2n}$ ми маємо $A_\Lambda(P) \in \mathcal{P}_{2n}$, і тому $A_\Lambda \in \mathcal{L}_{2n}^{+}$. Але оператор A_Λ не зберігає множину невід'ємних многочленів $\mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$, оскільки $Q(x) = 1 - x^2 + x^4 \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$, але $A_\Lambda(Q)(1) = -1$.

Доведення. Із (3.8) ми маємо $\mathcal{P}_{2n} = \mathbb{R}_{2n}^{+}[x] \cap \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]$, звідки маємо

$$\mathcal{L}_{2n}^{+} = \{\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} \subset \mathbb{R} : A_\Lambda(P) \in \mathbb{R}_{2n}^{+}[x] \text{ для усіх } P \in \mathcal{P}_{2n}\} \cap$$
$$\{\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} \subset \mathbb{R} : A_\Lambda(P) \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x] \text{ для усіх } P \in \mathcal{P}_{2n}\}.$$

Очевидно, що

$$\{\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} \subset \mathbb{R} : A_\Lambda(P) \in \mathbb{R}_{2n}^{+}[x] \text{ для усіх } P \in \mathcal{P}_{2n}\} =$$
$$\{\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} : \lambda_k \geqslant 0, \quad k=0,1,\dots,2n\},$$

і тому

$$\mathcal{L}_{2n}^{+} = \{\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} \subset \mathbb{R} : A_\Lambda(P) \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x] \text{ для усіх } P \in \mathcal{P}_{2n}\} \cap$$
$$\{\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} : \lambda_k \geqslant 0, \quad k=0,1,\dots,2n\}.$$

Для многочлена P з невід'ємними коефіцієнтами наступні твердження є еквівалентними:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ P(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ \forall x \leqslant 0\ P(x) \geqslant 0.$$

Тобто,

$$\mathcal{L}_{2n}^{+} = \{\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} \subset \mathbb{R} : A_\Lambda(P) \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x] \text{ для усіх } P \in \mathcal{P}_{2n}\} \cap$$
$$\{\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} : \lambda_k \geqslant 0, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n\} =$$
$$\{\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} \subset \mathbb{R} : A_\Lambda(P)(x) \geqslant 0 \text{ для усіх } P \in \mathcal{P}_{2n} \text{ і для усіх } x \leqslant 0\} \cap$$
$$\{\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} : \lambda_k \geqslant 0, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n\}.$$

Для $P \in \mathcal{P}_{2n}$ і для $\alpha > 0$ ми позначаємо через $P_\alpha(x) = P(\alpha x)$. Очевидно, $P \in \mathcal{P}_{2n} \Rightarrow P_\alpha \in \mathcal{P}_{2n}$. До того ж, для кожного $x_0 < 0$, $P \in \mathcal{P}_{2n}$ і $\alpha > 0$ ми маємо $A_\Lambda(P)(x_0) = A_\Lambda(P_{-x_0})(-1)$, таким чином,

$$\{\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} \subset \mathbb{R} : A_\Lambda(P)(x) \geqslant 0 \text{ для усіх } P \in \mathcal{P}_{2n} \text{ і для усіх } x \leqslant 0\} =$$
$$\{\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} \subset \mathbb{R} : A_\Lambda(P)(-1) \geqslant 0 \text{ для усіх } P \in \mathcal{P}_{2n}\}.$$

Залишилося описати множину $\{\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} \subset \mathbb{R} : A_\Lambda(P)(-1) \geqslant 0 \text{ для усіх } P \in \mathcal{P}_{2n}\}$.

Розглянемо евклідів простір $\mathbb{R}^{2n+1}$ (із стандартним скалярним добутком). Ми будемо використовувати наступні позначення (дивись (3.6), (3.7) і (3.8)):

$$\widetilde{K} := \{a = (a_0; a_1; \ldots; a_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n+1} : P(x) = \sum_{j=0}^{2n} a_j x^j \in \mathcal{P}_{2n}\};$$

$$\widetilde{K}_1 := \{a = (a_0; a_1; \ldots; a_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n+1} : P(x) = \sum_{j=0}^{2n} a_j x^j \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x]\}; \tag{3.11}$$

$$\widetilde{K}_2 := \{a = (a_0; a_1; \ldots; a_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n+1} : P(x) = \sum_{j=0}^{2n} a_j x^j \in \mathbb{R}_{2n}^{+}[x]\}$$

(множина $\widetilde{K}_2$ є невід'ємним октантом у $\mathbb{R}^{2n+1}$). Очевидно,

$$\widetilde{K} = \widetilde{K}_1 \cap \widetilde{K}_2. \tag{3.12}$$

Ми нагадуємо, що, якщо $K \subset \mathbb{R}^m$ є опуклим конусом, то його спряжений конус визначається наступним чином $K^* = \{y \in \mathbb{R}^m : < y, x > \geqslant 0$ для усіх $x \in K\}$. Якщо $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^m$ є опуклими конусами, то $K_1 \bigcap K_2$ також є опуклим конусом і

$$\left(K_1 \bigcap K_2\right)^* = \overline{K_1^* + K_2^*}, \tag{3.13}$$

де риса зверху означає замкнення (ми нагадуємо, що сума двох замкнених опуклих конусів не обов'язково є замкненим конусом). Щодо властивостей опуклих конусів і їхніх спряжених конусів дивись, наприклад, книгу І.В.Гірсанова [87, лекція 5].

Ми отримуємо

$$\{\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} \subset \mathbb{R} : A_\Lambda(P)(-1) \geqslant 0 \text{ для усіх } P \in \mathcal{P}_{2n}\} =$$
$$\{\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} \subset \mathbb{R} : \textstyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k \lambda_k \geqslant 0$$
$$\text{для усіх } a = (a_0; a_1; \ldots; a_{2n}) \in \widetilde{K}\} =$$
$$\{\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} \subset \mathbb{R} : (\lambda_0; -\lambda_1; \lambda_2; -\lambda_3; \ldots; -\lambda_{2n-1}; \lambda_{2n}) \in \left(\widetilde{K}\right)^*\}.$$

Звідки ми виводимо, що

$$\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} \in \mathcal{L}_{2n}^+ \Leftrightarrow (\lambda_0; -\lambda_1; \lambda_2; -\lambda_3; \ldots; -\lambda_{2n-1}; \lambda_{2n}) \in \left(\widetilde{K}\right)^* \tag{3.14}$$
$$\text{і } \lambda_k \geqslant 0 \text{ для усіх } \ k = 0, 1, \ldots, 2n.$$

Із (3.12) і (3.13) отримуємо

$$\left(\widetilde{K}\right)^* = \overline{\left(\widetilde{K}_1\right)^* + \left(\widetilde{K}_2\right)^*}.$$

Відмітимо тепер, що із означення спряженого конусу і (3.11)

$$\Gamma = (\gamma_k)_{k=0}^{2n} \in \left(\widetilde{K}_1\right)^* \Leftrightarrow$$
$$\textstyle\sum_{k=0}^{2n} a_k \gamma_k \geqslant 0 \text{ для усіх } (a_0; a_1; \ldots; a_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n+1} :$$
$$\textstyle\sum_{j=0}^{2n} a_j x^j \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x] \Leftrightarrow$$
$$A_\Gamma(P)(1) \geqslant 0 \text{ для усіх } P \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x] \Leftrightarrow$$
$$A_\Gamma(P) \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x] \text{ для усіх } P \in \mathbb{R}_{2n}^{\geqslant 0}[x].$$

Використовуючи теорему 3.2.2, маємо

$$\Gamma = (\gamma_k)_{k=0}^{2n} \in \left(\widetilde{K}_1\right)^* \Leftrightarrow \text{усі головні мінори матриці} \tag{3.15}$$
$$\widehat{\Gamma} := (\gamma_{i+j})_{i,j=0}^{n} \ \text{є невід'ємними.}$$

Оскільки $\widetilde{K}_2$ є невід'ємним октантом в $\mathbb{R}^{2n+1}$, ясно, що

$$\left(\widetilde{K}_2\right)^* = \widetilde{K}_2,$$

або

$$\Delta = (\delta_k)_{k=0}^{2n} \in \left(\widetilde{K}_2\right)^* \Leftrightarrow \delta_k \geqslant 0,\ k = 0, 1, \dots, 2n. \tag{3.16}$$

Тепер нам треба довести, що множина

$$\mathcal{B} := \left(\widetilde{K}_1\right)^* + \left(\widetilde{K}_2\right)^* \subset \mathbb{R}^{2n+1} \tag{3.17}$$

є замкненою. Припустимо, що $\widetilde{c} \in \mathbb{R}^{2n+1}$ є граничною точкою $\mathcal{B}$. Тоді існує послідовність $(c_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$, така що $\widetilde{c} = \lim_{k\to\infty} c_k$. Тому існує стала $C > 0$, така що $\|c_k\| \leqslant C$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Ми маємо $c_k = a_k + b_k$, де $a_k \in \left(\widetilde{K}_1\right)^*$, $b_k \in \left(\widetilde{K}_2\right)^*$ для кожного k, і $a_k = (a_k(j))_{j=0}^{2n},\ b_k = (b_k(j))_{j=0}^{2n}$. Таким чином, із ((3.15)) ми отримуємо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ усі головні мінори наступної матриці

$$\begin{pmatrix} a_k(0) & a_k(1) & a_k(2) & \dots & a_k(n-1) & a_k(n) \\ a_k(1) & a_k(2) & a_k(3) & \dots & a_k(n) & a_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_k(n-1) & a_k(n) & a_k(n+1) & \dots & a_k(2n-2) & a_k(2n-1) \\ a_k(n) & a_k(n+1) & a_k(n+2) & \dots & a_k(2n-1) & a_k(2n) \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

є невід'ємними. Зокрема, для кожного $l = 0, 1, \dots, n$ ми маємо $a_k(2l) \geqslant 0$ (як головний мінор матриці (3.18) порядку 1), і для кожного $l = 0, 1, \dots, n-1$ ми маємо

$$(a_k(2l+1))^2 \leqslant a_k(2l) \cdot a_k(2l+2) \tag{3.19}$$

(ми розглядаємо 2×2 головний мінор матриці (3.18), сформований рядками і стовпцями з номерами l і $l+1$). Із (3.16) ми отримуємо, що $b_k(j) \geqslant 0$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ і для кожного $j = 0, 1, \ldots, 2n$. Таким чином, для кожного $l = 0, 1, \ldots, n$ ми маємо $0 \leqslant a_k(2l) + b_k(2l) \leqslant C$, що означає, що

$$0 \leqslant a_k(2l) \leqslant C, \ 0 \leqslant b_k(2l) \leqslant C \text{ для кожного } k \in \mathbb{N}, \ l = 0, 1, \ldots, n.$$

Використовуючи це твердження і (3.19), ми отримуємо, що $|a_k(2l+1)| \leqslant C$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ і кожного $l = 0, 1, \ldots, n-1$. Звідки і з $|a_k(2l+1) + b_k(2l+1)| \leqslant C$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$, ми маємо

$$|a_k(2l+1)| \leqslant C, \ |b_k(2l+1)| \leqslant 2C \quad \text{для кожного } k \in \mathbb{N}, \ l = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Таким чином, ми бачимо, що обидві послідовності, і $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, і $(b_k)_{k=1}^{\infty}$, є обмеженими,

$$\|a_k\| \leqslant (2n+1)C, \quad \|b_k\| \leqslant 2(2n+1)C \quad \text{для кожного } k \in \mathbb{N},$$

і ми можемо вибрати їхні підпослідовності $(a_{k_s})_{s=1}^{\infty}$, $(b_{k_s})_{s=1}^{\infty}$, що вони збігаються. Якщо $\widetilde{a} = \lim_{s\to\infty} a_{k_s}$, $\widetilde{b} = \lim_{s\to\infty} b_{k_s}$, то $\widetilde{a} \in \left(\widetilde{K}_1\right)^*$, $\widetilde{b} \in \left(\widetilde{K}_2\right)^*$ (тому що множини $\left(\widetilde{K}_1\right)^*$ і $\left(\widetilde{K}_2\right)^*$ є замкненими). Тому ми отримуємо

$$\widetilde{c} = \widetilde{a} + \widetilde{b} \in \left(\widetilde{K}_1\right)^* + \left(\widetilde{K}_2\right)^* = \mathcal{B},$$

і ми довели, що множина $\mathcal{B}$ є замкненою. Використовуючи цей факт і (3.12), (3.13) і (3.17), ми маємо, що

$$\left(\widetilde{K}\right)^* = \left(K_1 \bigcap K_2\right)^* = K_1^* + K_2^*. \tag{3.20}$$

Нехай $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n} \in \mathcal{L}_{2n}^+$. Використовуючи (3.14) і (3.20), маємо, що $\lambda_k \geqslant 0$ для усіх $k = 0, 1, \ldots, 2n$, і існують дві послідовності $(a_k)_{k=0}^{2n} \in K_1^*$ і $(b_k)_{k=0}^{2n} \in K_2^*$, такі, що

$$(\lambda_k)_{k=0}^{2n} = ((-1)^k a_k)_{k=0}^{2n} + ((-1)^k b_k)_{k=0}^{2n},$$

де $a_k \in \mathbb{R}$, усі головні мінори матриці розміру $(n+1)\times(n+1)$

$$\widehat{A} := (a_{i+j})_{i,j=0}^{n} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{2n-2} & a_{2n-1} \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \ldots & a_{2n-1} & a_{2n} \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

є невід'ємними і

$$b_k \geqslant 0 \quad \text{для усіх } k = 0, 1, \ldots, 2n. \tag{3.22}$$

Зауважимо, що той факт, що усі головні мінори матриці $(a_{i+j})_{i,j=0}^n$ є невід'ємними, є еквівалентним тому факту, що усі головні мінори матриці $\left((-1)^{i+j}a_{i+j}\right)_{i,j=0}^n$ є невід'ємними (для доведення цієї еквівалентності достатньо помножити усі рядки і стовпці матриці (3.21) з номерами $0, 2, 4, \ldots$ на -1). Ми позначимо $\alpha_k := (-1)^k a_k$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, і згадаємо, що усі головні мінори матриці розміру $(n+1)\times(n+1)$ $(\alpha_{i+j})_{i,j=0}^n$ є невід'ємними. Оскільки $\alpha_{2l} \geqslant 0$ і $b_{2l} \geqslant 0$ для кожного $l = 0, 1, \ldots, n$, то $\lambda_{2l} = \alpha_{2l} + b_{2l} \geqslant 0$ для кожного $l = 0, 1, \ldots, n$. Для $l = 0, 1, \ldots, n-1$ ми маємо $\lambda_{2l+1} = \alpha_{2l+1} - b_{2l+1}$. Із (3.22), використовуючи факт, що $\lambda_k \geqslant 0$ для усіх k ми отримуємо, що

$$\alpha_k \geqslant 0 \quad \text{для усіх } k = 0, 1, \ldots, 2n,$$

і

$$\alpha_{2l+1} \geqslant b_{2l+1} \quad \text{для усіх } l = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Для завершення доведення достатньо покласти $\beta_k = (-1)^k b_k$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$.

Теорема 3.2.9 доведена. □

Використовуючи ті ж самі міркування, як при доведенні теореми 3.2.4, нескладно довести наступне твердження.

Теорема 3.2.11. Нехай $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{2n}$ є заданою дійсною послідовністю. Лінійний оператор A_Λ зберігає конус $\mathbb{R}_{2n}^+[x] \cap \mathbb{R}_{2n}^{>0}[x]$ тоді і тільки тоді, коли оператор A_Λ зберігає конус $\mathcal{P}_{2n}$ і $\lambda_0 > 0$.

3.3 Спеціальні лінійні оператори, що вони зберігають множину додатних многочленів

Наступне твердження є прямим наслідком теореми (3.2.2).

Теорема 3.3.1. Нехай $\mathbf{A} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ є лінійним оператором. Позначимо через $P_k(x) := \mathbf{A}(x^k),\ k = 0, 1, \ldots$.

1. Оператор $\mathbf{A}$ зберігає множину невід'ємних многочленів тоді і тільки тоді, коли усі головні мінори нескінченої у дві сторони матриці $\mathcal{A}(x) := (P_{i+j}(x))_{i,j=0}^{\infty}$ є невід'ємними для кожного $x \in \mathbb{R}$.

2. Оператор $\mathbf{A} : \mathbb{R}_{2m}[x] \to \mathbb{R}[x]$ переводить множину невід'ємних многочленів степеня $\leqslant 2m$ в множину невід'ємних многочленів тоді і тільки тоді, коли усі головні мінори матриці розміру $(m+1) \times (m+1)$ $\mathcal{A}(x,m) := (P_{i+j}(x))_{i,j=0}^{m}$ є невід'ємними для кожного $x \in \mathbb{R}$.

Наступне твердження випливає з теореми (3.2.2) і теореми (3.2.4) А.Гутермана і Б.Шапіро ([91, теорема 2.5], дивись також [92]).

Теорема 3.3.2. Нехай $\mathbf{A} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ є лінійним оператором. Позначимо через $P_k(x) := \mathbf{A}(x^k),\ k = 0, 1, \ldots$.

1. Оператор $\mathbf{A}$ зберігає множину додатних многочленів тоді і тільки тоді, коли усі головні мінори нескінченої у дві сторони матриці $\mathcal{A}(x) := (P_{i+j}(x))_{i,j=0}^{\infty}$ є невід'ємними для кожного $x \in \mathbb{R}$ і $P_0(x) > 0$ для кожного $x \in \mathbb{R}$.

2. Оператор $\mathbf{A} : \mathbb{R}_{2m}[x] \to \mathbb{R}[x]$ переводить множину додатних многочленів степеня $\leqslant 2m$ в множину додатних многочленів тоді і тільки тоді, коли усі головні мінори матриці розміру $(m+1) \times (m+1)$ $\mathcal{A}(x,m) := (P_{i+j}(x))_{i,j=0}^{m}$ є невід'ємними для кожного $x \in \mathbb{R}$ і $P_0(x) > 0$ для усіх $x \in \mathbb{R}$.

Як приклад застосування теорем 3.3.1 і 3.3.3 в роботі [127] одержано такий результат про лінійні оператори спеціального вигляду.

Теорема 3.3.3. ([127]). Нехай задане натуральне число l і дві дійсні послідовності $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ і $\{\beta_k\}_{k=0}^{\infty}$. Визначимо лінійний оператор $\mathbf{A} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ наступним чином $\mathbf{A}(x^k) = \alpha_k x^k + \beta_k x^{k+2l},\ k = 0, 1, \ldots$. Оператор $\mathbf{A}$ зберігає множину невід'ємних многочленів тоді і тільки тоді, коли усі головні мінори двох нескінчених у дві сторони матриць $\mathcal{A}_1 := (\alpha_{i+j})_{i,j=0}^{\infty}$ і $\mathcal{A}_2 := (\beta_{i+j})_{i,j=0}^{\infty}$ є невід'ємними.

Наступний результат демонструє, що деякі види лінійних операторів не зберігають множину невід'ємних многочленів.

Теорема 3.3.4. ([127]). Виберемо довільне натуральне число m, послідовність натуральних чисел $\{n(k)\}_{k=0}^{\infty}$, і послідовність многочленів $(Q_j(x,k))_{j\in\mathbb{Z},k=0,1,2,\ldots}$. Припустимо, що $Q_j(x,k) \equiv 0$ для $k+j<0$ і $Q_{-m}(0,k)\neq 0$ для $k=0,1,2,\ldots$. Визначимо лінійний оператор $\mathbf{A}:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$ за формулою $\mathbf{A}(x^k)=\sum_{j=-m}^{n(k)} Q_j(x,k)x^{k+j}$, $k=0,1,\ldots$. Тоді оператор $\mathbf{A}$ не переводить множину невід'ємних (додатних) многочленів із $\mathbb{R}_{2\left(\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1\right)}[x]$ в множину невід'ємних многочленів.

Доведення. Припустимо, що оператор $\mathbf{A}$ переводить множину невід'ємних (додатних) многочленів із $\mathbb{R}_{2\left(\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1\right)}[x]$ в множину невід'ємних многочленів. Позначимо через $s:=\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$. Тоді за теоремою 3.3.1 усі головні мінори матриці $\mathcal{A}(x,s):=\left(\mathbf{A}(x^{i+j})\right)_{i,j=0}^{s}$ є невід'ємними для усіх $x\in\mathbb{R}$.

Нехай $m=2t,\ t\in\mathbb{N}$. Тоді $s=t+1$. Наступний 2×2 головний мінор матриці $\mathcal{A}(x,t+1)$, сформований рядками і стовпцями з номерами $t-1$ і $t+1$ є невід'ємним

$$\det\begin{Vmatrix} \sum_{j=-2t}^{n(2t-2)} Q_j(x,2t-2)x^{2t-2+j} & \sum_{j=-2t}^{n(2t)} Q_j(x,2t)x^{2t+j} \\ \sum_{j=-2t}^{n(2t)} Q_j(x,2t)x^{2t+j} & \sum_{j=-2t}^{n(2t+2)} Q_j(x,2t+2)x^{2t+2+j} \end{Vmatrix} \geqslant 0$$

для кожного $x\in\mathbb{R}$. Оскільки $Q_j(x,k)\equiv 0$ для $k+j<0$, ми перепишемо останню нерівність у вигляді

$$\det\begin{Vmatrix} \sum_{j=-2t+2}^{n(2t-2)} Q_j(x,2t-2)x^{2t-2+j} & \sum_{j=-2t}^{n(2t)} Q_j(x,2t)x^{2t+j} \\ \sum_{j=-2t}^{n(2t)} Q_j(x,2t)x^{2t+j} & \sum_{j=-2t}^{n(2t+2)} Q_j(x,2t+2)x^{2t+2+j} \end{Vmatrix} \geqslant 0$$

Підставимо $x=0$ у цю нерівність. Ми маємо

$$\det\begin{Vmatrix} Q_{-2t+2}(0,2t-2) & Q_{-2t}(0,2t) \\ Q_{-2t}(0,2t) & 0 \end{Vmatrix} \geqslant 0,$$

що еквівалентно такому $\left(Q_{-2t}(0,2t)\right)^2\leqslant 0$. Оскільки $m=2t$, остання нерівність суперечить припущенню $Q_{-m}(0,k)\neq 0$ для $k=0,1,2,\ldots$.

Нехай $m = 2t-1,\ t \in \mathbb{N}$. Тоді $s = t$. Наступний 2×2 головний мінор матриці $\mathcal{A}(x,t)$, сформований рядками і стовпцями з номерами $t-1$ і t є невід'ємним:

$$\det \left\| \begin{array}{cc} \sum_{j=-2t+1}^{n(2t-2)} Q_j(x,2t-2)x^{2t-2+j} & \sum_{j=-2t+1}^{n(2t-1)} Q_j(x,2t-1)x^{2t-1+j} \\ \sum_{j=-2t+1}^{n(2t-1)} Q_j(x,2t-1)x^{2t-1+j} & \sum_{j=-2t+1}^{n(2t)} Q_j(x,2t)x^{2t+j} \end{array} \right\| \geqslant 0$$

для кожного $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $Q_j(x,k) \equiv 0$ для $k+j<0$, ми перепишемо останню нерівність у вигляді

$$\det \left\| \begin{array}{cc} \sum_{j=-2t+2}^{n(2t-2)} Q_j(x,2t-2)x^{2t-2+j} & \sum_{j=-2t+1}^{n(2t-1)} Q_j(x,2t-1)x^{2t-1+j} \\ \sum_{j=-2t+1}^{n(2t-1)} Q_j(x,2t-1)x^{2t-1+j} & \sum_{j=-2t+1}^{n(2t)} Q_j(x,2t)x^{2t+j} \end{array} \right\| \geqslant 0.$$

Підставимо $x=0$ у цю нерівність. Ми маємо

$$\det \left\| \begin{array}{cc} Q_{-2t+2}(0,2t-2) & Q_{-2t+1}(0,2t-1) \\ Q_{-2t+1}(0,2t-1) & 0 \end{array} \right\| \geqslant 0,$$

що еквівалентно такому $(Q_{-2t+1}(0,2t-1))^2 \leqslant 0$. Оскільки $m = 2t-1$, остання нерівність суперечить припущенню $Q_{-m}(0,k) \neq 0$ для $k = 0,1,2,\ldots$. □

Наступний неочікуваний результат був отриманий А.Гутерманом і Б.Шапіро.

Теорема 3.3.5. ([91, Теорема A]). Нехай $\mathbf{A} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ є лінійним диференціальним оператором порядку $m \geqslant 1$ з поліноміальними коефіцієнтами $Q = (q_0(x), q_1(x), \ldots q_m(x))$, $q_m(x) \not\equiv 0$:

$$\mathbf{A}(f) = q_0(x)f(x) + q_1(x)f'(x) + \ldots + q_m(x)f^{(m)}(x),\ f \in \mathbb{R}[x].$$

Тоді для жодної послідовності коефіцієнтів Q оператор $\mathbf{A}$ не переводить множину невід'ємних (додатних) многочленів із $\mathbb{R}_{2m}[x]$ в множину невід'ємних многочленів.

Наступна більш точна теорема є наслідком теореми 3.3.4.

Теорема 3.3.6. ([127]). Нехай $\mathbf{A} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ є лінійним диференціальним оператором порядку $m \geqslant 1$ з поліноміальними коефіцієнтами

$Q = (q_0(x), q_1(x), \ldots q_m(x))$, $q_m(x) \not\equiv 0$:

$$\mathbf{A}(f) = q_0(x)f(x) + q_1(x)f^{'}(x) + \ldots + q_m(x)f^{(m)}(x), \; f \in \mathbb{R}[x].$$

Тоді для жодної послідовності коефіцієнтів Q оператор $\mathbf{A}$ не переводить множину невід'ємних (додатних) многочленів із $\mathbb{R}_{2\left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1\right)}[x]$ в множину невід'ємних многочленів.

Доведення. Припустимо, що існує послідовність коефіцієнтів Q, така що оператор $\mathbf{A}(f) = q_0(x)f(x)+q_1(x)f^{'}(x)+\ldots+q_m(x)f^{(m)}(x)$, $q_m(x) \not\equiv 0$, переводить множину невід'ємних (додатних) многочленів із $\mathbb{R}_{2\left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1\right)}[x]$ в множину невід'ємних многочленів. Виберемо $\alpha \in \mathbb{R}$ таке, що $q_m(\alpha) \neq 0$ і розглянемо лінійний оператор $\mathbf{B} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ вигляду $\mathbf{B}(f) := q_0(x+\alpha)f(x)+ q_1(x+\alpha)f^{'}(x) + \ldots + q_m(x+\alpha)f^{(m)}(x)$. Очевидно, що оператор $\mathbf{B}$ переводить множину невід'ємних (додатних) многочленів із $\mathbb{R}_{2\left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1\right)}[x]$ в множину невід'ємних многочленів. А саме, нехай $f(x)$ є довільним невід'ємним (додатним) многочленом. Тоді $g(x) = f(x-\alpha)$ є також невід'ємним (додатним) многочленом, звідки $\mathbf{A}(g)(y)$ є невід'ємним для усіх $y \in \mathbb{R}$, і таким чином $\mathbf{A}(g)(x+\alpha) = \mathbf{B}(f)(x)$ є невід'ємним многочленом. Оператор $\mathbf{B}$ задовольняє умови теореми 3.3.4, тобто він не переводить множину невід'ємних (додатних) многочленів із $\mathbb{R}_{2\left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1\right)}[x]$ в множину невід'ємних многочленів. Отримане протиріччя доводить теорему. □

Відмітимо, що степінь $2\left(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1\right)$ в теоремі 3.3.6 не може бути зменшена: для кожного $m \in \mathbb{N}$ існують лінійні диференціальні оператори $\mathbf{A} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ порядку m, котрі переводять множину невід'ємних многочленів із $\mathbb{R}_{2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}[x]$ в множину невід'ємних многочленів. Як дуже простий приклад такого оператору можна взяти $\mathbf{A}(f) = f^{(m)}$ (або $\mathbf{A}(f) = f + f^{(m)}$). Деякі важливі приклади таких диференціальних операторів були досліджені Р.Ремаком.

Теорема 3.3.7. ([195], дивись також [191, VII, задача 38]). Нехай $\mathbf{A}$: $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ є лінійним диференціальним оператором порядку $2m$, $m \in \mathbb{N}$, зі сталими коефіцієнтами $a_0, a_1, \dots a_{2m}$:

$$\mathbf{A}(f) = \frac{a_0}{0!} f(x) + \frac{a_1}{1!} f^{'}(x) + \ldots + \frac{a_{2m}}{(2m)!} f^{(2m)}(x),\ f \in \mathbb{R}[x].$$

Тоді оператор $\mathbf{A}$ переводить множину невід'ємних многочленів із $\mathbb{R}_{2m}[x]$ в множину невід'ємних многочленів тоді і тільки тоді, коли наступна квадратична форма $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} a_{i+j} \xi_i \xi_j$ є невід'ємно визначеною.

Ми отримуємо ще наступну теорему.

Теорема 3.3.8. ([127]). Нехай $\mathbf{A} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ є лінійним диференціальним оператором порядку $m \geqslant 1$ з поліноміальними коефіцієнтами $Q = (q_0(x), q_1(x), \dots q_m(x))$:

$$\mathbf{A}(f) = \frac{q_0(x)}{0!} f(x) + \frac{q_1(x)}{1!} f^{'}(x) + \ldots + \frac{q_m(x)}{m!} f^{(m)}(x),\ f \in \mathbb{R}[x].$$

Тоді оператор $\mathbf{A}$ переводить множину невід'ємних многочленів із $\mathbb{R}_{2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}[x]$ в множину невід'ємних многочленів тоді і тільки тоді, коли усі головні мінори наступної $(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1) \times (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1)$ матриці $\mathcal{A}_q(x) := (q_{i+j}(x))_{i,j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ є невід'ємними для кожного $x \in \mathbb{R}$.

Доведення. Очевидно, що многочлен f є невід'ємним тоді і тільки тоді, коли многочлен $h(x) = f(x + x_0)$ є невід'ємним (де x_0 є довільним дійсним числом). Тобто, як ми відмітили в доведенні теореми 3.3.6, оператор $\mathbf{A}$ переводить множину невід'ємних многочленів із $\mathbb{R}_{2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}[x]$ в множину невід'ємних многочленів тоді і тільки тоді, коли для кожного невід'ємного многочлена $f \in \mathbb{R}_{2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}[x]$ і для кожного $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{A}(f)(0) = \frac{q_0(x)}{0!} f(0) + \frac{q_1(x)}{1!} f^{'}(0) + \ldots + \frac{q_m(x)}{m!} f^{(m)}(0) \geqslant 0.$$

Дійсний многочлен з $\mathbb{R}_{2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}[x]$ є невід'ємним тоді і тільки тоді, коли він може бути представленим як сума квадратів двох дійсних многочленів з $\mathbb{R}_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}[x]$. Звідти, $\mathbf{A}(f)(0) \geqslant 0$ для кожного невід'ємного многочлена $f \in \mathbb{R}_{2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}[x]$ тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{A}(g^2)(0) \geqslant 0$ для кожного $g \in \mathbb{R}_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}[x]$, тобто для кожного набору дійсних чисел $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ і для кожного $x \in \mathbb{R}$

многочлен $\mathbf{A}\left((\xi_0+\xi_1 x+\ldots+\xi_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}x^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor})^2\right)(0)$ є невід'ємним. Ми маємо

$$\mathbf{A}\left((\xi_0+\xi_1 x+\ldots+\xi_{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}x^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor})^2\right)(0)=\sum_{i,j=0}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\xi_i\xi_j q_{i+j}(x)\geqslant 0.$$

Тобто, лінійний оператор $\mathbf{A}$ переводить множину невід'ємних многочленів з $\mathbb{R}_{2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}[x]$ в множину невід'ємних многочленів тоді і тільки тоді, коли для усіх $x\in\mathbb{R}$ квадратична форма $\sum_{i,j=0}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}q_{i+j}(x)\xi_i\xi_j$ є невід'ємно визначеною. Твердження теореми випливає з добре відомого критерію невід'ємної визначеності квадратичної форми. $\square$

Відмітимо, що легко побудувати приклад лінійного оператора зі сталими коефіцієнтами, який задовольняє вимоги теореми 3.3.8.

3.4 О нульових множинах цілих абсолютно монотонних функцій

В попередніх параграфах ми вивчали многочлени з додатними коефіцієнтами. Природним континуальним узагальненням многочленів з додатними коефіцієнтами є перетворення Лапласа невід'ємних скінченних Борелевських мір з носіями на додатній півосі. Дійсно, якщо ми інтерпретуємо коефіцієнти многочлена f степеня n як додатні маси дискретної міри μ з носієм у множині $\{0,1,2,\ldots,n\}$, такої що $\mu(\{k\})=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, тоді значенням перетворення Лапласу цієї міри у точці $x=\log u$, $u>0$, буде значення многочлену $f(u)$.

Відмітимо, що проблема опису нульових множин многочленів фіксованого степеня n з невід'ємними коефіцієнтами є досі відкритою і дуже складною. Очевидно, що нульова множина такого многочлена є симетричною відносно дійсної осі; відомо ще, що така множина не перетинає сектор $\{z:|\arg z|<\frac{\pi}{n}\}$ (дивись теорему І.Шонберга 1.1.14 з розділу 1). Для демонстрації труднощів, які виникають при спробі описати такі нульові множини, наведемо такий приклад. Легко перевірити, що множина $\{\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\frac{1-\sqrt{3}i}{2},a\}$, $a>0$, є нульовою множиною многочлена третього ступеня з невід'ємними коефіцієнтами при єдиному значенні параметра a : при $a=1$. Відомо ще, що кожна симетрична відносно дійсної осі скінчена множина A, яка не перетинає додатну піввісь, є підмножиною нульової множини деякого многочлена P з додатними коефіцієнтами (теореми Лаґерра і Поліа, дивись [191, відділ 5, глава 3, задачі 183-185]). Відзначимо, що оцінка степеня такого многочлена P для заданої множини A є також відкритою і дуже складною проблемою.

Ми будемо описувати властивості нульових множин перетворень Лапласа невід'ємних скінчених Борелевських мір з носіями на додатній півосі, відомих як абсолютно монотонні функції.

Означення 3.4.1. Функція $f \in C^\infty(-\infty, 0]$ називається абсолютно монотонною функцією, якщо виконуються наступні нерівності

$$f^{(k)}(x) > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}, \quad \forall x \in (-\infty, 0]. \tag{3.23}$$

Поняття абсолютно монотонної функції було введено С.Бернштейном у [27]. За добре відомою теоремою С.Бернштейна (дивись [12]), клас абсолютно монотонних функцій збігається з класом цілих функцій, які можуть бути представленими наступним чином

$$f(x) = \int_0^\infty e^{xu} P(du), \quad x \in (-\infty, 0], \tag{3.24}$$

де P є невід'ємною скінченною Борелевською мірою на $[0, \infty)$.

Представлення (3.24) демонструє, що кожна абсолютно монотонна функція f має наступні властивості: ця функція є аналітичною в півплощині $\mathbb{C}_0 := \{z : \text{Re } z < 0\}$, неперервною в замкненій півплощині $\{z : \text{Re } z \leqslant 0\}$, і ця функція має представлення

$$f(z) = \int_0^\infty e^{zu} P(du), \quad \text{Re } z \leqslant 0, \tag{3.25}$$

де інтеграл є абсолютно збіжним для кожного z.

Абсолютно монотонні функції є обмеженими в півплощині:

$$|f(z)| \leqslant f(0), \quad \text{Re } z \leqslant 0. \tag{3.26}$$

Постає природна проблема: характеризувати клас підмножин $\mathbb{C}_0$, які можуть бути нульовими множинами абсолютно монотонних функцій. Відмітимо декілька відомих властивостей таких нульових множин. Очевидно, якщо множина $A \subset \mathbb{C}_0$ є нульовою множиною абсолютно монотонної функції, то A є не більш ніж зліченною множиною без граничних точок в $\mathbb{C}_0$ і, крім того,

$$A \bigcap R = \emptyset, \quad a \in A \Leftrightarrow \bar{a} \in A, \tag{3.27}$$

(кратності точок a і $\bar{a}$ є рівними). З нерівності (3.26) випливає, що A задовольняє добре відому умову Бляшке для півплощини:

$$\sum_{a \in A} \frac{\text{Re } a}{|a|^2 + 1} < \infty. \tag{3.28}$$

Наступна необхідна умова, незалежна від попередніх двох, була відмічена в роботі І.В.Островського [174]:

$$\operatorname{dist}(x, A) \to +\infty, \quad x \to -\infty. \tag{3.29}$$

І.В.Островський показав також (усне повідомлення), що наступна незалежна умова є необхідною:

$$\forall \alpha \in (0, \pi/2) : \sum_{a \in A \bigcap \{z : |\arg z - \pi| < \alpha\}} \text{Re } \frac{1}{x - a} \to 0, \quad x \to -\infty. \tag{3.30}$$

В роботі [174] було доведено, що кожна скінчена множина, яка задовольняє (3.27), є нульовою множиною деякої абсолютно монотонної функції (навіть цілої абсолютно монотонної функції). Ми покажемо нижче, що, якщо існує $\alpha \in (0, \pi/2)) : A \bigcap \{z : |\arg z - \pi| < \alpha\} = \emptyset$, і множина A не має скінчених граничних точок, то умови (3.27) і (3.28) є достатніми умовами для того, щоб множина A була нульовою множиною деякої цілої абсолютно монотонної функції. Метою цього параграфу є отримання однієї нової необхідної умови для нульових множин абсолютно монотонних функцій, демонстрація того факту, що ця умова не є наслідком попередньо відомих, і обговорення деяких прикладів.

Теорема 3.4.2. ([116]). Нехай множина $A \subset \mathbb{C}_0$ без скінченних граничних точок є нульовою множиною абсолютно монотонної функції f. Нехай B є добутком Бляшке:

$$B(z) := \prod_{a \in A} \frac{1 - \frac{z}{a}}{1 + \frac{z}{\bar{a}}}. \tag{3.31}$$

Тоді існує невід'ємна функція $g \in C(-\infty, -1] \bigcap L^1(-\infty, -1]$, така що

$$(\log B(x))'' \geqslant -g(x). \tag{3.32}$$

Твердження теореми 3.4.2 може бути записаним в іншій формі.

Теорема 3.4.3. ([116]). Нехай множина $A \subset \mathbb{C}_0$ без скінчених граничних точок є нульовою множиною абсолютно монотонної функції f. Нехай B є добутком Бляшке (3.31). Тоді для кожного $\beta \in (0, \pi/2)$ існує невід'ємна неперервна функція h_β, $h_\beta \in L^1(-\infty, -1]$, така що

$$\sum_{a \in A \bigcap \{a: |\arg a - \pi| < \beta\}} \frac{1}{(x-a)^2} \leqslant h_\beta(x). \tag{3.33}$$

Доведення. Ми маємо

$$(\log B(x))'' = \sum_{a \in A} (\frac{1}{(x+\bar{a})^2} - \frac{1}{(x-a)^2}).$$

Покажемо, що функція

$$S_1 := \sum_{a \in A \bigcap \{a: \beta \leqslant |\arg a - \pi| < \pi/2\}} (\frac{1}{(x+\bar{a})^2} - \frac{1}{(x-a)^2}) \in L^1(-\infty, -1].$$

Ми отримуємо з елементарних обчислень

$$\begin{gathered} |S_1| \leqslant \\ \textstyle\sum_{a \in A \bigcap \{a: \beta \leqslant |\arg a - \pi| < \pi/2\}} \frac{|-4x\text{Re } a + 4i\text{Re } a \text{ Im } a|}{|x-a|^2 |x+\bar{a}|^2} \leqslant \\ \textstyle\sum_{a \in A \bigcap \{a: \beta \leqslant |\arg a - \pi| < \pi/2\}} \frac{4|x||\text{Re } a| + 4|\text{Re } a||\text{Im } a|}{|x-a|^2 |x+\bar{a}|^2} = \\ \textstyle\sum_{a \in A \bigcap \{a: \beta \leqslant |\arg a - \pi| < \pi/2\}} \frac{4|x||\text{Re } a| + 4|\text{Re } a||\text{Im } a|}{(x^2-|a|^2)^2 + 4x^2(\text{Im } a)^2} \leqslant \\ C_\beta \textstyle\sum_{a \in A \bigcap \{a: \beta \leqslant |\arg a - \pi| < \pi/2\}} \frac{4|x||\text{Re } a| + 4|\text{Re } a||\text{Im } a|}{(x^2+|a|^2)^2} =: g_1(x), \end{gathered} \tag{3.34}$$

де C_β є додатною сталою, яка залежить тільки від β. Тепер покажемо, що $g_1 \in L^1(-\infty, 0]$. Ми маємо

$$\int_{-\infty}^{0} g_1(x) dx =$$

$$\sum_{a \in A \bigcap \{a: \beta \leqslant |\arg a - \pi| < \pi/2\}} \int_0^\infty \frac{4y|\text{Re } a| + 4|\text{Re } a||\text{Im } a|}{(y^2+|a|^2)^2} dy =$$

$$\sum_{a\in A\bigcap\{a:\beta\leqslant|\arg a-\pi|<\pi/2\}}\int_0^\infty \frac{4|a||\mathrm{Re}\ a|t+4|\mathrm{Re}\ a||\mathrm{Im}\ a|}{|a|^4(1+t^2)^2}|a|dt\leqslant$$

$$\sum_{a\in A\bigcap\{a:\beta\leqslant|\arg a-\pi|<\pi/2\}}\frac{4|\mathrm{Re}\ a|}{|a|^2}\int_0^\infty \frac{(t+1)}{(1+t^2)^2}dt<\infty \tag{3.35}$$

(дивись (3.28)). Щоб отримати (3.33) залишилося показати, що

$$\sum_{a\in A\bigcap\{a:|\arg a-\pi|<\beta\}}\frac{1}{(x+\bar a)^2}\in L^1(-\infty,-1].$$

Ми маємо

$$\int_{-\infty}^{-1}|\sum_{a\in A\bigcap\{a:|\arg a-\pi|<\beta\}}\frac{1}{(x+\bar a)^2}|dx\leqslant$$

$$\int_{-\infty}^{-1}\sum_{a\in A\bigcap\{a:|\arg a-\pi|<\beta\}}\frac{1}{|x+\bar a|^2}dx$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{-1}\sum_{a\in A\bigcap\{a:|\arg a-\pi|<\beta\}}\frac{1}{x^2+(\mathrm{Re}\ a)^2}$$

$$\leqslant\sum_{a\in A\bigcap\{a:|\arg a-\pi|<\beta\}}\frac{1}{\mathrm{Re}\ a}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}<\infty \tag{3.36}$$

(ми використали умову (3.28) для випадку $|\arg a-\pi|<\beta$). Беручи до уваги (3.35) і (3.36) ми робимо висновок, що твердження теореми 3.4.3 є еквівалентним (3.33). □

Твердження 3.4.4. ([116]). Нехай $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ і $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$ є двома послідовностями додатних чисел, $\alpha_k\to+\infty$, $\beta_k\to+\infty$, і

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{\alpha_k}<\infty,\quad \beta_k=o(\alpha_k),\quad \sum_{k=1}^\infty\frac{1}{\beta_k}=\infty.$$

Припустимо, що існує $\lambda>1$, таке що

$$\alpha_k+\lambda\beta_k\leqslant\alpha_{k+1}-\beta_{k+1},\quad k\in\mathbb{N}. \tag{3.37}$$

Тоді $A:=\{\alpha_k+i\beta_k\}\bigcup\{\alpha_k-i\beta_k\}$ не задовольняє умову (3.33).

Доведення. Оскільки множина A є симетричною відносно дійсної осі, умова (3.33) може бути переписана у вигляді: існує невід'ємна неперервна функція h, $h \in L^1(-\infty,-1]$, така що

$$\sum_{a\in A} \operatorname{Re}\frac{1}{(x-a)^2} \leqslant h(x). \tag{3.38}$$

Для кожного k ми маємо

$$\operatorname{Re}\frac{1}{(x-a)^2} = \frac{(x-\alpha_k)^2-\beta_k^2}{((x-\alpha_k)^2+\beta_k^2)^2} > 0$$

для усіх

$$x \in (-\infty, \alpha_k - \beta_k)\bigcup(\alpha_k+\beta_k,\infty).$$

Позначимо через $I := \bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k+\beta_k, \alpha_{k+1}-\beta_{k+1})$ (дивись (3.37)). Таким чином, ми маємо

$$\sum_{a\in A}\frac{(x-\alpha_k)^2-\beta_k^2}{((x-\alpha_k)^2+\beta_k^2)^2} \geqslant \frac{(x-\alpha_j)^2-\beta_j^2}{((x-\alpha_j)^2+\beta_j^2)^2} \tag{3.39}$$

для усіх

$$x \in (\alpha_j+\beta_j, \alpha_{j+1}-\beta_{j+1}).$$

З останньої оцінки випливає (дивись також (3.37)):

$$\begin{gathered}\int_I f(x)dx \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\alpha_k+\beta_k}^{\alpha_{k+1}-\beta_{k+1}} \tfrac{(x-\alpha_k)^2-\beta_k^2}{((x-\alpha_k)^2+\beta_k^2)^2}dx \geqslant \\ \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\alpha_k+\beta_k}^{\alpha_k+\lambda\beta_k} \tfrac{(x-\alpha_k)^2-\beta_k^2}{((x-\alpha_k)^2+\beta_k^2)^2}dx = \sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{1}{\beta_k}\int_1^{\lambda}\tfrac{u^2-1}{(u^2+1)^2}du \\ = C(\lambda)\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{1}{\beta_k} = \infty. \end{gathered} \tag{3.40}$$

□

Приклад 3.4.5. Використовуючи твердження 3.4.4, ми отримуємо, що $A_\gamma := \{-k^\gamma + ik\}\bigcup\{-k^\gamma - ik\}, k \in \mathbb{N}$, не є нульовою множиною абсолютно монотонної функції при $\gamma \geqslant 2$, але множина A_γ задовольняє (3.27), (3.28) і (3.29). Прямим обчисленням ми отримуємо, що множина A_2 задовольняє умові (3.30).

Зауваження 3.4.6. Беручи до уваги (3.30) ми можемо переписати (3.33) у вигляді: для кожного $\beta \in (0, \pi/2)$

$$\sum_{a\in A\bigcap\{a:|\arg a - \pi|<\beta\}} \frac{1}{(x-a)^2} \in L^1(-\infty,-1].$$

3.5 Неперервний аналог однієї теореми М. Фекете і Дж. Поліа

У 1912 році М. Фекете і Дж. Поліа [78] довели наступну теорему.

Теорема 3.5.1. ([78]). Нехай $f(u) = p_0 + p_1 u + \ldots + p_n u^n$ є многочленом степеня n з дійсними коефіцієнтами, і припустимо, що

$$f(u) > 0 \quad \text{для усіх} \quad u \geqslant 0. \tag{3.41}$$

Тоді існує додатне число λ_0, таке що для кожного $\lambda \geqslant \lambda_0$ ціла функція $\exp(\lambda u) f(u)$ має усі додатні коефіцієнти Тейлора.

Ми збираємося довести неперервний аналог цієї теореми. Для функції $f : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ ми позначимо через $L(x, f)$ її перетворення Лапласу: $L(x, f) := \int_0^\infty \exp(xt) f(t) dt$.

Головним результатом цього параграфу є наступна теорема.

Теорема 3.5.2. ([117]). Нехай $p : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ є функцією, яка задовольняє наступні умови:

1. $p \in C[0; +\infty)$;
2. $L(x, |p|) < \infty$ для усіх $x \geqslant 0$;
3. існують дійсні числа a, b, $0 < a \leqslant b < +\infty$, такі що $p(t) \geqslant 0$ для $t \in [0, a] \cup [b, +\infty)$;
4. існують $t_1 \in [0, a]$ і $t_2 \in [b, +\infty)$, такі що $p(t_1) > 0$, $p(t_2) > 0$;
5. $L(x, p) > 0$ для усіх $x \in \mathbb{R}$.

Тоді існує $\varepsilon_0 > 0$, таке що для усіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ існує $\lambda_\varepsilon > 0$, таке що для усіх $\lambda \geqslant \lambda_\varepsilon$ функція

$$F_{\lambda,\varepsilon}(x) = L(x, p) \exp(\lambda e^{\varepsilon x}) \tag{3.42}$$

є перетворенням Лапласу невід'ємної функції $q_{\lambda,\varepsilon}$.

Наступна теорема про функції з компактним носієм є прямим наслідком теореми 3.5.2.

Теорема 3.5.3. ([117]). Нехай $p : [a;b] \to \mathbb{R}$ є функцією, яка задовольняє наступні умови:

1. $p \in C[a;b]$;

2. $p(a) > 0$, $p(b) > 0$;

3. $L(x,p) > 0$ для усіх $x \in \mathbb{R}$.

Тоді існує $\varepsilon_0 > 0$, таке що для усіх $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ існує $\lambda_\varepsilon > 0$, таке що для усіх $\lambda \geqslant \lambda_\varepsilon$ функція

$$F_{\lambda,\varepsilon}(x) = L(x,p)\exp(\lambda e^{\varepsilon x}) \tag{3.43}$$

є перетворенням Лапласу невід'ємної функції $q_{\lambda,\varepsilon}$.

Останню теорему можна розглядати як неперервний аналог теореми 3.5.1 М.Фекете і Дж.Поліа. Дійсно, якщо ми інтерпретуємо коефіцієнти многочлена f як маси дискретної міри μ з носієм у множині $\{0,1,2,\ldots,n\}$, $\mu(\{k\}) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, тоді значенням перетворення Лапласу цієї міри у точці $x = \log u$, $u > 0$ буде многочлен $f(u)$. У цієї інтерпретації умова 3 теореми 3.5.3 перейде до умови (3.41) теореми 3.5.1. Зауважимо, що (3.41) забезпечує $p_0 > 0$ і $p_n > 0$, що є аналогами умови 2 теореми 3.5.3.

Умова неперервності 1 в теоремах 3.5.2 і 3.5.3 може бути послаблена, але тоді доведення буде дуже громіздким.

Функція $\exp(\lambda e^{\varepsilon x})$ є перетворенням Лапласу міри $\mu_{\lambda,\varepsilon}$ з носієм на множині точок $\{\varepsilon k\}_{k=0}^{\infty}$, $\mu_{\lambda,\varepsilon}(\{\varepsilon k\}) = \lambda^k/k!$. Тому теореми 3.5.2 і 3.5.3 означають, що згортка $p*\mu_{\lambda,\varepsilon}$ є невід'ємною на $[0,\infty)$ для досить малих ε і великих λ. Умови на функцію p, які гарантують існування невід'ємної Борелівської міри μ, такої що згортка $p * \mu$ є невід'ємною мірою, були досліджені Х.Дайамондом і М.Ессеном [67]. Однією з відмінностей нашого результату від теорем Х.Дайамонда і М.Ессена є той факт, що міра $\mu_{\lambda,\varepsilon}$ в теоремах 3.5.2 і 3.5.3 є "стандартною", тобто її вигляд не є залежним від p. Більш суттєвою відмінністю є те, що перетворення Лапласу $\mu_{\lambda,\varepsilon}$ не має коренів у всієї комплексній площині, звідки нульові множини $L(x,p)$ і $L(x,p*\mu_{\lambda,\varepsilon})$ збігаються. У дещо іншому випадку, коли p і μ мають носії на усій дійсній прямій $\mathbb{R}$, таке збереження нульової множини відігравало велику роль у рішенні (даному І.П. Каминіним і І.В. Островським в роботі [109]) проблеми характеризації нульових множин цілих перетворень Фур'є невід'ємних мір з носіями на $\mathbb{R}$. Тобто, теореми 3.5.2 і 3.5.3 є цікавими у зв'язку з відкритою проблемою характеризації нульових множин цілих перетворень Фур'є невід'ємних мір з носіями на півосі або відрізку (дивись [174]).

Далі ми будемо доводити теореми 3.5.2 і 3.5.3.

Доведення. Доведемо спершу еквівалентність цих теорем.

Очевидно, що теорема 3.5.3 є окремим випадком теореми 3.5.2. Покажемо, що теорема 3.5.2 є наслідком теореми 3.5.3.

Припустимо, що теорема 3.5.3 є вірною, і що виконуються умови теореми 3.5.2. Позначимо через l і r лівий і правий кінці інтервалу, що є носієм функції p, $0 \leqslant l \leqslant t_1$, $t_2 \leqslant r \leqslant \infty$ (числа t_1 і t_2 беремо із умови 4 теореми 3.5.2. Ясно, що

$$f(x) := \int_l^r \exp(xt)p(t)dt > 0, x \in \mathbb{R}. \tag{3.44}$$

Оскільки число r є правим кінцем інтервалу, що є носієм функції p (можливо $r = \infty$), і умови 3 і 4 теореми 3.5.2 є виконаними, ми отримуємо, що існує послідовність сегментів $\{[r_k', r_k'']\}_{k=1}^{\infty}$, $r_1' < r_1'' < r_2' < r_2'' < \cdots$, $\lim_{k\to+\infty} r_k'' = r$, таких що $p(t) > 0$ для кожного $t \in [r_k', r_k'']$ і $k \in \mathbb{N}$.

Міркуючи аналогічно, ми отримуємо, що що існує послідовність сегментів $\{[l_k', l_k'']\}_{k=1}^{\infty}$, $l_1'' > l_1' > l_2'' > l_2' > \cdots$, $\lim_{k\to+\infty} l_k' = l$, таких що $p(t) > 0$ для усіх $t \in [l_k', l_k'']$ і $k \in \mathbb{N}$. Ми припустимо, що $r_1' \geqslant b$, $l_1'' \leqslant a$, де числа a і b взяті з умови 3 теореми 3.5.2. Положимо

$$f_k(x) := \int_{l_k'}^{r_k''} \exp(xt)p(t)dt, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{3.45}$$

Покажемо, що $f_{k_0}(x) > 0$ для деякого $k_0 \in \mathbb{N}$ і довільного $x \in \mathbb{R}$. Ми маємо

$$f_k(x) \geqslant \int_{l_1'}^{r_1''} \exp(xt)p(t)dt = f_1(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.46}$$

Нехай $x \geqslant 0$, тоді із (3.46) випливає, що

$$f_k(x) \geqslant \int_{l'_1}^{r''_1} \exp(xt)p(t)dt \geqslant \tag{3.47}$$
$$\int_{(r'_1+r''_1)/2}^{r''_1} \exp(xt)p(t)dt - \int_{l'_1}^{r'_1} \exp(xt)|p(t)|dt$$
$$\geqslant K_1 \exp((r'_1 + r''_1)x/2) - K_2 \exp(r'_1 x),$$

де $K_1 > 0$ і $K_2 > 0$ є незалежними від x і k. Таким чином, існує додатне число R_1, таке що $f_k(x) > 0$ для усіх $x \geqslant R_1$ і $k \in \mathbb{N}$. Міркуючи аналогічно для $x \leqslant 0$, ми отримуємо

$$f_k(x) \geqslant K_3 \exp((l'_1 + l''_1)x/2) - K_4 \exp(l''_1 x),$$

де $K_3 > 0$ і $K_4 > 0$ є незалежними від x і k. Таким чином, існує додатне число R_2, таке що $f_k(x) > 0$ для усіх $x \leqslant R_2$ і $k \in \mathbb{N}$. Тобто, $f_k(x) > 0$ для усіх $k \in \mathbb{N}$ і для усіх $x \in (-\infty; R_2] \cup [R_1; +\infty)$.

Залишилося показати, що існує $k \in \mathbb{N}$, таке що $f_k(x) > 0$, коли $x \in [R_2; R_1]$. Із умов 1, 2 теореми 3.5.2 випливає. що $f_k(x) \to f(x)$, $k \to +\infty$, рівномірно на кожному компакті в $\mathbb{R}$. Із умови 5 теореми 3.5.2 випливає, що існує $k_0 \in \mathbb{N}$, таке що для кожного $x \in [R_2; R_1]$ виконується нерівність $f_{k_0}(x) > 0$. Звідки ми маємо $f_{k_0}(x) > 0$ для усіх $x \in \mathbb{R}$.

Позначимо через

$$p_1(t) = p(t)\chi[l, l'_{k_0}](t), \tag{3.48}$$
$$p_2(t) = p(t)\chi[l'_{k_0}, r''_{k_0}](t), \tag{3.49}$$
$$p_3(t) = p(t)\chi[r''_{k_0}, r](t), \tag{3.50}$$

де $\chi[m, n]$ означає характеристичну функцію відрізка $[m, n]$:

$$\chi[m,n](t) = \begin{cases} 1, & t \in [m,n], \\ 0, & t \in (-\infty; m) \cup (n; +\infty). \end{cases} \tag{3.51}$$

Тоді

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t), \tag{3.52}$$

де

$$p_1(t) \geqslant 0, \qquad p_3(t) \geqslant 0. \tag{3.53}$$

Ясно, що

$$\exp(\lambda e^{\varepsilon x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \exp(k\varepsilon x)}{k!} = \int_0^{\infty} \exp(xt) d\Phi_{\lambda,\varepsilon}(t), \tag{3.54}$$

де $\Phi_{\lambda,\varepsilon}$ є сходинковою функцією зі стрибком $\lambda^k/k!$ у точці εk, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Таким чином, функція $F_{\lambda,\varepsilon}(x) = f(x)\exp(\lambda e^{\varepsilon x})$ має представлення

$$F_{\lambda,\varepsilon}(x) = \int_0^{\infty} \exp(xt) q_{\lambda,\varepsilon}(t) dt, \tag{3.55}$$

де

$$q_{\lambda,\varepsilon}(t) = (p * \Phi_{\lambda,\varepsilon})(t) = (p_1 * \Phi_{\lambda,\varepsilon})(t) + (p_2 * \Phi_{\lambda,\varepsilon})(t) + (p_3 * \Phi_{\lambda,\varepsilon})(t). \tag{3.56}$$

Для $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ і $t > 0$ ми маємо

$$(p_1 * \Phi_{\lambda,\varepsilon})(t) \geqslant 0, \qquad (p_3 * \Phi_{\lambda,\varepsilon})(t) \geqslant 0. \tag{3.57}$$

Таким чином ми довели, що $(p_2 * \Phi_{\lambda,\varepsilon})(t) \geqslant 0$ для $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ і $\lambda \geqslant \lambda_\varepsilon$. Це є наслідком теореми 3.5.3, тому що функція p_2 задовольняє усі вимоги цієї теореми.

Отже, ми довели, що теорема 3.5.2 є наслідком теореми 3.5.3. Залишилося довести теорему 3.5.3.

Без втрати загальності ми можемо припустити, що $[a, b] = [0, 1]$. Із умов 1, 2 випливає, що існує $\Delta \in (0, 1)$, таке що

$$p(t) > 0 \qquad \text{при} \quad t \in [0, \Delta] \cup [1 - \Delta, 1]. \tag{3.58}$$

Ми будемо вважати, що p є заданою в кожній точці дійсній осі, положимо для цього $p(t) = 0$, коли $t \in (-\infty, 0) \cup (1; +\infty)$.

Ми маємо

$$F_{\lambda,\varepsilon}(x) = f(x)\exp(\lambda e^{\varepsilon x}) = \int_0^{\infty} \exp(xt) q_{\lambda,\varepsilon}(t) dt, \tag{3.59}$$

де

$$q_{\lambda,\varepsilon}(t) = (p * \Phi_{\lambda,\varepsilon})(t). \tag{3.60}$$

Обчислимо $q_{\lambda,\varepsilon}$. За означенням $\Phi_{\lambda,\varepsilon}$ (дивись (3.54)) ми маємо

$$q_{\lambda,\varepsilon}(t) = \int_{t-1}^{t} p(t - u) d\Phi_{\lambda,\varepsilon}(u). \tag{3.61}$$

Із (3.61) ясно, що

$$q_{\lambda,\varepsilon}(t) = 0, \qquad \text{коли} \quad t \leqslant 0, \tag{3.62}$$

і, більш того, з (3.58) ми маємо

$$q_{\lambda,\varepsilon}(t) \geqslant 0, \qquad \text{коли} \quad t \in [0, \Delta]. \tag{3.63}$$

Ми цікавимося формою функції $q_{\lambda,\varepsilon}$ для $t \geqslant \Delta$. Фіксуємо таке t.

Ми будемо використовувати наступні позначення: $m = m(\varepsilon, t) := [t/\varepsilon]$, $\delta = \delta(\varepsilon, t) := t - [t/\varepsilon]\varepsilon$, $n = n(\varepsilon, t) := [(1-\delta)/\varepsilon]^*$, де $[a]$ є найбільшим цілим числом, яке є меншим за a, а $[a]^*$ є найменшим цілим числом, яке є більшим за a.

Відмічаємо, що

$$n(\varepsilon, t) \leqslant [\varepsilon^{-1}] + 1. \tag{3.64}$$

Ми маємо з (3.54) і (3.61)

$$q_{\lambda,\varepsilon}(t) = \int_{t-1}^{t} p(t-u)d\Phi_{\lambda,\varepsilon}(u) = \tfrac{p(\delta)\lambda^m}{m!} + \tfrac{p(\delta+\varepsilon)\lambda^{m-1}}{(m-1)!} \tag{3.65}$$

$$+ \ldots + \tfrac{p(\delta+(n-1)\varepsilon)\lambda^{m-n+1}}{(m-n+1)!} = \tfrac{\lambda^m}{m!}\Bigg(p(\delta) + p(\delta+\varepsilon)\tfrac{m}{\lambda} +$$

$$p(\delta+2\varepsilon)\tfrac{m}{\lambda}\left(\tfrac{m}{\lambda} - \tfrac{1}{\lambda}\right) + \ldots$$

$$+p(\delta+(n-1)\varepsilon)\tfrac{m}{\lambda}\left(\tfrac{m}{\lambda} - \tfrac{1}{\lambda}\right)\cdots\left(\tfrac{m}{\lambda} - \tfrac{n-2}{\lambda}\right)\Bigg). \tag{3.66}$$

Ми введемо наступну систему многочленів від змінної y:

$$Q_n(y, \mu, \beta) := \tag{3.67}$$

$$p(\mu) + p(\mu+\varepsilon)y + p(\mu+2\varepsilon)y(y-\beta) + \ldots +$$

$$+p(\mu+(n-1)\varepsilon)y(y-\beta)\cdots(y-(n-2)\beta), \tag{3.68}$$

де

$$0 \leqslant \mu \leqslant \varepsilon, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1, \quad n \leqslant [\varepsilon^{-1}] + 1, \tag{3.69}$$

(порівняйте з (3.64) і (3.66)). З (3.66) ми бачимо, що

$$q_{\lambda,\varepsilon}(t) = \frac{\lambda^m}{m!} Q_n\left(\frac{m}{\lambda}, \delta, \frac{1}{\lambda}\right), t \geqslant 0. \tag{3.70}$$

Ми вивчимо систему многочленів $Q_n(y,\mu,\beta)$. Нехай $\varepsilon > 0$ буде фіксованим і досить малим числом (величину $\varepsilon > 0$ буде вибрано пізніше). Із (3.68) випливає, що степені многочленів $Q_n(y,\mu,\beta)$ є обмеженими, коли ε є фіксованим. Покажемо тепер, що при цих умовах многочлени $Q_n(y,\mu,\beta)$ мають спільну границю додатних коренів для усіх $\mu \in [0,\varepsilon]$ і $\beta \in [0,1]$. Ми будемо використовувати наступну добре відому теорему.

Теорема 3.5.4. (дивись, наприклад, [7, задача 686]). Многочлен $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ не має коренів при $|z| \geqslant R$, де

$$R = 1 + (1/a_n)\max\{|a_j| : 0 \leqslant j \leqslant n-1\}. \tag{3.71}$$

Число $p(\mu + (n-1)\varepsilon)$ є старшим коефіцієнтом многочлена $Q_n(y,\mu,\beta)$. Нехай $\varepsilon > 0$ буде фіксованим числом, $\varepsilon < \Delta/4$ (дивись (3.58)). Якщо $\mu \in [0,\varepsilon]$, $\beta \in [0,1]$, $n \leqslant [\varepsilon^{-1}] + 1$, ми маємо

$$p(\mu + (n-1)\varepsilon) \geqslant \min\{p(t) : t \in [1-\Delta, 1]\} > 0. \tag{3.72}$$

Очевидно, що решта коефіцієнтів многочлена $Q_n(y,\mu,\beta)$ є обмеженими зверху сталою, яка залежить тільки від $\max\{|p(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, якщо ε є фіксованим, $\varepsilon \in (0,\Delta/4]$, $\mu \in [0,\varepsilon]$, $\beta \in [0,1]$. Тому для фіксованого $\varepsilon \in (0,\Delta/4]$ існує дійсне число $R_0 > 1$, яке не залежить від β, таке що

$$Q_n(y,\mu,\beta) > 0, \quad y \geqslant R_0. \tag{3.73}$$

Нехай $\varepsilon > 0$ буде фіксованим маленьким числом. Нагадуємо, що p є неперервною функцією, число $n = n(\varepsilon, t)$ задовольняє (3.64), тому ми отримуємо наступне

$$\begin{aligned}\lim\nolimits_{\beta\to 0} Q_n(y,\mu,\beta) = p(\mu) + p(\mu+\varepsilon)y + p(\mu+2\varepsilon)y^2 + \ldots +\\ + p(\mu+(n-1)\varepsilon)y^{n-1} =: Q_n(y,\mu),\end{aligned} \tag{3.74}$$

де границя є рівномірною по $\mu \in [0,1]$ і $y \in C$ для кожного компакту $C \subset \mathbb{C}$.

Лема 3.5.5. Існують додатні числа ε_0 і ν_0, такі що

$$Q_n(y,\mu) \geqslant \nu_0 > 0 \tag{3.75}$$

для довільних $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\mu \in [0, \varepsilon]$ і $y \geqslant 0$.

Перед доведенням леми 3.5.5 ми покажемо, що теорема 3.5.3 є наслідком леми 3.5.5.

Припустимо, що лема 3.5.5 є вірною. Ми виберемо і фіксуємо додатне число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ (ε_0 – те ж саме, що і в лемі 3.5.5). Розглянемо систему многочленів $Q_n(y, \mu, \beta)$ на відрізку $[0, R_0]$, де R_0 вибрано з (3.73). Оскільки ε_0 є фіксованим, з (3.64) ми отримуємо, що степені цих многочленів є обмеженими числом $[\varepsilon^{-1}] + 1$. З (3.75) і рівномірної збіжності $Q_n(y, \mu, \beta)$ до $Q_n(y, \mu)$ по змінної $y \in [0, R_0]$, існує додатне число β_0, таке що

$$Q_n(y, \mu, \beta) \geqslant \nu_0/2 > 0 \tag{3.76}$$

для кожного $\beta \in (0, \beta_0]$, $y \in [0, R_0]$ і $\mu \in [0, \varepsilon]$. З (3.73) і (3.76), існує додатне число ε_0, таке що для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ми можемо вибрати $\beta_0 > 0$, таке що для кожного $\beta \in (0, \beta_0]$, $y \geqslant 0$ виконується нерівність $Q_n(y, \mu, \beta) > 0$. Покладемо $\lambda_\varepsilon = (1/\beta_0)$ і зробимо заміну в (3.70), і ми отримуємо твердження теореми 3.5.3.

Таким чином, теорема 3.5.3 є наслідком леми 3.5.5.

Для доведення леми 3.5.5, нам потрібно знайти більш точну границю додатних коренів многочленів $Q_n(y, \mu, \beta)$, ніж це зроблено в теоремі 3.5.4.

Лема 3.5.6. Нехай $F(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1}$ є многочленом з дійсними коефіцієнтами. Припустимо, що для деякого $q \in \mathbb{N}$, такого що $n/2 \leqslant q < n$ виконуються нерівності

$$a_q > 0, \quad a_{q+1} > 0, \quad \ldots, \quad a_{n-1} > 0. \tag{3.77}$$

Нехай

$$\max\{|a_j| : 0 \leqslant j \leqslant q-1\} \leqslant B, \quad \min\{a_j : q \leqslant j \leqslant n-1\} \geqslant b. \tag{3.78}$$

Тоді $F(t) > 0$ для

$$t \geqslant \max\left\{1, \left(\frac{Bq}{b(n-q)}\right)^{1/(n-q)}\right\}. \tag{3.79}$$

Доведення. Ми маємо для $t \geqslant 0$

$$\begin{aligned} F(t) &= a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_q t^q + a_{q-1}t^{q-1} + \ldots + a_0 \geqslant \\ &\geqslant b\left(t^{n-1} + t^{n-2} + \ldots + t^q\right) - B\left(t^{q-1} + t^{q-2} + \ldots + 1\right) = \\ &= bt^q\frac{t^{n-q}-1}{t-1} - B\frac{t^q-1}{t-1} = \\ &= b\frac{t^{n-q}-1}{t-1}\left[t^q - \frac{B}{b}\frac{t^q-1}{t^{n-q}-1}\right]. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Нескладно побачити, що за умовами леми 3.5.6

$$\frac{t^q-1}{t^{n-q}-1} \leqslant \frac{q}{n-q}t^{2q-n} \tag{3.81}$$

для $t \geqslant 1$. З (3.80) і (3.81) маємо

$$F(t) \geqslant b\frac{t^{n-q}-1}{t-1}\left[t^q - Bq\frac{t^{2q-n}}{b(n-q)}\right]. \tag{3.82}$$

Тому, якщо $t \geqslant 1$ і задовольняє умову

$$t^q - Bq\frac{t^{2q-n}}{b(n-q)} > 0, \tag{3.83}$$

то $F(t) > 0$. Легко перевірити, що з (3.83) випливає твердження леми 3.5.6.

Лема 3.5.6 доведена. □

Будемо тепер доводити лему 3.5.5. Ми знайдемо верхні і нижні межі додатних коренів многочленів $Q_n(y, \mu)$ за допомогою леми 3.5.6. Покладемо

$$B = \max\left\{|p(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\right\}; \tag{3.84}$$

$$b = \min\left\{p(t) : t \in [0, \Delta] \cup [1-\Delta, 1]\right\} > 0.$$

Число $p(\mu + k\varepsilon)$ (дивись (3.74)) є коефіцієнтом многочлена $Q_n(y, \mu)$ при y^k. Із наших умов ми маємо $p(t) > 0$ для $t \in [0, \Delta] \cup [1-\Delta, 1]$. Ми застосуємо лему 3.5.6 до многочленів

$$F_1(y) = Q_n(y, \mu) - b/2 \tag{3.85}$$

і

$$\begin{aligned} F_2(y) = y^{n-1}\left(Q_n(1/y, \mu) - b/2\right) = \left(p(\mu) - b/2\right)y^{n-1} + \\ + p(\mu+\varepsilon)y^{n-2} + p(\mu+2\varepsilon)y^{n-3} + \ldots + p(\mu + (n-1)\varepsilon). \end{aligned} \tag{3.86}$$

Положимо

$$\varepsilon_1 = \min\{1/4, \Delta/4\}. \tag{3.87}$$

Ми виберемо $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ (нагадуємо, що $0 < \mu \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$). Будемо оцінювати натуральні числа n і q із леми 3.5.6 для многочленів F_1 і F_2. Відмітимо, що число n із леми 3.5.6 є числом усіх коефіцієнтів многочлена F, а число q є числом додатних "старших" коефіцієнтів. З (3.58) "старші" коефіцієнти многочлена F_1 будуть додатними, якщо індекс k задовольняє $1 - \Delta < \mu + k\varepsilon < 1$. Тому для многочлена F_1 число додатних "старших" коефіцієнтів є не меншим, ніж $[\Delta/\varepsilon] - 1$, і із (3.64) загальне число усіх коефіцієнтів не перевищує $[1/\varepsilon] + 1$. Використовуючи лему 3.5.6 для многочлена F_1, ми отримуємо

$$F_1(y) > 0 \quad \text{для} \quad y \geqslant \max\left\{1, \left(\frac{2B([(1-\Delta)/\varepsilon]+1)}{b([\Delta/\varepsilon]-1)}\right)^{1/([\Delta/\varepsilon]-1)}\right\}. \tag{3.88}$$

Таким чином, існує стала $C_1 > 0$, яка не залежить від μ і ε, така що

$$Q_n(y,\mu) > b/2, \quad \text{для} \quad y \geqslant \exp(C_1\varepsilon). \tag{3.89}$$

Міркуючи аналогічно для многочлена F_2, ми отримуємо, що існує стала $C_2 > 0$, яка не залежить від μ і ε, така що

$$Q_n(y,\mu) > b/2 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant y \leqslant \exp(-C_2\varepsilon). \tag{3.90}$$

Залишилося довести, що многочлени $Q_n(y,\mu)$ є обмеженими знизу додатною константою, коли $\exp(-C_2\varepsilon) \leqslant y \leqslant \exp(C_1\varepsilon)$. Ми зробимо заміну змінної $y = \exp(x\varepsilon)$. Ця заміна є коректною, оскільки ми розглядаємо систему многочленів $Q_n(y,\mu)$ для $y > 0$. Положимо

$$\begin{aligned} q_n(x,\mu) = Q_n(e^{x\varepsilon},\mu) = p(\mu) + p(\mu+\varepsilon)e^{x\varepsilon} + p(\mu+2\varepsilon)e^{2x\varepsilon} \\ + \ldots + p(\mu+(n-1)\varepsilon)e^{(n-1)x\varepsilon}. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Із (3.89) і (3.90) ми маємо

$$q_n(x,\mu) > b/2 \quad \text{для} \quad |x| \geqslant C = \max\{C_1, C_2\}, \tag{3.92}$$

де C є незалежною від μ і ε. Ми розглянемо функції $q_n(x,\mu)$ для $|x| \leqslant C$. Із умов 1, 3 теореми 3.5.3 існує додатне число a_1, таке що

$$f(x) = \int_0^1 \exp(xt)p(t)dt \geqslant a_1 \tag{3.93}$$

для кожного $|x| \leqslant C$. Відмітимо, що

$$\varepsilon \exp(x\mu) q_n(x,\mu) = \varepsilon\Big(p(\mu) + p(\mu+\varepsilon)e^{x(\varepsilon+\mu)} +$$
$$p(\mu+2\varepsilon)e^{x(2\varepsilon+\mu)} + \ldots + +p(\mu+(n-1)\varepsilon)e^{x(n-1)\varepsilon+\mu)}\Big) \to$$
$$\to \textstyle\int_0^1 \exp(xt)p(t)dt \geqslant a_1, \quad \varepsilon \to 0, \tag{3.94}$$

рівномірно по відношенню до $x \in [-C, C]$. Таким чином, існує додатне число $\varepsilon_0(C)$, таке що для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0(C)]$ ми маємо

$$\varepsilon \exp(x\mu) q_n(x,\mu) \geqslant a_1/2 \quad \text{для} \quad |x| \leqslant C, \quad \mu \in [0,\varepsilon]. \tag{3.95}$$

З (3.95) ми отримуємо, що

$$q_n(x,\mu) > a_1 \exp(-C\varepsilon_0)/(2\varepsilon_0) \quad \text{для} \quad |x| \leqslant C. \tag{3.96}$$

Положимо

$$\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_0(C)\}, \quad \nu_0 = \min\{b/2, a_1\exp(-C\varepsilon_0)/(2\varepsilon_0)\}. \tag{3.97}$$

Тоді для кожного $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ і $x \in [-C, C]$ виконується нерівність

$$q_n(x,\mu) \geqslant \nu_0 > 0. \tag{3.98}$$

З (3.92) і (3.98) ми маємо $q_n(x,\mu) \geqslant \nu_0 > 0$ для кожного $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$, $\mu \in (0;\varepsilon]$, $x \in \mathbb{R}$. Нагадуємо, що $Q_n(y,\mu) = q_n(\varepsilon^{-1}\ln y, \mu)$, і ми маємо

$$Q_n(y,\mu) \geqslant \nu_0 > 0 \tag{3.99}$$

для кожного $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$, $\mu \in (0;\varepsilon]$, $y \geqslant 0$. Таким чином, лема 3.5.5 доведена. Це закінчує доведення теореми 3.5.3 і теореми 3.5.2. $\square$

Зауваження 3.5.7. Функцію p в теоремах 3.5.3 і 3.5.2 можна розглядати як щільність деякої дійсної міри m_p. Теореми 3.5.3 і 3.5.2 можна переформулювати наступним чином. Нехай m_p є дійсною мірою із неперервною щільністю з носієм на додатної півосі або сегменті. Нехай перетворення Лапласу цієї міри $L_{m_p}(x) > 0$ для усіх $x \in \mathbb{R}$, і m_p є додатною в деяких околах кінцевих точок носія. Тоді для деяких $\varepsilon > 0$ і $\lambda_\varepsilon > 0$ згортка $m_p * \mu_{\lambda,\varepsilon} \geqslant 0$ (де $L_{\mu_{\lambda,\varepsilon}}(x) = \exp(\lambda e^{\varepsilon x})$). Виникає питання: чи є це твердження вірним для довільної міри з носієм на півосі або сегменті, яка є додатною в деяких околах кінцевих точок носія і з додатним перетворенням Лапласу? Відповідь є негативною. Нехай $\alpha, \beta \in (0,1)$ є ірраціональними числами, які не є раціонально лінійно залежними. Нехай $m := D_0 - \varepsilon D_\alpha - \varepsilon D_\beta + D_1$, де D_x є мірою Дірака в точці x і $\varepsilon > 0$. Ясно, що якщо ε є достатньо малим, то $L_m(x) = \int_0^1 \exp(xt) dm(t) > 0$ для усіх дійсних x. Якщо згортка $m * \mu_{\lambda,\varepsilon}$ є невід'ємною в точці α, то $\varepsilon = \frac{\alpha}{k}, k \in \mathbb{N}$, і якщо $m * \mu_{\lambda,\varepsilon}$ є невід'ємною в точці β, то $\varepsilon = \frac{\beta}{l}, l \in \mathbb{N}$. Тому для довільного вибору чисел ε, λ згортка $m * \mu_{\lambda,\varepsilon}$ не може бути невід'ємною.

