Університет Массачусетсу у Лоуеллі, США

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Хейфець Олександр Якович

УДК 517.54; 517.547; 517.984.4

ДИСЕРТАЦІЯ

УНІТАРНІ СИСТЕМИ РОЗСІЮВАННЯ ТА ЗАДАЧІ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Спеціальність 01.01.01 - "Математичний аналіз"

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_______________ О. Я. Хейфець

Харків - 2019

АНОТАЦІЯ

Хейфець О. Я. Унітарні системи розсіювання та задачі інтерполяції. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 - математичний аналіз. - Університет Массачусетсу у Лоуеллі, США. Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна Національної академії наук України. Харків, 2019 р.

У дисертації запропоновано і розвинено методи розв'язання інтерполяційних задач аналізу, основані на використанні унітарних систем розсіювання, які природно пов'язані з даними задачі та її розв'язками. Також вирішуються відповідні зворотні задачі.

У роботі вивчаються задача про ліфтинг комутанту, кратний аналог умови Жюліа-Каратеодорі про кутову межову похідну та пов'язана з нею межова інтерполяційна задача у класі Шура, розширений клас Крейна-Лангера та задача Неванлінни-Піка в ньому. Для задачі про ліфтинг комутанту отримано параметризацію усіх символів заданого стиснення у самому загальному випадку а також отримано повну характерізацію коефіцієнтів цієї параметризуючої формули. Для аналогу умови Жюліа-Каратеодорі отримано низку еквівалентних умов, зокрема, одна з цих умов формулюється у термінах певної симетрії межових похідних. Як застосування цих методів та результатів, у роботі розв'язані дві проблеми Д. Сарасона про регулярні та сингулярні γ-твірні пари.

У Розділі 2 містяться попередні відомості які використовуються у дисертації. Наведені усі необхідні визначення що стосуються унітарних систем розсіювання. Детально описано простір мір Хеллінгера, що відповідає заданій операторній мірі, та деякі його властивості. Показано як унітарні системи розсіювання реалізуються у просторі Хеллінгера. Викладено конструкцію Шурівських додатків мір та відповідного ортогонального розкладу простору Хеллінгера. Описана параметризація унітарних розширень ізометрій, їх резольвент. Викладено числення з'єднань зі зворотним зв'язком та обчислена динаміка з'єднаної системи. Обчислено функції розсіювання

з'єднаної системи відносно заданого масштабу та масштабу з'єднання.

У Розділі 3 розроблюється узагальнення схеми Абстрактної Задачі Інтерполяції, запропонованої раніше В. Кацнельсоном, О. Хейфецем і П. Юдицьким. Ця схема добре підходить для задач інтерполяції в класах аналітичних функцій (таких як задача Неванлінни-Піка, задача Сарасона, Проблема Моментів). Схема виявилася простою, зручною та набула популярності серед математиків що працюють у цій галузі. У 90-ті і 00-і роки з'явилися різні узагальнення схеми Абстрактної Задачі Інтерполяції на випадок багатьох змінних (полідиск, куля, некомутовні змінні і т.д.). Але у задачі Нехарі і в більш загальній задачі про ліфтинг комутанту розв'язки (символи) не є аналітичними. Такі функції можна трактувати як функції розсіювання систем більш загальних ніж вузли. У дисертації розроблено узагальнення схеми Абстрактної Задачі Інтерполяції, яке дозволяє вирішувати проблеми такого типу.

У Розділі 4 дисертації розглядається загальна проблема про ліфтинг комутанту: показано що вона вкладається в схему Абстрактної Задачі Інтерполяції, розглянуту в Розділі 3, вивчено специфіку даних задачі про ліфтинг і отримано опис всіх ліфтингів заданого стиснення в термінах їх символів. Поняття символу ліфтингу також введено в цій роботі і узагальнює класичне поняття символу Ганкелева оператора. У цьому більш загальному випадку символами є міри, а не функції.

В цьому ж розділі вирішується відповідна зворотна задача, яка полягає в характеризації резольвентних матриць що виникають при розв'язанні прямої задачі. Зворотні задачі такого типу інтенсивно розглядалися в роботах В. П. Потапова для зрізаних задач Неванлінни - Піка, Каратеодорі-Фейєра, Проблеми Моментів. Для нескінченної скалярної задачі Неванлінни-Піка явні необхідні умови на коефіцієнти були отримані в роботі Неванлінни, а для задачі Нехарі у класичних роботах Адамяна, Арова і Крейна. У дисертації отримані необхідні і достатні умови на коефіцієнти параметризуючої формули загальної задачі про ліфтинг комутанту в термінах функціональних моделей. Більш того, у роботі розглянуто загальний (а не тільки цілком невизначений) випадок. І в цьому випадку доведено екстремальні властивості коефіцієнтів, які тут мають вигляд максимальних факторізаційнних нерівностей (на відміну від рівностей цілком невизначеного випадку).

У Розділі 5 результати по загальній Задачі про Ліфтинг застосовуються до скалярної невизначеної задачі Нехарі. Головним чином застосовується результат по зворотній задачі. Це дозволяє доповнити класичні результати Адамяна, Арова і Крейна новою характеризацією резольвентних матриць задачі Нехарі, еквівалентно: регулярних γ - твірних пар функцій. Далі, використовуючи отриманий критерій, в роботі вирішуються дві проблеми, поставлені Д. Сарасоном: проблема регуляризації довільної γ -твірної пари - відповідь позитивна, регуляризація завжди можлива; і проблема про достатність абсолютної неперервності мір пов'язаних з γ -твірною парою - відповідь негативна: умова не є достатньою. В роботі наведено клас контрприкладів, заснованих на межовій інтерполяційній задачі, що розглянуто у цьому розділі, а також у Розділі 6.

У Розділі 6 отримано узагальнення класичної теореми Жюліа-Каратеодорі про кутову межову похідну на випадок похідних вищого порядку. Отримано різноманітні еквівалентні форми умови Жюліа - Каратеодорі. Розгляди істотно використовують функціональні моделі Л. де Бранжа- Д. Ровняка і їх відтворюючі ядра, зокрема відтворюючі ядра що відповідають межовій точці. У цьому розділі також показано що кратний аналог умови Жюліа-Каратеодорі є еквівалентним певній симетрії межових похідних, що була раніше отримана І.В. Ковалішиною.

В Розділі 7 вивчається розширений клас Крейна - Лангера і інтерполяція в ньому. Крейн і Лангер ввели клас мероморфних функцій в крузі таких що для будь-якого скінченного набору точок кругу від'ємний індекс інерції матриці Піка не перевищує κ, а для деяких наборів точок він дорівнює κ. Однак на відміну від випадку $\kappa = 0$ (коли невід'ємність матриць Піка тягне аналітичність), у випадку $\kappa > 0$ функція, всі матриці Піка якої мають цю властивість, не обов'язково є мероморфною, вона може мати

скінченні стрибки. В роботі розглядається цей розширений клас Крейна - Лангера (який позначено як S_κ) і доводиться низка теорем про функції цього класу. Зокрема, теорема про продовження всякої функції класу S_κ до стандартної. В цьому розділі також обчислений індекс κ для функцій з заданим числом стрибків і полюсів.

У заключному параграфі цього ж розділу вивчається інтерполяційна задача Неванлінни - Піка в класі S_κ. Дайксма і Лангер вирішували цю задачу обмежуючись лише мероморфними функціями. Множина розв'язків описувалася традиційним для цього кругу задач чином у вигляді дробово - лінійного перетворення. Однак авторами було виявлено що деяким параметрам відповідали сторонні розв'язки. А саме, при деяких значеннях параметрів відповідна функція виявлялася в класі $S_{\kappa'}$, $\kappa' < \kappa$, в той же час інтерполяційні умови порушувалися в деяких вузлах інтерполяції. У цій дисертації доведено що сторонніх розв'язків немає якщо дозволити розв'язки зі стрибками, а не тільки мероморфні.

Загалом, у дисертації запропонований і систематично розвинутий підхід, який використовує унітарні системи розсіювання для дослідження інтерполяційних задач аналізу. Цей підхід дозволяє отримувати тонкі аналітичні результати виходячи з внутрішньої структури систем розсіювання що відповідають даним задачі інтерполяції.

Усі основні результати наведено з повними доведеннями. Отримані результати мають теоретичний характер. Запропоновані методи можуть бути використані для дослідження и розв'язання різноманітних інтерполяційних задач аналізу.

Ключові слова: унітарна система розсіювання, спектральна функція, функціональний простір де Бранжа - Роняка, функціональний простір Хеллінгера, абстрактна задача інтерполяції, пряма та зворотня задача про ліфтинг комутанту, задача Нехарі, символи сплітаючого стиску, Аров-регулярні та Аров-сингулярні γ-твірні функції, теорема Жюліа - Каратеодорі, межова інтерполяція, клас Крейна-Лангера.

ABSTRACT

Oleksandr Y. Kheifets. Unitary Scattering Systems and Interpolation Problems. - Qualification scientific paper, manuscript.

Thesis for a Doctoral Degree in Physics and Mathematics: Speciality 01.01.01 - Mathematical Analysis (Physics and Mathematics). - University of Massachusetts Lowell, USA; B. I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2019.

The thesis proposes and develops methods for solving interpolation problems of analysis, based on the use of unitary scattering systems, which are naturally associated to the data of the problem and its solutions. The corresponding inverse problems are also solved.

The thesis studies the Commutant Lifting problem, a higher order analogue of the Carathéodory - Julia theorem on an angular boundary derivative and the related boundary interpolation problem in the Schur class, the extended Krein-Langer class, and the Nevanlinna-Pick problem in it. For the Commutant Lifting problem, a parametrization of all symbols of the given contraction is obtained for the most general case and a complete characterization of the coefficients of this parametrizating formula was obtained. For the analogue of the Carathéodory - Julia condition, a number of equivalent conditions are obtained, in particular, one of these conditions is formulated in terms of certain symmetry of boundary derivatives. As the application of these methods and results, two problems of D. Sarason on regular and singular γ -generating pairs are solved in the thesis.

Chapter 2 contains the preliminary information used in the thesis. All the necessary definitions concerning unitary scattering systems are given. A detailed description of the Hellinger measure space, corresponding to the given operator measure, and some of its properties. Hellinger space realizations of the unitary scattering systems is described. The construction of the Schur complements of measures and the corresponding orthogonal decomposition of the Hellinger space is presented. The parametrization of unitary extensions of isometries and their resolvents is given. The calculuis of the feedback connections and the

corresponding dynamics is computed. The scattering functions of the connected system relative to the given scale and scale of the connection are computed.

In Chapter 3 a generalization of the Abstract Interpolation Problem scheme, previously proposed by V. Katznelson, O. Kheifets and P. Yuditskii, is elaborated. This scheme is well suited for interpolation problems in classes of analytic functions (such as the Nevanlinna-Pick problem, the Sarason problem, the Problem of moments). The scheme was simple, convenient and popular among mathematicians working in this field. In the 90s and 00s, various generalizations of the Abstract Interpolation Problem scheme appeared in the case of several variables (polycircles, balls, non-commuting variables, etc.). But in the Nehari problem and in the more general Commutant Lifting problem solutions (symbols) are not analytic. Such functions can be interpreted as the scattering functions of the systems more general than colligations. In the thesis the generalization of the scheme of the Abstract Interpolation Problem is developed, which allows solving problems of this type.

Chapter 4 of the thesis deals with the general Commutant Lifting problem: it is shown that it is embedded in the scheme of the Abstract Interpolation Problem, discussed in Chapter 3, the specificity of the data of the lifting problem is studied and a description of all liftings is obtained in terms of their symbols. The concept of lifting symbol is also introduced in this thesis and generalizes the classical concept of the symbol of the Hankel operator. In this more general case, the symbols are the measures, not the functions.

In the same Chapter the corresponding inverse problem is solved, which consists in the characterization of resolvent matrices arising when solving a direct problem. Inverse problems of this type were intensively studied in the works of V. P. Potapov for truncated Nevanlinna-Pick, Carathéodory-Fejér problems, for the truncated Moment Problem. For the infinite scalar Nevanlinna-Pick problem, necessary conditions for the coefficients were obtained in the work of Nevanlinna, and for the problem of Nehari in the classical works of Adamyan, Arov, and Kerin. In the thesis the necessary and sufficient conditions on the coefficients of the parametrizating formula of the general Commutant Lifting problem in terms of functional models are obtained. Moreover, the thesis deals with the general (not just completely indeterminate) case. And in this case, the extremal properties of the coefficients, which here are the form of maximum factorization inequalities (as opposed to the equalities of the completely indeterminate case), are proved.