3.6 О нульових множинах цілих абсолютно монотонних функцій

В цьому параграфі ми будемо описувати нульові множини цілих абсолютно монотонних функцій. Нагадуємо, що проблема опису цих множин була поставлена в роботі І.В.Островського [174], і була вирішена для скінчених множин в цій роботі. Ми дамо рішення цієї проблеми для множин, які не перетинаються з деяким кутом $\{z : |\arg z - \pi| < \alpha\}$ для $\alpha > 0$.

Цілі абсолютно монотонні функції утворюють підклас класу цілих функцій, які мають представлення у вигляді

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zu} P(du), \tag{3.100}$$

де P є скінченою невід'ємною Борелевською мірою на $\mathbb{R}$ і інтеграл абсолютно збігається в $\mathbb{C}$. Нульові множини класу цілих функцій, які мають представлення (3.100) були повністю описані в роботі [109] І.П.Каминіна і І.В.Островського. Цей опис є таким.

Теорема 3.6.1. ([109]). Множина $E \subset \mathbb{C}$ без скінчених граничних точок є нульовою множиною для деякої функції, яка має представлення (3.100), тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

1.
$$E\bigcap\mathbb{R}=\emptyset,\quad b\in E\Leftrightarrow \bar b\in E \tag{3.101}$$
(кратності точок b і $\bar b$ є рівними);

2. для кожного $H>0$ виконується
$$\log n(r,H)=o(r),\quad r\to\infty, \tag{3.102}$$
де
$$n(r,H):=\#\{z:z\in E,|\mathrm{Im}\ z|\leqslant r,|\mathrm{Re}\ z|\leqslant H\} \tag{3.103}$$
(точки множини E рахуються з їхніми кратностями).

Ясно, що клас нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій утворює підклас класу нульових множин, що вони описані в попередній теоремі. З іншого боку, очевидно, що цілі абсолютно монотонні функції формують підклас класу цілих функцій, які є обмеженими в кожній півплощині вигляду
$$\mathbb{C}_\omega:=\{z:\mathrm{Re}\ z\leqslant\omega\},\quad \omega\in\mathbb{R}. \tag{3.104}$$
Тому характеризація нульових множин цілих функцій, які є обмеженими в кожній півплощині вигляду $\mathbb{C}_\omega$ є цікавою. Наступна теорема роботи [118] дає повну характеризацію таких множин:

Теорема 3.6.2. ([118]). Множина $E=\{b_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$ без скінчених граничних точок є нульовою множиною деякої цілої функції, яка є обмеженою в $\mathbb{C}_\omega$, $\forall\omega\in\mathbb{R}$, тоді і тільки тоді, коли
$$\sum_{b_k\in E\bigcap\mathbb{C}_\omega}\frac{|\mathrm{Re}\ b_k|+1}{|b_k|^2+1}<\infty,\quad \forall\omega\in\mathbb{R}. \tag{3.105}$$

Ми приведемо доведення цієї теореми.

Доведення. Відмітимо, що необхідність умови (3.105) є простим наслідком добре відомої умови Бляшке для півплощини. Нескладно перевірити, що з умови (3.105) випливає (2) в теоремі 3.6.1. Доведення достатності базується на ідеї І.В.Островського.

Нехай множина E задовольняє умови теоремі 3.6.2. Нехай

$$E_- := E \bigcap \{z : \mathrm{Re}\ z < 0\} = (a_k)_{k=1}^{\infty}. \tag{3.106}$$

Існує послідовність додатних $\delta_k \uparrow +\infty, k \uparrow +\infty$, таких що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Re}\ a_k| \cdot \delta_k + \delta_k^2}{|a_k|^2 + 1} < \infty. \tag{3.107}$$

Відзначимо, що з (3.107) випливає

$$\delta_k = o(|a_k|), \quad k \to \infty. \tag{3.108}$$

Покладемо

$$B_1(z) := \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - z/a_k}{1 - z/(\delta_k - \bar{a}_k)}. \tag{3.109}$$

З (3.107) нескінчений добуток (3.109) збігається і є мероморфною функцією. Ми покажемо, що B_1 є обмеженою функцією в $\mathbb{C}_\omega \setminus K_\omega,\ \forall \omega \in \mathbb{R}$, де K_ω є компактною підмножиною $\{z : \mathrm{Re}\ z \geqslant 0\}$. Ми маємо

$$\begin{aligned} |B_1(z)|^2 = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \tfrac{\delta_k^2 - 2\mathrm{Re}\ a_k \cdot \delta_k}{|a_k|^2}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left|\tfrac{a_k - z}{\delta_k - \bar{a}_k - z}\right|^2 \\ =: C \prod_{k=1}^{\infty} \left|\tfrac{a_k - z}{\delta_k - \bar{a}_k - z}\right|^2. \end{aligned} \tag{3.110}$$

Тут і надалі ми будемо позначати через C не обов'язково рівні додатні константи.

Для $\delta_k > 2\omega$ виконується

$$\left|\frac{a_k - z}{\delta_k - \bar{a}_k - z}\right| \leqslant 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}_\omega. \tag{3.111}$$

Зокрема, для $\omega = 0$ нерівність (3.111) виконується для усіх $k \in \mathbf{N}$, звідки

$$|B_1(z)|^2 \leqslant C, \quad \forall z \in \{\mathrm{Re}\ z \leqslant 0\}. \tag{3.112}$$

Оскільки $\delta_k \uparrow +\infty$, нерівність (3.111) виконується для усіх $\omega > 0$ і усіх достатньо великих $k \geqslant k_0(\omega)$. Тому, B_1 є обмеженою в $\mathbb{C}_\omega \setminus K_\omega,\ \forall \omega > 0$, де

$K_\omega \subset \{z : \text{Re } z \geqslant 0\}$ є компактною множиною, яка включає у себе точки $-\bar{a}_k + \delta_k,\ k = 1, \dots k_0(\omega) - 1$.

Нехай

$$E_+ := E \bigcap \{z : \text{Re } z \geqslant 0\} = (b_k)_{k=1}^{\infty}. \tag{3.113}$$

Без обмеження загальності ми можемо вважати, що $0 \notin E_+$. Із (3.105) випливає

$$\sum_{b_k \in \mathbb{C}_\omega \bigcap E_+} \frac{1}{|b_k|^2} < \infty, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \tag{3.114}$$

Звідки, для кожного $n \in \mathbb{N}$, існує $A_n > 0$, таке що

$$\sum_{n-1 \leqslant \text{Re } b_k \leqslant n;\ |\text{Im } b_k| \geqslant A_n} \frac{n}{|b_k|^2} \leqslant \frac{1}{n^2}. \tag{3.115}$$

Положимо

$$\Pi_n := \{z : n - 1 \leqslant \text{Re } z \leqslant n,\ |\text{Im } z| \leqslant A_n\}, \tag{3.116}$$

$$\Omega := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n, \quad \Lambda := \{z : \text{Re } z \geqslant 0\} \setminus \Omega. \tag{3.117}$$

З (3.115), існує послідовність $0 < \mu_k \uparrow \infty,\ k \uparrow \infty$, така що

$$\sum_{b_k \in \Lambda} \frac{\text{Re } b_k \cdot \mu_k + \mu_k^2}{|b_k|^2} < \infty, \tag{3.118}$$

звідки маємо

$$\mu_k = o(|b_k|), \quad k \to +\infty. \tag{3.119}$$

Положимо

$$B_2(z) := \prod_{b_k \in \Lambda} \frac{1 - z/b_k}{1 - z/(b_k + \mu_k)}. \tag{3.120}$$

З (3.118) нескінченний добуток збігається і є мероморфною функцією. Міркуючи аналогічно до міркувань щодо функції B_1, можна показати, що B_2 є обмеженою в множині $\mathbb{C}_\omega \setminus K'_\omega$, $\forall \omega \in \mathbb{R}^+$, де K'_ω є компактною множиною в $\{z : \text{Re } z \geqslant 0\}$.

Нехай V є цілою функцією, у якої нульова множина є об'єднанням трьох множин: множини полюсів функції B_1, множини полюсів функції B_2, і множини $E \bigcap \Omega$. Розглянемо наступну цілу функцію

$$f_0(z) := B_1(z) B_2(z) V(z). \tag{3.121}$$

Нульова множина f_0 співпадає з множиною E. Але f_0 не обов'язково є обмеженою в $\mathbb{C}_\omega$, $\forall\omega \in \mathbb{R}$.

Далі нам потрібна наступна теорема, яка є простим окремим випадком добре відомої теореми М.В.Келдиша.

Теорема 3.6.3. (М.В.Келдиш, дивись [167]). Нехай $\tau(x) > 0$ є неперервною неспадаючою функцією на $\mathbb{R}^+$, такою що $\tau(x) \uparrow +\infty,\ x \uparrow +\infty$. Нехай g є функцією, яка аналітична в замкненій області

$$G = \mathbb{C} \setminus \{z : \mathrm{Re}\ z > 0,\ |\mathrm{Im}\ z| < \tau(\mathrm{Re}\ z)\}. \tag{3.122}$$

Тоді існує ціла функція Φ, така що

$$|g(z) - \Phi(z)| \leqslant 1, \quad \forall z \in G. \tag{3.123}$$

Очевидно, що існує функція τ, яка задовольняє умовам теореми 3.6.4, і така, що відповідна область G є вільною від коренів функції V. Застосовуючи теорему 3.6.4 до $g(z) = \log V(z)$, ми знаходимо цілу функцію Φ, таку що

$$|\log V(z) - \Phi(z)| \leqslant 1, \quad \forall z \in G. \tag{3.124}$$

Очевидно, що

$$f(z) := f_0(z)\exp(-\Phi(z)) = B_1(z)B_2(z)V(z)\exp(-\Phi(z)) \tag{3.125}$$

є цілою функцією, яка є обмеженою в області $\mathbb{C}_\omega$, $\forall\omega$, і з нульовою множиною E. $\square$

Виявляється, що, якщо ми додамо умову (3.105) до умов теореми 3.6.1, ми не отримуємо повної характеризації нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій. В роботі [174] І.В.Островського було відмічено, що наступна умова, яка є незалежною від усіх попередніх, є також необхідною:

$$\mathrm{dist}(x, E) \to +\infty, \quad x \to -\infty \tag{3.126}$$

(тут $\mathrm{dist}(x, E)$ є відстанню від точки x до множини E).

І.В.Островського показав також (усне повідомлення), що наступна незалежна умова є також необхідною:

$$\exists\alpha \in (0,\pi/2): \sum_{b_k\in E\bigcap\{z:|\arg z-\pi|<\alpha\}} \operatorname{Re}\frac{1}{x-b_k} \to 0, \quad x\to-\infty. \qquad (3.127)$$

У пункті 3.4 цього розділу ми довели ще одну незалежну умову для множини E, щоб вона була нульовою множиною цілої абсолютно монотонної функції:

$$\exists\alpha \in (0,\pi/2): \sum_{b_k\in E\bigcap\{z:|\arg z-\pi|<\alpha\}} \operatorname{Re}\frac{1}{(x-b_k)^2} \in L^1(-\infty,-1]. \qquad (3.128)$$

На даний момент ми не знаємо, чи дають (3.101), (3.105), (3.126), (3.127) і (3.128) набір необхідних і достатніх умов для того, щоб множина була нульовою множиною цілої абсолютно монотонної функції.

В роботі ([118]) ми отримали повний опис нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, якщо ці множини розташовані в правій півплощині. Було доведено, що для множини $E=(b_k)_{k=1}^\infty \subset \{z:\operatorname{Re} z\geqslant 0\}$ без скінчених граничних точок умови (3.101) і (3.105) є необхідними і достатніми для того, щоб множина була нульовою множиною деякої цілої абсолютно монотонної функції.

Головним результатом цього параграфу є наступна теорема, яка дає характеризацію нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, якщо ці множини не перетинають деякий кут $\{z:|\arg z-\pi|<\alpha\}$ для $\alpha>0$.

Теорема 3.6.4. ([122]). Нехай $E=(b_k)_{k=1}^\infty$ є множиною без скінчених граничних точок. Припустимо, що існує $\alpha\in(0,\pi/2]$, таке що $E\cap\{z: |\arg z-\pi|<\alpha\}=\emptyset$. Множина E є нульовою множиною деякої цілої абсолютно монотонної функції тоді і тільки тоді, коли виконуються умови (3.101) і (3.105).

Доведення. Необхідність вказаних умов є очевидною. Відмітимо, що у нашому випадку умови (3.126), (3.127) і (3.128) виконуються автоматично.

Для початку ми доведемо наступну теорему.

Теорема 3.6.5. ([122]). Нехай $E = (b_k)_{k=1}^{\infty}$ є множиною без скінчених граничних точок, яка задовольняє умови (3.101) і (3.105). Припустимо, що існує $\alpha \in (0, \pi/2]$, таке що $E \cap \{z : |\arg z - \pi| < \alpha\} = \emptyset$. Тоді існує ціла функція ψ_1 з нульовою множиною E, яка має представлення абсолютно збіжним в $\mathbb{C}$ інтегралом

$$\psi_1(z) = \int_0^{\infty} e^{zx} p_1(x) dx, \tag{3.129}$$

де p_1 є дійсною неперервною на $\mathbb{R}^+$ функцією, яка є додатною на деякому інтервалі $(0, x_1)$, $x_1 > 0$.

Ми отримуємо потрібну теорему 3.6.4 з теореми 3.6.5 за допомогою ще одного результату із [118].

Теорема 3.6.6. ([118]). Нехай ψ є цілою функцією, яка є обмеженою в $\mathbb{C}_{\omega}$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$ і $\psi(u) > 0, u \in \mathbb{R}$. Тоді існує ціла абсолютно монотонна функція χ без коренів, така що добуток $\psi \cdot \chi$ має представлення абсолютно збіжним в $\mathbb{C}$ інтегралом

$$\psi_2(z) := \psi(z)\chi(z) = \int_0^{\infty} e^{zx} p_2(x) dx, \tag{3.130}$$

де p_2 є дійсною неперервною функцією на $\mathbb{R}^+$, яка є додатною на деякій півосі $[x_2, +\infty)$, $x_2 > 0$.

Нехай E буде множиною, яка задовольняє умови теореми 3.6.4 . Із теореми 3.6.5 існує ціла функція ψ_1 з нульовою множиною E, яка має представлення (3.129), де p_1 є дійсною неперервною функцією, яка є додатною на деякому інтервалі $(0, x_1)$, $x_1 > 0$. Покажемо, що ψ_1 задовольняє умови теореми 3.6.6.

Очевидно, що ψ_1 є цілою функцією, яка є обмеженою в $\mathbb{C}_{\omega}$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$. Більш того, $\psi_1(u) \in \mathbb{R}$ для $u \in \mathbb{R}$. Оскільки $E \bigcap \mathbb{R} = \emptyset$, ми маємо $\psi_1(u) \neq 0$ для $u \in \mathbb{R}$. Оскільки $p_1(x) > 0$ для $x \in (0, x_1)$, ми отримуємо, що $\psi_1(u) > 0$ для усіх $u < 0$, коли $|u|$ є достатньо великим. Тобто, $\psi_1(u) > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$, і умови теореми 3.6.6 є виконаними.

Із теореми 3.6.6, існує ціла абсолютно монотонна функція χ без коренів, така що добуток $\psi_2(z) = \psi_1(z)\chi(z)$ має представлення абсолютно збіжним в $\mathbb{C}$ інтегралом (3.130), де p_2 є дійсною неперервною функцією, яка є додатною для $x \geqslant x_2 > 0$. Оскільки $\chi(u) > 0,\ \forall u \in \mathbb{R}$, ми маємо $\psi_2(u) > 0,\ \forall u \in \mathbb{R}$. Оскільки χ не має коренів, нульова множина функції ψ_2 дорівнює E. Як і кожна абсолютно монотонна функція, χ має представлення

$$\chi(z) = \int_0^\infty e^{zx} Q(dx) \tag{3.131}$$

де Q є скінченою Борелевською мірою на $\mathbb{R}^+$. Звідки

$$p_2(x) = (p_1 * Q)(x) = \int_0^x p_1(x-t)Q(dt). \tag{3.132}$$

Ми маємо $p_2(x) > 0$ для $x \in (0, x_1)$, оскільки $p_1(x) > 0$ для $x \in (0, x_1)$. З цього випливає, що p_2 задовольняє умови теореми 3.5.3 із попереднього параграфу.

Із теореми 3.5.3, для деяких $\varepsilon > 0,\ \lambda > 0$, функція $\psi_2(z)\exp(\lambda e^{\varepsilon z})$ має представлення

$$\psi_{\lambda,\varepsilon}(z) = \int_0^\infty e^{zx} w_{\lambda,\varepsilon}(x)dx, \tag{3.133}$$

де $w_{\lambda,\varepsilon}(x) \geqslant 0$ для усіх $x \in \mathbb{R}^+$. Очевидно, що нульова множина функції $\psi_{\lambda,\varepsilon}$ дорівнює E.

Таким чином, теорема 3.6.4 буде доведеною, якщо ми доведемо теорему 3.6.5. Будемо доводити теорему 3.6.5.

Нехай E є множиною, яка задовольняє умови теореми 3.6.5. Побудуємо цілу функцію f, яка є обмеженою в $\mathbb{C}_\omega,\ \forall \omega \in \mathbb{R}$,

$$f(z) = B_1(z)B_2(z)V(z)\exp(-\Phi(z)) =: B(z)V(z)\exp(-\Phi(z)), \tag{3.134}$$

де корені B_1 розташовані поза кутом $\{z : |\arg z - \pi| < \alpha\}$, $\alpha \in (0, \pi/2]$. Оскільки E є симетричним по відношенню до $\mathbb{R}$, то із (3.109)

$$B_1(z) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{2|\mathrm{Re}\ \ a_k|\cdot\delta_k + \delta_k^2}{|a_k|^2}\right) \cdot \prod_{k=1}^\infty \frac{(a_k - z)(\bar{a}_k - z)}{(-a_k + \delta_k - z)(-\bar{a}_k + \delta_k - z)}, \tag{3.135}$$

і, якщо ми позначимо $\Lambda_+ := \Lambda \bigcap \{z : \mathrm{Im}\ z > 0\}$, то із (3.120)

$$B_2(z) = \prod_{b_k \in \Lambda_+} \left(1 + \frac{2\mathrm{Re}\ \ b_k \cdot \mu_k + \mu_k^2}{|b_k|^2}\right) \cdot \prod_{b_k \in \Lambda_+} \frac{(b_k - z)(\bar{b}_k - z)}{(b_k + \mu_k - z)(\bar{b}_k + \mu_k - z)}. \tag{3.136}$$

В подальшому нам буде потрібною оцінка функції $\log B(-r)$ і її похідних. Для того, щоб оцінити ці функції, ми введемо деякі позначення. Фіксуємо довільне $0<\beta<1$ і положимо

$$q(r) := \frac{1}{r^{1+\beta}} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{2r(2|\mathrm{Re}\ a_k|+\delta_k)}{(|a_k|^2+r^2)^2} + \frac{2|\mathrm{Re}\ a_k|\delta_k+\delta_k^2}{|a_k|}\cdot\frac{1}{|a_k|^2+r^2}\Big) + \sum_{b_k\in\Lambda_+}\left(\frac{2r\mu_k}{(|b_k|^2+r^2)^2} + \frac{\mu_k}{|b_k|}\cdot\frac{1}{|b_k|^2+r^2}\right). \tag{3.137}$$

З (3.107), (3.108), (3.118) і (3.119) обидва ряди в правій частині (3.138) збігаються рівномірно по відношенню до r на кожній компактній підмножині множини $\mathbb{R}^+$ і $q(r)\to 0$, якщо $r\to\infty$. Нехай

$$Q(r) := \int_r^{\infty} q(t)dt = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{r^{\beta}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2|\mathrm{Re}\ a_k|+\delta_k}{|a_k|^2+r^2} + \frac{2|\mathrm{Re}\ a_k|\delta_k+\delta_k^2}{|a_k|^2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{r}{|a_k|}\right)\right) + \sum_{b_k\in\Lambda_+}\left(\frac{\mu_k}{|b_k|^2+r^2} + \frac{\mu_k}{|b_k|^2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{r}{|b_k|}\right)\right),\quad r\geqslant 1. \tag{3.138}$$

Відмітимо, що $Q(r)\downarrow 0$, коли $r\uparrow\infty$.

Лема 3.6.7. Виконуються наступні оцінки:

$$|(\log B(z))'|_{z=-r} \leqslant CQ(r),\quad r\geqslant 1; \tag{3.139}$$

$$\left|\left(\frac{d^j}{dz^j}\log B(z)\right)\right|_{z=-r} \leqslant C\cdot j!q(r)(Cr)^{2-j},\ j\geqslant 2,\ r\geqslant 1; \tag{3.140}$$

$$\log(|B(-r+iy)|/B(-r)) \leqslant Cq(r)y^2,\quad y\in\mathbb{R},\ r\geqslant 1; \tag{3.141}$$

$$\log(|B(-r+iy)|/B(-r)) \leqslant Cq(y)y^2,\quad y\in\mathbb{R}^+,\ 1\leqslant r\leqslant y/2. \tag{3.142}$$

Доведення. Спочатку будемо доводити виконання нерівностей (3.139) і (3.140).

Із (3.137) маємо

$$\left(\frac{d^j}{dz^j}\log B(z)\right)_{z=-r} = (j-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\left\{-\frac{1}{(a_k+r)^j} - \frac{1}{(\bar a_k+r)^j} + \frac{1}{(-a_k+\delta_k+r)^j} + \frac{1}{(-\bar a_k+\delta_k+r)^j}\right\} + (j-1)!\sum_{b_k\in\Lambda_+}\left\{-\frac{1}{(b_k+r)^j} - \frac{1}{(\bar b_k+r)^j} + \frac{1}{(b_k+\mu_k+r)^j} + \frac{1}{(\bar b_k+\mu_k+r)^j}\right\} = (j-1)!\sum_{k=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}\ \left(\frac{1}{(-\bar a_k+r+\delta_k)^j} - \frac{1}{(a_k+r)^j}\right) + (j-1)!\sum_{b_k\in\Lambda_+} 2\mathrm{Re}\ \left(\frac{1}{(b_k+r+\mu_k)^j} - \frac{1}{(b_k+r)^j}\right) =: 2j!\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k^1 + 2j!\sum_{b_k\in\Lambda_+}\sigma_k^2, \tag{3.143}$$

де

$$\sigma_k^1 := \int_{-|\mathrm{Re}\ a_k|}^{|\mathrm{Re}\ a_k|+\delta_k} \mathrm{Re}\ \frac{1}{(r+u+i\mathrm{Im}\ a_k)^{j+1}}du, \tag{3.144}$$

$$\sigma_k^2 := \int_0^{\mu_k} \mathrm{Re}\ \frac{1}{(b_k+r+u)^{j+1}}du. \tag{3.145}$$

Доведемо (3.139). Ми будемо оцінювати σ_k^1 і σ_k^2 для $j = 1$. Оскільки точки a_k розташовані поза кутом $\{z : |\pi - \arg z| < \alpha\}$, то для $u \in [-|\mathrm{Re}\ a_k|, |\mathrm{Re}\ a_k| + \delta_k]$ ми маємо

$$|r+u+i\mathrm{Im}\ a_k|^2 \geqslant (1-\cos\alpha)\left(r^2+u^2+(\mathrm{Im}\ a_k)^2\right) \geqslant C_\alpha(r^2+|a_k|^2). \tag{3.146}$$

Тут і надалі ми будемо позначати через C_α не обов'язково однакові константи, які залежать тільки від α. Таким чином, із (3.144)

$$|\sigma_k^1| \leqslant C_\alpha \frac{2|\mathrm{Re}\ a_k| + \delta_k}{|a_k|^2+r^2}, \tag{3.147}$$

і, оскільки $|r+u+b_k|^2 \geqslant r^2+|b_k|^2$ для $u \in [0, \mu_k]$, то

$$|\sigma_k^2| \leqslant \frac{\mu_k}{|b_k|^2+r^2}, \tag{3.148}$$

$$|\sigma_k| \leqslant \tfrac{\mu_k r}{(|b_k|^2+r^2)^2} \cdot \tfrac{r^{j-3}}{(|b_k|^2+r^2)^{(j-3)/2}} \cdot \tfrac{1}{r^{j-2}} \leqslant \tfrac{\mu_k r}{(|b_k|^2+r^2)^2} \cdot \tfrac{1}{r^{j-2}}. \tag{3.149}$$

Використовуючи (3.138), (3.143), (3.144), (3.147) і (3.149), ми отримуємо (3.139).

Доведемо тепер (3.140). Спочатку ми оцінимо σ_k^1 і σ_k^2 для $j \geqslant 3$. Із (3.144) і (3.146)

$$|\sigma_k^1| \leqslant C_\alpha \tfrac{(2|\mathrm{Re}\ a_k|+\delta_k)r}{(|a_k|^2+r^2)^2} \cdot \tfrac{r^{j-3}}{(|a_k|^2+r^2)^{(j-3)/2}} \cdot \left(\tfrac{C_\alpha}{r}\right)^{j-2} \leqslant C_\alpha \tfrac{(2|\mathrm{Re}\ a_k|+\delta_k)r}{(|a_k|^2+r^2)^2} \cdot \left(\tfrac{C_\alpha}{r}\right)^{j-2}. \tag{3.150}$$

Аналогічно ми маємо

$$|\sigma_k^2| \leqslant \frac{\mu_k r}{(|b_k|^2+r^2)^2} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^{j-2}. \tag{3.151}$$

Використовуючи (3.138), (3.107), (3.118), (3.143), ми отримуємо (3.140) для $j \geqslant 3$.

Розглянемо тепер $j=2$. Із (3.144) ми маємо

$$\sigma_k^1 = \mathrm{Re}\ \left(\frac{1}{(-\bar{a}_k+r+\delta_k)^2} - \frac{1}{(a_k+r)^2}\right) = \left(\frac{1}{|-\bar{a}_k+r+\delta_k|^2} - \frac{1}{|a_k+r|^2}\right) - 2(\mathrm{Im}\ a_k)^2 \cdot \left(\frac{1}{|-\bar{a}_k+r+\delta_k|^4} - \frac{1}{|a_k+r|^4}\right) \tag{3.152}$$

і

$$\sigma_k^2 = \mathrm{Re}\ \left(\frac{1}{(b_k+r+\mu_k)^2} - \frac{1}{(b_k+r)^2}\right) = \left(\frac{1}{|b_k+r+\mu_k|^2} - \frac{1}{|b_k+r|^2}\right) - 2(\mathrm{Im}\ b_k)^2 \cdot \left(\frac{1}{|b_k+r+\mu_k|^4} - \frac{1}{|b_k+r|^4}\right). \tag{3.153}$$

Таким чином, із (3.152), ми отримуємо

$$|\sigma_k^1| \leqslant \left|\frac{1}{|-\bar{a}_k+r+\delta_k|^2} - \frac{1}{|a_k+r|^2}\right| \left(1 + 2(\mathrm{Im}\ a_k)^2 \left(\frac{1}{|-\bar{a}_k+r+\delta_k|^2} + \frac{1}{|a_k+r|^2}\right)\right) \leqslant 3\left|\frac{1}{|-\bar{a}_k+r+\delta_k|^2} - \frac{1}{|a_k+r|^2}\right| \leqslant 6\frac{(2|\mathrm{Re}\ a_k|+\delta_k)r}{|-\bar{a}_k+r+\delta_k|^2 \cdot |a_k+r|^2} + 3\frac{2|\mathrm{Re}\ a_k|\delta_k+\delta_k^2}{|-\bar{a}_k+r+\delta_k|^2 \cdot |a_k+r|^2}. \tag{3.154}$$

Із (3.146)

$$|\sigma_k^1| \leqslant C_\alpha \left(\frac{2r(2|\mathrm{Re}\ a_k| + \delta_k)}{(|a_k|^2+r^2)^2} + \frac{2|\mathrm{Re}\ a_k|\delta_k + \delta_k^2}{|a_k|^2 r^2}\right). \tag{3.155}$$

Міркуючи аналогічно, ми отримуємо із (3.153)

$$|\sigma_k^2| \leqslant C\left(\frac{2r\mu_k}{(|b_k|^2+r^2)^2} + \frac{\mathrm{Re}\ b_k\mu_k + \mu_k^2}{|b_k|^2 r^2}\right). \tag{3.156}$$

Використовуючи (3.138), (3.107), (3.118), (3.155) і (3.156), ми отримуємо (3.140) для $j=2$.

$$\left|(\log B(z))''\right|_{z=-r} \leqslant C\Big(\frac{1}{r^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{2r(2|\mathrm{Re}\ a_k|+\delta_k)}{(|a_k|^2+r^2)^2} + \sum_{b_k\in\Lambda_+}\frac{2\mu_k r}{(|b_k|^2+r^2)^2}\Big) \leqslant C_\alpha q(r), \quad r \geqslant 1. \tag{3.157}$$

Доведемо тепер (3.141) і (3.142). Підставляючи $z=-r+iy$, $a_k = -\alpha_k^* + i\beta_k^*$, $b_k = \alpha_k + i\beta_k$, $(r>0,\ \alpha_k>0, \alpha_k^*>0,\ \beta_k>0, \beta_k^*>0,\ y>0)$ в (3.137) і

(3.136), ми отримуємо

$$
\begin{gathered}
2\log\tfrac{|B(z)|}{B(-r)}=\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\log\tfrac{(r-\alpha_k^*)^2+(y-\beta_k^*)^2}{(r+\alpha_k^*+\delta_k)^2+(y-\beta_k^*)^2}- \\
\log\tfrac{(r-\alpha_k^*)^2+(\beta_k^*)^2}{(r+\alpha_k^*+\delta_k)^2+(\beta_k^*)^2}\Big)+ \\
\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\log\tfrac{(r-\alpha_k^*)^2+(y+\beta_k^*)^2}{(r+\alpha_k^*+\delta_k)^2+(y+\beta_k^*)^2}-\log\tfrac{(r-\alpha_k^*)^2+(\beta_k^*)^2}{(r+\alpha_k^*+\delta_k)^2+(\beta_k^*)^2}\Big)+ \\
\textstyle\sum_{b_k\in\Lambda_+}\Big(\log\tfrac{(r+\alpha_k)^2+(y-\beta_k)^2}{(r+\alpha_k+\mu_k)^2+(y-\beta_k)^2}-\log\tfrac{(r+\alpha_k)^2+\beta_k^2}{(r+\alpha_k+\mu_k)^2+\beta_k^2}\Big)+ \\
\textstyle\sum_{b_k\in\Lambda_+}\Big(\log\tfrac{(r+\alpha_k)^2+(y+\beta_k)^2}{(r+\alpha_k+\mu_k)^2+(y+\beta_k)^2}-\log\tfrac{(r+\alpha_k)^2+\beta_k^2}{(r+\alpha_k+\mu_k)^2+\beta_k^2}\Big)= \\
\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\log\tfrac{(r-\alpha_k^*)^2+(y-\beta_k^*)^2}{(r-\alpha_k^*)^2+(\beta_k^*)^2}-\log\tfrac{(r+\alpha_k^*+\delta_k)^2+(y-\beta_k^*)^2}{(r+\alpha_k^*+\delta_k)^2+(\beta_k^*)^2}\Big)+ \\
\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\log\tfrac{(r-\alpha_k^*)^2+(y+\beta_k^*)^2}{(r-\alpha_k^*)^2+(\beta_k^*)^2}-\log\tfrac{(r+\alpha_k^*+\delta_k)^2+(y+\beta_k^*)^2}{(r+\alpha_k^*+\delta_k)^2+(\beta_k^*)^2}\Big)+ \\
\textstyle\sum_{b_k\in\Lambda_+}\Big(\log\tfrac{(r+\alpha_k)^2+(y-\beta_k)^2}{(r+\alpha_k)^2+\beta_k^2}-\log\tfrac{(r+\alpha_k+\mu_k)^2+(y-\beta_k)^2}{(r+\alpha_k+\mu_k)^2+\beta_k^2}\Big)+ \\
\textstyle\sum_{b_k\in\Lambda_+}\Big(\log\tfrac{(r+\alpha_k)^2+(y+\beta_k)^2}{(r+\alpha_k)^2+\beta_k^2}-\log\tfrac{(r+\alpha_k+\mu_k)^2+(y+\beta_k)^2}{(r+\alpha_k+\mu_k)^2+\beta_k^2}\Big)=: \\
\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\gamma_k^{(1)}+\gamma_k^{(2)}\Big)+\sum_{b_k\in\Lambda_+}\Big(\gamma_k^{(3)}+\gamma_k^{(4)}\Big).
\end{gathered}
\tag{3.158}
$$

Ми отримуємо оцінки для $\gamma_k^{(j)}, j = 1, 2, 3, 4$ за допомогою наступних елементарних нерівностей:

$$\log(1-u)-\log(1-pu)\leqslant\tfrac{u}{pu-1}(1-p),\quad \text{для}\quad 0<u,\ p<1; \tag{3.159}$$

$$\log(1+u)-\log(1+pu)\leqslant\tfrac{u}{pu+1}(1-p),\ \text{для}\ u>0,\ 0<p<1. \tag{3.160}$$

Розглянемо $\gamma_k^{(1)}, \gamma_k^{(3)}$. Якщо $\beta > y/2$, то

$$0<\frac{2\beta y-y^2}{(r+\alpha)^2+\beta^2}=\frac{\beta^2-(y-\beta)^2}{(r+\alpha)^2+\beta^2}\leqslant\frac{\beta^2}{(r+\alpha)^2+\beta^2}<1, \tag{3.161}$$

і ми використовуємо (3.159) з

$$
\begin{gathered}
u_1=\tfrac{|y^2-2\beta_k^*y|}{(r-\alpha_k^*)^2+(\beta_k^*)^2},\quad p_1=\tfrac{(r-\alpha_k^*)^2+(\beta_k^*)^2}{(r+\alpha_k^*+\delta_k)^2+(\beta_k^*)^2}; \\
u_3=\tfrac{|y^2-2\beta_ky|}{(r+\alpha_k)^2+\beta_k^2},\quad p_3=\tfrac{(r+\alpha_k)^2+\beta_k^2}{(r+\alpha_k+\mu_k)^2+\beta_k^2}.
\end{gathered}
\tag{3.162}
$$

Якщо $\beta \leqslant y/2$, то $y^2 - 2\beta y \geqslant 0$, і ми використовуємо (3.160) з u_1, u_3 і p_1, p_3, визначеному в (3.163). В обох випадках ми отримуємо

$$
\begin{gathered}
\gamma_k^{(1)}\leqslant\tfrac{4\alpha_k^*r+2\delta_kr+2\delta_k\alpha_k^*+\delta_k^2}{(r-\alpha_k^*)^2+(\beta_k^*)^2}\cdot\tfrac{y^2-2\beta_k^*y}{(r+\alpha_k^*+\delta_k)^2+(y-\beta_k^*)^2}; \\
\gamma_k^{(3)}\leqslant\tfrac{2\mu_kr+2\mu_k\alpha_k+\mu_k^2}{(r+\alpha_k)^2+\beta_k^2}\cdot\tfrac{y^2-2\beta_ky}{(r+\alpha_k+\mu_k)^2+(y-\beta_k)^2}.
\end{gathered}
\tag{3.163}
$$

Для оцінки $\gamma_k^{(2)}, \gamma_k^{(4)}$, ми використовуємо (3.160) з

$$u_2 = \tfrac{2\beta_k^* y + y^2}{(r-\alpha_k^*)^2 + (\beta_k^*)^2}, \quad p_2 = p_1; \tag{3.164}$$
$$u_4 = \tfrac{2\beta_k y + y^2}{(r+\alpha_k)^2 + \beta_k^2}, \quad p_4 = p_3.$$

Ми отримуємо

$$\gamma_k^{(2)} \leqslant \tfrac{4\alpha_k^* r + 2\delta_k r + 2\delta_k \alpha_k^* + \delta_k^2}{(r-\alpha_k^*)^2 + (\beta_k^*)^2} \cdot \tfrac{y^2 + 2\beta_k^* y}{(r+\alpha_k^* + \delta_k)^2 + (y+\beta_k^*)^2}; \tag{3.165}$$
$$\gamma_k^{(4)} \leqslant \tfrac{2\mu_k r + 2\mu_k \alpha_k + \mu_k^2}{(r+\alpha_k)^2 + \beta_k^2} \cdot \tfrac{y^2 + 2\beta_k y}{(r+\alpha_k+\mu_k)^2 + (y+\beta_k)^2}.$$

Об'єднуючи (3.166), (3.164) і (3.158), ми отримуємо

$$\log \tfrac{|B(z)|}{B(-r)} \leqslant 2y^2 \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{4\alpha_k^* r + 2\delta_k r + 2\delta_k \alpha_k^* + \delta_k^2}{(r-\alpha_k^*)^2 + (\beta_k^*)^2} D(\alpha_k^*, \beta_k^*, \delta_k) + \tag{3.166}$$
$$2y^2 \textstyle\sum_{b_k \in \Lambda_+} \tfrac{2\mu_k r + 2\mu_k \alpha_k + \mu_k^2}{(r+\alpha_k)^2 + \beta_k^2} D(\alpha_k, \beta_k, \mu_k),$$

де

$$D(\alpha, \beta, \nu) := \tag{3.167}$$
$$\tfrac{(r+\alpha+\nu)^2 + y^2 - 3\beta^2}{[(r+\alpha+\nu)^2 + (y-\beta)^2][(r+\alpha+\nu)^2 + (y+\beta)^2]}.$$

Положимо

$$M_1 := \{k \in \mathbf{N} : (r + \alpha_k^* + \delta_k)^2 + y^2 - 3(\beta_k^*)^2 > 0\}, \tag{3.168}$$
$$M_2 := \{k : b_k \in \Lambda_+,\ (r + \alpha_k + \mu_k)^2 + y^2 - 3\beta_k^2 > 0\}.$$

Тоді (3.167) можна переписати у вигляді

$$\log \tfrac{|B(z)|}{B(-r)} \leqslant \tag{3.169}$$
$$2y^2 \textstyle\sum_{k \in M_1} \tfrac{4\alpha_k^* r + 2\delta_k r + 2\delta_k \alpha_k^* + \delta_k^2}{(r-\alpha_k^*)^2 + (\beta_k^*)^2} D(\alpha_k^*, \beta_k^*, \delta_k) +$$
$$2y^2 \textstyle\sum_{k \in M_2} \tfrac{2\mu_k r + 2\mu_k \alpha_k + \mu_k^2}{(r+\alpha_k)^2 + \beta_k^2} D(\alpha_k, \beta_k, \mu_k).$$

Далі нам потрібна наступна лема.

Лема 3.6.8. Для довільних додатних r, y, α, β, ν виконуються наступні оцінки

$$D(\alpha, \beta, \nu) \leqslant \frac{1}{r^2 + \alpha^2 + \beta^2}, \tag{3.170}$$

більш того, якщо $(r + \alpha + \nu)^2 + y^2 - 3\beta^2 > 0$, $1 \leqslant r \leqslant y/2$ і $\nu \leqslant \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{4}$, то

$$D(\alpha, \beta, \nu) \leqslant \frac{C}{y^2 + \alpha^2 + \beta^2}. \tag{3.171}$$

Доведення. Очевидно, що

$$(r^2+\alpha^2+\beta^2)D(\alpha,\beta,\nu) = \tag{3.172}$$
$$\tfrac{(r^2+\alpha^2+\beta^2)[(r+\alpha+\nu)^2+y^2-3\beta^2]}{[(r+\alpha+\nu)^2+(y-\beta)^2][(r+\alpha+\nu)^2+(y+\beta)^2]}.$$

Позначаючи $x := r+\alpha+\nu$, ми маємо

$$(r^2+\alpha^2+\beta^2)D(\alpha,\beta,\nu) \leqslant \frac{(x^2+\beta^2)(x^2+y^2-3\beta^2)}{[x^2+(y-\beta)^2][x^2+(y+\beta)^2]}. \tag{3.173}$$

Щоб отримати (3.170), достатньо показати, що

$$\frac{(x^2+\beta^2)(x^2+y^2-3\beta^2)}{[x^2+(y-\beta)^2][x^2+(y+\beta)^2]} \leqslant 1. \tag{3.174}$$

Ця нерівність еквівалентна до наступної

$$x^2(y^2+4\beta^2)+(y^2-\beta^2)^2-\beta^2(y^2-\beta^2)+2\beta^4 \geqslant 0. \tag{3.175}$$

Остання нерівність випливає з наступних розрахунків:

$$x^2(y^2+4\beta^2)+(y^2-\beta^2)^2-\beta^2(y^2-\beta^2)+2\beta^4 \geqslant \tag{3.176}$$
$$(y^2-\beta^2)^2-\beta^2(y^2-\beta^2)+2\beta^4 =$$
$$\beta^4\left(\left(\tfrac{y^2-\beta^2}{\beta^2}\right)^2-\tfrac{y^2-\beta^2}{\beta^2}+2\right)>0$$
$$\text{для усіх}\quad x>0,\ y>0,\ \beta>0.$$

Це завершує доведення (3.170).

Доведемо тепер (3.171). Якщо $\alpha > \beta/4, \beta \geqslant y/2$, то

$$D(\alpha,\beta,\nu) \leqslant \tfrac{3(r^2+\alpha^2+\nu^2)+y^2-\beta^2}{[(r+\alpha+\nu)^2+(y-\beta)^2][(r+\alpha+\nu)^2+(y+\beta)^2]} \leqslant \tag{3.177}$$
$$\tfrac{3}{\alpha^2} \leqslant \tfrac{C}{y^2+\alpha^2+\beta^2}.$$

Якщо $\alpha > \beta/4, \beta \leqslant y/2$, то

$$D(\alpha,\beta,\nu) \leqslant \tfrac{3(r^2+\alpha^2+\nu^2)+y^2-\beta^2}{[(r+\alpha+\nu)^2+(y-\beta)^2][(r+\alpha+\nu)^2+(y+\beta)^2]} \leqslant \tag{3.178}$$
$$\tfrac{3}{\alpha^2+y^2/4} \leqslant \tfrac{C}{y^2+\alpha^2+\beta^2}.$$

Якщо $\alpha \leqslant \beta/4$, то

$$(r+\alpha+\nu)^2+y^2-3\beta^2 \leqslant 3(r^2+\alpha^2+\nu^2)+y^2-3\beta^2 \leqslant \tag{3.179}$$
$$\tfrac{7}{4}y^2-\tfrac{21}{8}\beta^2 \leqslant 0,\ \beta \geqslant \sqrt{2/3}y.$$

Таким чином, якщо $(r+\alpha+\nu)^2+y^2-3\beta^2>0$, то $\beta<\sqrt{2/3}y$. З цього маємо

$$\frac{(y-\beta)^2}{y^2+\beta^2}=1-\frac{2(y/\beta)}{(y/\beta)^2+1}\geqslant 1-\frac{2\sqrt{3/2}}{5/2}=:K_1>0. \tag{3.180}$$

Таким чином,

$$\begin{gathered}\left[(r+\alpha+\nu)^2+(y+\beta)^2\right]\left[(r+\alpha+\nu)^2+(y-\beta)^2\right]\geqslant \\ \left[y^2+\alpha^2+\beta^2\right]\left[\alpha^2+(y-\beta)^2\right]\geqslant K_1(y^2+\alpha^2+\beta^2)^2.\end{gathered} \tag{3.181}$$

Ми отримали

$$\begin{gathered}D(\alpha,\beta,\nu)\leqslant \frac{(7/4)y^2-(21/8)\beta^2}{K_1(y^2+\beta^2)^2}\leqslant \\ C\frac{y^2}{(y^2+\beta^2)^2}\leqslant\frac{C}{y^2+\alpha^2+\beta^2}.\end{gathered} \tag{3.182}$$

Це завершує доведення (3.171), тому лема 3.6.8 доведена. □

Для завершення доведення (3.141) ми оцінимо (3.170) за допомогою (3.170). Тоді ми отримуємо (3.141) із наступних обчислень:

$$\begin{gathered}\log\frac{|B(z)|}{B(-r)}\leqslant y^2\sum_{k\in M_1}\frac{2r(2\alpha_k^*+\delta_k)}{(r^2+|a_k|^2)((r-\alpha_k^*)^2+(\beta_k^*)^2)}+ \\ y^2\sum_{k\in M_1}\frac{2\alpha_k^*\delta_k+\delta_k^2}{(r^2+|a_k|^2)((r-\alpha_k^*)^2+(\beta_k^*)^2)}+ \\ y^2\left(\sum_{k\in M_2}\frac{2\mu_k r}{(r^2+|b_k|^2)^2}+\sum_{k\in M_2}\frac{2\mu_k\alpha_k+\mu_k^2}{(r^2+|b_k|^2)^2}\right)\leqslant \\ C_\alpha y^2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2|\mathrm{Re}\ a_k|+\delta_k)r}{(r^2+|a_k|^2)^2}+\frac{1}{r^2}\right)+ \\ Cy^2\left(\sum_{b_k\in\Lambda_+}\frac{2\mu_k r}{(r^2+|b_k|^2)^2}+\frac{1}{r^2}\right)\leqslant C_\alpha y^2 q(r).\end{gathered} \tag{3.183}$$

Залишилося довести (3.142). Відмітимо, що з (3.108) і (3.119) ми можемо припустити, що $\delta_k/|a_k|\leqslant 1/4$, $\mu_k/|b_k|\leqslant 1/4$. Тобто, ми можемо використовувати (3.171) для оцінки (3.170). Ми отримуємо (3.142) із наступних обчислень:

$$\begin{gathered}\log\frac{|B(z)|}{B(-r)}\leqslant C_\alpha y^2\sum_{k\in M_1}\frac{\delta_k^2+|\mathrm{Re}\ a_k|\delta_k}{r^2+|a_k|^2}\cdot\frac{1}{y^2+|a_k|^2} \\ +C_\alpha y^2\sum_{k\in M_1}\frac{r(2|\mathrm{Re}\ a_k|\delta_k+\delta_k^2)}{r^2+|a_k|^2}\cdot\frac{1}{y^2+|a_k|^2}+ \\ Cy^2\left(\sum_{k\in M_2}\frac{\mu_k^2+\mathrm{Re}\ b_k\mu_k}{r^2+|b_k|^2}\cdot\frac{1}{y^2+|b_k|^2}+\sum_{k\in M_2}\frac{2\mu_k r}{r^2+|b_k|^2}\cdot\frac{1}{y^2+|b_k|^2}\right)\leqslant \\ C_\alpha y^2\left(\frac{1}{y^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2|\mathrm{Re}\ a_k|\delta_k+\delta_k^2}{|a_k|}\cdot\frac{1}{y^2+|a_k|^2}\right)+ \\ Cy^2\left(\frac{1}{y^2}+\sum_{b_k\in\Lambda_+}\frac{\mu_k}{|b_k|}\cdot\frac{1}{y^2+|b_k|^2}\right)\leqslant C_\alpha y^2 q(y).\end{gathered} \tag{3.184}$$

Лема 3.6.7 доведена. □

Теорема 3.6.5 є прямим наслідком наступного результату.

Теорема 3.6.9. ([122]). Нехай f є цілою функцією, визначеною за допомогою (3.134). Існує ціла функція φ без коренів, така що добуток $\psi_1(z) := f(z)\varphi(z)$ має представлення у вигляді

$$\psi_1(z) = \int_0^\infty e^{zx} p_1(x)dx, \tag{3.185}$$

де p_1 є дійсною неперервною функцією на $\mathbb{R}^+$, яка є додатною на деякому інтервалі $(0, x_1)$, $x_1 > 0$.

Нехай

$$\Delta(t) := \left(-\frac{q(t)}{t}\right)' t^2 = \frac{2+\beta}{t^{1+\beta}} +$$

$$\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{8(2|\mathrm{Re}\ a_k|+\delta_k)t^3}{(t^2+|a_k|^2)^3} + \frac{2|\mathrm{Re}\ a_k|+\delta_k}{|a_k|} \cdot \frac{1}{t^2+|a_k|^2} + \right. \tag{3.186}$$

$$\left. \frac{2|\ \mathrm{Re}\ a_k|+\delta_k}{|a_k|} \cdot \frac{2t^2}{(t^2+|a_k|^2)^2}\right) +$$

$$\sum_{b_k\in\Lambda_+} \left(\frac{8\mu_k t^3}{(t^2+|b_k|^2)^3} + \frac{\mu_k}{|b_k|} \cdot \frac{1}{t^2+|b_k|^2} + \right. \tag{3.187}$$

$$\left. \frac{\mu_k}{|b_k|} \cdot \frac{2t^2}{(t^2+|b_k|^2)^2}\right), \quad t \geqslant 1.$$

Лема 3.6.10. Функція Δ має наступні властивості:

1. $\Delta(t) > 0, \quad t \geqslant 1$;
2. $\int^\infty \Delta(t)dt < \infty$;
3. $\Delta(t)t \to 0$ при $t \to +\infty$;
4. $\Delta(t)t^3 \uparrow +\infty$ при $t \uparrow +\infty$;
5. $\Delta(t) \leqslant 4q(t), \quad t \geqslant 1$.

Лема 3.6.10 може бути доведена простими оцінками.

Положимо

$$h(z) := \int_0^A (e^{tz} - 1)\frac{\Delta(1/t)}{t^3}dt, \quad 0 < A \leqslant 1. \tag{3.188}$$

Із леми 3.6.10 (2), інтеграл в правій частині (3.188) є абсолютно збіжним і h є цілою функцією. Оскільки

$$h^{(k)}(x) > 0, \quad \forall k \in \mathbf{N} \bigcup \{0\},\ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{3.189}$$

функція h є цілою абсолютно монотонною функцією. Легко побачити, що

$$\mathrm{Re}\ h(x+iy) \leqslant h(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.190}$$

Нехай $\varphi_\alpha,\ \alpha \in (0,1)$, є цілою функцією, яка задана наступним чином

$$\varphi_\alpha(z) := \exp \int_0^1 (e^{zt} - 1) t^{-1-\alpha} dt. \tag{3.191}$$

Відмітимо, що $\log \varphi_\alpha$ є окремим випадком (3.188), який відповідає $\Delta = \Delta_\alpha = t^{\alpha-2},\ A = 1$.

Лема 3.6.11. Для фіксованого ω наступна асимптотична рівність виконується в півплощині $\mathbb{C}_\omega$:

$$\log \varphi_\alpha(z) = -C_\alpha |z|^\alpha e^{i\alpha(\arg z - \pi)} + O(1), \tag{3.192}$$

$$\pi/2 < \arg z < 3\pi/2, \quad |z| \to \infty, \tag{3.193}$$

де $C_\alpha > 0$ не залежить від z.

Доведення. Поклавши $z = \omega + \rho e^{i\theta},\ \pi/2 < \theta < 3\pi/2$, ми отримуємо (3.192) із наступних обчислень:

$$\begin{gathered} \log \varphi_\alpha(z) = \rho^\alpha \textstyle\int_0^\rho (e^{\omega t/\rho} \exp(e^{i\theta} t) - 1) t^{-1-\alpha} dt = \\ \rho^\alpha \textstyle\int_0^\infty (\exp(e^{i\theta} t) - 1) t^{-1-\alpha} dt - \\ \rho^\alpha \textstyle\int_\rho^\infty (\exp(e^{i\theta} t) - 1) t^{-1-\alpha} dt + \\ \rho^\alpha \textstyle\int_0^\rho \exp(e^{i\theta} t)(e^{\omega t/\rho} - 1) t^{-1-\alpha} dt = \\ \rho^\alpha e^{-\alpha(\pi-\theta)i} \textstyle\int_0^\infty (e^{-s} - 1) s^{-1-\alpha} ds + O(1), \quad \rho \to \infty. \end{gathered} \tag{3.194}$$

□

Покладемо

$$\begin{gathered} \psi_1(z) := f(z) \exp[M(h(z) - h(0))] \varphi_\alpha(z) = \\ B_2(z) V(z) e^{-\Phi(z)} \exp[M(h(z) - h(0))] \varphi_\alpha(z), \end{gathered} \tag{3.195}$$

де константа $M > 0$ буде обраною пізніше. Нехай

$$\varphi(z) := \exp[M(h(z) - h(0))]\varphi_\alpha(z). \tag{3.196}$$

Очевидно, φ є абсолютно монотонною функцією. Нехай

$$p_1(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\eta}\psi_1(i\eta)d\eta, \quad \eta \in \mathbb{R}. \tag{3.197}$$

Беручи до уваги обмеженість функції f в $\mathbb{C}_\omega$, $\forall\omega \in \mathbb{R}$, і (3.190), (3.192), ми бачимо, що інтеграл в правій частині (3.197) збігається абсолютно і рівномірно по відношенню до $x \in \mathbb{R}$. Використовуючи (3.190), (3.192), ми можемо перенести інтегрування в (3.197) на пряму $\{z : \mathrm{Im}\ z = \xi\}$, $\forall\xi \in \mathbb{R}$. Відмітимо, що

$$(\psi_1(x) \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\psi_1(\xi + i\eta) = \overline{\psi_1(\xi - i\eta)},\ \xi, \eta \in \mathbb{R}). \tag{3.198}$$

Ми маємо

$$p_1(x) = \frac{e^{-x\xi}\psi_1(\xi)}{2\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{Re}\ \left(e^{-ix\eta}\frac{\psi_1(\xi + i\eta)}{\psi_1(\xi)}\right) d\eta, \quad \forall\xi \in \mathbb{R}. \tag{3.199}$$

Звідки $p_1(x) \in \mathbb{R}$ для $x \in \mathbb{R}$ і

$$\mathrm{sign}\ p_1(x) = \mathrm{sign}\ \int_0^{\infty} \mathrm{Re}\ \left(e^{-ix\eta}\frac{\psi_1(\xi + i\eta)}{\psi_1(\xi)}\right) d\eta, \quad \forall\xi \in \mathbb{R}. \tag{3.200}$$

Використовуючи (3.190) і (3.192) і спрямовуючи $\xi \to -\infty$ в (3.199), ми приходимо до висновку, що $p_1(x) = 0$ для $x < 0$. Беручи достатньо велике додатне ξ в (3.199), ми отримуємо

$$p_1(x) = O(e^{-Cx}), \quad x \to +\infty,\ \forall C > 0. \tag{3.201}$$

Тобто, із формули обернення Фур'є,

$$\psi_1(z) = \int_0^{\infty} e^{xz}p_1(x)dx, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{3.202}$$

Ми хочемо показати, що $p_1(x) > 0$ на деякому інтервалі $(0, x_1)$, $x_1 > 0$. Для цього ми представимо інтеграл в правій частині (3.200) у вигляді

$$\left(\int_0^{\varepsilon_1} + \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} + \int_{\varepsilon_2}^{\infty}\right) \mathrm{Re}\ \left(e^{-ix\eta}\frac{\psi_1(\xi + i\eta)}{\psi_1(\xi)}\right) d\eta =: I_1 + I_2 + I_3, \tag{3.203}$$

де $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\xi)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\xi)$ будуть обрані пізніше.

Ми будемо оцінювати інтеграл I_1 знизу, а інтеграли $|I_2|$ і $|I_3|$ зверху, і хочемо показати, що $I_1 > 0$ і $I_1 > |I_2| + |I_3|$ для достатньо великого $|\xi|$.

Лема 3.6.12. Нехай

$$\theta(r) := q(r) + \int_r^\infty \frac{q(u)}{u} du. \tag{3.204}$$

Виконуються наступні оцінки

$$h^{'}(\xi) \geqslant \frac{2}{e} Q(|\xi|); \tag{3.205}$$

$$h^{''}(\xi) \geqslant \frac{1}{e} q(|\xi|); \tag{3.206}$$

$$h^{'}(\xi) \leqslant \int_{|\xi|}^\infty \Delta(u)du + C\Delta(|\xi|)|\xi|; \tag{3.207}$$

$$0 < h^{(j)}(\xi) \leqslant C\frac{j!}{|\xi|^{j-2}}\theta(|\xi|), \quad j = 2, 3, \ldots; \tag{3.208}$$

$$(\log \varphi_\alpha(\xi))^{'} \geqslant C|\xi|^{\alpha-1}; \tag{3.209}$$

$$(\log \varphi_\alpha(\xi))^{''} \geqslant C|\xi|^{\alpha-2}; \tag{3.210}$$

$$0 < \frac{d^j}{d\xi^j} \log \varphi_\alpha(\xi) \leqslant C\ j!|\xi|^{\alpha-j}, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{3.211}$$

де $\xi \leqslant \xi_0 < 0$.

Доведення. Диференціюючи (3.188), ми отримуємо для $|\xi| > 1/A$:

$$h^{'}(\xi) \geqslant \int_0^{1/|\xi|} e^{-t|\xi|} \frac{\Delta(1/t)}{t^2} dt \geqslant \frac{1}{e} \int_{|\xi|}^\infty \Delta(u)du. \tag{3.212}$$

Використовуючи (3.188) і (3.139), ми отримуємо (3.205).

Справедливість (3.206) є наслідком таких обчислень:

$$h^{''}(\xi) = \int_0^A e^{-t|\xi|} \tfrac{\Delta(1/t)}{t} dt \geqslant \int_0^{1/|\xi|} e^{-t|\xi|} \tfrac{\Delta(1/t)}{t} dt \geqslant \tag{3.213}$$

$$\tfrac{1}{e} \int_{|\xi|}^\infty \tfrac{\Delta(u)}{u} du = \tfrac{1}{e} \int_{|\xi|}^\infty \left(-\tfrac{q(u)}{u}\right)^{'} u du = \tfrac{1}{e}\theta(|\xi|) \geqslant$$

$$\tfrac{1}{e} q(|\xi|). \tag{3.214}$$

Із (3.188)

$$h^{(j)}(\xi) = \int_0^A e^{-t|\xi|} \Delta(1/t) t^{j-3} dt = \tag{3.215}$$

$$\left(\int_0^{1/|\xi|} + \int_{1/|\xi|}^A\right) e^{-t|\xi|} \Delta(1/t) t^{j-3} dt =:$$

$$L_j^1(\xi) + L_j^2(\xi), \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{3.216}$$

Як було відмічено в (3.189), $h^{(j)}(\xi) > 0,\ j = 1, 2, \ldots$. Далі,

$$L_j^1(\xi) \leqslant \int_0^{1/|\xi|} \Delta(1/t) t^{j-3} dt = \int_{|\xi|}^{\infty} \Delta(u) u^{1-j} du,\ j = 1, 2, \ldots, \quad (3.217)$$

$$L_1^1(\xi) \leqslant \int_{|\xi|}^{\infty} \Delta(u) du, \quad (3.218)$$

$$L_j^1(\xi) \leqslant \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{\Delta(u)}{u} \frac{du}{u^{j-2}} \leqslant \frac{1}{|\xi|^{j-2}} \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{\Delta(u)}{u} du, \quad j = 2, 3, \ldots. \quad (3.219)$$

Інтегруючи (3.219) частинами як в (3.214), ми отримуємо

$$L_j^1(\xi) \leqslant \frac{1}{|\xi|^{j-2}} \theta(|\xi|), \quad j = 2, 3, \ldots. \quad (3.220)$$

Використовуючи лему 3.6.10 (4), ми маємо

$$L_j^2(\xi) = \int_{1/|\xi|}^{A} e^{-t|\xi|} t^j \tfrac{\Delta(1/t)}{t^3} dt \leqslant \quad (3.221)$$

$$\Delta(|\xi|)|\xi|^3 \int_{1/|\xi|}^{A} e^{-t|\xi|} t^j dt \leqslant$$

$$\leqslant \Delta(|\xi|) \tfrac{j!}{|\xi|^{j-2}}, \quad j = 1, 2, \ldots. \quad (3.222)$$

Для $j = 1$ ми виводимо (3.207) з (3.218) і (3.222). Далі, для $j = 2, 3, \ldots$, з (3.220) і (3.222) випливає

$$h^{(j)}(\xi) \leqslant \frac{j!}{|\xi|^{j-2}} (\theta(|\xi|) + \Delta(|\xi|)). \quad (3.223)$$

Використовуючи лему 3.6.10 (5) і означення $\theta(r)$, ми отримуємо праву частину (3.208).

Оскільки $\log \varphi_\alpha(z)$ є окремим випадком (3.188) (для $\Delta(u) = \Delta_\alpha(u) = u^{\alpha-2},\ A = 1$), необхідні оцінки (3.209), (3.210), (3.211) є вірними. $\square$

Оскільки функція $\log(V(\xi+z)e^{-\Phi(\xi+z)})$ є аналітичною в колі $\{z : |z| < |\xi|/2\}$ для $\xi < 0$ і виконується (3.124), із нерівностей Коши отримуємо

$$\left| \frac{d^j}{d\xi^j} \log(V(\xi+z)e^{-\Phi(\xi+z)}) \right| \leqslant j! \frac{2^j}{|\xi|^j}. \quad (3.224)$$

Покладемо

$$b(\xi) := \log \psi_1(\xi) = \log B_2(\xi) + \log \varphi_\alpha(\xi) \quad (3.225)$$

$$+ M(h(\xi) - h(0)) + \log(V(\xi)e^{-\Phi(\xi)}).$$

Оскільки $f(\xi+z)\neq 0$ для $|z|<|\xi|,\ \xi<0$, ми маємо для $|\eta|<|\xi|/2$

$$\log\left\{e^{-ix\eta}\frac{\psi_1(\xi+i\eta)}{\psi_1(\xi)}\right\}=-ix\eta+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(i\eta)^j}{j!}b^{(j)}(\xi). \tag{3.226}$$

З (3.139),(3.205), (3.209) і (3.224),

$$b^{'}(\xi)=(\log B_2(\xi))^{'}+(\log\varphi_\alpha(\xi))^{'}+ \tag{3.227}$$
$$Mh^{'}(\xi)+\left[\log\left(V(\xi)e^{-\Phi(\xi)}\right)\right]^{'}\geqslant$$
$$-CQ(|\xi|)+C|\xi|^{\alpha-1}+\tfrac{2M}{e}Q(|\xi|)-\tfrac{2}{|\xi|}. \tag{3.228}$$

Далі ми будемо вважати, що M є достатньо великим. Тоді, для $|\xi|>1$,

$$b^{'}(\xi)\geqslant CQ(|\xi|)+C|\xi|^{\alpha-1}>0. \tag{3.229}$$

З іншого боку, з (3.139), (3.207), (3.211) і (3.224) випливає

$$b^{'}(\xi)\leqslant CQ(|\xi|)+C|\xi|^{\alpha-1}+\int_{|\xi|}^{\infty}\Delta(u)du+C\Delta(|\xi|)|\xi|+\frac{2}{|\xi|}. \tag{3.230}$$

Беручі до уваги лему 3.6.10 (2) і (3), ми робимо висновок, що

$$b^{'}(\xi)\to 0,\quad \text{коли}\quad \xi\to-\infty. \tag{3.231}$$

Більш того, з (3.140), (3.206), (3.210) і (3.224) випливає

$$b^{''}(\xi)=(\log B_2(\xi))^{''}+(\log\varphi_\alpha(\xi))^{''}+Mh^{''}(\xi)+$$
$$\left[\log\left(V(\xi)e^{-\Phi(\xi)}\right)\right]^{''}\geqslant -2Cq(|\xi|)+C|\xi|^{\alpha-2}+\tfrac{M}{e}q(|\xi|)-\tfrac{8}{|\xi|^2}. \tag{3.232}$$

Вважаючи, що M є достатньо великим, ми маємо

$$b^{''}(\xi)\geqslant 2Cq(|\xi|)+C|\xi|^{\alpha-2},\quad |\xi|\geqslant 1. \tag{3.233}$$

З (3.229), (3.231), (3.233) ми робимо висновок, що $b^{'}(\xi)\downarrow 0$ при $\xi\downarrow-\infty$. Тому рівняння

$$b^{'}(\xi)=x \tag{3.234}$$

має єдиний розв'язок $\xi(x)$ для кожного $x,\ 0\leqslant x\leqslant x_0$, такий що

$$\xi(x)\downarrow-\infty,\quad \text{при}\quad x\downarrow 0. \tag{3.235}$$

Підставляючи $\xi=\xi(x)$ в (3.226), ми маємо

$$\log\left\{e^{-ix\eta}\frac{\psi_1(\xi+i\eta)}{\psi_1(\xi)}\right\}=-\frac{b^{''}(\xi)}{2}\eta^2+\tau(\xi,\eta), \tag{3.236}$$

де

$$\tau(\xi,\eta) := \sum_{j=3}^{\infty} \frac{(i\eta)^j}{j!} b^{(j)}(\xi). \tag{3.237}$$

Із (3.140), (3.211), (3.208) і (3.224),

$$\begin{gathered}|b^{(j)}(\xi)| \leqslant |(\log B_2(\xi))^{(j)}| + (\log \varphi_\alpha(\xi))^{(j)} + \\ Mh^{(j)}(\xi) + \left|\left[\log(V(\xi)e^{-\Phi(\xi)})\right]^{(j)}\right| \leqslant \\ Cj!q(|\xi|)(C|\xi|)^{2-j} + Cj!|\xi|^{\alpha-j} + Cj!|\xi|^{2-j}\theta(|\xi|) + j!\tfrac{2^j}{|\xi|^j},\end{gathered} \tag{3.238}$$

звідки, використовуючи означення $\theta(r)$, ми отримуємо

$$|b^{(j)}(\xi)| \leqslant Cj!(\theta(|\xi|)|\xi|^2 + |\xi|^\alpha)\left(\frac{C}{|\xi|}\right)^j, \quad j = 2, 3, \ldots. \tag{3.239}$$

Для $|\eta| \leqslant |\xi|/4$, з (3.239) випливає

$$\begin{gathered}|\tau(\xi,\eta)| \leqslant C(\theta(|\xi|)|\xi|^2 + |\xi|^\alpha)\sum_{j=3}^{\infty}\left(\tfrac{C|\eta|}{|\xi|}\right)^j \leqslant \\ K\tfrac{\theta(|\xi|)+|\xi|^{\alpha-2}}{|\xi|}|\eta|^3, \ K > 0.\end{gathered} \tag{3.240}$$

Ми виберемо

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\xi) := \left(\frac{\pi}{3K} \cdot \frac{|\xi|}{\theta(|\xi|) + |\xi|^{\alpha-2}}\right)^{1/3}. \tag{3.241}$$

Тоді, для $|\eta| < \varepsilon_1$, виконується нерівність

$$|\tau(\xi,\eta)| \leqslant \frac{\pi}{3}. \tag{3.242}$$

Використовуючи це і (3.236), ми маємо

$$\begin{gathered}I_1 = \int_0^{\varepsilon_1} \exp\left\{-\tfrac{b''(\xi)}{2}\eta^2 + \mathrm{Re}\ \tau(\xi,\eta)\right\}\cos(\mathrm{Im}\ \tau(\xi,\eta))d\eta \geqslant \\ \tfrac{1}{2}e^{-\pi/3}\int_0^{\varepsilon_1}\exp\left(-\tfrac{b''(\xi)}{2}\eta^2\right)d\eta.\end{gathered} \tag{3.243}$$

Тобто, з (3.239), маємо

$$I_1 \geqslant \frac{1}{2}e^{-\pi/3}(\theta(|\xi|) + |\xi|^{\alpha-2})^{-1/2}\int_0^{(\theta(|\xi|)+|\xi|^{\alpha-2})^{1/2}\varepsilon_1} \exp(-Cu^2)du. \tag{3.244}$$

Відмітимо, що з (3.241) випливає

$$\begin{gathered}(\theta(|\xi|) + |\xi|^{\alpha-2})^{1/2}\varepsilon_1 = C|\xi|^{1/3}(\theta(|\xi|) + |\xi|^{\alpha-2})^{1/6} \geqslant \\ C|\xi|^{\alpha/6} \to \infty, \ \text{при } \xi \to -\infty.\end{gathered} \tag{3.245}$$

Таким чином, з (3.244) маємо

$$I_1 \geqslant C(\theta(|\xi|) + |\xi|^{\alpha-2})^{-1/2} \to \infty, \quad \text{при} \quad \xi \to -\infty. \tag{3.246}$$

Положимо

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\xi) = 2|\xi|. \tag{3.247}$$

Очевидно, що

$$\varepsilon_1(\xi) = O(|\xi|^{1-\alpha/3}) < \varepsilon_2(\xi) \tag{3.248}$$

для достатньо великих $|\xi|$. Ми маємо

$$|I_2| \leqslant \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \left|\tfrac{B_2(\xi+i\eta)}{B_2(\xi)}\right| \cdot \left|\tfrac{\varphi_\alpha(\xi+i\eta)}{\varphi_\alpha(\xi)}\right| \cdot \tag{3.249}$$
$$\left|\tfrac{V(\xi+i\eta)e^{-\Phi(\xi+i\eta)}}{V(\xi)e^{-\Phi(\xi)}}\right| \exp\{M(\mathrm{Re}\ h(\xi+i\eta) - h(\xi))\}d\eta.$$

Для достатньо великих $|\xi|$,

$$\mathrm{Re}\ h(\xi+i\eta) - h(\xi) = -2\int_0^A e^{-t|\xi|}\sin^2\tfrac{t\eta}{2}\Delta(\tfrac{1}{t})\tfrac{dt}{t^3} \leqslant \tag{3.250}$$
$$-2\int_0^{1/|\xi|} e^{-t|\xi|}\sin^2\tfrac{t\eta}{2}\Delta(\tfrac{1}{t})\tfrac{dt}{t^3}.$$

Оскільки $t\eta/2 \leqslant \eta/(2|\xi|) \leqslant 1 < \pi/2$ для $\eta \leqslant 2|\xi|$, ми маємо

$$\mathrm{Re}\ h(\xi+i\eta) - h(\xi) \leqslant -\frac{2}{e\pi^2}\eta^2\int_0^{1/|\xi|}\Delta(\frac{1}{t})\frac{dt}{t}. \tag{3.251}$$

Інтегруючи частинами як в (3.214), ми отримуємо

$$\mathrm{Re}\ h(\xi+i\eta) - h(\xi) \leqslant -\frac{2}{e\pi^2}\eta^2\theta(|\xi|). \tag{3.252}$$

Підставляючи $\Delta = \Delta_\alpha = u^{\alpha-2}$ в (3.251), ми маємо

$$\log|\varphi_\alpha(\xi+i\eta)| - \log\varphi_\alpha(\xi) \leqslant \tag{3.253}$$
$$-\tfrac{2}{e\pi^2}\eta^2\int_0^{1/|\xi|} t^{1-\alpha}dt = -\tfrac{2}{e\pi^2(2-\alpha)}\eta^2|\xi|^{\alpha-2}.$$

З (3.141), (3.252), (3.254), ми робимо висновок, що

$$\log|\psi_1(\xi+i\eta)| - \log\psi_1(\xi) = \tag{3.254}$$
$$(\log|B_2(\xi+i\eta)| - \log B_2(\xi)) +$$
$$(\log|\varphi_\alpha(\xi+i\eta)| - \log\varphi_\alpha(\xi)) +$$
$$M(\mathrm{Re}\ h(\xi+i\eta) - h(\xi)) + [\log\left|V(\xi+i\eta)e^{-\Phi(\xi+i\eta)}\right| -$$
$$\log\left(V(\xi)e^{-\Phi(\xi)}\right)] \leqslant Cq(|\xi|)\eta^2 - \tfrac{2}{e\pi^2(2-\alpha)}\eta^2|\xi|^{\alpha-2} -$$
$$\tfrac{2}{e\pi^2}M\eta^2\theta(|\xi|) + C.$$

Якщо M є достатньо великим, ми отримуємо

$$\log|\psi_1(\xi+i\eta)| - \log\psi_1(\xi) \leqslant -C(\theta(|\xi|)+|\xi|^{\alpha-2})\eta^2 + C. \tag{3.255}$$

Оскільки $\eta \geqslant \varepsilon_1$, з (3.241) випливає

$$\begin{gathered}\log|\psi_1(\xi+i\eta)| - \log\psi_1(\xi) \leqslant -C(\theta(|\xi|)+|\xi|^{\alpha-2})\varepsilon_1^2 + C \leqslant \\ -C|\xi|^{2/3}(\theta(|\xi|)+|\xi|^{\alpha-2})^{1/3} + C = \\ -C(\theta(|\xi|)|\xi|^2+|\xi|^{\alpha})^{1/3} + C.\end{gathered} \tag{3.256}$$

Тобто,

$$|I_2| \leqslant C|\xi|\exp[-C(\theta(|\xi|)|\xi|^2+|\xi|^{\alpha})^{1/3}] \to 0, \quad \text{при} \quad \xi\to-\infty. \tag{3.257}$$

Ми маємо

$$\begin{gathered}|I_3| \leqslant \int_{\varepsilon_2}^{\infty}\left|\tfrac{B_2(\xi+i\eta)}{B_2(\xi)}\right|\cdot\left|\tfrac{\varphi_\alpha(\xi+i\eta)}{\varphi_\alpha(\xi)}\right|\cdot \\ \left|\tfrac{V(\xi+i\eta)e^{-\Phi(\xi+i\eta)}}{V(\xi)e^{-\Phi(\xi)}}\right|\exp\{M(\mathrm{Re}\ h(\xi+i\eta)-h(\xi))\}d\eta.\end{gathered} \tag{3.258}$$

Для $|\xi| > 1/(2A)$, ми маємо $\eta \geqslant 2|\xi| \geqslant 1/A$, тобто

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\ h(\xi+i\eta)-h(\xi) = -2\int_0^A e^{-t|\xi|}\sin^2\tfrac{t\eta}{2}\Delta(\tfrac{1}{t})\tfrac{dt}{t} \leqslant \\ -2\int_0^{1/\eta} e^{-t|\xi|}\sin^2\tfrac{t\eta}{2}\Delta(\tfrac{1}{t})\tfrac{dt}{t^3}.\end{gathered} \tag{3.259}$$

Оскільки $t\eta/2 \leqslant 1/2 < \pi/2$ для $0 \leqslant t \leqslant 1/2$,

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\ h(\xi+i\eta)-h(\xi) \leqslant -\tfrac{2\eta^2}{\pi^2}e^{-|\xi|/\eta}\int_0^{1/\eta}\Delta(\tfrac{1}{t})\tfrac{dt}{t} \\ \leqslant -\tfrac{2\eta^2}{\pi^2\sqrt{e}}\int_\eta^\infty\Delta(u)\tfrac{du}{u}.\end{gathered} \tag{3.260}$$

Інтегруючи частинами, як в (3.214), ми отримуємо

$$\mathrm{Re}\ h(\xi+i\eta)-h(\xi) \leqslant -\frac{2}{\pi^2\sqrt{e}}\theta(\eta)\eta^2. \tag{3.261}$$

Оскільки $|\xi| < \eta/2$, ми робимо висновок з (3.142), що

$$\log|B_2(\xi+i\eta)| - \log B_2(\xi) \leqslant Cq(\eta)\eta^2 \leqslant C\theta(\eta)\eta^2, \quad 1 \leqslant |\xi| < \frac{\eta}{2}. \tag{3.262}$$

Використовуючи (3.259), (3.261), (3.124) і нерівність

$$|\varphi_\alpha(\xi+i\eta)| \leqslant \varphi_\alpha(\xi) \tag{3.263}$$

(яка є окремим випадком (3.190)), ми маємо

$$\left|\frac{\psi_1(\xi+i\eta)}{\psi_1(\xi)}\right| = \left|\frac{B_2(\xi+i\eta)}{B_2(\xi)}\right| \cdot \left|\frac{\varphi_\alpha(\xi+i\eta)}{\varphi_\alpha(\xi)}\right| \cdot \left|\frac{V(\xi+i\eta)e^{-\Phi(\xi+i\eta)}}{V(\xi)e^{-\Phi(\xi)}}\right| \cdot \\ \exp\{M(\mathrm{Re}\, h(\xi+i\eta)-h(\xi))\} \leqslant \\ C\exp\left\{C\theta(\eta)\eta^2 - \frac{2M}{\pi^2\sqrt{e}}\theta(\eta)\eta^2\right\}, \quad 2|\xi|<\eta<\infty. \tag{3.264}$$

Якщо M є достатньо великим, використовуючи (3.204), (3.138), ми отримуємо

$$\left|\frac{\psi_1(\xi+i\eta)}{\psi_1(\xi)}\right| \leqslant C\exp(-C\theta(\eta)\eta^2) \leqslant \\ C\exp(-Cq(\eta)\eta^2) \leqslant C\exp(-C\eta^{1-\beta}). \tag{3.265}$$

Таким чином,

$$|I_3| \leqslant C\int_{2|\xi|}^{\infty} \exp(-C\eta^{1-\beta})d\eta \to 0, \quad \text{при} \quad |\xi|\to\infty. \tag{3.266}$$

Підставляючи (3.246), (3.257), (3.266) в (3.203), ми робимо висновок, що

$$\int_0^\infty \mathrm{Re}\, \left(e^{-ix\eta}\frac{\psi_1(\xi+i\eta)}{\psi_1(\xi)}\right) d\eta > 0, \quad \text{для} \quad \xi \leqslant \xi_0 < 0. \tag{3.267}$$

Таким чином, з (3.200) і (3.235) випливає, що $p_1(x) > 0$ для $0 < x < x_0$. □

Висновки до розділу 3

Цей розділ присвячений різним видам додатності. Ми розглядаємо конус многочленів з додатними коефіцієнтами, які є невід'ємними на всій дійсній осі, і знаходимо крайні напрямки цього нормального конусу. Ми також даємо повний опис діагональних в стандартному мономіальному базисі лінійних операторів, що вони зберігають вказаний конус. Ми вивчаємо диференціальні оператори скінченого порядку з поліноміальними коефіцієнтами, які зберігають множину невід'ємних многочленів зі степенем не більшим за задане число. Ми досліджуємо множину перетворень Фур'є додатних скінчених Борелевських мір на дійсній півосі, так званих абсолютно монотонних функцій. Ми отримуємо нову необхідну умову для нульових множин абсолютно монотонних функцій. Ми описуємо нульові множини цілих абсолютно монотонних функцій, якщо ці множини не перетинають деякий кут, який містить від'ємну дійсну піввісь. Крім того, ми знаходимо характеризацію нульових множин цілих функцій, які є обмеженими в кожній "лівій" півплощині, яка містить мниму вісь. Ми отримуємо також неперервний аналог теореми М. Фекете і Дж. Поліа.