In Chapter 5 the results of the general Lifting problem are applied to the scalar indeterminate Nehari problem. Mostly the result on the inverse problem is applied. This allows to complete the classic results by Adamyan, Arov, and Krein with a new characterization of the resolvent matrices of the Nehari problem, equivalently, he regular γ-generating pairs of functions. Further, using the obtained criterion, the author of the thesis solves two problems posed by D. Sarason: the problem of regularizing an arbitrary γ -generating pair - the solution is positive, regularization is always possible; and the problem of the sufficiency of the absolute continuity of measures associated to the γ - generating pair is negative: the condition is not sufficient. The thesis presents a class of counterexamples based on the boundary interpolation problem, which is discussed in this chapter and also in Chapter 6.

In Chapter 6 a generalization is obtained of the classical Carathéodory - Julia theorem on the angular boundary derivative in the case of higher order derivatives. Various equivalent forms of the Carathéodory - Julia condition have been obtained. The considerations essentially use the functional models of de Branges - Rovnyak and their reproducing kernels, in particular, the reproducing kernels corresponding to the boundary point. It is also shown in this section that the higher order analogue of the Carathéodory - Julia condition to the certain symmetry of the boundary derivatives, obtained earlier by I.V. Kovalishina.

In Chapter 7 the extended Krein-Langer class and interpolated in it are studied. The Krein-Langer class arises in the study of unitary operators (colligations) in the Pontryagin spaces (spaces with indefinite inner product). This class is characterized by the following: meromorphic functions in the unit dsk such that for every finite set of points of the disk the negative index of inertia of the corresponding Pick matrix does not exceed κ,and for some sets of points it is equal to κ. However, as simple examples show, unlike the case $\kappa = 0$ (when the nonegativity of the Pick matrices implies analyticity), in the case of $\kappa > 0$ a function whose Pick matrices have this property is not necessarily meromorphic, it may have finite jumps. This extended Krein-Langer class (denoted as S_κ) isstudied in the thesis. A number of theorems is proved about the functions of this class. In particular, the theorem on the extension of any function of the class S_κ to the standard one. In this section the index κ for functions with a given number of jumps and poles is also computed.

In the last section of this Chapter Nevanlinna-Pick interpolation problem is studied in the class S_κ. Dijksma and Langer solved this problem in the class of meromorphic functions in S_κ. The solution set was described in the traditional for problems of this type way in the form of a fractional-linear transformation. However, the authors observed that some parameters produced extraneous solutions, namely, the functions that are in the class $S_{\kappa'}$, $\kappa' < \kappa$. At the same time, the interpolation conditions were violated in some interpolation nodes. In this thesis, it is proved that there are no extraneous solutions if they are allowed to have jumps, not only poles.

In general, the thesis proposed and systematically developed an approach that uses unitary scattering systems to investigate the interpolation problems of analysis. This approach allows you to obtain subtle analytical results based on the internal structure of the corresponding scattering systems, which in turn reflect the structure of the interpolation problem data.

All main results are given with full proofs. The results obtained are of a theoretical nature. The proposed methods can be used to study and solve various interpolation problems of analysis.

Key words: unitary scattering system, spectral function, functional space of de Branges - Ronyak, functional space of Hellinger, abstract interpolation problem, direct and inverse Commutant Lifting problem, Nehari problem, symbols of the intertwiner, Arov-regular and Arov-singular γ-generating functions, Caratheéodory - Julia theorem, boundary interpolation, Krein-Langer class.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації у математичних реферованих виданнях

1. Kheifets A. Ya. , On necessary but not sufficient condition for gamma-generating pair to be a Nehari pair, Integral Equations and Operator Theory 21, 3 (1995) 334-341.
2. Kheifets A. Ya. , Regularization of gamma-generating pairs and exposed points in, Journal of Functional Analysis, 130, 2 (1995) 310–333.
3. Kheifets A. Ya., Hamburger moment problem: Parseval equality and Arov-singularity, Journal of Functional Analysis, 141, 2 (1996) 374-420.
4. Kheifets A., Nehari problem and exposed points of the unit ball in the Hardy space, Israel Mathematical Conference Proceedings, 11 (1997) 145-151.
5. Boiko S., Dubovoy V., Kheifets A., On some extremal problem for harmonic operator functions on the unit disk, Dopov. Akad. Nauk Ukr. (Prirodozn. Tekh. Nauki), 9 (1999) 37-41.
6. Kheifets A., Parameterization of solutions of the Nehari Problem and nonorthogonal dynamics, Operator Theory: Advances and Applications, 115 (2000) 213-233.
7. Boiko S., Dubovoy V., Kheifets A., Measure Schur complements and spectral functions of unitary operators with respect to different scales, Operator Theory: Advances and Applications, 123 (2001) 89-138.
8. Kheifets A., Abstract Interpolation Scheme for Harmonic Functions, Operator Theory: Advances and Applications, 134 (2002) 287-317.
9. Bolotnikov V., Kheifets A., Rodman L., Functions with Pick matrices having bounded number of negative eigenvalues, Contemporary Mathematics, 323 (2003) 393-417.

10. Bolotnikov V., Kheifets A., Rodman L., Pairs of functions with indefinite Pick matrices, Linear Algebra and its Applications, 367 (2003), 271—290.
11. Bolotnikov V., Kheifets A., Rodman L., Nevanlinna – Pick interpolation: Pick matrices have bounded number of negative eigenvalues, Proceedings of Amer. Math. Soc., 132 (2004) no. 3 769-780.
12. Bolotnikov V., Kheifets A., Rodman L., Operator valued jet functions with positive Carathéodory-Pick matrices, Integral Equations and Operator Theory 50 (2004), no. 3, 291—304.
13. Bolotnikov V., Kheifets A., Rodman L., Jet functions having indefinite Carathéodory-Pick matrices, Linear Algebra and its Applications, 385 (2004) 215-286.
14. Bolotnikov V., Kheifets A., On negative inertia of Pick matrices associated with generalized Schur functions, Integral Equations and Operator Theory, 56 (2006) no. 3, 323–355.
15. Bolotnikov V., Kheifets A., Boundary Nevanlinna-Pick interpolation problems for generalized Schur functions, Operator Theory: Advances and Applications, 165 (2006) 67—119.
16. Bolotnikov V., Kheifets A., A higher order analogue of the Carathéodory-Julia theorem, Journal of Functional Analysis, 237 (2006) no. 1, 350-371
17. Bolotnikov V., Kheifets A., The higher order Carathéodory-Julia theorem and related boundary interpolation problems, Operator Theory: Advances and Applications, 179 (2008) 63-102.
18. Bolotnikov V., Kheifets A., Carathéodory-Julia type theorems for operator valued Schur functions, Journal d'Analyse Mathematique, 106 (2008) no. 1, 237-270.
19. Bolotnikov V., Kheifets A., Carathéodory-Julia type conditions and symmetries of boundary asymptotics for analytic functions on the unit disk, Mathematische Nachrichten, 282 (2009) no. 11, 1513-1536.

20. Ball J., Kheifets A., The inverse commutant lifting problem. I: coordinate free formalism, Integral equations and Operator Theory, 70 (2011) no. 1, 17-62.
21. Ball J., Kheifets A., The inverse commutant lifting problem. II: Hellinger functional-model spaces, Complex Analysis and Operator Theory, 7 (2013) no. 4, 873-907.
22. Boiko S., Dubovoy V., Kheifets A., Defect functions of holomorphic contractive operator-functions and the scattering sub-operator through the internal channels of a system. II, Complex Analysis and Operator Theory, 8 (2014) no. 5, 991-1036.
23. Boiko S., Dubovoy V., Kheifets A., On some special cases of Radon – Nikodym theorem for vector- and operator-valued measures, Operator Theory: Advances and Applications, 244 (2015) 131 – 147.

Публікації у матеріалах міжнародних наукових конференцій

24. Kheifets A., Abstract Interpolation Problem and Commutant Lifting Problem, Book of abstracts of the IX-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Bloomington, USA (1996), p. 25.
25. Kheifets A., Solutions of an Indeterminate Nehari Problem, Book of abstracts of the international conference Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), Saint Louis, USA (1996), p. 57.
26. Kheifets A., Abstract Interpolation Problem for Harmonic Functions, Book of abstracts of the Conference in Honor of H. Dym 60's Anniversary, the Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel (1999), p. 17.
27. Kheifets A., Couplings, Scales and Wave Operators in Interpolation Problems, Book of abstracts of the XIII-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Bordeaux, France (2000), p. 54.

28. Kheifets A., Computing the Scattering Function of the Feedback Loading, Book of abstracts of the meting of the Israel Mathematical Union (IMU), Haifa, Israel (2000), p. 42.
29. Kheifets A., The Abstract Interpolation Problem in the Scattering Setting, Book of abstracts of the International Akhiezer Centenary Conference, Theory of Functions and Mathematical Physics, Kharksv, Ukraine (2001), p. 45.
30. Kheifets A., Defect and Equality in Boundary Interpolation Problem, Book of abstracts of the XIV-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Blacksburg, USA (2002), p. 33.
31. Kheifets A., Abstract Interpolation in Scattering Setting, Book of abstracts of the International Conference Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), South Bend, USA (2002), p. 21.
32. Kheifets A., Multiple Analogue of Julia – Caratheodory Theorem on Angular Derivative, Book of abstracts of the Southeastern Analysis Meeting (SEAM), Knoxville, USA (2003), p. 26.
33. Kheifets A., On the Commutant Lifting Problem, Book of abstracts of the XV-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Newcastle, UK (2004), p. 43.
34. Kheifets A., On Boundary Interpolation, Book of abstracts of the XVI-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Storrs, USA (2005), p. 37.
35. Kheifets A., Direct and Inverse Lifting Type Interpolation Problems, Book of abstracts of the B. Ya. Levin Centennial Conference, Entire and Subharmonic Functions and Related Topics, Kharkiv, Ukraine (2006), p. 22.
36. Kheifets A., Direct and Inverse Lifting Problem, Book of abstracts of the XVI-th Summer St.-Petersburg Meeting in Mathematical Analysis, St.-Petersburg, Russia (2007), p. 24.

37. Kheifets A., Abstract Interpolation Problem. Direct and Inverse Lifting Problem, Book of abstracts of the International Conference Analysis and Mathematical Physics, Kharkiv, Ukraine (2013), p. 9-10.

ЗМІСТ

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. В кінці XIX століття Стільтьєс розглянув степеневу проблему моментів і застосував до її дослідженню розроблену ним теорію ланцюгових дробів. На початку XX століття Каратеодорі, Фейер, Ф. Ріс, Шур, Пік, Неванлінна розглядали конкретні інтерполяційні задачі, при описі розв'язків яких проглядалася певна спільність: множина розв'язків описувалась у вигляді дробово-лінійного перетворення (коефіцієнти якого визначаються даними задачі) над довільною функцією деякого класу (наприклад, аналітичної в одиничному крузі що по модулю не перевищує 1). Величезну роль в дослідженні цих задач зіграли роботи Сегьо. Один з підходів був заснований на теорії ортогональних многочленів. Зв'язок цього кола задач з розширеннями ермітових операторів мабуть була виявлена Гамбургером і незалежно М.С. Лівшицем на початку 40-х років. Цей підхід отримав потужний розвиток в роботах Адамяна, Арова і Крейна кінця 60-х років, які використовували розвинену раніше М.Г. Крейном і А.В. Штраусом теорію узагальнених резольвент ермітових операторів. Альтернативний підхід був розроблений в 60-ті - 70-ті роки В.П. Потаповим. В основу цього підходу була покладена Лема Шварца та її далекосяжні узагальнення, які В.П. Потапов назвав Основною Матричною Нерівністю задачі. Значну роль в становленні цього підходу зіграли роботи І.В. Ковалішиної і В.Е. Кацнельсона. Наприкінці 80-х років підходи Адамяна-Арова-Крейна і Потапова вдалим і зручним чином поєдналися в Схемі Абстрактної Задачі інтерполяції розробленої В.Е. Кацнельсоном, П.М. Юдицьким і автором цієї дисертації (що склало основний зміст його кандидатської дисертації). Ця схема швидко набула популярності і стала широко застосовуватися. Однак вона працювала тільки в тих задачах, розв'язки яких були аналітичними функціями. У задачі Нехарі розв'язки (символи) неаналітичні. Тому необхідно було модифікувати схему Абстрактної Задачі інтерполяції так щоб вона підходила і для задач типу Нехарі. Крім того, класичні результати з матричної задачі Нехарі відносяться тільки до цілком невизначеного випадку і навіть в скалярній задачі була відсутня повна характеризация коефіцієнтів формули що параметризує розв'язки задачі. Необхідність доповнити ці класичні результати є однією з найбільш актуальних задач в цій галузі аналізу.