До основних результатів розділу відносяться:

– Теорема 3.1.1, яка дає просту достатню умову для того, щоб многочлен парного степеня з додатними коефіцієнтами був додатним на всій дійсній осі.

– Теорема 3.2.5, яка дає опис крайніх напрямків конусу многочленів з додатними коефіцієнтами, які є невід'ємними на всій дійсній осі і мають степінь не більше за задане число.

– Теорема 3.2.9, яка дає характеризацію діагональних в стандартному мономіальному базисі лінійних операторів, що вони зберігають конус многочленів з додатними коефіцієнтами, які є невід'ємними на всій дійсній осі.

– Теореми 3.3.6 і 3.3.8, які дають опис диференціальних операторів скінченого порядку з поліноміальними коефіцієнтами, що вони зберігають множину невід'ємних многочленів зі степенем не більшим за задане число.

– Теорема 3.4.3, яка дає нову необхідну умову для нульових множин абсолютно монотонних функцій в лівій комплексній півплощині.

– Теорема 3.6.2, яка дає опис нульових множин цілих функцій, які є обмеженими в кожній півплощини вигляду $\{z : \operatorname{Re} z \leqslant w\}$.

– Теорема 3.5.3, яка демонструє, що кожну неперервну щільність на півосі, яка є додатною в кінцях носія, можна згорнути зі спеціальною мірою (мірою Пуассона) так, що згортка є невід'ємною мірою.

– Теорема 3.6.4, яка дає характеризацію нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, якщо ці множини не перетинають деякий кут $\{z : |\arg z - \pi| < \alpha\}$ для $\alpha > 0$.

РОЗДІЛ 4

МНОГОЧЛЕНИ З УСІМА ДІЙСНИМИ КОРЕНЯМИ І ЦІЛІ ФУНКЦІЇ КЛАСУ ЛАҐЕРРА-ПОЛІА

4.1 Часткова тета-функція

Розподіл коренів цілих функцій, а також відрізків і залишків їх рядів Тейлора, вивчалися багатьма авторами, дивись, наприклад, чудовий огляд цієї тематики в роботі І.В.Островського [175].

Спершу нам потрібні означення класу гіперболічних многочленів, а також знаменитого класу цілих функцій Лаґерра-Поліа.

Означення 4.1.1. Многочлен з дійсними коефіцієнтами називається гіперболічним, якщо усі його корені є дійсними числами. Множина гіперболічних многочленів позначається $\mathcal{HP}$. Для зручності формулювання теорем ми (як це загальноприйнято) будемо вважати, що тотожно нульовий многочлен є гіперболічним.

Означення 4.1.2. Ціла функція f з дійсними коефіцієнтами називається функцією класу Лаґерра-Поліа, позначається $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$, якщо її можна представити у вигляді

$$f(x) = cx^n e^{-\alpha x^2 + \beta x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{x_k}\right) e^{\frac{x}{x_k}}, \tag{4.1}$$

де $c, \alpha, \beta, x_k \in \mathbb{R}$, $x_k \neq 0$, $\alpha \geqslant 0$, n є невід'ємним цілим числом і $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^{-2} < \infty$. Як зазвичай, добуток в правій частині цього представлення може бути скінченим або навіть порожнім (в останньому випадку за означенням добуток дорівнює одиниці).

Цей клас є важливим в теорії цілих функцій у зв'язку з тим, що функції цього класу, і тільки вони, є рівномірними на компактах у площині границями дійсних многочленів з усіма дійсними коренями. Наступна визначна теорема Е.Лаґерра і Дж.Поліа стверджує навіть більш загальний факт.

Теорема 4.1.3. (Е.Лаґерр і Дж.Поліа, дивись, наприклад, [99, с. 42-46]). (i) Нехай $(P_n)_{n=1}^{\infty}$, $P_n(0) = 1$, є послідовністю дійсних многочленів з усіма дійсними коренями, і ця послідовність рівномірно збігається в деякому колі $|z| \leqslant A, A > 0$. Тоді ця послідовність збігається рівномірно на компактах у площині до цілої функції із класу $\mathcal{L} - \mathcal{P}$.

(ii) Для кожної $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$ існує послідовність дійсних многочленів з усіма дійсними коренями, яка збігається рівномірно на компактах у площині до функції f.

Означення 4.1.4. Ціла функція f з дійсними коефіцієнтами називається функцією класу Лаґерра-Поліа типу I, позначається $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}I$, якщо її можна представити у вигляді

$$f(x) = cx^n e^{\beta x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{x_k}\right), \tag{4.2}$$

де $c \in \mathbb{R}, \beta \geqslant 0, x_k > 0$, n є невід'ємним цілим числом і $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^{-1} < \infty$.

Теорема Е.Лаґерра і Дж.Поліа (дивись, наприклад, [161, глава VIII, §3]) стверджує, що функції класу $\mathcal{L} - \mathcal{P}I$, і тільки вони, є рівномірними на компактах у площині границями дійсних многочленів з усіма дійсними недодатними коренями. Насправді, виконується навіть більш сильний результат.

Теорема 4.1.5. (Е.Лаґерр і Дж.Поліа, дивись, наприклад, [161, глава VIII, §3]). (i) Нехай $(P_n)_{n=1}^{\infty}$, $P_n(0) = 1$, є послідовністю дійсних многочленів з усіма дійсними недодатними коренями, і ця послідовність рівномірно збігається в деякому колі $|z| \leqslant A, A > 0$. Тоді ця послідовність збігається рівномірно на компактах у площині до цілої функції із класу $\mathcal{L} - \mathcal{P}I$.

(ii) Для кожної $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}I$ існує послідовність дійсних многочленів з усіма дійсними недодатними коренями, яка збігається рівномірно на компактах у площині до функції f.

Щодо різноманітних цікавих властивостей функцій класів Лаґерра-Поліа і Лаґерра-Поліа типу I, а також різних еквівалентних характерізацій цих класів, дивись збірку праць Дж.Поліа [186, с. 100], роботу Дж.Поліа і І.Шура [190] або монографію Н.Обрешкова [173, глава II].

Відзначимо, що для дійсної цілої функції (що не є тотожно нульовою) порядку зростання менше за 2 наступні умови є еквівалентними: мати усі дійсні корені і належати до класу Лаґерра-Поліа. Ситуація змінюється для цілих функцій порядку 2. Наприклад, ціла функція $f_1(x) = e^{-x^2}$ належить до класу Лаґерра-Поліа, а ціла функція $f_2(x) = e^{x^2}$ не належить до цього класу.

Нехай $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ є цілою функцією з додатними коефіцієнтами. Ми визначимо перші і другі відношення коефіцієнтів Тейлора функції f, p_n і q_n, наступним чином:

$$\begin{gathered} p_n = p_n(f) := \tfrac{a_{n-1}}{a_n},\ n \geqslant 1; \\ q_n = q_n(f) := \tfrac{p_n}{p_{n-1}} = \tfrac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}a_n},\ n \geqslant 2. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Наступні формули легко перевірити прямим обчисленням:

$$\begin{gathered} a_n = \tfrac{a_0}{p_1 p_2 \dots p_n},\ n \geqslant 1\ ; \\ a_n = \tfrac{a_1}{q_2^{n-1} q_3^{n-2} \dots q_{n-1}^2 q_n} \left(\tfrac{a_1}{a_0}\right)^{n-1},\ n \geqslant 2. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Дослідження того факту, що дана ціла функція має тільки дійсні корені, є дуже складною і тонкою проблемою. Ми нагадаємо цитовану в першому розділі теорему 1.1.12 Хатчинсона, яка дає просту достатню умову для того, щоб функція мала усі дійсні корені. Деякі узагальнення теореми 1.1.12 можна знайти в роботі Т.Кравена і Дж.Ксордаша [56, §4].

Ми введемо ще поняття $\mathcal{CZDS}$-послідовності, тобто послідовності, яка зменшує число недійсних коренів дійсного многочлена. Для дійсного многочлена P ми позначаємо через $Z_c(P)$ число недійсних коренів P із урахуванням кратностей.

Означення 4.1.6. Дійсна послідовність $(\gamma_k)_{k=0}^{\infty}$ називається $\mathcal{CZDS}$-послідовністю (від англійського “complex zero decreasing sequence”; позначається $(\gamma_k)_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{CZDS}$), якщо

$$Z_c\left(\sum_{k=0}^{n} \gamma_k a_k z^k\right) \leqslant Z_c\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right) \tag{4.5}$$

для довільного дійсного многочлена $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

Існування нетривіальних $\mathcal{CZDS}$-послідовностей є наслідком наступної визначної теореми, доведеної Е.Лаґерром і узагальненої Дж.Поліа.

Теорема 4.1.7. (Е.Лаґерр і Дж.Поліа, дивись, наприклад, [189] або [186, с. 314-321]). Нехай f є цілою функцією класу Лаґерра-Поліа з усіма від'ємними кореням. Тоді $(f(k))_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{CZDS}$.

Наслідком цієї теореми є, наприклад, такі твердження, які ми будемо неодноразово використовувати в подальшому:

$$\left(b^{-k^2}\right)_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{CZDS},\ b \geqslant 1, \quad \left(\frac{1}{k!}\right)_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{CZDS}. \tag{4.6}$$

В цьому розділі ми будемо досліджувати належність до класу Лаґерра-Поліа так званої часткової тета-функції, а саме цілої функції

$$g_a(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^{k^2}},\ a > 1, \tag{4.7}$$

яка має наступну цікаву властивість:

$$q_n(g_a) = a^2 \quad \text{для усіх} \quad n \geqslant 2.$$

Зазначимо, що "старша сестра" часткової тета-функції: класична тета-функція Якобі, –

$$\theta_3\left(z, \frac{1}{a}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^k}{a^{k^2}}, \quad |a| > 1,$$

є добре відомою і відіграє значну роль в комплексному аналізі (дивись, наприклад, книгу Е.Т.Вітакера [234]). Тета-функція Якобі задовольняє багато чудових тотожностей, серед них (мабуть, найбільш відома) потрійний добуток Якобі

$$\theta_3\left(z, \frac{1}{a}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{a^{2k-1}}\right)\left(1 + \frac{1}{za^{2k-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{a^{2k}}\right).$$

Часткова тета-функція має багату історію досліджень. Уся наведена нижче історія дослідження часткової тета-функції була повідомлена нам відомим дослідником часткової тета-функції та інших важливих спеціальних функцій С.О.Варнааром (приватне повідомлення). Як повідомляє С.О.Варнаар, мабуть, вперше часткова тета-функція з'являється (не під цим ім'ям) в 1844 році в двох роботах Дж.Еізенштейна (дивись [72] і [73]). В цих роботах Дж.Еізенштейн досліджує представлення часткової тета-функції ланцюговим дробом, з якого отримує ірраціональність деяких спеціальних чисел. Двома роками пізніше Е.Гейне [97] перевідкриває представлення цієї функції ланцюговим дробом, а також представляє ланцюговими дробами деякі гіпергеометричні функції. У 1915 році результати Дж.Еізенштейна про ірраціональність спеціальних чисел були посилені в сумісній роботі Ф.Берштейна і О.Сатца ([26]), а пізніше ще в одній в роботі О.Сатца ([209]). Невдовзі після цього Л.Шакалов (дивись [214] і [215]) дослідив не тільки ірраціональність, але лінійну незалежність над $\mathbb{Q}$ тих самих чисел. Крім того, Л.Шакалов вперше відзначив функціональне рівняння для часткової тета-функції: $g_a(az) = 1 + g_a\left(\frac{z}{a}\right)$. Пізніше часткова тета-функція неодноразово з'являється в роботах С.Рамануджана. У "втраченому записнику" Рамануджана є багато красивих тотожностей з частковою тета-функцією. Саму назву "часткова тета-функція" (англійською "partial theta-function") дав цієї функції Дж.Андрюс в відомих роботах [16] і [17] (дивись також роботу С.О.Варнаара [233]).

На наш погляд, цікавою є історія досліджень розташування коренів часткової тета-функції. В роботі ([95], с. 95-100) Ґ.Гарді довів, що часткова тета-функція g_a має тільки дійсні корені, якщо $a^2 \geqslant 9$. В задачнику Дж.Поліа і Г.Сеге ([191], задача 176, с. 66) доведено, що часткова тета-функція має тільки дійсні корені, якщо $a^2 \geqslant 4$ (без посилання на теорему Хатчинсона 1.1.12, яка цитується в розділі 1, і з якої цей результат одразу випливає). В цьому розділі ми дамо точну відповідь на питання: для яких a часткова тета-функція g_a має тільки дійсні корені? Головним результатом цього розділу є наступна теорема.

Теорема 4.1.8. ([121]). Існує константа q_∞ ($q_\infty \approx 3.233636665$), така що:

1. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ відрізок ряду $S_n(z, g_a) := \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{a^{j^2}}$ має усі дійсні корені $\Leftrightarrow$ існує точка $x_n \in (a; a^3)$, така що $S_n(-x_n, g_a) \leqslant 0$.
2. Функція $g_a(z)$ належить до класу $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ (тобто має усі дійсні корені) $\Leftrightarrow$ існує точка $x_0 \in (a; a^3)$, така що $g_a(-x_0) \leqslant 0$.
3. Для усіх $k \in \mathbb{N}$ усі непарні відрізки ряду $S_{2k+1}(z, g_a) := \sum_{j=0}^{2k+1} \frac{z^j}{a^{j^2}}$ належать до класу $\mathcal{L} - \mathcal{P} \ \Leftrightarrow\ a^2 \geqslant q_\infty$;
4. Існує таке $N_0 \in \mathbb{N}$, що для усіх $k \geqslant N_0$ парні відрізки ряду $S_{2k}(z, g_a) := \sum_{j=0}^{2k} \frac{z^j}{a^{j^2}}$ належать до класу $\mathcal{L} - \mathcal{P} \ \Leftrightarrow\ a^2 > q_\infty$;
5. Функція $g_a(z)$ належить до класу $\mathcal{L} - \mathcal{P} \Leftrightarrow\ a^2 \geqslant q_\infty$.

Чудова робота ([152]) В.П.Костова і Б.Шапіро, серед інших важливих і глибоких результатів, пояснює ту важливу роль, яку відіграє константа q_∞ при вивченні множини цілих функцій з додатними коефіцієнтами Тейлора, у яких усі відрізки ряду Тейлора мають тільки дійсні корені. А саме, В.П.Костов і Б.Шапіро доводять, зокрема, таку теорему.

Теорема 4.1.9. (В.П.Костов і Б.Шапіро, [152]). Нехай $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ є цілою функцією з додатними коефіцієнтами, і нехай існує таке $N_0 \in \mathbb{N}$, що для усіх $n \geqslant N_0$ виконується $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathcal{HP}$. Тоді $\liminf_{n\to\infty} q_n(f) \geqslant q_\infty$.

Тепер ми будемо доводити теорему 4.1.8.

Доведення. Позначимо через

$$f_a(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{a^{k^2}},\ a > 1, \tag{4.8}$$

і

$$S_n(z, a) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k z^k}{a^{k^2}},\ a > 1. \tag{4.9}$$

Ми будемо досліджувати розташування коренів многочленів $S_n(z,a)$. Для доведення теореми 4.1.8 нам потрібно декілька лем.

Лема 4.1.10. Для усіх $a^2 \geqslant 3$ виконується наступна нерівність

$$|S_4(a^3 e^{i\varphi}, a)| \geqslant a^{-4}, \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{4.10}$$

Доведення. Ми маємо

$$S_4(a^3 e^{i\varphi}, a) = 1 - a^2 e^{i\varphi} + a^2 e^{2i\varphi} - e^{3i\varphi} + a^{-4} e^{4i\varphi} = \tag{4.11}$$
$$-ie^{3i\varphi/2}\left((2\sin(3\varphi/2) - 2a^2\sin(\varphi/2)) + ia^{-4}e^{5i\varphi/2}\right),$$

звідки

$$|S_4(a^3 e^{i\varphi}, a)|^2 = 4\left(\sin(3\varphi/2) - a^2\sin(\varphi/2)\right)^2 - \tag{4.12}$$
$$4a^{-4}\sin(5\varphi/2)\left(\sin(3\varphi/2) - a^2\sin(\varphi/2)\right) + a^{-8}.$$

Після простих перетворень отримуємо

$$|S_4(a^3 e^{i\varphi}, a)|^2 = 4\sin^2(\varphi/2)\left((a^2-3) + 4\sin^2(\varphi/2)\right)^2 + \tag{4.13}$$
$$4a^{-4}\sin(5\varphi/2)\sin(\varphi/2)\left((a^2-3) + 4\sin^2(\varphi/2)\right) + a^{-8}.$$

Для $a^2 \geqslant 3$ і $\varphi \in [0, 2\pi]$ (4.10) є наслідком нерівності

$$\sin(\varphi/2)\left((a^2-3) + 4\sin^2(\varphi/2)\right) + a^{-4}\sin(5\varphi/2) \geqslant 0.$$

Остання нерівність випливає з

$$4a^4 \sin^3 \varphi/2 + \sin(5\varphi/2) \geqslant 0 \tag{4.14}$$

для $\varphi \in [0, 2\pi]$. Якщо $\varphi \in [0, 2\pi/5] \cup [8\pi/5, 2\pi]$, то $\sin(5\varphi/2) \geqslant 0$ і (4.14) виконується. Якщо $\varphi \in [2\pi/5, 8\pi/5]$, то (4.14) випливає з

$$4a^4 \sin^3 \pi/5 - 1 \geqslant 0,$$

що є вірним, оскільки $\sin^3 \pi/5 \geqslant \sin^3 \pi/6 = 1/8$. □

Лема 4.1.11. Якщо $a^2 \geqslant 3$, то многочлен $S_4(z,a)$ має точно два корені в колі $\{z : |z| < a^3\}$ і не має коренів на окружності $\{z : |z| = a^3\}$.

Доведення. Позначимо $P_a(t) := S_4(a^4t, a) = 1 - a^3t + a^4t^2 - a^3t^3 + t^4$. Ми збираємося показати, що $P_a(t)$ має точно два корені в колі $\{t : |t| < a^{-1}\}$ (і має точно два корені в замкненому колі $\{t : |t| \leqslant a^{-1}\}$). Позначимо $w(t) := t + t^{-1}$. Функція $w(t)$ конформно відбиває коло $\{t : |t| < a^{-1}\}$ на деяку область Ω, таку що $\{w : |w| > a + a^{-1}\} \subset \Omega$. Ми маємо $P_a(t) = t^2(w^2 - 2 - a^3w + a^4)$. Покажемо, що многочлен $Q_a(w) := (w^2 - 2 - a^3w + a^4)$ має точно два корені в області $\{w : |w| > a + a^{-1}\}$. Позначимо через w_1, w_2 - корені многочлена $Q_a(z)$, а через D - дискримінант многочлена $Q_a(z)$. Якщо $D \leqslant 0$, то ми маємо $|w_j| \geqslant \operatorname{Re} w_j = \frac{a^3}{2} \geqslant \frac{3a}{2} > a + a^{-1}$ для $j = 1, 2$. Якщо $D > 0$, то ми маємо

$$|w_j| \geqslant \frac{a^3 - \sqrt{a^6 - 4a^4 + 8}}{2} > a + a^{-1}, \quad j = 1, 2.$$

Тобто, для $a^2 \geqslant 3$ многочлен $Q_a(w)$ має точно два корені в області $\{w : |w| > a + a^{-1}\}$. Оскільки $\deg Q_a = 2$, ми маємо, що $Q_a(w)$ має точно два корені в області Ω і має точно два корені в замкненні Ω. Звідки многочлен $P_a(t)$ має точно два корені в колі $\{t : |t| < a^{-1}\}$ і не має коренів на границі цього кола. $\square$

Припустимо, що $a^2 \geqslant 3$ і $n \geqslant 5$. Ми маємо $S_n(z, a) =: S_4(z, a) + R_n(z, a)$. Легко перевірити, що

$$|R_n(a^3, a)| \leqslant \sum_{k=5}^{n} \frac{a^{3k}}{a^{k^2}} \leqslant a^{-10} \sum_{k=0}^{\infty} a^{-8k} = \frac{1}{a^2(a^8 - 1)}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{a^4} > \frac{1}{a^2(a^8 - 1)},$$

ми отримуємо з леми 4.1.10 і теореми Руше, що для $a^2 \geqslant 3$ і $n \geqslant 5$ число коренів многочлена $S_n(z, a)$ в колі $\{z : |z| < a^3\}$ (і в колі $\{z : |z| \leqslant a^3\}$ дорівнює числу коренів многочлена $S_4(z, a)$ в колі $\{z : |z| < a^3\}$ (і в $\{z : |z| \leqslant a^3\}$. Користуючись лемою 4.1.11, ми отримуємо, що для $a^2 \geqslant 3$ і $n \geqslant 4$ многочлен $S_n(z, a)$ має в колі $\{z : |z| < a^3\}$ (і в замкненому колі $\{z : |z| \leqslant a^3\}$) точно два корені.

Лема 4.1.12. Якщо $n \geqslant 4$, $a^2 \geqslant 2.25$, то $S_n(z,a)$ має $n-4$ кореня на відрізку $[a^4, a^{2n-4}]$.

Доведення. Ми маємо для $2 \leqslant k \leqslant n-2$:

$$\begin{gathered}(-1)^k S_n(a^{2k}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-k} \frac{a^{2kj}}{a^{j^2}} = \\ a^{k^2} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-k} a^{-(j-k)^2} \geqslant \\ a^{k^2}[1 - 2a^{-1} + 2a^{-4} - 2a^{-9}].\end{gathered} \tag{4.15}$$

Оскільки нескладно перевірити, що останній вираз є додатним для $a \geqslant 1.5$, ми отримуємо необхідний висновок. □

Лема 4.1.13. Припустимо, що $a^2 \geqslant 3$, $n \geqslant 4$, тоді

$$S_n(z,a) \in \mathcal{L} - \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists x_n \in (a, a^3) : S_n(x_n, a) \leqslant 0. \tag{4.16}$$

Доведення. Оскільки для $0 \leqslant z \leqslant a$ виконується

$$1 \geqslant \frac{z}{a} \geqslant \frac{z^2}{a^4} \geqslant \ldots \geqslant \frac{z^n}{a^{n^2}} \geqslant \ldots,$$

то для кожного $n \in \mathbb{N}$ многочлен $S_n(z,a)$ не має коренів для $z \in [0,a]$. Тобто, якщо $S_n(z,a) \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$ для $n \geqslant 4$, $a^2 \geqslant 3$, то існує $x_n \in (a, a^3)$, такий що $S_n(x_n, a) \leqslant 0$.

Припустимо, що існує $x_n \in (a, a^3) : S_n(x_n, a) \leqslant 0$. Оскільки для $a^2 \geqslant 3$ і $n \geqslant 4$ многочлен $S_n(z,a)$ має точно два корені в колі $\{z : |z| < a^3\}$, це означає, що існують два корені многочлена $S_n(z,a)$ в інтервалі $(0, a^3)$. Легко перевірити наступну тотожність

$$S_n(\frac{a^n}{t}, a) = (-1)^n t^{-n} S_n(a^n t, a). \tag{4.17}$$

Тобто, многочлен $S_n(z,a)$ має два корені в інтервалі (a^{2n-3}, ∞). Із леми 4.1.12 многочлен $S_n(z,a)$ має $n-4$ кореня на відрізку $[a^4, a^{2n-4}]$. Тобто, многочлен $S_n(z,a)$ має n дійсних коренів. □

Для $n \geqslant 2$ ми позначимо

$$q_n := \inf\{a^2 > 1 : \ \exists x_0 \in (a, a^3) \quad S_n(x_0, a) \leqslant 0\};$$

$$q_\infty := \inf\{a^2 > 1 : \ \exists x_0 \in (a, a^3) \quad f_a(x_0) \leqslant 0\}$$

Легко обчислити, що $q_2 = 4, \ q_3 = 3.$

Оскільки для $k \geqslant 1, \ 0 \leqslant x \leqslant a^3$

$$S_{2k+2}(x,a) = S_{2k}(x,a) - \frac{x^{2k+1}}{a^{(2k+1)^2}}\left(1 - \frac{x}{a^{4k+3}}\right) < S_{2k}(x,a),$$

ми маємо

$$4 = q_2 > q_4 > q_6 > \dots .$$

Таким чином, існує границя послідовності $\{q_{2k}\}_{k=1}^\infty$ і ми маємо

$$\lim_{k\to\infty} q_{2k} =: b < 4.$$

Оскільки для $k \geqslant 1, \ 0 \leqslant x \leqslant a^3$,

$$S_{2k+1}(x,a) = S_{2k-1}(x,a) + \frac{x^{2k}}{a^{(2k)^2}}\left(1 - \frac{x}{a^{4k+1}}\right) > S_{2k-1}(x,a),$$

ми маємо

$$3 = q_3 < q_5 < q_7 < \dots .$$

Таким чином, існує границя послідовності $\{q_{2k+1}\}_{k=1}^\infty$ і ми маємо

$$\lim_{k\to\infty} q_{2k+1} =: c > 3.$$

Для кожного $x \geqslant 0, \ k \in \mathbf{N}$,

$$S_{2k+1}(x,a) = S_{2k}(x,a) - \frac{x^{2k+1}}{a^{(2k+1)^2}} < S_{2k}(x,a),$$

тому для усіх $k \in \mathbb{N}$ ми маємо

$$q_{2k+1} \leqslant q_{2k},$$

звідки

$$c \leqslant b.$$

Ми отримуємо

$$S_{2k}(x,a) - \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{a^{n^2}} = f_a(x) = S_{2k+1}(x,a) + \sum_{n=2k+2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{a^{n^2}}.$$

Для $x \in [a, a^3], \ n \geqslant 1$, ми маємо $\frac{x^n}{a^{n^2}} \geqslant \frac{x^{n+1}}{a^{(n+1)^2}}$, звідки

$$S_{2k}(x,a) > f_a(x) > S_{2k+1}(x,a),$$

і ми отримуємо

$$3 < c \leqslant q_\infty \leqslant b < 4.$$

Ми доведемо, що $c = q_\infty = b$. Для цього нам потрібна наступна лема.

Лема 4.1.14. Припустимо, що $3 \leqslant a_1^2 < a_2^2$, $k \geqslant 1$. Тоді виконуються наступні імплікації

$$S_k(x_1, a_1) \leqslant 0,\ x_1 \in (a_1, a_1^3) \Rightarrow S_k(x_2, a_2) < 0, \tag{4.18}$$
$$\text{де } x_2 = \tfrac{x_1 a_2}{a_1} \in (a_2, a_2^3),$$

і

$$f_{a_1}(x_1) \leqslant 0,\ x_1 \in (a_1, a_1^3) \Rightarrow f_{a_2}(x_2) < 0, \text{де } x_2 = \frac{x_1 a_2}{a_1} \in (a_2, a_2^3). \tag{4.19}$$

Доведення. Положимо $y_1 = \frac{x_1}{a_1}$ і позначимо через

$$C_k(y, a) := S_k(ay, a), \quad g_a(y) := f_a(ay).$$

Оскільки $x_1 \in [a_1, a_1^3]$, ми маємо $y_1 \in [1, a_1^2]$. Ми отримуємо для $a \in (a_1, a_2)$

$$\frac{\partial}{\partial a} C_k(y_1, a) = -\frac{y_1^2}{a^3}\left(2 - \frac{6y_1}{a^4} + \sum_{p=2}^{k-2} \frac{(-1)^p y_1^p (p+2)(p+1)}{a^{p^2+3p}}\right); \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial a} g_a(y_1) = -\frac{y_1^2}{a^3}\left(2 - \frac{6y_1}{a^4} + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^p y_1^p (p+2)(p+1)}{a^{p^2+3p}}\right). \tag{4.21}$$

Для $a^2 \geqslant a_1^2 \geqslant 3$ і $y_1 \in [1, a_1^2]$ ми маємо

$$2 \geqslant \frac{6y_1}{a^4} \geqslant \ldots \geqslant \frac{y_1^p (p+2)(p+1)}{a^{p^2+3p}} \geqslant \frac{y_1^{p+1}(p+3)(p+2)}{a^{(p+1)^2+3(p+1)}},$$

тобто

$$\frac{\partial}{\partial a} C_k(y_1, a) < 0,\ a \in (a_1, a_2); \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial a} g_a(y_1) < 0,\ a \in (a_1, a_2). \tag{4.23}$$

Тобто ми отримуємо

$$C_k(y_1, a_1) > C_k(y_1, a_2);$$

$$g_{a_1}(y_1) > g_{a_2}(y_1),$$

звідки випливає твердження леми. □

Для $a^2 \geqslant 3,\ n \geqslant 4$, многочлен $S_n(z,a)$ має два кореня у колі $\{z : |z| < a^3\}$, і, використовуючи лему 4.1.14, отримуємо, що для $a^2 = q_n$ многочлен $S_n(z,a)$ має один корінь кратності два на інтервалі (a, a^3), а для $a^2 > q_n$ многочлен $S_n(z,a)$ має два простих кореня на інтервалі (a, a^3). Аналогічно, функція $f_a(z)$ для $a^2 = q_\infty$ має один корінь кратності два на інтервалі (a, a^3), а для $a^2 > q_\infty$ має два простих кореня на інтервалі (a, a^3).

Припустимо, що $c < q_\infty$. Виберемо $c_1,\ c < c_1 < q_\infty$, і положимо $a_1 := c_1^{\frac{1}{2}}$. Тоді $f_{a_1}(x) > 0$ для $x \in [a_1, a_1^3]$, і тому існує $N \in \mathbb{N}$, таке що для кожного $n \geqslant N$ ми маємо $S_{2k+1}(x, a_1) > 0$ для $x \in [a_1, a_1^3]$. Тобто $q_{2n+1} > c_1$ для усіх $n \geqslant N$, звідки випливає, що $c = q_\infty$.

Припустимо, що $q_\infty < b$. Виберемо $b_1,\ q_\infty < b_1 < b$, і положимо $a_2 := b_1^{\frac{1}{2}}$. Тоді існує $x_0 \in [a_2, a_2^3]$, такий що $f_{a_2}(x_0) < 0$, і тому існує $M \in \mathbb{N}$, таке що для кожного $m \geqslant M$ ми маємо $S_{2m}(x_0, a_2) < 0$. Тобто $q_{2m} < b_1$ для кожного $m \geqslant M$, звідки випливає, що $b = q_\infty$.

Ми довели, що для $a^2 \geqslant q_\infty$ многочлени $S_{2k+1}(z,a)$ мають тільки дійсні корені для кожного $k \in \mathbb{N}$. Якщо $3 \leqslant a^2 < q_\infty$, то існує $k_0 \in \mathbb{N}$, таке що для кожного $k \geqslant k_0$ не всі корені многочленів $S_{2k+1}(z,a)$ є дійсними, тому що кожен з цих многочленів має два недійсних кореня у колі $\{z : |z| \leqslant a^3\}$ (ми обираємо k_0 із умови $q_{2k_0+1} > a^2$). Якщо $a^2 > q_\infty$, то існує $k_1 \in \mathbb{N}$, такий що для кожного $k \geqslant k_1$ многочлени $S_{2k}(z,a)$ мають усі дійсні корені (ми обираємо k_1 із умови $q_{2k_1} < a^2$). Для $3 \leqslant a^2 < q_\infty$ ми маємо, що для усіх $k \in \mathbb{N}$ не всі корені многочленів $S_{2k}(z,a)$ є дійсними, тому що кожен з цих многочленів має два недійсних кореня у колі $\{z : |z| \leqslant a^3\}$. Також ми довели, що для $a^2 \geqslant q_\infty$ функція $f_a(z)$ має тільки дійсні корені, а для $3 \leqslant a^2 < q_\infty$ функція $f_a(z)$ має два недійсних кореня у колі $\{z : |z| \leqslant a^3\}$.

Для завершення доведення теореми нам потрібно розглянути випадок $a^2 < 3$. Для цього ми будемо використовувати теорему 4.1.7 Е.Лаґерра і Дж.Поліа, а саме, наслідок з цієї теореми (4.1.8). Застосуємо (4.1.8) до многочленів $S_k(z,a),\ k \geqslant 2,\ 1 < a^2 < 3$, з $b = \frac{\sqrt{3}}{a}$. Ми отримуємо, що якщо $S_k(z,a)$ має усі дійсні корені, то $S_k(z, \sqrt{3})$ також має усі дійсні корені. Але для $k \geqslant 4$ ми довели, що $S_k(z, \sqrt{3})$ має недійсні корені. Звідки, для $a^2 < 3$ і $k \geqslant 4$ многочлени $S_k(z,a)$ мають недійсні корені.

Припустимо, що існує $a_0,\ 1 < a_0^2 < 3$, таке що $f_{a_0}(z)$ має тільки дійсні корені. Оскільки $f_{a_0}(z)$ є цілою функцією нульового порядку зростання, існує $(b_m)_{m=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ з $\sum_{m=1}^{\infty} b_m^{-1} < \infty$, така що

$$f_{a_0}(z) = \prod_{m=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{b_m}),$$

і добуток рівномірно збігається на компактах в $\mathbb{C}$. Позначимо через

$$Q_n(z) := \prod_{m=1}^{n}(1 - \frac{z}{b_m}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \beta_k(n) z^k,\ \beta_k(n) \geqslant 0.$$

Для кожного $K \subset\subset \mathbb{C}$ ми маємо $Q_n(z) \to_{n\to\infty} f_{a_0}(z)$ рівномірно для $z \in K$. Оскільки $Q_n(z)$ має тільки дійсні корені, ми маємо для кожного $b > 1$

$$\tilde{Q}_n(z) := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \beta_k(n) b^{-k^2} z^k \in \mathcal{L} - \mathcal{P}.$$

Очевидно, для кожного $K \subset\subset \mathbb{C}$ ми маємо $\tilde{Q}_n(z) \to_{n\to\infty} f_{a_0 b}(z)$ рівномірно по $z \in K$. Тобто, якщо усі корені функції $f_{a_0}(z)$ є дійсними, то усі корені функції $f_{a_0 b}(z)$ є також дійсними для кожного $b > 1$. Оскільки для $3 \leqslant a^2 < q_\infty$ функція $f_a(z)$ має недійсні корені, то для $1 \leqslant a^2 < q_\infty$ функція $f_a(z)$ також має недійсні корені.

Щоб оцінити численне значення константи q_∞, ми відзначимо, що нетрудно вирахувати, що

$$q_4 = 1 + \sqrt{5} \approx 3.2361,\ q_5 \approx 3.2336.$$

Теорема 4.1.8 доведена. □

Зауваження 4.1.15. Ми довели ще наступні імплікації

$$S_{2k}(z,a) \in \mathcal{L} - \mathcal{P} \Rightarrow \forall m \geqslant k\ S_{2m}(z,a) \in \mathcal{L} - \mathcal{P};$$

$$S_{2k+1}(z,a) \in \mathcal{L} - \mathcal{P} \Rightarrow \forall m \leqslant k\ S_{2m+1}(z,a) \in \mathcal{L} - \mathcal{P}.$$

Відмітимо, що дослідження цікавих властивостей коренів часткової тета-функції і коренів її похідних, знаходження комплексних областей, які містять усі корені цієї функції, а також інші результати, пов'язані з частковою тета-функцією, можна знайти у великої серії глибоких робіт В.П.Костова [141] [142], [143], [144], [147], [145], [146], [148], [149] і [150].

Зауваження 4.1.16. У нещодавньому дуже цікавому препринті Р.Флореса і Ж.Гонзалеса-Менесеса обговорюється важлива роль часткової тета-функції і константи q_∞ при дослідженні зростання моноїдів Артіна-Тітса (дивись [81]).

4.2 Деякі спеціальні цілі функції, пов'язані з частковою тета-функцією

В цьому параграфі ми будемо вивчати спеціальні цілі функції з додатними коефіцієнтами і досліджувати питання, чи належать ці функції та їхні відрізкі ряду Тейлора до класу Лаґерра-Поліа.

Відзначимо, що, хоча кожна ціла функція з класу Лаґерра-Поліа є рівномірною на компактах границею многочленів з усіма дійсними коренями, але відрізки ряду Тейлора цих функцій не обов'язково мають усі дійсні корені. Наприклад, $f(z) = e^z \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$, і послідовність многочленів з усіма дійсними коренями $P_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ збігається рівномірно на компактах в $\mathbb{C}$ до f. Але, для кожного $n \in \mathbb{N}$, n-тий відрізок ряду Тейлора функції f має не більш одного дійсного кореня, враховуючи кратності (дивись елементарне доведення цього важливого факту, наприклад, в відомому задачнику Дж.Поліа і Г.Сегьо [191, глава 5, задача 74]).

Ми будемо вивчати цілі функції з додатними коефіцієнтами Тейлора і такі, що послідовність других відношень $q_n(f)$ (дивись (4.3)) зростає по n і $q_2(f) > 1$. З (4.4) випливає, що кожна ціла функція з такими властивостями має нульовий порядок зростання. Нехай $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ є цілою функцією з додатними коефіцієнтами і порядком менше за 2. Добре відомо і часто використовується, що така функція має тільки дійсні корені тоді і тільки тоді, коли послідовність $(k!a_k)_{k=0}^{\infty}$ є послідовністю множників.

Означення 4.2.1. Послідовність $(\gamma_k)_{k=0}^{\infty}$ дійсних чисел називається послідовністю множників, якщо для кожного дійсного многочлена $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ з усіма дійсними коренями, многочлен $\sum_{k=0}^{n} \gamma_k a_k z^k$ також має усі дійсні корені. Клас послідовностей множників позначається $\mathcal{MS}$ (від англійського "multiplier sequences").

Наступна визначна теорема Дж.Поліа і І.Шура дає одразу і алгебраїчну, і трансцендентну характеризації послідовностей множників.

Теорема 4.2.2. (дивись [190], [186] або [161, глава VIII, §3]). Нехай $(\gamma_k)_{k=0}^{\infty}$ є даною дійсною послідовністю. Наступні три твердження є еквівалентними.

1. $(\gamma_k)_{k=0}^{\infty}$ є послідовністю множників.

2. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ многочлен $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_k z^k$ має тільки дійсні корені одного знаку.

3. Степеневий ряд $\Phi(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k!} z^k$ збігається абсолютно во всій комплексній площини, і ціла функція $\Phi(z)$ або ціла функція $\Phi(-z)$ має представлення

$$C e^{\sigma z} z^m \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{x_k}), \tag{4.24}$$

де $C \in \mathbb{R}, \sigma \geqslant 0, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 < x_k \leqslant \infty,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k} < \infty.$

Простим наслідком цієї теореми є таке твердження: послідовність $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_l,\ 0, 0, \ldots)$ є послідовністю множників тоді і тільки тоді, коли многочлен $P(z) = \sum_{k=0}^{l} \frac{\gamma_k}{k!} z^k$ має тільки дійсні корені одного знаку.

Нехай $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = 1 + z + \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{z^k}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \cdots q_{k-1}^2 q_k}$ є даною цілою функцією з додатними коефіцієнтами Тейлора і порядком зростання меншим за 1. Ми будемо позначати $S_n(z)$ n-тий Тейлоровський відрізок f : $S_n(z) = 1 + z + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{z^k}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \cdots q_{k-1}^2 q_k}$. В цьому параграфі будемо досліджувати необхідні і достатні умови для того, щоб функція f належала до класу Лаґерра-Поліа.

Відзначимо просту необхідну умову. Нехай $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$ є функцією порядку менше за 1, $f(0) \neq 0$, і $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ є послідовністю коренів цієї функції. Ми маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k^2} = a_1^2 - 2a_0a_2 \geqslant 0.$$

Таким чином, для такої функції

$$f \in \mathcal{L} - \mathcal{P} \Rightarrow q_2(f) \geqslant 2. \tag{4.25}$$

Першим результатом цього параграфу є наступна теорема.

Теорема 4.2.3. ([33]). Нехай $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = 1 + z + \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{z^k}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \cdots q_{k-1}^2 q_k}$ є цілою функцією з додатними коефіцієнтами Тейлора.

(1) Якщо $q_2 \geqslant 3$, $q_3 > \frac{q_2^3}{q_2^2-1}$ і $q_j \geqslant q_2$ для $j \geqslant 4$, то функція f і її відрізки S_n для усіх $n \geqslant 2$ має точно два корені в колі $\{z : |z| \leqslant q_2\}$.

(2) Якщо $q_2 > 1$ і $q_{j+1} \geqslant 4$ для усіх $j = 2, 3, \ldots, n-1$, то S_n має не менше за $(n-2)$ дійсних кореня на інтервалі $[q_2; +\infty)$. Більш того, існує точка $y \in [q_2; q_3]$, така що $S_n(-y) > 0$.

(3) Якщо $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$, $q_2 \geqslant 3$, $q_3 > \frac{q_2^3}{q_2^2-1}$ і $q_j \geqslant 4$ для усіх $j = 3, 4, \ldots$, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ ми маємо $S_{2n+1} \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$.

(4) Якщо $2 \leqslant q_2 < 3$ і $q_k \geqslant \frac{4q_2}{3}$ для усіх $k \geqslant 3$, то $f \notin \mathcal{L} - \mathcal{P}$.

Доведення. З невеликою неакуратністю в позначеннях ми будемо вивчати наступну цілу функцію $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k z^k = 1 - z + \sum\limits_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^k}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \cdots q_{k-1}^2 q_k}$. Наступна лема дає деяку інформацію щодо поведінки відрізку степеня два функції f.

Лема 4.2.4. $\min\limits_{\varphi \in [0; 2\pi]} |S_2(q_2 e^{i\varphi})| = \begin{cases} 1, & \text{якщо } q_2 \geqslant 3 \\ \sqrt{1 - \frac{(3-q_2)^2}{4} q_2}, & \text{якщо } 2 \leqslant q_2 \leqslant 3 \end{cases}.$

Доведення. Для $S_2(z) = 1 - z + \frac{z^2}{q_2}$ ми отримуємо прямим рахуванням

$$|S_2(q_2 e^{i\varphi})|^2 = 1 + 4q_2^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 4q_2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2}. \tag{4.26}$$

Підставляючи $v = \sin^2 \frac{\phi}{2} \in [0; 1]$, ми маємо $\sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{3\phi}{2} = v(3 - 4v)$, тому ми отримуємо

$$|S_2(q_2 e^{i\varphi})|^2 = 16q_2 v^2 + 4q_2 v(q_2 - 3) + 1 =: h(v).$$

Відмітимо, що $h(v)$ є квадратичною параболою з осями доверху з вершиною в точці $v_0 = \frac{3-q_2}{8}$. Якщо $2 \leqslant q_2 \leqslant 3$, то $\min\limits_{v\in[0;1]} h(v) = h(v_0) = 1 - \frac{(3-q_2)^2 q_2}{4}$. Якщо $q_2 > 3$, то $v_0 < 0$ і $\min\limits_{v\in[0;1]} h(v) = h(0) = 1$. $\square$

Наступна лема дає оцінку третього залишку нашого степеневого ряду.

Лема 4.2.5. Нехай $q_2 > 1$ і $q_j \geqslant q_2$ для $j \geqslant 3$. Тоді

$$|R_3(q_2 e^{i\varphi})| \leqslant \frac{q_2^3}{q_3(q_2^2-1)}.$$

Доведення.

$$|R_3(q_2 e^{i\varphi})| \leqslant \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{q_2^k}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \cdots q_{k-1}^2 q_k} =$$

$$\frac{q_2}{q_3}\left(1 + \frac{1}{q_3 q_4} + \frac{1}{q_3^2 q_4^2 q_5} + \cdots\right) \leqslant \frac{q_2}{q_3}\left(1 + \frac{1}{q_2^2} + \frac{1}{q_2^5} + \frac{1}{q_2^9}\cdots\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q_2}{q_3}\left(1 + \frac{1}{q_2^2} + \frac{1}{q_2^4} + \frac{1}{q_2^6}\cdots\right) = \frac{q_2^3}{q_3(q_2^2-1)}.$$

$\square$

Тепер ми доведемо пункт (1) теореми 4.2.3.

Лема 4.2.6. Якщо $q_2 \geqslant 3$, $q_3 > \frac{q_2^3}{q_2^2-1}$ і $q_j \geqslant q_2$ для $j \geqslant 4$, то функція f і її відрізки S_n для усіх $n \geqslant 2$ мають точно два корені у колі $\{z : |z| < q_2\}$.

Доведення. Для $q_2 \geqslant 3$, використовуючи лему 4.2.4, ми отримуємо $\min\limits_{\varphi\in[0;2\pi]} |S_2(q_2 e^{i\varphi})| = 1$. Далі, по лемі 4.2.5 ми маємо $|R_3(q_2 e^{i\phi})| \leqslant \frac{q_2^3}{q_3(q_2^2-1)} < 1$. Розглянемо корені многочлена $S_2(z) = 1 - z + \frac{z^2}{q_2}$. Якщо $D = 1 - \frac{4}{q_2} \geqslant 0 \Leftrightarrow q_2 \geqslant 4$, то обидва корені многочлена S_2 є дійсними і додатними, і для більшого кореня ми маємо $\frac{q_2\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{q_2}}\right)}{2} < q_2$. Якщо $D < 0$, то S_2 має два недійсних корені z_0 і $\bar{z}_0$, такі що $z_0\bar{z}_0 = q_2$. Це означає, що $|z_0| = \sqrt{q_2} < q_2$ і S_2 має два корені в колі $|z| < q_2$. Тепер, використовуючи теорему Руше до S_2 і R_3 (тобто до $S_2(z)$ і $S_n(z) - S_2(z)$), те ж саме доведення, як у лемі 4.2.5 демонструє, що $|S_n(z) - S_2(z)| \leqslant \frac{q_2^3}{q_3(q_2^2-1)}$), і ми отримуємо необхідне твердження. $\square$

Тепер ми опишемо поведінку f, S_{2n+1} і S_{2n} на відрізку $[0; q_2]$.

Лема 4.2.7. Припустимо, що $q_j > 1$ для $j \geqslant 2$.

1) Якщо $x \in [0; q_2]$, то $S_3(x) < S_5(x) < \ldots < f(x)$,

2) Якщо $x \in [0; 1]$, то $0 < S_1(x) < S_3(x) < S_5(x) < \ldots < f(x)$,

3) Якщо $x \in [0; q_2]$, то $S_2(x) > S_4(x) > \ldots > f(x)$.

Доведення. Ми перепишемо $S_{2n+1}(x) = (1 - x) + (a_2x^2 - a_3x^3) + (a_4x^4 - a_5x^5) + \ldots + (a_{2n}x^{2n} - a_{2n+1}x^{2n+1})$. Ми маємо $a_kx^k > a_{k+1}x^{k+1} \Leftrightarrow x < \frac{a_k}{a_{k+1}} \Leftrightarrow x < \frac{q_2^k q_3^{k-1} \ldots q_k^2 q_{k+1}}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \ldots q_{k-1}^2 q_k} = q_2q_3 \ldots q_{k+1}, k = 2, 4, 6, \ldots$. Остання нерівність виконується, оскільки $x \leqslant q_2$ і $q_j > 1$. Це означає, що $S_{2n+1}(x) > S_{2n-1}(x)$. Ті ж аргументи ми застосуємо для того, щоб довести, що $f(x) > S_{2k+1}(x)$. Більш того, якщо $x \in [0; 1]$, то можна використати ті ж міркування, починаючи з $S_1(x)$ (а не $S_3(x)$).

Щоб довести 3), ми перепишемо $S_{2n}(x)$ як $(1-x+a_2x^2)+(-a_3x^3+a_4x^4)+ \ldots+(-a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n}x^{2n})$. Таким чином, $S_{2n} < S_{2n-2k}$ є наслідком того, що $x < q_2q_3 \ldots q_{2n-2k}$. Остання нерівність виконується, тому що $x \leqslant q_2$ і $q_j > 1$. Ті ж аргументи ми застосуємо для того, щоб довести, що $f(x) < S_{2k}(x)$ для усіх $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Наступна лема дає необхідні і достатні умови для того, щоб S_3 мала тільки дійсні корені.

Лема 4.2.8. Якщо $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$, $q_2 \geqslant 3$, $q_3 > \frac{q_2^3}{q_2^2 - 1}$, то S_3 має тільки дійсні корені тоді і тільки тоді, коли існує $x_0 \in [1; q_2]$, такий що $S_3(x_0) < 0$.

Доведення. Оскільки $q_2 \geqslant 3$, $q_3 > \frac{q_2^3}{q_2^2-1}$ і $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$, ми отримуємо, що f має два дійсні корені на відрізку $[0; q_2]$ (за лемою 4.2.6). Використовуємо твердження 2 леми 4.2.7, ми маємо $f(x) > 0$ на $[0; 1]$. Тому, f має два дійсні корені на відрізку $[1; q_2]$. Це означає, що існує $x_0 \in [1; q_2]$, такий що $f(x_0) \leqslant 0$. Тепер, з твердження $S_3(x) < f(x)$ на $[1; q_2]$ випливає, що $S_3(x_0) < 0$. Тобто, так як $S_3(0) > 0, S_3(x_0) < 0$, за нашими припущеннями $S_3(q_2) > 0$ і $S_3(+\infty) = -\infty$, ми отримуємо, що S_3 має усі дійсні корені. $\square$

Зауваження 4.2.9. Добре відомо, що многочлен третього степеня S_3 має тільки дійсні корені тоді і тільки тоді, коли його дискримінант є невід'ємним. У наших позначеннях ми можемо твердити, що S_3 має тільки дійсні корені тоді і тільки тоді, коли $\delta(q_2, q_3) \geqslant 0$, де $\delta(u, v) = -4uv^2 + u^2v^2 - 4u^2v + 18uv - 27$.

Зауваження 4.2.10. $\delta(3, v) \geqslant 0 \Leftrightarrow v = 3$.

Доведення. Ми бачимо, що $\delta(3, v) = -3(v-3)^2 \geqslant 0$. Це означає, що $v = 3$. □

Наступна лема використовує ідеї Хатчинсона про виділення трьох послідовних членів ряду. Так ми доведемо пункт (2) теореми 4.2.3.

Лема 4.2.11. Якщо $q_2 > 1$ і $q_{j+1} \geqslant 4$ для усіх $j = 2, 3, \ldots, n-1$, то $S_n(x)$ має не менше за $(n-2)$ дійсних кореня на відрізку $[q_2; +\infty)$. Більш того, існує точка $y \in [q_2; q_3]$, така що $S_n(y) > 0$.

Доведення. Очевидно, що існує $x > q_2 q_3 \ldots q_n$, такий що $\operatorname{sign} S_n(x) = (-1)^n$. Для кожного $j = 2, 3, , \ldots, n-1$ ми розглянемо $x_0(j) = q_2 q_3 \ldots q_j \sqrt{q_{j+1}} = \sqrt{q_2 q_3 \ldots q_j} \sqrt{q_2 q_3 \ldots q_{j+1}}$. Тому ми маємо $x_0(j) \in [q_2 q_3 \ldots q_j; q_2 q_3 \ldots q_{j+1}]$.

Тепер ми отримуємо

$$
\begin{gathered}
(-1)^j S_n(x_0(j)) = \\
(-1)^j \left(1 - x_0 + \frac{x_0^2}{q_2} + \ldots + \frac{(-1)^{j-2} x_0^{j-2}}{q_2^{j-3} q_3^{j-4} \ldots q_{j-2}}\right) + \\
\left(\frac{x_0^j}{q_2^{j-1} \ldots q_j} - \frac{x_0^{j-1}}{q_2^{j-2} \ldots q_{j-1}} - \frac{x_0^{j+1}}{q_2^j \ldots q_{j+1}}\right) \\
+(-1)^j \left(\frac{(-1)^{j+2} x_0^{j+2}}{q_2^{j+1} \ldots q_{j+2}} + \ldots + \frac{(-1)^n x_0^n}{q_2^{n-1} \ldots q_n}\right) \\
=: A_1 + A_2 + A_3.
\end{gathered}
$$

Розглянемо спершу A_3. Ми маємо $a_k x^k > a_{k+1} x^{k+1} \Leftrightarrow x < q_2 q_3 \ldots q_{k+1}$, $k \geqslant j+2$. Це є вірним, тому що $x_0(j) \leqslant q_2 q_3 \ldots q_{j+1}$. Тобто, $A_3 > 0$.

Аналогічно, $a_k x^k < a_{k+1} x^{k+1} \Leftrightarrow x > q_2 q_3 \ldots q_{k+1}$, $k \leqslant j-3$. Це є вірним, тому що $x_0(j) \geqslant q_2 q_3 \ldots q_j$. Тобто, $A_1 > 0$.

На останок, оскільки $q_{j+1} \geqslant 4$, ми маємо

$$A_2 = \frac{x_0^{j-1}}{q_2^{j-2} \ldots q_{j-1}} \left(-1 + \frac{q_2 q_3 \ldots q_j \sqrt{q_{j+1}}}{q_2 q_3 \ldots q_j} - \frac{q_2^2 q_3^2 \ldots q_j^2 q_{j+1}}{q_2^2 q_3^2 \ldots q_j^2 q_{j+1}} \right)$$

$$= \frac{x_0^{j-1}}{q_2^{j-2} \ldots q_{j-1}} \left(\sqrt{q_{j+1}} - 2 \right) \geqslant 0.$$

Таким чином, ми знайшли $n-1$ різних точок знакозмін многочлена $S_n(x)$. Це означає, що ми знайшли як мінімум $n-2$ дійсних кореня многочлена $S_n(x)$. □

Зауваження 4.2.12. Ми отримали, що, якщо виконуються нерівності $q_2 > 1$ і $q_{j+1} \geqslant 4$ для усіх $j = 2, 3, \ldots, n-1$, то ціла функція f має не більше за два недійсних корені.

Наступна лема підсумовує усі факти, які були доведені раніше, і доводить пункт (3) теореми 4.2.3.

Лема 4.2.13. Якщо $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$, $q_2 \geqslant 3$, $q_3 > \frac{q_2^3}{q_2^2 - 1}$, $q_j \geqslant 4$ для $j = 3, 4, \ldots$, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ ми маємо $S_{2n+1} \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$.

Доведення. За лемою 4.2.8, існує $x_0 \in [1; q_2]$, такий що $S_3(x_0) < 0$, звідки S_3 має усі дійсні корені. За лемою 4.2.7 ми маємо: $S_{2k+1}(x_0) < 0$ для усіх $k \in \mathbb{N}$. Оскільки $S_{2k+1}(0) = 1$, ми робимо висновок, що існує $r_k \in [1; q_2)$: $S_{2k+1}(r_k) = 0$. Із леми 4.2.11 ми отримуємо, що $S_{2k+1}(x)$ має $2k-1$ дійсних кореня на проміжку $[q_2; +\infty)$. Отже, многочлен $S_{2k+1}(x)$ має $2k$ дійсних кореня. З останнього твердження випливає, що многочлен S_{2k+1} має усі дійсні корені. □

Наступна лема стверджує, що, якщо, при виконанні умов теореми, числа q_2 і q_3 сильно відрізняються за величиною, то функція f не може належати до класу Лаґерра-Поліа, що доводить пункт (4) теореми 4.2.3.

Лема 4.2.14. Якщо $2 \leqslant q_2 < 3$, і для усіх $k \geqslant 3$ виконується $q_k \geqslant 4$, то $f \notin \mathcal{L} - \mathcal{P}$

Доведення. Припустимо, що $f \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$. Розглянемо наступну цілу функцію: $g_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k x^k}{a^{k^2}}$, де $a > 1$. Оскільки $\left(\frac{1}{a^{k^2}}\right)_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{CZDS}$, ми маємо $g_a(x) \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$ для усіх $a > 1$. Легко перевірити, що $q_k(g_a) = q_k(f) \cdot a^2$. Тому існує $a > 1$, таке що $q_2(g_a) = 3$. Очевидно, що $q_k(g_a) > 4$ для усіх $k > 2$. Використовуючи лему 4.2.8, ми маємо $\sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k a_k x^2}{a^{k^2}} \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$ (ми можемо використати цю лему, тому що $q_2(g_a) = 3$, $\frac{q_2^3(g_a)}{q_2^2(g_a)-1} = \frac{27}{8}$, $q_3(g_a) > \frac{27}{8}$). За зауваженням 4.2.9, $\delta(q_2(g_a), q_3(g_a)) = \delta(3, q_3(g_a)) \geqslant 0$. Тоді, за зауваженням 4.2.10, $q_3(g_a) = 3$, але $q_3(g_a) > 4$. Ми отримали протиріччя, яке доводить твердження леми. □

Зауваження 4.2.15. Як видно із доведення, теорема залишається вірною в наступній формі: якщо $2 \leqslant q_2 < 3$ і для усіх $k \geqslant 3$ ми маємо $q_k \geqslant \frac{4q_2}{3}$, то $f \notin \mathcal{L}-\mathcal{P}$.

Ми довели пункт (4) теореми 4.2.3, тому теорема 4.2.3 доведена. □

Ми будемо досліджувати сім'ю цілих функцій

$$f^{(m,a)}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k (k!)^m}{a^{k^2}}, \quad a > 1,\ m \geqslant 1,$$

і їхні відрізки ряду Тейлора

$$S_n^{(m,a)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k (k!)^m}{a^{k^2}}.$$

Із (4.6) ми отримуємо $\left(a^{-k^2}\right)_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{CZDS} \subset \mathcal{MS}$ для кожного $a \geqslant 1$. Таким чином ми отримуємо, що, якщо для деякого $a_0 > 1$ ми маємо $f^{(m,a_0)} \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$, то для усіх $a \geqslant a_0$ ми маємо $f^{(m,a)} \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$. Аналогічно, якщо для деякого $a_0 > 1$ ми маємо $S_n^{(m,a_0)} \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$, то для усіх $a \geqslant a_0$ ми маємо $S_n^{(m,a)} \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$. Таким чином, ми отримали, що для кожного $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, існує константа $d_{(n,m)} \geqslant 1$, така що

$$S_n^{(m,a)} \in \mathcal{L}-\mathcal{P} \Leftrightarrow a^2 \geqslant d_{(n,m)}. \tag{4.27}$$

Аналогічно ми отримуємо, що існує константа $d_{(\infty,m)} > 1$, така що

$$f^{(m,a)} \in \mathcal{L}-\mathcal{P} \Leftrightarrow a^2 \geqslant d_{(\infty,m)}. \tag{4.28}$$

Основним результатом цього параграфу є наступна теорема:

Теорема 4.2.16. ([33]). В позначеннях, що їх введено вище, ми маємо:
(1) Для кожного фіксованого $m \geqslant 1$ функція $f^{(m,a)}$ належить до класу $\mathcal{L}-\mathcal{P}$ тоді і тільки тоді, коли існує $x_0 = x_0(m) \in [-q_2(f^{(m,a)}); -1]$, такий що $f^{(m,a)}(x_0) \leqslant 0$. Для кожного фіксованого $m \geqslant 1$ і $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, многочлен $S_n^{(m,a)}$ має тільки дійсні корені тоді і тільки тоді, коли існує $x_0 = x_0(m,n) \in [-q_2(f^{(m,a)}); -1]$, такий що $S_n^{(m,a)}(x_0) \leqslant 0$.
(2) $3 \cdot 2^m < d_{(3,m)} < d_{(5,m)} < d_{(7,m)} < \ldots < d_{(\infty,m)}$.
(3) $\lim\limits_{n\to\infty} d_{(2n+1,m)} = d_{(\infty,m)}$.
(4) $4 \cdot 2^m = d_{(2,m)} > d_{(4,m)} > d_{(6,m)} > \ldots > d_{(\infty,m)}$.
(5) $\lim\limits_{n\to\infty} d_{(2n,m)} = d_{(\infty,m)}$.
(6) Для кожного $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, функція $d_{(n,m)}$ є неперервною функцією від m, яка зростає. Функція $d_{(\infty,m)}$ є також неперервною функцією від m, яка зростає.

Доведення. Як і при доведенні теореми 4.2.3, з невеликою неакуратністю в позначеннях ми будемо вивчати наступну цілу функцію

$$f^{(m,a)}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^k (k!)^m}{a^{k^2}}, \quad a > 1,\ m \geqslant 1,$$

і відрізки її ряду Тейлора

$$S_n^{(m,a)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k z^k (k!)^m}{a^{k^2}}.$$

Проблема, яку ми досліджуємо, залишається тією ж самою: якими є необхідні і достатні умови для того, щоб ціла функція $f^{(m,a)}$ і відрізки її ряду Тейлора належали до класу Лаґерра-Поліа.

Будемо вивчати поведінку $d_{(\infty,m)}$ для різних значень m.

Лема 4.2.17. $d_{(\infty,m)} \geqslant 2^{m+1}$.

Доведення. За теоремою 4.2.2 Дж.Поліа і І.Шура, $f^{(m,a)} \in \mathcal{L}-\mathcal{P} \Leftrightarrow T_n^{(m,a)} := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k z^k (k!)^m}{a^{k^2}} \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$ для усіх $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо $T_2^{(m,a)}(z) = 1 - 2\frac{z}{a} + 2^{m+1}\frac{z^2}{a^4}$. Ми маємо $T_2^{(m,a)} \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$ тоді і тільки тоді, коли $a^2 \geqslant 2^{m+1}$. $\square$

Ми відмічаємо, що $q_k(f^{(m,a)}) = \left(1-\frac{1}{k}\right)^m a^2$. Таким чином, $q_k(f^{(m,a)}) \leqslant q_{k+1}(f^{(m,a)})$ для усіх $k \geqslant 2$. Важливо відмітити, що $q_2(f^{(m,a)}) = \frac{1}{2^m}a^2$, $q_3(f^{(m,a)}) = \frac{2^m}{3^m}a^2$.

Ми будемо використовувати результати, які були отримані раніше. Для цього ми припустимо спочатку, що $q_2(f^{(m,a)}) \geqslant 3$ і з'ясуємо, що $q_j(f^{(m,a)}) \geqslant 4$ для усіх $j \geqslant 3$.

Лема 4.2.18. Якщо $q_2(f^{(m,a)}) \geqslant 3$, то $q_j(f^{(m,a)}) \geqslant 4$ для усіх $j \geqslant 3$.

Доведення. Звичайно, $q_2(f^{(m,a)}) \geqslant 3 \Leftrightarrow a^2 \geqslant 3 \cdot 2^m$. Нерівність, яку ми хочемо довести, переходить в наступну: $a^2 \geqslant 4\left(1-\frac{1}{j}\right)^{-m}$. Легко побачити, що $\max\limits_{j\geqslant 3} \frac{4}{\left(1-\frac{1}{j}\right)^m} = \frac{4\cdot 3^m}{2^m}$. Очевидно, $3\cdot 2^m \geqslant 4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^m \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^m \geqslant \frac{4}{3}$. Це є вірним для усіх $m \in \mathbb{N}$. □

Використовуючи лему 4.2.11 можна отримати наступне твердження.

Наслідок 4.2.19. Якщо $a^2 \geqslant 3\cdot 2^m$, то $S_n^{(m,a)}$ має не менш за $n-2$ дійсних коренів на $[\frac{a^2}{2^m}; +\infty)$ для усіх $n > 2$.

Таким чином, поведінка $d_{(n,m)}$ визначається двома коренями $S_n^{(m,a)}$ біля нуля (а саме, в колі радіусу $\frac{a^2}{2^m}$).

Далі ми знайдемо зв'язок між $d_{(2n+1,m)}$ для різних значень n і $d_{(\infty,m)}$. В наступній лемі є припущення, що $a^2 \geqslant 3\cdot 2^m$. Пізніше ми покажемо, що це припущення є істотним.

Ми будемо позначати $\widetilde{d}_{(n,m)} = \max(d_{(n,m)}, 3\cdot 2^m)$ і $\widetilde{d}_{(\infty,m)} = \max(d_{(\infty,m)}, 3\cdot 2^m)$.

Зараз ми перевіримо, що для $a^2 \geqslant 3\cdot 2^m$ виконується нерівність $q_3(f^{(m,a)}) > \frac{q_2^3(f^{(m,a)})}{q_2^2(f^{(m,a)})-1}$. Ця нерівність еквівалентна до $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \frac{a^4}{2^m a^4 - 2^{3m}}$, або після перетворень $a^4 > \frac{2^{4m}}{4^m - 3^m}$. Оскільки $a^2 \geqslant 3\cdot 2^m$, достатньо довести, що $9\cdot 2^{2m} > \frac{2^{4m}}{4^m-3^m}$. Тому ми отримуємо нерівність $\left(\frac{4}{3}\right)^m > \frac{9}{8}$, яка виконується для усіх $m \geqslant 1$.

Лема 4.2.20. $\widetilde{d}_{(3,m)} \leqslant \widetilde{d}_{(5,m)} \leqslant \widetilde{d}_{(7,m)} \leqslant \ldots \leqslant \widetilde{d}_{(\infty,m)}$

Доведення. Доведемо, що $\widetilde{d}_{(2n-1,m)} \leqslant \widetilde{d}_{(2n+1,m)}$. Якщо $a^2 \geqslant \widetilde{d}_{(2n+1,m)}$, то $S_{2n+1}^{(m,a)} \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$. Оскільки $a^2 \geqslant 3\cdot 2^m$, ми знаємо, що $S_{2n-1}^{(m,a)}(x)$ має $2n-3$ дійсних кореня на $[\frac{a^2}{2^m};+\infty)$ (це випливає з наслідку 4.2.19) і $S_{2n-1}^{(m,a)}(x) < S_{2n+1}^{(m,a)}(x)$ на $[1;\frac{a^2}{2^m}]$ (що є наслідком леми 4.2.7). Тому, $S_{2n+1}^{(m,a)}$ має 2 кореня на $[1;\frac{a^2}{2^m}]$ (що є наслідком леми 4.2.6) і $S_{2n+1}^{(m,a)}(0) > 0$. Тому ми отримуємо, що існує $x_0 \in [1;\frac{a^2}{2^m}] : S_{2n+1}^{(m,a)}(x_0) \leqslant 0$. Тоді $S_{2n-1}^{(m,a)}(x_0) < 0$. Об'єднуючи з $S_{2n-1}^{(m,a)}(0) > 0$, ми маємо, що $S_{2n-1}^{(m,a)}(x)$ має не менше ніж 1 дійсний корінь на $[q;\frac{a^2}{2^m}]$. Таким чином, $S_{2n-1}^{(m,a)}$ має 2 кореня на відрізку $[1;\frac{a^2}{2^m}]$, ці корені є дійсними, тому $S_{2n-1}^{(m,a)} \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$.

Доведення твердження щодо $\widetilde{d}_{(\infty,m)}$ є точно таким же (зі зміною $S_{2n+1}^{(m,a)}$ на $f^{(m,a)}$). □

Наступна лема дає інформацію про $d_{(3,m)}$.

Лема 4.2.21. $d_{(3,m)} > 3\cdot 2^m$.

Доведення. $S_3^{(m,a)}(x) = 1 - x + \frac{1}{q_2}x^2 - \frac{1}{q_2^2 q_3}x^3$. Якщо $S_3^{(m,a)}(x) \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$, то $P(x) = x^3 S_3^{(m,a)}(\frac{1}{x}) = x^3 - x^2 + \frac{1}{q_2}x - \frac{1}{q_2^2 q_3} \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$. Тоді $\frac{d}{dx}P(x) = 3x^2 - 2x + \frac{1}{q_2} \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$. Останнє є еквівалентним до такого $D = 4 - 4\frac{3}{q_2} \geqslant 0 \Leftrightarrow q_2 \geqslant 3$. Таким чином, $d_{(3,m)} \geqslant 3\cdot 2^m$.

Припустимо, що $a^2 = d_{(3,m)} = 3\cdot 2^m \Leftrightarrow q_2(S_3^{(m,a)}) = 3$. Тоді ми маємо, що $S_3^{(m,a)}(x) \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$. Але із зауваження 4.2.9 і зауваження 4.2.10 отримуємо, що $q_3(S_3^{(m,a)}) = 3$, в той час як з леми 4.2.18 $q_3(S_3^{(m,a)}) \geqslant 4$. Протиріччя доводить твердження леми. □

Таким чином, ми отримали, що $\widetilde{d}_{(2k+1,m)} = d_{(2k+1,m)}$, $k \in \mathbb{N}$, і $\widetilde{d}_{(\infty,m)} = d_{(\infty,m)}$.

Далі ми будемо доводити, що послідовність $(d_{(2n+1,m)})_{n=1}^{\infty}$ є такою, що строго зростає.

Лема 4.2.22. $d_{(2n-1,m)} \neq d_{(2n+1,m)}$.

Доведення. Нехай $a^2 = d_{(2n+1,m)}$. Тоді $S_{2n+1}^{(m,a)}$ має один двократний корінь на відрізку $[1;\frac{a^2}{2^m}]$. Якщо $d_{(2n+1,m)} = d_{(2n-1,m)}$, то $S_{2n-1}^{(m,a)}$ також має один

двократний корінь. Але $S_{2n-1}^{(m,a)}(0) > 0$, і тому $S_{2n-1}^{(m,a)}(x) \geqslant 0$ на $[1; \frac{a^2}{2^m}]$. Із леми 4.2.7 ми отримуємо, що $0 \leqslant S_{2n-1}^{(m,a)}(x) < S_{2n+1}^{(m,a)}(x)$, тобто $S_{2n+1}^{(m,a)}(x) > 0$ для кожного $x \in [1; \frac{a^2}{2^m}]$. Але це суперечить твердженню, що $S_{2n+1}^{(m,a)} \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$.
□

Зауваження 4.2.23. Якщо $a^2 = d_{(n,m)}$, то $S_n^{(m,a)}$ має рівно один двократний корінь і не має інших коренів на відрізку $[1; \frac{a^2}{2^m}]$. Якщо $a^2 = d_{(\infty,m)}$, то $f^{(m,a)}$ має рівно один двократний корінь і не має інших коренів на відрізку $[1; \frac{a^2}{2^m}]$.

Тепер ми будемо шукати границю послідовності $d_{(2n+1,m)}$ при $n \to \infty$.

Лема 4.2.24. $\lim\limits_{n\to\infty} d_{(2n+1,m)} = d_{(\infty,m)}$.

Доведення. З леми 4.2.22 випливає, що послідовність $\left(d_{(2n+1,m)}\right)_{n=1}^{\infty}$ монотонно зростає, і ця послідовність є обмеженою зверху константою $d_{(\infty,m)}$. Тобто, ми отримуємо, що існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} d_{(2n+1,m)}$, котру ми позначимо через L_0. Доведемо, що $L_0 = d_{(\infty,m)}$. Очевидно, $L_0 \leqslant d_{(\infty,m)}$. Припустимо, що $L_0 < d_{(\infty,m)}$. Виберемо a_0, таке що $a_0^2 \in (L_0; d_{(\infty,m)})$. Оскільки $a_0^2 > L_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}} d_{(2n+1,m)}$, ми маємо $S_{2n+1}^{(m,a_0)} \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$ для усіх $n \in \mathbb{N}$. Але $f^{(m,a_0)}(z) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1}^{(m,a_0)}(z)$, і ця границя є рівномірною на компактах в $\mathbb{C}$, тому з теореми Гурвиця $f^{(m,a_0)} \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$. Але з $a_0^2 < d_{(\infty,m)}$ випливає, що $f^{(m,a_0)} \notin \mathcal{L} - \mathcal{P}$. Це протиріччя доводить потрібне твердження. □

Тепер ми будемо досліджувати поведінку $d_{(2n,m)}$. Очевидно, що $d_{(2,m)} = 4 \cdot 2^m$. Наступне твердження дає оцінку знизу на $d_{(2n,m)}$

Лема 4.2.25. $d_{(\infty,m)} < d_{(2n,m)}$ для усіх $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Ми довели, що $d_{(\infty,m)} > 3 \cdot 2^m$. Тоді з зауваження 4.2.23 $f^{(m,a)}$ має точно один подвійний корінь і не має інших коренів на відрізку $[1; \frac{a^2}{2^m}]$. З $f^{(m,a)}(0) > 0$ ми отримуємо $f^{(m,a)}(x) \geqslant 0$ для усіх $x \in [0; \frac{a^2}{2^m}]$. Тому, з пункту 3) леми 4.2.7 $S_{2n}^{(m,a)}(x) > f^{(m,a)}(x) \geqslant 0 \Rightarrow S_{2n}^{(m,a))}(x) > 0$ для усіх $x \in [0; \frac{a^2}{2^m}]$. З останнього випливає, що $S_{2n}^{(m,a)}$ не має дійсних коренів на цьому інтервалі. Але лема 4.2.6 гарантує, що $S_{2n}^{(m,a)}$ має точно два корені у колі $|z| \leqslant \frac{a^2}{2^m}$. Тому ці два корені є недійсними і $S_{2n}^{(m,a)} \notin \mathcal{L}-\mathcal{P}$. Таким чином, $d_{(2n,m)} > d_{(\infty,m)}$. $\square$

Наслідок 4.2.26. $d_{(2n,m)} > 3 \cdot 2^m$ для усіх $n \in \mathbb{N}$.