Наприкінці 80-х років Д. Сарасон, один з провідних світових експертів в області комплексного аналізу та теорії операторів, сформулював дві задачі тісно пов'язані з характеризацією коефіцієнтів формули, що параметризує розв'язки невизначеної скалярної задачі Нехарі. Одна з них запитує чи можлива регуляризація довільної γ-твірної пари, друга запитує чи є властивість абсолютної неперервності мір, пов'язаних з γ-твірною парою, достатньою для її регулярності. У цій дисертації дано розв'язок обох цих задач: першої в позитивному сенсі, другої в негативному.

Клас Крейна-Лангера був введений цими авторами в 70-і роки в зв'язку зі спектральною теорією самоспряжених і унітарних операторів в просторах Понтрягіна. Пізніше Лангер, Дайксма і інші автори розглядали інтерполяційні задачі типу Неванлінни-Піка в цьому класі. Хоча опис розв'язків надається у традиційному для цього типу задач вигляді дробово-лінійного перетворення, спостерігався ефект сторонніх розв'язків: при деяких параметрах формула давала функції, які випадали з необхідного класу, і які не приймали необхідні значення в деяких вузлах інтерполяції. Пояснення цього феномена становило інтерес.

Мета і задачі дослідження. Основною метою дослідження є розробка схеми Абстрактної Задачі Інтерполяції, яка дозволяла б вирішувати конкретні інтерполяційні задачі не тільки в класах аналітичних оператор-функцій, але і в класі додатних гармонійних оператор-функцій, і на основі цього отримання нових тонких результатів по задачі Нехарі і задачі про ліфтинг комутанта в найзагальнішому (а не тільки в цілком невизначеному) випадку.

Об'єктами дослідження є інтерполяційні задачі аналізу, пов'язані з ними унітарні системи розсіювання та відповідні модельні простори функцій або мір.

Предметом дослідження є структури унітарних систем розсіювання, пов'язаних з задачами аналізу, та відповідних модельних просторів, які дозволяють отримувати тонкі аналітичні властивості коефіцієнтів формул що параметрізують розв'язки задачі.

Задачі дослідження:

- Розширити схему Абстрактної Задачі Інтерполяції на випадок, коли розв'язками є не тільки аналітичні, а й додатні гармонічні функції (або відповідні їм міри).
- На основі цього підходу отримати повний розв'язок задачі про ліфтинг комутанту у самому загальному випадку (попередні результати стосувалися цілком невизначеного випадку).
- Отримати повну характеризацію коефіцієнтів формули, що параметризує всі розв'язки задачі про ліфтинг комутанту (символи ліфтингу).
- Використовуючи згадану характеризацію, вирішити задачу Д.Сарасона про регуляризацію γ-твірних пар.
- Отримати кратний аналог теореми Жюліа – Каратеодорі про кутову межову похідну та розглянути відповідну межову інтерполяційну задачу.
- Використати нескінченну межова інтерполяційну задачу для побудови класу сингулярних γ-твірних пар, які мають властивість абсолютної неперервності. Тим самим буде наведено клас контрприкладів до гіпотези Д. Сарасона, яка стверджувала що властивість абсолютної неперервності характеризує регулярні γ-твірні пари.
- Вивчити розширений клас Крейна – Лангера, який містить крім функцій з полюсами ще й функції зі стрибками, та в цьому класі вирішити інтерполяційну задачу Неванлінни – Піка. Довести що при такому підході зайвих розв'язків не буде.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії аналітичних та гармонійних функцій, теорії міри, зокрема Ґільбертові простори аналітичних та гармонійних функцій, методи теорії операторів та лінійних унітарних систем.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати які виносяться на захист:

- Розширено схему Абстрактної Задачі Інтерполяції на випадок, коли розв'язками є не тільки аналітичні, а й додатні гармонічні функції (або відповідні їм міри).
- На основі цього підходу отримано повний розв'язок задачі про ліфтинг комутанту у самому загальному випадку (попередні результати стосувалися цілком невизначеного випадку).
- Отримано повну характеризацію коефіцієнтів формули, що параметризує всі розв'язки задачі про ліфтинг комутанту (символи ліфтингу).
- Використовуючи цю характеризацію, позитивно розв'язано задачу Д.Сарасона про регуляризацію γ-твірних пар.
- Отримано кратний аналог теореми Жюліа – Каратеодорі про кутову межову похідну та розглянуто відповідну межову інтерполяційну задачу.
- На основі нескінченної межової інтерполяційної задачі побудовано клас сингулярних γ-твірних пар, які мають властивість абсолютної неперервності. Тим самим наведено клас контрприкладів до гіпотези Д. Сарасона, яка стверджувала що властивість абсолютної неперервності характеризує регулярні γ-твірні пари.
- Вивчено розширений клас Крейна – Лангера, який містить крім функцій з полюсами ще й функції зі стрибками, та в цьому класі розв'язано інтерполяційну задачу Неванлінни – Піка. Доведено що при такому підході зайвих розв'язків немає.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер. У дисертації проведено фундаментальні дослідження, які поглиблюють наші знання про інтерполяційні задачі аналізу, про властивості коефіцієнтів формул, що параметризують розв'язки задач, про структуру відповідних модельних просторів функцій або мір. Отримані результати можуть бути використані в теорії функцій, зокрема в теорії Ґільбертових та Банахових просторів аналітичних або гармонійних функцій, в теорії операторів, зокрема при побудові функціональних моделей операторів та більш загальних лінійних систем, в інших розділах функціонального аналізу та математики взагалі.

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати дисертації, що виносяться на захист, одержано здобувачем особисто і самостійно. З результатів праць, які виконано у співавторстві, на захист виносяться лише положення, що одержані автором дисертації. Далі нумерація робіт надається згідно Додатку А.

В роботах [5, 7, 22, 23] здобувачу належить визначення унітарної системи розсіювання, яке узагальнює визначення системи розсіювання Лакса - Філліпса, визначення та доведення властивостей Шурівських доповнень мір, зокрема, застосування цих доповнень до ортогональних розкладів просторів Хеллінгера, ідея використання векторної Теореми Радона - Нікодима для спрощення цих загальних результатів в контексті задачі про доповнення, отримання явної формули для розв'язку задачі доповнення. В цих роботах також викладено попередні результати здобувача по простору Хеллінгера та моделям унітарних операторів в ньому. В роботах [20, 21] здобувачу належить визначення символу ліфтингу (міри), параметризація всіх символів що відповідають заданому стисненню, характеризація коефіцієнтів параметризуючої формули та доведення екстремальних властивостей цих коефіцієнтів, застосування цих загальних результатів для доповнення класичної теореми Адамяна-Арова-Крейна. В роботі [16] здобувачу належить доведення властивостей межових відтворюючих ядер та доведення основної теореми що узагальнює класичну теорему Жюліа - Каратеодорі, у роботі [18] здобувачу належать аналогічні результати для випадку операторно - значних функцій. В роботі [17] здобувачу належить вкладення межової інтерполяційної задачі в схему Абстрактної інтерполяції, отримання параметризації розв'язків та доведення властивостей коефіцієнтів параметризуючої формули. У роботі [19] здобувачу належить доведення того що збіг асимптотик відповідного порядку зсередини і ззовні є еквівалентним кратній умові Жюліа - Каратеодорі. В роботі [14] здобувачу належить доведення достатності у Теоремі 1.1, Леми 3.3, Теорем 3.4, 6.1 та 6.4. В роботі [9] здобувачу належить визначення розширеного класу Крейна - Лангера та стандартних функцій в ньому, доведення існування продовження довільної функції цього класу до стандартної, обчислення від'ємного індексу стандартної функції. В роботах [10], [12], [13], всі основні результати належать авторам в рівній мірі. В роботі [11] здобувачу належить формулювання та доведення теореми що описує всі стандартні розв'язки задачі Неванлінни - Піка у класі з від'ємними квадратами, теореми про продовження та побудова прикладу до неї.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на наступних семінарах та міжнародних наукових конференціях:

Семінар відділу Теорії Функцій, ФТІНТ, Харків 1993

Operator Theory seminar, The Weizmann Institute of Science, Rehovot, Ізраїль, 1993-1995

9-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Bloomington, США, 1996

Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), Saint Louis, США, 1996

International Conference in Honor of M. Livsits 80's Anniversary, Beer-Sheva, Ізраїль, 1997

International Conference in Memory of M. G. Krein, Одеса 1997

Семінар з Теорії Операторів, Харківський Національний університет, Харків 1997

Analysis seminar, Simon Bolivar University, Caracas, Венесуела, 1998

10-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Groningen, Голандія, 1998

Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), Padova, Італія, 1998

Семінар з Аналізу, Харківський Національний університет, Харків 1998

Conference in Honor of H. Dym 60's Anniversary, the Weizmann Institute of Science, Rehovot, Ізраїль, 1999

13-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Bordeaux, Франція, 2000

Israel Mathematical Union (IMU), Haifa, Ізраїль, 2000

Seminar Department of Mathematics, Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Ізраїль, 2000

Theory of Functions and Mathematical Physics, International Akhiezer Centenary Conference, Харків 2001

13-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Blacksburg, США, 2002

Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), South Bend, США, 2002

International Linear Algebra Society (ILAS), Auburn, США, 2002

Great Plains Operator Theory Symposium (GPOTS), Charlotte, США, 2002

Department of Mathematics colloquium, University of Massachusetts Lowell, Lowell, США, 2003

Analysis Seminar, Brown University, Providence, США, 2003

Southeastern Analysis Meeting (SEAM), Knoxville, США, 2003

15-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Newcastle, Англія, 2004

Operator Theory Seminar, University of Connecticut, Storrs, США, 2004

16-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Storrs, США, 2005

Entire and Subharmonic Functions and Related Topics (B. Ya. Levin Centennial Conference), Харків, 2006

16-th Summer St.-Petersburg Meeting in Mathematical Analysis, St.-Petersburg, Росія, 2007

Characteristic Functions and Transfer Functions in Operator Theory and System Theory, Conference in Memory of M.S. Livsits, Beer-Sheva, Ізраїль, 2007

International Conference Analysis and Mathematical Physics, Харків, 2013

Семінар з Аналізу, Донецький Національний університет, Донецьк 2013

Публікації. Результати дисертації, що винесено на захист, опубліковано у 23 наукових статтях [1] - [23] і у 14 тезах доповідей на наукових конференціях [24] - [37] (див. Додаток А).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків і списку використаних джерел та 1 додатку. Обсяг загального тексту дисертації складає 328 сторінок, з них основного тексту 297 сторінки.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І КОРОТКИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

1.1 Абстрактна Задача Інтерполяції

Ряд задач, який називають "класичними задачами аналізу"[1], можна поділити на дві групи. Для першої групи задача полягає в тому щоб знайти аналітичні в даній області функції, які належать до певного класу і які задовольняють певним інтерполяційним умовам (або зводиться до цього). Типовими прикладами таких задач є задача Неванлінни-Піка, задача Сарасона, Проблема Моментів. До другої групи відносяться задачі, розв'язками яких є неаналітичні функції на межі області (або гармонійні в області). Прикладами таких задач є задача Нехарі (опис символів Ганкелева оператора) і більш загальна задача про Ліфтинг Комутанту.

Схема Абстрактної Задачі Інтерполяції, запропонована раніше в роботі В. Э. Кацнельсона, П. М. Юдицького та моїй [61], і яка лягла в основу моєї кандидатської дисертації, добре підходить для задач першого типу, таких як задача Неванлінни-Піка, інтерполяція в межових точках області аналітичності (наприклад, степенева проблема моментів), оскільки характеристична функція вузла завжди аналітична. Схема виявилась досить простою, зручною і надбала популярності серед математиків що працюють в цій галузі аналізу. В 90-і и 00-і роки з'явились різноманітні узагальнення схеми Абстрактної Задачі Інтерполяції на випадок багатьох змінних (полідиск, куля, некомутовні змінні, тощо [22, 23, 24]), а також на задачі інтерполяції в узагальнених класах Шура і Неванлінни [46].