Наступне твердження описує монотонність послідовності $\left(d_{(2,m)}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Лема 4.2.27. $d_{(2,m)} > d_{(4,m)} > d_{(6,m)} > \cdots$.

Доведення. Нехай $a^2 = d_{(2n,m)}$. Тоді $S_{2n}^{(m,a)} \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$. З наслідку 4.2.26 ми отримуємо, що $a^2 > 3 \cdot 2^m$. Це означає, що $S_{2n+2}^{(m,a)}$ має не менше за $2n$ дійсних коренів на проміжку $(\frac{a^2}{2^m}; \infty)$ (наслідок 4.2.19). Далі, існує $x_0 \in [0; \frac{a^2}{2^m}] : S_{2n}^{(m,a)}(x_0) = 0$, і x_0 є єдиним двократним коренем на цьому інтервалі (зауваження 4.2.23). Тепер маємо $S_{2n+2}^{(m,a)}(x_0) < S_{2n}^{(m,a)}(x_0) = 0$ (лема 4.2.7). Тому, із $S_{2n+2}^{(m,a)}(0) > 0$ і $S_{2n+2}^{(m,a)}(x_0) < 0$, ми маємо, що $S_{2n+2}^{(m,a)}(x_0)$ має не менше одного кореня на відрізку $[0; \frac{a^2}{2^m}]$. Тоді $S_{2n+2}^{(m,a)}$ має не менше $2n+1$ дійсних коренів, тому $S_{2n+2}^{(m,a)} \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$.
Більш того, легко побачити, що $S_{2n+2}^{(m,a)}$ має два різних кореня на відрізку $[0; \frac{a^2}{2^m}]$, і тому $a^2 \neq d_{(2n+2,m)}$. $\square$

В наступній лемі ми покажемо, що подвійний корінь функції $f^{(m,a)}$ не може “ковзати” по дійсній осі.

Лема 4.2.28. Припустимо, що $3 \cdot 2^m \leqslant a_1^2 \leqslant a_2^2$. Тоді для усіх $m \geqslant 1$ і $n \geqslant 2$ виконується:

1) якщо $S_n^{(m,a_1)}(x_1) \leqslant 0$ для деякого $x_1 \in (0; \frac{a_1^2}{2^m})$, то $S_n^{(m,a_2)}(x_2) < 0$, де $x_2 = \frac{x_1 a_2}{a_1} \in (0; \frac{a_2^2}{2^m})$, і

2) якщо $f^{(m,a_1)}(x_1) \leqslant 0$ для деякого $x_1 \in (0; \frac{a_1^2}{2^m})$, то $f^{(m,a_2)}(x_2) < 0$, де $x_2 = \frac{x_1 a_2}{a_1} \in (0; \frac{a_2^2}{2^m})$.

Доведення. Розглянемо $y_1 = \frac{x_1}{a_1}$, $C_n^{(m,a)}(y) = S_n^{(m,a)}(ay)$ і $g^{(m,a)}(y) = f^{(m,a)}(ay)$.

Оскільки $x_1 \in \left(0; \frac{a_1^2}{2^m}\right)$, ми маємо $y_1 \in \left(0; \frac{a_1}{2^m}\right)$. Ми отримуємо для $a \in (a_1; a_2)$, що

$$\frac{\partial}{\partial a} C_n^{(m,a)}(y_1) = -\frac{y_1}{a^3}\left(2 \cdot 2^m - \frac{6 y_1 \cdot 6^m}{a^4} + \right.$$

$$\left.\sum_{p=2}^{n-2}\frac{(-1)^p y_1^p(p+2)(p+1)((p+1)!)^m}{a^{p^2+3p}}\right),$$

і

$$\frac{\partial}{\partial a}g^{(m,a)}(y_1)=-\frac{y_1}{a^3}\left(2\cdot 2^m-\frac{6y_1\cdot 6^m}{a^4}+\right.$$
$$\left.\sum_{p=2}^{\infty}\frac{(-1)^p y_1^p(p+2)(p+1)((p+1)!)^m}{a^{p^2+3p}}\right).$$

Для $a^2\geqslant a_1^2\geqslant 3\cdot 2^m$ і $y_1\in(0;\frac{a_1}{2^m})$ ми маємо

$$2\cdot 2^m\geqslant\frac{6y_1\cdot 6^m}{a^4}\geqslant\frac{y_1^p(p+2)(p+1)((p+1)!)^m}{a^{p^2+3p}}$$
$$\geqslant\frac{y_1^{p+1}(p+3)(p+2)((p+2)!)^m}{a^{(p+1)^2+3(p+1)}}.$$

Це означає, що $\frac{\partial}{\partial a}C_n^{(m,a)}(y_1)<0$ і $\frac{\partial}{\partial a}g^{(m,a)}(y_1)<0$ для $a\in(a_1;a_2)$, і тому $C_n^{(m,a_1)}(y_1)>C_n^{(m,a_2)}(y_1)$ і $g^{(m,a_1)}(y_1)>g^{(m,a_2)}(y_1)$. □

Наслідок 4.2.29. a) Якщо $a^2=d_{(n,m)}$, то $S_n^{(m,a)}$ має один подвійний корінь на відрізку $[0;\frac{a^2}{2^m}]$,
b) якщо $a^2>d_{(n,m)}$, то $S_n^{(m,a)}$ має два різних кореня на відрізку $[0;\frac{a^2}{2^m}]$,
c) якщо $a^2=d_{(\infty,m)}$, то $f^{(m,a)}$ має один подвійний корінь на відрізку $[0;\frac{a^2}{2^m}]$,
d) якщо $a^2>d_{(\infty,m)}$, то $f^{(m,a)}$ має два різних кореня на відрізку $[0;\frac{a^2}{2^m}]$.

Доведення. Твердження a) і c) випливають з зауваження 4.2.23.

Для доведення b) розглянемо $a_1=d_{(n,m)}$ і $a_2:\ a_2^2>d_{(n,m)}$. Ясно, що існує єдиний двократний корінь x_1 многочлена $S_n^{(m,a_1)}$. Тепер, з леми 4.2.28 випливає, що існує $x_2\in(0;\frac{a_2^2}{2^m})$, такий що $S_n^{(m,a_2)}(x_2)<0$. Очевидно, $S_n^{(m,a_2)}$ не може мати подвійного кореня на інтервалі $(0;\frac{a_2^2}{2^m})$, тому $S_n^{(m,a_2)}$ має два різних кореня на інтервалі $(0;\frac{a_2^2}{2^m})$. Ті ж самі міркування доводять d). □

Тепер ми знайдемо границю послідовності $\left(d_{(2,m)}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Лема 4.2.30. $\lim\limits_{n\to\infty}d_{(2n,m)}=d_{(\infty,m)}$.

Доведення. З леми 4.2.27 ми отримуємо те, що послідовність $\left(d_{(2n,m)}\right)_{n=1}^{\infty}$ є монотонною, і з леми 4.2.25, що ця послідовність є обмеженою зверху константою $d_{(\infty,m)}$. Тому ми отримуємо, що ця послідовність має границю, і цю границю ми позначимо $L_1 := \lim\limits_{n\to\infty} d_{(2n,m)}$. Доведемо, що $L_1 = d_{(\infty,m)}$. Очевидно, $L_1 \geqslant d_{(\infty,m)}$. Припустимо, що $L_1 > d_{(\infty,m)}$. Оберемо a_0, таке що $a_0^2 \in (d_{(\infty,m)}; L_1)$. Оскільки $a_0^2 > d_{(\infty,m)}$, ми маємо, що $f^{(m,a_0)}$ має два різних кореня на проміжку $[1; \frac{a_0^2}{2^m})$. Тобто, існує $x_0 \in [1; \frac{a_0^2}{2^m})$, такий що $f^{(m,a_0)}(x_0) < 0$. Але $S_{2n}^{(m,a_0)}(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f^{(m,a_0)}(x_0)$. Тому, існує $N_0 \in \mathbb{N}$, таке що для кожного $n > N_0$ ми маємо $S_{2n}^{(m,a_0)}(x_0) < 0$. Це означає, що $S_{2n}^{(m,a_0)}$ має не менше одного кореня на проміжку $[1; \frac{a_0^2}{2^m})$. Використовуючи наслідок 4.2.19, ми отримуємо, що $S_{2n}^{(m,a_0)}$ має не менше за $2n-2$ кореня на $[\frac{a_0^2}{2^m}; \infty)$. Тому, $S_{2n}^{(m,a_0)}$ має не менше за $2n-1$ дійсних кореня, звідки $S_{2n}^{(m,a_0)} \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$ для усіх $n > N_0$. Це означає, що $d_{(2n,m)} \leqslant a_0^2$ для кожного $n > N_0$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} d_{(2n,m)} \leqslant a_0^2$. Але тоді $a_0^2 \geqslant L_1$, хоча ми обирали $a_0^2 \in (d_{(\infty,m)}; L_1)$. Це протиріччя доводить потрібне твердження. $\square$

Наш останній крок у доведенні теореми – довести, що функції $d_{(n,m)}$ і $d_{(\infty,m)}$ є неперервними і монотонними функціями від m.

Лема 4.2.31. $d_{(n,m)} \in C([1; +\infty))$ і $d_{(\infty,m)} \in C([1; +\infty))$.

Доведення. 1) Якщо $a^2 = d_{(n,m)} + \delta, \delta > 0$, то $S_n^{(m,a)}$ має n дійсних різних кореня (наслідок 4.2.29). Тепер, з теореми Гурвиця, існує $\varepsilon_0^{(\delta)}$, таке що $S_n^{(m+\varepsilon,a)}$ має усі дійсні корені для усіх $|\varepsilon| < \varepsilon_0^{(\delta)}$. Тобто, $d_{(n,m+\varepsilon)} \leqslant a^2 = d_{(n,m)} + \delta$.
2) Якщо $a^2 = d_{(n,m)} - \delta, \delta > 0$, то $S_n^{(m,a)}$ має принаймні два недійсних кореня. Тепер, з теореми Гурвиця, існує $\varepsilon_0^{(\delta)}$, таке що $S_n^{(m+\varepsilon,a)}$ також має принаймні два недійсних кореня для усіх $|\varepsilon| < \varepsilon_0^{(\delta)}$. Тобто, $d_{(n,m+\varepsilon)} \geqslant a^2 = d_{(n,m)} - \delta$.
Об'єднуючи 1) і 2) ми отримуємо потрібне твердження. Це доведення залишається в силі для $d_{(\infty,m)}$. $\square$

Щоб проілюструвати твердження, що вони доведені вище, ми покажемо деякі графіки із значеннями $d_{(n,m)}$.

Лема 4.2.32. $d_{(n,m_1)} \leqslant d_{(n,m_2)}$ для усіх $m_1 < m_2$.

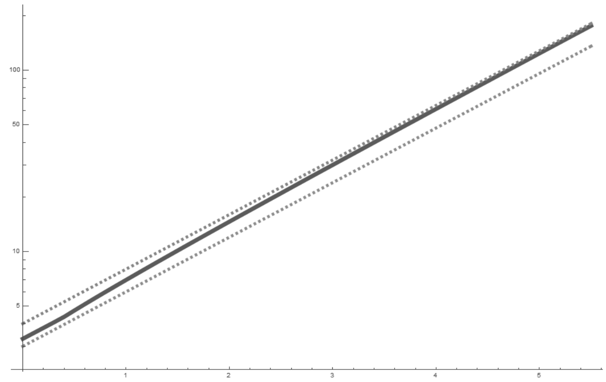

Рис. 1: Поведінка $d_{(3,m)}$ (на y-осі з логарифмічною шкалою) при різних значеннях m (на x-осі m змінюється від 0 до 5.6) показана як товста лінія. Пунктирна лінія показує межу, дану теоретичними оцінками.

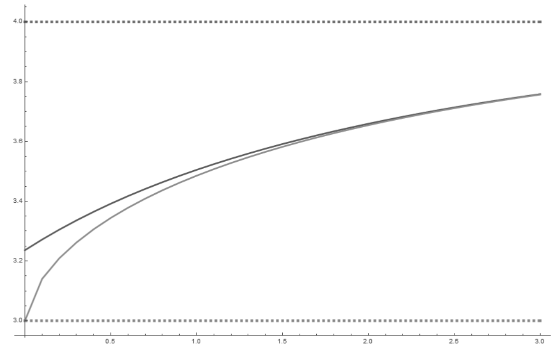

Рис. 2: Поведінка $d_{(3,m)}$(нижня регулярна лінія) і $d_{(4,m)}$ (верхня лінія) при різних значеннях m. Пунктирна лінія показує межу, дану теоретичними оцінками.

Доведення. Розглянемо $\frac{\partial}{\partial m} f^{(m,a)}(x) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (k!)^m \log(k!) x^k}{a^{k^2}}$. Легко перевірити, що для усіх $a^2 \geqslant 3 \cdot 2^m$ і $x \in (0; \frac{a^2}{2^m})$ виконується $\frac{(k!)^m \log(k!) x^k}{a^{k^2}} > \frac{((k+1)!)^m \log((k+1)!) x^{k+1}}{a^{(k+1)^2}}$, $k = 2, 3, \ldots$.

Тобто, $\frac{\partial}{\partial m} f^{(m,a)}(x) > 0$.

Виберемо m_2 і $a^2 = d_{(n,m_2)}$. Із наслідку 4.2.29 ми отримуємо, що $S_n^{(m_2,a)}$ має один двократний корінь на проміжку $(0; \frac{a^2}{2^{m_2}})$, а саме x_0. Оскільки $\frac{\partial}{\partial m} S_n^{(m_2,a)}(x) > 0$ для усіх $x \in (0; x_0)$ і $S_n^{(m_2,a)}(x_0) = 0$, маємо $S_n^{(m_1,a)}(x_0) < 0$ для усіх $m_1 < m_2$ ($x_0 \in (0; \frac{a^2}{2^{m_2}}) \subset (0; \frac{a^2}{2^{m_1}})$), що означає, що $S_n^{(m_1,a)} \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$ для усіх $m_1 < m_2$ (із наслідку 4.2.19 цей многочлен має $n-2$ дійсних кореня на $[\frac{a^2}{2^{m_1}}; +\infty)$, і, використовуючи, що $S_n^{(m_1,a)}(0) = 1 > 0$ і $S_n^{(m_1,a)}(x_0) < 0$, ми отримуємо потрібне твердження). $\square$

Теорема 4.2.16 доведена. $\square$

4.3 Стійкість відрізків ряду часткової тета-функції

Ми нагадуємо, що дійсний многочлен F називається стійким (іноді стабільним, або гурвіцевим), якщо усі його корені мають від'ємні дійсні частини, тобто $F(z_0) = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\, z_0 < 0$. Усі необхідні попередні відомості про такі многочлени дивись в розділі 2.

У роботі [69] Д.К. Дімітрова і Х.М. Пеньї було сформульоване наступне питання: якщо задано натуральне число n, чому дорівнює найменша стала s_n, така що усі корені відрізків ряду часткової тета-функції $S_n(z,a) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{a^{k^2}}$ мають від'ємні дійсні частини при $a > s_n$? Нижче ми доведемо, що така константа s_n існує для кожного n. Ми також доведемо, що існує константа s_∞, така що усі корені часткової тета-функції мають від'ємні дійсні частини тоді і тільки тоді, коли $a > s_\infty$.

Теорема 4.3.1. ([126]).

1. $s_3 \leqslant s_7 \leqslant s_{11} \leqslant \ldots$;
2. $s_5 \geqslant s_9 \geqslant s_{13} \geqslant \ldots$;
3. $\lim_{n\to\infty} s_{4n+3} = \lim_{n\to\infty} s_{4n+1} = s_\infty$

Зауваження 4.3.2. Використовуючи міркування, близькі до тих, що будуть використаними при доведенні останньої теореми, ми можемо показати, що послідовність s_{2n} є збіжною і $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s_\infty$. Ми не включаємо доведення цього факту, бо це доведення містить дуже громіздкі обчислення.

Доведення. Для доведення теореми ми будемо використовувати знаменитий критерій стійкості Ерміта-Білера.

З невеликою неакуратністю в позначеннях, ми будемо розглядати функцію

$$g_a(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{a^{k^2}}, \ a > 1, \tag{4.29}$$

і вивчати розподіл коренів її відрізков ряду Тейлора

$$S_n(x,a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{a^{k^2}}.$$

Ми вивчаємо питання про розташування коренів цих многочленів в правій півплощині $\{z: \ \mathrm{Re}\, z > 0\}$. Розглянемо непарний відрізок

$$S_{2n+1}(x,a) = 1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^4} - \frac{x^3}{a^9} + \ldots - \frac{x^{2n+1}}{a^{4n^2+4n+1}}.$$

Для цього многочлена два многочлена, що вони виникають у критерії стійкості Ерміта-Білера (дивись розділ 2, теорема 2.1.8) $P_n(x,a)$ і $Q_n(x,a)$ задаються виразами

$$P_n(x,a) = 1 - \frac{x^2}{a^4} + \frac{x^4}{a^{16}} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{a^{4n^2}}$$

і

$$Q_n(x,a) = (-\frac{1}{a}) \left(1 - \frac{x^2}{a^8} + \frac{x^4}{a^{24}} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{a^{4n^2+4n}}\right).$$

Нас цікавить наступне питання: для яких a многочлени $P_n(x,a)$ і $xQ_n(x,a)$ мають прості дійсні корені, які перемежовуються?

Позначимо через $q = a^4$ і $t = x^2$. Многочлени $P_n(x,a)$ і $Q_n(x,a)$ перейдуть до

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n(t,q) &= 1 - \tfrac{t}{q} + \tfrac{t^2}{q^4} - \ldots + (-1)^n \tfrac{t^n}{q^{n^2}}; \\ \tilde{Q}_n(t,q) &= 1 - \tfrac{t}{q^2} + \tfrac{t^2}{q^6} - \ldots + (-1)^n \tfrac{t^n}{q^{n(n+1)}}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Усі корені многочленів $P_n(x,a)$ і $Q_n(x,a)$ є дійсними і простими тоді і тільки тоді, коли усі корені многочленів $\tilde{P}_n(t,q)$ і $\tilde{Q}_n(t,q)$ є дійсними і простими. Припустимо, що усі корені многочленів $\tilde{P}_n(t,q)$ і $\tilde{Q}_n(t,q)$ є дійсними і простими. Позначимо через $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ корені многочлена $\tilde{P}_n(t,q)$ і через $t_1^* < t_2^* < \ldots < t_n^*$ корені многочлена $\tilde{Q}_n(t,q)$. Очевидно, що корені $P_n(x,a)$ і $xQ_n(x,a)$ перемежовуються тоді і тільки тоді, коли $t_1 < t_1^* < t_2 < t_2^* < \ldots < t_n < t_n^*$. Ми маємо $\tilde{Q}_n(t,q) = \tilde{P}_n(\frac{t}{q}, q)$, тому многочлен $\tilde{P}_n(t,q)$ має усі дійсні прості корені тоді і тільки тоді, коли многочлен $\tilde{Q}_n(t,q)$ має усі дійсні прості корені. Позначимо через

$$R_n(y,q) := \tilde{P}_n(q^n y, q) = \tilde{Q}_n(q^{n+1} y, q) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^{k(n-k)} y^k. \tag{4.31}$$

Нехай $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$ є коренями многочлена $R_n(y,q)$. Тоді коренями $\tilde{P}_n(t,q)$ є $t_k = y_k q^n$, $k = 1, 2, \ldots, n$; коренями $\tilde{Q}_n(t,q)$ є $t_k^* =$

$y_k q^{n+1},\ k = 1, 2, \ldots, n$. Тому умова $t_k < t_k^*$, очевидно, виконується для усіх $k = 1, 2, \ldots, n$. Умова $t_k^* < t_k,\ k = 1, 2, \ldots, n-1$, може бути переписаною у вигляді

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} > q,\ k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4.32}$$

Тому, усі корені многочлена $S_{2n+1}(x, a)$ розташовані у правій півплощині тоді і тільки тоді, коли корені $R_n(y, q)$ є дійсними і задовольняють (4.32) (ми нагадуємо, що $q = a^4$).

З того, що многочлени $S_n(x, a_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{a_0^{k^2}}$ мають тільки дійсні корені, випливає, що для усіх $a \geqslant a_0$ многочлени $S_n(x, a) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{a^{k^2}}$ мають тільки дійсні корені. Тому,

$$\forall n = 2, 3, 4, \ldots\ \exists r_n > 1 : S_n(x, a) \text{ має усі дійсні корені } \Leftrightarrow a \geqslant r_n. \tag{4.33}$$

Ми нагадуємо визначення 4.2.1 послідовності множників. Ми будемо також використовувати відомий факт, що, якщо $(\gamma_k)_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{MS}$, то з того, що многочлен $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ є стійким випливає, що многочлен $\sum_{k=0}^{n} \gamma_k a_k z^k$ також є стійким (дивись, наприклад, [161, глава VIII, параграф 3]). Зокрема, якщо многочлен $S_n(x, a_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{a_0^{k^2}}$ має усі корені в правій півплощині, то для усіх $a \geqslant a_0$ многочлени $S_n(x, a) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{a^{k^2}}$ мають усі корені в правій півплощині. Таким чином,

$$\forall n = 1, 2, 3, \ldots\ \exists s_n \geqslant 0 : \tag{4.34}$$
$$S_n(x, a) \text{ має усі корені в правій півплощині } \Leftrightarrow a > s_n.$$

Прямим обчисленням можна отримати, що

$$S_1(x, a) \text{ має усі корені в правій півплощині } \Leftrightarrow a > 0 \tag{4.35}$$
$$\Rightarrow s_1 = 0;$$
$$S_2(x, a) \text{ має усі корені в правій півплощині } \Leftrightarrow a > 0$$
$$\Rightarrow s_2 = 0;$$
$$S_3(x, a) \text{ має усі корені в правій півплощині } \Leftrightarrow a > 1$$
$$\Rightarrow s_3 = 1;$$

$$S_4(x,a) \text{ має усі корені в правій півплощині } \Leftrightarrow a^4 > 2 \tag{4.36}$$
$$\Rightarrow s_4 \approx 1.1892;$$
$$S_5(x,a) \text{ має усі корені в правій півплощині } \Leftrightarrow a^6 - a^4 - 1 > 0$$
$$\Rightarrow s_5 \approx 1.2106;$$
$$S_6(x,a) \text{ має усі корені в правій півплощині } \Leftrightarrow a^4 > 2$$
$$\Rightarrow s_6 \approx 1.1892;$$
$$S_7(x,a) \text{ має усі корені в правій півплощині } \Leftrightarrow$$
$$a^{16} - 2a^{12} + 1 > 0 \wedge a > 1 \Rightarrow s_7 \approx 1.1646.$$

Нам потрібна наступна лема.

Лема 4.3.3. Припустимо, що для деякого $q > 1$ усі корені многочлена $R_{2n}(y,q)$ є дійсними і задовольняють (4.32). Тоді

1. Усі корені многочлена $R_{2n+1}(y,q)$ є дійсними і задовольняють (4.32).
2. Усі корені многочлена $R_{2n+2}(y,q)$ є дійсними і задовольняють (4.32).

Доведення. 1. Дійсність коренів є наслідком теореми 4.1.8. Відмітимо, що

$$R_{2n+1}(y,q) = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k q^{k(2n+1-k)} y^k - y^{2n+1} = \tag{4.37}$$
$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k q^{k(2n-k)} (qy)^k - y^{2n+1} = R_{2n}(qy,q) - y^{2n+1},$$

і

$$R_{2n+1}(y,q) = 1 - \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1} q^{k(2n+1-k)} y^k = \tag{4.38}$$
$$1 - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k q^{(k+1)(2n-k)} y^{k+1} =$$
$$1 - q^{2n} y \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k q^{k(2n-k)} (\tfrac{y}{q})^k =$$
$$1 - q^{2n} y R_{2n}(\tfrac{y}{q}, q).$$

Позначимо через $y_1 < y_2 < \ldots < y_{2n-1} < y_{2n}$ корені многочлена $R_{2n}(y,q)$. Відмітимо, що $R_{2n}(t,q) > 0$ для $t \in (0,y_1) \cup (y_2,y_3) \cup \ldots \cup (y_{2n-2}, y_{2n-1}) \cup (y_{2n}, \infty)$ і $R_{2n}(t,q) < 0$ для $t \in (y_1,y_2) \cup (y_3,y_4) \cup \ldots \cup (y_{2n-1}, y_{2n})$. З (4.37) ми маємо

$$R_{2n+1}(y,q) < 0, \ \textit{для } y_{2k-1} < qy < y_{2k}, \ k = 1,2,\ldots,n. \tag{4.39}$$

І з (4.38) ми маємо

$$R_{2n+1}(y,q) > 0, \ \text{для} \ y_{2k-1} < \frac{y}{q} < y_{2k}, \ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.40}$$

Таким чином, ми отримуємо

$$R_{2n+1}(0,q) = 1 > 0; \tag{4.41}$$

$$R_{2n+1}(y,q) < 0, \ \text{для} \ \tfrac{y_{2k-1}}{q} < y < \tfrac{y_{2k}}{q}, \ k = 1, 2, \ldots, n;$$

$$R_{2n+1}(y,q) > 0, \ \text{для} \ qy_{2k-1} < y < qy_{2k}, \ k = 1, 2, \ldots, n;$$

$$R_{2n+1}(\infty,q) = -\infty.$$

Оскільки з наших припущень корені $R_{2n}(y,q)$ задовольняють (4.32) ми маємо

$$\frac{y_{2k+1}}{y_{2k-1}} = \frac{y_{2k+1}}{y_{2k}} \cdot \frac{y_{2k}}{y_{2k-1}} > q^2, \ k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

звідки

$$\frac{y_{2k-1}}{q} < qy_{2k-1} < \frac{y_{2k+1}}{q}, \ k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

або

$$\frac{y_1}{q} < \frac{y_2}{q} < qy_1 < qy_2 < \frac{y_3}{q} < \frac{y_4}{q} < qy_3 < qy_4 < \ldots$$

$$< \frac{y_{2n-1}}{q} < \frac{y_{2n}}{q} < qy_{2n-1} < qy_{2n}.$$

Позначимо через $u_1 < u_2 < \ldots < u_{2n} < u_{2n+1}$ корені многочлена $R_{2n+1}(y,q)$. Тоді

$$u_{2k-1} < \frac{y_{2k-1}}{q} < \frac{y_{2k}}{q} < u_{2k} < qy_{2k-1} < qy_{2k} < u_{2k+1}, \ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.42}$$

Таким чином, $\frac{u_{2k}}{u_{2k-1}} > \frac{y_{2k}}{y_{2k-1}} > q$ і $\frac{u_{2k+1}}{u_{2k}} > \frac{y_{2k}}{y_{2k-1}} > q$. Тобто, перше твердження леми доведено.

Доведемо твердження 2. Ми нагадуємо, що $S_n(x,q) = R_n(\frac{x}{q^n}, q)$. Тобто, усі корені $R_{2n}(y,q)$ належать до інтервалу (q^{-2n+1}, q^{2n-1}). Ми маємо

$$R_{2n+2}(y,q) = \textstyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k q^{k(2n+2-k)} y^k - q^{2n+1}y^{2n+1} + y^{2n+2} = \tag{4.43}$$

$$\textstyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k q^{k(2n-k)} (q^2 y)^k - y^{2n+1}(q^{2n+1} - y) =$$

$$R_{2n}(q^2 y, q) - y^{2n+1}(q^{2n+1} - y);$$

$$R_{2n+2}(y,q) = 1 - \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} q^{k(2n+2-k)} y^k + y^{2n+2} = \tag{4.44}$$
$$1 - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k q^{(k+1)(2n+1-k)} y^{k+1} + y^{2n+2} =$$
$$(1 + y^{2n+2}) - q^{2n+1} y \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k q^{k(2n-k)} y^k =$$
$$(1 + y^{2n+2}) - q^{2n+1} y R_{2n}(y,q).$$

З (4.43) ми маємо $R_{2n+2}(y,q) < 0$ для $\frac{y_{2k-1}}{q^2} < y < \frac{y_{2k}}{q^2}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (оскільки $y_{2n} < q^{2n-1} \Leftrightarrow \frac{y_{2n}}{q^2} < q^{2n-3}$, останній доданок в (4.43) є від'ємним).

З (4.44) ми маємо $R_{2n+2}(y,q) > 0$ для $y_{2k-1} < y < y_{2k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, і $R_{2n+2}(0,q) = 1 > 0$.

Ми нагадуємо, що усі корені $R_{2n}(y,q)$ належать до інтервалу (q^{-2n+1}, q^{2n-1}).

З (4.32) ми маємо $\frac{y_{2k+1}}{y_{2k-1}} > q^2$, і тому

$$0 < \frac{y_1}{q^2} < \frac{y_2}{q^2} < y_1 < y_2 < \frac{y_3}{q^2} < \frac{y_4}{q^2} < y_3 < y_4 < \ldots <$$
$$\frac{y_{2n-1}}{q^2} < \frac{y_{2n}}{q^2} < y_{2n-1} < y_{2n} < q^{2n-1}.$$

Позначимо через $v_1 < v_2 < \ldots < v_{2n+2}$ корені многочлена $R_{2n+2}(y,q)$. З теореми 4.1.8 є два кореня многочлена $R_{2n+2}(y,q)$ на інтервалі (q^{2n-1}, q^{2n+1}). Тому ми отримуємо

$$v_{2k-1} < \frac{y_{2k-1}}{q^2} < \frac{y_{2k}}{q^2} < v_{2k} < y_{2k-1} < y_{2k} < v_{2k+1}, \; k = 1, 2, \ldots, n,$$

звідки

$$\frac{v_{2k}}{v_{2k-1}} > \frac{y_{2k}}{y_{2k-1}} > q, \quad \frac{v_{2k+1}}{v_{2k}} > \frac{y_{2k}}{y_{2k-1}} > q, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Залишилося довести, що $\frac{v_{2n+2}}{v_{2n+1}} > q$. Відмітимо, що $R_{2n+2}(y,q) = y^{2n+2} R_{2n+2}(\frac{1}{y}, q)$, тобто $v_{2n+2} = \frac{1}{v_1}$, $v_{2n+1} = \frac{1}{v_2}$. Таким чином, $\frac{v_{2n+2}}{v_{2n+1}} = \frac{v_2}{v_1} > q$.

Твердження 2 доведено. □

Лема 4.3.4. Припустимо, що для деякого $q > 1$ усі корені многочлена $R_{2n+1}(y,q)$ є дійсними і задовольняють (4.32). Тоді усі корені многочлена $R_{2n-1}(y,q)$ є дійсними і задовольняють (4.32).

Доведення. Дійсність усіх коренів є наслідком теореми 4.1.8. Ми маємо

$$R_{2n+1}(y,q) = \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k q^{k(2n+1-k)} y^k + q^{2n}y^{2n} - y^{2n+1} = \tag{4.45}$$
$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k q^{k(2n-1-k)}(q^2y)^k + q^{2n}y^{2n} - y^{2n+1} =$$
$$R_{2n-1}(q^2y,q) + q^{2n}y^{2n} - y^{2n+1},$$

або

$$R_{2n-1}(y,q) = R_{2n+1}(\frac{y}{q^2},q) - \frac{y^{2n}}{q^{2n}} + \frac{y^{2n+1}}{q^{2(2n+1)}}. \tag{4.46}$$

Також ми маємо

$$R_{2n+1}(y,q) = -q^{2n}yR_{2n-1}(y,q) + 1 - y^{2n+1}, \tag{4.47}$$

або

$$q^{2n}yR_{2n-1}(y,q) = -R_{2n+1}(y,q) + 1 - y^{2n+1}. \tag{4.48}$$

Оскільки

$$R_{2n-1}(y,q) = -y^{2n-1}R_{2n-1}(\frac{1}{y},q), \tag{4.49}$$

достатньо довести твердження леми для тих коренів многочлена $R_{2n-1}(y,q)$, які належать до сегмента $[0,1]$. Позначимо через $y_1 < y_2 < \ldots < y_n < 1$ перші $n+1$ коренів многочлена $R_{2n+1}(y,q)$. Очевидно, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ многочлен $R_{2k+1}(1,q) = 0$. З (4.46)

$$R_{2n-1}(y,q) < 0, \text{ для } y_{2k-1}q^2 < y < y_{2k}q^2, \ k = 1,2,\ldots,\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor. \tag{4.50}$$

Для $y \leqslant 1$ з (4.46) ми маємо

$$R_{2n-1}(y,q) > 0, \text{ для } y_{2k-1} < y < y_{2k}, \ k = 1,2,\ldots,\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor. \tag{4.51}$$

Оскільки $S_{2n+1}(x,q) = R_{2n+1}(\frac{x}{q^{2n+1}},q)$ і $S_{2n+1}(x,q)$ має точно два корені на інтервалі (q,q^3), ми виводимо, що $R_{2n+1}(y,q)$ має точно два корені на інтервалі $(\frac{1}{q^{2n}},\frac{1}{q^{2n-2}})$. Більш того, $S_{2n-1}(x,q)$ не має коренів на інтервалі $(0,q)$, тому $R_{2n-1}(y,q)$ не має коренів на інтервалі $(0,\frac{1}{q^{2n-2}})$. Як наслідок, $[y_1,y_2] \subset (0,\frac{1}{q^{2n-2}})$, і $R_{2n-1}(y,q) > 0$ для $y \in (0,\frac{1}{q^{2n-2}})$. Оскільки $\frac{y_{2k+1}}{y_{2k-1}} > q^2$, ми маємо

$$y_1 < y_2 < q^2y_1 < q^2y_2 < y_3 < y_4 < q^2y_3 < q^2y_4 < \ldots$$

$$< y_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} < y_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} < q^2 y_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} < q^2 y_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}.$$

Припустимо, що $n = 2m$. Позначимо через $w_1, w_2, \dots, w_{4m-1}$ корені многочлена R_{2n-1} (ми будемо розглядати перші $2m$ коренів R_{2n+1}, розташовані на сегменті $[0,1]$, $w_{2m} = 1$). Відмітимо, що $\frac{1}{y_{2m}} = \frac{y_{2m+1}}{y_{2m}} > q$, $\frac{1}{y_{2m-1}} = \frac{y_{2m+1}}{y_{2m}} \cdot \frac{y_{2m}}{y_{2m-1}} > q^2$. Використовуючи (4.50) і (4.51), ми отримуємо

$$y_1 < y_2 < w_1 < q^2 y_1 < q^2 y_2 < w_2 < y_3 < y_4 < w_3 < q^2 y_3 < q^2 y_4 \quad (4.52)$$
$$< \dots < w_{2m-1} < q^2 y_{2m-1} < q^2 y_{2m} < y_{2m+1} = w_{2m} = 1.$$

Як і при доведенні першої леми, ми робимо висновок, що $\frac{w_{k+1}}{w_k} > q,\ k = 1, 2, \dots, 2m-1$, звідки $\frac{w_{k+1}}{w_k} > q,\ k = 1, 2, \dots, 4m-2$.

Припустимо, що $n = 2m+1$. Позначимо через $t_1, t_2, \dots, t_{4m+1}$ корені многочлена R_{2n-1} (ми розглянемо перші $2m+1$ коренів многочлена R_{2n-1}, розташовані на сегменті $[0,1]$, $t_{2m+1} = 1$). Використовуючи (4.50) і (4.51), ми отримуємо, що

$$y_1 < y_2 < t_1 < q^2 y_1 < q^2 y_2 < t_2 < y_3 < y_4 < t_3 < q^2 y_3 < q^2 y_4 \quad (4.53)$$
$$< \dots < t_{2m-1} < q^2 y_{2m-1} < q^2 y_{2m} < t_{2m} < y_{2m+1} < y_{2m+2} = t_{2m+1} = 1.$$

Як і при доведенні леми 4.3.3, ми робимо висновок, що $\frac{t_{k+1}}{t_k} > q,\ k = 1, 2, \dots, 2m$, звідки $\frac{w_{k+1}}{w_k} > q,\ k = 1, 2, \dots, 4m$. □

Припустимо, що усі корені функції $g_a(z)$ є дійсними і простими (згідно з теоремою 4.1.8 це означає, що $a^2 > q_\infty$). Позначимо через $0 < x_1 < x_2 < \dots$ корені функції $g_a(z)$.

Лема 4.3.5. $\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{x_2}{x_1},\ n = 2, 3, 4, \dots$.

Доведення. Відмітимо, що

$$g_a(x) = (1 - \tfrac{x}{a} + \dots + (-1)^{n-2} \tfrac{x^{n-2}}{a^{(n-2)^2}}) + \quad (4.54)$$
$$(-1)^{n-1} \tfrac{x^{n-1}}{a^{(n-1)^2}} (1 - \tfrac{x}{a^{2n-1}} + \dots + (-1)^{k-n+1} \tfrac{x^{k-n+1}}{a^{k^2-(n-1)^2}} + \dots)$$
$$= S_{n-2}(x, a) + (-1)^{n-1} \tfrac{x^{n-1}}{a^{(n-1)^2}} g_a(\tfrac{x}{a^{2n-2}}),\ n = 2, 3, \dots$$

Нехай $x \in (x_1 a^{2n-2}, x_2 a^{2n-2})$. Тоді $g_a(\frac{x}{a^{2n-2}}) < 0$. Звідки маємо,

$$\operatorname{sign}\left((-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{a^{(n-1)^2}} g_a(\frac{x}{a^{2n-2}}) \right) = (-1)^{n-2},\ x \in (x_1 a^{2n-2}, x_2 a^{2n-2}). \quad (4.55)$$

Із теореми 4.1.8, $a < x_1 < x_2 < a^3$, тому $x_1 a^{2n-2} \geqslant a^{2n-1} > a^{2n-5}$ і

$$(-1)^{n-2} S_{n-2}(x, a) > 0, \; x \in (x_1 a^{2n-2}, x_2 a^{2n-2}). \tag{4.56}$$

З (4.54), (4.55) і (4.56) ми отримуємо, що

$$(-1)^{n-2} g_a(x) > 0, \; x \in (x_1 a^{2n-2}, x_2 a^{2n-2}), n = 2, 3, \ldots. \tag{4.57}$$

Таким чином, ми маємо $2n$ інтервалів $(0, x_1)$, (x_1, x_2), $(x_1 a^2, x_2 a^2)$, $(x_1 a^4, x_2 a^4)$, $\ldots$, $(x_1 a^{4n-4}, x_2 a^{4n-4})$, які містяться в інтервалі $(0, a^{4n-1})$, і $g_a(x)$ є знакозмінною на цих інтервалах. Використовуючи теорему 4.1.8, ми приходимо до висновку, що

$$x_j < x_1 a^{2j-2} < x_2 a^{2j-2} < x_{j+1}, \; j = 2, 3, \ldots, 2n-1.$$

Оскільки $n \geqslant 2$ є довільним, ми маємо

$$x_j < x_1 a^{2j-2} < x_2 a^{2j-2} < x_{j+1}, \; j \geqslant 2. \tag{4.58}$$

Тобто, $\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{x_2}{x_1}$, $n \geqslant 2$. □

Ми нагадуємо, що з (4.34) многочлен $S_n(x, a)$ має усі корені в правій півплощині тоді і тільки тоді, коли $a > s_n$, і що усі корені многочлена $S_{2n+1}(x, a)$ розташовані в правій півплощині тоді і тільки тоді, коли усі корені многочлена $R_n(y, a^4)$ є дійсними і задовольняють (4.32). Твердження леми 4.3.3 еквівалентні наступним

$$s_{4n+3} \leqslant s_{4n+1}, \quad s_{4n+5} \leqslant s_{4n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.59}$$

Друга із цих нерівностей дає

$$1.2106 \approx s_5 \geqslant s_9 \geqslant s_{13} \geqslant \ldots. \tag{4.60}$$

Звідки, існує границя $\lim_{n\to\infty} s_{4n+1}$ і

$$B := \lim_{n\to\infty} s_{4n+1}. \tag{4.61}$$

Твердження леми 4.3.4 еквівалентні наступним

$$s_{4n+3} \geqslant s_{4n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.62}$$

або,

$$1 = s_3 \leqslant s_7 \leqslant s_{11} \leqslant \dots . \tag{4.63}$$

Звідки, існує границя $\lim_{n\to\infty} s_{4n+3}$ і

$$C := \lim_{n\to\infty} s_{4n+3}. \tag{4.64}$$

З (4.59) ми маємо

$$B \geqslant C. \tag{4.65}$$

Добре відомо (дивись [161, глава 7]), що знаменитий критерій Ерміта-Білера виконується не тільки для многочленів, а і для деяких класів цілих функцій. Наступна теорема є узагальненням теореми Ерміта-Білера для цілих функцій, які зростають не вище мінімального типу порядку один.

Теорема 4.3.6. ([161, глава 7]). Нехай $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, a_k > 0$, є цілою функцією, яка зростає не вище мінімального типу порядку один. Усі корені цілої функції G мають від'ємні дійсні частини тоді і тільки тоді, коли наступні дві цілі функції $f(z) = \sum_0^{\infty}(-1)^m a_{2m} z^m$ і $g(z) = z\sum_0^{\infty}(-1)^m a_{2m+1} z^m$ мають прості дійсні корені, які перемежовуються.

Також добре відомо, що порядок зростання цілої функції з коефіцієнтами a_k дається наступним виразом $\limsup_{n\to\infty} \frac{n\log n}{\log|a_n|^{-1}}$ (дивись, наприклад, [161, глава 1]). Тому, ціла функція $g_a(z)$ є функцією порядку 0, і тому ми можемо застосувати критерій Ерміта-Білера для цієї функції. Легко показати, що (аналогічно до поліноміального випадку), якщо для деякого $a_0 > 1$ всі корені цілої функції $g_{a_0}(z)$ розташовані в правій півплощині, то для усіх $a > a_0$ всі корені цілої функції $g_a(z)$ розташовані в правій півплощині. Таким чином,

$$\begin{gathered}\exists s_\infty > 1 : \text{ всі корені функції } g_a(z) \\ \text{розташовані в правій півплощині } \Leftrightarrow a > s_\infty.\end{gathered} \tag{4.66}$$

Зауважимо, що $\lim_{n\to\infty} S_{4n+1}(x,a) = g_a(x)$, і ця границя є рівномірною на компактах. З цього випливає, що для усіх $a \geqslant B$ усі корені g_a розташовані в замкненій півплощині $\{z : \mathrm{Re} z \geqslant 0\}$. Припустимо, що для деякого

a_0 функція g_{a_0} має корінь $ix_0, x_0 \in \mathbb{R}$. Тоді

$$1 - \frac{x_0^2}{a^4} + \frac{x_0^4}{a^{16}} - \frac{x_0^6}{a^{36}} + \cdots = 0$$

і

$$1 - \frac{x_0^2}{a^8} + \frac{x_0^4}{a^{24}} - \frac{x_0^6}{a^{48}} + \cdots = 0.$$

Позначимо через $t_0 = x_0^2, q_0 = a_0^4$. Тоді

$$g_{q_0}(t_0) = 1 - \frac{t_0}{q_0} + \frac{t_0^2}{q_0^4} - \frac{t_0^3}{q_0^9} + \cdots = 0$$

і

$$1 - \frac{t_0}{q_0^2} + \frac{t_0^2}{q_0^6} - \frac{t_0^3}{q_0^{12}} + \cdots = g_{q_0}(\frac{t_0}{q_0}) = 0,$$

звідки $t_0 = x_j, x_{j+1} = t_0 q_0$. Тому існує $j \in \mathbb{N}$, таке що $\frac{x_{j+1}}{x_j} = q_0$ (з теореми 4.1.8, для кожного j існує корінь функції g_{q_0}, який розташований між q_0^{2j} і q_0^{2j+2}, рівність $\frac{x_n}{x_j} = q_0$ є неможливою для $n > j+1$). Як ми довели, якщо усі корені многочлена $S_{4n+1}(x, a_0)$ належать до відкритої правої півплощини, то корені многочлена $\tilde{P}_{2n}(t, q_0) = 1 - \frac{t}{q_0} + \frac{t^2}{q_0^4} - \ldots + (-1)^{2n+1} \frac{t^{2n}}{q_0^{(2n)^2}}$, позначені як $t_1(2n), t_2(2n), \ldots, t_{2n}(2n)$ є дійсними і задовольняють умову $\frac{t_{j+1}(2n+1)}{t_j(2n+1)} > q_0$.

Доведемо, що $s_\infty \leqslant B$. Припустимо, що $a > B$. Тоді для усіх достатньо великих $n \geqslant n_0$ і усіх j ми маємо $\frac{t_{j+1}(2n)}{t_j(2n)} > q$. Оскільки $\lim_{n\to\infty} t_j(2n) = x_j$, ми отримуємо $\frac{x_{j+1}}{x_j} \geqslant q$. Із леми 4.3.5, якщо ми покажемо, що $\frac{x_2}{x_1} > q$, то для усіх j ми будемо мати $\frac{x_{j+1}}{x_j} > q$. Відмітимо, що $g_q(t) = 1 - \frac{t}{q} + \frac{t^2}{q^4} - \frac{t^3}{q^9} + \cdots = \tilde{P}_{2n}(t, q) - \frac{t^{2n+1}}{q^{(2n+1)^2}} + \frac{t^{2n+2}}{q^{(2n+2)^2}} - \cdots$. Нехай $q < t_1(2n) \leqslant t \leqslant t_2(2n) < q^3$, тоді $g_q(t) < 0$. Тобто, $q < x_1 < t_1(2n) < t_2(2n) < x_2 < q^3$, звідки $\frac{x_2}{x_1} > \frac{t_2(2n)}{t_1(2n)} > q$. Тоді немає таких j, що $\frac{x_{j+1}}{x_j} = q$. Тому ми отримуємо, що немає коренів $g_a(z)$ на прямій $\{z : \mathrm{Re}\, z = 0\}$, і тому для $a > B$ усі корені g_a розташовані в відкритій правій півплощині. Тому ми маємо

$$s_\infty \leqslant B. \tag{4.67}$$

Доведемо тепер, що $s_\infty \geqslant C$. Припустимо, що $s_\infty < C$. Виберемо $a, s_\infty < a < C$, і позначимо через $q = a^4$. Із теореми 4.3.6, усі корені функцій $g_q(t) = 1 - \frac{t}{q} + \frac{t^2}{q^4} - \frac{t^3}{q^9} + \cdots$ і $g_q(\frac{t}{q}) = 1 - \frac{t}{q^2} + \frac{t^2}{q^6} - \frac{t^3}{q^{12}} + \cdots$ є дійсними, і вони перемежовуються. Якщо ми позначимо $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ дійсні корені функції $g_q(t)$, то, як ми довели,

$$\forall j = 1, 2, 3, \ldots \ \frac{x_{j+1}}{x_j} > q.$$

Із леми 4.3.5, $\forall j = 2, 3, \ldots \ \frac{x_{j+1}}{x_j} > \frac{x_2}{x_1} > q$, і, якщо ми позначимо $\varepsilon := \frac{x_2}{x_1} - q > 0$, то

$$\forall j = 1, 2, 3, \ldots \ \frac{x_{j+1}}{x_j} > q + \varepsilon. \tag{4.68}$$

Ми маємо

$$\tilde{P}_{2n+1}(t, q) = 1 - \frac{t}{q} + \frac{t^2}{q^4} - \ldots - \frac{t^{2n+1}}{q^{(2n+1)^2}} = g_q(t) - \frac{t^{2n+2}}{q^{(2n+2)^2}} + \frac{t^{2n+3}}{q^{(2n+3)^2}} - \ldots .$$

Тобто, якщо $x_{2k-1} \leqslant t \leqslant x_{2k},\ k = 1, 2, \ldots, n$, то $\tilde{P}_{2n+1}(t, q) < 0$. Якщо ми позначимо через $t_{k,2n+1},\ 1 \leqslant k \leqslant 2n+1$, корені многочлена $\tilde{P}_{2n+1}(t, q)$, то $t_{2k-1,2n+1} < x_{2k-1} < x_{2k} < t_{2k,2n+1}$, тобто

$$\frac{t_{2k,2n+1}}{t_{2k-1,2n+1}} > q + \varepsilon,\ k = 1, 2, 3, \ldots\ n. \tag{4.69}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{2n+1}(t, q) &= -\frac{t^{2n+1}}{q^{(2n+1)^2}} \left(1 - \frac{q^{4n+2}}{tq} + \frac{q^{8n+4}}{t^2 q^4} - \ldots\right) \\ &= -\frac{t^{2n+1}}{q^{(2n+1)^2}} \tilde{P}_{2n+1}(\frac{q^{4n+2}}{t}, q).\end{aligned}$$

Ця формула демонструє симетрію між інтервалами додатності і від'ємності для многочлена $\tilde{P}_{2n+1}(t, q)$. Звідки,

$$\frac{t_{2k+1,2n+1}}{t_{2k,2n+1}} > q + \varepsilon,\ k = 1, 2, 3, \ldots\ n. \tag{4.70}$$

Тому ми довели, що для $s_\infty < a < C$ і для усіх $n \in \mathbb{N}$, усі корені $\tilde{P}_{2n+1}(t, q)$ є дійсними і задовольняють умову $\frac{t_{j+1,2n+1}}{t_{j,2n+1}} > q + \varepsilon$. Це означає, що усі корені $S_{4n+3}(x, a)$ розташовані у відкритій правій півплощині для $s_\infty < a < C$ і для усіх $n \in \mathbb{N}$. Це суперечить визначенню константи C (дивись (4.64)). Звідки маємо

$$s_\infty \geqslant C. \tag{4.71}$$

Тепер ми доведемо, що $s_\infty \geqslant B$. Припустимо, що $s_\infty < B$. Виберемо $a, s_\infty < a < B$, і позначимо через $q = a^4$. Із теореми 4.3.6 усі корені функцій $g_q(t) = 1 - \frac{t}{q} + \frac{t^2}{q^4} - \frac{t^3}{q^9} + \cdots$ і $g_q(\frac{t}{q}) = 1 - \frac{t}{q^2} + \frac{t^2}{q^6} - \frac{t^3}{q^{12}} + \cdots$ є дійсними, і вони перемежовуються. Якщо $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ є дійсними коренями функції $g_q(t)$, то, як ми довели, існує $\varepsilon > 0$, таке що

$$\forall j = 1, 2, 3, \ldots \ \frac{x_{j+1}}{x_j} > q + \varepsilon. \tag{4.72}$$

Ми маємо

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{2n}(t, q) &= 1 - \frac{t}{q} + \frac{t^2}{q^4} \ - \ldots + \frac{t^{2n}}{q^{(2n)^2}} \\ &= g_q(t) + \frac{t^{2n+1}}{q^{(2n+1)^2}} - \frac{t^{2n+2}}{q^{(2n+2)^2}} + \ldots .\end{aligned}$$

Звідки, якщо $x_{2k} \leqslant t \leqslant x_{2k+1}, \ k = 1, 2, \ldots, n-1$, то $\tilde{P}_{2n}(t, q) > 0$. Якщо ми позначимо через $t_{k,2n}, \ 1 \leqslant k \leqslant 2n$, корені многочлена $\tilde{P}_{2n}(t, q)$, то $t_{2k,2n} < x_{2k} < x_{2k+1} < t_{2k+1,2n}$, тобто

$$\frac{t_{2k+1,2n}}{t_{2k,2n}} > q + \varepsilon, \ k = 1, 2, 3, \ldots \ n-1. \tag{4.73}$$

З того, що $\tilde{P}_{2n}(t, q) \rightrightarrows g_q(t), \ n \to \infty$, на компактах, випливає, що $t_1(2n) \to x_1, \ t_2(2n) \to x_2$. Звідки,

$$\exists n_0 \ \forall n \geqslant n_0 : \frac{t_{2,2n}}{t_{1,2n}} \geqslant q + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.74}$$

Лема 4.3.7. Нерівність $\frac{t_{2k,4n-4}}{t_{2k-1,4n-4}} > \frac{t_{2,2n}}{t_{1,2n}}$ виконується для $n = 3, 4, 5, \ldots$ і $k = 1, 2, \ldots, 2n-2$.

Доведення. Ми маємо

$$\tilde{P}_{2n+2}(t, q) = \tilde{P}_{2n}(t, q) - \frac{t^{2n+1}}{q^{(2n+1)^2}} + \frac{t^{2n+2}}{q^{(2n+2)^2}}$$

і

$$\tilde{P}_{2n+2}(t, q) = 1 - \frac{t}{q} + \frac{t^2}{q^4} \tilde{P}_{2n}(\frac{t}{q^4}, q).$$

Таким чином, якщо $t_{1,2n} < t < t_{2,2n}$ або $t_{1,2n} q^4 < t < t_{2,2n} q^4$, ми маємо $\tilde{P}_{2n+2}(t, q) < 0$. Звідки маємо

$$\frac{t_{2,2n+2}}{t_{1,2n+2}} > \frac{t_{2,2n}}{t_{1,2n}}, \quad \frac{t_{4,2n+2}}{t_{3,2n+2}} > \frac{t_{2,2n}}{t_{1,2n}}. \tag{4.75}$$

Застосовуючи такі міркування до $\tilde{P}_{2n+4}(t,q)$, ми отримуємо з (4.75)

$$\frac{t_{2,2n+4}}{t_{1,2n+4}} > \frac{t_{2,2n}}{t_{1,2n}}, \quad \frac{t_{4,2n+4}}{t_{3,2n+4}} > \frac{t_{2,2n}}{t_{1,2n}}, \quad \frac{t_{6,2n+4}}{t_{5,2n+4}} > \frac{t_{2,2n}}{t_{1,2n}}, \tag{4.76}$$

і так далі. Для $\tilde{P}_{4n-4}(t,q)$ ми маємо

$$\frac{t_{2k,4n-4}}{t_{2k-1,4n-4}} > \frac{t_{2,2n}}{t_{1,2n}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4.77}$$

Зазначимо, що

$$\tilde{P}_{4n-4}(t,q) = \frac{t^{4n-4}}{q^{(4n-4)^2}} \tilde{P}_{4n-4}(\frac{q^{4n-6}}{t}, q).$$

Таким чином,

$$t_{j,4n-4} = \frac{q^{4n-6}}{t_{4n-4-j+1,4n-4}} = \frac{q^{4n-6}}{t_{4n-j-3,4n-4}}.$$

Звідки, використовуючи (4.77), ми отримуємо

$$\frac{t_{2k,4n-4}}{t_{2k-1,4n-4}} = \frac{t_{4n-2k-2,4n-4}}{t_{4n-2k-3,4n-4}} > \frac{t_{2,2n}}{t_{1,2n}}, \quad 2n-k-1 = 1, 2, \ldots, n-1,$$

або

$$\frac{t_{2k,4n-4}}{t_{2k-1,4n-4}} = \frac{t_{4n-2k-2,4n-4}}{t_{4n-2k-3,4n-4}} > \frac{t_{2,2n}}{t_{1,2n}}, \quad k = n, n+1, \ldots, 2n-2.$$

Беручи до уваги (4.77), ми отримуємо твердження леми. □

Фіксуємо натуральне число $m \geqslant n_0$ у (4.74). Із леми 4.3.7 , ми маємо

$$\frac{t_{2k,4m-4}}{t_{2k-1,4m-4}} > q + \frac{\varepsilon}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2m-2.$$

Використовуючи (4.73), ми отримуємо

$$\frac{t_{2k+1,4m-4}}{t_{2k,4m-4}} \geqslant q + \varepsilon > q + \frac{\varepsilon}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2m-3.$$

Тобто, для усіх коренів $\tilde{P}_{4nm-4}(t,q)$ виконується нерівність

$$\frac{t_{j+1,4m-4}}{t_{j,4m-4}} > q + \frac{\varepsilon}{2} > q, j = 1, 2, \ldots, 4m-5.$$

Це означає, що усі корені $S_{8m-7}(x,a)$ розташовані у відкритій правій півплощині для $s_\infty < a < B$ і для усіх $m \geqslant n_0$. Це суперечить визначенню константи B (дивись (4.61)). Таким чином,

$$s_\infty \geqslant B. \tag{4.78}$$

Остаточно ми маємо $B = C = s_\infty$.

Теорема 4.3.1 доведена. □

4.4 Цілі функції, у яких відрізки ряду Тейлора мають усі дійсні корені

У цьому параграфі ми будемо вивчати цілі функції з додатними коефіцієнтами Тейлора, у яких усі (або усі, починаючи з деякого) відрізки ряду Тейлора мають тільки дійсні корені. Очевидно, що такі функції формують деякий підклас класу Лаґерра-Поліа. Якщо функція f належить до вказаного підкласу, то з (4.25) легко довести, що

$$\liminf_{n\to\infty} q_n(f) \geqslant 2. \tag{4.79}$$

В роботі ([121]) ми довели, що константа 2 в останньої нерівності може бути збільшена до $1+\sqrt{3}$. Використовуючи метод, подібний до використаного в ([121]), ми можемо збільшити цю константу до 3.

Спершу ми будемо досліджувати функцію

$$f_a(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\ a^{k^2}},\ a > 1,$$

із властивістю

$$q_n(f_a) = \frac{n}{n-1} a^2 \ \to a^2,\ n \to \infty. \tag{4.80}$$

Оскільки $\{a^{-k^2}\}_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{CZDS}$ для $a \geqslant 1$, ця послідовність є послідовністю множників. Тобто, з того, що $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$ випливає, що $f_a(z) \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$, тобто має усі дійсні від'ємні корені для усіх $a \geqslant 1$. Спершу ми відповімо на питання: для яких a функція f_a має відрізки ряду Тейлора з усіма дійсними коренями?

Теорема 4.4.1. ([123]). Функція f_a має усі відрізки ряду Тейлора з усіма дійсними коренями тоді і тільки тоді, коли функція f_a має усі, починаючи з деякого, відрізки ряду Тейлора з усіма дійсними коренями, і це тоді і тільки тоді, коли $a^2 \geqslant q_\infty$, де константа q_∞ введена в теоремі 4.1.8.

Доведення. Наступна тотожність

$$\frac{d}{dz} S_n(z, f_a) = \frac{1}{a} S_{n-1}(\frac{z}{a^2}, f_a) \tag{4.81}$$

демонструє, що

$$S_n(z,f_a)\in\mathcal{HP}\Longrightarrow S_{n-1}(z,f_a)\in\mathcal{HP}.$$

Із теореми 4.1.8 ми маємо

$$\sum_{j=0}^{2k+1}\frac{z^j}{a^{j^2}}\in\mathcal{HP}\quad\text{для усіх}\quad k\in\mathbf{N}\iff a^2\geqslant q_\infty. \tag{4.82}$$

Оскільки $\{\frac{1}{k!}\}_{k=0}^\infty\in\mathcal{CZDS}$, і із (4.81) ми маємо

$$a^2\geqslant q_\infty\Longrightarrow\forall k\in\mathbb{N}\quad S_{2k+1}(z,f_a)\in\mathcal{HP}. \tag{4.83}$$

Залишилося довести, що

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad S_n(z,f_a)\in\mathcal{HP}\Longrightarrow a^2\geqslant q_\infty. \tag{4.84}$$

Оскільки $\{a^{-k^2}\}_{k=0}^\infty\in\mathcal{CZDS},\quad\forall a\geqslant 1$, ми маємо

$$S_n(z,f_{\tilde a})\in\mathcal{HP}\Longrightarrow\forall a\geqslant\tilde a\quad S_n(z,f_a)\in\mathcal{HP}.$$

Нехай

$$k_n:=\inf\{a>1:S_n(z,f_a)\in\mathcal{HP}\}. \tag{4.85}$$

З (4.81) ми маємо

$$k_2\leqslant k_3\leqslant k_4\leqslant\ldots,$$

тому

$$\exists\lim_{n\to\infty}k_n.$$

Позначимо через $k_\infty=\lim_{n\to\infty}k_n$. Ми знаємо, що $k_\infty\leqslant q_\infty$, і ми збираємося довести, що $k_\infty=q_\infty$.

Ми розглянемо многочлени

$$F_n(z,a):=S_n(-z,f_a)=\sum_{k=o}^n\frac{(-1)^k z^k}{k!a^{k^2}}.$$

Очевидно, що

$$F_n(z,a)\in\mathcal{HP}\Leftrightarrow S_n(z,f_a)\in\mathcal{HP}.$$

Ми відповімо на наступне питання: для яких a многочлени $F_n(z,a)$ мають тільки дійсні корені? Для цього нам потрібна наступна лема.

Лема 4.4.2. Припустимо, що $a^2 \geqslant 3$. Тоді існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для усіх $n \geqslant n_0$ многочлен $F_n(z,a)$ має точно два кореня у колі $\{z : |z| > na^{2n-3}\}$.

Доведення. Ми маємо

$$F_n(z,a) = \frac{(-1)^n z^n}{n!\ a^{n^2}} \sum_{k=o}^{n} (-1)^{k-n} \frac{n!}{k! z^{n-k} a^{k^2-n^2}}.$$

Позначимо через $t := \frac{na^{2n}}{z}$. Для $|z| > na^{2n-3}$ ми маємо $|t| < a^3$. Ми отримуємо для $n \geqslant 4$

$$\begin{gathered} F_n(z,a) = \tfrac{(-1)^n z^n}{n!\ a^{n^2}} \sum_{k=o}^{n} (-1)^{k-n}\ \tfrac{(n-1)!}{k!\ n^{n-k-1}} \tfrac{t^{n-k}}{a^{(n-k)^2}} = \\ \tfrac{(-1)^n\ z^n}{n!\ a^{n^2}} \sum_{j=o}^{n} (-1)^j\ \tfrac{(n-1)!}{(n-j)!\ n^{j-1}} \tfrac{t^j}{a^{j^2}} = \\ \tfrac{(-1)^n z^n}{n!\ a^{n^2}} \Big((1 - \tfrac{t}{a} + \tfrac{n-1}{n} \tfrac{t^2}{a^4} - \tfrac{(n-1)(n-2)}{n^2} \tfrac{t^3}{a^9} + \tfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} \tfrac{t^4}{a^{16}}) \\ + \sum_{j=5}^{n} (-1)^j\ \tfrac{(n-1)!}{(n-j)!\ n^{j-1}} \tfrac{t^j}{a^{j^2}} \Big). \end{gathered} \tag{4.86}$$

Далі ми будемо використовувати дві леми з першого параграфу цього розділу, в яких йдеться про часткову тета-функцію g_a і про многочлен $S_4(-z, g_a) = 1 - \frac{t}{a} + \frac{t^2}{a^4} - \frac{t^3}{a^9} + \frac{t^4}{a^{16}}$, а саме лема 4.1.10 і лема 4.1.11. Оскільки

$$\begin{gathered} Q_4(t,a) := (1 - \tfrac{t}{a} + \tfrac{n-1}{n} \tfrac{t^2}{a^4} - \tfrac{(n-1)(n-2)}{n^2} \tfrac{t^3}{a^9} + \\ \tfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} \tfrac{t^4}{a^{16}}) \longrightarrow S_4(-t, g_a), \quad n \to \infty, \end{gathered} \tag{4.87}$$

і ця границя є рівномірною на компактах, ми отримуємо з леми 4.1.10, леми 4.1.11 і теореми Гурвиця, що

$$\exists n_0 \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \forall \phi \in [0, 2\pi] \quad |Q_4(a^3 e^{i\phi}, a)| \geqslant \frac{1}{2} a^{-4}, \tag{4.88}$$

і для усіх $n \geqslant n_0$ многочлен $Q_4(t,a)$ має точно два корені у колі $\{t : |t| < a^3\}$.

З (4.86) ми маємо

$$\begin{gathered} F_n(z,a) = \tfrac{(-1)^n z^n}{n!\ a^{n^2}} \big(Q_4(t,a) + \\ \sum_{j=5}^{n} (-1)^j \tfrac{(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)}{n^{j-1}} \tfrac{t^j}{a^{j^2}} \Big) =: \tfrac{(-1)^n z^n}{n!\ a^{n^2}} (Q_4(t,a) + T_n(t,a)). \end{gathered} \tag{4.89}$$

Оскільки

$$|T_n(a^3 e^{i\phi}, a)| \leqslant \sum_{j=5}^{n} \frac{(a^3)^j}{a^{j^2}} \leqslant a^{-10} \sum_{j=0}^{\infty} a^{-8j} = \frac{1}{a^2(a^8-1)},$$

і

$$\frac{1}{2}a^{-4} > \frac{1}{a^2(a^8-1)}, \quad a^2 \geqslant 3,$$

ми отримуємо потрібне твердження леми. $\square$

Доведемо тепер (4.84). Припустимо, що для усіх $n \in \mathbb{N}$ $\quad S_n(z, f_a) \in \mathcal{HP}$ для деякого $a^2 \geqslant 3$. Тоді існує $n_0 \in \mathbb{N}$, такий що для усіх $n \geqslant n_0$ $\quad F_n(z,a) \in \mathcal{HP}$. По лемі 4.4.3 існує $n_1 \in \mathbb{N}$, такий що для усіх $n \geqslant n_1$ многочлен $F_n(z,a)$ має точно два корені в області $\{z : |z| > na^{2n-3}\}$. Тоді для $n \geqslant \max(n_0, n_1) =: n_2$ існує $x_n \in (na^{2n-3}, \infty) : \quad F_n(x_n, a) = 0$. Для $x \geqslant na^{2n-1}$ ми маємо

$$1 < \frac{x}{a} < \frac{x^2}{2a^4} < \cdots < \frac{x^{n-1}}{(n-1)!\ a^{(n-1)^2}} \leqslant \frac{x^n}{n!\ a^{n^2}},$$

і тому

$$x \geqslant na^{2n-1} \Rightarrow F_n(x,a) \neq 0.$$

Таким чином, $x_n \in (na^{2n-3}, na^{2n-1})$. Зафіксуємо довільне $m \in \mathbb{N}$. Ми маємо для $n > \max(n_2, 2m+4)$

$$0 = (-1)^{n-1}F_n(x_n,a) = \textstyle\sum_{k=0}^{n-2m}(-1)^{k+n-1}\frac{x_n^k}{k!\ a^{k^2}} + \left(\frac{x_n^{n-2m+1}}{(n-2m+1)!\ a^{(n-2m+1)^2}} - \ldots - \frac{x_n^{n-2}}{(n-2)!\ a^{(n-2)^2}} + \frac{x_n^{n-1}}{(n-1)!\ a^{(n-1)^2}} - \frac{x_n^{n}}{(n)!\ a^{(n)^2}}\right). \tag{4.90}$$

Для $x_n \in (na^{2n-3}, na^{2n-1})$ доданки в $\sum_{k=0}^{n-2m}(-1)^{k+n-1}\frac{x_n^k}{k!\ a^{k^2}}$ є знакозмінними і їхні модулі зростають. Тому

$$\sum_{k=0}^{n-2m}(-1)^{k+n-1}\frac{x_n^k}{k!\ a^{k^2}} < 0,$$

і з (4.90) ми отримуємо

$$\left(\frac{x_n^{n-2m+1}}{(n-2m+1)!\ a^{(n-2m+1)^2}} - \ldots - \frac{x_n^{n-2}}{(n-2)!\ a^{(n-2)^2}} + \frac{x_n^{n-1}}{(n-1)!\ a^{(n-1)^2}} - \frac{x_n^{n}}{(n)!\ a^{(n)^2}}\right) > 0.$$

Розділимо останню нерівність на $-\frac{x_n^n}{(n)!\ a^{(n)^2}}$ і перепишемо з кінця к початку, ми маємо

$$1 - \frac{n}{x_n}a^{2n-1} + \frac{n(n-1)}{x_n^2}a^{2(2n-2)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{x_n^3}a^{3(2n-3)} + \cdots \\ + \frac{n(n-1)\cdots(n-2m+3)}{x_n^{2m-2}}a^{(2m-2)(2n-2m+2)} - \\ \frac{n(n-1)\cdots(n-2m+2)}{x_n^{2m-1}}a^{(2m-1)(2n-2m+1)} < 0. \tag{4.91}$$

Позначимо $y_n = \frac{na^{2n}}{x_n}$. Оскільки $x_n \in (na^{2n-3}, na^{2n-1})$, ми маємо $y_n \in (a, a^3)$. В цих позначеннях перепишемо (4.91) у вигляді

$$1 - \frac{y_n}{a} + \frac{(n-1)}{n}\frac{y_n^2}{a^4} - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\frac{y_n^3}{a^9} + \cdots + \\ \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-2m+3)}{n^{2m-3}}\frac{y_n^{2m-2}}{a^{(2m-2)^2}} - \\ \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-2m+2)}{n^{2m-2}}\frac{y_n^{2m-1}}{a^{(2m-1)^2}} < 0. \tag{4.92}$$

Переходячи до границі у цій формулі при $n \to \infty$, ми отримуємо, що існує $y_0 \in [a, a^3]$, таке що

$$S_{2m-1}(y_0, g_a) \leqslant 0.$$

Із першого пункту теореми 4.1.11 це означає, що

$$S_{2m-1}(z, g_a) \in \mathcal{HP}.$$

Оскільки m є довільним натуральним числом, ми отримуємо з третього пункту теореми 4.1.11, що

$$a^2 \geqslant q_\infty.$$

Використовуючи (4.82), ми робимо висновок , що

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n(z, a) \in \mathcal{HP} \Longleftrightarrow a^2 \geqslant q_\infty.$$

□

Наступна теорема із роботи [123] дає часткову інформацію про клас цілих функцій з гіперболічними відрізками ряду Тейлора.

Теорема 4.4.3. ([123]). Нехай $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad a_k > 0$, є цілою функцією, і $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ – її відрізки ряду Тейлора. Припустимо, що існує послідовність $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, така що $S_{n_k}(z) \in \mathcal{HP}$ для $k \in \mathbb{N}$. Якщо існує $\lim_{n\to\infty} q_n(f)$ і $q_0 := \lim_{n\to\infty} q_n(f)$, то для кожного $m \in \mathbb{N}$ ми маємо $\sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{k!\ (\sqrt{q_0})^{k^2}} \in \mathcal{HP}$.

З доведених теореми 4.4.1 і теореми 4.4.3 випливає, що, якщо ціла функція з додатними коефіцієнтами має гіперболічні відрізки ряду Тейлору і існує границя $\lim_{n\to\infty} q_n(f)$, то $\lim_{n\to\infty} q_n(f) \geqslant q_\infty$.

Наступна відома тотожність належить Гаусу:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{z}{q^k}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)}\ , q>1. \tag{4.93}$$

Тому ціла функція $y_q(z) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)}\ , q > 1$, із властивістю

$$q_n(y_q) = \frac{q^n-1}{q^{n-1}-1} \ \to q,\ n\to\infty. \tag{4.94}$$

має тільки дійсні корені.

Наш вчитель І.В.Островський поставив нам питання: для яких q функція $y_q(z)$ має відрізки ряду Тейлора з усіма дійсними коренями?

Теорема 4.4.4. ([123]).

1. $q > q_\infty \Rightarrow\ \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_0 \quad S_n(z, y_q) \in \mathcal{HP}$;
2. $q < q_\infty \Rightarrow\ \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_0 \quad S_n(z, y_q) \notin \mathcal{HP}$.

Доведення. Твердження

$$q < q_\infty \Rightarrow\ \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_0 \quad S_n(z, y_q) \notin \mathcal{HP}$$

є простим наслідком теореми 4.4.1 і теореми 4.4.3. Будемо доводити, що

$$q > q_\infty \Rightarrow\ \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_0 \quad S_n(z, y_q) \in \mathcal{HP}.$$

Позначимо через

$$S_n(x,q) := S_n(-x, y_q) = 1 - \frac{x}{q-1} + \frac{x^2}{(q^2-1)(q-1)} - \cdots$$
$$+(-1)^n \frac{x^n}{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q-1)}.$$

Очевидно, що $S_n(x,q) \in \mathcal{HP} \Leftrightarrow S_n(x,y_q) \in \mathcal{HP}$. Ми будемо досліджувати многочлени $S_n(x,q)$ для $q > q_\infty$. Для зручності ми будемо вважати, що вираз $(q^j-1)(q^{j-1}-1)\cdots(q-1)$ дорівнює 1 для $j=0$.

Нам потрібні дві наступні леми.

Лема 4.4.5. Припустимо, що $q \geqslant 3$. Тоді існують невід'ємні числа $0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n-2}$, такі що
(i) $q^j - 1 < \xi_j < q^{j+1} - 1$;
$(ii) (-1)^j S_n(\xi_j, q) \geqslant 0$.