Схема Абстрактної Задачі Інтерполяції була не першою в даному колі задач. Основна відмінність нашої схеми від попередніх полягала в використанні унітарних вузлів замість ізометричних операторів і стиснень. Ця

---

[1] Назва мотивована книгою Н. І. Ахієзера "Классическая Проблема Моментов и Связанные с нею Задачи Анализа"

мова виявився більш зручною в даному колі питань. Іншою відмінністю було інтенсивне використання функціональних моделей (де Бранжа - Ровняка і Хеллінгера). Використовуючи з'єднання унітарних вузлів, мною було отримано узагальнення теореми Неванлінни-Адамяна-Арова-Крейна про унітарність межових значень матриць коефіцієнтів деяких задач, яке було викладено в моїй кандидатській дисертації.

Але в задачі Нехарі і в більш загальній задачі про Ліфтинг Комутанту розв'язки (символи) не э аналітичними функціями. Такі функції можна трактувати як функції розсіювання систем більш загальних ніж вузли. В статті [71] мною розроблено поширення схеми Абстрактної Задачі Інтерполяції, яке дозволяє вирішувати задачі такого типу. Викладу цього узагальнення присвячений Розділ 3 даної дисертації.

Нагадаємо спочатку постановку Абстрактної Задачі Інтерполяції, як вона була сформульована в роботі В. Э. Кацнельсона, П. М. Юдицького та моїй [61] (див. також [62], [63], [64] , [72] и [69]).

Абстрактна Задача Інтерполяції. Дані задачі: лінійний простір X, позитивно невід'ємна півтора-лінійна форма $D(x, y)$ на $X \times X$, лінійні оператори T_1 і T_2 що діють в X, лінійні відображення $M_1 : X \to E_1$ і $M_2 : X \to E_2$ з простору X в Ґільбертові простори E_1 і E_2, відповідно. Ці дані пов'язані наступною тотожністю

$$D(T_1x, T_1y) + < M_1x, M_1y >_{E_1} = D(T_2x, T_2y) + < M_2x, M_2y > . \qquad (1.1.1)$$

Ми говоримо що аналітична в одиничному крузі $\mathbb{D}$ стискуюча операторнозначна функція $w(\zeta) : E_1 \to E_2$, $\zeta \in \mathbb{D}$, є розв'язком Абстрактної Задачі Інтерполяції якщо існує лінійне відображення

$$F : X \to H^w \qquad (1.1.2)$$

таке що

$$(i) \qquad \bar{t}((FT_1x)(t) + \begin{bmatrix} w(t) \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} M_1x) = (FT_2x)(t) + \bar{t} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ w(t)^* \end{bmatrix} M_2x, \qquad (1.1.3)$$

для майже усіх t на одиничному колі $\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$;

$$(ii) \qquad \|Fx\|^2_{H^w} \leq D(x, x). \tag{1.1.4}$$

Тут

$$L^w = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & w \\ w^* & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{1/2} \begin{bmatrix} L^2(E_2) \\ L^2(E_1) \end{bmatrix}, \tag{1.1.5}$$

наділене нормою образа, і

$$H^w = L^w \cap \begin{bmatrix} H^2_+(E_2) \\ H^2_-(E_1) \end{bmatrix}, \tag{1.1.6}$$

з нормою індукованою з L^w; L^2 простір квадратично інтегровних відносно міри Лебега вектор-функцій на одиничному колі $\mathbb{T}$; $H^2_+(E_2)$ и $H^2_-(E_1)$ векторні простори Харді, зі значеннями в E_2 и E_1, відповідно.

Форма D наділяє простір X структурою Ґільбертового простору. Позначимо його як H_0. Тоді тотожність (1.1.1) задає ізометричний оператор

$$V : E_1 \oplus H_0 \to H_0 \oplus E_2,$$

з областю визначення

$$d_V = Clos\{M_1 x \oplus T_1 x, x \in X\} \subseteq E_1 \oplus H_0$$

і областю значень

$$\Delta_V = Clos\{T_2 x \oplus M_2 x, x \in X\} \subseteq H_0 \oplus E_2.$$

Зауважимо що простір L^w, визначений в (1.1.5), допускає наступний розклад

$$L^w = \begin{bmatrix} w \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} H^2_+(E_1) \oplus H^w \oplus \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ w^* \end{bmatrix} H^2_-(E_2). \tag{1.1.7}$$

Це дозволяє природним чином вкласти E_1 і E_2 в L^w

$$F : E_1 \to L^w, \ F : E_2 \to L^w,$$

якщо ми визначимо

$$Fe_1 = \begin{bmatrix} w \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} e_1, \ Fe_2 = \bar{t} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ w^* \end{bmatrix} e_2. \tag{1.1.8}$$

Зауважимо що в силу (1.1.7), $F(E_1)$, $F(H_0)$, $F(E_2)$ є взаємно ортогональними в L^w, та

$$F : E_1 \oplus H_0 \to \begin{bmatrix} w \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} E_1 \oplus H^w,$$

$$F : H_0 \oplus E_2 \to H^w \oplus \bar{t} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ w^* \end{bmatrix} E_2. \tag{1.1.9}$$

В цих позначеннях (1.1.3) можливо переписати як

$$FV \Big|_{d_V} = \bar{t}F \Big|_{d_V}. \tag{1.1.10}$$

Для того щоб перейти до більш загальної постановки, в дисертації переформульовано (Розділ 3.2, опубліковано в [71]) викладену вище постановку в термінах унітарних систем розсіювання. Це поняття узагальнює поняття унітарного вузла. По-перше, перетворюються дані задачі. Позначимо як $\tilde{X}$ простір векторів виду

$$\tilde{x} = (\cdots e_1^{(1)}, e_2^{(0)}, x, e_2^{(-1)}, e_2^{(-2)}, \cdots) \tag{1.1.11}$$

де

$$x \in X,\ e_1^{(k)} \in E_1,\ k \geq 0 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \|e_1^{(k)}\|^2 < \infty,$$

$$e_2^{(k)} \in E_2,\ k \leq -1 \qquad \sum_{k=-\infty}^{-1} \|e_2^{(k)}\|^2 < \infty.$$

Визначимо

$$\tilde{D}(\tilde{x}, \tilde{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \|e_1^{(k)}\|^2 + D(x, x) + \sum_{k=-\infty}^{-1} \|e_2^{(k)}\|^2, \tag{1.1.12}$$

$$\tilde{T}_1\tilde{x} = (\cdots, e_1^{(1)}, e_1^{(0)}, M_1x, T_1x, e_2^{(-1)}, e_2^{(-2)}, e_2^{(-3)}, \cdots), \tag{1.1.13}$$

і

$$\tilde{T}_2\tilde{x} = (\cdots, e_1^{(2)}, e_1^{(1)}\ ,\ e_1^{(0)}, T_2x, M_2x\ , e_2^{(-1)}, e_2^{(-2)}, \cdots). \tag{1.1.14}$$

До даних задачі додамо ще одне

$$\rho_0 : \begin{bmatrix} \bar{t}E_2 \\ E_1 \end{bmatrix} \to \tilde{X}, \tag{1.1.15}$$

що визначається наступним чином

$$\rho_0 : E_1 \to E_1^{(0)} \ ; \ \ \rho_0 : \bar{t}E_2 \to E_2^{(-1)} \ .$$

Позначимо як

$$E = \begin{bmatrix} \bar{t}E_2 \\ E_1 \end{bmatrix}$$

з нормою

$$\| \begin{bmatrix} \bar{t}e_2 \\ e_1 \end{bmatrix} \|^2 = \|e_2\|^2 + \|e_1\|^2.$$

Відображення $F : X \to H^w$ (1.1.2) (див. також (1.1.9)), що беруть участь у постановці задачі, можна продовжити до

$$\tilde{F} : \tilde{X} \to L^w \tag{1.1.16}$$

наступним чином

$$(\tilde{F}\tilde{x})(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} t^k e_1^{(k)} + Fx + \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \\ w(t)^* \end{bmatrix} \sum_{k=-\infty}^{-1} \bar{t}^{|k|} e_2^{(k)}, \tag{1.1.17}$$

$|t| = 1$, де збіжність розуміється в L^2 сенсі. Зауважимо що при цьому

$$\tilde{F}\rho_0 \begin{bmatrix} \bar{t}e_2 \\ e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & w(t) \\ & \\ w(t)^* & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t}e_2 \\ e_1 \end{bmatrix} \subset L^w. \tag{1.1.18}$$

Тепер Абстрактну Задачу Інтерполяції (АЗІ) може бути сформульовано еквівалентним чином

Абстрактна Задача Інтерполяції˜ (АЗІ˜). Дані задачі: векторний простір $\tilde{X}$, позитовно невід'ємна півтора-лінійна форма $\tilde{D}$ на $\tilde{X}$, лінійні оператори $\tilde{T}_1$і $\tilde{T}_2$ діючі в $\tilde{X}$; ці дані пов'язані наступною тотожністю

$$\tilde{D}(\tilde{T}_1\tilde{x}, \tilde{T}_1\tilde{y}) = \tilde{D}(\tilde{T}_2\tilde{x}, \tilde{T}_2\tilde{y}) \tag{1.1.19}$$

для усіх $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$. Крім того задане відображення (масштаб) з Ґільбертова простору E в $\tilde{X}$

$$\rho_0 : E \to \tilde{X}. \tag{1.1.20}$$

Гармонійна в крузі $\mathbb{D}$, невід'ємна оператор-функція $\sigma(\zeta) : E \to E$ (або відповідна операторно-значна міра $\sigma(dt)$ на одиничному колі $\mathbb{T}$) називається розв'язком АЗІ˜ якщо існує лінійне відображення

$$\tilde{F} : \tilde{X} \to L^{\sigma}, \tag{1.1.21}$$

(тут як L^{σ} визначено простір Хеллінгера асоційований з σ, див. [62, 63, 64, 69], Розділ 2.2 цієї дисертації) таке що

$$\begin{aligned} (i) \quad & \tilde{F}\tilde{T}_2\tilde{x} = \bar{t}\tilde{F}\tilde{T}_1\tilde{x} \\ (ii) \quad & \|\tilde{F}\tilde{x}\|^2_{L^{\sigma}} \le \tilde{D}(\tilde{x}, \tilde{x}) \\ (iii) \quad & \tilde{F}\rho_0 e = \sigma(dt)e, \ \forall e \in E. \end{aligned} \tag{1.1.22}$$

Якщо дані АЗІ˜ отримані з даних АЗІ як описано вище, то ці дві задачі є еквівалентними, якщо ми відмовимося від цієї спеціальної структури даних АЗІ˜ , то отримаємо більш загальну постановку задачі.

Так як і в попередній постановці, $\tilde{D}$ задає Ґільбертову структуру на просторі $\tilde{X}$. В результаті приходимо к простору $\tilde{H}_0$. Далі визначаємо ізометрію $\tilde{V}$:

$$\tilde{V} : [\tilde{T}_1\tilde{x}] \to [\tilde{T}_2\tilde{x}] \tag{1.1.23}$$

з областю визначення

$$d_{\tilde{V}} = Clos\{[\tilde{T}_1\tilde{x}], \tilde{x} \in \tilde{X}\} \subseteq \tilde{H}_0, \tag{1.1.24}$$

и областю значень

$$\Delta_{\tilde{V}} = Clos\{[\tilde{T}_2\tilde{x}], \tilde{x} \in \tilde{X}\} \subseteq \tilde{H}_0. \tag{1.1.25}$$

В силу нерівності

$$\|\tilde{F}\tilde{x}\|^2_{L^w} \le \tilde{D}(\tilde{x}, \tilde{x}), \tag{1.1.26}$$

відображення $\tilde{F}$ може розглядатися як відображення з $\tilde{H}_0$,

$$\tilde{F} : \tilde{H}_0 \to L^w.$$

Нерівність (1.1.26) при цьому набирає вигляд

$$\|\tilde{F}\tilde{h}_0\|^2_{L^w} \le \|\tilde{h}_0\|^2_{\tilde{H}_0}. \tag{1.1.27}$$

А властивість (i) з (1.1.22) означає що

$$\tilde{F}\tilde{V} \,\big|\, d_{\tilde{V}} = \bar{t}\tilde{F} \,\big|\, d_{\tilde{V}}. \tag{1.1.28}$$

Опис розв'язків і в цьому випадку пов'язано з унітарними розширеннями $\tilde{V}$, однак тепер обчислювати треба не характеристичну функцію розширення, а його спектральну функцію відносно масштабу ρ_0. С цього моменту будемо опускати символ $\tilde{}$ в позначенні об'єктів Абстрактної Задачі Інтерполяції$\tilde{}$.

Будемо пов'язувати з даними АЗІ$\tilde{}$, наступні об'єкти: Ґільбертів простір H_0, ізометричний оператор V з областю визначення d_V та областю значень Δ_V. Позначимо як N_{d_V} і N_{Δ_V} ортогональні доповнення d_V і Δ_V, відповідно. Підпростори N_{d_V} і N_{Δ_V} називаються дефектними підпросторами.

Для формулювання основної теореми нам знадобиться кілька визначень (деталі містяться в Розділі 2.3, та в моіх публікаціях [27, 71]). Нехай U це унітарний лінійний оператор в Ґільбертовому просторі L. Нехай E це додатковий Ґільбертів простір і $\rho : E \to L$ це обмежений лінійний оператор, званий масштабом. Трійку (L, U, ρ) будемо називати унітарною системою розсіювання. Гармонійна в $\mathbb{D}$ невід'ємна операторно-значна $(E \to E)$ функція $\sigma(\zeta)$

$$\sigma(\zeta) = \rho^* \mathcal{P}_U(\zeta)\rho$$

називається спектральною функцією U відносно масштаба ρ. Через $\mathcal{P}_U(\zeta)$ визначаємо ядро Пуасона оператора U:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_U(\zeta) &= (\mathbf{1} - \zeta U)^{-1} + (\mathbf{1} - \bar{\zeta}U^*)^{-1} - \mathbf{1} = \\ &= (1 - |\zeta|^2)(\mathbf{1} - \zeta U)^{-1}(\mathbf{1} - \bar{\zeta}U^*)^{-1}.\end{aligned}$$

Теорема 1.1. (Хейфець, [71], Розділ 3.3 даної дисертації). Множина розв'язків АЗІ$\tilde{}$ збігається з множиною спектральних функцій $\sigma(\zeta)$ унітарних розширень U ізометрії V відносно масштабу $\rho = \rho_0$. (Під унітарним розширенням ми розуміємо унітарний оператор $U : L \to L$, такий що $L \supseteq H_0$ і $U \,\big|\, d_V = V$).

Явна параметризація розв'язків (спектральних функцій операторів U відносно масштабу $\rho = \rho_0$) дана в моїй статті [71], та в Розділі 3.3 даної дисертації. Вона пов'язана з аналізом структури розширень ізометрії V. А саме, кожне розширення є з'єднанням зі зворотним зв'язком наступних двох унітарних вузлів (і кожне таке з'єднання дає розширення ізометрії V): перший вузол будується тільки по даним задачі (по ізометрії V)

$$A_0 : N_2 \oplus H_0 \to H_0 \oplus N_1,$$

де N_1 і N_2 є копіями N_{d_V} і N_{Δ_V} відповідно, та

$$A_0 \Big| d_V = V,$$

A_0 відображає тотожно N_{d_V} на N_1 і N_2 на N_{Δ_V}; другий є довільним унітарним вузлом із зовнішніми просторами N_1 і N_2 (тими самими що і вище)

$$A_1 : N_1 \oplus H_1 \to H_1 \oplus N_2,$$

тобто, це є вільний параметр. Процедура з'єднання зі зворотним зв'язком докладно описана в Розділі 3.3.

В процесі з'єднання виникає ще один (допоміжний) оператор

$$i = i : N_1 \oplus N_2 \to H_0 \oplus H_1, \tag{1.1.29}$$

який будемо називати *дефектным масштабом* цього з'єднання. Він відіграє важливу роль при обчисленні спектральної функції U відносно масштабу $\rho = \rho_0$.

Позначимо як U_0 унітарну дилатацію вузла A_0, діючу в просторі

$$L_0 = \cdots \oplus N_2^{(1)} \oplus N_2^{(0)} \oplus H_0 \oplus N_1^{(-1)} \oplus N_1^{(-2)} \oplus \cdots, \tag{1.1.30}$$

де

$$N_2^{(0)} = N_2, \quad N_1^{(-1)} = N_1, \tag{1.1.31}$$

а інші компоненти в (1.1.30) є копіями N_1 і N_2 відповідно, що сумуються ортогонально; U_0 діє на $N_2^{(0)} \oplus H_0$ так само як і A_0

$$U_0 = A_0 : N_2^{(0)} \oplus H_0 \to H_0 \oplus N_1^{(0)} \tag{1.1.32}$$

і U_0 діє як зсув на "хвостах":

$$U_0 : N_1^{(k)} \to N_1^{(k-1)}, \;\; k \leq -1,$$
$$(1.1.33)$$
$$U_0 : N_2^{(k)} \to N_2^{(k-1)}, \;\; k \geq 1;$$

U_0 називаєтся *центральним розширенням* V. Дефектний масштаб для центрального розширення має наступний вигляд:

$$i_0 : N_1 \oplus N_2 \to L_0$$
$$i_0^{(2)} : N_2 \to N_2^{(0)} \;\; ,$$
$$i_0^{(1)} : N_1 \to U_0^* N_1^{(-1)} \overset{def}{=\!=} N_1^{(0)} \subseteq H_0.$$

Спектральна функція U_0 відносно масштабу $i_0 + \rho_0$ має вигляд

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_1} & s & r_1 \\ s^* & \mathbf{1}_{N_2} & r_2^* \\ r_1^* & r_2 & \sigma_0 \end{bmatrix} : N_1 \oplus N_2 \oplus E \to N_1 \oplus N_2 \oplus E, \qquad (1.1.34)$$

функції $s(\zeta), r_1(\zeta)$ и $r_2(\zeta)$ аналітичні в $\mathbb{D}$, $s(0) = 0$.

Теорема 1.2. (Хейфець, [71], Розділ 3.3 даної дисертації). загальний розв'язок Абстрактної Задачі Інтерполяції$^{\sim}$ має вигляд ($|\zeta| < 1$)

$$\sigma_\rho = \sigma_0 + r_2\omega(\mathbf{1} - s\omega)^{-1}r_1 + r_1^*(\mathbf{1} - \omega^* s^*)^{-1}\omega^* r_2^*, \qquad (1.1.35)$$

де ω довільна стискуюча аналітична оператор-функція

$$\omega(\zeta) : N_1 \to N_2.$$

Зауваження. Для попередньої постановки Абстрактної Задачі Інтерполяції, $E = E_1 \oplus E_2$, $\rho_0(E_1)$ та $\rho_0(E_2)$ є блукаючими підпросторами для U_0 (з ортогональними напівканалами). Внаслідок цього σ_0 набуває спеціального вигляду

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & s_0^* \\ s_0 & \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

де s_0 аналітична стискуюча оператор-функція, а функції r_1 і r_2

$$r_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ s_2 \end{bmatrix}, \;\; r_1 = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тоді σ_ρ також набуває вигляду

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & w^* \\ w & \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

де w також аналітична і

$$w = s_0 + s_2\omega(\mathbf{1} - s\omega)^{-1}s_1.$$

Ця формула й описує розв'язки Абстрактної Задачі Інтерполяції в попередній постановці.

1.2 Пряма та зворотна Задача про Ліфтинг

В Розділі 4 вивчається задача про Ліфтинг (опубліковано в моіх статтях [20, 21]): показано що вона вкладається в схему Абстрактної Задачі Інтерполяції розглянуту вище, встановлено специфіку даних задачі про Ліфтинг та розв'язано відповідну зворотну задачу. Завдяки специфіці даних, в дослідженні цієї задачі вдається просунутися набагато далі ніж в загальному випадку.

Теорема Надя и Фойаша про Ліфтинг Комутанту (скорочено Теорема про Ліфтинг) формулюється наступним чином: *задані стискуючі оператори T', T'' в Гільбертових просторах $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$ відповідно, та їх ізометричні дилатації $\mathcal{V}'$ і $\mathcal{V}''$ в Гільбертових просторах $\mathcal{K}' \supset \mathcal{H}'$ і $\mathcal{K}'' \supset \mathcal{H}''$ відповідно, заданий стискуючий оператор $X\colon \mathcal{H}' \to \mathcal{H}''$ сплітаючий T' і T'' ($XT' = T''X$), тоді існує також стискуючий оператор $Y\colon \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$ сплітаючий $\mathcal{V}'$ і $\mathcal{V}''$ ($Y\mathcal{V}' = \mathcal{V}''Y$) і який є ліфтингом X*

$$XP_{\mathcal{H}'} = P_{\mathcal{H}''}Y, \tag{1.2.1}$$

де $P_{\mathcal{H}'}$ и $P_{\mathcal{H}''}$ є ортогональні проекції $\mathcal{K}'$ на $\mathcal{H}'$ та $\mathcal{K}''$ на $\mathcal{H}''$ відповідно.

Важливий окремий випадок Теореми про Ліфтинг був доведений раніше З. Нехарі. В цьому випадку

$$\mathcal{K}' = L^2(E_1), \quad \mathcal{K}'' = L^2(E_2), \quad \mathcal{H}' = H^2(E_1), \quad \mathcal{H}'' = H^2_-(E_2),$$

$\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}''$ оператори множення на незалежну змінну t.

Відомо що загальний випадок Теореми про Ліфтинг зводиться до випадку коли $T' = \mathcal{U}'_+$ є ізометрією в Ґільбертовому просторі $\mathcal{K}'_+$ з унітарною дилатацією $\mathcal{U}'$ в просторі $\mathcal{K}' \supset \mathcal{K}'_+$ а T'' є ко-ізометрією в просторі $\mathcal{K}''_-$ з унітарною дилатацією $\mathcal{U}''$ в $\mathcal{K}'' \supset \mathcal{K}''_-$. Сформулюємо тепер Задачу про Ліфтинг Комутанта для цього випадку:

Задача 1.3 (Задача про Ліфтинг). Задані два унітарних оператори $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}''$ в Ґільбертових просторах $\mathcal{K}'$ і $\mathcal{K}''$, відповідно; задані підпростори $\mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{K}'$ і $\mathcal{K}''_- \subset \mathcal{K}''$, які є $*$-циклічними для $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}''$ відповідно (тобто, найменший підпростір що приводить $\mathcal{U}'$ та містить $\mathcal{K}'_+$ це увесь простір $\mathcal{K}'$, аналогічно для $\mathcal{U}''$ і $\mathcal{K}''_-$) і такі що

$$\mathcal{U}'\mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{K}'_+, \qquad \mathcal{U}''^*\mathcal{K}''_- \subset \mathcal{K}''_-; \tag{1.2.2}$$

заданий стискуючий оператор $X\colon \mathcal{K}'_+ \to \mathcal{K}''_-$, сплітаючий наступні оператори

$$X\mathcal{U}'|_{\mathcal{K}'_+} = P_{\mathcal{K}''_-}\mathcal{U}''X. \tag{1.2.3}$$

Потрібно описати всі стискуючі оператори $Y : \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$, які сплітають $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}''$, $Y\mathcal{U}' = \mathcal{U}''Y$ і такі що є ліфтингами X

$$P_{\mathcal{K}''_-}Y|_{\mathcal{K}'_+} = X. \tag{1.2.4}$$

Для задачі Нехарі, окремого випадку Задачі про Ліфтинг,

$$\mathcal{K}' = L^2(E_1), \quad \mathcal{K}'' = L^2(E_2), \quad \mathcal{K}'_+ = H^2(E_1), \quad \mathcal{K}''_- = H^2_-(E_2),$$

$\mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}''$ оператори множення на незалежну змінну t.