Доведення. Положимо $\xi_j = \sqrt{(q^{j+1}-1)(q^j-1)}, j = 1, 2, \ldots$. Очевидно, що виконується (i). Для $j = 3, 4, \ldots, n-3$ ми маємо

$$\begin{gathered}(-1)^j S_n(\xi_j,q) = \tfrac{\xi_j^j}{(q^j-1)(q^{j-1}-1)\cdots(q-1)} - \\ \left(\tfrac{\xi_j^{j-1}}{(q^{j-1}-1)(q^{j-2}-1)\cdots(q-1)} + \tfrac{\xi_j^{j+1}}{(q^{j+1}-1)(q^j-1)\cdots(q-1)}\right) \\ + \left(\tfrac{\xi_j^{j-2}}{(q^{j-2}-1)(q^{j-3}-1)\cdots(q-1)} + \tfrac{\xi_j^{j+2}}{(q^{j+2}-1)(q^{j+1}-1)\cdots(q-1)}\right) - \\ \left(\tfrac{\xi_j^{j-3}}{(q^{j-3}-1)(q^{j-4}-1)\cdots(q-1)} + \tfrac{\xi_j^{j+3}}{(q^{j+3}-1)(q^{j+2}-1)\cdots(q-1)}\right) + R_{j,n}(\xi_j,q),\end{gathered} \tag{4.95}$$

де

$$\begin{gathered}R_{j,n}(\xi_j,q) = \textstyle\sum_{k=0}^{j-4}(-1)^{k+j}\tfrac{\xi_j^k}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)} \\ + \textstyle\sum_{k=j+4}^{n}(-1)^{k+j}\tfrac{\xi_j^k}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)} \\ =: \Sigma_1(\xi_j,q) + \Sigma_2(\xi_j,q).\end{gathered} \tag{4.96}$$

Для довільних $z \in (q^j - 1, q^{j+1} - 1)$

$$\frac{z^k}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)} \leqslant \frac{z^{k+1}}{(q^{k+1}-1)(q^k-1)\cdots(q-1)}$$

виконується для $0 \leqslant k \leqslant j-1$. Тобто, для усіх $z \in (q^j-1, q^{j+1}-1)$ доданки в $\Sigma_1(z,q)$ є знакозмінними і їхні модулі зростають. Аналогічно, для усіх $z \in (q^j-1, q^{j+1}-1)$

$$\frac{z^k}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)} \geqslant \frac{z^{k+1}}{(q^{k+1}-1)(q^k-1)\cdots(q-1)}$$

виконується для $j+1 \leqslant k \leqslant n$. Тобто, для усіх $z \in (q^j-1, q^{j+1}-1)$ доданки в $\Sigma_2(z,q)$ є знакозмінними і їхні модулі спадають. Тому, $\Sigma_1(z,q) \geqslant 0$, $\Sigma_2(z,q) \geqslant 0$ для усіх $z \in (q^j-1, q^{j+1}-1)$, і, зокрема, це є вірним для $z = \xi_j = \sqrt{(q^j-1)(q^{j+1}-1)}$. Тобто ми маємо

$$(-1)^j S_n(\xi_j,q) \geqslant \frac{(q^{j+1}-1)^{j/2}(q^j-1)^{j/2-1}}{(q^{j-1}-1)(q^{j-2}-1)\cdots(q-1)} - 2\frac{(q^{j+1}-1)^{(j-1)/2}(q^j-1)^{(j-1)/2}}{(q^{j-1}-1)(q^{j-2}-1)\cdots(q-1)} \tag{4.97}$$
$$+\left(\frac{(q^{j+1}-1)^{j/2-1}(q^j-1)^{j/2-1}}{(q^{j-2}-1)(q^{j-3}-1)\cdots(q-1)} + \frac{(q^{j+1}-1)^{j/2+1}(q^j-1)^{j/2+1}}{(q^{j+2}-1)(q^{j+1}-1)\cdots(q-1)}\right) -$$
$$\left(\frac{(q^{j+1}-1)^{(j-3)/2}(q^j-1)^{(j-3)/2}}{(q^{j-3}-1)(q^{j-4}-1)\cdots(q-1)} + \frac{(q^{j+1}-1)^{(j+3)/2}(q^j-1)^{(j+3)/2}}{(q^{j+3}-1)(q^{j+2}-1)\cdots(q-1)}\right)$$
$$= \frac{(q^{j+1}-1)^{j/2}(q^j-1)^{j/2-1}}{(q^{j-1}-1)(q^{j-2}-1)\cdots(q-1)} \times$$
$$\Bigg(1 - 2\sqrt{\frac{q^j-1}{q^{j+1}-1}} + \Big(\frac{q^{j-1}-1}{q^{j+1}-1} + \frac{q^j-1}{q^{j+2}-1}\Big) -$$
$$\Big(\frac{(q^{j-1}-1)(q^{j-2}-1)}{(q^{j+1}-1)^{3/2}(q^j-1)^{1/2}} + \frac{(q^{j+1}-1)^{1/2}(q^j-1)^{3/2}}{(q^{j+3}-1)(q^{j+2}-1)}\Big)\Bigg).$$

Оскільки $\frac{q^{j-1}-1}{q^j-1} \leqslant \frac{1}{q}$, ми маємо

$$(-1)^j S_n(\xi_j,q) \geqslant \frac{(q^{j+1}-1)^{j/2}(q^j-1)^{j/2-1}}{(q^{j-1}-1)(q^{j-2}-1)\cdots(q-1)} \Bigg(1 - 2\sqrt{\frac{q^j-1}{q^{j+1}-1}} + \tag{4.98}$$
$$\Big(\frac{q^{j-1}-1}{q^{j+1}-1} + \frac{q^j-1}{q^{j+2}-1}\Big) - \frac{2}{q^{9/2}}\Bigg)$$
$$=: \frac{(q^{j+1}-1)^{j/2}(q^j-1)^{j/2-1}}{(q^{j-1}-1)(q^{j-2}-1)\cdots(q-1)} F_j(q).$$

Міркуючи аналогічно для $j=2$ і $j=n-2$, ми маємо

$$(-1)^j S_n(\xi_j,q) \geqslant \frac{(q^{j+1}-1)^{j/2}(q^j-1)^{j/2-1}}{(q^{j-1}-1)(q^{j-2}-1)\cdots(q-1)} \Bigg(1 - 2\sqrt{\frac{q^j-1}{q^{j+1}-1}} + \tag{4.99}$$
$$\Big(\frac{q^{j-1}-1}{q^{j+1}-1} + \frac{q^j-1}{q^{j+2}-1}\Big) - \frac{1}{q^{9/2}}\Bigg) \geqslant \frac{(q^{j+1}-1)^{j/2}(q^j-1)^{j/2-1}}{(q^{j-1}-1)(q^{j-2}-1)\cdots(q-1)} F_j(q).$$

Ми будемо оцінювати $F_j(q)$ знизу. Ми маємо для усіх $A \in \mathbb{R}$

$$F_j(q) = \left(1 - 2\sqrt{\frac{q^j-1}{q^{j+1}-1}} + \Big((1-A)\frac{q^{j-1}-1}{q^{j+1}-1} + \frac{q^j-1}{q^{j+2}-1}\Big)\right) + \tag{4.100}$$
$$+\left(A\frac{q^{j-1}-1}{q^{j+1}-1} - \frac{2}{q^{9/2}}\right)$$

Оскільки $\frac{q^{j+1}-1}{q^{j-1}-1} \leqslant q^2+q+1$ для $j \geqslant 2$, ми отримуємо

$$A\frac{q^{j-1}-1}{q^{j+1}-1} - \frac{2}{q^{9/2}} = A\frac{q^{j-1}-1}{q^{j+1}-1} q^{-9/2}\left(q^{9/2} - \frac{2}{A}\frac{q^{j+1}-1}{q^{j-1}-1}\right)$$
$$\geqslant A\frac{q^{j-1}-1}{q^{j+1}-1} q^{-9/2}\left(q^{9/2} - \frac{2}{A}(q^2+q+1)\right) > 0$$

для $A > \frac{2(q^2+q+1)}{q^{9/2}}$. Так як $q \geqslant 3$,

$$\frac{2(q^2+q+1)}{q^{9/2}} \leqslant \frac{2 \cdot 13}{3^{9/2}} \leqslant 0.2\ .$$

Положимо $A = 0.2$. Тоді з наших оцінок ми маємо

$$F_j(q) \geqslant \left(1 - 2\sqrt{\frac{q^j-1}{q^{j+1}-1}} + (0.8\frac{q^{j-1}-1}{q^{j+1}-1} + \frac{q^j-1}{q^{j+2}-1})\right).$$

Для $j \geqslant 2, q \geqslant 3$ виконується наступна нерівність

$$\frac{q^{j-1}-1}{q^{j+1}-1} \geqslant \frac{1}{q^2+q+1} \geqslant \frac{9}{13q^2} \geqslant \frac{9}{13}\frac{q^j-1}{q^{j+2}-1}.$$

Таким чином,

$$F_j(q) \geqslant 1 - 2\sqrt{\frac{q^j-1}{q^{j+1}-1}} + (1 + \frac{9}{13} \cdot 0.8)\frac{q^j-1}{q^{j+2}-1} =$$

$$\frac{q^j-1}{q^{j+2}-1}\left(\frac{q^{j+2}-1}{q^j-1} - 2\frac{(q^{j+2}-1)^{1/2}}{(q^{j+1}-1)^{1/2}}\frac{(q^{j+2}-1)^{1/2}}{(q^j-1)^{1/2}} + \frac{202}{130}\right) \geqslant$$

$$\frac{q^j-1}{q^{j+2}-1}\left(\frac{q^{j+2}-1}{q^j-1} - 2\frac{(q^{j+2}-1)^{3/4}}{(q^j-1)^{3/4}} + \frac{202}{130}\right).$$

Розглянемо многочлен

$$Q(t) := t^4 - 2t^3 + \frac{202}{130}.$$

Очевидно, що для $t \geqslant 3/2$ цей многочлен зростає по t, і $Q(1.7) > 0$. Тобто, $Q(t) > 0$ для $t \geqslant 1.7$. Оскільки

$$\left(\frac{q^{j+2}-1}{q^j-1}\right)^{1/4} \geqslant q^{1/2} \geqslant \sqrt{3},$$

для $q \geqslant 3$ ми маємо

$$F_j(q) \geqslant \frac{q^j-1}{q^{j+2}-1}Q\left(\frac{(q^{j+2}-1)^{1/4}}{(q^j-1)^{1/4}}\right) \geqslant \frac{q^j-1}{q^{j+2}-1}Q(\sqrt{3}) > 0.$$

Тобто, з (4.98) і (4.99) ми отримуємо, що для $q \geqslant 3$ і $j = 2, 3, \ldots, n-2$ виконується наступна нерівність:

$$(-1)^j S_n(\xi_j, q) > 0.$$

Очевидно, що $S_n(0,q)>0$. Залишилося довести, що

$$S_n(\xi_1,q)=S_n(\sqrt{(q^2-1)(q-1)},q)\leqslant 0.$$

Ми маємо

$$-S_n(\xi_1,q)=-1+\frac{\xi_1}{q-1}-\frac{\xi_1^2}{(q^2-1)(q-1)}$$
$$+\sum_{k=3}^{n}(-1)^{k+1}\frac{\xi_j^k}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)}$$
$$\geqslant\frac{\xi_1}{q-1}-(1+\frac{\xi_1^2}{(q^2-1)(q-1)}),$$

звідки

$$-S_n(\xi_1,q)\geqslant\sqrt{\frac{q^2-1}{q-1}}-2>0\Leftrightarrow q^2-1\geqslant 4(q-1).$$

Тобто, для $q\geqslant 3$ ми маємо $-S_n(\xi_1,q)\geqslant 0$. □

Лема 4.4.6. Нехай $S_{2k-2}(z,g_{\sqrt{q}}):=\sum_{j=0}^{2k-2}(-1)^j\frac{z^j}{q^{j^2/2}}\in\mathcal{HP}$. Тоді існує N_0, таке що для кожного $n\geqslant N_0$ виконується $S_n(z,q)\in\mathcal{HP}$.

Доведення. Ми маємо

$$(-1)^nS_n(z,q)=\sum_{j=n-2k}^{n}(-1)^{n+j}\frac{z^j}{(q^j-1)(q^{j-1}-1)\cdots(q-1)}+$$
$$\sum_{j=0}^{n-2k-1}(-1)^{n+j}\frac{z^j}{(q^j-1)(q^{j-1}-1)\cdots(q-1)}=$$
$$\frac{z^{n-2k}}{(q^{n-2k}-1)(q^{n-2k-1}-1)\cdots(q-1)}\cdot$$
$$\Bigg(\frac{z^{2k}}{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-2k+1}-1)}-$$
$$\frac{z^{2k-1}}{(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)\cdots(q^{n-2k+1}-1)}+\cdots-$$
$$\frac{z}{q^{n-2k+1}-1}+1\Bigg)+R_{n,k}(z),$$

де $R_{n,k}(z) < 0$ для $z \geqslant q^{n-3} - 1$. Звідки для всіх $z \geqslant q^{n-3} - 1$ ми отримуємо

$$(-1)^n S_n(z,q) < \tfrac{z^{n-2k}}{(q^{n-2k}-1)(q^{n-2k-1}-1)\cdots(q-1)} \cdot \Big(\tfrac{z^{2k}}{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-2k+1}-1)} - \tfrac{z^{2k-1}}{(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)\cdots(q^{n-2k+1}-1)} + \cdots - \tfrac{z}{q^{n-2k+1}-1} + 1\Big) =: \tfrac{z^{n-2k}}{(q^{n-2k}-1)(q^{n-2k-1}-1)\cdots(q-1)} F_{n,k}(z). \tag{4.101}$$

Позначимо через $u = \frac{z\sqrt{q}}{q^{n-2k+1}-1}$. Ми маємо

$$F_{n,k}(z) = \Phi_{n,k}(u) = \Big(\tfrac{(q^{n-2k+1}-1)^{2k-1}}{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-2k+2}-1)} \cdot \tfrac{u^{2k}}{(\sqrt{q})^{2k}} - \tfrac{(q^{n-2k+1}-1)^{2k-2}}{(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)\cdots(q^{n-2k+2}-1)} \cdot \tfrac{u^{2k-1}}{(\sqrt{q})^{2k-1}} + \cdots - \tfrac{u}{\sqrt{q}} + 1\Big) \longrightarrow_{n\to\infty} \tfrac{u^{2k}}{(\sqrt{q})^{(2k)^2}} - \tfrac{u^{2k-1}}{(\sqrt{q})^{(2k-1)^2}} + \cdots - \tfrac{u}{\sqrt{q}} + 1 = S_{2k}(u, g_{\sqrt{q}}). \tag{4.102}$$

Нагадуємо, що $S_n(u, g_{\sqrt{q}})$ – n-й відрізок ряду часткової тета-функції. Із умов леми, $P_{2k-2}(u,q) \in \mathcal{HP}$. В першому параграфі цього розділу (перший пункт теореми 4.1.8) було доведено, що

$$S_{2k-2}(u, g_{\sqrt{q}}) \in \mathcal{HP} \Leftrightarrow \exists u_0 \in (\sqrt{q}, (\sqrt{q})^3) \quad S_{2k-2}(u_0, g_{\sqrt{q}}) \leqslant 0,$$

і, відповідно,

$$S_{2k}(u_0, g_{\sqrt{q}}) = S_{2k-2}(u_0, g_{\sqrt{q}}) - \left(\frac{u_0^{2k-1}}{(\sqrt{q})^{(2k-1)^2}} - \frac{u_0^{2k}}{(\sqrt{q})^{(2k)^2}}\right) < 0.$$

Оскільки

$$S_{2k}(u, g_{\sqrt{q}}) \equiv \frac{u^{2k}}{(\sqrt{q})^{(2k)^2}} S_{2k}\left(\frac{(\sqrt{q})^{4k}}{u}, g_{\sqrt{q}}\right),$$

ми маємо

$$\exists u_1 \in \left((\sqrt{q})^{4k-3}, (\sqrt{q})^{4k-1}\right) \quad S_{2k}(u_1, g_{\sqrt{q}}) < 0.$$

З (4.102)

$$\exists n_0 \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \Phi_{n,k}(u_1) < 0,$$

звідки

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \exists z_{1,n} = \frac{q^{n-2k+1}-1}{\sqrt{q}} u_1 \in (q^{n-1} - q^{2k-2}, q^n - q^{2k-1}) :$$
$$F_{n,k}(z_{1,n}, q) < 0.$$

З (4.101)

$$\forall n \geqslant n_0 \quad (-1)^n S_n(z_{1,n}, q) < 0. \tag{4.103}$$

Візьмемо $n_0 \geqslant 2k$ і перевіримо, що для усіх $n \geqslant n_0$

$$q^{n-1} - q^{2k-2} \geqslant \sqrt{(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)} = \xi_{n-2}. \tag{4.104}$$

Дійсно, ця нерівність еквівалентна наступної

$$q^{2n-2} - 2q^{n+2k-3} + q^{4k-4} \geqslant q^{2n-3} - q^{n-1} - q^{n-2} + 1. \tag{4.105}$$

Оскільки $q \geqslant 3$, ми маємо $q^{2n-2} - q^{2n-3} \geqslant 2q^{2n-3}$, і, беручи до уваги $n \geqslant n_0 \geqslant 2k$, ми отримуємо

$$q^{2n-2} - q^{2n-3} - 2q^{n+2k-3} + q^{n-1} + q^{n-2} + q^{4k-4} - 1 \geqslant 2q^{2n-3} -$$

$$2q^{n+2k-3} + q^{n-1} + q^{n-2} + q^{4k-4} - 1 = 2q^{n+2k-3}(q^{n-2k} - 1) + q^{n-1} +$$

$$q^{n-2} + q^{4k-4} - 1 \geqslant q^{n-1} + q^{n-2} + q^{4k-4} - 1 > 0.$$

Тобто, виконується (4.105), звідки (4.104) є вірним.

Із леми 4.4.5, (4.104) і (4.101) існують натуральні числа $0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n-2} < z_{1,n} =: \xi_{n-1}$, такі що

$$(-1)^j S_n(\xi_j, q) > 0, \quad \lim_{x \to \infty} (-1)^n S_n(x, q) = +\infty.$$

Тобто

$$S_{2k-2}(z, g_{\sqrt{q}}) = \sum_{j=0}^{2k-2} (-1)^j \frac{z^j}{q^{j^2/2}} \in \mathcal{HP}$$

$$\Rightarrow \exists N_0 \ \forall n \geqslant N_0 \ S_n(z, q) \in \mathcal{HP}.$$

$\square$

Щоб завершити доведення теореми 4.4.4, ми відмічаємо, що в четвертому пункті теореми 4.1.8 доведено, що

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k \geqslant N_0 \quad S_{2k-2}(z, g_{\sqrt{q}}) \in \mathcal{HP} \ \Leftrightarrow \ q > q_\infty.$$

Теорема 4.4.4 доведена. $\square$

4.5 Цілі функції з другими відношеннями коефіцієнтів Тейлора, які спадають

В цьому параграфі ми будемо вивчати цілі функції з додатними коефіцієнтами Тейлора і такі, що послідовність других відношень коефіцієнтів $q_n(f)$ спадає по n. Ми отримуємо достатню умову для того, щоб такі функції мали усі дійсні корені.

Головним результатом цього параграфу є наступна теорема.

Теорема 4.5.1. ([213]). Нехай $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $a_k > 0$ для усіх k, є цілою функцією. Припустимо, що $q_n(f)$ є такою послідовністю, яка спадає по n, тобто $q_2 \geqslant q_3 \geqslant q_4 \geqslant \dots$, і $\lim\limits_{n\to\infty} q_n(f) = b \geqslant q_\infty$. Тоді усі корені функції f є дійсними і від'ємними, іншими словами $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$.

Легко бачити, що, якщо дана тільки оцінка знизу на $q_n(f)$ і вимога монотонності опущена, то константа 4 в $q_n(f) \geqslant 4$ є найменшою можливою для висновку, що $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$. Крім того, приклад часткової тета-функції демонструє, що константу q_∞ в цій теоремі не можна замінити на меншу.

Доведення. Нам потрібні дві леми для доведення теореми 4.5.1.

Лема 4.5.2. Нехай $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k z^k$, $a_k > 0$ для усіх k, є цілою функцією, $S_n(z, \varphi)$ є її частковими сумами ряду Тейлора степеня n, і $p_k(\varphi), q_k(\varphi)$ визначаються за (4.3). Припустимо, що $q_k(\varphi)$ спадають по k, тобто $q_2(\varphi) \geqslant q_3(\varphi) \geqslant q_4(\varphi) \geqslant \dots$, і $\lim\limits_{k\to\infty} q_k(\varphi) = b > q_\infty$. Тоді існує натуральне число m_0 і нескінчена послідовність додатних чисел (y_j), $p_j(\varphi) < y_j < p_{j+1}(\varphi)$, така, що для кожного $n > 2m_0$ виконуються наступні нерівності:

$$(-1)^j S_n(y_j, \varphi) \geqslant 0 \text{ для усіх } j = 1, 2, 3, \dots, n - 2m_0. \tag{4.106}$$

Використовуючи $S_n(0, \varphi) > 0$ і (4.106), ми отримуємо, що кожна часткова сума ряду функції φ має не більше за $2m_0$ недійсних коренів.

Доведення. Без втрати загальності ми можемо припустити, що $a_0 = a_1 = 1$, оскільки ми можемо розглянути функцію $\psi(x) = a_0^{-1}\varphi(a_0 a_1^{-1} x)$ замість

$\varphi(x)$, тому що ця заміна зберігаю властивість мати усі дійсні корені. Більш того, $q_n(\psi) = q_n(\varphi)$ для усіх n.

Протягом усього доведення ми будемо використовувати позначення p_n і q_n замість $p_n(\varphi)$ і $q_n(\varphi)$.

Фіксуємо довільне $j \in \mathbb{N}$ і припустимо, що $x \in (p_j, p_{j+1}) = (q_2 q_3 \cdot \ldots \cdot q_j; q_2 q_3 \cdot \ldots \cdot q_j q_{j+1})$. Тоді ми отримуємо $1 < x < x^2 q_2^{-1} < x^3 q_2^{-2} q_3^{-1} < \cdots < x^j q_2^{1-j} q_3^{2-j} \cdot \ldots \cdot q_j^{-1}$ і $x^j q_2^{1-j} q_3^{2-j} \cdot \ldots \cdot q_j^{-1} > x^{j+1} q_2^{-j} q_3^{1-j} \cdot \ldots \cdot q_j^{-2} q_{j+1}^{-1} > x^{j+2} q_2^{-j-1} \cdot \ldots \cdot q_j^{-3} q_{j+1}^{-2} q_{j+2}^{-1} > \cdots$. Для довільного $m \in \mathbb{N}$ і $n > j + 2m$ ми маємо

$$(-1)^j S_n(x,\varphi) = \sum_{k=0}^{j-2} \frac{(-1)^{j+k} x^k}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \cdot \ldots \cdot q_k} + \Bigg(-\frac{x^{j-1}}{q_2^{j-2} q_3^{j-3} \cdot \ldots \cdot q_{j-1}} +$$
$$\frac{x^j}{q_2^{j-1} q_3^{j-2} \cdot \ldots \cdot q_j} - \frac{x^{j+1}}{q_2^{j} q_3^{j-1} \cdot \ldots \cdot q_{j+1}} + \ldots + \frac{x^{j+2m-2}}{q_2^{j+2m-3} q_3^{j+2m-4} \cdot \ldots \cdot q_{j+2m-2}}$$
$$- \frac{x^{j+2m-1}}{q_2^{j+2m-2} q_3^{j+2m-3} \cdot \ldots \cdot q_{j+2m-1}} \Bigg) + \sum_{k=j+2m}^{n} \frac{(-1)^{j+k} x^k}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \cdot \ldots \cdot q_k} =:$$
$$=: \Sigma_1(x) + g_m(x) + \Sigma_2(x).$$

Відмітимо, що доданки в $\Sigma_1(x)$ є знакозмінними і їхні модулі зростають, звідки $\Sigma_1(x) \geqslant 0$. Аналогічно, доданки в $\Sigma_2(x)$ є знакозмінними і їхні модулі спадають, звідки $\Sigma_2(x) \geqslant 0$. Таким чином,

$$(-1)^j S_n(x,\varphi) \geqslant g_m(x) \text{ для усіх } x \in (p_j; p_{j+1}). \tag{4.107}$$

Ми маємо

$$g_m(x) = \frac{x^{j-1}}{q_2^{j-2} q_3^{j-3} \cdot \ldots \cdot q_{j-1}} \cdot \Bigg(-1 + \frac{x}{q_2 q_3 \cdot \ldots \cdot q_{j-1} q_j}$$
$$- \frac{x^2}{q_2^2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_{j-1}^2 q_j^2 q_{j+1}} + \frac{x^3}{q_2^3 q_3^3 \cdot \ldots \cdot q_{j-1}^3 q_j^3 q_{j+1}^2 q_{j+2}}$$
$$- \ldots + \frac{x^{2m-1}}{q_2^{2m-1} q_3^{2m-1} \cdot \ldots \cdot q_j^{2m-1} q_{j+1}^{2m-2} q_{j+2}^{2m-3} \cdot \ldots \cdot q_{j+2m-3}^2 q_{j+2m-2}}$$
$$- \frac{x^{2m}}{q_2^{2m} q_3^{2m} \cdot \ldots \cdot q_j^{2m} q_{j+1}^{2m-1} q_{j+2}^{2m-2} \cdot \ldots \cdot q_{j+2m-2}^2 q_{j+2m-1}} \Bigg).$$

Ми визначимо: $y = y(j) = xq_2^{-1}q_3^{-1} \cdot \ldots \cdot q_{j-1}^{-1}q_j^{-1}$. Ми маємо умову $q_2q_3 \cdot \ldots \cdot q_j < x < q_2q_3 \cdot \ldots \cdot q_jq_{j+1}$, звідки $1 < y < q_{j+1}$. На додаток, будемо використовувати наступне переозначення для q_k:

$$q_{j+1} \to \widetilde{q}_2;$$

$$q_{j+2} \to \widetilde{q}_3;$$

$$\vdots$$

$$q_{j+2m} \to \widetilde{q}_{2m+1};$$

$$q_{j+2m+1} \to \widetilde{q}_{2m+2}.$$

З нашої гіпотези для q_k випливають такі нерівності для $\widetilde{q}_k$: $\widetilde{q}_2 \geqslant \widetilde{q}_3 \geqslant \widetilde{q}_4 \geqslant \cdots \geqslant b$.

Тепер ми перепишемо вираз для $g_m(x)$ в нових позначеннях.

$$g_m(x) = y^{j-1} \cdot q_2q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_{j-1}^{j-2}q_j^{j-1} \cdot \Big(-1 + y - \tfrac{y^2}{\widetilde{q}_2} + \tfrac{y^3}{\widetilde{q}_2^2\widetilde{q}_3} - \tfrac{y^4}{\widetilde{q}_2^3\widetilde{q}_3^2\widetilde{q}_4} + \ldots + \tfrac{y^{2m-1}}{\widetilde{q}_2^{2m-2}\widetilde{q}_3^{2m-3}\cdot\ldots\cdot\widetilde{q}_{2m-1}} - \tfrac{y^{2m}}{\widetilde{q}_2^{2m-1}\widetilde{q}_3^{2m-2}\cdot\ldots\cdot\widetilde{q}_{2m-1}^2\widetilde{q}_{2m}}\Big) =: y^{j-1} \cdot q_2q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_{j-1}^{j-2}q_j^{j-1}\mu_m(y). \tag{4.108}$$

Ми бачимо, що $\operatorname{sign} g_m(x) = \operatorname{sign} \mu_m(y)$. Ми хочемо обрати $y \in (1, \widetilde{q}_2)$ так, що $\mu_m(y) \geqslant 0$. Ми маємо

$$\mu_m(y) = (-1 + y) + \Big(-\tfrac{y^2}{\widetilde{q}_2} + \tfrac{y^3}{\widetilde{q}_2^2\widetilde{q}_3}\Big) + (-\tfrac{y^4}{\widetilde{q}_2^3\widetilde{q}_3^2\widetilde{q}_4} + \tfrac{y^5}{\widetilde{q}_2^4\widetilde{q}_3^3\widetilde{q}_4^2\widetilde{q}_5}) + \ldots + (-\tfrac{y^{2m-2}}{\widetilde{q}_2^{2m-3}\widetilde{q}_3^{2m-4}\cdot\ldots\cdot\widetilde{q}_{2m-2}} + \tfrac{y^{2m-1}}{\widetilde{q}_2^{2m-2}\widetilde{q}_3^{2m-3}\cdot\ldots\cdot\widetilde{q}_{2m-1}}) - \tfrac{y^{2m}}{\widetilde{q}_2^{2m-1}\widetilde{q}_3^{2m-2}\cdot\ldots\cdot\widetilde{q}_{2m-1}^2\widetilde{q}_{2m}}. \tag{4.109}$$

Ми доведемо, що для кожного фіксованого $k = 1, 2, \ldots, m-1$, виконуються наступні нерівності:

$$-\tfrac{y^{2k}}{\widetilde{q}_2^{2k-1}\widetilde{q}_3^{2k-2}\cdot\ldots\cdot\widetilde{q}_{2k}} + \tfrac{y^{2k+1}}{\widetilde{q}_2^{2k}\widetilde{q}_3^{2k-1}\cdot\ldots\cdot\widetilde{q}_{2k}^2\widetilde{q}_{2k+1}} \geqslant -\tfrac{y^{2k}}{b^{2k-1}\cdot b^{2k-2}\cdot\ldots\cdot b} + \tfrac{y^{2k+1}}{b^{2k}\cdot b^{2k-1}\cdot\ldots\cdot b^2\cdot b} \tag{4.110}$$

Спочатку ми розглянемо (4.110) для $k = 1$. Оскільки $\widetilde{q}_2 \geqslant \widetilde{q}_3$, ми маємо

$$-\frac{y^2}{\widetilde{q}_2} + \frac{y^3}{\widetilde{q}_2^2\widetilde{q}_3} \geqslant -\frac{y^2}{\widetilde{q}_2} + \frac{y^3}{\widetilde{q}_2^3}.$$

Ми бачимо, що

$$\frac{\partial}{\partial\widetilde{q}_2}\left(-\frac{y^2}{\widetilde{q}_2}+\frac{y^3}{\widetilde{q}_2^3}\right)=\frac{y^2}{\widetilde{q}_2^2}-\frac{3y^3}{\widetilde{q}_2^4}\geqslant 0\Leftrightarrow y\leqslant\frac{\widetilde{q}_2^2}{3}.$$

Оскільки $y<\widetilde{q}_2$ і $\frac{\widetilde{q}_2}{3}\geqslant\frac{b}{3}>1$, ми маємо, що функція $\left(-\frac{y^2}{\widetilde{q}_2}+\frac{y^3}{\widetilde{q}_2^3}\right)$ зростає по $\widetilde{q}_2$, звідки

$$-\frac{y^2}{\widetilde{q}_2}+\frac{y^3}{\widetilde{q}_2^2\widetilde{q}_3}\geqslant-\frac{y^2}{\widetilde{q}_2}+\frac{y^3}{\widetilde{q}_2^3}\geqslant-\frac{y^2}{b}+\frac{y^3}{b^3}. \tag{4.111}$$

Ми будемо використовувати аналогічні аргументи, щоб довести (4.110) для кожного $k=1,2,\ldots,m-1$. Визначимо наступну функцію

$$F(\widetilde{q}_2,\widetilde{q}_3,\ldots,\widetilde{q}_{2k},\widetilde{q}_{2k+1}):=$$
$$-\frac{y^{2k}}{\widetilde{q}_2^{2k-1}\widetilde{q}_3^{2k-2}\cdot\ldots\cdot\widetilde{q}_{2k}}+\frac{y^{2k+1}}{\widetilde{q}_2^{2k}\widetilde{q}_3^{2k-1}\cdot\ldots\cdot\widetilde{q}_{2k}^2\widetilde{q}_{2k+1}}$$

для $\widetilde{q}_2\geqslant\widetilde{q}_3\geqslant\ldots\geqslant\widetilde{q}_{2k+1}\geqslant b$.

Очевидно, що,

$$F(\widetilde{q}_2,\widetilde{q}_3,\ldots,\widetilde{q}_{2k},\widetilde{q}_{2k+1})\geqslant F(\widetilde{q}_2,\widetilde{q}_3,\ldots,\widetilde{q}_{2k},\widetilde{q}_{2k}).$$

Ми маємо

$$\frac{\partial F(\widetilde{q}_2,\widetilde{q}_3,\ldots,\widetilde{q}_{2k},\widetilde{q}_{2k})}{\partial\widetilde{q}_{2k}}=$$
$$\frac{y^{2k}}{\widetilde{q}_2^{2k-1}\widetilde{q}_3^{2k-2}\cdot\ldots\cdot\widetilde{q}_{2k-1}^2\widetilde{q}_{2k}^2}-\frac{3y^{2k+1}}{\widetilde{q}_2^{2k}\widetilde{q}_3^{2k-1}\cdot\ldots\cdot\widetilde{q}_{2k-1}^3\widetilde{q}_{2k}^4}.$$

Таким чином,

$$\frac{\partial F(\widetilde{q}_2,\widetilde{q}_3,\ldots,\widetilde{q}_{2k},\widetilde{q}_{2k})}{\partial\widetilde{q}_{2k}}\geqslant 0\Leftrightarrow y\leqslant\frac{\widetilde{q}_2\widetilde{q}_3\cdot\ldots\cdot\widetilde{q}_{2k-1}\widetilde{q}_{2k}^2}{3}.$$

Оскільки $y<\widetilde{q}_2$, ми отримуємо, що функція $F(\widetilde{q}_2,\widetilde{q}_3,\ldots,\widetilde{q}_{2k},\widetilde{q}_{2k})$ зростає по змінної $\widetilde{q}_{2k}$, звідки

$$F(\widetilde{q}_2,\widetilde{q}_3,\ldots,\widetilde{q}_{2k},\widetilde{q}_{2k+1})\geqslant F(\widetilde{q}_2,\widetilde{q}_3,\ldots,\widetilde{q}_{2k},\widetilde{q}_{2k})\geqslant F(\widetilde{q}_2,\widetilde{q}_3,\ldots,\widetilde{q}_{2k-1},b,b).$$

Далі ми маємо

$$\frac{\partial F(\widetilde{q}_2,\widetilde{q}_3,\ldots,\widetilde{q}_{2k-1},b,b)}{\partial\widetilde{q}_{2k-1}}=$$
$$\frac{2y^{2k}}{\widetilde{q}_2^{2k-1}\widetilde{q}_3^{2k-2}\cdot\ldots\cdot\widetilde{q}_{2k-1}^3b^2}-\frac{3y^{2k+1}}{\widetilde{q}_2^{2k}\widetilde{q}_3^{2k-1}\cdot\ldots\cdot\widetilde{q}_{2k-1}^4b^3}.$$

Отже,

$$\frac{\partial F(\widetilde{q}_2, \widetilde{q}_3, \ldots, \widetilde{q}_{2k-1}, b, b)}{\partial \widetilde{q}_{2k-1}} \geqslant 0 \Leftrightarrow y \leqslant \frac{2\widetilde{q}_2\widetilde{q}_3 \cdot \ldots \cdot \widetilde{q}_{2k-1}\widetilde{q}_{2k-1}b}{3}.$$

Оскільки $y < \widetilde{q}_2$, ми отримуємо, що функція $F(\widetilde{q}_2, \widetilde{q}_3, \ldots, \widetilde{q}_{2k-1}, b, b)$ зростає по змінної $\widetilde{q}_{2k-1}$, звідки

$$F(\widetilde{q}_2, \widetilde{q}_3, \ldots, \widetilde{q}_{2k-1}, b, b) \geqslant F(\widetilde{q}_2, \widetilde{q}_3, \ldots, \widetilde{q}_{2k-2}, b, b, b).$$

Використовуючи аналогічні аргументи, ми отримуємо наступний ланцюг нерівностей:

$$F(\widetilde{q}_2, \widetilde{q}_3, \ldots, \widetilde{q}_{2k}, \widetilde{q}_{2k+1}) \geqslant F(\widetilde{q}_2, \widetilde{q}_3, \ldots, \widetilde{q}_{2k-1}, b, b) \geqslant$$

$$F(\widetilde{q}_2, \widetilde{q}_3, \ldots, \widetilde{q}_{2k-2}, b, b, b) \geqslant \ldots \geqslant F(b, b, \ldots, b, b).$$

Таким чином, ми довели (4.110). Крім того,

$$-\frac{y^{2m}}{\widetilde{q}_2^{2m-1}\widetilde{q}_3^{2m-2} \cdot \ldots \cdot \widetilde{q}_{2m-1}^2\widetilde{q}_{2m}} \geqslant -\frac{y^{2m}}{b^{2m-1} \cdot b^{2m-2} \cdot \ldots \cdot b^2 \cdot b}.$$

Ми підставимо останню нерівність і (4.110) у (4.109), щоб отримати наступне

$$\mu_m(y) \geqslant -\sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^k y^k}{b^{\frac{k(k-1)}{2}}} = -S_{2m}(y, \widetilde{g}_b), \tag{4.112}$$

де $\widetilde{g}_b(y) = g_{\sqrt{b}}(-\sqrt{b}y)$, і g_a є часткова тета-функція. Оскільки, за припущеннями, $(\sqrt{b})^2 > q_\infty$, ми маємо з пункту (4) теореми 4.1.8, що існує таке $m_0 \in \mathbb{N}$, що $c_{2m_0} < (\sqrt{b})^2$ (тут c_{2m_0} – така стала, що відрізок ряду Тейлора часткової тета-функції g_a з номером $2m_0$ має усі дійсні корені тоді і тільки тоді, коли $a^2 \geqslant c_{2m_0}$). Спочатку ми виберемо і зафіксуємо таке m_0. Таким чином, $S_{2m_0}(y, \widetilde{g}_b) \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$, звідки, з пункту (1) теореми 4.1.8, існує точка $x_0 = x_0(m_0), x_0 \in (\sqrt{b}; (\sqrt{b})^3) : \ S_{2m_0}(-x_0, g_{\sqrt{b}}) \leqslant 0$. Ми положимо $y_0 = x_0(\sqrt{b})^{-1}$. Ми маємо $y_0 \in (1, b) \subset (1, \widetilde{q}_2) = (1, q_{j+1})$, і, з (4.112), ми отримуємо $\mu_{m_0}(y_0) \geqslant 0$. Ми визначаємо

$$y_j := y_0 \cdot q_2 q_3 \cdot \ldots \cdot q_{j-1} q_j, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{4.113}$$

Ми маємо умову $q_2 q_3 \cdot \ldots \cdot q_j < y_j < q_2 q_3 \cdot \ldots \cdot q_j q_{j+1}$.

Ми нагадуємо, що $m_0 \in \mathbb{N}$ залежить тільки від b, потім ми визначаємо послідовність y_j із (4.113), так що $p_j < y_j < p_{j+1}$ для усіх j. Ми фіксуємо довільне $j \in \mathbb{N}$, і беремо натуральне число n так, що $n > j + 2m_0$. Після цього, ми беремо $x = y_j$ в (4.107). Тобто, використовуючи (4.108), (4.109), (4.112) і той факт, що $\mu_{m_0}(y_0) \geqslant 0$, ми отримуємо (4.106). $\square$

Лема 4.5.3. Нехай $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k z^k$, $a_k > 0$ для усіх k, є цілою функцією, і $p_k(\varphi), q_k(\varphi)$ визначаються за (4.3). Припустимо, що $q_k(\varphi)$ спадає по k, $\lim\limits_{k\to\infty} q_k(\varphi) = b$, і $q_\infty < b < 1 + \sqrt{5}$. Тоді існує послідовність додатних чисел $(\rho_j)_{j=1}^{\infty}$, $p_j(\varphi) < \rho_j < p_{j+1}(\varphi)$, таких що для кожного досить великого j функція φ має точно j коренів (враховуючи кратності) у колі $\{z : |z| < \rho_j\}$.

Доведення. Як і при доведенні леми 4.5.2, ми припустимо, що $a_0 = a_1 = 1$, і будемо використовувати позначення p_n і q_n замість $p_n(\varphi)$ і $q_n(\varphi)$. Для кожного $j \in \mathbb{N}$ ми визначаємо ρ_j наступним чином:

$$\rho_j := q_2 q_3 \cdot \ldots \cdot q_j \sqrt{q_{j+1}}, \text{ звідки } q_2 q_3 \ldots q_j < \rho_j < q_2 q_3 \ldots q_j q_{j+1}. \tag{4.114}$$

Ми бачимо, що

$$\begin{gathered}\varphi(z) = \sum_{k=0}^{j-3} \frac{(-1)^k z^k}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \cdot \ldots \cdot q_k} + \left(\sum_{k=j-2}^{j+1} \frac{(-1)^k z^k}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \cdot \ldots \cdot q_k} + \right. \\ \left. \frac{(-1)^{j+2} z^{j+2}}{q_2^{j+1} q_3^{j} \cdot \ldots \cdot q_{j-2}^5 q_{j-1}^4 q_j^4 q_{j+1}^2}\right) + \left(\frac{(-1)^{j+2} z^{j+2}}{q_2^{j+1} q_3^{j} \cdot \ldots \cdot q_{j-2}^5 q_{j-1}^4 q_j^3 q_{j+1}^2 q_{j+2}} - \right. \\ \left. \frac{(-1)^{j+2} z^{j+2}}{q_2^{j+1} q_3^{j} \cdot \ldots \cdot q_{j-2}^5 q_{j-1}^4 q_j^4 q_{j+1}^2}\right) + \sum_{k=j+3}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \cdot \ldots \cdot q_k} \\ =: \Sigma_1(z) + g_j(z) + \xi_j(z) + \Sigma_2(z).\end{gathered} \tag{4.115}$$

Ми покажемо, що для кожного досить великого j виконується наступна нерівність: $\min_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |g_j(\rho_j e^{i\theta})| > \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |\varphi(\rho_j e^{i\theta}) - g_j(\rho_j e^{i\theta})|$, тобто, число коренів функції φ у колі $\{z : |z| < \rho_j\}$ дорівнює числу коренів функції g_j в цьому ж колі. Ми маємо

$$g_j(\rho_j e^{i\theta}) = \frac{q_2^{j-2} q_3^{j-2} \cdot \ldots \cdot q_j^{j-2} q_{j+1}^{\frac{j-2}{2}}}{q_2^{j-3} q_3^{j-4} \cdot \ldots \cdot q_{j-3}^2 q_{j-2}} \cdot e^{i(j-2)\theta}.$$

$$\left(1 - q_j \sqrt{q_{j+1}} e^{i\theta} + q_j q_{+1} e^{2i\theta} - q_j \sqrt{q_{j+1}} e^{3i\theta} + e^{4i\theta}\right) =$$

$$q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_{j-2}^{j-3} q_{j-1}^{j-2} q_j^{j-2} q_{j+1}^{\frac{j-2}{2}} \cdot e^{ij\theta} \cdot$$

$$\left(e^{-2i\theta} - q_j \sqrt{q_{j+1}} e^{-i\theta} + q_j q_{j+1} - q_j \sqrt{q_{j+1}} e^{i\theta} + e^{2i\theta}\right) =$$

$$q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_{j-2}^{j-3} q_{j-1}^{j-2} q_j^{j-2} q_{j+1}^{\frac{j-2}{2}} \cdot e^{ij\theta} \cdot$$

$$\left(2\cos 2\theta - 2q_j \sqrt{q_{j+1}} \cos\theta + q_j q_{j+1}\right).$$

Ми хочемо знайти $\min_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} |g_j(\rho_j e^{i\theta})|$. Нехай $t := \cos\theta \in [-1, 1]$. Розглянемо вираз у великих круглих дужках:

$$\widetilde{g}_j(t) := 4t^2 - 2q_j \sqrt{q_{j+1}} t + (q_j q_{j+1} - 2).$$

Вершиною цієї параболи є точка $t_j = q_j \sqrt{q_{j+1}}/4$, і, за нашими припущеннями, $t_j > 1$. Далі ми оцінимо дискримінант: $\lim_{j\to\infty}(4(q_j^2 q_{j+1} - 4q_j q_{j+1} + 8)) = 4(b^3 - 4b^2 + 8) = 4(b-2)\cdot(b-(1-\sqrt{5}))\cdot(b-(1+\sqrt{5}))$. Оскільки $q_\infty < b < 1+\sqrt{5}$, ми отримуємо, що $D_j < 0$ для усіх достатньо великих j. Тому ми отримуємо для усіх достатньо великих j:

$$\min_{-1\leqslant t\leqslant 1} \widetilde{g}_j(t) = \widetilde{g}_j(1) = 2 - 2q_j \sqrt{q_{j+1}} + q_j q_{j+1}.$$

Тобто, ми отримали оцінку знизу для усіх достатньо великих j:

$$|g_j(\rho_j e^{i\theta})| \geqslant q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_{j-1}^{j-2} q_j^{j-2} q_{j+1}^{\frac{j-2}{2}} \left(q_j q_{j+1} - 2q_j \sqrt{q_{j+1}} + 2\right). \tag{4.116}$$

Ми також хочемо отримати оцінку $|\Sigma_2(\rho_j e^{i\theta})|$ зверху.

$$|\Sigma_2(\rho_j e^{i\theta})| \leqslant \sum_{k=j+3}^{\infty} \frac{q_2^k q_3^k \cdot \ldots \cdot q_j^k q_{j+1}^{\frac{k}{2}}}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \cdot \ldots \cdot q_k} =$$

$$\frac{q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_j^{j-1} q_{j+1}^{\frac{j-3}{2}}}{q_{j+2}^2 q_{j+3}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{q_{j+1}} q_{j+2} q_{j+3} q_{j+4}}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\sqrt{q_{j+1}})^2 q_{j+2}^2 q_{j+3}^2 q_{j+4}^2 q_{j+5}} + \ldots\right).$$

Очевидно, що остання сума може бути оцінена зверху сумою геометричної прогресії, тому ми отримуємо

$$|\Sigma_2(\rho_j e^{i\theta})| \leqslant \frac{q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_j^{j-1} q_{j+1}^{\frac{j-3}{2}}}{q_{j+2}^2 q_{j+3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{q_{j+1}} q_{j+2} q_{j+3} q_{j+4}}}. \tag{4.117}$$

Далі, ми хочемо отримати оцінку зверху $|\Sigma_1(\rho_j e^{i\theta})|$.

$$|\Sigma_1(\rho_j e^{i\theta})| \leqslant \sum_{k=0}^{j-3} \frac{q_2^k q_3^k \cdot \ldots \cdot q_j^k q_{j+1}^{\frac{k}{2}}}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \cdot \ldots \cdot q_k} = (\text{ми переписуємо суму з кінця}$$

$$\text{до початку}) = \Big(q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_{j-3}^{j-4} q_{j-2}^{j-3} q_{j-1}^{j-3} q_j^{j-3} q_{j+1}^{\frac{j-3}{2}} +$$

$$q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_{j-4}^{j-5} q_{j-3}^{j-4} q_{j-2}^{j-4} q_{j-1}^{j-4} q_j^{j-4} q_{j+1}^{\frac{j-4}{2}} +$$

$$q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_{j-5}^{j-6} q_{j-4}^{j-5} q_{j-3}^{j-5} q_{j-2}^{j-5} q_{j-1}^{j-5} q_j^{j-5} q_{j+1}^{\frac{j-5}{2}} + \cdots \Big) =$$

$$q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_{j-3}^{j-4} q_{j-2}^{j-3} q_{j-1}^{j-3} q_j^{j-3} q_{j+1}^{\frac{j-3}{2}} \cdot \Bigg(1 + \frac{1}{q_{j-2} q_{j-1} q_j \sqrt{q_{j+1}}}$$

$$+ \frac{1}{q_{j-3} q_{j-2}^2 q_{j-1}^2 q_j^2 (\sqrt{q_{j+1}})^2} + \ldots \Bigg) \leqslant$$

$$q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_{j-3}^{j-4} q_{j-2}^{j-3} q_{j-1}^{j-3} q_j^{j-3} q_{j+1}^{\frac{j-3}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q_{j-2} q_{j-1} q_j \sqrt{q_{j+1}}}}$$

(ми оцінили останню суму зверху сумою нескінченої геометричної прогресії). Таким чином, ми маємо

$$|\Sigma_1(\rho_j e^{i\theta})| \leqslant q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_{j-3}^{j-4} q_{j-2}^{j-3} q_{j-1}^{j-3} q_j^{j-3} q_{j+1}^{\frac{j-3}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q_{j-2} q_{j-1} q_j \sqrt{q_{j+1}}}}. \tag{4.118}$$

Ми також відмітимо, що

$$|\xi_j(\rho_j e^{i\theta})| = (q_2 q_3 \cdot \ldots \cdot q_j \sqrt{q_{j+1}})^{j+2} \tag{4.119}$$
$$\left| \frac{1}{q_2^{j+1} q_3^j \cdot \ldots \cdot q_{j-2}^5 q_{j-1}^4 q_j^3 q_{j+1}^2 q_{j+2}} - \frac{1}{q_2^{j+1} q_3^j \cdot \ldots \cdot q_{j-2}^5 q_{j-1}^4 q_j^4 q_{j+1}^2} \right|$$
$$= q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_{j-1}^{j-2} q_j^{j-1} q_{j+1}^{\frac{j-2}{2}} \left(\frac{1}{q_{j+2}} - \frac{1}{q_j} \right).$$

Оскільки виконуються (4.116), (4.117), (4.118) і (4.119), то нерівність $\min_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} |g_j(\rho_j e^{i\theta})| > \max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} |\varphi(\rho_j e^{i\theta}) - g_j(\rho_j e^{i\theta})|$ випливає з

$$q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_{j-1}^{j-2} q_j^{j-2} q_{j+1}^{\frac{j-2}{2}} \Big(q_j q_{j+1} - 2 q_j \sqrt{q_{j+1}} + 2 \Big) >$$

$$\frac{q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_j^{j-1} q_{j+1}^{\frac{j-3}{2}}}{q_{j+2}^2 q_{j+3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{q_{j+1}} q_{j+2} q_{j+3} q_{j+4}}} +$$

$$q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_{j-3}^{j-4} q_{j-2}^{j-3} q_{j-1}^{j-3} q_j^{j-3} q_{j+1}^{\frac{j-3}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q_{j-2} q_{j-1} q_j \sqrt{q_{j+1}}}} +$$

$$q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_{j-1}^{j-2} q_j^{j-1} q_{j+1}^{\frac{j-2}{2}} \left(\frac{1}{q_{j+2}} - \frac{1}{q_j} \right),$$

або, еквівалентно,

$$\left(q_j q_{j+1} - 2q_j \sqrt{q_{j+1}} + 2 \right) >$$

$$\frac{q_j}{\sqrt{q_{j+1}} q_{j+2}^2 q_{j+3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{q_{j+1}} q_{j+2} q_{j+3} q_{j+4}}} +$$

$$\frac{q_{j-1}^{-1} q_j^{-1}}{\sqrt{q_{j+1}} \left(1 - \frac{1}{q_{j-2} q_{j-1} q_j \sqrt{q_{j+1}}} \right)} + \left(\frac{q_j}{q_{j+2}} - \frac{q_j}{q_j} \right).$$

Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} q_k(\varphi) = b$, остання нерівність (для усіх достатньо великих j) виводиться з

$$b^2 - 2b\sqrt{b} + 2 > \frac{1}{b^2\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{b^3\sqrt{b}}} + \frac{1}{b^2\sqrt{b}\left(1 - \frac{1}{b^3\sqrt{b}}\right)},$$

або, еквівалентно

$$b^2 - 2b\sqrt{b} + 2 > \frac{2b}{b^3\sqrt{b} - 1}.$$

Позначаючи $c = \sqrt{b}$, ми отримуємо після елементарних перетворень

$$c^{11} - 2c^{10} + 2c^7 - c^4 + 2c^3 - 2c^2 - 2 > 0. \tag{4.120}$$

Розглянемо функцію $p(c) = c^{11} - 2c^{10} + 2c^7 - c^4 + 2c^3 - 2c^2 - 2$ для $c \in \left(\sqrt{q_\infty}, \sqrt{1+\sqrt{5}}\right) \subset (\sqrt{3}, 2)$. Ми маємо $p(c) = \left(c^{11} - 2c^{10} + (6\sqrt{3} - 9)c^7\right) + \left((11 - 6\sqrt{3})c^7 - c^4\right) + (2c^3 - 2c^2 - 2)$. Очевидно, що $2c^3 - 2c^2 - 2 > 2 \cdot 3\sqrt{3} - 2 \cdot 4 - 2 > 0$. Далі, $11 - 6\sqrt{3} > 0$, і $(11 - 6\sqrt{3})c^7 - c^4 > c^4\left((11 - 6\sqrt{3}) \cdot 3\sqrt{3} - 1\right) > 0$. Залишилося довести, що $c^{11} - 2c^{10} + (6\sqrt{3} - 9)c^7 \geqslant 0$, або $\gamma(c) := c^4 - 2c^3 + (6\sqrt{3} - 9) \geqslant 0$. Ми маємо $\gamma'(c) = 4c^3 - 6c^2 = 2c^2(2c - 3) > 0$, і $\gamma(\sqrt{3}) = 0$. Таким чином, ми довели (4.120) при наших припущеннях щодо c. З цього випливає, що для усіх достатньо великих j виконується $\min_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} |g_j(\rho_j e^{i\theta})| > \max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} |\varphi(\rho_j e^{i\theta}) - g_j(\rho_j e^{i\theta})|$, тобто, число коренів функції φ в колі $\{z : |z| < \rho_j\}$ дорівнює числу коренів функції g_j в цьому ж колі.

Залишилося знайти число коренів функції g_j в колі $\{z : |z| < \rho_j\}$. Ми маємо

$$g_j(z) = \sum_{k=j-2}^{j+1} \frac{(-1)^k z^k}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \cdot \ldots \cdot q_k} + \frac{(-1)^{j+2} z^{j+2}}{q_2^{j+1} q_3^{j} \cdot \ldots \cdot q_{j-2}^5 q_{j-1}^4 q_j^4 q_{j+1}^2}.$$

Ми використуємо позначення $w = z\rho^{-1}$, так що $|w| < 1$. З цього випливає, що

$$g_j(\rho_j w) = (-1)^{j+2} w^{j-2} q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_{j-2}^{j-3} q_{j-1}^{j-2} q_j^{j-2} q_{j+1}^{\frac{j-2}{2}} \cdot$$
$$\left(1 - q_j\sqrt{q_{j+1}}w + q_j q_{j+1} w^2 - q_j\sqrt{q_{j+1}}w^3 + w^4\right).$$

З (4.116) випливає, що g_j не має коренів на окружності $\{z : |z| = \rho_j\}$, звідки $g_j(\rho_j w)$ не має коренів на окружності $\{w : |w| = 1\}$. Оскільки $P_j(w) = 1 - q_j\sqrt{q_{j+1}}w + q_j q_{j+1} w^2 - q_j\sqrt{q_{j+1}}w^3 + w^4$ є само-зворотнім многочленом змінної w, ми отримуємо, що P_j має точно два корені в колі $\{w : |w| < 1\}$. Тобто, $g_j(z)$ має точно j коренів в колі $\{z : |z| < \rho_j\}$, і ми довели твердження леми 4.5.3. $\square$

Тепер ми готові довести теорему 4.5.1. Припустимо, що теорема 4.5.1 доведена для усіх цілих функцій g з додатними коефіцієнтами, таких що $q_n(g)$ спадають по n і $\lim_{n\to\infty} q_n(g) = q_\infty$. Нехай $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ є цілою функцією з додатними коефіцієнтами, такою що $q_n(f)$ спадають по n і $\lim_{n\to\infty} q_n(f) = b > q_\infty$. Розглянемо нову цілу функцію з додатними коефіцієнтами $\tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(bq_\infty^{-1}\right)^{k^2/2} z^k$. Пряме обчислення показує, що $q_n(\tilde{f}) = q_n(f) \cdot q_\infty b^{-1}$, тобто $q_n(\tilde{f})$ спадають по n і $\lim_{n\to\infty} q_n(\tilde{f}) = q_\infty$. Таким чином, за нашим припущенням, ціла функція $\tilde{f}$ має тільки дійсні корені. Оскільки $bq_\infty^{-1} > 1$, з (4.6) ми маємо $\left(\left(\sqrt{bq_\infty^{-1}}\right)^{-k^2}\right)_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{CZDS}$. Звідки, наша ціла функція $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(bq_\infty^{-1}\right)^{k^2/2} \left(q_\infty b^{-1}\right)^{k^2/2} z^k$ має тільки дійсні корені.

Таким чином, достатньо довести теорему 4.5.1 у випадку $b = q_\infty$. Припустимо, що $\lim_{n\to\infty} q_n(f) = q_\infty$, і $a_0 = a_1 = 1$.

Ми розглянемо функцію $\varphi(z) := f(-z) = 1 - z + a_2 z^2 - a_3 z^3 + \ldots$, і відмітимо, що $q_2(\varphi) \geqslant q_3(\varphi) \geqslant q_4(\varphi) \geqslant \ldots$, і $\lim_{n\to\infty} q_n(\varphi) = q_\infty$. Для довільного

$a > 1$ ми позначимо через φ_a функцію $\varphi_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a^{-k^2} a_k z^k$. Ми маємо $q_n(\varphi_a) = a^2 q_n(\varphi)$, тобто ми отримуємо $q_2(\varphi_a) \geqslant q_3(\varphi_a) \geqslant q_4(\varphi_a) \geqslant \ldots$, і $\lim\limits_{n\to\infty} q_n(\varphi_a) = a^2 q_\infty$. Виберемо і зафіксуємо довільне a, $1 < a^2 < (1+\sqrt{5})/q_\infty$. Із леми 4.5.3, існує натуральне число j_0, таке що для усіх $l \geqslant j_0$ функція φ_a має точно l коренів (враховуючи кратності) в колі $\{z : |z| < \rho_l\}$, і $p_l(\varphi_a) < \rho_l < p_{l+1}(\varphi_a)$. Зафіксуємо довільний індекс $l > j_0$. Використовуючи лему 4.5.2, ми отримуємо, що існує натуральне число m_0, і нескінчена послідовність додатних чисел (y_j), $p_j(\varphi_a) < y_j < p_{j+1}(\varphi_a)$, така що для кожного $n > 2m_0$ виконуються наступні нерівності: $(-1)^j S_n(y_j, \varphi_a) \geqslant 0$ для усіх $j = 1, 2, 3, \ldots, n - 2m_0$. Ми відмічаємо, що точки $0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{l-1}$ належать до кола $\{z : |z| < \rho_l\}$. Таким чином, для довільного $n \in \mathbb{N}$, $n > l + 2m_0$, ми маємо $S_n(0, \varphi_a) > 0$, і $(-1)^j S_n(y_j, \varphi_a) \geqslant 0$ для усіх $j = 1, 2, 3, \ldots, l - 1$. Спрямовуючи $n \to \infty$, ми отримуємо $\varphi_a(0) > 0$, і $(-1)^j \varphi_a(y_j) \geqslant 0$ для усіх $j = 1, 2, 3, \ldots, l - 1$. Тобто, функція φ_a має не менше за $l - 1$ дійсних коренів у колі $\{z : |z| < \rho_l\}$. Оскільки число недійсних коренів дійсної функції φ_a у колі $\{z : |z| < \rho_l\}$ є парним числом, ми робимо висновок, що усі корені функції φ_a у колі $\{z : |z| < \rho_l\}$ є дійсними, і цей факт є вірним для кожного $l > j_0$. Відповідно, усі корені функції φ_a є дійсними. Ми довели, що для кожного a, $1 < a^2 < (1+\sqrt{5})/q_\infty$, функція φ_a має тільки дійсні корені. Спрямовуючи $a \to 1$, ми отримуємо твердження теореми 4.5.1. $\square$

Доведена теорема може бути застосована для перевірки належності до класу Лаґерра-Поліа різноманітних цілих функцій, ми відмітимо лише один наслідок.

Наслідок 4.5.4. Нехай $g_a(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^{k^2}}$ є частковою тета-функцією, і припустимо, що $a^2 \geqslant q_\infty$ (тобто ця функція має усі дійсні корені). Тоді для кожного числа $\lambda \in [0; 1]$ рівняння $g_a(z) = \lambda$ має тільки дійсні корені.

4.6 Узагальнені нерівності Лаґерра і цілі функції класу Лаґерра-Поліа

В цьому параграфі ми доведемо нову характеризацію класу цілих функцій Лаґерра-Поліа через спеціальні нерівності Лаґерра.

Означення 4.6.1. Кажуть, що дійсна ціла функція φ задовольняє нерівності Лаґерра, якщо $L_1(x) := \varphi'(x)^2 - \varphi(x)\varphi''(x) \geqslant 0$ для усіх $x \in \mathbb{R}$.

Ці добре відомі нерівності є тільки необхідними умовами для того, щоб функція φ належала до класу Лаґерра-Поліа. Насправді, якщо, наприклад, $\varphi(x) := e^{x^2/2}\cos x$, то $L_1(x) = e^{x^2}\sin^2 x \geqslant 0$ для усіх $x \in \mathbb{R}$, але $\varphi \notin \mathcal{L-P}$. З іншої сторони, як ми покажемо далі, так звані узагальнені нерівності Лаґерра є необхідними і достатніми умовами для того, щоб функція належала до класу Лаґерра-Поліа.

Означення 4.6.2. Кажуть, що дійсна ціла функція φ задовольняє узагальнені нерівності Лаґерра, якщо для усіх $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ і усіх $x \in \mathbb{R}$, виконується

$$L_n(x) := L_n(x, \varphi) := \sum_{j=0}^{2n} \frac{(-1)^{j+n}}{(2n)!}\binom{2n}{j}\varphi^{(j)}(x)\varphi^{(2n-j)}(x) \geqslant 0.$$

Наступна теорема була доведена в роботі Дж.Ксордаша і Р.Варгі.

Теорема 4.6.3. ([64, теорема 2.9]). Нехай φ – дійсна ціла функція, $\varphi \not\equiv 0$.

1.Якщо $\varphi \in \mathcal{L-P}$, то $L_n(x) \geqslant 0$ для усіх $n \in \mathbb{N}_0$ і для усіх $x \in \mathbb{R}$.

2. І навпаки, припустимо, що $\varphi(x) = e^{-ax^2}\varphi_1(x), \quad a \geqslant 0$, де род функції φ_1 дорівнює нулю або одиниці.

Якщо $L_n(x) \geqslant 0$ для усіх $n \in \mathbb{N}_0$ і для усіх $x \in \mathbb{R}$, то $\varphi(x) \in \mathcal{L-P}$.

Зауваження 4.6.4. Зауважимо, що $L_0(x) = \varphi(x)^2$, і щоб пояснити назву "узагальнені нерівності Лаґерра", відмітимо, що $L_1(x) = \varphi'(x)^2 - \varphi(x)\varphi''(x)$. На додаток ми відмічаємо, що, якщо дійсна ціла функція φ задовольняє узагальнені нерівності Лаґерра, $L_n(x) \geqslant 0$ ($n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$), то φ має тільки дійсні корені (порівняй з [64, с. 343]). Для повноти викладення, ми коротко опишемо доведення. Тут і в подальшому нам потрібно буде наступне представлення $|\varphi(x+iy)|^2$, яке легко отримати прямим обчисленням (дивись, наприклад, [107], [180], або [64]):

$$|\varphi(x+iy)|^2 = \varphi(x+iy)\varphi(x-iy) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) y^{2n}, \quad (x,\, y \in \mathbb{R}). \qquad (4.121)$$

Припустимо, що $z_0 := x_0 + iy_0$ є недійсним коренем функції $\varphi(x)$, де $\varphi \not\equiv 0$. Тоді $0 = |\varphi(z_0)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x_0) y_0^{2n}$ (порівняй з (4.121)). Оскільки $y_0 \neq 0$ і $L_n(x_0) \geqslant 0$, ми отримуємо, що $L_n(x_0) = 0$ для усіх $n = 0, 1, 2, \ldots$. Тобто, для кожного $y \in \mathbb{R}$, $|\varphi(x_0 + iy)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x_0) y^{2n} = 0$. Звідти випливає, що $\varphi(x) \equiv 0$, що суперечить припущенню. Отже, функція φ має тільки дійсні корені.

Зауваження 4.6.5. Розглянемо дію нелінійних операторів $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$, які переводять дійсну цілу функцію $\varphi(x)$ в $L_n(x, \varphi) := L_n(x)$. Відмітимо пару фактів щодо цих операторів. Відомо, що оператори L_n задовольняють нескладне рекурентне співвідношення (дивись [57, теорема 2.1]) і що $L_n(x)$ є також дійсною цілою функцією (дивись [57, Зауваження 2.4]). Цікаві узагальнення цих операторів дані К.Ділчером і К.Б.Столярським ([68]) і Д.А.Кардоном ([48]).

Основним результатом цього параграфу є наступна теорема.

Теорема 4.6.6. ([65]). Нехай φ – дійсна ціла функція, $\varphi \not\equiv 0$. Якщо $L_n(x) \geqslant 0$ для усіх $n \in \mathbb{N}_0$ і для усіх $x \in \mathbb{R}$, то $\varphi(x) \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$.

Доведення. Оскільки дійсна ціла функція $\varphi(x)$ ($\varphi \not\equiv 0$) задовольняє узагальнені нерівності Лаґерра $L_n(x) \geqslant 0$ для усіх $n \in \mathbb{N}_0$ і для усіх $x \in \mathbb{R}$, то φ має тільки дійсні корені (дивись зауваження 4.6.4). Таким чином, φ не має коренів у односвязній області $\mathbb{C}_+ := \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, звідки φ має в цій області аналітичний логарифм; тобто, $f(z) := \log \varphi(z)$ є аналітичною в $\mathbb{C}_+$. Положимо $u(z) := \mathrm{Re} f(z) = \log|\varphi(z)|$ і $v(z) := \mathrm{Im} f(z)$. Тоді

$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x}u(z) + i\frac{\partial}{\partial x}v(z)$, і тому, з умов Коши-Рімана, маємо

$$g(z) := -f'(z) = -\frac{\partial}{\partial x}u(z) - i\frac{\partial}{\partial x}v(z) = -\frac{\partial}{\partial y}v(z) + i\frac{\partial}{\partial y}u(z). \qquad (4.122)$$

Тепер, для $z \in \mathbb{C}_+$, $e^{f(z)} = \varphi(z)$ і $e^{2\mathrm{Re} f(z)} = |\varphi(z)|^2 \geqslant 0$. Тобто, з (4.121) і припущення, що $L_n(x) \geqslant 0$, $(x \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \dots)$, ми отримуємо нерівність

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial y}e^{2\mathrm{Re} f(z)} &= 2e^{2u(z)}\tfrac{\partial}{\partial y}u(z) = \qquad (4.123)\\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\, 2n\, y^{2n-1} \geqslant 0, \quad (x \in \mathbb{R},\ y > 0). \end{aligned}$$

Таким чином, якщо $z = x + iy \in \mathbb{C}_+$, то, з (4.123), $\frac{\partial}{\partial y}u(z) \geqslant 0$, і тому, за допомогою (4.122), $g : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$.

Далі нам потрібна відома нерівність Бореля-Каратеодорі.

Теорема 4.6.7. ([161, с. 18]). Припустимо, що $f : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ є аналітичною функцією. Тоді для $z \in \mathbb{C}_+$ і $|z| > 1$, функція f задовольняє нерівності

$$\frac{1}{5}|f(i)|\frac{\sin\theta}{r} < |f(z)| < 5|f(i)|\frac{r}{\sin\theta} \quad (z = re^{i\theta},\ 0 < \theta < \pi).$$

З нерівності Бореля-Каратеодорі ми отримуємо, що існує додатна стала C_1, така що

$$|g(z)| \leqslant C_1|z| \quad \text{для усіх} \quad z \in \Omega := \{z : \mathrm{Im} z \geqslant |\mathrm{Re} z| + 1\}.$$

Інтегруючи $g(z) := -f'(z)$ по відрізку $[i, z]$, де $z \in \Omega$, ми отримуємо наступну верхню оцінку з новою константою $C_2 > 0$:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left|\textstyle\int_{[i,z]} f'(w)\, dw + f(i)\right| \\ &\leqslant C_1|z|\left(\textstyle\int_{[i,z]} |dw|\right) + |f(i)| \leqslant C_2|z|^2 \quad \text{для усіх} \quad z \in \Omega. \qquad (4.124) \end{aligned}$$

Далі, ми фіксуємо $|z| = r \geqslant 1$ і відмічаємо, що, оскільки φ є дійсною цілою функцією, то $|\varphi(x + iy)| = |\varphi(x - iy)|$ для усіх $x, y \in \mathbb{R}$. Оскільки за припущеннями $L_n(x) \geqslant 0$ для усіх $n \in \mathbb{N}_0$ і для усіх $x \in \mathbb{R}$, то із (4.121) випливає, що для кожного фіксованого x, функція $|\varphi(x + iy)|$ зростає по y для $y \geqslant 0$. Користуючись цими міркуваннями, і вибираючи $r \geqslant 1$, ми отримуємо наступну оцінку:

$$\max_{|x+iy|\leqslant r} \ |\varphi(x+iy)| \leqslant$$
$$\max_{-r\leqslant x\leqslant r} |\varphi(x+i(r+1))| \quad (x+i(r+1)\in\Omega)$$
$$= \max_{-r\leqslant x\leqslant r} e^{\mathrm{Re} f(x+i(r+1))} \leqslant \max_{-r\leqslant x\leqslant r} e^{\ |f(x+i(r+1))|}$$
$$\leqslant e^{5C_2 r^2} \quad (\text{порівняй з } \ (4.124)).$$

Таким чином, ми довели, що ціла функція φ має оцінку на порядок зростання $\rho(\varphi) \leqslant 2$ і, якщо $\rho(\varphi) = 2$, то φ має нормальний тип. Тобто, ми розглянемо два випадки. В першому випадку, якщо $\rho(\varphi) < 2$, то, за факторизаціонною теоремою Адамара, канонічний добуток, побудований по кореням φ, має рід не більше 1 (дивись, наприклад, [30, p. 22]). В другому випадку, ми припускаємо, що $\rho(\varphi) = 2$ і що φ має корені $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ $(x_k \neq 0, k \geqslant 1)$. В цьому випадку, оскільки φ є функцією нормального типу, ми будемо використовувати теоремуЛіндельофа.

Як завжди, через $n(r)$ ми будемо позначати число коренів функції $f(z)$ у колі $\{z\in\mathbb{C} : |z| < r\}$.

Теорема 4.6.8. ([30, с. 27]). Ціла функція f цілого порядку зростання $\rho \geqslant 1$ є функцією нормального типу тоді і тільки тоді, коли

(i) $n(r) = O(r^{\rho})$ $(r\to\infty)$, і

(ii) суми

$$|S(r)| := \left|\sum_{\{z\,:\,f(z)=0,\,|z|\leqslant r,\,z\neq 0\}} \frac{1}{z^{\rho}}\right|$$

є обмеженими при $r\to\infty$.

Доведення теореми Ліндельофа в [30, с. 27] є досить громіздким, тому ми відсилаємо читача ще до [88, Глава 2], або до альтернативного доведення в [139, с. 22, Задача 3].

Ми застосуємо теорему Ліндельофа для отримання того факту, що

$$|S(r)| := \sum_{|x_k|\leqslant r} \frac{1}{x_k^2}$$

є обмеженими при $r \to \infty$. Звідки, $\sum_{k=1}^{\infty} 1/x_k^2 < \infty$ і рід канонічного добутку по нулям функції φ не перевищує одиниці. Тобто, функція φ має представлення

$$\varphi(z) = ce^{az^2+bz} z^m \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{x_k}) e^{z/x_k}, \tag{4.125}$$

де $a, b \in \mathbb{R}$, $x_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, m є невід'ємним цілим числом, c є ненульовим дійсним числом, і $\sum_{k=1}^{\infty} 1/x_k^2 < \infty$.

Щоб завершити доведення теореми, нам треба показати, що в представленні (4.125) $a \leqslant 0$. Доведення спирається на той факт, що функція $|\varphi(iy)|$ зростає по y, $y > 0$. Обчислення демонструють, що

$$h(y) := |\varphi(iy)| = |c|\, |y|^m\, e^{-ay^2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y^2}{x_k^2}\right)^{1/2},$$

де ми вважаємо, як звичайно, що пустий добуток дорівнює одиниці. Тоді для $y > 0$, логарифмічна похідна задається наступним виразом

$$H(y) := \frac{1}{y} \frac{h'(y)}{h(y)} = \frac{m}{y^2} - 2a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k^2 + y^2}. \tag{4.126}$$

Оскільки функція $h(y)$ зростає по $y > 0$ і є додатною функцією для $y > 0$, ми отримуємо, що $H(y) \geqslant 0$ для усіх $y > 0$ (порівняй з лівою частиною (4.126)). Далі ми покажемо, що припущення $a > 0$ приводить до протиріччя. Нехай $0 < \varepsilon < \frac{a}{4}$. Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/x_k^2$ збігається, існує натуральне число N, таке що для усіх $y > 0$,

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{x_k^2 + y^2} \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{x_k^2} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.127}$$

При фіксованому знайденому раніше N, знаходимо додатне число y_0, y_0 досить велике, таке, що для усіх $y \geqslant y_0$,

$$\frac{m}{y^2} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{x_k^2 + y^2} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.128}$$

Нерівності (4.127) і (4.128) демонструють, що, якщо $a > 0$, то для усіх $y \geqslant y_0$,

$$H(y) = \frac{1}{y} \frac{h'(y)}{h(y)} = \frac{m}{y^2} - 2a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k^2 + y^2} < \varepsilon - 2a < \frac{a}{4} - 2a < 0.$$

Це приводить до протиріччя, тому $a \leqslant 0$. Таким чином, $\varphi \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$. $\square$

Далі ми отримуємо аналогічні результати для так званих комплексних нерівностей Лаґерра і сформулюємо два відкритих питання, одне з яких базується на дослідженнях Д.Кардона щодо нерівностей типу Лаґерра ([48]). Для початку ми розглянемо наступну характеризацію функцій класу Лаґерра-Поліа через комплексні нерівності Лаґерра.

Теорема 4.6.9. ([64, теорема 3.8]). Нехай φ, $\varphi \not\equiv 0$, є дійсною цілою функцією. Припустимо, що

$$\varphi(x) = e^{-\alpha x^2}\varphi_1(x), \text{ де } \alpha \geqslant 0 \text{ і рід функції } \varphi_1 \text{ дорівнює 0 або 1.} \quad (4.129)$$

Тоді $\varphi \in \mathcal{LP}$ тоді і тільки тоді, коли

$$|\varphi'(z)|^2 \geqslant \operatorname{Re}\left(\varphi(z)\overline{\varphi''(z)}\right) \quad \text{для усіх} \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.130)$$

Ми покажемо, що остання теорема залишається у силі без жодних припущень щодо зростання функції φ.

Теорема 4.6.10. ([65]). Нехай φ, $\varphi \not\equiv 0$, є дійсною цілою функцією. Комплексні нерівності Лаґерра (4.130) виконуються тоді і тільки тоді, коли $\varphi \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$.

Доведення. Доведення буде аналогічним доведенню попередньої теореми, але потребує деякої модифікації. Як і в доведенні теореми 4.6.6 ми положимо $f(z) := \log\varphi(z) = u(z) + iv(z)$, і $g(z) := -f'(z) = -v_y(z) + i\,u_y(z)$, де $z \in \mathbb{C}_+$. Нам необхідно довести два твердження: (i) $u_y(z) \geqslant 0$ для $z = x+iy \in \mathbb{C}_+$ і (ii) функція $|\varphi(iy)|$ зростає по y, $y > 0$.

(i) Ми знову розглянемо представлення $|\varphi(x+iy)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)y^{2n}$, $(x,\, y \in \mathbb{R})$. Тоді пряме обчислення показує, що для кожного фіксованого $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}|\varphi(x+iy)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(2n+2)L_{n+1}(x)y^{2n}2\left[|\varphi'(z)|^2 - \operatorname{Re}\left(\varphi(z)\overline{\varphi''(z)}\right)\right] \geqslant 0 \quad (z \in \mathbb{C}). \quad (4.131)$$

Тому, з умов опуклості (4.131), ми робимо висновок, що для кожного фіксованого $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial}{\partial y}|\varphi(z)|^2 = \frac{\partial}{\partial y}e^{2u(z)} = 2e^{2u(z)}u_y(z)$ зростає по y, $y > 0$. Тобто, для кожного x, який не є коренем φ, ми маємо

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{\partial}{\partial y}e^{2u(z)} = 2\lim_{y\to 0^+}|\varphi(z)|^2 u_y(x+iy) = \lim_{y\to 0^+}\sum_{n=0}^{\infty} 2nL_n(x)y^{2n-1} = 0,$$

звідки $u_y(x + i0) = 0$. Оскільки функція $2e^{2u(z)}u_y(z)$ зростає по y, $0 = 2e^{2u(x+i0)}u_y(x + i0) \leqslant 2|\varphi(x + iy)|^2\, u_y(x + iy)$, і $u_y(x + iy) \geqslant 0$, $y > 0$. З іншого боку, якщо $\varphi(x_0) = 0$, то міркування неперервності демонструють, що $u_y(x+iy) \geqslant 0$, $y > 0$. Таким чином, $g : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ і метод доведення, який дає добуткове представлення функції $\varphi(z)$ (порівняй з (4.125)) є таким же самим, як в доведенні теореми 4.6.6.

(ii) Для того, щоб довести $a \leqslant 0$ в (4.125)), достатньо показати, що функція $|\varphi(iy)|$ зростає по y, $y > 0$. Із умови опуклості (4.131) ми отримуємо, що

$$0 < \int_0^y \frac{\partial^2}{\partial t^2}\,|\varphi(it)|^2\,dt = \frac{\partial}{\partial y}|\varphi(iy)|^2, \tag{4.132}$$

де ми використали той факт, що $\frac{\partial}{\partial y}|\varphi(iy)|^2$ є парною функцією. Таким чином, з нерівності (4.132) випливає, що функція $|\varphi(iy)|$ зростає по змінній y, $y > 0$. □

Прямим наслідком теореми 4.6.6 і теореми 4.6.10 є наступне твердження.