З даними Задачі про Ліфтинг зв'яжемо Абстрактну Задачу Інтерполяції (див. Розділ 4.3, опубліковано в моїх статтях [20, 21]): лінійний простір $\begin{bmatrix}\mathcal{K}''_-\\ \mathcal{K}'_+\end{bmatrix}$; форму D на ньому, що задана матрицею $\begin{bmatrix} I & X\\ X^* & I\end{bmatrix}$; оператори T_1 і T_2

$$T_1 = \begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & \mathcal{U}'\end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{U}''^* & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}.$$

Співвідношення між операторами $\mathcal{U}'$, $\mathcal{U}''$ і X (дані Задачі про Ліфтинг) тягнуть виконання тотожності

$$D(T_1x, T_1y) = D(T_2x, T_2y). \tag{1.2.5}$$

Таким чином отримуємо Ґільбертів простір $\mathcal{H}_0$

$$\mathcal{H}_0 = \operatorname{clos} \begin{bmatrix} \mathcal{K}''_- \\ \mathcal{K}'_+ \end{bmatrix} \tag{1.2.6}$$

із скалярним добутком

$$\left\langle \begin{bmatrix} k''_- \\ k'_+ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \ell''_- \\ \ell'_+ \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}_0} = \left\langle \begin{bmatrix} I & X \\ X^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k''_- \\ k'_+ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \ell''_- \\ \ell'_+ \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{K}''_- \oplus \mathcal{K}'_+}. \tag{1.2.7}$$

Ізометричний оператор V, що відповідає тотожності (1.2.5), задається як

$$V = \begin{bmatrix} \mathcal{U}''^* & 0 \\ 0 & \mathcal{U}'^* \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} k''_- \\ \mathcal{U}' k'_+ \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathcal{U}''^* k''_- \\ k'_+ \end{bmatrix}. \tag{1.2.8}$$

Область визначення і область значень V мають вигляд ($V : \mathcal{D} \to \mathcal{D}_*$)

$$\mathcal{D} := \operatorname{clos} \begin{bmatrix} \mathcal{K}''_- \\ \mathcal{U}'\mathcal{K}'_+ \end{bmatrix} \subset \mathcal{H}_0, \qquad \mathcal{D}_* := \operatorname{clos} \begin{bmatrix} \mathcal{U}''^*\mathcal{K}''_- \\ \mathcal{K}'_+ \end{bmatrix} \subset \mathcal{H}_0. \tag{1.2.9}$$

Залишається задати масштаб ρ_0. Зауважимо що це можна зробити різними способами. Як E_1 і E_2 можна вибрати будь-які $*$-циклічні підпростори $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}''$, що містяться в $\mathcal{K}'_+$ і $\mathcal{K}''_-$, відповідно. Нехай $E_2 \oplus E_1$ є формальна ортогональна сума. Тепер задамо

$$\rho_0 : E_2 \oplus E_1 \to \begin{bmatrix} \mathcal{K}''_- \\ \mathcal{K}'_+ \end{bmatrix},$$

ρ_0 тотожно на E_1 і на E_2, відповідно.

Розв'язки Абстрактної Задачі Інтерполяції з цими даними, в силу специфіки останніх, мають вигляд

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma'' & w \\ w^* & \sigma' \end{bmatrix} \geq 0, \tag{1.2.10}$$

де σ' і σ'' це спектральні функції $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}''$ відносно масштабів E_1 і E_2, відповідно. Для задачі Нехарі (нагадаємо, $\mathcal{K}' = L^2(E_1)$, $\mathcal{K}'' = L^2(E_2)$, $\mathcal{K}'_+ =$

$H^2(E_1)$, $\mathcal{K}''_- = H^2_-(E_2)$, $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}''$ оператори множення на незалежну змінну t) ці самі E_1 і E_2 можуть бути обрані в якості масштабних підпросторів.

Зв'язок між розв'язками Задачі про Ліфтинг Y і розв'язками відповідної Абстрактної Задачі Інтерполяції w мабуть простіше всього пояснити за допомогою функціональних моделей : якщо $L^{\sigma'}$ і $L^{\sigma''}$ простори Хелінгера що відповідають мірам σ' і σ'', то на щільній в $L^{\sigma'}$ множині $\sigma' p$, де p це поліноми від t і $\bar{t}$, Y задається наступним чином

$$Y(\sigma' p) = wp.$$

Стисливість цього оператора еквівалентна нерівності (1.2.10). Для задачі Нехарі це співвідношення набуває особливо простий вигляд: при виборі масштабів як зазначено вище, міри σ' і σ'' збігаються з мірою Лебега, отже, міра w абсолютно неперервна відносно міри Лебега і дія оператора Y зводиться до множення на функцію $\tilde{w}$

$$\tilde{w} : L^2(E_1) \to L^2(E_2).$$

У загальному випадку відповідність між Y і w взаємно однозначна. Міра w називається *символом* стиснення X що відповідає ліфтингу Y.

Таким чином опис розв'язків Задачі про Ліфтинг Y зводиться до опису символів w, тобто до опису розв'язків відповідної Абстрактної Задачі Інтерполяції. Спектральна функція універсального розширення, в силу специфіки даних, має вигляд

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} mI_{N_1} & s & 0 & s_1 \\ s^* & mI_{N_2} & s_2^* & 0 \\ 0 & s_2 & \sigma'' & s_0 \\ s_1^* & 0 & s_0^* & \sigma' \end{bmatrix} : N_1 \oplus N_2 \oplus E_2 \oplus E_1 \to N_1 \oplus N_2 \oplus E_2 \oplus E_1, \tag{1.2.11}$$

де m міра Лебега. При цьому s, s_2 і s_1 абсолютно неперервні відносно міри Лебега и аналітичні, $\tilde{s}(0) = 0$. В цьому випадку загальна формула опису розв'язків Абстрактної Задачі Інтерполяції зводиться до формули що описує символи ліфтингів (точний зміст цієї формули пояснюється в

Розділі 4.5)

$$w = s_0 + s_2(I - \omega s)^{-1}\omega s_1. \tag{1.2.12}$$

Зворотна Задача про Ліфтинг полягає в характеризації тих четвірок s, s_2, s_1 і s_0, що виникають в формулах (1.2.12), що описують множини розв'язків Задач про Ліфтинг. Такого типу зворотні задачі інтенсивно розглядались в роботах В. П. Потапова для зрізаних задач Неванлінни–Піка, Каратеодорі-Фейера, Проблеми Моментів. Для нескінченної скалярної задачі Неванлінни-Піка явні необхідні умови на четвірку містяться в роботі Неванлінни [80]. Необхідні умови для задачі Нехарі були отримані в класичних роботах Адамяна, Арова і Крейна в кінці 60-х років. Пізніше Аров ввів поняття регулярних і сингулярних γ-твірних пар та в ціх термінах охарактеризував пари що виникають при описі розв'язків задач Нехарі. В цій дисертації отримана характеризація (повний набір умов що є необхідними і достатніми) регулярних пар відмінна від тієї що була отримана Аровим.

Теорема 1.4. (див. Розділи 4.7, 4.8, опублікована в моїх статтях [20, 21]) Формула (1.2.12) описує всі розв'язки (символи) деякої Задачі про Ліфтинг тоді й тільки тоді коли виконуються наступні умови

1. s, s_2 і s_1 аналітичні, $s(0) = 0$
2. $$\begin{bmatrix} mI_{N_1} & s \\ s^{\,*} & mI_{N_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s_1 \\ s_2^{*} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'' & s_0 \\ s_0^{*} & \sigma' \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} 0 & s_2 \\ s_1^{*} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2.13}$$

Тут m це міра Лебегу.

3. $$\Sigma_0 \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \operatorname{clos} \Sigma_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_- \\ p_+ \end{bmatrix} \ominus \operatorname{clos} \Sigma_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_- \\ tp_+ \end{bmatrix},$$

$$\bar{t}\ \Sigma_0 \begin{bmatrix} 0 \\ N_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \operatorname{clos}\ \Sigma_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_- \\ p_+ \end{bmatrix} \ominus \operatorname{clos}\ \Sigma_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{t}p_- \\ p_+ \end{bmatrix}, \tag{1.2.14}$$

де p_+ і p_- поліноми що належать $H^2(E_1)$ і $H^2_-(E_2)$, відповідно.

Зауважимо що друга умова є узагальненням умови Неванлінни- Адамяна - Арова - Крейна.

У наступній теоремі формулюються важливі додаткові властивості коефіцієнтів формули (1.2.12).

Теорема 1.5. (см. Розділ 4.8, опублікована в моїх статтях [70, 20, 21]) Коефіцієнти формули (1.2.12) мають наступні екстремальні властивості:

1. Виконується нерівність

$$\sigma' - s_0^*\sigma''^{[-1]}s_0 \geq s_1^*\frac{1}{m}s_1. \tag{1.2.15}$$

Більш того, s_1^* є *екстремальною* в наступному сенсі: якщо r_1^* сильна $\mathcal{L}(E_1,\mathcal{N})$-значна антианалітична міра така що

$$\sigma' - s_0^*\sigma''^{[-1]}s_0 \geq r_1^*\frac{1}{m}r_1, \tag{1.2.16}$$

то існує стискуюча сильна антианалітична $\mathcal{L}(\mathcal{N}, N_1)$-значна функція θ_1^* така що

$$r_1^* = s_1^*\theta_1^* \tag{1.2.17}$$

(рівність між мірами розуміється в сильному сенсі).

2. Виконується нерівність

$$\sigma'' - s_0\sigma'^{[-1]}s_0^* \geq s_2\frac{1}{m}s_2^*. \tag{1.2.18}$$

Більш того, s_2 є *екстремальною* в наступному сенсі: якщо r_2 сильна $\mathcal{L}(\mathcal{N}_*, E_2)$-значна аналітична міра така що

$$\sigma'' - s_0\sigma'^{[-1]}s_0^* \geq r_2\frac{1}{m}r_2^*, \tag{1.2.19}$$

то існує стискуюча сильна аналітична $\mathcal{L}(\mathcal{N}_*, N_2)$-значна функція θ_2 така що

$$r_2 = s_2\theta_2. \tag{1.2.20}$$

Таким чином, задана s_0 така що $\begin{bmatrix} \sigma'' & s_0 \\ s_0^* & \sigma' \end{bmatrix} \geq 0$, однозначно визначає s_1 і s_2 як екстремальні функції в нерівностях (1.2.15) (1.2.18), відповідно. Нагадаємо, що тоді і s визначена однозначно за формулою (1.2.13).

1.3 Задача Нехарі, Аров-регулярність, дві проблеми Д.Сарасона

В Розділі 4.9 як додаток розглянуто скалярну задачу Нехарі. Деякі питаня пов'язані з цією задачею розглянуті також в Розділі 5. Нехай $E_1 = E_2 = \mathbb{C}$,

$$\mathcal{K}' = L^2, \quad \mathcal{K}'' = L^2, \quad \mathcal{K}'_+ = H^2, \quad \mathcal{K}''_- = H^2_-.$$

В цьому випадку $\dim E_1 = \dim E_2 = 1$ і розв'язки (символи) w і s_0 є скалярними функціями. Відомо що при цьому або

$$\dim N_1 = \dim N_2 = 1, \quad \text{або} \quad \dim N_1 = \dim N_2 = 0.$$

Також відомо що в першому випадку розв'язків нескінченно багато (задача називається невизначеною), а у другому випадку задача має єдиний розв'язок (задача називається визначеною). Крім того, в першому випадку виконується умова Сегьо

$$\log(1 - |s_0|^2) \in L^1,$$

а у другому вона не виконується

$$\log(1 - |s_0|^2) \notin L^1.$$

У першому випадку нерівності (1.2.15) і (1.2.18) перетворюються в рівності

$$1 - |s_0|^2 = |s_1|^2 \tag{1.3.1}$$

і

$$1-|s_0|^2=|s_2|^2, \tag{1.3.2}$$

s_1, s_2 і s також є скалярними функціями, а функції s_1 і s_2, в силу їх екстремальності (Теорема 1.5)), є зовнішніми по Бьорлінгу. Але тоді можна вважати що вони рівні

$$s_1=s_2=a.$$

У другому випадку s_1, s_2 і s неминуче дорівнюють нулю, оскільки

$$\dim N_1=\dim N_2=0,$$

і розв'язок задачі єдиний.

Далі, в першому випадку, рівність (1.2.13) зводиться до

$$s=-\frac{a}{\overline{a}}\overline{s}_0=:b \tag{1.3.3}$$

майже усюди на $\mathbb{T}$. Зауважимо, що $|b|^2=|s_0|^2=1-|a|^2$ і, отже,

$$|a|^2+|b|^2=1$$

майже всюди на $\mathbb{T}$.

І нарешті, умови (1.2.14) зводяться до умови

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\in\operatorname{clos}\left\{\begin{bmatrix}ah\\P_+s_0h\end{bmatrix}:h\in H^2_+\right\}$$

Сказане вище можна підсумувати у вигляді наступних двох теорем.

Теорема 1.6. (Адамян-Аров-Крейн) Множина розв'язків будь-якої невизначеної задачі Нехарі описується формулою (майже всюди на $\mathbb{T}$)

$$w=-\frac{a}{\overline{a}}\overline{b}+\frac{\omega a^2}{1-\omega b}=\frac{a}{\overline{a}}\frac{\omega-\overline{b}}{1-\omega b}, \tag{1.3.4}$$

де ω довільна аналітична в крузі функція, $|\omega|\le 1$ (будемо називати такі функції функціями класу Шура), функції a і b визначаються даними задачі і мають властивості

1. $a,b\in H^\infty$,
2. a зовнішня, $a(0)>0$, $b(0)=0$,

3. $|a|^2 + |b|^2 = 1$ иайже всюду на $\mathbb{T}$.

Теорема 1.7. (Хейфець, див. [66, 68] а також [20, 21]**).** На додаток до властивостей 1.-3. пара (a, b), побудована за даними невизначеної задачі Нехарі як описано вище, має властивість

4.
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{clos} \left\{ \begin{bmatrix} ah \\ P_+ s_0 h \end{bmatrix} : h \in H^2_+ \right\} \tag{1.3.5}$$
де $s_0 := -\frac{a}{\bar{a}}\bar{b}$.