Наслідок 4.6.11. ([65]). Нехай φ, $\varphi \not\equiv 0$, є дійсною цілою функцією. Тоді

$$L_n(x) := \sum_{j=0}^{2n}\frac{(-1)^{j+n}}{(2n)!}\binom{2n}{j}\varphi^{(j)}(x)\varphi^{(2n-j)}(x) \geqslant 0 \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R})$$

тоді і тільки тоді, коли

$$|\varphi'(z)|^2 \geqslant \operatorname{Re}\left(\varphi(z)\overline{\varphi''(z)}\right) \quad \text{для усіх} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Може бути цікавим зауваження, що вирази для комплексних нерівностей Лаґерра можуть бути представлені через два дійсні вирази лаґеррівського типу. Дійсно, якщо $\varphi(x+iy) = U(x,y)+iV(x,y)$ є дійсною цілою функцією, то легко перевірити, що

$$|\varphi'(z)|^2 - \mathrm{Re}\left(\varphi(z)\overline{\varphi''(z)}\right) = U_x^2 - UU_{xx} + V_x^2 - VV_{xx}.$$

У зв'язку з цим ми сформулюємо відкрите питання.

Питання 4.6.12. Нехай $(u_k(x))_{k=0}^{\infty}$ є послідовністю дійсних цілих функцій. Для кожного фіксованого $x \in \mathbb{R}$, розглянемо парний степеневий ряд $F(y;x) := \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) y^{2k}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ із радіусом збіжності $R = \infty$, де $F(y;x)) \not\equiv 0$. Припустимо, що $u_0(x) \geqslant 0$ для усіх $x \in \mathbb{R}$, і що $\partial^2/\partial y^2 F(y;x) \geqslant 0$ для усіх $x, y \in \mathbb{R}$. Якщо $F(y;x)$ не є многочленом, то за якими додатковими припущеннями вірно, що $u_k(x) \geqslant 0$ для усіх $k \geqslant 1$ і усіх $x \in \mathbb{R}$?

Тепер ми перейдемо до узагальнення нерівностей лаґеррівського типу, що вони розглянуті в роботі Д.Кардона [48]. Для того, щоб презентувати головний результат Д.Кардона [48, теорема 2.1], нам потрібно ввести нові функції. Нехай

$$p(z) := \sum_{k=0}^{m} c_k z^k = \prod_{j=1}^{m} (z + \alpha_j), \tag{4.133}$$

є парним многочленом з дійсними невід'ємними коефіцієнтами $c_k \geqslant 0$, і припустимо, що $p(z)$ має принаймні один недійсний корінь. Нехай $\varphi(x)$, $\varphi(x) \not\equiv 0$, є дійсною цілою функцією і визначимо

$$\Phi(z,t) := \prod_{j=1}^{m} \varphi(z + \alpha_j t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z) t^k, \qquad \text{де}$$

$$A_k(z) := \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dt^k}\Phi(z,t)\right]_{t=0}, \qquad (k \in \mathbb{N}_0). \tag{4.134}$$

Тоді легко побачити, що $A_k(z)$ є також дійсною цілою функцією, і, як зазначив Д.Кардон, вибір $p(z) := 1 + z^2$ дає $A_{2k+1}(z) \equiv 0$. Більш того, в цьому випадку $A_{2k}(z) = L_k(z)$ для $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тепер ми можемо сформулювати наступну теорему.

Теорема 4.6.13. ([48, теорема 2.1]). Нехай $\varphi(x) = e^{-ax^2}\varphi_1(x)$, де рід дійсної цілої функції $\varphi_1(x)$ дорівнює 0 або 1, $\varphi_1(x) \not\equiv 0$ і $a \geqslant 0$. Нехай p і A_k –

функції, які введені вище (дивись (4.133) і (4.134)). Тоді

$$\varphi(x) \in \mathcal{L}-\mathcal{P} \quad \text{тоді і тільки тоді, коли}$$
$$A_k(x) \geqslant 0 \quad \text{для усіх } x \in \mathbb{R} \text{ і } k \in \mathbb{N}_0.$$

Тепер ми можемо сформулювати нашу гіпотезу.

Гіпотеза 4.6.14. Нехай $\varphi(x)$ є дійсною цілою функцією, $\varphi(x) \not\equiv 0$. Нехай p і A_k – функції, які введені в (4.133) і (4.134). Якщо $A_k(x) \geqslant 0$ для усіх $x \in \mathbb{R}$ і $k \in \mathbb{N}_0$, то $\varphi(x) \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$.

В кінці цього параграфу ми сформулюємо ще одне відкрите питання.

Питання 4.6.15. Нехай $S_\tau := \{z : |\mathrm{Im} z| \leqslant \tau, \tau \geqslant 0\}$ є смугою шириною 2τ. Нехай f є дійсною цілою функцією. За якими додатковими припущеннями можливо характеризувати нетривіальні області $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$, такі що з комплексних нерівностей Лаґерра, обмежених на Ω; тобто, $|f'(z)|^2 \geqslant \mathrm{Re}\left(f(z)\overline{f''(z)}\right)$, $z \in \Omega$, випливає, що усі корені f належать до смуги S_τ?

4.7 Про число дійсних коренів спеціальних квазімногочленів

Нехай $x_1, \ldots, x_n$ і $y_1, \ldots, y_n$ є дійсними або комплексними числами, такими що $\sum_{i=1}^n x_i^k = \sum_{i=1}^n y_i^k$ для $k = 1, \ldots, n$. Тоді існує перестановка π, така що $x_i = y_{\pi(i)}$ для усіх i. Це є добре відомим фактом, який міститься в багатьох підручниках (дивись, наприклад, [228, §33]).

Ідеєю доведення цього факту є спостереження, що за припущеннями многочлени $\prod_{i=1}^n (x - x_i)$ і $\prod_{i=1}^n (x - y_i)$ мають однакові коефіцієнти, тобто вони мають однакові корені. З цих міркувань випливає, що не обов'язково припускати, що x_i, y_i є числами, вони можуть бути елементами довільного комутативного кільця без дільників нуля. З іншого боку, для ідеї доведення важливо, що показники степенів k змінюються від 1 до n.

Відправною точкою цього параграфу було бажання знайти аналітичне доведення цього факту, для того, щоб на цьому шляху можливо було розглянути довільні показники степенів. Відповідний аналітичний варіант повинен виглядати наступним чином: якщо $\sum_{i=1}^n x_i^p$ співпадає з $\sum_{i=1}^n y_i^p$ для "достатньо великої" кількості показників степенів p, то набір y_i є перестановкою набору x_i. Але в такому вигляді твердження не може бути вірним: якщо, наприклад, усі показники степенів є парними числами, то наше припущення не містить інформації щодо знаків чисел з наборів. Також, для того, щоб працювати з нецілими показниками степенів, ми повинні обмежити розгляд до наборів невід'ємних чисел x_i, y_i, інакше вирази x_i^p, y_i^p не є добре визначеними.

Тому ми приходимо до наступної проблеми.

Питання 4.7.1. Нехай $x_1, \dots, x_n$ and $y_1, \dots, y_n$ є невід'ємними дійсними числами, такими що рівності $\sum_{i=1}^n x_i^p = \sum_{i=1}^n y_i^p$ виконуються для n різних показників $p > 0$. Чи випливає з цього припущення, що набір x_i є перестановкою набору y_i?

Природний переклад цього питання на мову функціонального аналізу виглядає наступним чином: чи характеризують n різних l^p-норм на просторі $\mathbb{R}^n$ вектор з невід'ємними координатами з точністю до перестановки?

Ми покажемо далі, що відповідь є позитивною.

Нехай $a_1, \dots, a_r$ і $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ є дійсними числами, такими що усі a_ρ є ненульовими і λ_ρ є додатними і зростаючими. Для $x \in \mathbb{R}$ ми визначимо $f(x) := f_{a_1,l,a_r,\lambda_1,l,\lambda_r}(x) := a_1 \exp(-\lambda_1 x) + \dots + a_r \exp(-\lambda_r x)$, і ми бажаємо знайти оцінку на число додатних коренів цього квазимногочлена.

Нам потрібна наступна лема.

Лема 4.7.2. ([22]). Кількість точок $x > 0$, таких що $f(x) = 0$, не перевищує числа змін знаку в послідовності $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + \dots + a_r$.

Ми нагадуємо, що для дійсної числової послідовності $b_1, \dots, b_r$ число знакозмін (його ще називають нестійким числом знакозмін) визначається наступним чином: якщо усі b_ρ є ненульовими , то число знакозмін дорівнює кількості індексів $\rho \in \{1, \dots, r-1\}$, таких що $b_\rho b_{\rho+1} < 0$; для довільної послідовності ми спершу видаляємо нульові b_ρ, а після цього користуємось першим правилом.

Доведення. Цей результат не є новим, він міститься, наприклад, в [191, розділ 5, глава 1], де його називають результатом Лаґерра (дивись [157]). Тим не менш, для зручності читача, ми включаємо доведення.

Нехай $\Phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ є обмеженою кусково-неперервною функцією, яка не є тотожно нульовою. Ми стверджуємо, що число коренів її перетворення Лапласу $g_\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g_\Phi(x) := \int_0^\infty e^{-xt}\Phi(t)dt$, не перевищує числа s знакозмін функції Φ. (За означенням, Φ має s знакозмін, якщо існують $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_s$, такі що функція $(t - t_1)\cdots(t - t_s)\Phi(t)$ не змінює знаку.)

Будемо доводити це індукцією по s. Випадок $s = 0$ є очевидним. Ми припустимо, що твердження виконується для деякого s, і розглянемо функцію Φ, яка має $s+1$ знакозмін. Тоді $\Psi(t) := (t-t_0)\Phi(t)$ буде мати s знакозмін для деякого вибору $t_0 > 0$. Наша гіпотеза стверджує, що g_Ψ має не більше s коренів. І оскільки $e^{t_0 x} g_\Psi(x)$ є похідною від $-e^{t_0 x} g_\Phi(x)$, з теореми Роля випливає, що g_Φ не може мати більше ніж $s + 1$ коренів.

Наша лема є прямим наслідком цього твердження. Ми розглянемо

$$\Phi(t) := \sum a_i \chi_{[\lambda_i,\infty[},$$

де $\chi_{[\lambda_i,\infty[}$ позначається характеристична функція інтервалу $[\lambda_i, \infty[$. Тоді число знакозмін Φ дорівнює числу знакозмін послідовності $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + \cdots + a_r$, і $g_\phi(x) = f(x)/x$ для усіх x. □

Нашим головним результатом є наступне твердження.

Теорема 4.7.3. ([22]). Нехай $g_1, \ldots, g_n$ є додатними числами і $0 < p_1 < \cdots < p_n$. Тоді для дійсних x_i, y_i, таких що $0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ і $0 \leqslant y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_n$, з системи рівнянь $\sum_i g_i x_i^{p_k} = \sum_i g_i y_i^{p_k}, k = 1, \ldots, n$, випливає, що $x_i = y_i$ для усіх $i = 1, \ldots, n$.

Доведення. Без втрати загальності припустимо, що x_i, y_i не перевищують одиниці, і що $x_1 > 0$. Через $l < n$ позначимо найменший індекс i, такий що $y_i > 0$. Ми покладемо $\alpha_i := \log x_i, \beta_i := \log y_i$, і розглянемо функцію $f(x) := g_1 \exp(\alpha_1 x) + \cdots + g_n \exp(\alpha_n x) - g_l \exp(\beta_l x) - \cdots - g_n \exp(\beta_n x)$ для $x > 0$. Ця функція є тотожно нульовою тоді і тільки тоді, коли $l = 1$ і $x_i = y_i$ виконується для усіх i, звідки наше твердження є еквівалентним тому, що функція f має не більше $n - 1$ коренів, якщо ця функція не є тотожно нульовою.

Для того, щоб використати лему 4.7.2 ми припустимо, що $f \neq 0$, і перепишемо f у вигляді $f(x) = a_1 \exp(-\lambda_1 x) + \cdots + a_{2n-l+1} \exp(-\lambda_{2n-l+1} x)$ з додатними і зростаючими λ_i. В послідовності $a_1, \ldots, a_{2n-l+1}$ числа $g_n, \ldots, g_1$ і числа $-g_n, \ldots, -g_l$ містяться як підпослідовності, конкретний вигляд залежить від відповідного порядку x_i, y_i (наприклад, якщо $x_n > y_n$, то $\lambda_1 = -\alpha_n$ і $a_1 = g_n$).

Для застосування леми 4.7.2 ми повинні показати наступне: незалежно від того, як перемішані послідовності $g_n, \ldots, g_1$ і $-g_n, \ldots, -g_l$ для отримання послідовності $a_1, \ldots, a_{2n+l-1}$, число знакозмін в $a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \cdots + a_{2n+l-1}$ не перевищує $n - 1$.

Ми будемо доводити це індукцією по n. Твердження очевидно виконується, якщо $n = 1$, і, якщо воно виконується для деякого $n - 1$, ми міркуємо наступним чином. Припустимо, що послідовність $a_1, \ldots$ починається з g_n і що $-g_n$ виникає на r-тій позиції. Позначимо через $a'_1, \ldots, a'_{2n-l-1}$ послідовність, яка складається з елементів $a_1, \ldots$ без a_1 і a_r. За індуктивним припущенням, є не більше $n - 2$ знакозмін в послідовності $a'_1, a'_1 + a'_2, \ldots$, і із цього випливає, що в послідовності $a_1, a_1 + a_2, \ldots$ може бути не більше $n - 2 + 1$ знакозмін. (Додаткова знакозміна може з'явитися після r-тої позиції). Якщо $a_1 = -g_n$, ми міркуємо аналогічним чином. □

Таким чином, відповідь на питання 4.7.1 є позитивною. Потрібно тільки розглянути випадок $g_1 = \cdots = g_n = 1$ в попередній теоремі.

Аналіз доведення демонструє, що можна стверджувати більше. Якщо ми знаємо для деякого набору $0 < x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ відповідний порядок по відношенню до набору $0 < y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_n$ (і нічого більше), то існує

$m \leqslant n$, таке що виконується наступне : кожного разу, коли для будь-якого позитивного набору $g_1, \cdots, g_n$, виконується $\sum g_i x_i^p = \sum g_i y_i^p$ для m різних значень p, то $x_i = y_i$ для усіх i. Число $m = n$ відповідає загальному випадку, коли немає додаткової інформації, але m може бути значно меншим. (Екстремальним випадком є тривіальна ситуація, коли усі y_i є більшими або рівними за усі x_i, тоді – для довільних g_i – навіть $m = 1$ є достатнім.)

Теорема дає аналітичне доведення природного алгебраїчного твердження для випадку дійсних чисел. (Якщо x_i і y_i задані в порядку зростання, то з $\sum_i x_i^k = \sum_i y_i^k, k = 1, \ldots, n$, випливає, що $\sum_i (x_i + l)^k = \sum_i (y_i + l)^k, k = 1, \ldots, r$ для $l = 1, 2, \ldots$; це легко може бути доведеним індукцією по l. Тепер достатньо вибрати l настільки великим, що усі $x_i + l, y_i + l$ є додатними і застосувати теорему).

Для різних додатних x, y ми позначимо через $\mu_{x,y}$ міру $\delta_x - \delta_y$ (тут δ_x – міра Дірака, асоційована з x). Якщо задані n таких мір $\mu_{x_1,y_1}, \ldots, \mu_{x_n,y_n}$ ми можемо розглянути їх як лінійні функціонали на просторі X дійснозначних функцій на $\{x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n\}$ (ми вважаємо, що ця множина складається з $2n$ точок). Тепер нехай $\mu := g_1\mu_{x_1,y_1} + \cdots g_n\mu_{x_n,y_n}$ є довільною мірою в конусі, що він згенерований μ_{x_i,y_i}. Анігілятор V міри μ є $(2n-1)$-вимірним підпростором $2n$-вимірного простору X. З нашої теореми, V може містити тільки "небагато"функцій типу $x \mapsto x^p$, а саме не більше $n-1$ таких функцій. Таким чином, міри такого типу є в деякому сенсі "антиортогональними"функціям типу $x \mapsto x^p$.

Тепер ми обговоримо деякі узагальнення нашого результату, і спершу ми перейдемо від скінчених до нескінчених послідовностей. Виникає наступне природне питання.

Питання 4.7.4. Нехай $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$ і $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$ є послідовностями. Чи випливає з $\sum x_i^p = \sum y_i^p$ для "достатньо багатьох"показників p, що $x_i = y_i$ для усіх i?

Для того, щоб питання можна було поставити, ми будемо розглядати послідовності, які належать до деякого l^p-простору з $p > 0$. Очевидно, що скінченої кількості показників p недостатньо для позитивної відповіді на питання, далі ми наводимо результат з позитивною відповіддю.

Твердження 4.7.5. ([22]). Припустимо, що $(x_i), (y_i) \in l^{p_0}$ для деякого $p_0 > 0$, і що $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \dots \geqslant 0, y_1 \geqslant y_2 \geqslant \dots \geqslant 0$. Тоді, якщо

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_i x_i^{p_r} = \sum_{i=1}^{\infty} g_i y_i^{p_r} \tag{4.135}$$

виконується для довільної обмеженої послідовності g_i додатних чисел і нескінченої кількості різних p_r, таких що $\inf p_r > p_0$, то $x_i = y_i$ для усіх i.

Доведення. Ми розглянемо два випадки.

1. Послідовність (p_r) має скінчену граничну точку q. Нехай $f : \{\mathrm{Re}\, z > p_0\} \to \mathbb{C}$ є наступною функцією $f(z) = \sum g_i x_i^z - \sum g_i y_i^z$. Функція f є аналітичною в своєї області, і корені цієї функції мають скінчену граничну точку q. Тоді f є тотожно нульовою функцією, і легко перевірити, що тоді $x_i = y_i$ для усіх i.

2. Послідовність (p_r) має ∞ як граничну точку. Для простоти припустимо, що $p_r \to \infty$. Нехай наше твердження не виконується. Без втрати загальності ми вважаємо, що $x_1 > y_1$, і після відповідної нормалізації ми можемо вважати, що $x_1 = 1$. Якщо ми положимо, що p_r прямує до нескінченості в (4.135), то ліва частина збігається до g_1, а права частина збігається до 0; це протиріччя доводить потрібний результат. $\square$

Друге природне узагальнення – замінити послідовності на функції. Для простоти ми будемо розглядати тільки неперервні функції $f, h : [0,1] \to [0,\infty)$, і ми бажаємо зробити висновок з того, що $\int_0^1 f^p(x)dx = \int_0^1 h^p(x)dx$ для "великої кількості"показників p, що f і h є однаковими функціями. Достатня умова може бути легко знайдена за допомогою відомої теореми Мюнца-Саса.

Твердження 4.7.6. Нехай f, h є неперервними функціями, $f, h : [0,1] \to [0,\infty)$, і припустимо додатково, що вони обидві є зростаючими і g є додатною. Тоді із припущення $\int_0^1 f^{p_r}(x)g(x)dx = \int_0^1 h^{p_r}(x)g(x)dx$ для деякої послідовності $0 < p_1 < p_2 < \cdots$ показників, які задовольняють умову $\sum 1/p_r = \infty$, випливає, що $f = h$.

Доведення. Ми можемо припустити, що $\int_0^1 g(x)dx = 1$, і ми будемо розглядати f і h як $[a,b]$-значні випадкові змінні, які є визначеними на ймовірнісному просторі, що він задається щільністю g на $[0,1]$. Позначимо через μ, ν відповідно індуцировані міри на $[a,b]$. Тоді $\int_a^b t^{p_r} d\mu(t) = \int_a^b t^{p_r} d\nu(t)$ для усіх r. Але лінійна оболонка функцій $t \mapsto t^{p_r}$ формує повний лінійний підпростір в $C[a,b]$ за теоремою Мюнца-Саса (дивись [198, теорема 15.26]), внаслідок чого μ дорівнює ν. Звідти легко вивести, що $f = h$. □

В цьому параграфі ми сконцентрувалися на аналітичних аспектах проблеми, тому обмеження до невід'ємних x_i, y_i було природним. Ми також відмітили, що у випадку натуральних показників степенів деякі обмеження необхідні. Нехай $m_1 < \cdots < m_n$ є натуральними числами і A є підмножиною множини комплексних чисел. Ми говоримо, що $(m_1, \ldots, m_n)$ є A-придатними, якщо з $\sum_i x_i^{m_k} = \sum_i y_i^{m_k}$ для $k = 1, \ldots, n$ випливає, що набір x_i є перестановкою набору y_i; це має виконуватися для довільного набору $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in A$. Якими є A-придатні $(m_1, \ldots, m_n)$ для $A = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$, і $\mathbb{C}$?

Для випадку $A = [0, \infty)$ теорема 4.7.3 дає повну відповідь: усі набори $(m_1, \ldots, m_n)$ є придатними, для інших A ми маємо тільки часткові результати. Фактично, ситуація є навіть більш складною. Щоб проілюструвати це, ми розглянемо випадок $n = 2$. Тоді $(1, 3)$, очевидно, не є $\mathbb{C}$-придатним, оскільки $x_1 + x_2 = x_1^3 + x_2^3 = 0$ виконується, коли $x_1 + x_2 = 0$. З іншого боку, якщо $x_1 + x_2$ не дорівнює нулю, то $x_1^2 + x_2^2$ може бути вираженим через $x_1 + x_2$ і $x_1^3 + x_2^3$:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2\frac{(x_1 + x_2)^3 - (x_1^3 + x_2^3)}{3(x_1 + x_2)}.$$

Тобто, із нашого розгляду випадку $x_1 + x_2$ не дорівнює нулю, x_1, x_2 будуть перестановкою y_1, y_2 якщо виконується $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ і $x_1^3 + x_2^3 = y_1^3 + y_2^3$. Це мотивує нас назвати $(m_1, \ldots, m_n)$ майже A-придатними, якщо існує

Борелевська множина $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ міри нуль, така що потрібний висновок виконується при додатковому припущенні, що вектор $(\sum_i x_i^{m_k})_{k=1,\dots,n}$ не належить до Δ. Ми щойно показали, що $(1,3)$ є майже $\mathbb{C}$-придатним, і, приклавши трохи більше зусиль, можна продемонструвати, що немає інших прикладів для $n = 2$ (з точністю до $(m_1, m_2) = (1,2)$, звичайно).

Наш підхід показує, як розглянути проблему в загальному випадку. Фіксуємо n і позначимо через s_k елементарні симетричні многочлени Ньютона $x_1^k + \cdots + x_n^k$ для $k = 1, l$. Тоді ідея в тому, щоб виразити $s_1, \dots, s_n$ через $s_{m_1}, \dots, s_{m_n}$. Відповідно до приватного повідомлення Д.Заг'єра (D. Zagier), це питання вивчалося в двадцяті роки минулого століття відомим японським математиком С.Какеєю, який отримав наступний результат: усі $s_1, \dots, s_n$ є функціями від $s_{m_1}, \dots, s_{m_n}$ тоді і тільки тоді, коли доповнення множини $\{m_1, \dots, m_n\}$ по відношенню до множини $\mathbb{N}$ є адитивною півгрупою. На жаль, оригінальна стаття С.Какейї не є доступною для нас.

4.8 Застосування деяких поліноміальних оцінок до властивостей банахових алгебр

Нехай A є банаховою алгеброю. Дуже добре відомо, що одиниця алгебри $\mathbf{1}$ є крайньою точкою замкненого одиничного кола алгебри A. Просте доведення цього факту можна знайти в класичній книзі С.Сакаї [199, твердження 1.6.6]. Більш того, відомо також, що $\mathbf{1}$ є "сильно крайньою точкою" одиничного кола, або MLUR (від англійського 'midpoint locally uniformly rotund") (дивись [34, теорема 4.5], або [163, теорема 18] для комплексного випадку і [96, твердження 3.3] для дійсного випадку). Нам потрібні деякі загальноприйняті позначення. Якщо X є дійсним або комплексним банаховим простором, то ми позначаємо B_X і S_X замкнену одиничну кулю і одиничну сферу простору X. Ми позначаємо X^* спряжений простір до X і $L(X)$ простір усіх неперервних лінійних операторів на X.

Означення 4.8.1. Нехай X є банаховим простором. Точка $x_0 \in S_X$ називається “сильно крайньою точкою” одиничного кола, або MLUR, якщо виконується одна (і тоді усі) з наступних еквівалентних умов:

(*i*) Для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке що, якщо y, z належать до B_X з $\|y + z - 2x_0\| < \delta$, то $\|y - z\| < \varepsilon$.

(*ii*) Для двох заданих послідовностей (y_n), (z_n) в B_X, якщо $(y_n + z_n) \longrightarrow 2x_0$, то $(y_n - z_n) \longrightarrow 0$ (еквівалентно, $(y_n) \longrightarrow x_0$ і $(z_n) \longrightarrow x_0$).

(*iii*) Для кожної послідовності (x_n) в X, якщо $\|x_0+x_n\| \longrightarrow 1$ і $\|x_0-x_n\| \longrightarrow 1$, то $(x_n) \longrightarrow 0$.

(*iv*) Для кожної послідовності (x_n) в X, якщо $\max\limits_{\pm} \|x_0 \pm x_n\| \longrightarrow 1$, то $(x_n) \longrightarrow 0$.

(*v*) Для кожного $\varepsilon > 0$, число

$$\delta_X(x_0; \varepsilon) = \inf \left\{ \max_{\pm} \|x_0 \pm x\| - 1 \ : \ x \in X, \ \|x\| = \varepsilon \right\}$$

є додатним.

Пункт (*v*) цього визначення дає числову версію концепції сильної крайньої точки, якщо використовувати так званий модуль MLUR. Головна ціль цього параграфу – дати нижню оцінку на $\delta_X(x_0; \varepsilon)$, коли X є банаховою алгеброю і x_0 є її одиницею. Щоб зробити це, ми введемо наступне позначення для банахової алгебри A

$$\delta_A(\varepsilon) := \inf \left\{ \max_{\pm} \|\mathbf{1} \pm x\| - 1 \ : \ x \in A, \ \|x\| = \varepsilon \right\}$$

і

$$\delta(\varepsilon) := \inf \left\{ \delta_A(\varepsilon) \ : \ A \ - \text{банахова алгебра} \right\}.$$

Відмітимо, що для визначення $\delta_A(\varepsilon)$ ми розглядаємо двовимірний лінійний підпростір A, що її розглядаємо як лінійний простір, а саме підпростір $\mathrm{Lin}\{\mathbf{1}, x\}$, і структуру норми в ньому (лінійний підпростір $\mathrm{Lin}\{\mathbf{1}, x\}$ не є, взагалі кажучи, підалгеброю A). Добре відомо (дивись, наприклад, [2, с. 192]), що будь-яка опукла, поглинаюча, збалансована і алгебраїчно обмежена множина задає одиничну кулю в лінійному просторі (у нашому випадку двовимірному). Однак, той факт, що цей двовимірний лінійний підпростір вкладається в банахову алгебру, накладає жорсткі обмеження на структуру одиничної кулі, зокрема, як ми доведемо далі, одиниця $\mathbf{1}$ є крайньою точкою замкненого одиничного кола алгебри A.

Відзначимо, що квадратична оцінка для $\delta(\varepsilon)$ є найкращою можливою:

$$\delta(\varepsilon) \leqslant \delta_{\mathbb{C}}(\varepsilon) = \sqrt{1+\varepsilon^2} - 1.$$

Твердження 4.8.2. Нехай H є гільбертовим простором і нехай A є замкненою підалгеброю в $L(H)$. Тоді $\delta_A(\varepsilon) \geqslant \sqrt{1+\varepsilon^2} - 1$. Зокрема, це виконується для довільної (дійсної або комплексної) C^*-алгебри.

Доведення. Очевидно, що достатньо довести цей факт для $A = L(H)$. Нехай $T \in L(H)$, $\|T\| > \varepsilon$. Виберемо елемент $x \in S_H$ для котрого $\|Tx\| > \varepsilon$. Тоді

$$\begin{aligned}
&\max_{\pm} \|\mathrm{I}d \pm T\|^2 \geqslant \max_{\pm} \|x \pm Tx\|^2 \\
&\geqslant \frac{1}{2}\left(\|x+Tx\|^2 + \|x-Tx\|^2\right) = 1 + \|Tx\|^2 > 1 + \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

□

З оглядом до наведеного вище результату ми можемо сформулювати таку гіпотезу.

Гіпотеза 4.8.3. $\delta(\varepsilon) = \sqrt{1+\varepsilon^2} - 1$.

Наступний простий результат можна розглядати як перший крок до доведення цієї гіпотези.

Зауваження 4.8.4. $\delta(\varepsilon) = \sqrt{1+\varepsilon^2} - 1$ *для* $\varepsilon = 1$. Дійсно, для кожної банахової алгебри A і для кожного $x \in A$ ми маємо

$$x = \frac{1}{4}\big((\mathbf{1}+x)^2 - (\mathbf{1}-x)^2\big),$$

тому

$$\|x\| \leqslant \frac{1}{4}\big(\|\mathbf{1}+x\|^2 + \|\mathbf{1}-x\|^2\big).$$

Тоді $(\delta_A(\varepsilon)+1)^2 \geqslant \inf\{\frac{1}{2}\left(\|\mathbf{1}+x\|^2 + \|\mathbf{1}-x\|^2\right) : x \in A, \|x\| = \varepsilon\} \geqslant 2\varepsilon$, тому $\delta(\varepsilon) \geqslant \sqrt{2\varepsilon} - 1$, що дає для $\varepsilon = 1$ оцінку $\delta(1) \geqslant \sqrt{2} - 1$, яку ми бажаємо.

В цьому параграфі ми використаємо спеціальні поліноміальні тотожності для доведення наступного твердження.

Теорема 4.8.5. ([110]). Обернена до $\delta(\varepsilon)$ функція $\varepsilon(\delta)$ може бути оціненою наступним чином:

$$\varepsilon(\delta) \leqslant 2\sqrt{\frac{e}{\pi}} \cdot \sqrt{\log(1+\delta)} \cdot (1+\delta)^6. \tag{4.136}$$

З цього випливає, що $\delta(\varepsilon) \geqslant \frac{\pi}{4e}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$.

Ми почнемо з деяким алгебраїчних формул. Далі ми позначатимемо C_n^k біноміальні коефіцієнти: $C_n^k = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Ми вважаємо, що коефіцієнт C_n^k є також визначеним для $k < 0$ і в цьому випадку дорівнює нулю.

Лема 4.8.6. Для усіх $m \in \mathbb{N}$ виконуються тотожності:

$$\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k (2m+1-2k) = (m+1) C_{2m+1}^m \tag{4.137}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k (2m-2k) = m C_{2m}^m. \tag{4.138}$$

Доведення. Ми доведемо обидві тотожності одночасно індукцією по m. Для $m = 1$ обидві тотожності (4.137) і (4.138), очевидно, виконуються.

Припустимо, що (4.138) є вірним для $m = p$. Доведемо, що (4.137) є вірним для $m = p+1$. Ми маємо

$$\sum_{k=0}^{p} (2p+1-2k) C_{2p+1}^k = \sum_{k=0}^{p} (2p+1-2k)(C_{2p}^k + C_{2p}^{k-1})$$

$$= C_{2p}^p + \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k \big((2p+1-2k) + (2p+1-2(k+1))\big)$$

$$= C_{2p}^p + \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k (4p-4k) = (2p+1) C_{2p}^p = (p+1) C_{2p+1}^p.$$

Припустимо, що (4.137) є вірним для $m = p$. Доведемо, що (4.138) є вірним для $m = p+1$. Ми маємо

$$\sum_{k=0}^{p} (2p+2-2k) C_{2p+2}^k = \sum_{k=0}^{p} (2p+2-2k)(C_{2p+1}^k + C_{2p+1}^{k-1})$$

$$= 2C_{2p+1}^{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1} C_{2p+1}^{k}(2p+1-2k) = (2p+2)C_{2p+1}^{p} = (p+1)C_{2p+2}^{p+1}.$$

□

Тепер ми можемо довести теорему 4.8.5.

Доведення. Система многочленів $\{B_n(x,k) = (1+x)^{n-k}(1-x)^k\}_{k=0}^n$ утворює базис в лінійному просторі $P_n = \{P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k : a_k \in \mathbb{R}\}$. Знайдемо коефіцієнти b_k, такі що

$$x = \sum_{k=0}^{n} b_k (1+x)^{n-k}(1-x)^k. \tag{4.139}$$

Ми маємо

$$\frac{x}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{n} b_k \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k. \tag{4.140}$$

Позначимо через $y = \frac{1-x}{1+x}$, тоді $x = \frac{1-y}{1+y}$, $1+x = \frac{2}{1+y}$, і ми маємо

$$\frac{(1-y)(1+y)^{n-1}}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} b_k y^k. \tag{4.141}$$

Тобто,

$$b_0 = \frac{1}{2^n},\ b_n = -\frac{1}{2^n}, \quad b_k = \frac{C_{n-1}^k - C_{n-1}^{k-1}}{2^n}, 1 \leqslant k \leqslant n-1. \tag{4.142}$$

Оскільки $C_{n-1}^k - C_{n-1}^{k-1} = C_n^k \cdot \frac{n-2k}{n}$, ми отримуємо, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ виконується наступна тотожність:

$$x = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{2^n} \cdot \frac{n-2k}{n}(1+x)^{n-k}(1-x)^k. \tag{4.143}$$

Цю тотожність можна застосувати до елемента x банахової алгебри. Тому, якщо $\|x\| = \varepsilon$, $\max\{\|1+x\|, \|1-x\|\} = 1+\delta$, то ми отримуємо

$$\varepsilon \leqslant \frac{(1+\delta)^n}{n2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k |n-2k|. \tag{4.144}$$

Припустимо, що $n = 2m+1, m = 0, 1, 2, \ldots$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k |n-2k| = \sum_{k=0}^{2m+1} C_{2m+1}^k |2m+1-2k|$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^{k}(2m+1-2k) + \sum_{k=m+1}^{2m+1} C_{2m+1}^{k}(2k-2m-1)$$

$$= 2\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^{k}(2m+1-2k).$$

(для отримання останньої рівності ми підставляємо в другу суму $k = 2m + 1 - p$ і застосовуємо рівність $C_{2m+1}^{2m+1-p} = C_{2m+1}^{p}$). Тепер підставляючи це в (4.144) і використовуючи (4.137), ми маємо

$$\varepsilon \leqslant \frac{(m+1)(1+\delta)^{2m+1}}{(2m+1)2^{2m}} C_{2m+1}^{m}. \tag{4.145}$$

Припустимо $n = 2m, m = 1, 2, \ldots$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k}|n-2k| = \sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^{k}|2m-2k|$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k}(2m-2k) + \sum_{k=m+1}^{2m} C_{2m}^{k}(2k-2m) =$$

$$2\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k}(2m-2k).$$

(для отримання останньої рівності ми підставляємо в другу суму $k = 2m-p$ і застосовуємо рівність $C_{2m}^{2m-p} = C_{2m}^{p}$). Тепер підставляючи це в (4.144) і використовуючи (4.138), ми маємо

$$\varepsilon \leqslant \frac{(1+\delta)^{2m}}{(2m)2^{2m-1}} m C_{2m}^{m} = \left(\frac{1+\delta}{2}\right)^{2m} C_{2m}^{m}. \tag{4.146}$$

Ми будемо використовувати наступну формулу Стірлінга з оцінкою остаточного члена:

$$\sqrt{2\pi n}\; n^n\; e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi n}\; n^n\; e^{-n}\; e^{\frac{1}{4n}}. \tag{4.147}$$

Використовуючи цю формулу, ми отримуємо

$$C_{2m}^{m} = \frac{(2m)!}{(m!)^2} \leqslant \frac{\sqrt{4\pi m}\;(2m)^{2m}\; e^{-2m}\; e^{\frac{1}{8m}}}{2\pi m\; m^{2m}\; e^{-2m}} = \frac{2^{2m}\; e^{\frac{1}{8m}}}{\sqrt{\pi m}}.$$

Підставляючи це в (4.146), ми маємо для кожного $m \in \mathbb{N}$

$$\varepsilon \leqslant \frac{(1+\delta)^{2m}}{\sqrt{\pi m}} e^{\frac{1}{8m}}. \tag{4.148}$$

Для $\delta > 0$ ми покладемо $m = 1 + \lfloor \frac{1}{4\log(1+\delta)} \rfloor$ і з (4.148) ми нарешті отримуємо необхідну оцінку (4.136). $\square$

Висновки до розділу 4

В цьому розділі ми ввели поняття гіперболічного многочлена, а також клас цілих функцій Лаґерра-Поліа, який є замкненням класу гіперболічних многочленів в топології рівномірної збіжності на компактах. Крім того, ми ввели спеціальні лінійні оператори, які не зменшують кількості дійсних коренів дійсного многочлена, і, у зв'язку з цим, поняття послідовності $\mathcal{CZDS}$. Ми розглянули важливу спеціальну функцію, так звану часткову тета-функцію, і дослідили, для яких значень параметру ця функція належить до класу Лаґерра-Поліа, і для яких значень параметру ця функція має стійкі відрізки ряду Тейлора. Досліджені деякі спеціальні цілі функції, пов'язані з частковою тета-функцією, і вивчене питання про те, чи належать ці функції і їх відрізки ряду Тейлора до класу Лаґерра-Поліа. Ми довели нові необхідні і достатні умови для того, щоб ціла функція належала до класу Лаґерра-Поліа, а саме узагальнені нерівності Лаґерра і комплексні нерівності Лаґерра. В кінці розділу ми застосували розроблені методи для оцінки числа дійсних коренів спеціальних квазімногочленов і для оцінки локального модуля опуклості банахової алгебри в одиниці.

До основних результатів розділу відносяться:

– Теорема 4.1.8, яка дає повну відповідь на питання, при яких значеннях параметру часткова тета-функція і її відрізки ряду Тейлора належать до класу Лаґерра-Поліа.

– Теореми 4.2.16, 4.4.1 і 4.4.4 в яких досліджується належність до класу Лаґерра-Поліа деяких важливих спеціальних цілих функцій і їх відрізків ряду Тейлора.

– Теорема 4.3.1 про стійкість відрізків ряду Тейлора часткової тета-функції.

– Теорема 4.5.1, в якої досліджується належність до класу Лаґерра-Поліа цілих функцій з додатними коефіцієнтами, які мають другі відношення коефіцієнтів Тейлора, що вони спадають.

– Теореми 4.6.6 і 4.6.10, які доводять, що узагальнені нерівності Лаґерра, так само як і комплексні нерівності Лаґерра, є необхідними і достатніми умовами для того, щоб довільна ціла функція належала до класу Лаґерра-Поліа.

– Теорема 4.7.3, яка дає оцінку числа дійсних коренів спеціальних квазімногочленов через число знакозмін послідовності, побудованої по коефіцієнтах квазімногочлена.

– Теорема 4.8.5, яка дає оцінку локального модуля опуклості довільної дійсної банахової алгебри в одиниці.

РОЗДІЛ 5

МІРИ ВІДДІЛЕННЯ КОРЕНІВ МНОГОЧЛЕНІВ І ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ, ЩО ВОНИ ЗБЕРІГАЮТЬ ГІПЕРБОЛІЧНІСТЬ

5.1 Послідовності множників, меш і логарифмічний меш

Ми нагадуємо, що через $\mathcal{HP} \subset \mathbb{R}[x]$ позначається множина гіперболічних многочленів, тобто дійсних многочленів з усіма дійсними коренями. Кажуть, що лінійний оператор $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ зберігає гіперболічність, якщо він переводить множину гіперболічних многочленів в себе, тобто $T(\mathcal{HP}) \subset \mathcal{HP}$. Визначна робота Дж.Борсеа і П.Брандена [37] дає характеризацію таких операторів.

Далі нам потрібні дві поширені характеристики відділення коренів гіперболічних многочлена.

Означення 5.1.1. Для многочлена $P \in \mathcal{HP}$, $\deg P \geqslant 2$, позначимо через $\mathrm{mesh}(P)$ мінімальну відстань між його різними коренями:

$$\mathrm{mesh}(P) := \min_{1 \leqslant j \leqslant n-1} (x_{j+1} - x_j)$$

для $P = C(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$, де $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ (якщо многочлен P має подвійний дійсний корінь, то за означенням $\mathrm{mesh}(P) = 0$).

Означення 5.1.2. Для многочлена з усіма дійсними коренями, які мають один знак, $P \in \mathcal{HP}_+$, $\deg P \geqslant 2$, позначимо через $\mathrm{lmesh}(P)$ мінімальне відношення між його послідовними коренями:

$$\mathrm{lmesh}(P) := \min_{1 \leqslant j \leqslant n-1} \frac{x_{j+1}}{x_j}$$

для $P = C(x + x_1)(x + x_2) \cdot \ldots \cdot (x + x_n)$, де $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ (якщо многочлен P має подвійний дійсний корінь, то за означенням $\mathrm{lmesh}(P) = 1$).

Один з перших результатів про лінійні оператори, які не зменшують меш, належить М.Рису, але став відомим завдяки А.Стоянову (дивись

[208]). А.Стоянов у своєї роботі дає просте доведення результату, про який пише, що формулювання належить М.Рису.

Твердження 5.1.3. ([208]). Для кожного гіперболічного многочлена p і кожного дійсного λ виконується

$$mesh(p - \lambda p') \geqslant mesh(p).$$

Нагадуємо, що добре відома теорема Ерміта-Пулена (дивись [173, с. 4]) стверджує, що лінійний диференціальній оператор $T = a_0 + a_1 \frac{d}{dx} + ... + a_k \frac{d^k}{dx^k}$ зі сталими коефіцієнтами зберігає гіперболічність тоді і тільки тоді, коли його символ $Q(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_k t^k$ є гіперболічним многочленом. Таким чином, з твердження 5.1.3 разом з теоремою Ерміта-Пулена негайно випливає таке твердження.

Твердження 5.1.4. Кожен лінійний диференціальній оператор зі сталими коефіцієнтами, який зберігає гіперболічність, не зменшує меш гіперболічного многочлена.

Наш головний інтерес в цьому параграфі – знайти аналог твердження 5.1.4 для інших важливих класів класів лінійних операторів, які зберігають гіперболічність.

Нехай задана послідовність $\Gamma = (\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$ дійсних або комплексних чисел, тоді ми позначимо через T_Γ лінійний оператор, який діагоналізуется в стандартному мономіальному базисі простору $\mathbb{C}[x]$, і діє наступним чином:

$$T_\Gamma(x^i) = \gamma_i x^i.$$

Ми нагадуємо визначення 4.2.1 послідовності множників, яке вводилося у розділі 4. Крім того, послідовність $\Gamma = (\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$ дійсних чисел називається послідовністю множників першого роду, коли її оператор T_Γ зберігає $\mathcal{HP}$, і послідовність $\Gamma = (\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$ дійсних чисел називається послідовністю множників другого роду, коли оператор T_Γ переводить довільний гіперболічний многочлен з усіма коренями одного знаку в гіперболічний многочлен. Ми нагадуємо також сформульований в розділі 4 фундаментальний критерій

4.2.2 Дж.Поліа і І.Шура для того, щоб дана послідовність була послідовністю множників.

Нам потрібен також наступний аналог теореми Дж.Поліа і І.Шура для многочленів фіксованого степеня. Позначимо $\mathbb{R}_k[x] := \{P \in \mathbb{R}[x] : \deg P \leqslant k\}$. Для заданої скінченої послідовності $(\gamma_n)_{n=0}^k$ розглянемо діагональний в стандартному мономіальному базисі оператор $T : \mathbb{R}_k[x] \to \mathbb{R}_k[x]$, який помножує x^j на число $\gamma_j,\ j = 0, \ldots, k$. Якщо такий оператор зберігає множину гіперболічних многочленів степеня не вище за k, ми називаємо його скінченовимірним оператором, який зберігає гіперболічність, а послідовність $(\gamma_n)_{n=0}^k$ – послідовністю множників довжини $k+1$. Наступний результат був доведений в роботі Т.Кравена і Дж.Ксордаша [58, теорема 3.7], дивись також [55, теорема 3.1].

Теорема 5.1.5. ([58, теорема 3.7]). Для послідовності $(\gamma_n)_{n=0}^k$ наступні дві умови є еквівалентними:

(i) $(\gamma_n)_{n=0}^k$ є послідовністю множників довжини $k+1$;

(ii) многочлен $Q_\Gamma(t) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}\gamma_j t^j$ має усі дійсні корені одного знаку.

Можливо ідентифікувати півгрупу послідовностей множників довжини $k+1$ (з операцією, якої відповідає композиція відповідних лінійних операторів) з множиною многочленів степеня k з усіма дійсними коренями одного знаку. Звичайне множення діагональних матриць тоді відповідає згортці Шура-Сеге многочленів (дивись [210]).

Означення 5.1.6. Згорткою Шура-Сегьо $P * Q$ двох многочленів $P(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_j x^j$ і $Q(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} b_j x^j$ називається многочлен

$$P * Q(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_j b_j x^j.$$

Тепер ми готові почати формулювати наші твердження. Аналогом твердження 5.1.3 є наступне твердження.

Твердження 5.1.7. ([130]). Для кожного $\lambda > 0$ диференціальний оператор $T(p(x)) = \lambda p + xp'$ має властивість

$$\mathrm{lmesh(T(p))} \geqslant \mathrm{lmesh(p)},$$

де p є довільним многочленом з усіма дійсними коренями одного знаку.

Останнє твердження може бути узагальнено до твердження про згортку Шура-Сеге многочленів одного степеня. А саме, справедлива наступна теорема.

Теорема 5.1.8. ([130]). Нехай задані два многочлена P і Q степеня k з усіма дійсними коренями одного знаку. Тоді

$$\mathrm{lmesh(P * Q)} \geqslant \max(\mathrm{lmesh(P)}, \mathrm{lmesh(Q)}).$$

Зауваження 5.1.9. Дивлячись на формулювання теореми 5.1.8, природно було б очікувати, що виконується сильніша нерівність $\mathrm{lmesh(P * Q)} \geqslant \mathrm{lmesh(P)} \cdot \mathrm{lmesh(Q)}$. Але остання нерівність не є вірною навіть для многочленів другого степеня.

Зауваження 5.1.10. Відмітимо, що теорема 5.1.8 не є наслідком твердження 5.1.7 (на відміну від випадку сталих коефіцієнтів), оскільки не усі послідовності множників довжини $k+1$, що їх розглянуто як диференціальні оператори, можуть бути представлені як добуток операторів вигляду $\lambda p + xp'$. З іншого боку, твердження 5.1.7 є наслідком теореми 5.1.8, оскільки, як ми покажемо нижче, для довільного додатного натурального числа k можна представити дію оператору $\lambda + x\frac{d}{dx}$ на многочленах степеня k як згортку Шура-Сеге з деяким многочленом. Відмітимо, що згортка Шура-Сеге двох многочленів, з яких один має усі дійсні корені, а інший усі дейсні корені одного знаку, має усі дійсні корені.

Доведення. Для доведення теореми 5.1.8 і твердження 5.1.7 нам потрібні наступні три факти, які ми для зручності зібрали в лему. Перші два твердження є добре відомими, і ми даємо відповідні посилання, а трете нескладно перевіряється.

Лема 5.1.11. ([130]).

(i) Якщо задані два многочлена f і g одного степеня, то поліноміальний пучок $cf(x)+dg(x)$ містить тільки гіперболічні многочлени тоді і тільки тоді, коли f і g мають усі дійсні корені, які (не строго) перемежовуються. (Це твердження відомо як теорема Обрешкова, дивись [173], також це твердження перевідкривалося багато разів багатьма авторами).

(ii) Якщо задані два многочлена P і Q одного степеня, які задовольняють умову, що P і Q є гіперболічними і, до того, усі корені Q мають один знак, то їх згортка Шура-Сеге $P*Q$ є гіперболічним многочленом. (Це твердження є окремим випадком добре відомої теореми Мало-Шура-Сеге, дивись, наприклад, [210]).

(iii) Нехай $P(x) = a(x+x_1)(x+x_2)\cdot\ldots\cdot(x+x_k)$, де $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k$, і оберемо $\lambda > 1$. Тоді корені многочленів $P(x)$ і $P(\lambda x)$ перемежовуються тоді і тільки тоді, коли $\lambda <$ lmesh(P). Аналогічно, корені многочленів $P(x)$ і $P(x+\lambda)$ перемежовуються тоді і тільки тоді, коли $\lambda <$ mesh(P).

Доведемо спочатку твердження 5.1.4. Нехай задано лінійний диференціальний оператор A зі сталими коефіцієнтами скінченого порядку, який зберігає гіперболічність. Припустимо, що існує многочлен $P \in \mathbb{R}[x]$ з усіма дійсними коренями, такий що mesh(A(P)) $<$ mesh(P). Виберемо λ, яке задовольняє нерівності $0 \leqslant$ mesh(A(P)) $< \lambda <$ mesh(P). Тоді із пункту (iii) леми 5.1.11 корені многочленів $A(P)(x)$ і $A(P)(x+\lambda)$ не перемежовуються. Використовуючи пункт (i) леми 5.1.11 ми отримуємо, що існують сталі $c, d \in \mathbb{R}$, такі що многочлен $cA(P)(x)+dA(P)(x+\lambda)$ має недійсний корінь. Але $cA(P)(x) + dA(P)(x + \lambda) = A(L)(x)$, де $L(x) = cP(x) + dP(x + \lambda)$. Оскільки $\lambda <$ mesh(P) корені многочленів $P(x)$ і $P(x+\lambda)$ перемежовуються, і із пункту (i) леми 5.1.11 ми отримуємо, що усі корені L є дійсними. Але з цього випливає, що усі корені $A(L)$ повинні бути дійсними також. Отримане протиріччя завершує доведення.

Тепер доведемо теорему 5.1.8. Нехай задані два многочлена P і Q одного степеня з усіма дійсними коренями одного знаку. Розглянемо многочлен

$S(x) := (P * Q)(x)$. Припустимо, що lmesh(S) $<$ lmesh(P), і виберемо λ, таке що $1 \leqslant$ lmesh(S) $< \lambda <$ lmesh(P). Із пункту (iii) леми 5.1.11, оскільки lmesh(S) $< \lambda$, корені многочленів $S(x)$ і $S(\lambda x)$ не перемежовуються. Із пункту (i) леми 5.1.11 ми отримуємо, що існують сталі $c, d \in \mathbb{R}$, такі що многочлен $cS(x) + dS(\lambda x)$ має недійсний корінь. Ми маємо

$$cS(x) + dS(\lambda x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (ca_j + d\lambda^j a_j) b_j x^j.$$

Положимо $L(x) = \sum_{j=0}^{j} \binom{k}{j} (ca_j + d\lambda^j a_j) x^j = cP(x) + dP(\lambda x)$. Тоді ми маємо

$$cS(x) + dS(\lambda x) = (L * Q)(x).$$

Із пункту (iii) леми 5.1.11, з нерівності $\lambda <$ lmesh(P) випливає, що корені многочленів $P(x)$ і $P(\lambda x)$ перемежовуються. Тоді з пункту (i) леми 5.1.11 усі корені многочлена L є дійсними, а усі корені многочлена Q є дійсними і одного знаку. Тоді, з пункту (ii) леми 5.1.11, усі корені многочлену $cS(x) + dS(\lambda x)$ повинні бути дійсними також. Отримане протиріччя завершує доведення.

У кінці виведемо твердження 5.1.7 з теореми 5.1.8. Нескладно побачити, що для довільних многочленів P і Q одного степеня виконується співвідношення $(P + axP') * Q = (P * Q) + ax(P * Q)'$. Коли $P(x) = (x+1)^k$ ми отримуємо $P * Q = Q$ і

$$Q + axQ' = ((x+1)^{k-1}((1+ak)x+1)) * Q.$$

Тобто, для $a > 0$ дія диференціального оператора $1 + ax\frac{d}{dx}$ на многочлен Q співпадає зі згорткою многочлена Q з многочленом з усіма дійсними від'ємними коренями, звідки отримуємо потрібне твердження. $\square$

На закінчення цього параграфу зробимо декілька зауважень.

Теорема 5.1.8 показує, що для довільних двох скінчених послідовностей множників однієї довжини логарифмічний меш їхньої згортки не менше максимуму їх логарифмічних мешей. Можна спробувати узагальнити цей результат до випадку звичайних (нескінчених) послідовностей множників.

Нехай задана послідовність множників $\Gamma = (\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$, визначимо її логарифмічний меш наступним чином

$$\mathrm{lmesh}(\Gamma) = \inf_{\mathrm{k}=0,\ldots,\infty} \mathrm{lmesh}(\Gamma_{\mathrm{k}}),$$

де Γ_k є k-ою зрізкою послідовності Γ, тобто її відрізок довжини $k+1$. Тоді з теорема 5.1.8 миттєво випливає наступне.

Наслідок 5.1.12. Для довільних двох нескінчених послідовностей множників $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ маємо

$$\mathrm{lmesh}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \geqslant \max(\mathrm{lmesh}(\mathcal{A}), \mathrm{lmesh}(\mathcal{B})).$$

Питання 5.1.13. Описати клас послідовностей множників, чий логарифмічний меш є строго більшим за 1.

5.2 Достатні умови для того, щоб дійсний многочлен був знаконезалежно гіперболічним, або щоб він мав дійсні розділені корені

Для того, щоб сформулювати результати цього параграфу, нам потрібні декілька означень і позначень. Як завжди, ми позначаємо $\mathcal{HP} \subset \mathbb{R}[x]$ множину гіперболічних многочленів, а через $\mathcal{HP}_+$ – множину гіперболічних многочленів з усіма додатними коефіцієнтами.

Означення 5.2.1. Гіперболічний многочлен називається знаконезалежно гіперболічним, якщо він залишається гіперболічним після довільної зміни знаків його коефіцієнтів (дивись [179] і [83]).

Припустимо, що $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, a_0 \neq 0, a_n \neq 0$, є гіперболічним многочленом. Наступне твердження є добре відомим: якщо $a_j = 0$ для деякого $j, 1 \leqslant j \leqslant n-1$, то $a_{j-1}a_{j+1} < 0$ (дивись, наприклад, [161, с. 434, лема 3]). Тому очевидно, що усі коефіцієнти знаконезалежно гіперболічного многочлена є ненульовими.

Проблему знаходження простих достатніх умов для того, щоб многочлен мав меш (або логарифмічний меш), більший за дане число (в дусі теореми 1.1.12 Хатчинсона із розділу 1) була поставлена нам М.Тягловим. Наступна теорема дає таку достатню умову для меша. Ми будемо користуватися позначеннями для перших і других відношень коефіцієнтів многочлена p_n і q_n (дивись (4.3) із розділу 4).

Теорема 5.2.2. ([133]). Нехай задано число $c \geqslant 0$.
1. Припустимо, що $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ є многочленом з додатними коефіцієнтами, $n \geqslant 2$, і $p_{k+1}^2(P) - 4p_k(P)p_{k+1}(P) \geqslant c^2$ для $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Тоді $P \in \mathcal{HP}_+$ і $\operatorname{mesh}(P) \geqslant c$.

2. Для кожного $c > 0$, $\varepsilon > 0$, і кожного $n \geqslant 2$, існує многочлен $P_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\varepsilon) x^k \in \mathcal{HP}_+$, такий що $p_{k+1}^2(P_\varepsilon) - 4p_k(P_\varepsilon)p_{k+1}(P_\varepsilon) \geqslant c^2 - \varepsilon$ для $k = 1, 2, \ldots, n-1$, але $\operatorname{mesh}(P_\varepsilon) < c$.

Відмітимо, що при $c = 0$ теорема 5.2.2 перетворюється на теорему Хатчинсона.

Доведення. 1. Положимо $Q(x) := P(-x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k$.

За припущенням $p_{k+1}^2(P) - 4p_k(P)p_{k+1}(P) \geqslant 0$ для $k = 1, 2, \ldots, n-1$, звідки $0 < p_1(P) < p_2(P) < \ldots < p_n(P)$.

Для $x \in [0; p_1(P))$, ми маємо $a_0 > a_1 x > a_2 x^2 > \ldots > a_n x^n$. Звідки отримуємо

$$Q(x) = (a_0 - a_1 x) + (a_2 x^2 - a_3 x^3) + \ldots > 0 \text{ для } x \in [0; p_1(P)).$$

Для $x > p_n(P)$, ми маємо $a_0 < a_1 x < a_2 x^2 < \ldots < a_n x^n$. Звідки отримуємо

$$(-1)^n Q(x) = (a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1}) + (a_{n-2} x^{n-2} - a_{n-3} x^{n-3}) + \ldots > 0$$

$$\text{для усіх } x > p_n(P).$$

Зафіксуємо $l, 1 \leqslant l \leqslant n-1$. Для $x \in (p_l(P); p_{l+1}(P))$, ми маємо

$$a_0 < a_1 x < a_2 x^2 < \ldots < a_{l-1} x^{l-1} < a_l x^l$$

і

$$a_l x^l > a_{l+1} x^{l+1} > a_{l+2} x^{l+2} > \ldots > a_n x^n.$$

Таким чином, для $x \in (p_l(P); p_{l+1}(P))$, ми маємо

$$(-1)^l Q(x) = \sum_{j=0}^{l-2} (-1)^{l+j} a_j x^j + \left(-a_{l-1}x^{l-1} + a_l x^l - a_{l+1}x^{l+1}\right)$$

$$+ \sum_{j=l+2}^{n} (-1)^{l+j} a_j x^j =: \Sigma_1(x) +$$

$$\left(-a_{l-1}x^{l-1} + a_l x^l - a_{l+1}x^{l+1}\right) + \Sigma_2(x).$$

Ми бачимо, що для усіх $x \in (p_l(P); p_{l+1}(P))$, доданки в $\Sigma_1(x)$ є знакозмінними і їхні модулі зростають. Аналогічно, для усіх $x \in (p_l(P); p_{l+1}(P))$, доданки в $\Sigma_2(x)$ є знакозмінними і їхні модулі спадають. Тому, $\Sigma_1(x) \geqslant 0$, $\Sigma_2(x) \geqslant 0$ для усіх $x \in (p_l(P); p_{l+1}(P))$, і

$$(-1)^l Q(x) \geqslant -a_{l-1}x^{l-1} + a_l x^l - a_{l+1}x^{l+1} \text{ для } x \in (p_l(P); p_{l+1}(P)).$$

Квадратний многочлен $-a_{l-1}x^{l-1} + a_l x^l - a_{l+1}x^{l+1}$ має дійсні корені, тому що його дискримінант є невід'ємним: $D = a_l^2 - 4a_{l-1}a_{l+1} > 0$ із наших припущень. Коренями цього квадратного многочлена є числа

$$x_1(l) := \frac{a_l - \sqrt{a_l^2 - 4a_{l-1}a_{l+1}}}{2a_{l+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(p_{l+1}(P) - \sqrt{p_{l+1}^2(P) - 4p_l(P)p_{l+1}(P)}\right)$$

і

$$x_2(l) := \frac{a_l + \sqrt{a_l^2 - 4a_{l-1}a_{l+1}}}{2a_{l+1}} =$$

$$\frac{1}{2}\left(p_{l+1}(P) + \sqrt{p_{l+1}^2(P) - 4p_l(P)p_{l+1}(P)}\right).$$

Тепер ми перевіримо, що $p_l(P) < x_1(l) \leqslant x_2(l) < p_{l+1}(P)$. Ми маємо

$$p_l(P) < x_1(l) \Leftrightarrow 2p_l(P) < p_{l+1}(P) - \sqrt{p_{l+1}^2(P) - 4p_l(P)p_{l+1}(P)} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{p_{l+1}^2(P) - 4p_l(P)p_{l+1}(P)} < p_{l+1}(P) - 2p_l(P).$$

З наших припущень $p_{l+1}(P) - 2p_l(P) > 0$, звідки остання нерівність еквівалентна наступної

$$p_{l+1}^2(P) - 4p_l(P)p_{l+1}(P) < \left(p_{l+1}(P) - 2p_l(P)\right)^2,$$

яка, очевидно, виконується. Далі ми маємо

$$x_2(l) < p_{l+1}(P) \Leftrightarrow \sqrt{p_{l+1}^2(P) - 4p_l(P)p_{l+1}(P)} < p_{l+1}(P),$$

і остання нерівність, очевидно, виконується.

Ми довели, що для кожного $l = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$(-1)^l Q(x) > 0 \text{ для усіх } x \in (x_1(l); x_2(l)) \subset (p_l(P); p_{l+1}(P)).$$

Тому маємо

$$Q(x) > 0 \text{ для усіх } x \in [0; p_1(P)).$$

$$Q(x) < 0 \text{ для усіх } x \in (x_1(1); x_2(1)) \subset (p_1(P); p_2(P)).$$

$$Q(x) > 0 \text{ для усіх } x \in (x_1(2); x_2(2)) \subset (p_2(P); p_3(P)).$$

$$Q(x) < 0 \text{ для усіх } x \in (x_1(3); x_2(3)) \subset (p_3(P); p_4(P)).$$

$$\vdots$$

Таким чином,

$$\exists y_1 \in [p_1(P); x_1(1)] \text{ такий, що } \ Q(y_1) = 0. \tag{5.1}$$

$$\exists y_2 \in [x_2(1); x_1(2)] \text{ такий, що } \ Q(y_2) = 0.$$

$$\exists y_3 \in [x_2(2); x_1(3)] \text{ такий, що } Q(y_3) = 0.$$

$$\vdots$$

$$\exists y_{n-1} \in [x_2(n-2); x_1(n-1)] \text{ такий, що } \ Q(y_{n-1}) = 0.$$

$$\exists y_n \in [x_2(n-1); +\infty) \text{ такий, що } \ Q(y_n) = 0.$$

Ми довели, що $Q \in \mathcal{HP}$, тому $P \in \mathcal{HP}_+$. Більш того,

$$\operatorname{mesh}(P) = \operatorname{mesh}(Q) \geqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant n-1} (x_2(j) - x_1(j))$$

$$= \min_{1 \leqslant j \leqslant n-1} \sqrt{p_{j+1}^2(P) - 4p_j(P)p_{j+1}(P)} \geqslant c$$

за припущенням. Перше твердження теореми 5.2.2 доведено.

2. Нехай $c > 0$, $\varepsilon > 0$ і $n \geqslant 2$ є заданими. Позначимо $k := \max(\frac{c^2}{2}, c^2 - \varepsilon) > 0$, $\lambda := 2 + \sqrt{4+k} > 4$. Розглянемо многочлен $Q_2(x) := 1 + x + \frac{x^2}{\lambda}$. Ми відмічаємо, що $p_1(Q_2) = 1, p_2(Q_2) = \lambda$. Оскільки $D = 1 - \frac{4}{\lambda} > 0$, то

многочлен Q_2 є гіперболічним. Ми маємо: $\mathrm{mesh}(Q_2) = \frac{\sqrt{D}}{\frac{1}{\lambda}} = \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda} = \sqrt{k} < c$. Ми маємо також $p_2^2(Q_2) - 4p_2(Q_2)p_1(Q_2) = \lambda^2 - 4\lambda = k \geqslant c^2 - \varepsilon$.

Для $\varepsilon_1 > 0$, розглянемо многочлен $Q_{3,\varepsilon_1}(x) := Q_2(x) + \varepsilon_1 x^3$. Оскільки $Q_2 \in \mathcal{HP}_+$, ми можемо вибрати настільки маленьке ε_1, що $Q_{3,\varepsilon_1} \in \mathcal{HP}_+$. Більш того, оскільки $\mathrm{mesh}(Q_2) < c$, з теореми Гурвіца ми можемо вибрати ε_1 настільки маленьким, що $\mathrm{mesh}(Q_{3,\varepsilon_1}) < c$. Відмітимо, що $p_1(Q_{3,\varepsilon_1}) = 1, p_2(Q_{3,\varepsilon_1}) = \lambda, p_3(Q_{3,\varepsilon_1}) = \frac{1}{\lambda\varepsilon_1}$. Нарешті ми вибираємо $\varepsilon_1 > 0$ настільки малим, що $p_3(Q_{3,\varepsilon_1})^2 - 4p_3(Q_{3,\varepsilon_1})p_2(Q_{3,\varepsilon_1}) \geqslant c^2 - \varepsilon$.

Для $\varepsilon_2 > 0$, розглянемо многочлен $Q_{4,\varepsilon_2}(x) := Q_{3,\varepsilon_1}(x) + \varepsilon_2 x^4$. Ми можемо вибрати ε_2 настільки маленьким, що $Q_{4,\varepsilon_2} \in \mathcal{HP}_+$ і $\mathrm{mesh}(Q_{4,\varepsilon_2}) < c$. Відмітимо, що $p_1(Q_{4,\varepsilon_2}) = 1, p_2(Q_{4,\varepsilon_2}) = \lambda, p_3(Q_{4,\varepsilon_2}) = \frac{1}{\lambda\varepsilon_1}, p_4(Q_{4,\varepsilon_2}) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$. Ми виберемо $\varepsilon_2 > 0$ настільки маленьким, що $p_4(Q_{4,\varepsilon_2})^2 - 4p_4(Q_{4,\varepsilon_2})p_3(Q_{4,\varepsilon_2}) \geqslant c^2 - \varepsilon$.

Продовжуючи цю конструкцію, ми отримуємо бажаний многочлен.

Друге твердження теореми 5.2.2 доведено. $\square$

Наступна теорема дає достатню умову для логарифмічного меша.

Теорема 5.2.3. ([133]). Нехай задане число $d \geqslant 1$.

1. Припустимо, що $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ є многочленом з додатними коефіцієнтами, $n \geqslant 2$, і $q_k(P) \geqslant \frac{(d+1)^2}{d}$ для $k = 2, 3, \ldots, n$. Тоді $P \in \mathcal{HP}_+$ і $\mathrm{lmesh}(P) \geqslant d$.

2. Для кожного $d > 1$, $\varepsilon > 0$, і кожного $n \geqslant 2$, існує многочлен $P_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\varepsilon) x^k \in \mathcal{HP}_+$, такий що $q_j(P_\varepsilon) \geqslant \frac{(d+1)^2}{d} - \varepsilon$ для $i = 2, 3, \ldots, n$, але $\mathrm{lmesh}(P_\varepsilon) < d$.

Ми також відмічаємо, що при $d = 1$ теорема 5.2.3 перетворюється на теорему Хатчинсона.

Доведення. 1. Доведення цієї теореми аналогічно доведенню теореми 5.2.2, але воно коротше. Положимо $Q(x) := P(-x)$. З наших припущень $q_k(P) \geqslant \frac{(d+1)^2}{d} \geqslant 4$ для $k = 2, 3, \ldots, n$, тому $p_{k+1}^2(P) - 4p_k(P)p_{k+1}(P) \geqslant 0$ для $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Тому усі аргументи з доведення першого твердження ня теореми 5.2.2 залишаються в силі. Ми отримуємо, що Q має додатні корені $y_1, y_2, \ldots, y_n$, які задовольняють умову (5.1) (ми використовуємо ті ж позначення

$$x_1(l) := \frac{1}{2}\left(p_{l+1}(P) - \sqrt{p_{l+1}^2(P) - 4p_l(P)p_{l+1}(P)}\right)$$

і

$$x_2(l) := \frac{1}{2}\left(p_{l+1}(P) + \sqrt{p_{l+1}^2(P) - 4p_l(P)p_{l+1}(P)}\right),$$

$l = 1, 2, \ldots, n-1$). Тому ми довели, що $P \in \mathcal{HP}_+$. Оскільки коренями многочлена P є $-y_n, -y_{n-1}, \ldots, -y_2, -y_1$, ми маємо

$$\operatorname{lmesh}(P) \geqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant n-1} \frac{x_2(j)}{x_1(j)} =$$

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant n-1} \frac{p_{j+1}(P) + \sqrt{p_{j+1}^2(P) - 4p_j(P)p_{j+1}(P)}}{p_{j+1}(P) - \sqrt{p_{j+1}^2(P) - 4p_j(P)p_{j+1}(P)}}$$

$$= \min_{1 \leqslant j \leqslant n-1} \frac{q_{j+1}(P) + \sqrt{q_{j+1}^2(P) - 4q_{j+1}(P)}}{q_{j+1}(P) - \sqrt{q_{j+1}^2(P) - 4q_{j+1}(P)}}.$$

Вирішуючи нерівність $\frac{q_{j+1}(P) + \sqrt{q_{j+1}^2(P) - 4q_{j+1}(P)}}{q_{j+1}(P) - \sqrt{q_{j+1}^2(P) - 4q_{j+1}(P)}} \geqslant d$, ми отримуємо $q_{j+1}(P) \geqslant \frac{(d+1)^2}{d}$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, і ми отримуємо потрібне. Перше твердження теореми 5.2.3 доведено.

2. Ми використовуємо ті ж самі міркування, як при доведенні другого твердження теореми 5.2.2. □

Використовуючи міркування, аналогічні використаним при доведенні теореми 5.2.2 і теореми 5.2.3, ми можемо отримати наступне твердження.

Теорема 5.2.4. Припустимо, що $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ є многочленом з додатними коефіцієнтами, $n \geqslant 2$, і $\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}a_n} \geqslant 4$, $\forall n \geqslant 2$. Нехай $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ є коренями многочлена $P(-x)$.

1. Для $k = 1, 2, \ldots, n-1$, позначимо через $\Delta_k := p_{k+1}^2(P) - 4p_k(P)p_{k+1}(P)$. Тоді $x_{k+1} - x_k \geqslant \Delta_k$ для кожного k.

2. Для $k = 1, 2, \dots, n-1$, позначимо через $\delta_k := \frac{1}{2}(p_{k+2} - \sqrt{p_{k+2}^2(P) - 4p_{k+2}(P)p_{k+1}(P)} - p_k - \sqrt{p_k^2(P) - 4p_k(P)p_{k+1}(P)})$. Тоді $x_{k+1} - x_k \leqslant \delta_k$ для кожного k.

Для формулювання нашої наступної теореми нам потрібне ще одне позначення. Для $x > 1$, ми розглянемо функцію $\varphi(x) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} x^{-\frac{k^2}{2}}$. Ми зазначимо, що функція φ зростає на інтервалі $(1; \infty)$, $\lim_{x\to 1+0}\varphi(x) = -\infty$ і $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 1$. Тому рівність $1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} x^{-\frac{k^2}{2}} = 0$ має єдиний додатний корінь, який ми позначимо a_∞. Легко перевірити, що $a_\infty \approx 4.81058280$.

Наступна теорема відповідає на питання Бориса Шапіро.

Теорема 5.2.5. 1. Нехай $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ є цілою функцією з додатними коефіцієнтами. Припустимо, що $q_k(f) := \frac{a_{k-1}^2}{a_{k-2}a_k} \geqslant a_\infty$ для усіх $k \geqslant 2$. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$, n-ий відрізок ряду функції $S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ є знаконезалежно гіперболічним многочленом.

2. Для кожного $\varepsilon > 0$, існує дійсна ціла функція $g_\varepsilon(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\varepsilon) z^k$ з ненульовими коефіцієнтами, така що $q_k(g_\varepsilon) > a_\infty - \varepsilon$ для усіх $k \geqslant 2$, і усі окрім скінченого числа відрізки ряду Тейлора функції g_ε не є гіперболічними многочленами.

Доведення. 1. Нехай $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ є цілою функцією з додатними коефіцієнтами. Без втрати загальності ми можемо припустити, що $a_0 = 1$ і $a_1 = 1$. Для $q_k := q_k(f) = \frac{a_{k-1}^2}{a_{k-2}a_k}$, $k \geqslant 2$, ми маємо $f(x) = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \dots q_{k-1}^2 q_k}$ (дивись (4.3) із розділу 4).

Нехай $n \geqslant 2$ є довільним натуральним числом, $(\sigma_k)_{k=0}^n$ – довільна послідовність, така що $\sigma_k \in \{-1, 1\}$ для усіх k. Ми повинні довести, що многочлен $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k a_k z^k$ є гіперболічним. Ми розглянемо наступну послідовність радіусів

$$R_1 = \sqrt{q_2}, \quad R_j = q_2 q_3 \cdot \ldots \cdot q_j \sqrt{q_{j+1}}, \quad j = 2, 3, \dots, n-1.$$

За нашими припущеннями $R_1 < R_2 < \ldots < R_{n-1}$ (оскільки $\frac{R_{j+1}}{R_j} = \sqrt{q_j q_{j+1}} > 1$).

Для кожного фіксованого $j = 1, 2, \ldots, n-1$, ми положимо

$$S_n(z) = \frac{\sigma_j}{q_2^{j-1} q_3^{j-2} \ldots q_{j-1}^2 q_j} z^j + \left(\sigma_0 + \sigma_1 z + \sum_{k=2}^{j-1} \frac{\sigma_k}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \ldots q_{k-1}^2 q_k} z^k \right)$$

$$+ \left(\sum_{k=j+1}^{n} \frac{\sigma_k}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \ldots q_{k-1}^2 q_k} z^k \right) =: \Sigma_0(z) + \Sigma_1(z) + \Sigma_2(z).$$

Для кожного $\theta \in [0; 2\pi]$ ми маємо

$$|\Sigma_0(R_j e^{i\theta})| = \left| \frac{(q_2 q_3 \cdot \ldots \cdot q_j \sqrt{q_{j+1}})^j}{q_2^{j-1} q_3^{j-2} \ldots q_{j-1}^2 q_j} \right| = q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_j^{j-1} \sqrt{q_{j+1}^j}.$$

Оцінимо суми $\Sigma_1(z)$ і $\Sigma_2(z)$ зверху для $z = R_j e^{i\theta}$. Ми отримуємо

$$|\Sigma_2(R_j e^{i\theta})| \leqslant \sum_{k=j+1}^{n} \frac{(q_2 q_3 \cdot \ldots \cdot q_j \sqrt{q_{j+1}})^k}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \ldots q_{k-1}^2 q_k} =$$

$$q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_j^{j-1} \sqrt{q_{j+1}^j} \sum_{k=j+1}^{n} \frac{1}{q_{j+1}^{(k-j)/2} q_{j+2}^{k-j-1} q_{j+3}^{k-j-2} \ldots q_{k-1}^2 q_k} \leqslant$$

$$q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_j^{j-1} \sqrt{q_{j+1}^j} \sum_{k=j+1}^{n} \frac{1}{a_\infty^{(k-j)/2} \cdot a_\infty^{1+2+\ldots+(k-j-1)}} =$$

$$q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_j^{j-1} \sqrt{q_{j+1}^j} \sum_{k=j+1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_\infty}^{(k-j)^2}}$$

$$= q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_j^{j-1} \sqrt{q_{j+1}^j} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_\infty}^{k^2}}$$

$$< q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_j^{j-1} \sqrt{q_{j+1}^j} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a_\infty}^{k^2}}.$$

Аналогічно ми отримуємо

$$|\Sigma_1(R_j e^{i\theta})| \leqslant \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(q_2 q_3 \cdot \ldots \cdot q_j \sqrt{q_{j+1}})^k}{q_2^{k-1} q_3^{k-2} \ldots q_{k-1}^2 q_k}$$

$$= \sum_{k=0}^{j-1} q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_k^{k-1} q_{k+1}^k q_{k+2}^k \cdot \ldots \cdot q_j^k \sqrt{q_{j+1}^k}$$

$$= q_2 q_3^2 \cdot \ldots \cdot q_j^{j-1} \sqrt{q_{j+1}^j} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{q_{k+2} q_{k+3}^2 \cdot \ldots \cdot q_j^{j-1-k} \sqrt{q_{j+1}^{j-k}}} \leqslant$$

$$q_2q_3^2\cdot\ldots\cdot q_j^{j-1}\sqrt{q_{j+1}^j}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{a_\infty^{1+2+\ldots+(j-k-1)}\cdot a_\infty^{\frac{j-k}{2}}} =$$

$$q_2q_3^2\cdot\ldots\cdot q_j^{j-1}\sqrt{q_{j+1}^j}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{a_\infty^{\frac{(j-k)^2}{2}}}$$

$$= q_2q_3^2\cdot\ldots\cdot q_j^{j-1}\sqrt{q_{j+1}^j}\sum_{s=1}^{j-1}\frac{1}{a_\infty^{\frac{s^2}{2}}}$$

$$< q_2q_3^2\cdot\ldots\cdot q_j^{j-1}\sqrt{q_{j+1}^j}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{a_\infty^{\frac{s^2}{2}}}.$$

Далі, ми отримуємо, що для кожного $\theta \in [0; 2\pi]$,

$$|\Sigma_0(R_je^{i\theta})| = q_2q_3^2\cdot\ldots\cdot q_j^{j-1}\sqrt{q_{j+1}^j}$$

$$= q_2q_3^2\cdot\ldots\cdot q_j^{j-1}\sqrt{q_{j+1}^j}\ \cdot 2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{a_\infty^{\frac{s^2}{2}}} >$$

$$|\Sigma_1(R_je^{i\theta})| + |\Sigma_2(R_je^{i\theta})|,$$

оскільки за означенням a_∞ ми маємо $1 = 2\sum_{k=1}^{\infty} a_\infty^{-\frac{k^2}{2}}$.