Більш того, властивості 1. – 4. є необхідними і достатніми для того щоб формула (1.3.4) описувала множину всіх розв'язків деякої невизначеної задачі Нехарі, коли ω пробігає весь клас Шура.

Будемо називати пари (a, b), що мають властивості (1) – (4), ААК-парами (В. М. Адамяна, Д. З. Арова і М. Г. Крейна), а пари (a, b), що мають лише властивості (1) – (3), дотримуючись термінології запропонованої Д. З. Аровим, будемо називати γ-твірними.

Якщо (a, b) довільна γ-твірна пара, а ω довільна функція класу Шура, то функція $\frac{\omega a^2}{1-\omega b}$ належить до H^2 і, отже, для будь-якої γ-твірної пари (a, b) формула (1.3.4) дає (коли ω пробігає весь клас Шура) функції w з однією і тією ж проекцією на H^2_-, тобто, вони всі є символами одного і того ж Ганкелева оператора

$$X = P_- w | H^2_+.$$

Однак, якщо умова (4) не виконується, то формула (1.3.4) дає не всі символи Ганкелева оператора X, а тільки деякі з них.

Умови (2) і (3) показують що b визначає a однозначно, в той час як a визначає b з точністю до внутрішнього множника. Тому для стислості замість γ-твірних пар (a, b) ми можемо говорити про γ-твірні функції b, маючи на увазі що b визначає a однозначно.

Відомо що наступна властивість a є достатньою для виконання (4) при будь-якому допустимому b:

$$\frac{1}{a} \in H^2.$$

Дійсно, вважаючи $h = \frac{1}{a}$, бачимо що в цьому випадку (4) виконується навіть без замикання в силу того що

$$\frac{s_0}{a} = -\frac{\overline{b}}{\overline{a}} \in H^2_-.$$

Більш тонку достатню умову для виконання (4) в термінах a було отримано в роботі А. Вольберга і П. Юдицького [92]. Д. Сарасоном було поставлено питання: чи накладає умова (4) будь-які обмеження на a? Відповідь на це питання дається наступною теоремою

Теорема 1.8. (Хейфець, див. [66] і Розділ 5.1 даної дисертації**).** Хоч би якими були a, b, що задовольняють (1) - (3), знайдеться внутрішня функція θ така що пара $(a, \theta b)$ задовольняє (4), тобто,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{clos} \left\{ \begin{bmatrix} ah \\ P_+ s_0 \overline{\theta} \overline{h} \end{bmatrix} : h \in H^2_+ \right\}. \tag{1.3.6}$$

Наступна властивість AAK пар була доведена В. М. Адамяном, Д. З. Аровим і М. Г. Крейном:

4$'$. якщо (a, b) AAK-пара, то міра, що відповідає функції

$$\frac{1 + \omega b}{1 - \omega b}$$

є абсолютно неперервною для будь-якої ω класу Шура.

Ними ж було сформульоване питання: чи не є ця властивість разом з властивостями (1) - (3) достатньою для того щоб пара (a, b) була AAK парою. Пізніше Д. Сарасон висловив це як гіпотезу.

У моїх статтях [65, 67], використовуючи підхід Абстрактної Задачі Інтерполяції, було показано що ця гіпотеза невірна. Більш конкретно, було показано що пари (a, b), які параметризують розв'язки невизначених проблем моментів Гамбургера, мають властивості (1)-(3) і (4$'$), але не є AAK-парами. Викладенню цих результатів присвячений Розділ 5.2 даної дисертації.

Цікаво відзначити, що в обох випадках (Задачі Нехарі і Проблема Моментів Гамбургера) властивість (4$'$) випливає з рівності Парсеваля для перетворення Фур'є пов'язаного з розв'язками відповідної Абстрактної Задачі Інтерполяції (див. Розділи 5.2.7, 5.2.8).

Розділ 5.2 організовано наступним чином: В Розділі 5.2.2 вивчається структура даних проблеми моментів, на базі цього в Розділі 5.2.3 з ними зв'язується Абстрактна Задача Інтерполяції. Явна формула для перетворення Фур'є і деякі її наслідки отримані в Розділі 5.2.4. В Розділі 5.2.7 доведено рівність Парсеваля для цього перетворення Фур'є. В Розділі 5.2.8 показано як властивість $(4')$ пар пов'язаних з проблемою моментів випливає з рівності Парсеваля. В Розділі 5.2.9 доказано Аров-сингулярність пар що відповідають проблемі моментів і, отже, вони не є ААК-парами.

1.4 Кратний аналог теореми Жюліа - Каратеодорі та відповідна межова задача інтерполяції.

Як і раніше будемо позначати через $\mathcal{S}$ клас Шура, аналітичних функцій що відображають одиничний круг $\mathbb{D}$ в своє замикання. Ми писатимемо $z\widehat{\to}t_0$ якщо z наближається до граничної точки $t_0 \in \mathbb{T}$ недотичним чином і $z \to t_0$ якщо z наближається до t_0 без всяких обмежень перебуваючи в $\mathbb{D}$. Для початку сформулюємо класичну теорему Жюліа - Каратеодорі ([43], [58] а також [90, Глава 4] і [86, Глава 6]).

Теорема 1.9. (Жюліа-Каратеодорі) Для $w \in \mathcal{S}$ і t_0, такі властивості є еквівалентними:

$$(1) \quad d_1 := \liminf_{z\to t_0} \frac{1-|w(z)|^2}{1-|z|^2} < \infty.$$

$$(2) \quad d_2 := \lim_{z\widehat{\to}t_0} \frac{1-|w(z)|^2}{1-|z|^2} < \infty.$$

(3) Границі $w_0 := \lim\limits_{z\widehat{\to}t_0} w(z)$ і $d_3 := \lim\limits_{z\widehat{\to}t_0} \dfrac{1-w(z)\overline{w}_0}{1-z\bar{t}_0}$

існують і мають властивості $|w_0| = 1$ і $d_3 \geq 0$.

(4) Границі $w_0 := \lim\limits_{z\widehat{\to}t_0} w(z)$ і $w_1 := \lim\limits_{z\widehat{\to}t_0} w'(z)$

існують і мають властивості $|w_0| = 1$ і $t_0 w_1 \overline{w}_0 \geq 0$.

Більш того, якщо ці умови виконуються, то $d_1 = d_2 = d_3 = t_0 w_1 \overline{w}_0$.

Детальний виклад цієї теореми можна знайти в [84], [86], [90]. В моїй статті [33] доведений кратний аналог теореми Жюліа - Каратеодорі. Викладу цього присвячений Розділ 6.1 даної дисертації. Введемо деякі позначення. Відома така властивість функцій класу Шура w:

$$\mathbf{P}_n^w(z) := \left[\frac{1}{i!j!}\,\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\,\frac{1-|w(z)|^2}{1-|z|^2}\right]_{i,j=0}^{n} \geq 0 \qquad (1.4.1)$$

для будь-якого $n \geq 0$ і $z \in \mathbb{D}$. Ми будемо називати цю матрицю *матрицею Шварца - Піка*. Для заданої точки $t_0 \in \mathbb{T}$, *межову матрицю Шварца - Піка визначимо як*

$$\mathbf{P}_n^w(t_0) = \lim_{z \widehat{\to} t_0} \mathbf{P}_n^w(z) \geq 0, \qquad (1.4.2)$$

за умови що границя в (1.4.2) *існує.*

Припустимо тепер, що $w \in \mathcal{S}$ і що існують такі недотичні межові границі

$$w_j(t_0) := \lim_{z \widehat{\to} t_0} \frac{w^{(j)}(z)}{j!} \quad \text{за } j = 0, \ldots, 2n+1, \qquad (1.4.3)$$

де $w^{(j)}$ позначає похідну порядку j. Покладемо

$$\mathbb{P}_n^w(t_0) := \begin{bmatrix} w_1(t_0) & \cdots & w_{n+1}(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n+1}(t_0) & \cdots & w_{2n+1}(t_0) \end{bmatrix} \mathbf{\Psi}_n(t_0) \begin{bmatrix} \overline{w_0(t_0)} & \ldots & \overline{w_n(t_0)} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \overline{w_0(t_0)} \end{bmatrix}, \qquad (1.4.4)$$

де $\mathbf{\Psi}_n(t_0) = [\Psi_{j\ell}]_{j,\ell=0}^{n}$ це верхньо трикутна матриця з елементами

$$\Psi_{j\ell} = \begin{cases} 0, & \text{if } j > \ell \\ (-1)^{\ell} \begin{pmatrix} \ell \\ j \end{pmatrix} t_0^{\ell+j+1}, & \text{if } j \leq \ell. \end{cases} \qquad (1.4.5)$$

Відзначимо, що матриця (1.4.4) вперше з'явилася в роботі І. В. Ковалишиної [73] в контексті інтерполяції на межі області в класі Шура.

Позначимо правий нижній елемент матриці Шварца - Піка $\mathbf{P}_n^w(z)$ як

$$d_{w,n}(z) := \frac{1}{(n!)^2}\frac{\partial^{2n}}{\partial z^n \partial \bar{z}^n}\,\frac{1-|w(z)|^2}{1-|z|^2} \qquad (1.4.6)$$

і сформулюємо кратний аналог Теореми 1.9.

Теорема 1.10. (Хейфець, Болотников, [33], Розділ 6.1) Для $w \in \mathcal{S}$, $t_0 \in \mathbb{T}$ і $n \in \mathbb{Z}_+$, такі умови еквівалентні:

$$(1) \quad \liminf_{z \to t_0} d_{w,n}(z) < \infty. \tag{1.4.7}$$

$$(2) \quad \lim_{z \widehat{\to} t_0} d_{w,n}(z) < \infty. \tag{1.4.8}$$

(3) Межова матриця Шварца–Піка $\mathbf{P}_n^w(t_0)$ існує.

(4) Недотичні межові границі (1.4.3) існують

і мають властивості

$$|w_0(t_0)| = 1 \quad \text{i} \quad \mathbb{P}_n^w(t_0) \geq 0, \tag{1.4.9}$$

де $\mathbb{P}_n^w(t_0)$ це матриця визначена в (1.4.4).

Більш того, якщо ці умови виконуються, то границі (1.4.7) і (1.4.8) збігаються, і

$$\mathbf{P}_n^w(t_0) = \mathbb{P}_n^w(t_0). \tag{1.4.10}$$

Рівність (1.4.10) було встановлено І. В. Ковалішиною в [73], однак при припущеннях відмінних від наших (ми обговоримо це в Розділі 6.2.1, Зауваження 6.26). Рівність (1.4.10) дозволяє обчислити межову матрицю Шварца- Піка в термінах межових значень w і її похідних, що в деяких випадках (наприклад, якщо w є раціональною функцією) набагато простіше ніж робити це використовуючи наше визначення (1.4.2) матриці $\mathbf{P}_n^w(t_0)$. Доведення Теореми 1.4.10 засноване на аналізі відтворюючих ядер для межових точок у відповідному просторі де Бранжа - Ровняка. Цьому аналізу присвячений Розділ 6.1.3.

Виявляється що властивість (3) Теореми 1.10 виливає навіть з таких, більш слабких припущень (і не тільки для функцій класу Шура)

$$|w_0(t_0)| = 1 \quad \text{i} \quad \mathbb{P}_n^w(t_0) = \mathbb{P}_n^w(t_0)^*. \tag{1.4.11}$$

Наступну теорему доведено в моїй роботі [36], див. Розділ 6.2.3 даної дисертації.

Теорема 1.11. Припустимо що функція w аналітична в околі $\mathcal{U}_{t_0}$ точки $t_0 \in \mathbb{T}$, припустимо що існують недотичні межові значення $w_j(t_0)$ при $j = 0, \dots, 2n+1$. Тоді такі властивості еквівалентні:

1. Мають місце співвідношення (1.4.11).
2. Недотичні межові границі (1.4.3) існують і послідовність
$$\{w_0(t_0), \dots, w_{2n+1}(t_0)\}$$
є t_0-ізометричною, тобто,
$$\overline{\mathbb{U}}(w_0, \dots, w_{2n+1}) \boldsymbol{\Psi}_{2n+1}(t_0) \mathbb{U}(w_0, \dots, w_{2n+1}) = \boldsymbol{\Psi}_{2n+1}(t_0).$$
3. Існує раціональна унімодулярна на колі $\mathbb{T}$ функція f (відношення двох скінченних добутків Бляшке) така що
$$w(z) = f(z) + o((z - t_0)^{2n+1}) \quad \text{при} \quad z \widehat{\to} t_0 \tag{1.4.12}$$
зсередини кругу.
4. Асимптотика
$$w(z) \;=\; \sum_{j=0}^{2n+1} w_j(t_0)(z - t_0)^j + o((z - t_0)^{2n+1}) \tag{1.4.13}$$
має місце коли z прямує до t_0 недотичним чином зсередини і (!) ззовні одиничного кругу $\mathbb{D}$, де при $|z| > 1$ ми визначаємо
$$w(z) := \frac{1}{\overline{w(1/\bar{z})}}. \tag{1.4.14}$$

Крім того, при виконанні цих умов межова матриця Шварца-Піка $\mathbf{P}_n^w(t_0)$ існує і дорівнює $\mathbb{P}_n^w(t_0)$.