Використовуючи теорему Руше, ми робимо висновок, що для кожного $j = 1, 2, \ldots, n-1$, число коренів многочлена $S_n(z)$ у колі $\{z : |z| < R_j\}$ дорівнює числу коренів многочлена $\Sigma_0(z) = \frac{\sigma_j}{q_2^{j-1}q_3^{j-2}\ldots q_{j-1}^2 q_j}z^j$ в цьому колі. Таким чином, S_n має точно j коренів в колі $\{z : |z| < R_j\}$ для кожного j. Тому, S_n має один корінь в $\{z : |z| < R_1\}$ і, оскільки S_n є дійсним многочленом, цей корінь є дійсним. Далі ми відмічаємо, що S_n має два кореня в $\{z : |z| < R_2\}$ і, оскільки один із коренів є дійсним, ми отримуємо, що обидва корені є дійсними. Міркуючи аналогічно, ми отримуємо, що многочлен S_n степеня n має $n-1$ дійсний корінь. Тому S_n є гіперболічним многочленом.

2. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$ і позначимо через $b := \max(\frac{a_\infty+1}{2}, a_\infty - \frac{\varepsilon}{2})$. Оскільки $b < a_\infty$, ми маємо $\varphi(b) < 0$. Тому існує $n \in \mathbb{N}$, таке що

$$1 - 2\sum_{k=1}^{n} b^{-\frac{k^2}{2}} < 0.$$

Розглянемо дійсну цілу функцію

$$g_b(z) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{b^{\frac{k(k-1)}{2}}} - \frac{z^n}{b^{\frac{n(n-1)}{2}}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{b^{\frac{k(k-1)}{2}}}.$$

Ми покажемо, що для усіх $m \geqslant 2n$, m-ий відрізок ряду цієї функції

$$S_m(z) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{b^{\frac{k(k-1)}{2}}} - \frac{z^n}{b^{\frac{n(n-1)}{2}}} + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{z^k}{b^{\frac{k(k-1)}{2}}}$$

не є гіперболічним многочленом. Спершу ми розглянемо многочлен S_{2n}. Припустимо, що цей многочлен є гіперболічним. Коефіцієнти многочлена S_{2n} не є числами одного знаку, тому S_{2n} не може мати усі від'ємні корені. Тому, якщо цей многочлен є гіперболічним, він має додатний корінь. Але ми доведемо, що $S_{2n}(x) > 0$ для усіх $x > 0$. Для $x > 0$ ми маємо

$$S_{2n}(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{b^{\frac{k(k-1)}{2}}} - \frac{x^n}{b^{\frac{n(n-1)}{2}}} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x^k}{b^{\frac{k(k-1)}{2}}} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x^k}{b^{\frac{k(k-1)}{2}}} + \frac{x^{2n-k}}{b^{\frac{(2n-k)(2n-k-1)}{2}}} \right) - \frac{x^n}{b^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{n-1} 2\sqrt{\frac{x^k}{b^{\frac{k(k-1)}{2}}} \cdot \frac{x^{2n-k}}{b^{\frac{(2n-k)(2n-k-1)}{2}}}} - \frac{x^n}{b^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

$$= \frac{x^n}{b^{\frac{n(n-1)}{2}}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{b^{\frac{(n-k)^2}{2}}} - 1 \right) = \frac{x^n}{b^{\frac{n(n-1)}{2}}} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{b^{\frac{j^2}{2}}} - 1 \right) > 0$$

із нашого вибору номера n. Тобто, S_{2n} не має додатних коренів, звідки цей многочлен не є гіперболічним. Для кожного $m \geqslant 2n$ ми маємо $S_m(x) \geqslant S_{2n}(x)$ для усіх $x > 0$, тому S_m також не є гіперболічним многочленом.

Теорема 5.2.5 доведена. □

5.3 Лінійні скінчено-різничні оператори зі сталими коефіцієнтами і розподіл коренів многочленів

Одною з самих важливих проблем в теорії розподілу коренив многочленів і трансцендентних цілих функцій є опис лінійних операторів, які переводять сукупність многочленів з усіма коренями в заданій множині у сукупність многочленів з усіма коренями в іншій заданій множині. Дуже важливий випадок, коли обидві множини дорівнюють дійсній осі.

Ш.Ерміт і, пізніше, Е.Лаґерр були, можливо, першими, хто почав вивчати подібні типи проблем систематично. В 1914 році Дж.Поліа і Г.Сеге [190] дали повний опис лінійних операторів, які є діагональними в стандартному мономіальному базисі 1, x, $x^2, \ldots$ простору $\mathbb{R}[x]$ і зберігають множину гіперболічних многочленів. Пізніше вивчення лінійних операторів, які переводять множину гіперболічних многочленів в себе було продовжено багатьма авторами, включаючи Н.Обрешкова, С.Карліна, Б.Я.Левіна, Дж.Ксордаша, Т.Кравена, К. де Бура, Р.Варгу, А.Ісерліса, С.Норсетта, Е.Саффа і багатьох інших. Серед сучасних авторів варто особливо відмітити П.Брандена і Дж.Борсеа [37] (дивись також [38, 39]), які повністю характиризували усі лінійні оператори, які зберігають гіперболічність (а також оператори, які зберігають корені в деяких інших множинах).

Дж.Поліа отримав, мабуть, перший результат про збереження класу $\mathcal{L}-\mathcal{P}$ лінійними скінченно-різничними операторами. В роботі [188] Дж.Поліа довів, що для довільної функції $f \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$ виконується $f(x+ih)+f(x-ih) \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$ для кожного $h \in \mathbb{R}$. Н.Г. де Брюйн показав, що цей факт можна посилити наступним чином.

Теорема 5.3.1. ([47, теорема 8]). Для довільних $h, \alpha \in \mathbb{R}$ лінійний оператор

$$B_{h,\alpha}(f)(x) := e^{i\alpha} f(x+ih) + e^{-i\alpha} f(x-ih) \tag{5.2}$$

зберігає клас $\mathcal{L}-\mathcal{P}$.

В цьому параграфі ми будемо вивчати лінійні скінченно-різничні оператори зі сталими коефіцієнтами.

Нехай $T : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ є лінійним скінченно-різничним оператором наступного вигляду

$$T(P)(x) = \sum_{j=l}^{m} a_j P(x - j\lambda), \tag{5.3}$$

де $l, m \in \mathbb{Z}, l < m$, $a_j \in \mathbb{C}, l \leqslant j \leqslant m, a_l \neq 0, a_m \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Дослідження, які викладаються в цьому параграфі, були натхненними роботою [46] П.Брандена, І.Красікова і Б.Шапіро, де автори вивчали лінійні скінчено-різничні оператори з поліноміальними коефіцієнтами і дійсним зсувом λ. Автори зробили спробу перенести існуючу теорію операторів, які зберігають гіперболічність, на базис із символів Похгаммера і побудувати скінченно-різничний аналог теорії Поліа-Шура. Зокрема, в роботі [46] було доведено, що лінійний оператор вигляду (5.3) з дійсним зсувом λ зберігає множину гіперболічних многочленів тоді і тільки тоді, коли не більше одного коефіцієнта $a_j(x)$ є ненульовими, і $a_j(x)$ є гіперболічним для такого одного j. Тобто нетривіальні лінійні скінченно-різничні оператори з поліноміальними коефіцієнтами і дійсним зсувом не можуть зберігати множину гіперболічних многочленів.

В цьому параграфі ми будемо вивчати лінійні скінченно-різничні оператори вигляду (5.3) зі сталими коефіцієнтами і з комплексним зсувом λ.

Нам потрібно виразити такі оператори через оператори зсуву.

Означення 5.3.2. Для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ ми визначимо оператор зсуву $S_\lambda : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ наступним чином

$$S_\lambda(P)(x) := P(x - \lambda).$$

Очевидно, ми маємо

$$T(P)(x) = \sum_{j=l}^{m} a_j S_\lambda^j(P)(x). \tag{5.4}$$

Ми розглянемо твірну раціональну функцію оператора T:

$$Q(t) = \sum_{j=l}^{m} a_j t^j. \tag{5.5}$$

Ми дамо опис лінійних операторів вигляду (5.3) з довільним комплексним зсувом, які зберігають множину гіперболічних многочленів.

Теорема 5.3.3. ([132]). Лінійний оператор T вигляду (5.3) зберігає множину гіперболічних многочленів тоді і тільки тоді, коли він задовольняє наступні умови:

1. $\operatorname{Re}\lambda = 0$;

2. $l = -m$;

3. Усі корені твірної функції (5.5) належать до одиничної окружності $\{z : |z| = 1\}$;

4. $a_{-m} \cdot a_m \ \in (0; +\infty)$.

Зауваження 5.3.4. Умови 2, 3, 4 попередньої теореми означають, що твірна функція (5.5) має вигляд

$$Q(t) = C \prod_{k=1}^{2m} \left(e^{-i\theta_k/2}\sqrt{t} + e^{i\theta_k/2}\frac{1}{\sqrt{t}} \right),$$

де числа C і θ_k $(k = 1, 2, \ldots, 2m)$ є дійсними. Таким чином, теорема 5.3.3 стверджує, що кожен лінійний оператор вигляду (5.3) зберігає множину гіперболічних многочленів тоді і тільки тоді, коли він є композицією лінійних операторів вигляду (5.2), тобто операторів виду $e^{i\alpha}f(x + ih) + e^{-i\alpha}f(x - ih), \quad h, \alpha \in \mathbb{R}$.

Виявляється, що оператори, що вони описані в теоремі 5.3.3 також зберігають смугу.

Теорема 5.3.5. ([132]). Нехай $b > 0$ є заданим числом. Лінійний оператор T вигляду (5.3) зберігає множину комплексних многочленів, які мають усі корені в смузі $\{z : \ |\operatorname{Im} z| \leqslant b\}$, тоді і тільки тоді, коли виконуються умови 1-3 теореми 5.3.3.

Ми відмічаємо, що достатність цих умов для лінійних операторів вигляду (5.3) для того, щоб вони зберігали множину многочленів з усіма коренями у смузі, була доведена в роботі Н.Г. де Брюйном [47].

Далі ми доведемо теорему 5.3.3 і теорему 5.3.5.

Доведення. Припустимо, що лінійний оператор T вигляду (5.3) зберігає множину гіперболічних многочленів. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ ми розглянемо гіперболічний многочлен $L_n(x) = x^n$. Ми маємо

$$T(L_n)(x) = \sum_{j=l}^{m} a_j (x - j\lambda)^n = x^n \sum_{j=l}^{m} a_j \left(1 - \frac{j\lambda}{x}\right)^n =: x^n S_n(x) \in \mathcal{HP}. \quad (5.6)$$

Тому усі корені раціональної функції S_n є дійсними. Положимо $x = \frac{n}{y}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. За нашими припущеннями, для кожного $n \in \mathbb{N}$ усі корені функції $S_n(\frac{n}{y})$ належать до $\{z : \mathrm{Im}\ z = 0\}$. Послідовність $S_n(\frac{n}{y})$ збігається рівномірно на компактах до цілої функції

$$f(y) := \sum_{j=l}^{m} a_j e^{-j\lambda y}$$

при $n \to \infty$. Ми робимо висновок, що усі корені цілої функції $f(y) = Q(e^{-\lambda y})$ є дійсними.

Знайдемо корені функції f. Покладемо $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, і припустимо, що $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ є коренем Q. Тоді ми вирішимо рівняння

$$e^{-\lambda y} = z_0$$

і отримуємо

$$y_k = -\frac{\log|z_0| + i \arg z_0 + 2\pi k i}{\alpha + i\beta}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким чином,

$$\mathrm{Im}\ (y_k) = \frac{\beta \log|z_0| - \alpha \arg z_0 - 2\pi k \alpha}{\alpha^2 + \beta^2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки за нашими припущеннями $\mathrm{Im}\ (y_k) = 0$ для усіх $k \in \mathbb{Z}$, ми робимо висновок, що

$$\alpha = \mathrm{Re}\ \lambda = 0.$$

Звідки

$$\mathrm{Im}\ (y_k) = -\frac{-\log|z_0|}{\beta} = 0,\ k \in \mathbb{Z},$$

і ми отримуємо, що кожен ненульовий корінь Q належить до окружності $\{z : |z| = 1\}$. Необхідність умов 1 і 3 теореми 5.3.3 доведено.

Необхідність умов 1 і 3 у випадку зберігання коренів у смузі може бути показано аналогічно. Припустимо, що лінійний оператор T вигляду (5.3) зберігає множину комплексних многочленів, які мають усі корені у смузі $\Pi_b := \{z : \ |\mathrm{Im}\ z| \leqslant b\}$. Тоді з (5.6) ми маємо, що усі корені раціональної функції

$$S_n(x) = \frac{T(L_n)(x)}{x^n}$$

належать до Π_b. Покладемо $x = \frac{n}{y}$ і розглянемо функцію

$$G_n(y) := S_n\left(\frac{n}{y}\right) \in \mathbb{C}(y).$$

Тоді для кожного фіксованого $n \in \mathbb{N}$ усі корені G_n належать до множини

$$C_n := \left\{z \in \mathbb{C} : \ \left|z + i\frac{n}{2b}\right| \geqslant \frac{n}{2b}, \ \left|z - i\frac{n}{2b}\right| \geqslant \frac{n}{2b}\right\}.$$

Послідовність $G_n(y)$ збігається рівномірно на компактах до цілої функції

$$f(y) := \sum_{j=l}^{m} a_j e^{-j\lambda y} = Q(e^{-\lambda y})$$

при $n \to \infty$. Кожен корінь граничної цілої функції f є граничною точкою коренів функцій of G_n. Очевидно, що, якщо послідовність $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ має границю y_0, и для усіх $k \in \mathbb{N}$ ми маємо $z_k \in C_k$, то y_0 належить до дійсної осі. Тим же чином, як в попередніх міркуваннях про оператори, які зберігають гіперболічність, ми робимо висновок, що $\mathrm{Re}\ \lambda = 0$, і що кожен ненульовий корінь Q належить до одиничної окружності $\{z : |z| = 1\}$.

В обох випадках ми маємо $\lambda = i\beta,\ \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, і $Q(t) := \sum_{j=l}^{m} a_j t^j = t^l \prod_{k=1}^{m-l}(t - e^{i\theta_k})$, $\theta_k \in \mathbb{R}$, для $k = 1, 2, \ldots, m-l$. Тоді наш лінійний оператор T має наступне представлення

$$T = S_{i\beta}^l \prod_{k=1}^{m-l}(S_{i\beta} - e^{i\theta_k} I). \tag{5.7}$$

Доведення умови 2 в теоремах 5.3.3 і 5.3.5 базується на наступному факті щодо многочленів з усіма коренями на горизонтальній прямій.

Лема 5.3.6. Нехай $T = S_{i\beta} - e^{i\theta} \cdot I$, де $\beta, \theta \in \mathbb{R}$. Припустимо, що $P \in \mathbb{C}[z]$, і усі корені P лежать на прямій $\{z : \ \ Im\ z = c\}$. Тоді всі корені многочлена $T(P)$ лежать на прямій $\{z : \ \ Im\ z = c + \beta/2\}$.

Доведення. Припустимо, що $P \in \mathbb{C}[z]$ є довільним многочленом з усіма коренями на прямій $\{z : \ \mathrm{Im}\ z = c\}$, тобто

$$P(z) = C\prod_{j=1}^{n}(z - d_j - ci),$$

де $C \neq 0, d_j, c \in \mathbb{R}$. Будемо вивчати розташування коренів функції $(S_{i\beta} - e^{i\theta}I)(P)$. Ми маємо

$$(S_{i\beta} - e^{i\theta}I)(P)(z_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \prod_{j=1}^{n} \frac{z_0 - d_j - ci - \beta i}{z_0 - d_j - ci} = e^{i\theta}.$$

Ми бачимо, що для усіх $j = 1, 2, \ldots, n$, виконується наступне

$$\left| \frac{z - d_j - ci - \beta i}{z - d_j - ci} \right| < 1, \text{ якщо } \mathrm{Im}\, z > c + \beta/2$$

і

$$\left| \frac{z - d_j - ci - \beta i}{z - d_j - ci} \right| > 1, \text{ якщо } \mathrm{Im}\, z < c + \beta/2.$$

Таким чином, усі корені функції $(S_{i\beta} - e^{i\theta}I)(P)$ розташовані на прямій $\{z : \ \mathrm{Im}\, z = c + \beta/2\}$, якщо усі корені многочлена P розташовані на прямій $\{z : \ \mathrm{Im}\, z = c\}$. Лема 5.3.6 доведена. $\square$

Доведемо тепер необхідність умови 2 теореми 5.3.3. Якщо P є гіперболічним многочленом, то усі його корені лежать на прямій $\{z : \ Im\, z = 0\}$. Із леми 5.3.6 випливає, що усі корені $\left(\prod_{k=1}^{m-l}(S_{i\beta} - e^{i\theta_k}I)\right)(P)$ належать до прямій $\{z : \ \mathrm{Im}\, z = (m-l)\beta/2\}$. За допомогою (5.7) ми отримуємо, що усі корені многочлена $T(P)$ лежать на прямій $\{z : \ \mathrm{Im}\, z = (m-l)\beta/2 + l\beta\}$. Тобто, якщо усі корені многочлена $T(P)$ є дійсними для кожного гіперболічного многочлена P, то $l = -m$.

Тепер ми доведемо необхідність умови 2 теореми 5.3.5, тобто для зберігачів смуги. Припустимо, що лінійний оператор вигляду (5.3) зберігає множину комплексних многочленів з усіма коренями у смузі $\Pi_b := \{z : |\mathrm{Im}\, z| \leqslant b\}$. Розглянемо довільний многочлен P з усіма коренями на прямій $\{z : \ \mathrm{Im}\, z = b\}$. Із леми 5.3.6 випливає, що усі корені $T(P)$ розташовані на прямій

$$\{z : \ \mathrm{Im}\, z = b + (m-l)\beta/2 + l\beta\}.$$

Якщо многочлен P має усі корені на прямій $\{z : \ \mathrm{Im}\, z = -b\}$, то всі корені $T(P)$ розташовані на прямій

$$\{z : \ \mathrm{Im}\, z = -b + (m-l)\beta/2 + l\beta\}.$$

Оскільки оператор T зберігає корені в смузі Π_b, це є можливим тільки якщо

$$|\pm b + (m-l)\beta/2 + l\beta| \leqslant b.$$

Таким чином,

$$(m-l)\beta/2 + l\beta = 0 \quad \Leftrightarrow \; l = -m.$$

Це завершує доведення необхідності умов 1,2,3 в теоремах 5.3.3 і 5.3.5.

Відмітимо, що умова 4 в теоремі 5.3.3 забезпечує той факт, що для кожного многочлена $P \in \mathcal{HP}$ коефіцієнти многочлена $T(P)$ є дійсними.

Достатність умов 1,2,3,4 в теоремі 5.3.3 є наслідком теореми 5.3.1 і зауваження, що кожен оператор T, який задовольняє ці умови, є композицією лінійних операторів вигляду (5.2).

Доведемо достатність умов 1, 2, 3 в теоремі 5.3.5, тобто для зберігачів смуги. Припустимо, що многочлен P має усі корені в смузі Π_b :

$$P(z) = C\prod_{j=1}^{n}(z - z_j),$$

де $C \neq 0, |\mathrm{Im}\ z_j| \leqslant b$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ми дослідимо розташування коренів многочлена $(S_{i\beta} - e^{i\theta}I)(P)$. Ми маємо

$$(S_{i\beta} - e^{i\theta}I)(P)(z_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \prod_{j=1}^{n}\frac{z_0 - z_j - \beta i}{z_0 - z_j} = e^{i\theta}.$$

Ми відмічаємо, що для усіх $j = 1, 2, \ldots, n$, виконується наступне:

$$\left|\frac{z_0 - z_j - \beta i}{z_0 - z_j}\right| < 1, \text{ якщо } \mathrm{Im}\ z > b + \beta/2$$

і

$$\left|\frac{z_0 - z_j - \beta i}{z_0 - z_j}\right| > 1, \text{ якщо } \mathrm{Im}\ z < -b + \beta/2.$$

Тобто, усі корені $(S_{i\beta} - e^{i\theta}I)(P)$ належать до смуги $\{z : \ |\mathrm{Im}\ z - \beta/2| \leqslant b\}$, і усі корені образу оператора T вигляду (5.7) розташовані у смузі

$$\{z : \ |\mathrm{Im}\ z - (m+l)\beta/2| \leqslant b\}.$$

Тобто, лінійний оператор T вигляду (5.7) з $l = -m$ зберігає множину комплексних многочленів, які мають усі корені у смузі

$$\Pi_b \ = \ \{z : \ |\mathrm{Im}\ z| \leqslant b\}.$$

Теореми 5.3.3 і 5.3.5 доведені. □

Той факт, що кожен лінійний оператор вигляду (5.3), який зберігає множину гіперболічних многочленів, є композицією лінійних операторів вигляду (5.2), мотивує нас дослідити такий вид операторів більш детально. Далі нам буде більш зручно положити $\alpha = \theta - \pi/2$ і вивчати наступну еквівалентну форму оператора

$$T_{\theta,h}(P)(x) = \frac{e^{i\theta}P(x+ih) - e^{-i\theta}P(x-ih)}{i}, \quad h > 0,\ \theta \in \mathbb{R}. \tag{5.8}$$

Наступний приклад є важливим в подальшому.

Приклад 5.3.7. Для $n \in \mathbb{N}$ ми розглянемо $L_n(x) = x^n \in \mathcal{HP}$. Легко обчислити, що

$$Q_n(x,\theta) = T_{\theta,1}(x^n) = \tfrac{e^{i\theta}(x+i)^n - e^{-i\theta}(x-i)^n}{i} = \\ 2\sin\theta \prod_{k=1}^{n}\left(x - cot\tfrac{-\theta+\pi k}{n}\right), \text{якщо } sin\ \theta \neq 0, \tag{5.9}$$

і для θ з $sin\ \theta = 0$

$$Q_n(x,2\pi m) = -Q_n(x,\pi+2\pi m) = Q_n(x,0) = \tfrac{(x+i)^n-(x-i)^n}{i} = \\ 2n\prod_{k=1}^{n-1}\left(x - cot\tfrac{\pi k}{n}\right),\ m \in \mathbb{Z}. \tag{5.10}$$

Позначимо через

$$x_k = x_k(\theta) = cot\frac{-\theta+\pi k}{n},\ k = 1,2,\cdots,N, \tag{5.11}$$

корені многочлена $Q_n(x,\theta)$, де $N = n$, якщо $sin\ \theta \neq 0$, і $N = n-1$, якщо $sin\ \theta = 0$.

Ми бачимо, що усі корені многочлена $Q_n(x,\theta)$ є дійсними і простими. Легко перевірити, що для кожного гіперболічного многочлена P усі корені многочлена $T_{\theta,h}(x)$ є простими. Ми відмічаємо також, що мінімальна відстань між різними коренями многочлена Q_n прямує до нуля, коли n прямує до нескінченності. Тому ми не можемо використати граничні міркування і зробити висновок про те, що усі корені функції $T_{\theta,h}(f)$ є простими для усіх $f \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$. Ми доводимо наступний факт.

Теорема 5.3.8. ([132]). Для кожних $h > 0,\ \theta \in \mathbb{R}$, і кожного $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$, усі корені цілої функції $T_{\theta,h}(f)$ є дійсними і простими.

Доведення. Для кожних $h > 0, \theta \in \mathbb{R}$, і кожного $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$ усі корені функції $T_{\theta,h}(f)$ є дійсними, оскільки f є рівномірною на компактних множинах в $\mathbb{C}$ границею многочленів з усіма дійсними коренями, і, як ми відмічали раніше, $T_{\theta,h} : \mathcal{HP} \to \mathcal{HP}$. Нам потрібно довести тільки простоту коренів цілої функції $T_{\theta,h}(f)$.

Нехай $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$ має представлення (4.1.2) із розділу (4), $f \not\equiv 0$, і припустимо, що $x_0 \in \mathbb{R}$ є кратним коренем функції $g(z) := T_{\theta,h}(f)(z)$. Тоді $g(x_0) = 0,\ g'(x_0) = 0$, або

$$e^{i\theta} f(x_0 + ih) = e^{-i\theta} f(x_0 - ih), \quad e^{i\theta} f'(x_0 + ih) = e^{-i\theta} f'(x_0 - ih),$$

звідки $\frac{f'}{f}(x_0 + ih) = \frac{f'}{f}(x_0 - ih)$. З (4.1.2) ми маємо

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{n}{z} - 2az + b + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{x_k(z - x_k)},$$

звідки маємо

$$\frac{n}{x_0 + ih} - 2a(x_0 + ih) + b + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_0 + ih}{x_k(x_0 + ih - x_k)} =$$

$$\frac{n}{x_0 - ih} - 2a(x_0 - ih) + b + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_0 - ih}{x_k(x_0 - ih - x_k)},$$

або

$$\frac{n}{x_0 + ih} - 2aih + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_0 + ih}{x_k(x_0 + ih - x_k)} =$$

$$\frac{n}{x_0 - ih} + 2aih + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_0 - ih}{x_k(x_0 - ih - x_k)}.$$

Ми порівняємо уявні частини лівої і правої частин останньої рівності:

$$\frac{-nh}{x_0^2 + h^2} - 2ah - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k h}{x_k((x_0 - x_k)^2 + h^2)} =$$

$$\frac{nh}{x_0^2 + h^2} + 2ah + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k h}{x_k((x_0 - x_k)^2 + h^2)}.$$

Оскільки $h \neq 0$, ми робимо висновок, що

$$\frac{n}{x_0^2 + h^2} + 2a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x_0 - x_k)^2 + h^2} = 0.$$

Але $n \geqslant 0, a \geqslant 0, (x_0 - x_k)^2 \geqslant 0$, звідки ми отримуємо, що f є сталою функцією, тому $T_{\theta,h}(f)$ є сталою функцією, і ми довели теорему (5.3.8). $\square$

Для кожного гіперболічного многочлена P ми отримуємо оцінку максимального і мінімального кореня його образу $T_{\theta,h}(P)$. Позначимо через $\lambda(P)$ максимальний корінь гіперболічного многочлена P і через $\mu(P)$ його мінімальний корінь. Ми доводимо наступне твердження.

Теорема 5.3.9. ([132]). Для довільних $P \in \mathcal{HP}$, $\deg P = n \geqslant 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, і довільного $h > 0$, ми маємо

$$\lambda(T_{\theta,h}(P)) \leqslant \lambda(P) + h \cdot \lambda(Q_n) \ \text{ і } \ \mu(T_{\theta,h}(P)) \geqslant \mu(P) + h \cdot \mu(Q_n),$$

де многочлени Q_n беруться із прикладу 5.3.7.

Для доведення цієї теореми нам потрібні ще поняття аполярних многочленів і згортки Уолша.

Означення 5.3.10. (дивись, наприклад, [6, с. 15-16] або [191, глава 5, §3, задача 139]). Два комплексних многочлена P і Q степеня n називаються аполярними, якщо

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \ P^{(k)}(0) \cdot Q^{(n-k)}(0) = 0. \tag{5.12}$$

Наступна знаменита теорема Дж.Х.Грейса стверджує, що комплексні корені двох аполярних многочленів не можуть бути розділені прямою чи окружністю.

Теорема 5.3.11. (дивись, наприклад, [6, с. 16] або [191, глава 5, §3, задача 145]). Припустимо, що P і Q є двома комплексними аполярними многочленами степеня $n \geqslant 1$. Якщо усі корені многочлена P розташовані в колової області C, то многочлен Q має хоча б один корінь в області C. (Коловою областю називається замкнені або відкриті півплощина, коло, або зовнішність кола).

Наступна операція над комплексними многочленами вивчалася Т.Такагі [212] в 1921 році і Дж.Л.Уолшем [232] в 1922 році (дивись також [193, Секція 5.3]). Однак загальноприйнятим терміном зараз є “згортка Уолша”.

Означення 5.3.12. ([232]). Для довільних двох комплексних многочленів P і Q степеня n їх згортка Уолша визначається наступним чином:

$$P \boxplus Q\ (x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0) \cdot Q^{(n-k)}(x). \tag{5.13}$$

Із порівняння визначень (5.3.10) і (5.3.12) ми бачимо, що

$$P \boxplus Q\ (x_0) = 0 \ \Leftrightarrow \ P(-x) \text{ і } Q(x + x_0) \text{ є аполярними.} \tag{5.14}$$

Наступний добре відомий факт про властивості згортки Уолша двох многочленів був, напевно, вперше доведений Дж.Х.Уолшем в ([232]).

Теорема 5.3.13. ([232]). 1. Для довільних двох гіперболічних многочленів P і Q степеня n їх згортка Уолша $P \boxplus Q$ є також гіперболічним многочленом.

2. Якщо до того ж усі корені многочлена P належать до відрізку $[\alpha,\ \beta]$, а усі корені многочлена Q належать до відрізку $[\gamma,\ \delta]$, то усі корені многочлена $P \boxplus Q$ належать до відрізку $[\alpha + \gamma,\ \beta + \delta]$.

Для зручності читача ми наведемо коротке доведення цієї теореми.

Доведення. Доведемо перше твердження. Припустимо, що $P \boxplus Q(x_0) = 0$, але $\operatorname{Im} x_0 = b \neq 0$. Тоді, з (5.14) многочлени $P(-x)$ і $Q(x+x_0)$ є аполярними. Використовуючи той факт, що многочлени P і Q є гіперболічними, ми маємо, що усі корені многочлена $P(-x)$ належать до прямій $\{\operatorname{Im}\ z = 0\}$, тоді як усі корені многочлена $Q(x + x_0)$ лежать на прямій $\{\operatorname{Im}\ z = -b\}$. Тобто, корені многочленів $P(-x)$ і $Q(x + x_0)$ можуть бути розділеними прямою, що суперечить теоремі Грейса. Перше твердження доведено.

Доведемо друге твердження. Розглянемо довільний корінь x_0 многочлена $P \boxplus Q$. Усі корені многочлена $P(-x)$ належать до відрізку $[-\beta,\ -\alpha]$, а усі корені многочлена $Q(x+x_0)$ належать до відрізку $[\gamma - x_0,\ \delta - x_0]$, тому із теореми Грейса ми отримуємо, що існує точка $\zeta \in \mathbb{R}$, така що

$$-\beta \ \leqslant\ \zeta\ \leqslant\ -\alpha \ \text{ і }\ \gamma - x_0\ \leqslant\ \zeta\ \leqslant\ \delta - x_0. \tag{5.15}$$

Тобто,

$$\alpha + \gamma\ \leqslant\ x_0\ \leqslant\ \beta + \delta\ .$$

Теорема доведена. □

Тепер ми можемо довести теорему 5.3.9.

Доведення. Для довільних $\theta \in \mathbb{R}$ і $h > 0$ ми розглянемо оператор (5.8). Позначимо через

$$G_n(x,\theta,h) = T_{\theta,h}(x^n) = \tfrac{e^{i\theta}(x+ih)^n - e^{-i\theta}(x-ih)^n}{i}, \tag{5.16}$$
$$\text{якщо } \sin\theta \neq 0,$$

і

$$G_n(x,2\pi m,h) = -G_n(x,\pi+2\pi m,h) = G_n(x,0,h) = \tag{5.17}$$
$$T_{0,h}(x^n) = \tfrac{(x+ih)^n - (x-ih)^n}{i},$$

де $m \in \mathbb{Z},\ n = 0,1,2,\ldots.$

Порівнюючи ці формули з (5.9) і (5.10), ми бачимо, що для довільних $\theta \in \mathbb{R}$, $h > 0$ і $n \in (N):$

$$G_n(x,\theta,h) = h^n Q_n\left(\frac{x}{h},\theta\right). \tag{5.18}$$

Тому, для кожного $n \in \mathbb{N}$ многочлен $G_n(x,\theta,h)$ є гіперболічним з коренями $h \cdot x_k,\ k = 1,2,\ldots,N$, де x_k є коренями многочлена $Q_n(x,\theta)$, які разом з номером N описані в (5.11).

Застосуємо оператор $T_{\theta,h}$ до гіперболічного многочлена

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(0) x^k.$$

Ми отримуємо

$$T_{\theta,h}(P)\ (x)\ =\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\ P^{(k)}(0)\ T_{\theta,h}(x^k)\ =\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\ P^{(k)}(0) \cdot G_k(x,\theta,h).$$

Легко перевірити, що

$$G_k(x,\theta,h) \;=\; \frac{G_n^{(n-k)}(x,\theta,h)}{n(n-1)(n-2)\cdots(k+1)} \;=\; \frac{k!}{n!}\, G_n^{(n-k)}(x,\theta,h).$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} T_{\theta,h}(P)\;(x) &= \tfrac{1}{n!}\;\textstyle\sum_{k=0}^{n}\; P^{(k)}(0)\; G_n^{(n-k)}(x,\theta,h) \\ &= \tfrac{1}{n!}\; P \boxplus G_n(x,\theta,h). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Тепер твердження теореми 5.3.9 є прямим наслідком другого твердження теореми 5.3.13 і (5.23). Теорема 5.3.9 доведена. □

Наступна теорема була доведена С.Фіском.

Теорема 5.3.14. ([80, с. 226, лема 8.25]). *Якщо $A : \mathcal{H}P \to \mathcal{H}P$ є лінійним оператором, і для усіх $b \in \mathbb{R}$ ми маємо $AS_b = S_bA$, то для кожного многочлена $P \in \mathcal{H}P$ виконується наступна нерівність:* $\mathrm{mesh}(A(P)) \geqslant \mathrm{mesh}(P)$.

Відмітимо, що сам С.Фіск формулював цю теорему в зовсім інших термінах. Не дуже легко з'ясувати, що теорема С.Фіска дає твердження, що воно сформульоване вище. Як ми відмічали раніше, в [46] доведено, що жоден нетривіальний лінійний оператор вигляду (5.3) з дійсним зсувом λ не зберігає множину гіперболічних многочленів. З іншого боку, в роботі [46] доведено, що лінійний оператор вигляду (5.3) з дійсним зсувом λ зберігає множину гіперболічних многочленів з мешем не меншим за λ тоді і тільки тоді, коли усі корені твірної функції $Q(t) := \sum_{j=l}^{m} a_j t^j$ є дійсними і невід'ємними.

Оскільки лінійний оператор $T_{\theta,h}$ зберігає гіперболічність для кожного $\theta, h \in \mathbb{R}$, і, крім того, оператор $T_{\theta,h}$ комутує з кожним оператором зсуву, із теореми 5.3.14 випливає, що $T_{\theta,h}$ не зменшує меш. Ми покажемо, що в класі гіперболічних многочленів степеня n многочлен x^n є екстремальним у цьому сенсі.

Теорема 5.3.15. ([132]). *Для кожного $P \in \mathcal{HP}$, $\deg P = n \geqslant 2$, кожного $\theta \in \mathbb{R},\ \sin\theta \neq 0$, і кожного $h > 0$, ми маємо*

$$\mathrm{mesh}\; T_{\theta,h}(P) \geqslant \mathrm{mesh}\; T_{\theta,h}(x^n).$$

Для кожного $\theta : \sin\theta = 0$, твердження теореми є також вірним для усіх $n \geqslant 3$.

Доведення. Фіксуємо довільний многочлен $P \in \mathbb{C}[x]$. Розглянемо лінійний оператор $T_P : \ \mathbb{C}[x] \ \to \ \mathbb{C}[x]$, який діє наступним чином:

$$T_P(Q) \ = \ P \boxplus Q.$$

Якщо $P \in \mathcal{HP}$, то, за теоремою Уолша 5.3.13, оператор T_P зберігає гіперболічність. Очевидно, що, T_P комутує з кожним оператором зсуву. Із теореми 5.3.14 випливає, що T_P не зменшує меш. Використовуючи комутативність згортки Уолша (дивись, наприклад, [232]), ми отримуємо наступний результат, який доведений в [46].

Теорема 5.3.16. ([46]). Нехай P і Q є гіперболічними многочленами степеня n. Тоді

$$\text{mesh}\ (P \boxplus Q) \ \geqslant \ \max\ (\text{mesh}\ (P),\ \text{mesh}\ (Q)). \tag{5.20}$$

Для кожного $\theta \in \mathbb{R}$ і $h > 0$ ми розглянемо лінійний оператор (5.8). Введемо такі позначення:

$$G_n(x,\theta,h) = T_{\theta,h}(x^n) = \frac{e^{i\theta}(x+ih)^n - e^{-i\theta}(x-ih)^n}{i}, \text{ якщо } \sin\theta \neq 0, \tag{5.21}$$

і

$$G_n(x,2\pi m,h) = -G_n(x,\pi+2\pi m,h) = G_n(x,0,h) = T_{0,h}(x^n) = \tfrac{(x+ih)^n-(x-ih)^n}{i}, \tag{5.22}$$

де $\ m \in \mathbb{Z},\ n = 0,1,2,\ldots.$

Порівнюючи ці формули з (5.9) і (5.10), ми відмічаємо, що для довільних $\theta \in \mathbb{R}$, $h > 0$ і $n \in (N):$

$$G_n(x,\theta,h) = h^n Q_n\left(\frac{x}{h},\theta\right). \tag{5.23}$$

Тому, для кожного $n \in \mathbb{N}$ многочлен $G_n(x,\theta,h)$ є гіперболічним многочленом з коренями $h \cdot x_k,\ \ k = 1,2,\ldots,N$, де x_k є корені многочлена $Q_n(x,\theta)$, який, разом з числом N, описуються формулою (5.11).

Застосуємо лінійний оператор $T_{\theta,h}$ до гіперболічного многочлена P. Із (5.19) і (5.20) випливає, що

$$\text{mesh } T_{\theta,h}(P)(x) \geqslant \text{mesh } (P \boxplus G_n(x,\theta,h)) \geqslant$$
$$\max (\text{mesh } (P(x)),\ \text{mesh } (G_n(x,\theta,h))).$$

Оскільки $G_n(x,\theta,h) = T_{\theta,h}(x^n)$ це доводить теорему 5.3.15, а також представляє ще одне пояснення того, що лінійний оператор $T_{\theta,h}$ не зменшує меш гіперболічного многочлена. $\square$

У зв'язку з теоремами 5.3.9 і 5.3.15 виникає наступне природне питання.

Питання 5.3.17. Яким є образ множини гіперболічних многочленів (множини гіперболічних многочленів степеня не вище за задане n) під дією лінійного оператора оператора вигляду (5.8)?

Наша остання теорема описує асимптотичну поведінку коренів многочлена $T_{\theta,h}(P)$, коли h прямує до нескінченості.

Нехай $P_n(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \sum_{k=0}^{n-3} c_k x^k$ є многочленом з комплексними коефіцієнтами. Для $\theta \in \mathbb{R}, h > 0$, розглянемо многочлен

$$D_n(x,\theta,h) := T_{\theta,h}(P_n)(x) = \frac{e^{i\theta}P_n(x+ih) - e^{-i\theta}P_n(x-ih)}{i}. \tag{5.24}$$

Многочлен $D_n(x,\theta,h)$ має n коренів, якщо $\sin\ \theta \neq 0$, і він має тільки $n-1$ коренів, якщо $\sin\ \theta = 0$. Позначимо через $X_1(h,\theta), X_2(h,\theta), \ldots, X_N(h,\theta)$ корені цього многочлена, занумеровані за умовою: $\text{Re } X_1(h,\theta) \leqslant \text{Re } X_2(h,\theta) \leqslant \ldots \leqslant \text{Re } X_N(h,\theta)$, де $N = n$, якщо $sin\ \theta \neq 0$, і $N = n-1$, якщо $sin\ \theta = 0$. Нашою ціллю є опис асимптотичної поведінки $X_j(h,\theta)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, при $h \to \infty$.

Теорема 5.3.18. ([132]). Для довільних $\theta \in \mathbb{R}$ і $h > 0$, j-й корінь многочлена $D_n(\theta,h)$ задовольняє асимптотичну формулу:

$$X_j(h,\theta) = x_j \cdot h - \frac{a}{n} + \left(\frac{a^2(n-1)}{2n^2} - \frac{b}{n}\right)\frac{Q_{n-2}(x_j,\theta)}{Q_{n-1}(x_j,\theta)} \cdot \frac{1}{h}$$
$$+ O\left(\frac{1}{h^2}\right), \quad h \to \infty,$$

де многочлени Q_{n-1}, Q_{n-2} і числа x_j взяті із прикладу 5.3.7.

Доведення. Оскільки $D_n(x, 2\pi k, h) = -D_n(x, \pi + 2\pi k, h) = D_n(x, 0, h)$, ми будемо розглядати тільки два випадки: $sin\ \theta \neq 0$ і $\theta = 0$.

Наступний факт про властивості многочленів $Q_n(x, \theta)$ є очевидним.

Твердження 5.3.19. Для усіх $n = 2, 3, \ldots$ виконуються наступні рівності:

$$Q_n^{'}(x, \theta) = nQ_{n-1}(x, \theta),\ \ \theta \in \mathbb{R}; \tag{5.25}$$

$$Q_n^{'}(x_j, \theta) = 2\sin\theta \prod\nolimits_{k\neq j}(x_j - x_k), \text{якщо } sin\theta \neq 0, \tag{5.26}$$
$$\text{і}\ \ Q_n^{'}(x_j, 0) = 2n \prod\nolimits_{k\neq j}(x_j - x_k);$$

$$Q_{n-1}(x_j, \theta) = \tfrac{2\sin\theta}{n} \prod\nolimits_{k\neq j}(x_j - x_k), \text{якщо } sin\theta \neq 0, \tag{5.27}$$
$$\text{і}\ \ Q_{n-1}(x_j, 0) = 2 \prod\nolimits_{k\neq j}(x_j - x_k).$$

Поділимо $D_n(x, \theta, h)$ на h^n

$$\frac{1}{h^n}D_n(x, \theta, h) = \frac{1}{i}\left(e^{i\theta}\left(\frac{x}{h} + i\right)^n - e^{-i\theta}\left(\frac{x}{h} - i\right)^n\right)$$
$$+\frac{a}{ih}\left(e^{i\theta}\left(\frac{x}{h} + i\right)^{n-1} - e^{-i\theta}\left(\frac{x}{h} - i\right)^{n-1}\right)$$
$$+\frac{b}{ih^2}\left(e^{i\theta}\left(\frac{x}{h} + i\right)^{n-2} - e^{-i\theta}\left(\frac{x}{h} - i\right)^{n-2}\right) +$$
$$\sum_{k=0}^{n-3}\frac{c_k}{ih^{n-k}}\left(e^{i\theta}\left(\frac{x}{h} + i\right)^{k} - e^{-i\theta}\left(\frac{x}{h} - i\right)^{k}\right).$$

Позначимо

$$t = \frac{x}{h}. \tag{5.28}$$

Використовуючи формули із прикладу 5.3.7, ми можемо переформулювати нашу проблему наступним чином: описати асимптотичну поведінку коренів $t_1(h, \theta), t_2(h, \theta), \ldots, t_N(h, \theta)$ (як і раніше $N = n$, якщо $sin\ \theta \neq 0$, і $N = n-1$, якщо $\theta = 0$) рівняння

$$Q_n(t, \theta) + \frac{a}{h}Q_{n-1}(t, \theta) + \frac{b}{h^2}Q_{n-2}(t, \theta) + \sum_{k=0}^{n-3}\frac{c_k}{h^{n-k}}Q_k(t, \theta) = 0 \tag{5.29}$$

при $h \to \infty$ для кожного фіксованого $\theta \in \mathbb{R}$.

Фіксуємо натуральний індекс $j = 1, 2, \ldots, N$. Позначимо через

$$P_n(t,\theta) = 2\sin\theta \prod\nolimits_{k\neq j}(t - x_k), \text{якщо } sin\ \theta \neq 0, \qquad (5.30)$$
$$\text{і}\ \ P_n(t,0) = 2n\prod\nolimits_{k\neq j}(t-x_k).$$

Оскільки $Q_n(t,\theta) = (t - x_j)P_n(t,\theta)$, можна отримати наступні властивості P_n з (5.25), (5.27) і (5.28):

$$P_n(x_j,\theta) = Q_n^{'}(x_j,\theta) = nQ_{n-1}(x_j,\theta), \qquad (5.31)$$

$$P_n^{'}(x_j,\theta) = \frac{1}{2}Q_n^{''}(x_j,\theta) = \frac{n(n-1)}{2}Q_{n-2}(x_j,\theta). \qquad (5.32)$$

За теоремою Гурвиця, існує таке число $\rho > 0$, що для достатньо великих значень числа h коло $|t - x_j| < \rho$ містить рівно один корінь рівняння (5.29), і цей корінь є $t_j(h,\theta)$, тобто

$$|t_j(h,\theta) - x_j| < \rho, \quad |t_k(h,\theta) - x_j| \geqslant \rho, \quad k \neq j. \qquad (5.33)$$

Таким чином, $P_n(t_j(h,\theta),\theta) \neq 0$, і ми можемо поділити (5.29) на нього. Тобто, корінь $t_j(h,\theta)$ задовольняє рівність

$$(t_j(h,\theta) - x_j) + \frac{a}{h}\frac{Q_{n-1}(t_j(h,\theta),\theta)}{P_n(t_j(h,\theta),\theta)} + \frac{b}{h^2}\frac{Q_{n-2}(t_j(h,\theta),\theta)}{P_n(t_j(h,\theta),\theta)}$$
$$+\sum_{k=0}^{n-3}\frac{c_k}{h^{n-k}}\frac{Q_k(t_j(h,\theta),\theta)}{P_n(t_j(h,\theta),\theta)} = 0. \qquad (5.34)$$

З цієї рівності і (5.33) випливає, що

$$t_j(h,\theta) = x_j + O\left(\frac{1}{h}\right). \qquad (5.35)$$

Використовуючи розкладення Тейлора для функцій $\frac{Q_{n-1}(t,\theta)}{P_n(t,\theta)}$ і $\frac{Q_{n-2}(t,\theta)}{P_n(t,\theta)}$ в точці x_j, і (5.31), (5.32), (5.25), ми отримуємо

$$\frac{Q_{n-1}(t,\theta)}{P_n(t,\theta)} = \frac{Q_{n-1}(x_j,\theta)}{P_n(x_j,\theta)} +$$
$$\frac{Q_{n-1}^{'}(x_j,\theta)P_n(x_j,\theta) - Q_{n-1}(x_j,\theta)P_n^{'}(x_j,\theta)}{P_n^2(x_j,\theta)}(t - x_j)$$
$$+O\left((t-x_j)^2\right) =$$

$$\frac{1}{n}+\frac{(n-1)}{2n}\cdot\frac{Q_{n-2}(x_j,\theta)}{Q_{n-1}(x_j,\theta)}(t-x_j)+O\left((t-x_j)^2\right), \tag{5.36}$$

і

$$\frac{Q_{n-2}(t,\theta)}{P_n(t,\theta)}=\frac{Q_{n-2}(x_j,\theta)}{nQ_{n-1}(x_j,\theta)}+O\left((t-x_j)\right). \tag{5.37}$$

Співвідношення (5.36) і (5.37) дозволяють нам переписати (5.34) наступним чином

$$(t_j(h,\theta)-x_j)+\frac{1}{h}\cdot\frac{a}{n}+\frac{1}{h}\cdot\frac{a(n-1)}{2n}\cdot\frac{Q_{n-2}(x_j,\theta)}{Q_{n-1}(x_j,\theta)}\,(t_j(h,\theta)-x_j)$$

$$+\frac{1}{h^2}\cdot\frac{b}{n}\frac{Q_{n-2}(x_j,\theta)}{Q_{n-1}(x_j,\theta)}$$

$$+\frac{a}{h}\cdot O\left((t_j(h,\theta)-x_j)^2\right)+\frac{b}{h^2}\cdot O\left((t_j(h,\theta)-x_j)\right)+$$

$$\sum_{k=0}^{n-3}\frac{c_k}{h^{n-k}}\frac{Q_k(t_j(h,\theta),\theta)(t_j(h,\theta)-x_j)}{Q_n(t_j(h,\theta),\theta)}=0. \tag{5.38}$$

Положимо

$$t_j(h,\theta)-x_j=-\frac{a}{nh}+\left(\frac{a^2(n-1)}{2n^2h^2}-\frac{b}{nh^2}\right)\frac{Q_{n-2}(x_j,\theta)}{Q_{n-1}(x_j,\theta)}+\omega(h,\theta), \tag{5.39}$$

і оцінимо функцію $\omega(h,\theta)$ для достатньо великих значень h. Використовуючи (5.35) і (5.33), з (5.38) ми отримуємо наступну оцінку

$$|\omega(h,\theta)|\leqslant\frac{K}{h^3}, \tag{5.40}$$

де K є константою. Таким чином, за допомогою (5.28), ми маємо

$$X_j(h,\theta)=h\cdot t_j(h,\theta)=x_j\cdot h-\frac{a}{n}+$$

$$\left(\frac{a^2(n-1)}{2n^2}-\frac{b}{n}\right)\frac{Q_{n-2}(x_j,\theta)}{Q_{n-1}(x_j,\theta)}\cdot\frac{1}{h}+O\left(\frac{1}{h^2}\right),\quad h\to\infty.$$

Теорема 5.3.18 доведена. □

Зауваження 5.3.20. Таким само способом ми можемо отримати більш точну асимптотичну формулу:

$$X_j(h,\theta)=x_j\cdot h-\frac{a}{n}+\left(\frac{a^2(n-1)}{2n^2}-\frac{b}{n}\right)\frac{Q_{n-2}(x_j,\theta)}{Q_{n-1}(x_j,\theta)}\cdot\frac{1}{h}$$

$$+\left(-\frac{a^3(n-1)(n-2)}{3n^3}+\frac{ab(n-2)}{n^2}-\frac{c}{n}\right)\frac{Q_{n-3}(x_j,\theta)}{Q_{n-1}(x_j,\theta)}\cdot\frac{1}{h^2}$$
$$+O\left(\frac{1}{h^3}\right),\quad h\to\infty.$$

Доведення. Ми повинні замінити (5.36) і (5.37) більш акуратними формулами:

$$\frac{Q_{n-1}(t,\theta)(t-x_j)}{Q_n(t,\theta)}=\frac{1}{n}+\frac{(n-1)Q_{n-2}(x_j,\theta)}{2nQ_{n-1}(x_j,\theta)}(t-x_j)+$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2(n-1)(n-2)Q_{n-3}(x_j,\theta)}{3nQ_{n-1}(x_j,\theta)}-\tfrac{(n-1)^2Q_{n-2}^2(x_j,\theta)}{2nQ_{n-1}^2(x_j,\theta)}\right)\cdot(t-x_j)^2+ \tag{5.41}$$
$$+O\left((t-x_j)^3\right),$$

і

$$\frac{Q_{n-2}(t,\theta)(t-x_j)}{Q_n(t,\theta)}=\frac{Q_{n-2}(x_j,\theta)}{nQ_{n-1}(x_j,\theta)}+$$
$$\left(\frac{(n-2)Q_{n-3}(x_j,\theta)}{nQ_{n-1}(x_j,\theta)}-\frac{(n-1)Q_{n-2}^2(x_j,\theta)}{2nQ_{n-1}^2(x_j,\theta)}\right)\cdot(t-x_j)$$
$$+O\left((t-x_j)^2\right). \tag{5.42}$$

До того, ми напишемо перший член розкладення Тейлора для функції $\frac{Q_{n-3}(t,\theta)}{Q_n(t,\theta)}(t-x_j)$:

$$\frac{Q_{n-3}(t,\theta)(t-x_j)}{Q_n(t,\theta)}=\frac{Q_{n-3}(x_j,\theta)}{nQ_{n-1}(x_j,\theta)}+O\left((t-x_j)\right). \tag{5.43}$$

Після цього, розглядаючи формули (5.42), (5.42) і (5.43), ми зробимо відповідні зміни в формулі (5.38). Поклавши

$$t_j(h,\theta)-x_j=-\frac{a}{nh}+\left(\frac{a^2(n-1)}{2n^2h^2}-\frac{b}{nh^2}\right)\frac{Q_{n-2}(x_j,\theta)}{Q_{n-1}(x_j,\theta)}+$$
$$\left(-\frac{a^3(n-1)(n-2)}{3n^3h^3}+\frac{ab(n-2)}{n^2h^3}-\frac{c}{nh^3}\right)\frac{Q_{n-3}(x_j,\theta)}{Q_{n-1}(x_j,\theta)}+\omega(h,\theta), \tag{5.44}$$

ми отримуємо наступні оцінки для функції $\omega(h,\theta)$:

$$|\omega(h,\theta)|\leqslant\frac{K}{h^4}, \tag{5.45}$$

де K є константою. □

5.4 Лінійні скінчено-різничні оператори, які зберігають клас Лаґерра-Поліа цілих функцій

Ми вже відмічали, що П.Бранден і Дж.Борсеа [37] (дивись також [38, 39]) дали характеризацію лінійних операторів, які зберігають гіперболічність (а також зберігають деякі інші множини многочленів з коренями у заданих областях), а також характеризацію лінійних операторів, які зберігають клас Лаґерра-Поліа [40]. Тим не менш, їх опис таких операторів не завжди забезпечує зручну форму відповіді, і іноді більш зручно описувати деякі оператори, які зберігають гіперболічність або клас Лаґерра-Поліа, не використовуючи формальний опис. В цьому параграфі ми отримуємо повний опис спеціальних скінчено-різничних лінійних операторів з функціональними коефіцієнтами, які зберігають клас Лаґерра-Поліа. Цікаві подібні результати були отримані нещодавно Д.Кардоном в роботі [49] для операторів, які зберігають корені у смузі.

Нещодавно П.Бранден, І.Красіков і Б.Шапіро [46] зробили спробу перенести відому теорію операторів, які зберігають гіперболічність, зі стандартного мономіального базису на базис з символів Похгаммера, і отримати скінчено-різничний аналог теорії Поліа-Шура. Деякі результати з цієї теми були отримані в роботі [130]. Ми в цьому параграфі будемо розглядати центральні скінчено-різничні оператори з несталими коефіцієнтами.

$$\Delta_{M_1,M_2,h}(f)(z) = M_1(z)f(z+h) + M_2(z)f(z-h). \tag{5.46}$$

Тут M_1 і M_2 є заданими функціями і h є заданим ненульовим комплексним числом.

В цьому параграфі ми вивчаємо оператори вигляду (5.46), які зберігають множину многочленів з усіма дійсними коренями. Ясно, що оператор $\Delta_{M_1,M_2,h}(p)(z)$ переводить довільний многочлен у многочлен тоді і тільки тоді, коли M_1 і M_2 є многочленами. Оператор (5.46) і його багатократні композиції вивчалися в роботі [46] у випадку, коли M_1 і M_2 є многочленами і $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Автори роботи [46] довели, що оператор

$$T(f)(x) = \sum_{j=0}^{k} q_j(x) f(x-j)$$

з $q_j \in \mathbb{C}[x]$, $j = 0, 1, \ldots, k$, зберігає клас многочленів з усіма дійсними коренями тоді і тільки тоді, коли $q_j(x) \not\equiv 0$ для не більш ніж одного j, і q_j має усі дійсні корені для цього j. Тобто, випадок дійсного кроку h не дає нетривіальних операторів вигляду (5.46), які зберігають множину многочленів з дійсними коренями.

Відмітимо, що деякі спеціальні трансцендентні функції є рішеннями скінченно-різничних операторів, близьких до (5.46). Функціональне рівняння Рімана для ζ-функції Рімана [197] є таким прикладом. Деякі спеціальні функції є результатом дії операторів вигляду (5.46). Таким чином, є сенс розширити область визначення оператора (5.46) з многочленів до цілих функцій. Ми будемо розглядати дію таких операторів на функціях класу Лаґерра-Поліа.

Дж.Поліа був, можливо, першим, хто отримав деякі результати про збереження класу $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ операторами вигляду (5.46). В роботі [188] він показав, що, якщо $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$, то

$$f(x+ic) + f(x-ic) \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$$

для кожного $c \in \mathbb{R}$. В роботі [217] було досліджено, що той же факт є вірним для оператора

$$f(x+ic) + \theta f(x-ic), \quad |\theta| = 1.$$

В цьому параграфі ми повністю опишемо оператори вигляду (5.46), які зберігають клас Лаґерра-Поліа.

Спершу ми отримуємо деякі необхідні умови для того, щоб оператор (5.46) зберігав клас Лаґерра-Поліа.

Твердження 5.4.1. ([134]). Нехай M_1 і M_2 є двома заданими функціями, $M_1, M_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $M_1 \not\equiv 0, M_2 \not\equiv 0$, і h є комплексним числом, $h \neq 0$. Припустимо, що лінійний оператор $\Delta_{M_1,M_2,h}$ вигляду (5.46) має властивість

$\Delta_{M_1,M_2,h}(\mathcal{L}-\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}-\mathcal{P}$. Тоді M_1 і M_2 є цілими функціями і або $h \in \mathbb{R}$, або $ih \in \mathbb{R}$.

Доведення. Оскільки для кожного $b \in \mathbb{R}$ функція e^{bz} належить до класу Лаґерра-Поліа, функція

$$T_{M_1,M_2,h}(e^{bz}) = M_1(z)e^{z+h} + M_2(z)e^{z-h}$$

належить до того ж класу за припущенням. Тобто, $M_1(z) + e^{-2bh}M_2(z)$ є цілою функцією класу Лаґерра-Поліа для усіх дійсних b. За припущеннями $h \neq 0$, тому M_1 і M_2 є цілими функціями.

Більш того, функції $f_1(x) = 1$ і $f_2(x) = x$ належать до класу Лаґерра-Поліа, звідки

$$M_1(x) + M_2(x) \in \mathbb{R}$$

і

$$x(M_1(x) + M_2(x)) + h(M_1(x) - M_2(x)) \in \mathbb{R}$$

для усіх $x \in \mathbb{R}$. Тобто, $h(M_1(x) - M_2(x)) \in \mathbb{R}$ для усіх $x \in \mathbb{R}$.

Крім того, відмітимо, що $f_3(x) = x^2 \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$, тому

$$x^2(M_1(x) + M_2(x)) + 2xh(M_1(x) - M_2(x)) + h^2(M_1(x) + M_2(x)) \in \mathbb{R}$$

для усіх $x \in \mathbb{R}$, звідки $h^2(M_1(x)+M_2(x)) \in \mathbb{R}$ для усіх $x \in \mathbb{R}$. Таким чином, $h^2 \in \mathbb{R}$, якщо $M_1(x) + M_2(x) \not\equiv 0$. А якщо $M_1(x) + M_2(x) \equiv 0$, то, діючи оператором $T_{M_1,M_2,h}$ на функцію $f_4(x) = x^3 \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$, ми маємо

$$M_1(x)\left((x+h)^3 - (x-h)^3\right) = hM_1(x)(6x^2 + 2h^2) \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $h(M_1(x) - M_2(x)) = 2hM_1(x) \in \mathbb{R}$, ми отримуємо $h^2 \in \mathbb{R}$, як і потрібно. □

Таким чином, для вивчення операторів вигляду (5.46), які зберігають клас $\mathcal{L}-\mathcal{P}$, ми повинні вибирати M_1 і M_2 цілими функціями, і або $h \in \mathbb{R}$, або $ih \in \mathbb{R}$. Як ми вже зазначали вище, випадок дійсного h був розглянутий в роботі [46], і було доведено, що такі оператори зберігають $\mathcal{L}-\mathcal{P}$, тільки якщо вони є тривіальними. Тому в подальшому ми будемо розглядати лінійний оператор наступного вигляду:

$$T_{M_1,M_2}(f)(z) = M_1(z)f(z+i) + M_2(z)f(z-i) \tag{5.47}$$

де M_1 і M_2 є цілими функціями.

Кожна ціла функція класу Лаґерра-Поліа має тільки дійсні корені або є тотожно нульовою. Тому, наш перший крок – знайти умови, за якими $T_{M_1,M_2}(\mathcal{L}-\mathcal{P})$ складається з цілих функцій, які мають усі дійсні корені або є тотожно нульовими.

Теорема 5.4.2. ([134]). Нехай M є мероморфною функцією. Тоді для кожної функції $f \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$ функція $f(z+i) + M(z)f(z-i)$ має тільки дійсні корені або є тотожно нульовою тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних двох умов:

(i) $|M(z)| < 1$ при $\Im z > 0$, і $|M(z)| > 1$ при $\Im z < 0$;
або

(ii) M є сталою функцією з $|M(z)| \equiv 1$.

Доведення. Припустимо, що для кожної $f \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$ функція $f(z+i) + M(z)f(z-i)$ має тільки дійсні корені або є тотожно нульовою, і припустимо, що $M \not\equiv const$. У протиріччя з (i) припустимо, що існує точка z_0 з $\Im z_0 > 0$, така що $|M(z_0)| \geqslant 1$, і позначимо через $w_0 := M(z_0)$ (випадок, коли $\Im z_0 < 0$ і $|M(z_0)| \leqslant 1$ розглядається аналогічно). Нехай $z_0 = \alpha + i\beta$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, і $w_0 = Re^{i\theta}$, $R \geqslant 1, \theta \in \mathbb{R}$.

Розглянемо функцію $f(z) = e^{-az^2+bz} \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$ де $a = \frac{\log R}{4\beta} \geqslant 0$ і $b = 2a\alpha + \theta/2 \in \mathbb{R}$. Легко перевірити, що $\frac{f(z_0+i)}{f(z_0-i)} = w_0$, тому рівняння $f(z+i) + M(z)f(z-i) = 0$ має недійсний корінь z_0. Оскільки функція $f(z+i) + M(z)f(z-i)$ не може мати недійсних коренів, якщо вона не є тотожно нульовою, ми робимо висновок, що

$$e^{-a(z+i)^2+b(z+i)} + M(z)e^{-a(z-i)^2+b(z-i)} \equiv 0,$$

тому $M(z) = -e^{-4iaz+2bi}$. Тепер для отримання протиріччя достатньо показати, що $a = 0$. Припустимо, це не є вірним, тобто $a \neq 0$. Тоді для функції

$f(z) = \left(z^2 - \frac{4}{e^{4a}-1}\right) e^{bz} \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$ ми маємо, що функція

$$g(z) := f(z+i) + M(z)f(z-i) = \left((z+i)^2 - \frac{4}{e^{4a}-1}\right) e^{b(z+i)} -$$

$$e^{-4iaz+2bi}\left((z-i)^2 - \frac{4}{e^{4a}-1}\right) e^{b(z-i)}$$

не є тотожно нульовою, тому вона повинна мати тільки дійсні корені за припущенням. В той же час, легко перевірити, що $g(i) = 0$. Це протиріччя доводить, що $a = 0$, тому M є сталою функцією з $|M(z)| \equiv 1$. Тобто, якщо функція $f(z+i) + M(z)f(z-i)$ належить до класу $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ для усіх $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$, то виконується (i) або (ii).

Припустимо тепер, що функція $M(z)$ задовольняє умову (i) або (ii). Зафіксуємо функцію $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$, і припустимо, всупереч умовам теореми, що для деякого $z_0 \in \mathbb{C}$ виконується наступне

$$f(z_0 + i) + M(z_0)f(z_0 - i) = 0, \tag{5.48}$$

або, еквівалентно

$$\frac{f(z_0+i)}{f(z_0-i)} = -M(z_0).$$

Оскільки функція f має представлення (4.2) (дивись розділ 4), маємо

$$\left|\frac{f(z_0+i)}{f(z_0-i)}\right| = e^{4a\mathrm{Im}\ z_0}\left|\frac{z_0+i}{z_0-i}\right|^n \prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x_k - z_0 - i}{x_k - z_0 + i}\right|.$$

Ясно, що для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ з $\Im\lambda > 0$ виконується

$$\left|\frac{f(\lambda+i)}{f(\lambda-i)}\right| \geqslant 1, \tag{5.49}$$

де нерівність є строгою, якщо f має хоча б один корінь.

Аналогічно, для $\Im\lambda < 0$

$$\left|\frac{f(\lambda+i)}{f(\lambda-i)}\right| \leqslant 1, \tag{5.50}$$

де нерівність є строгою, якщо f має хоча б один корінь.

Якщо виконується (i), то нерівності (5.49)–(5.50) демонструють, що рівність (5.48) є неможливою, якщо не виконується $z_0 \in \mathbb{R}$, і ми отримуємо протиріччя.

Припустимо тепер, що (ii) виконується, і $M(z) \equiv e^{ic}$, $c \in \mathbb{R}$. Якщо $f(z) = e^{-az^2+bz}$, $a \geqslant 0$, $b \in \mathbb{R}$, тоді функція

$$f(z+i) + M(z)f(z-i) = e^{-a(z+i)^2+b(z+i)}\left(1 + e^{i(c+4az-2b)}\right)$$

має тільки дійсні корені або є тотожно нульовою. Якщо f має хоча б один корінь, то за (5.49)–(5.50), з рівності (5.48) випливає, що $z_0 \in \mathbb{R}$. Таким чином, кожен корінь функції $f(z+i) + M(z)f(z-i)$ є дійсним, або ця функція є тотожно нульовою. $\square$

Наступна теорема дає необхідні і достатні умови на функції M_1 і M_2 для того, щоб оператор T_{M_1,M_2} зберігав клас $\mathcal{L} - \mathcal{P}$.

Теорема 5.4.3. ([134]). Нехай M_1 і M_2 є цілими функціями, які не є тотожно нульовими. Тоді для кожної функції $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$ виконується

$$M_1(z)f(z+i) + M_2(z)f(z-i) \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$$

тоді і тільки тоді, коли функції M_1 і M_2 задовольняють умови:

1) $M_1(z) = \overline{M_2(\bar{z})}$;

2) $\left|\dfrac{M_2(z)}{M_1(z)}\right| < 1$ для кожного z з $\operatorname{Im} z > 0$, або $\dfrac{M_2(z)}{M_1(z)}$ є сталою функцією з $\left|\dfrac{M_2(z)}{M_1(z)}\right| \equiv 1$;

3) Функція M_2 має представлення

$$M_2(z) = Cz^n e^{-az^2+bz} \prod_{k=1}^{\infty} G\left(\tfrac{z}{\alpha_k}, p\right) = Cz^n e^{-az^2+bz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k}}, \tag{5.51}$$

де $C, b \in \mathbb{C}$, $\Im b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a \geqslant 0$, $\alpha_k \neq 0$, $\Im \alpha_k \geqslant 0$, $p \in \{0, 1\}$, і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{|\alpha_k|^2} < \infty$.

Доведення. Спершу ми припустимо, що для кожного $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$ функція $M_1(z)f(z+i) + M_2(z)f(z-i)$ належить до $\mathcal{L} - \mathcal{P}$. Тоді функція $f(z+i) + \dfrac{M_2(z)}{M_1(z)} f(z-i)$ має усі дійсні корені або є тотожно нульовою для кожної

$f \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$. Із теореми 5.4.2, або функція $M(z) := \dfrac{M_2(z)}{M_1(z)}$ задовольняє $|M(z)| < 1$ для $\Im z > 0$ і $|M(z)| > 1$ для $\Im z < 0$, або $|M(z)| \equiv 1$, і тому виконується умова 2). З цього випливає

$$\left|\frac{M_2(x)}{M_1(x)}\right| = 1 \quad \text{для} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.52}$$

і, за принципом симетрії, ми маємо

$$M_2(\alpha) = 0 \Longrightarrow M_1(\bar{\alpha}) = 0. \tag{5.53}$$

Таким чином, спільні корені $M_1(z)$ і $M_2(z)$ є дійсними, і

$$M_2(\alpha) = 0 \Longrightarrow \Im\alpha \geqslant 0. \tag{5.54}$$

Більш того, оскільки функція $f(z) \equiv 1$ належить до класу $\mathcal{L}-\mathcal{P}$, ми маємо $M_1(z) + M_2(z) \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$ за припущенням. Тобто, $M_1(x) + M_2(x) \in \mathbb{R}$ для $x \in \mathbb{R}$, тому $\Im M_1(x) = -\Im M_2(x)$ для усіх $x \in \mathbb{R}$. Крім того, функція $f(z) = z$ належить до класу $\mathcal{L}-\mathcal{P}$ також, тому $M_1(z)(z+i)+M_2(z)(z-i) \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$ за припущенням. З цього випливає, що $i(M_1(x) - M_2(x)) \in \mathbb{R}$ для $x \in \mathbb{R}$, або, еквівалентно, $\Re M_1(x) = \Re M_2(x)$ для $x \in \mathbb{R}$. Таким чином, $M_1(x) = \overline{M_2(x)}$ для усіх $x \in \mathbb{R}$, звідки маємо $M_1(z) = \overline{M_2(\bar{z})}$ для $z \in \mathbb{C}$. Тому, умова 1) виконується.

Для доведення умови 3) ми відзначимо спершу, що з (5.53) усі спільні корені функцій $M_1(z)$ і $M_2(z)$ є дійсними. Більш того, ці корені належать до множини коренів функції $M_1(z) + M_2(z)$, яка належить до класу $\mathcal{L}-\mathcal{P}$ як ми відмітили вище. Тому ми маємо

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{Z}_M} \frac{1}{\alpha^2} < \infty, \tag{5.55}$$

де $\mathcal{Z}_M := \{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ : \ M_1(\alpha) = 0 \wedge M_2(\alpha) = 0\}$.

Більш того, оскільки $M_1(z)+M_2(z) \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$, і $M_1(z)(z+i)+M_2(z)(z-i) \in \mathcal{L}-\mathcal{P}$, функції M_1 і M_2 зростають не вище нормального типу порядку два. Функція $\dfrac{M_2(z)}{M_1(z)}$ є мероморфною функцією, яка обмежена у верхній півплощині, тобто, усі недійсні корені M_2 повинні задовольняти умову Бляшке для верхньої півплощини:

$$\sum_k \frac{\mathrm{Im}\ \alpha_k}{|\alpha_k|^2+1} < \infty \tag{5.56}$$

(дивись, наприклад, кінець глави ([140, Глава VI]) або ([161, Глава VII])).

Очевидно, що існує $\delta > 0$, таке що

$$M_2(z) = 0 \ \wedge \ z \neq 0 \Longrightarrow z \notin \{z \ : \ |\Im z| \leqslant \delta \wedge |\Re z| \leqslant \delta\}. \tag{5.57}$$

Розіб'ємо усі недійсні корені M_2 у дві групи:

$$\mathcal{Z}_1 = \{\alpha_k : \ M_2(\alpha_k) = 0 \wedge \Im \alpha_k > \delta\} \quad \text{і} \quad \mathcal{Z}_2 = \{\alpha_k : \ M_2(\alpha_k) = 0 \wedge 0 < \Im \alpha_k \leqslant \delta\},$$

тому ми маємо

$$\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_M \cup \mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2,$$

де $\mathcal{Z}$ є множиною ненульових коренів функції M_2. Із умови Бляшке (5.56) випливає, що

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{Z}_1} \frac{1}{|\alpha|^2} < \infty. \tag{5.58}$$

Тепер ми відзначимо, що із теореми Ліндельофа (дивись, наприклад, [88, Глава 2], або [139, с. 22, Задача 3]), для кожної цілої функції F цілого порядку $\rho \in \mathbb{N}$ і нормального типу сума

$$|S(r)| := \left| \sum_{\{z : f(z)=0, |z| \leqslant r, z \neq 0\}} \frac{1}{z^\rho} \right|$$

є обмеженою зверху при $r \to \infty$. Тому для функції $M_2(z)$, чиє зростання не перевищує нормального типу порядку два, існує стала $C > 0$, така що для кожного $R > 0$ виконується

$$C \geqslant \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{Z}, \ |\alpha| \leqslant R} \frac{1}{\alpha^2} \right| \geqslant \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{Z}_2, \ |\alpha| \leqslant R} \frac{1}{\alpha^2} \right| - \sum_{\alpha \in \mathcal{Z}_M, \ |\alpha| \leqslant R} \left| \frac{1}{\alpha^2} \right| - \sum_{\alpha \in \mathcal{Z}_1, \ |\alpha| \leqslant R} \left| \frac{1}{\alpha^2} \right|.$$

Ця нерівність разом з (5.55) і (5.58) дає існування константи $K > 0$, такої що

$$K \geqslant \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{Z}_2, \ |\alpha| \leqslant R} \frac{1}{\alpha^2} \right| \geqslant \mathrm{Re} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{Z}_2, \ |\alpha| \leqslant R} \frac{1}{\alpha^2} \right)$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathcal{Z}_2,\ |\alpha|\leqslant R} \frac{(\mathrm{Re}\ \alpha)^2 - (\mathrm{Im}\ \alpha)^2}{|\alpha|^4} \geqslant 0$$

для кожного $R > 0$ (ми взяли до уваги (5.57)). Тому ми маємо

$$K \geqslant \sum_{\alpha\in\mathcal{Z}_2,\ |\alpha|\leqslant R} \frac{(\mathrm{Re}\ \alpha)^2 - (\mathrm{Im}\ \alpha)^2}{|\alpha|^4} \geqslant \sum_{\alpha\in\mathcal{Z}_2,\ |\alpha|\leqslant R} \frac{|\alpha|^2 - 2\delta^2}{|\alpha|^4}$$

Оскільки порядок функції M_2 не перевершує 2, ми маємо $\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{Z}_2} \frac{1}{|\alpha|^4} < \infty$, тому із останньої нерівності випливає

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{Z}_2} \frac{1}{|\alpha|^2} < \infty. \tag{5.59}$$

Користуючись (5.55), (5.58) і (5.59), ми маємо

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{Z}} \frac{1}{|\alpha|^2} < \infty.$$

Тому, із факторизаційної теореми Адамара (дивись [88, глава II], або [30, с. 22]), функція M_2 може бути представленою у вигляді

$$M_2(z) = Cz^n e^{az^2+bz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k}}, \tag{5.60}$$

де $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $C, a, b \in \mathbb{C}$, $\alpha_k \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\Im\alpha_k \geqslant 0$, і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|^2} < \infty$. Оскільки $M_1(z) = \overline{M_2(\bar z)},\ z \in \mathbb{C}$, ми маємо

$$M_1(z) = \overline{C} z^n e^{\bar a z^2+\bar b z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\overline{\alpha_k}}\right) e^{\frac{z}{\overline{\alpha_k}}}. \tag{5.61}$$

Нехай M є цілою функцією, такою що

$$M_2(z) = e^{az^2} M(z), \qquad M_1(z) = e^{\bar a z^2}\ \overline{M(\bar z)}.$$

Тоді з умови 2) введеної вище, ми маємо

$$\left|\frac{M_2(z)}{M_1(z)}\right| = e^{-4(\Im a)(\Re z)(\Im z)} \left|\frac{M(z)}{\overline{M(\bar z)}}\right| \leqslant 1, \quad \text{коли } \Im z > 0. \tag{5.62}$$

З формул (5.60)–(5.61) випливає, що рід мероморфної функції $\dfrac{M(z)}{\overline{M(\bar z)}}$ не перевищує 1, тому нерівність (5.62) може виконуватись, тільки якщо

$$\mathrm{Im}\ a = 0. \tag{5.63}$$

Насправді, якщо $\Im a > 0$ ($\Im a < 0$), то для $\Re z = \Im z$ (відповідно, $\Re z = -\Im z$), $\left|\frac{M_2(z)}{M_1(z)}\right| > 1$ як тільки $|z|$ є достатньо великим. Тобто,

$$M_2(z) = e^{az^2}M(z),\ M_1(z) = e^{az^2}\ \overline{M(\bar{z})},\ a \in \mathbb{R},$$

де M є цілою функцією, чиє зростання не перевищує мінімального типу порядку два. Оскільки $1 \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$, ми маємо

$$M_1(z) + M_2(z) = e^{az^2}(M(z) + \overline{M(\bar{z})}) \in \mathcal{L} - \mathcal{P},$$

де зростання $M(z) + \overline{M(\bar{z})}$ не перевищує мінімального типу порядку два. Використовуючи представлення для цілої функції класу Лаґерра-Поліа, ми робимо висновок, що це є можливим тільки якщо $a \leqslant 0$. Таким чином, якщо оператор (5.47) зберігає клас $\mathcal{L} - \mathcal{P}$, то умови 1)–3) виконуються для його коефіцієнтів $M_1(z)$ і $M_2(z)$.

Тепер припустимо, що умови 1)–3) виконуються для оператору (5.47). Розглянемо довільну цілу функцію $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$. Умова 2) забезпечує всі припущення теореми 5.4.2 для функції $\frac{M_2}{M_1}$. Тобто, функція $f(z + i) + \frac{M_2(z)}{M_1(z)} f(z - i)$ має усі дійсні корені або є тотожно нульовою. З умови 1) випливає, що функція $M_1(x)f(x + i) + M_2(x)f(x - i)$ є дійсною для усіх $x \in \mathbb{R}$. А умова 3) дає нам необхідну оцінку на зростання цієї функції. Таким чином,

$$M_1(z)f(z + i) + M_2(z)f(z - i) \in \mathcal{L} - \mathcal{P},$$

як і потрібно. □

В роботі [134] отримана ще така теорема.

Теорема 5.4.4. ([134]). Нехай M_1 і M_2 є двома ненульовими цілими функціями. Тоді оператор (5.46) зберігає клас $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ тоді і тільки тоді, коли $\Re h = 0$ і функції M_1 і M_2 задовольняють умови

1. $M_1(z) = \overline{M_2(\bar{z})},\ z \in \mathbb{C}.$

2. Функція M_2 має представлення

$$M_2(z) = Cz^n e^{-az^2+bz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{x_k}\right) e^{\frac{z}{x_k}}, \qquad (5.64)$$

де $\Im\alpha_k > 0$, $x_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(|\alpha_k|^{-2} + x_k^{-2}\right) < \infty$, $a \geqslant 0$, C, $b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, і

$$\Im b \geqslant 0, \quad \text{якщо} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|} < \infty, \qquad (5.65)$$

або

$$\left(\Im b - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Im\alpha_k}{|\alpha_k|^2}\right) \geqslant 0, \quad \text{якщо} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|} = \infty. \qquad (5.66)$$

Цей же результат, сформульований для многочленів, має наступний вигляд.

Твердження 5.4.5. ([134]). Нехай M_1 і M_2 є многочлени, які не дорівнюють тотожно нулю. Тоді для кожного многочлена $p \in \mathbb{R}[x]$ з усіма дійсними коренями многочлен

$$M_1(z)p(z+h) + M_2(z)p(z-h)$$

має тільки дійсні корені тоді і тільки тоді, коли $\Re h = 0$, і або $\left|\dfrac{M_1(z)}{M_2(z)}\right| \equiv 1$, або $M_1(z) = e^{i\theta} \cdot \overline{M_2(\bar{z})}$, $\theta \in [0, 2\pi)$, і усі корені многочлена M_2 розташовані в півплощині $\Im h \cdot \Im z \geqslant 0$.

Ми нагадуємо, що многочлени з усіма коренями в замкненій верхній (або нижній) півплощині називаються многочленами класу квазі-Ерміта-Білера [98, 28] (дивись також [154], або [161, глава VII]) по аналогії з квазістійкими многочленами, корені яких розташовані в замкненій лівій півплощині.

Ми дослідили необхідні і достатні умови для того, щоб оператор (5.46) зберігав клас Лаґерра-Поліа цілих функцій $\mathcal{L} - \mathcal{P}$. Це може допомогти дослідити, що дана ціла функція належить до $\mathcal{L} - \mathcal{P}$, якщо ми отримали цю функцію як результат дії оператора (5.46) на функцію класу $\mathcal{L} - \mathcal{P}$.

Висновки до розділу 5

В цьому розділі ми ввели дві поширені міри відділення коренів дійсних многочленів (меш і логарифмічний меш), навели приклади важливих диференціальних операторів, які не зменшують меш гіперболічного многочлена, ввели поняття послідовності множників скінченої довжини і навели критерій того, що дана скінчена послідовність є послідовністю множників. Крім того, ми ввели знамениту згортку Шура-Сеге для многочленів і обговорили її властивості. Далі ми навели визначення знаконезалежно гіперболічного многочлена і знайшли достатні умови знаконезалежної гіперболічності. Крім того, ми розглянули деякі скінчено різничні лінійні оператори і дали відповідь на питання, при яких умовах ці оператори зберігають клас Лаґерра-Поліа.

До основних результатів розділу відносяться:

- Теорема 5.1.8, яка стверджує, що логарифмічний меш згортки Шура-Сеге двох гіперболічних многочленів з додатними коефіцієнтами не є меншим за максимум з логарифмічних мешей цих многочленів.
- Теорема 5.2.2, яка дає достатню умову для того, щоб даний многочлен з додатними коефіцієнтами мав меш, який не є меншим за задане наперед число.
- Теорема 5.2.3, яка дає достатню умову для того, щоб даний многочлен з додатними коефіцієнтами мав логарифмічний меш, який не є меншим за задане наперед число.
- Теорема 5.2.5, яка дає достатню умову для знаконезалежної гіперболічності дійсного многочлена.
- Теореми 5.3.3 і 5.3.5, які дають повний опис лінійних скінченорізничних операторів зі сталими коефіцієнтами, які зберігають множину гіперболічних многочленів, і які зберігають множину многочленів з коренями у смузі.

– Теорема 5.3.8, яка доводить, що корені образу центрально-різничного лінійного оператора від цілої функціях класу Лаґерра-Поліа є дійсними і простими.

– Теорема 5.3.9, яка дає оцінку найбільшого і найменшого кореня образу гіперболічного многочлена під дією центрально-різничного лінійного оператора.

– Теорема 5.3.15, яка дає оцінку знизу на меш образу гіперболічного многочлена під дією центрально-різничного лінійного оператора.

– Теорема 5.3.18, яка дає асимптотику коренів образу довільного комплексного многочлена під дією центрально-різничного лінійного оператора, коли величина зсуву прямує до нескінченості.

– Теореми 5.4.2 і 5.4.3, які дають повний опис лінійних скінченорізничних операторів з цілими коефіцієнтами, які зберігають клас цілих функцій Лаґерра-Поліа $\mathcal{L} - \mathcal{P}$.

ВИСНОВКИ ДО ДИСЕРТАЦІЇ

В дисертаційній роботі побудовано нову теорію і знайдено нові методи дослідження зв'язків розташування коренів многочленів і цілих функцій з властивостями коефіцієнтів цих функцій, а також отримані описи і досліджено властивості лінійних операторів, які зберігають гіперболічність, стійкість і позитивність.

В дисертаційній роботі отримано нову достатню умову для кратної позитивності і для тотальної позитивності матриць з додатними елементами заданого розміру, а також доведено, що ця умова є точною для кожного фіксованого розміру матриць (а також точною в класі нескінчених матриць) як в класі ганкелевих матриць з додатними елементами, так і в класі тепліцевих матриць з додатними елементами. В роботі наведені деякі застосування цієї достатньої умови: отримані нові достатні умови для того, щоб додатна послідовність була частотною послідовністю Поліа, для того, щоб твірна функція додатної послідовності не мала коренів в заданому куті; отримано нову достатню умову для додатної послідовності, щоб вона була моментною послідовністю Гамбургера; а також отримано нову достатню умову додатності на всій дійсній осі многочлена з додатними коефіцієнтами.

В дисертації досліджується множина стійких многочленів і множина цілих функції з усіма коренями в лівій півплощині. Зокрема, отримано нову зручну достатню умову стійкості комплексних многочленів, і достатню умову розташування усіх коренів цілих функцій у відкритій лівій півплощині, а також перевірено, що отримані умови не можуть бути покращеними. В дисертаційній роботі знайдено необхідні і достатні умови для того, щоб важлива спеціальна функція: часткова тета-функція, – мала стійкі відрізки ряду Тейлора, а також мала усі корені у відкритій лівій півплощині.

В роботі досліджуються властивості многочленів з додатними коефіцієнтами, які є додатними на всій дійсній осі. Зокрема, знайдено повний опис крайніх напрямків конусу многочленів з додатними коефіцієнтами, які є невід'ємними на дійсній осі і мають степінь не більшу за дане число. Крім того, знайдено повний опис діагональних в стандартному мономіальному базисі лінійних операторів, які зберігають вказаний конус, а також знайдено найменший можливий порядок нескалярного лінійного диференціального оператора з поліноміальними коефіцієнтами, який зберігає вказаний конус. В роботі також досліджуються деякі інші види лінійних операторів, які зберігають вказаний конус.

В дисертації досліджуються нульові множини цілих абсолютно монотонних функцій, тобто цілих перетворень Лапласа скінченних додатних борелевських мір на додатній півосі. В роботі отримано характеризацію нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, якщо ці множини не перетинають деякий кут $\{z : |\arg z - \pi| < \alpha\}$ для $\alpha > 0$, крім того, знайдено нову необхідну умову для тих частин нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій, які розташовані у вказаному куті. В роботі також отримано неперервний аналог відомої теореми М. Фекете і Дж. Поліа про домноження додатного многочлена на експоненту.

В дисертаційній роботі досліджується важлива спеціальна ціла функція, а саме часткова тета-функція і її відрізки ряду Тейлора. Вперше знайдено, при яких значеннях параметру часткова тета-функція, а також її відрізки ряду Тейлора належать до класу Лаґерра-Поліа (тобто при яких значеннях параметру ця функція і її відрізки мають усі дійсні корені). Досліджується належність до класу Лаґерра-Поліа низки інших важливих спеціальних цілих функцій і їх відрізків ряду Тейлора, а також вивчається клас цілих функцій з додатними коефіцієнтами, для яких усі відрізки ряду Тейлора мають тільки дійсні корені. Крім того, в роботі знайдена нова характеризація класу Лаґерра-Поліа: доведено, що узагальнені нерівності Лаґерра, так само, як і комплексні нерівності Лаґерра, є необхідними і достатніми умовами належності цілої функції до класу Лаґерра-Поліа. В роботі також застосовано розроблені методи для оцінки числа дійсних коренів спеціальних квазімногочленов і для оцінки локального модуля опуклості банахової алгебри в одиниці.

В дисертації вивчаються важливі і поширені міри відділення коренів гіперболічних многочленів: меш і логарифмічний меш. Отримані точні оцінки для мешу гіперболічного многочлена і логарифмічного мешу гіперболічного многочлена з додатними коефіцієнтами через коефіцієнти многочлену. В роботі доведено, що логарифмічний меш згортки Шура-Сеге двох гіперболічних многочленів не є меншим за максимум логарифмічних мешів многочленів. Крім того, отримано точну оцінку знизу на меш образу гіперболічного многочлена під дією центрально-різничного лінійного оператора зі сталими коефіцієнтами.

В роботі вивчаються лінійні скінченно-різничні оператори, а також образ множини гіперболічних многочленів під дією таких операторів. В дисертації отримано повний опис лінійних скінчено-різничних операторів зі сталими коефіцієнтами, які зберігають множину гіперболічних многочленів, а також повний опис таких операторів, які зберігають множину многочленів з коренями у заданій смузі. В роботі доведені важливі властивості коренів образу центрально-різничного лінійного оператора від гіперболічного многочлену і цілої функції класу Лаґерра-Поліа, такі як простота коренів і мінімальний можливий меш образу. Отримано також повний опис лінійних скінчено-різничних операторів, коефіцієнти яких є цілими функціями, що вони зберігають клас цілих функцій Лаґерра-Поліа.

Усі основні результати дисертації наведені з повними і строгими математичними доведеннями. Отримані результати носять теоретичний характер. Вони поглиблюють наші знання про зв'язок розподілу і розташування коренів комплексних многочленів і цілих функцій з властивостями коефіцієнтів цих функцій, про властивості функцій класів Лаґерра-Поліа і класу Лаґерра-Поліа типу I, і про описи цих класів, а також про лінійні оператори, які зберігають гіперболічність, стійкість або позитивність многочленів.

Результати і методи дисертаційної роботи можуть бути використаними в різноманітних математичних областях, у яких важливо отримати точну інформацію щодо розташування коренів многочленів або цілих функцій, таких як дійсний аналіз, теорія функцій комплексної змінної, диференціальні рівняння, лінійна алгебра, функціональний аналіз і багато інших.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гольдберг А.А. Распределение значений мероморфных функций / А.А.Гольдберг и И.В.Островский // Москва. – Наука. – 1970. – 591 с.

2. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри: підручник для студентів вищих навчальних закладів / В.М. Кадець. – пер. з рос. Я.С. Магола, І.Е. Чижиков, за наук. ред. О.Б. Скасківа. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. (Серія "Університетська бібліотека").

3. Костов В.П. О кратных нулях частичной тэта-функции / В.П.Костов // Функц. анализ и его прил. – 2016. – Т. 50, N 2. – С. 84–88.

4. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций / Б.Я.Левин // Государственное издательство технико- теоретической литературы. – Москва. – 1956. –632 с.

5. Постников М.М. Устойчивые многочлены / М.М.Постников // Москва. – Наука. – 1981. – 175 с.

6. Прасолов В.В. Многочлены / В.В.Прасолов // Москва. – МЦНМО. – 2003. – 335 с.

7. Фаддеев Д.К. Сборник задач по высшей алгебре / Д.К. Фаддеев и И.С.Соминский // Москва. – Наука. – 1964. – 304 с.

8. Adm M. Invariance of Total Nonnegativity of a Matrix under Entry-wise Perturbation and Subdirect Sum of Totally Nonnegative Matrices / Mohammad Adm and J urgen Garloff // Linear Algebra and Its Applications. – 2017. – Vol. 514. – P. 222–233.

9. Adm M. Total nonnegativity of finite Hurwitz matrices and root location of polynomials / Mohammad Adm, Jürgen Garloff and Mikhail Tyaglov // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2018. – Vol. 467, N 1. – P. 148–170.

10. Aguirre-Hernández B. Open Problems Related to the Hurwitz Stability of Polynomials Segments / Baltazar Aguirre-Hernández, Faustino Ricardo García-Sosa, Carlos Arturo Loredo-Villalobos, Raúl Villafuerte-Segura, and Eric Campos-Cantón // Mathematical Problems in Engineering. – 2018. – Vol. 2018. – P. 1–8.

11. Aissen M. On the Generating Functions of Totally Positive Sequences / M. Aissen, A. Edrei, I.J. Schoenberg, A. Whitney // J. Anal. Math. – 1952.– Vol.2. – P. 93–109.

12. Akhiezer N. I. The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis / N. I.Akhiezer. – translated from the Russian by N. Kemmer. – Hafner Publishing Co., New York, 1965.

13. Akhiezer N. I. Some questions in the theory of moments / N.I.Akhiezer and M.G.Krein. –Providence, R.I.: American Mathematical Society MR, 1962.

14. Alzugaray M. T. On the Proximate Order of Growth of Generating Functions of Pólya Frequency Sequences / M. T. Alzugaray // Computational Methods and Function Theory. – 2001. – Vol. 1, N 2. – P. 433–455

15. Ando T. Totally Positive Matrices / T. Ando // Linear Algebra Appl. – 1987. – Vol. 90. – P. 165–219.

16. Andrews G. E. Ramanujan's "lost"notebook I. Partial θ-functions / G. E. Andrews // Adv. Math. – 1981. – Vol. 41. – P. 137–172.

17. Andrews G. E. Ramanujan's "lost"notebook II. θ-function expansions / G. E. Andrews // Adv. Math. – 1981. – Vol. 41. – P. 173–185.

18. Asner B.A., Jr. On the Total Nonnegativity of the Hurwitz Matrix / Bernard A. Asner, Jr. // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1970. – Vol. 18, N 2. – P. 407–414.

19. Baricz A. Zeros of some special entire functions / Árpád Baricz and Sanjeev Singh // Proc. Amer. Math. Soc. – 2018. – Vol. 146. – P. 2207–2216.

20. Barvinok A. Approximating real-rooted and stable polynomials, with combinatorial applications / Alexander Barvinok // arXiv.org > math > arXiv:1806.07404

21. Batra P. Componentwise Products of Totally Non-Negative Matrices Generated by Functions in the Laguerre–Pólya Class / P. Batra // In N. Bebiano, editor, Applied and Computational Matrix Analysis: MAT-TRIAD, Coimbra, Portugal, September 2015 Selected, Revised Contributions, P. 151–163. Springer International Publishing, 2017.

22. Behrends E. A note on l^p-norms / Ehrhard Behrends, Olga Katkova and Anna Vishnyakova // Archiv der Mathematik. – 2001. – Vol. 76, N 1. – P. 67–72

23. Beraha S. Ph.D. thesis / S.Beraha . – Baltimore, MD: Johns Hopkins University, 1974.

24. Bergweiler W. Proof of a conjecture of Pólya on the zeros of successive derivatives of real entire functions / W. Bergweiler and A. Eremenko // Acta math. – 2006. – Vol. 197. – P. 145–166.

25. Bergweiler W. Real entire functions of infinite order and a conjecture of Wiman / W. Bergweiler, A. Eremenko and J. Langley // Geom. Func. Anal. – 2003. – Vol. 13. – P. 975–991.

26. Bernstein F. Über Irrationalität unendlicher Kettenbrüche mit einer Anwendung auf die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu^2} x^{\nu}$ / F. Bernstein and O. Szász // Math. Ann. – 1915. – Vol. 76. – P. 295–300.

27. Bernstein S.N. Sur les fonctions absolument monotones / S.N.Bernstein // Acta math. – 1928. – Vol. 52. – P. 1–66.

28. Biehler M. Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles / M.Biehler // J. Reine Angew. Math. – 1879. – Vol. 87. – P. 350–352.

29. Bisgaard T.M. On the positive definiteness of certain functions / T.M. Bisgaard and Z. Sasvari // Math. Machr. – 1997. – Vol. 186. – P. 81–99.

30. Boas R. P., Jr. Entire Functions / R. P. Boas, Jr. // Academic Press, New York, 1954.

31. Bohdanov A. On necessary and sufficient conditions for a function to belong to the Laguerre-Pólya class / Anton Bohdanov and Anna Vishnyakova // III International Conference ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS : International Conference, June 15–19, 2015 : abstracts. – B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine, 2015. – P. 18, `http://www.ilt.kharkov.ua/amph2015/`

32. Bohdanov A. Determining Bounds on the Values of Parameters for a Function $\varphi_a(z,m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^{k^2}}(k!)^m$, $m \in (0,1)$, to Belong to the Laguerre-Pólya Class / A. Bohdanov // Comput. Methods Funct. Theory. – 2018. – Vol. 18, N 1. – P. 35–51, DOI: 10.1007/s40315-017-0210-6.

33. Bohdanov A. On the conditions for an entire function $\varphi_{a,m}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^{k^2}}(k!)^m$, $a > 1, m > 1$ to belong to the Laguerre-Pólya class / Anton Bohdanov and Anna Vishnyakova // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2018. – Vol. 434, N 2. – P. 1740–1752, DOI:10.1016/j.jmaa.2015.09.084.

34. Bonsall F. F. and Duncan J., Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras / F. F. Bonsall and J. Duncan // London Math. Soc. Lecture Note Series. – 2. – Cambridge, 1971.

35. de Boor C. The approximation of a totally positive band matrix by a strictly totally positive one / C. de Boor, A. Pinkus // Linear Algebra Appl. – 1982. – Vol. 42. – P. 81–98.

36. Borcea J. Pólya-Schur-Lax problems: hyperbolicity and stability preservers / Borcea J., Brändén P., Csordas G., Vinnikov V. // http://www.aimath.org/pastworkshops/polyaschurlax.html

37. Borcea J. Pólya-Schur master theorems for circular domains and their boundaries / J. Borcea and P. Brändén // Ann. of Math. – 2009. – Vol. 170, N 1. – P. 465–492.

38. Borcea J. The Lee-Yang and Pólya-Schur programs. I. Linear operators preserving stability / J. Borcea and P. Brändén // Invent. Math. – 2009. – Vol. 177, N 3. – P. 541–569.

39. Borcea J. The Lee-Yang and Pólya-Schur programs. II. Theory of stable polynomials and applications / J. Borcea and P. Brändén // Comm. Pure Appl. Math. – 2009. – Vol. 62, N 12. – P. 1595–1631.

40. Borcea J. The Lee-Yang and Pólya-Schur programs. III. Zero-preservers on Bargmann-Fock spaces / J. Borcea and P. Brändén // American Journal of Mathematics. – 2014. – Vol. 136, N 1. – P. 241–253.

41. Brändén P. Iterated sequences and the geometry of zeros / P. Brändén // Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal). – 2011. – Vol. 658. – P. 115–131.

42. Brändén P. Hyperbolic polynomials and the Kadison-Singer problem / P. Brändén // arXiv.org > math > arXiv:1809.03255

43. Brändén P. Classification theorems for operators preserving zeros in a strip / P. Brändén and M. Chasse // J. Anal. Math. – 2017. – Vol. 132, N 1. – P. 177–215.

44. Brändén P. Symmetric decompositions and real-rootedness / P. Brändén, Liam Solus // arXiv.org > math > arXiv:1808.04141

45. Borcea J. Hyperbolic polynomials and spectral order / J. Borcea and B. Shapiro // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. – 2003. – Vol. 337, N 11. – P. 693–698.

46. Brändén P. Elements of Pólya-Schur theory in finite difference settings / P. Brändén, I. Krasikov, and B. Shapiro // Proc AMS. – 2016. – Vol. 144, N 11. – P. 4831–4843.

47. de Bruijn N.G. The roots of trigonometric integrals / N. G. de Bruijn // Duke Math. J. – 1950. – Vol. 17, N 3. – P. 197–226. DOI: 10.1215/S0012-7094-50-01720-0. http://projecteuclid.org/euclid.dmj/1077476111.

48. Cardon D.A. Extended Laguerre inequalities and a criterion for real zeros / D. A. Cardon // Progress in Analysis and its Applications, Proceedings of the 7th International Isaac Conference. – 2009. – P. 143–149.

49. Cardon D.A. Complex zero strip descreasing operators / D. A. Cardon // J. Math. Anal. Appl. – 2015. – Vol. 426, N 1. – P. 406–422.

50. Carnicer J.M. On some Zero-Increasing Operators / J. M. Carnicer, J. M. Pena and A. Pinkus // Acta Math. Hungar. – 2002. – Vol. 94. – P. 173–190.

51. Chaiya S. On the Distance to a Root of Polynomials / Somjate Chaiya // Abstract and Applied Analysis. – 2011. – Vol. 2011. – P. 1–6.

52. Csordas G. Fourier Transforms of Positive Definite Kernels and the Riemann ζ-Function / G. Csordas // Computational Methods and Function Theory. – 2015. – Vol. 15, N 3. – P. 373–391.

53. Craven T. Multiplier sequences for fields / T. Craven and G. Csordas // Illinois J. Math. – 1977. – Vol. 21, N 4. – P. 801–817.

54. Craven T. A sufficient condition for strict total positivity of a matrix / T. Craven and G. Csordas // Linear and Multilinear Algebra. – 1998. – Vol. 45. – P. 19–34.

55. Craven T. Problems and theorems in the theory of multiplier sequences / T. Craven, G. Csordas // Serdica Math. J. – 1996. – Vol. 22. – P. 515–524.

56. Craven T. Complex zero decreasing sequences / T. Craven and G. Csordas // Methods Appl. Anal. – 1995. – Vol 2, N 4. – P. 420–441.

57. Craven T. Iterated Laguerre and Turán inequalities / T. Craven and G. Csordas // J. Inequal. Pure Appl. Math. – 2002. – Vol. 3, N 39. – 14 pp (electronic).

58. Craven T. Composition theorems, multiplier sequences and complex zero decreasing sequences / T. Craven and G. Csordas // Value distribution theory and related topics, Adv. Complex Anal. Appl. – 2004. – Vol. 3, Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, P. 131–166.

59. Craven T. Karlin's conjecture and a question of Pólya / T. Craven and G. Csordas // Rocky Mountain J. Math. – 2005. – Vol. 35, N 1. – P. 61–82.

60. Craven T. Zeros of derivatives of entire functions / T.Craven, G. Csordas and W. Smith // Proc. Amer. Math. Soc. – 1987. – Vol. 101. – P. 323–326.

61. Csordas G. Multiplier sequences, classes of generalized Bessel functions and open problems / G. Csordas and T. Forgács // J. Math. Anal. Appl. – 2016. – Vol. 433. – P. 1369–1389.

62. Csordas G. Integral transforms and the Laguerre-Pólya class / G. Csordas and R. Varga // Complex Variables Theory Appl. – 1989. – Vol. 12, N 1–4. – P. 211–230.

63. Csordas G. Jensen polynomials with applications to the Riemann ζ-function / G. Csordas, R. Varga, and I. Vincze // J. Math. Anal. Appl. – 1990. – Vol. 153, N 1. – P. 112–135.

64. Csordas G. Necessary and sufficient conditions and the Riemann Hypothesis / G. Csordas, R. Varga // Adv. in Appl. Math. – 1990. – Vol. 11, N 3. – P. 328–357.

65. Csordas G. The generalized Laguerre inequalities and functions in the Laguerre-Pólya class / George Csordas and Anna Vishnyakova. – Cent. Eur. J. Math. – 2013. – Vol. 11, N 9. – P. 1643–1650. DOI: 10.2478/s11533-013-0269-x

66. Dehmer M. Location of Zeros of Wiener and Distance Polynomials / M. Dehmer, A. Ilić // PLoS ONE. – 2012. – Vol. 7, N 3: e28328. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0028328

67. Diamond H.G. Functions with non-negative convolutions / H.G. Diamond, M. Essén // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1978. – Vol. 63, N 2. – P. 463–489.

68. Dilcher K. On a class of nonlinear operators acting on polynomials / K. Dilcher, K.B. Stolarsky // J. Math. Anal. Appl. – 1992. – Vol. 170, N 2. – P. 382–400.

69. Dimitrov D.K. Almost strict total positivity and a class of Hurwitz polynomials / D.K. Dimitrov, J.M. Peña // J. Approx. Theory. – 2005. – Vol. 132, N 2. – P. 212–223.

70. Dujella A. Root separation for reducible monic polynomials of odd degree / Andrej Dujella and Tomislav Pejković // Matematicke znanosti. – 2017. – Vol. 21, N 532. – P. 21–27.

71. Dyachenko Total nonnegativity of infite Hurwitz matrices of entire and meromorphic functions / A. Dyachenko // Complex Anal. Oper. Theory. – 2014. – Vol. 8, N 5. – P. 1097–1127.

72. Eisenstein G. Théorèmes sur les formes cubiques, et solutiou d'une equation du quatrième degré à quatre indéterminées / G. Eisenstein. – J. Reine Angew. Math. – 1844. – Vol. 27. – P. 75–79.

73. Eisenstein G. Transformations remarquables de quelques séries / G. Eisenstein. – J. Reine Angew. Math. – 1844. – Vol. 27. – P. 193–197.

74. Fallatat Sh.M. Hadamard powers and totally positive matrices / Sh.M.Fallatat and Ch.R.Johnson // Linear Algebra and its Applications. – 2007. – Vol. 423, N 2–3. – P. 420–427.

75. Fallatat Sh.M. Totally Nonnegative Matrices / Sh.M.Fallatat, Ch.R.Johnson // Hardcover. – 2011. – 264 p.

76. Fallatat Sh.M. Total positivity of sums, Hadamard products and Hadamard powers: Results and counterexamples / Shaun Fallat, Charles R. Johnson, Alan D. Sokal // Linear Algebra and Its Applications. – 2017. – Vol. 520. – P. 242–259.

77. Farmer D.W. Differentiation evens out zero spacings / David W. Farmer and Robert C. Rhoades // Trans. Amer. Math. Soc. – 2005. – Vol. 357, N 9. – P. 3789–3811.

78. Fekete M. Über ein Problem von Laguerre / M. Fekete, G. Pólya // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1912. – Vol. 34. – P. 89–120.

79. Fiedler M. A new look at totally positive matrices / Fiedler, Miroslav // Czechoslovak Mathematical Journal. – 2016. – Vol. 66, N 3. – P. 597–602.

80. Fisk S. Polynomials, roots, and interlacing / S. Fisk // arXiv:math/0612833.

81. Flores R. On the growth of Artin–Tits monoids and the partial theta function / Ramón Flores, Juan González-Meneses // arXiv:math/1808.03066

82. Fomin S. Total positivity: tests and parametrizations / S. Fomin, A. Zelevinsky // Math. Intelligencer. – 2000. – Vol 22, N 1. – P. 23–33.

83. Forsgård J. A tropical analog of Descartes' rule of signs / J. Forsgård, D. Novikov, B. Shapiro. – arXiv:1510.03257.

84. Gantmacher F.R. The theory of matrices / F.R. Gantmacher // Vol. II, Chelsea Publ., New York, 1959.

85. Garloff J. Intervals of almost totally positive matrices / J urgen Garloff // Linear Algebra and its Applications. – 2003. – Vol. 363, N 1. – P. 103–108.

86. Gelca R. A short proof of a result on polynomials / Răzvan Gelca // Amer. Math. Monthly. – 1993. – Vol. 100, N 10. – P. 936-937.

87. Girsanov I. V. Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems / I. V. Girsanov // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 67, Edited by B.T. Poljak, translated from the Russian by D. Louvish, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

88. Goldberg A. A. Value distribution of meromorphic functions / A.A. Goldberg and I.V. Ostrovskii // Transl. Math. Mono. Vol. 236, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008

89. Golitsyna M. Analytic closure of sets of real hyperbolic polynomials with separated roots / Mayya Golitsyna // European Journal of Mathematics. – 2015. – Vol. 1, N 3. – P. 641–653.

90. Golitsyna M. On the Pochhammer transformation and hyperbolic polynomials decomposed in the Pochhammer basis / M.Golitsyna and I.Karpenko // Journal of Difference Equations and Applications. – 2016. – Vol. 22, N 12. – P. 1871–1879.

91. Guterman A. On linear operators preserving the set of positive polynomials / A.Guterman, B.Shapiro // JFPTA. – 2008. – Vol. 3, N 2. – P. 411–429.

92. Guterman A. A note on positivity preserveres // A.Guterman, B.Shapiro // Math. Res. Lett. – 2008. – P. 15.

93. Hamburger H. Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems / H.Hamburger // 1920. – Parts I, II, III, Math. Ann. Vol. 81. – P. 235–319; ibid. Vol. 82 (1921). – P. 20–164, 168–187.

94. Hardy G.H. On the zeros of a class of integral functions / G. H. Hardy // Messenger of Math. – 1904. – Vol. 34. – P. 97–101.

95. Hardy G.H. Collected Papers of G. H. Hardy / G. H. Hardy. – Vol. IV, Oxford Clarendon Press 1969.

96. Harmand P. An Intersection Property of Balls and Relations with M-Ideals / P. Harmand and T. S. S. R. K. Rao // Math. Z. – 1988. – Vol. 197. – P. 277–290.

97. Heine E. Über die Reihe $1+\frac{(q^{\alpha}-1)(q^{\beta}-1)}{(q-1)(q^{\gamma}-1)}x+\frac{(q^{\alpha}-1)(q^{\alpha+1}-1)(q^{\beta}-1)(q^{\beta+1}-1)}{(q-1)(q^{2}-1)(q^{\gamma}-1)(q^{\gamma+1}-1)}x^{2}+\ldots$ / E. Heine // J. Reine Angew. Math. – 1846. – Vol. 32. – P. 210–212.

98. Hermite C. Sur les nombre des racines d'une équation algébrique comprise entre des limites données / C. Hermite // J. Reine Angew. Math. – 1856. – Vol. 52. – P. 39–51.

99. Hirschman I. The Convolution Transform / I. Hirschman and D. Widder // Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1955.

100. Holtz O. Hermite-Biehler, Routh-Hurwitz, and total positivity / O. Holtz // Linear Algebra Appl. – 2003. – Vol. 372. – P. 105–110.

101. Holtz O. Structured matrices, continued fractions, and root localization of polynomials / O. Holtz and M. Tyaglov // SIAM Rev. – 2012. – Vol. 54, N 3. – P. 421–509.

102. Hu S. Asymptotics of partial theta functions with a Dirichlet character / Su Hu, Min-Soo Kim // arXiv.org > math > arXiv:1708.08566

103. Hurwitz A Über definite Polynome / A.Hurwitz // Math. Ann. – 1913. – Vol. 73. – P. 173—176.

104. Hurwitz A. Theory of Functions / A. Hurwitz, R. Courant // Springer Verlag, Berlin 1925 (in German).

105. Hutchinson J.I. On a remarkable class of entire functions / J. I. Hutchinson // Trans. Amer. Math. Soc. – 1923. – Vol. 25. – P. 325–332.

106. Jeffreys H. Mean-Value Theorems / H. Jeffreys and B.S. Jeffreys // § 1.13 in Methods of Mathematical Physics, 3rd ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, P. 49-50, 1988.

107. Jensen J. L. W. V. Recherches sur la théorie des équations / J. L. W. V. Jensen // Acta Math. – 1913. – Vol. 36. – P. 181–195.

108. Jo S. On asymptotic formulas for certain q-series involving partial theta functions / S. Jo and B. Kim // Proc. Amer. Math. Soc. – 2015. – Vol. 143. – P. 3253–3263.

109. Kamynin I.P. Zero sets of entire Hermitian-positive functions / I.P. Kamynin, I.V. Ostrovskii // Siberian Math. J. – 1982. – Vol. 23. – P. 344-357.

110. Kadets V. Convexity around the unit of a Banach algebra / Vladimir Kadets, Olga Katkova, Miguel Martin and Anna Vishnyakova // Serdica Math. J. – 2008. – Vol. 34. – P. 619–628.

111. Karlin S. Total Positivity / S. Karlin // Vol. I, Stanford University Press, California 1968.

112. Karp D.B. Positivity of Toeplitz determinants formed by rising factorial series and properties of related polynomials / D. B. Karp // Journal of Mathematical Sciences. – 2013. – Vol. 193, N 1. – P. 106–114.

113. Katkova O.M. The zero sets of entire generating functions of the Pólya frequency sequences of finite order / O.M.Katkova, I.V.Ostrovskii // Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR. – 1988. – Vol 1. – P. 13–15.

114. Katkova O.M. On the zero sets of entire generating functions of the Pólya frequency sequences of finite order / O.M.Katkova, I.V.Ostrovskii // Izvestiya Akad. Nauk SSSR, ser. Matem. – 1989. – Vol. 4. – P. 771–781.

115. Katkova O.M. On the growth of entire generating functions of multiply positive sequences / O.M.Katkova // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2003. – Vol. 10, N 1. – P. 61–75.

116. Katkova O.M. A note on zero sets of absolutely monotonic functions / O.M.Katkova, A.M.Vishnyakova // Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics – 2000. – Vol. 49, N 47. – P. 70–75.

117. Katkova O.M. A continual analogue of a theorem by M. Fekete and G. Polya / Olga M. Katkova, Anna M. Vishnyakova // Positivity. – 2001. – Vol. 5, N 1. – P. 1–11.

118. Katkova O.M. Zero sets of entire absolutely monotonic functions / Olga M. Katkova, Anna M. Vishnyakova // Entire functions in modern analysis, Israel Mathematical Conference Proceedings. – 2001. – Vol. 15. – P. 173–205.

119. Katkova O.M. On the zero sets of absolutely monotonic functions / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Computational Methods and Function Theory : International Conference, June 25-29, 2001 : abstracts. – University of Aveiro, Portugal, 2001. – P. 99.

120. Katkova O.M. On the entire functions with the sections having only real zeros / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // International Akhiezer Centenary Conference "Theory of Functions and Mathematical Phisics" : International Conference, August 13-17, 2001 : abstracts. – Kharkiv, Ukraine, 2001. – P. 44.

121. Katkova O.M. On power series having sections with only real zeros / Olga M. Katkova, Tetyana Lobova and Anna M. Vishnyakova // Computation Methods and Functional Theory. – 2003. – Vol. 3, N 2. – P. 425–441.

122. Katkova O.M. On the zeros of entire absolutely monotonic functions / Olga M. Katkova, Anna M. Vishnyakova // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2004. – Vol. 11, N 1. – P. 25 – 44.

123. Katkova O.M. On entire functions having Taylor sections with only real zeros / Olga M. Katkova, Tatjana Lobova, Anna M. Vishnyakova // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2004. – Vol. 11, N 4. – P. 449 – 469.

124. Katkova O.M. On sufficient conditions for the total positivity and for the multiple positivity of matrices / Olga M. Katkova and Anna M.

Vishnyakova // Linear Algebra and its Applications. – 2006. – Vol. 416, N 2-3. – P. 1083–1097.

125. Katkova O.M. A sufficient condition for a polynomial to be stable / Olga M. Katkova, Anna M. Vishnyakova // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – Vol. 347, N 1. – P. 81–89.

126. Katkova O.M. On the stability of Taylor sections of a function $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^{k^2}}$, $a > 1$ / Olga M. Katkova, Anna M. Vishnyakova // Comput. Methods Funct. Theory. – 2009. – Vol. 9, N 1. – P. 305–322.

127. Katkova O.M. Linear operators preserving the set of positive (nonnegative) polynomials / Olga M. Katkova, Anna M. Vishnyakova // Proceedings of the third Multidisciplinary International Symposium on Positive Systems: Theory and Applications (POSTA 09) Valencia, Spain, September 2-4, 2009; Series: Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Vol. 389, P. – 83–90 Bru, Rafael; Romero-Vivó, Sergio (Eds.), 2009, XII, 398 p.

128. Katkova O.M. A remark about positive polynomials / Olga M. Katkova, Anna M. Vishnyakova // Mathematical Inequalities & Applications. – 2010. – Vol. 13, N 4. – P. 753–759.

129. Katkova O.M. Non-asymptotic results on the zero distribution of real polynomials and entire functions / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Conference on complex analysis dedicated to the memory of Anatolii Asirovich Goldberg (1930-2008) : International Conference, May 31-June 5, 2010 : abstracts. – Lviv, Ukraine, 2010. – P. 28, `http://analysis13.mathlviv.org.ua/conference-on-complex-analysis-dedicated-to-the-memory-of-anatolii-`

130. Katkova O.M. Multiplier sequences and logarithmic mesh / Olga Katkova, Boris Shapiro, and Anna Vishnyakova // Comptes rendus-Mathématique. – 2011. – Vol. 349, N 1-2. – P. 35–38, DOI: 10.1016/j.crma.2010.11.031

131. Katkova O.M. The cone of nonnegative polynomials with nonnegative coefficients and linear operators preserving this cone / Olga Katkova, Anna Vishnyakova // Cent. Eur. J. Math. – 2014. – Vol. 12, N 5. – P. 752–760. – DOI: 10.2478/s11533-013-0380-z

132. Katkova O.M. Linear finite difference operators with constant coefficients and distribution of zeros of polynomials / Olga Katkova, Mikhail Tyaglov and Anna Vishnyakova // arXiv:math/1807.01926

133. Karpenko I. On sufficient conditions for a polynomial to be sign-independently hyperbolic or to have real separated zeros // Irina Karpenko and Anna Vishnyakova, // Mathematical Inequalities & Applications. – 2017. – Vol. 20, N 1. – P. 237 – 245. – DOI:10.7153/mia-20-18.

134. Katkova O.M. Linear finite difference operators preserving Laguerre-Pólya class / Olga Katkova, Mikhail Tyaglov and Anna Vishnyakova // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2018. –Vol. 63, N 11. – P. 1604–1619. DOI: 10.1080/17476933.2017.1400539

135. Kemperman J.H.B. A Hurwitz matrix is totally positive / J. H. B. Kemperman // SIAM J. Math. Anal. – 1982. – Vol. 13. – P. 331–341.

136. Ki H. On the number of non-real zeros of real entire functions and the Fourier–Pólya conjecture / H. Ki and Y. Kim // Duke Math. J. – 2000. – Vol. 104, N 1. – P. 45–73.

137. Kim B. Asymptotics for q-expansions involving partial theta functions / B. Kim, E. Kim and J. Seo // Discrete Math. – 2015. – Vol. 338, N 2. – P. 180–189.

138. Kimport S. On the asymptotics of partial theta functions / S.Kimport. – Analytic Number Theory, Modular Forms and q-Hypergeometric Series. – Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. – Springer Cham. – 2016. – Vol. 221. – P. 371–392.

139. Koosis P. The Logarithmic Integral I / P. Koosis // Cambridge Studies in Advanced Mathematics 12, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

140. Koosis P. Introduction to H_p Spaces / P. Koosis // Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

141. Kostov V.P. About a partial theta function / V. P. Kostov // C. R. Acad. Bulgare Sci. – 2013. – Vol. 66. – P. 629–634.

142. Kostov V.P. On the zeros of a partial theta function / V. P. Kostov // Bull. Sci. Math. – 2013. – Vol. 137, N 8. – P. 1018–1030.

143. Kostov V.P. On the spectrum of a partial theta function / V. P. Kostov // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. – 2014. – Vol. 144, N 5. – P. 925–933.

144. Kostov V.P. Asymptotics of the spectrum of partial theta function / V.P.Kostov // Revista Matematica Complutense. – 2014. – Vol. 27, N 2. – P. 677–684.

145. Kostov V.P. A property of a partial theta function / V. P. Kostov // C. R. Acad. Bulgare Sci. –2014. – Vol. 67. – P. 1319–1326.

146. Kostov V.P. Asymptotic expansions of zeros of a partial theta function / V. P. Kostov // C. R. Acad. Bulgare Sci. – 2015. – Vol. 68. – P. 419–426.

147. Kostov V.P. On the double zeros of a partial theta function / V.P.Kostov // Bulletin des Sciences Mathamatiques. – 2016. – Vol. 140, N 4. – P. 98–111.

148. Kostov V.P. On a partial theta function and its spectrum / V.P.Kostov // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics. – 2016. – Vol. 146, N 3. – P. 609-623.

149. Kostov V.P. The closest to 0 spectral number of the partial theta function / V. P. Kostov // C. R. Acad. Bulgare Sci. – 2016. – Vol. 69. – P. 1105–1112.

150. Kostov V.P. A Separation in Modulus Property of the Zeros of a Partial Theta Function / V.P.Kostov // Analysis Mathematica. `https://link.springer.com/article/10.1007/s10476-018-0308-8`

151. Kostov V.P. On the Schur-Szegö composition of polynomials / V.P. Kostov, and B. Shapiro // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. – 2006. – Vol. 343, N 2. – P. 81–86.

152. Kostov V.P. Hardy-Petrovitch-Hutchinson's problem and partial theta function / V.P.Kostov, B.Shapiro // Duke Math. J. – 2013. – Vol. 162, N 5. – P. 825–861.

153. Krein M. G. The Markov Moment Problem and Extremal Problems. Ideas and Problems of P. L. Chebyshev and A. A. Markov and Their Further Development / Krein M. G., Nudelman A. A. // Translated from the Russian by D. Louvish, Translations of Mathematical Monographs, 50, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977.

154. Krein M. G. The method of symmetric and Hermitian forms in the theory of the separation of the roots of algebraic equations / M.G. Krein and M. Neimark // Lin. and Multilin. Algebra. – 1981. – Vol. 10, N 4. – P. 265–308.

155. Kurtz D.C. A sufficient condition for all the roots of a polynomial to be real / D.C.Kurtz // Amer. Math. Monthly. – 1992. – Vol. 99. – P. 259–263.

156. Laguerre E. Œuvres / E. Laguerre // Vol.1, 2nd ed., Chelsea Publishing, New York, 1972.

157. Laguerre E. Sur la règle de Descartes / E. N. Laguerre // C. R. des sciences. – 1881. – XCII.

158. Laguerre E. Sur quelques points de la théorie des équations numériques / E. Laguerre // Acta Math. – 1884. – Vol. 4. – P. 97–120.

159. Lamprecht M. Suffridge's convolution theorem for polynomials and entire functions having only real zeros / M.Lamprecht // Advances in Mathematics. – 2016. – Vol. 288. – P. 426–463.

160. Langley J. Non-real zeros of higher derivatives of real entire functions of infinite order / J. Langley // J. Anal. Math. – 2005. – Vol. 97, N 1. – P. 357–396.

161. Levin B. Distribution of Zeros of Entire Functions / B. Levin // Transl. Math. Mono., 5, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964; revised ed. 1980.

162. Linnik, Ju.V. Decompositions of random variables and vectors / Ju. V. Linnik and I.V. Ostrovskii // "Nauka Moscow, 1972, English transl., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977.

163. Lumer G. Semi-inner-product spaces / G. Lumer // Trans. Amer. Math. Soc.– 1961. –Vol. 100. – P. 29–43.

164. Mao R. Proofs of two conjectures on truncated series / R. Mao // J. Combin. Theory Ser. A. – 2015. – Vol. 130. – P. 15–25.

165. Marden M. Geometry of polynomials / M.Marden // American Mathematical Society Surveys, vol. 3, Providence, RI, 1966.

166. McGuigan R. Strongly extreme points in Banach spaces / R. McGuigan // Manuscripta Math. – 1971. – Vol. 5, N 2. – P. 113–122.

167. Mergelyan, S.N. Uniform approximations to functions of a complex variable / S.N. Mergelyan // In: Series and Approximation. – 1962. – Vol.3, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1962, P. 357–363.

168. Mignotte M. On the distance between the roots of a polynomial / Maurice Mignotte // Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing. – 1995. – Vol. 6, N 6. – P. 327–332.

169. Nguyen T.H. On the entire functions from the Laguerre-Pólya class having the decreasing second quotients of Taylor coefficients / Thu Hien Nguyen and Anna Vishnyakova // International Conference in Functional Analysis Dedicated to the 125th Anniversary of Stefan Banach : International Conference, September 18-23, 2017 : abstracts. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine, 2017. – P. 128, `http://www.math.lviv.ua/banach125/BanachAbstract.pdf`

170. Nguyen T.H. On the conditions for special entire functions to belong to the Laguerre–Pólya class / Thu Hien Nguyen and Anna Vishnyakova

// VI International Conference ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS dedicated to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory : International Conference, June 18–22, 2018 : abstracts. –B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine, 2018. – P. 24, http://www.ilt.kharkov.ua/amph2018/book-ab.pdf

171. Nurges ́U. On stable cones of polynomials via reduced Routh parameters / ́Ulo Nurges, Juri Belikov and Igor Artemchuk // Kybernetika. – 2016. – Vol. 52, N 3. – P. 461–477.

172. Obreschkov N. Some algebraic covariants and zeros of polynomials / N. Obreschkov // Bulgar. Akad. Nauk. Izv. Mat. Inst. – 1963. – Vol. 7. – P. 89–126.

173. Obreschkov N. Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome /N. Obreschkov // VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.

174. Ostrovskii, I.V. On zeros of entire characteristic functions of distributions concentrated on a half-line / I.V.Ostrovskii // Theor. Probab. Applications. – 1988. – Vol. 33. – P. 167–171.

175. Ostrovskii, I.V. On Zero Distribution of Sections and Tails of Power Series / I. V. Ostrovskii // Israel Math. Conference Proceedings. – 2001. – Vol. 15. – P. 297–310.

176. Ostrovskii, I.V. On power series having sections with multiply positive coefficients and a theorem of Pólya / I.V. Ostrovskii, N.A. Zheltukhina // J. London Math. Soc. – 1998. – Vol. 58, N 1. – P. 97–110.

177. Ostrovskii, I.V. On power series having tails with multiply positive coefficients / I.V. Ostrovskii, N.A. Zheltukhina // Complex Analysis and Differential Equations, eds. C. Kiselman, A.Vretblad, Uppsala 1999.

178. Ostrovskii, I.V. Parametric Representation of a class of Multiply Positive Sequences / I.V. Ostrovskii, N.A. Zheltukhina // Complex Variables. – 1998. – Vol. 37, N 1-4. – P. 457–469.

179. Passare M. New multiplier sequences via discriminant amoebae / M. Passare, J. M. Rojas, and B. Shapiro // Mosc. Math. J. – 2011. – Vol. 11, N 3. – P. 547–560.

180. Patrick M. Extensions of inequalities of the Laguerre and Turán type / M. Patrick // Pacific J. Math. – 1973. – Vol. 44. – P. 675–682.

181. Pemantle R. Hyperbolicity and stable polynomials in combinatorics and probability / R. Pemantle / In: Current Development in Mathematics, Proceedings of the 2011 conference. – 2012. – P. 57–124. Jerison, Mazur, Mrowka, Schmid and Stanley, editors. International Press: Somerville, MA.

182. Peña J.M. Characterizations and stable tests for the Routh–Hurwitz conditions and for total positivity J. M. Peña
Linear Algebra and its Applications. – 2004. – Vol. 393. – P. 319–332.

183. Peña J.M. Tests for the recognition of total positivity J. M. Peña
SeMA Journal. – 2013. – Vol. 62, N 1. – P. 61–73.

184. Petrovitch M. Une classe remarquable de séries entiéres M. Petrovitch // Atti del IV Congresso Internationale dei Matematici, Rome. – 1908. – Vol. 1, No. 2. – P. 36–43.

185. Pinkus A. Totally Positive Matrices / Allan Pinkus // Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Vol. 181, 196 pages, 2010.

186. Pólya G. Collected Papers, Vol. II Location of Zeros / G. Pólya // R. Boas ed., MIT Press, Cambridge, MA, 1974.

187. Pólya G. Über Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln/ G. Pólya // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1913. – Vol. 36. – P. 279–295.

188. Pólya G. Bemerkung über die Integraldarstellung der Riemannsche j-Funktion / G. Pólya // Acta Math. – 1926. – Vol. 48. – P. 305–317.

189. G. Pólya, Über einen Satz von Laguerre, Jber. Deutsch. Math.-Verein. – 1929. – Vol. 38. – P. 161–168.

190. Pólya G. Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen / G. Pólya and J. Schur // J. Reine Andrew. Math. – 1914. – Vol. 144. – P. 89–113.

191. Pólya G. Problems and Theorems in Analysis II / G. Pólya, G. Szegö // Springer Science and Business Media, Mathematics, 1997.

192. Purbhoo K. Total Nonnegativity and Stable Polynomials / Kevin Purbhoo // Canad. Math. Bull. – 2018. – Vol. 61. – P. 836–847.

193. Rahman Q.I. Analytic theory of polynomials / Q.I. Rahman and G. Schmeisser // The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2002.

194. Ramanujan S. The lost notebook and other unpublished papers / S. Ramanujan // Narosa, New Delhi, 1988.

195. Remak R. Bemerkung zu Herrn Stridsbergs Beweis des Waringschen Theorems / R. Remak // Math. Ann. – 1912. – Vol. 72. – P. 153-–156.

196. Rickart C.E. General theory of Banach algebras / C. E. Rickart // Robert E. Krieger Publishing co., Huntington, NY, 1974.

197. Riemann G. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse / G. Riemann // Monatsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1859, P. 671–680.

198. Rudin W. Real and Complex Analysis / W. Rudin // Mc Graw-Hill, 1974 (2nd edition).

199. Sakai S. C^*-algebras and W^*-algebras / S. Sakai //, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971.

200. Saleur H. Zeroes of chromatic polynomials: A new approach to Beraha conjecture using quantum groups / H. Saleur // Communications in Mathematical Physics. – 1990. – Vol. 132, N 3. – P. 657–679.

201. Schoenberg I. J. On the Zeros of the Generating Functions of Multiply Positive Sequences and Functions / I. J. Schoenberg // Annals of Mathematics. – 1955. – Second Series, Vol. 62, N 3. – P. 447–471.

202. Schur I. Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlichvielen Veräderlichen / I. Schur // J. für Math., Vol. 140, 1911.

203. Sendov Bl. On the zeros and critical points of polynomials with non-negative coefficients: a non-convex analogue of the Gauss-Lucas theorem / Bl. Sendov and H.S. Sendov // Constr. Approx. – 2017. – Vol. 46, N 2. – P. 305–317.

204. Shapiro B. Problems with polynomials - the good, the bad, and the ugly / B. Shapiro // Arnold Mathematical Journal. – 2015. – Vol 1, N 1. – P. 91–99.

205. Sheil-Small T. On the zeros of the derivatives of real entire functions and Wiman's conjecture / T. Sheil-Small // Ann. Math. – 1989. – Vol. 129. – P. 179–193.

206. Sokal A.D. The leading root of the partial theta function / A. D. Sokal // Adv. Math. – 2012. – Vol. 229, N 5. – P. 2603–2621.

207. Stanley R. Enumerative Combinatorics / R. Stanley // Vol. I (Second Edition), Cambridge University Press, 2012.

208. Stoyanoff A. Sur un theoreme de M Marcel Riesz / A. Stoyanoff // Nouvelles Annales de Mathematique. – 1926. – Vol. 1. – P. 97–99.

209. Szász O ́Uber Irrationalit ́at gewisser unendlicher Reihen / O. Szász // Math. Ann. – 1915. – Vol. 76. – P. 485–487.

210. Szegö G. Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen / G. Szegö // Math.Z. – 1922. – Vol. 13, N 2. – P. 28–55.

211. Szegö G. Orthogonal Polynomials / G. Szegö // Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. – 1975. – Vol. 23, Providence, RI. – P. 131–134.

212. Takagi T. Note on the algebraic equations / T. Takagi // Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. – 1921. – Vol. 3, N 11. – P. 175–179.

213. Thu Hien Nguyen On the entire functions from the Laguerre-Pólya class having the decreasing second quotients of Taylor coefficients / Thu Hien Nguyen and Anna Vishnyakova // Journal of Mathematical Analysis & Applications. – 2018. – Vol. 465, N 1. – P. 348–358.

214. Tschakaloff L. Arithmetische Eigenschaften der unendlichen Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{a^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}}$ / L.Tschakaloff // Math. Ann.– 1919. – Vol. 80. – P. 62–74.

215. Tschakaloff L. Arithmetische Eigenschaften der unendlichen Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{a^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}}$ / L.Tschakaloff // Math. Ann. – 1921. – Vol. 84. – P. 100–114.

216. Titchmarsh E.C. The Theory of Functions / E. C. Titchmarsh // second edition (Oxford University Press, 1939; reprinted 1985), P. 119.

217. Walker P. Separation of zeros of translates of polynomials and entire functions / P. Walker // J. Math. Ann. Appl. – 1997. – Vol. 206, N 1. – P. 270–279.

218. Vishnyakova A.M. On the power series having sections with only real zeros / Anna M. Vishnyakova, Olga M. Katkova and Tatyana Lobova // Second International Conference “Mathematical Analysis and Economics” : International Conference, April 1-4, 2003 : abstracts. – Sumy, Ukraine, 2003. – P. 55.

219. Vishnyakova A.M. On the class of entire functions having sections with only real zeros / A.M.Vishnyakova, O.M.Katkova, T.Lobova // International conference dedicated to 125-th anniversary of Hans Hahn : International Conference, June 27 - July 3, 2004 : abstracts. – Chernivtsi, Ukraine, 2004. – P. 165.

220. Vishnyakova A. A sufficient condition for a sequence to be Pólya frequency sequence and it applications / Anna Vishnyakova // Computational Methods and Function Theory : International Conference, June 13-17, 2005 : abstracts. – Joensuu, Finland, 2005. – P. 15, http://www.oppi.uef.fi/wanda/cmft/program.html

221. Vishnyakova A.M. A sufficient condition for a polynomial to be stable / Anna M. Vishnyakova, Olga M. Katkova // Analysis and related topics : International Conference, November 17-20, 2005 : abstracts. – Lviv, Ukraine, 2005. – P. 110, http://analysis13.mathlviv.org.ua/analysis-and-related-topics-lviv-ukraine-november-17-20-2005/

222. Vishnyakova A.M. Some remarks about Hurwitz (stable) polynomials / Anna Vishnyakova, Olga Katkova // Entire and Subharmonic Functions and Related Topics", International Conference dedicated to the centennial of B.Ya.Levin (1906-1993) : International Conference, August 14-17, 2006 : abstracts. – Kharkiv, Ukraine, 2006. – P. 39, http://www.ilt.kharkov.ua/esfrt06/

223. Vishnyakova A.M. On real polynomials having at most one real zero / Anna M. Vishnyakova // Analysis and Topology : International Conference, May 26-June 7, 2008 : abstracts. – Lviv, Ukraine, 2008. – P. 53, http://analysis13.mathlviv.org.ua/analysis-and-topology-lviv-2008-lviv-ukraine-may-26-june-7-2008/

224. Vishnyakova A. On sufficient conditions for the total positivity of matrices and applications / Anna Vishnyakova // IWOTA 2010 : International Conference, July 12-16, 2010 : abstracts. – Technische Universitat Berlin, Germany, 2010. – P. 197, https://www3.math.tu-berlin.de/numerik/iwota_2010/

225. Vishnyakova A. Multiplier sequences and logarithmic mesh / Anna Vishnyakova // Complex analysis and its applications, dedicated to the

70th anniversary of A.F. Grishin : International Conference, August 15-18, 2011 : abstracts. – Kharkov National University, Ukraine, 2011. – P. 40.

226. Vishnyakova A. Linear finite difference operators and zeros of finite differences of polynomials and entire functions / Anna Vishnyakova // Complex Analysis and Related Topics : International Conference, May 30-June 4, 2016 : abstracts. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine, 2016. – P. 93, `http://analysis16.mathlviv.org.ua/`

227. Vishnyakova A. On the conditions for entire functions related to the partial theta function to belong to the Laguerre-Pólya class / Anna Vishnyakova // Hausdorff Geometry of Polynomials and Polynomial Sequences : International Conference, May 28 - June 1, 2018 : abstracts. – Institut Mittag-Leffler, Sweeden, 2018. – P. 3, `http://www.mittag-leffler.se/konferens/hausdorff-geometry-polynomials-and-polynomial-sequences`

228. van der Waerden B.L. Algebra / B. L. van der Waerden // Springer Verlag, Berlin 1966.

229. Wagner D. Multivariate stable polynomials: theory and applications / David G. Wagner // Bull. Amer. Math. Soc. – 2011. – Vol. 48. – P. 53–84.

230. Walker P. Separation of the zeros of polynomials / P. Walker // Amer. Math. Monthly. – 1993. – Vol. 100. – P. 272–273.

231. Walker P. Separation of Zeros of Translates of Polynomials and Entire Functions / P. Walker // J. Math. Anal. Appl. – 1997. – Vol. 206, N 1. – P. 270–279.

232. Walsh J.L. On the location of the roots of certain types of polynomials J.L. Walsh // Transactions of the American Mathematical Society. –1922. – P. 163–180.

233. Warnaar S.O. Partial theta functions. I. Beyond the lost notebook / S. O. Warnaar // Proc. London Math. Soc. – 2003. – Vol. 87, N 3. – P. 363–395.

234. Whittaker E.T. A course of modern analysis / E. T. Whittaker and G. N. Watson // fourth edition. – Cambridge University Press. – New York. – 1927.

235. Woerdeman H.J. Determinantal Representations of Stable Polynomials / H.J.Woerdeman // In: Kaashoek M., Rodman L., Woerdeman H. (eds) Advances in Structured Operator Theory and Related Areas. Operator Theory: Advances and Applications, Vol 237, 2013. Birkhauser, Basel.

236. Xie L. A Criterion for Hurwitz Polynomials and its Applications / Liejun Xie // I.J.Modern Education and Computer Science. – 2011. – Vol. 3, N 1. – P. 38–44.

237. Zwillinger D. CRC standard Mathematical Tables and Formulae / D. Zwillinger // Boca Raton, Fl:CRC Press. – 1995.

ДОДАТОК А

Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

Публікації у фахових виданнях України

1. Katkova O.M. A note on zero sets of absolutely monotonic functions / O.M.Katkova and A.M.Vishnyakova // Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics – 2000. – Vol. 49, N 47. – P. 70–75 (Zentralblatt MATH: Zbl 1054.30526).

2. Katkova O.M. On the zeros of entire absolutely monotonic functions / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2004. – Vol. 11, N 1. – P. 25 – 44 (Zentralblatt MATH: Zbl 1076.30030, MathSciNet: MR2046352).

3. Katkova O.M. On entire functions having Taylor sections with only real zeros / Olga M. Katkova, Tatjana Lobova and Anna M. Vishnyakova // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2004. – Vol. 11, N 4. – P. 449 – 469 (Zentralblatt MATH: Zbl 1078.30022, MathSciNet: MR2114005).

Публікації у виданнях, які входять до міжнародних наукометричних баз

4. Katkova O.M. A continual analogue of a theorem by M. Fekete and G. Pólya / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Positivity. – 2001. – Vol. 5, N 1. – P. 1–11 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 0972.44001, MathSciNet: MR1813092).

5. Behrends E. A note on l^p-norms / Ehrhard Behrends, Olga Katkova and Anna Vishnyakova // Archiv der Mathematik. – 2001. – Vol. 76, N 1. – P. 67–72 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 0971.46008, MathSciNet: MR1808744).

6. Katkova O.M. On sufficient conditions for the total positivity and for the multiple positivity of matrices / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova //

Linear Algebra and its Applications. – 2006. – Vol. 416, N 2-3. – P. 1083–1097 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1106.15014, MathSciNet: MR2242482).

7. Katkova O.M. A sufficient condition for a polynomial to be stable / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – Vol. 347, N 1. – P. 81–89 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1146.30005, MathSciNet: MR2433826).

8. Katkova O.M. Linear operators preserving the set of positive (nonnegative) polynomials / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Proceedings of the third Multidisciplinary International Symposium on Positive Systems: Theory and Applications (POSTA 09) Valencia, Spain, September 2-4, 2009; Series: Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 389, P. 83–90 Bru, Rafael; Romero-Vivo, Sergio (Eds.), 2009, XII, 398 p., ISSN: 0170-8643 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1182.93061, MathSciNet: MR2596604).

9. Katkova O.M. A remark about positive polynomials / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Mathematical Inequalities and Applications. – 2010. – Vol. 13, N 4. – P. 753–759 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1205.30008, MathSciNet: MR2760498).

10. Katkova O.M. Multiplier sequences and logarithmic mesh / Olga Katkova, Boris Shapiro and Anna Vishnyakova // Comptes rendus – Mathematique. – 2011. – Vol. 349, N 1-2. – P. 35–38, DOI: 10.1016/j.crma.2010.11.031 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1225.26030, MathSciNet: MR2755692).

11. Csordas G. The generalized Laguerre inequalities and functions in the Laguerre- Pólya class / George Csordas and Anna Vishnyakova // Cent. Eur. J. Math. – 2013. – Vol. 11, N 9. – P. 1643—1650, DOI: 10.2478/s11533-013-0269-x (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1291.30167, MathSciNet: MR3071931).

12. Katkova O.M. The cone of nonnegative polynomials with nonnegative

coefficients and linear operators preserving this cone / Olga Katkova and Anna Vishnyakova // Cent. Eur. J. Math. – 2014. – Vol. 12, N 5. – P. 752–760, DOI: 10.2478/s11533-013-0380-z (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1291.11063, MathSciNet: MR3182557).

13. Bohdanov A. On the conditions for entire functions related to the partial theta function to belong to the Laguerre-Pólya class / Anton Bohdanov and Anna Vishnyakova // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2016. – Vol. 434, N 2. – P. 1740–1752, DOI:10.1016/j.jmaa.2015.09.084 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1327.30029, MathSciNet: MR3415748).

14. Karpenko I. On sufficient conditions for a polynomial to be sign-independently hyperbolic or to have real separated zeros / Irina Karpenko and Anna Vishnyakova // Mathematical Inequalities and Applications. – 2017. – Vol. 20, N 1. – P. 237–245, DOI:10.7153/mia-20-18 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1361.30010, MathSciNet: MR3610898).

15. Katkova O.M. Linear finite difference operators preserving Laguerre-Pólya class / Olga Katkova, Mikhail Tyaglov and Anna Vishnyakova // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2018. – Vol. 63, N 11. – P. 1604–1619, DOI:10.1080/17476933.2017.1400539 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1395.30007, MathSciNet: MR3847101).

16. Nguyen T.H. On the entire functions from the Laguerre-Pólya class having the decreasing second quotients of Taylor coefficients / Thu Hien Nguyen and Anna Vishnyakova // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2018. – Vol. 465, N 1. – P. 348–358, DOI:10.1016/j.jmaa.2018.05.018 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1391.30040, MathSciNet: MR3806708).

Публікації у наукових періодичних спеціалізованих зарубіжних виданнях

17. Katkova O.M. Zero sets of entire absolutely monotonic functions / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Entire functions in modern analysis, Israel Mathematical Conference Proceedings. – 2001. – Vol. 15. – P.

173–205, ISSN: 0792-4119 (Zentralblatt MATH: Zbl 1010.30005, MathSciNet: MR1890537).

18. Katkova O.M. On Power Series Having Sections with Only Real Zeros / Olga M. Katkova, Tetyana Lobova and Anna M. Vishnyakova // Comput. Methods Funct. Theory. – 2003. – Vol. 3, N 2. – P. 425–441 (Zentralblatt MATH: Zbl 1058.30009, MathSciNet: MR2082027).

19. Kadets V. Convexity around the unit of a Banach algebra / Vladimir Kadets, Olga Katkova, Miguel Martin and Anna Vishnyakova // Serdica Math. J. – 2008. – Vol. 34. – P. 619–628 (Zentralblatt MATH: Zbl 1224.46025, MathSciNet: MR2455795).

20. Katkova O.M. On the stability of Taylor sections of a function $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^{k^2}}$, $a > 1$ / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Comput. Methods Funct. Theory. – 2009. – Vol. 9, N 1. – P. 305–322 (Zentralblatt MATH: Zbl 1167.30004, MathSciNet: MR2478278).

Публікації, які засвідчують апробацію дисертації

Публікації у матеріалах міжнародних наукових конференцій

21. Katkova O.M. On the zero sets of absolutely monotonic functions / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // Computational Methods and Function Theory : International Conference, June 25-29, 2001 : abstracts. – University of Aveiro, Portugal, 2001. – P. 99.

22. Katkova O.M. On the entire functions with the sections having only real zeros / Olga M. Katkova and Anna M. Vishnyakova // International Akhiezer Centenary Conference "Theory of Functions and Mathematical Phisics" : International Conference, August 13-17, 2001 : abstracts. – Kharkiv, Ukraine, 2001. – P. 44.

23. Vishnyakova A.M. On the power series having sections with only real zeros / Anna M. Vishnyakova, Olga M. Katkova and Tatyana Lobova // Second International Conference "Mathematical Analysis and Economics" :

International Conference, April 1-4, 2003 : abstracts. – Sumy, Ukraine, 2003. – P. 55.

24. Vishnyakova A.M. On the class of entire functions having sections with only real zeros / A.M.Vishnyakova, O.M.Katkova, T.Lobova // International conference dedicated to 125-th anniversary of Hans Hahn : International Conference, June 27 - July 3, 2004 : abstracts. – Chernivtsi, Ukraine, 2004. – P. 165.

25. Vishnyakova A.M. A sufficient condition for a sequence to be Pólya frequency sequence and it applications / Anna Vishnyakova // Computational Methods and Function Theory : International Conference, June 13-17, 2005 : abstracts. – Joensuu, Finland, 2005. – P. 15, `http://www.oppi.uef.fi/wanda/cmft/program.html`

26. Vishnyakova A.M. A sufficient condition for a polynomial to be stable / Anna M. Vishnyakova and Olga M. Katkova // Analysis and related topics : International Conference, November 17-20, 2005 : abstracts. – Lviv, Ukraine, 2005. – P. 110, `http://analysis13.mathlviv.org.ua/analysis-and-related-topics-lviv-ukraine-november-17-20-2005/`

27. Vishnyakova A.M. Some remarks about Hurwitz (stable) polynomials / Anna Vishnyakova and Olga Katkova // Entire and Subharmonic Functions and Related Topics", International Conference dedicated to the centennial of B.Ya.Levin (1906-1993) : International Conference, August 14-17, 2006 : abstracts. – Kharkiv, Ukraine, 2006. – P. 39, `http://www.ilt.kharkov.ua/esfrt06/`

28. Vishnyakova A.M. On real polynomials having at most one real zero / Anna M. Vishnyakova // Analysis and Topology : International Conference, May 26-June 7, 2008 : abstracts. – Lviv, Ukraine, 2008. – P. 53, `http://analysis13.mathlviv.org.ua/analysis-and-topology-lviv-2008-lviv-ukraine-may-26-june-7-2008/`

29. Katkova O.M. Non-asymptotic results on the zero distribution of real polynomials and entire functions / Olga M. Katkova and

Anna M. Vishnyakova // Conference on complex analysis dedicated to the memory of Anatolii Asirovich Goldberg (1930-2008) : International Conference, May 31-June 5, 2010 : abstracts. – Lviv, Ukraine, 2010. – P. 28, http://analysis13.mathlviv.org.ua/conference-on-complex-analysis-dedicated-to-the-memory-of-anatolii-asirovich-goldberg-1930-2008-lviv-ukraine-may-31-june-5-2010/

30. Vishnyakova A. On sufficient conditions for the total positivity of matrices and applications / A. Vishnyakova // IWOTA 2010 : International Conference, July 12-16, 2010 : abstracts. – Technische Universitat Berlin, Germany, 2010. – P. 197, https://www3.math.tu-berlin.de/numerik/iwota_2010/

31. Vishnyakova A.M. Multiplier sequences and logarithmic mesh / A.M. Vishnyakova // Complex analysis and its applications, dedicated to the 70th anniversary of A.F. Grishin : International Conference, August 15-18, 2011 : abstracts. – Kharkov National University, Ukraine, 2011. – P. 40.

32. Bohdanov A. On necessary and sufficient conditions for a function to belong to the Laguerre-Pólya class / Anton Bohdanov and Anna Vishnyakova // III International Conference ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS : International Conference, June 15–19, 2015 : abstracts. – B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine, 2015. – P. 18, http://www.ilt.kharkov.ua/amph2015/

33. Vishnyakova A. Linear finite difference operators and zeros of finite differences of polynomials and entire functions / Anna Vishnyakova // Complex Analysis and Related Topics : International Conference, May 30-June 4, 2016 : abstracts. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine, 2016. – P. 93, http://analysis16.mathlviv.org.ua/

34. Nguyen T.H. On the entire functions from the Laguerre-Pólya class having the decreasing second quotients of Taylor coefficients / Thu Hien

Nguyen and Anna Vishnyakova // International Conference in Functional Analysis Dedicated to the 125th Anniversary of Stefan Banach : International Conference, September 18-23, 2017 : abstracts. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine, 2017. – P. 128, http://www.math.lviv.ua/banach125/BanachAbstract.pdf

35. Vishnyakova A. On the conditions for entire functions related to the partial theta function to belong to the Laguerre-Pólya class / Anna Vishnyakova // Hausdorff Geometry of Polynomials and Polynomial Sequences : International Conference, May 28 - June 1, 2018 : abstracts. – Institut Mittag-Leffler, Sweeden, 2018. – P. 3, http://www.mittag-leffler.se/konferens/hausdorff-geometry-polynomials-and-polynomial-sequences

36. Nguyen T.H. On the conditions for special entire functions to belong to the Laguerre–Pólya class / Thu Hien Nguyen and Anna Vishnyakova // VI International Conference ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS dedicated to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory : International Conference, June 18–22, 2018 : abstracts. –B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine – P. 24, http://www.ilt.kharkov.ua/amph2018/book-ab.pdf

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися і обговорювалися на таких міжнародних наукових конференціях і наукових семінарах.

Міжнародні наукові конференції

1. Міжнародна конференція “Computational Methods and Function Theory”, Авейро, Португалія, June 25-29, 2001 (форма участі: доповідь).

2. International Akhiezer Centenary Conference “Theory of Functions and Mathematical Phisics”, Харків, Україна, August 13-17, 2001 (форма участі: доповідь).

3. Second International Conference “Mathematical Analysis and Economics”, Суми, Україна, April 1-4, 2003 (форма участі: доповідь).

4. “International conference dedicated to 125-th anniversary of Hans Hahn”, Чернівці, Україна, June 27 - July 3, 2004 (форма участі: доповідь).

5. Міжнародна конференція ”Computational Methods and Function Theory”, Джонсу, Фінляндія, June 13-17, 2005 (форма участі: доповідь).

6. Міжнародна конференція “Analysis and related topics”, Львів, Україна, November 17-20, 2005 (форма участі: доповідь).

7. “Entire and Subharmonic Functions and Related Topics”, International Conference dedicated to the centennial of B.Ya.Levin (1906-1993), Харків, Україна, August 14-17, 2006 (форма участі: доповідь).

8. Міжнародна конференція “Analysis and Topology”, Львів, Україна, May 26-June 7, 2008 (форма участі: доповідь).

9. Міжнародна конференція “Conference on complex analysis dedicated to the memory of Anatolii Asirovich Goldberg (1930-2008)”, Львів, Україна, May 31-June 5, 2010 (форма участі: доповідь).

10. Міжнародна конференція IWOTA 2010, Берлін, Німеччина July 12-16, 2010 (форма участі: доповідь).

11. Міжнародна конференція “Complex analysis and its applications” dedicated to the 70th anniversary of A.F. Grishin, Харків, Україна, August 15-18, 2011 (форма участі: доповідь).

12. Міжнародна конференція III International Conference ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS, Харків, Україна, June 15–19, 2015 (форма участі: доповідь співавтора).

13. Міжнародна конференція “Complex Analysis and Related Topics”, Львів, Україна, May 30-June 4, 2016 (форма участі: доповідь).

14. Міжнародна конференція “International Conference in Functional Analysis Dedicated to the 125th Anniversary of Stefan Banach”, Львів, Україна, September 18-23, 2017 (форма участі: доповідь співавтора).

15. Міжнародна конференція “Hausdorff Geometry of Polynomials and

Polynomial Sequences”, Стокгольм, Швеція, May 28 - June 1, 2018 (форма участі: доповідь).

16. Міжнародна конференція VI International Conference ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS dedicated to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory, Харків, Україна, June 18–22, 2018 (форма участі: доповідь співавтора).

Наукові семінари

1. Харківський міський семінар по теорії функцій, 2000-2018 р.р. (форма участі: доповіді).

2. Математичний семінар університету Альгарве, Португалія, 2001 рік (форма участі: доповідь).

3. Математичний семінар університету Тюбінгена, Німеччина, 2004 рік (форма участі: доповідь).

4. Міні-семінар під час семінару «Проблеми Поліа-Шура-Лакса: збереження гіперболічності і стабільності” в Американському інституті математики, Пало-Алто, США, 2007 рік (форма участі: доповідь).

5. Семінар математичного факультету університету Анкари, Турція, 2009 рік (форма участі: доповідь).

6. Семінар математичного відділення Стокгольмського університету, Швеція, 2010 рік (форма участі: доповідь).

7. Міні-семінар під час «Стабільність, гіперболічність і локалізація коренів функцій” в Американському інституті математики, Пало-Алто, США, 2011 рік (форма участі: доповідь).

8. Семінар з аналізу математичного факультету Шанхайського університету, Китай, 2015 рік (форма участі: дві доповіді).