Зауваження 1.12. Продовження (1.4.14) називається продовженням по симетрії і ніяк не пов'язане з аналітичним продовженням за винятком того випадку коли функція w унімодулярна на деякій дузі кола T. Існування недотичної асимптотики (1.4.13) для функції $w(z)$ зсередини кругу $\mathbb{D}$ з $w(t_0) \neq 0$ тягне існування асимптотики того ж порядку ззовні кругу (для продовження функції w по симетрії). Однак, в загальному випадку, коефіцієнти асимптотик зсередини і ззовні відрізняються одні від одних. Таким чином, збіг двох асимптотик є спеціальною властивістю функції w. Теорема 1.11 зокрема стверджує що цей збіг тягне (1.4.8), а Теорема 1.10 показує що для функцій класу Шура збіг асимптотик випливає з (1.4.8). Як показано в параграфі 6.2.4, в загальному випадку (1.4.8) не тягне збіг внутрішньої і зовнішньої асимптотик. Збіг внутрішньої і зовнішньої асимптотик було покладено І. В. Ковалішиною в основу її вивчення граничної задачі інтерполяції в роботі [73]. На відміну від цього, наші побудови засновані на (1.4.8).

1.5 Розширений клас Крейна–Лангера і задача Неванлінни–Піка в ньому

Відомо що функція задана в відкритому одиничному крузі належить класу Шура тоді і тільки тоді коли матриці Шварца - Піка невід'ємні для будь-якого скінченного набору точок (як довів Хіндмарш [55], навіть досить невід'ємності всіх 3×3 матриць Піка). Такі функції виникають як характеристичні функції унітарних вузлів.

Крейном і Лангером [74, 75] було розглянуто клас функцій $\frac{s}{b}$, де s функції класу Шура, а b скінченний добуток Бляшке (ступеня κ). Клас Крейна - Лангера виникає при вивченні унітарних операторів (вузлів) в просторах Понтрягіна (простори з індефінітним скалярним добутком). Цей клас характеризується наступним чином: мероморфні функції в крузі такі що для будь-якого скінченного набору точок кругу від'ємний індекс інерції відповідної матриці Піка не перевищує κ, а для деяких наборів точок він дорівнює κ.

Однак, як показують прості приклади, на відміну від випадку $\kappa = 0$ (коли невід'ємність матриць Піка тягне аналітичність), при $\kappa > 0$ функція, матриці Піка якої мають цю властивість, не обов'язково мероморфна, вона може мати скінченні стрибки. Вивченню цього розширеного класу

Крейна-Лангера присвячений цей розділ. Результати опубліковані в роботах дисертанта [38], [39], [40], [42].

В роботі [38] дано таке

Визначення 1.13. *Через S_κ ми будемо позначати клас функцій (не обов'язково мероморфних), що задані всюди в одиничному крузі, за винятком можливо скінченного набору точок, і що мають наступну властивість: для будь-якого скінченного набору точок з області визначення від'ємний індекс інерції відповідної матриці Піка не перевищує κ, а для деяких наборів точок він дорівнює κ.*

Таким чином клас Крейна - Лангера є підкласом класу S_κ (в наших позначеннях). В работі [38] також дано визначення *стандартної функції* класу S_κ. Формальне визначення наводиться в Розділі 7.1.1, Визначення 7.4. Тут дамо неформальне визначення цього класу. Стандартні функції класу S_κ можна описати таким чином: розглянемо мероморфну функцію типу Крейна-Лангера $\frac{s}{b}$, потім в деяких регулярних точках змінимо значення (так що у нової функції будуть стрибки в цих точках) і в деяких полюсах визначимо скінченні значення (можна сказати що у нової функції в цих точках будуть нескінченні стрибки). Отримані таким чином функції будемо називати *стандартними.*

Наступна теорема ([38], Теорема 7.5 в Розділі 7.1.1 цієї дисертації) дає кілька еквівалентних описів класу S_κ і, зокрема, показує що будь яка функція класу S_κ допускає єдине продовження до стандартної функції цього ж класу.

Теорема 1.14. Припустимо що функція f визначена в $\mathbb{D} \setminus \Lambda$, де Λ є дискретна множина. Нехай κ є невід'ємне ціле число. Наступні властивості еквівалентні:

1. f належить до $\mathcal{S}_\kappa$.
2. f допускає продовження до стандартної функції із ℓ стрибками, $0 \leq \ell \leq \kappa$, і $\kappa - \ell$ полюсами. Всі стрибки продовження містяться в $\mathbb{D} \setminus \Lambda$. Таке продовження єдине.

3. Існує $n \geq 0$ таке що
$$\mathbf{k}_n(f) = \mathbf{k}_{n+3}(f) = \kappa, \tag{1.5.1}$$
де $\mathbf{k}_n(f)$ максимальне число від'ємних квадратів матриць Піка функції f розміру $n \times n$. [2]

Далі розглядається питання яким повинен бути мінімальний розмір матриці Піка функції f щоб ця матриця могла мати κ від'ємних квадратів. У Теоремі 7.6 Розділу 7.1.1 показано що цей розмір міститься між $q+\ell$ і $q+2\ell$. Як показують прості приклади, ці оцінки точні. Далі показано як можна вибрати $q+2\ell$ точок щоб матриця Піка мала $q+\ell$ від'ємних квадратів: поблизу кожного полюса стільки точок яка його кратність, плюс кожна точка стрибка і якась точка близька до неї.

Наступна теорема уточнює твердження (1.5.1) Теореми 1.14.

Теорема 1.15. (Теорема 7.9 Розділу 7.1.1). Припустимо що функція f визначена в $\mathbb{D} \setminus \Lambda$, де Λ дискретна множина. Нехай κ є невід'ємне ціле число. Тоді:

1. якщо $\mathbf{k}_{2\kappa}(f) = \mathbf{k}_{2\kappa+3}(f) = \kappa$, то $f \in \mathcal{S}_\kappa$.
2. якщо $f \in \mathcal{S}_\kappa$, то $\mathbf{k}_{2\kappa}(f) = \kappa$.

Приклад 7.7 (з $|a| \leq 1$) Розділу 7.1.1 показує що при $\kappa = 1$ індекс 2κ в цій теоремі не може бути зменшений.

Розділ 7.2 присвячений вивченню *інтерполяційної задачі Неванлінни - Піка в класі* S_κ. У статті Дайксми і Лангера [47] вирішувалася задача Неванлінни - Піка в класі Крейна - Лангера (тобто, в класі мероморфних функцій з S_κ). Множина розв'язків описувалася традиційним для цього кола задач чином у вигляді дробово - лінійного перетворення. Однак авторами було виявлено наступний феномен: деяким параметрами відповідали "сторонні" розв'язки. А саме, при деяких значеннях параметрів відповідна функція виявлялася в класі $S_{\kappa'}$, $\kappa' < \kappa$, в той же час інтерполяційні умови

---

[2] Це твердження є узагальненням теореми Хіндмарша [55]. Теорема Хіндмарша стверджує що якщо $\mathbf{k}_3(f) = 0$, то f належить класу Шура, тобто, S_0.

порушувалися в деяких вузлах інтерполяції. Аналіз ситуації показав що "сторонній"розв'язок виникає, наприклад, у такий спосіб (можуть бути і більш складні випадки). У функцій класу Крейна-Лангера обов'язково є полюси, а також можуть бути нулі. При розв'язанні інтерполяційної задачі, полюс розв'язку повинен не потрапляти в вузол інтерполяції. Однак може виявитися, що для деяких параметрів "полюс" розв'язку потрапляє в один з вузлів інтерполяції, при цьому туди ж потрапляє і "нуль" розв'язку. Таким чином у функції утворюється усувна особливість в цьому вузлі інтерполяції. Якщо цю особливість усунути (тобто продовжити функцію в цю точку аналітично), то відбудеться втрата від'ємного індексу інерції $\kappa' < \kappa$ і втрата інтерполяційного значення. Якщо ж замість того щоб усувати особливість, зберегти в цій точці інтерполяційне значення, то вийде функція зі стрибком, але в класі S_κ. Таким чином не втрачаються ні від'ємний індекс інерції ані інтерполяційне значення. При цьому "сторонніх" розв'язків не буде, всім параметрам відповідають розв'язки в класі S_κ. Доказу цього присвячений Розділ 7.2, результати опубліковані в [41].

РОЗДІЛ 2

ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

2.1 Унітарні системи розсіювання

Дотримуючись робіт [27], [28], [20] ми визначаємо *унітарну систему розсіювання* як сукупність об'єктів $\mathfrak{S}$ такого вигляду

$$\mathfrak{S} = (\mathcal{U}, \rho; \mathcal{K}, \mathcal{E}) \tag{2.1.1}$$

де $\mathcal{K}$ (*простір станів*) і $\mathcal{E}$ (*простір коефіцієнтів*) Ґільбертові простори, $\mathcal{U}$ унітарний оператор що діє в $\mathcal{K}$ (ми будемо називати його оператором *еволюції*), оператор ρ (який ми будемо називати *масштабом*) що діє з $\mathcal{E}$ в $\mathcal{K}$. З кожної унітарною системою розсіювання $\mathfrak{S}$ (2.1.1) зв'язується *спектральна функція* $\sigma_{\mathfrak{S}}(\zeta)$, яка визначена наступним чином

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathfrak{S}}(\zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \rho^* \mathcal{U}^n \rho \overline{\zeta}^n + \sum_{n=0}^{\infty} \rho^* \mathcal{U}^{*n} \rho \zeta^n \\ &= \rho^* \left[(I - \overline{\zeta}\mathcal{U})^{-1} + (I - \zeta \mathcal{U}^*)^{-1} - I \right] \rho \\ &= (1 - |\zeta|^2) \rho^* (I - \overline{\zeta}\mathcal{U})^{-1} (I - \zeta\mathcal{U}^*)^{-1} \rho. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

З визначення (2.1.2) ми бачимо що $\sigma_{\mathfrak{S}}(\zeta)$ є позитивною гармонійною операторно-значною функцією (значеннями якої є обмежені оператори в просторі $\mathcal{E}$)

$$\sigma_{\mathfrak{S}}(\zeta) \geq 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial \overline{\zeta} \partial \zeta} \sigma_{\mathfrak{S}}(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{2.1.3}$$

Введемо наступне позначення

$$\zeta^{[n]} = \begin{cases} \zeta^n & \text{при } n \geq 0, \\ \overline{\zeta}^{-n} & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Тоді перша формула в (2.1.2) може бути переписана в більш компактному вигляді

$$\sigma_{\mathfrak{S}}(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\rho^* \mathcal{U}^{*n} \rho) \zeta^{[n]}.$$

Коефіцієнти Фур'є спектральної функції $\{\sigma_{\mathfrak{S},n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ що визначаються як

$$\sigma_{\mathfrak{S},n} := \rho^*\mathcal{U}^{*n}\rho \tag{2.1.4}$$

ми будемо називати *моментами спектральної функції.*

Нехай $E_{\mathcal{U}}(\cdot)$ це спектральна міра (див., наприклад, [76]) унітарного оператора $\mathcal{U}$; визначимо *спектральну міру* $\sigma_{\mathfrak{S}}$ унітарної системи розсіювання $\mathfrak{S}$ як проекцію спектральної міри оператора $\mathcal{U}$ в наступному сенсі

$$\sigma_{\mathfrak{S}}(dt) = \rho^* E_{\mathcal{U}}(dt)\rho. \tag{2.1.5}$$

Таким чином міра $E_{\mathcal{U}}$ є сильною борелівською мірою на одиничному колі $\mathbb{T}$, значення якої є ортогональними проекторами в просторі $\mathcal{K}$, а міра $\sigma_{\mathfrak{S}}$ є сильною борелівською мірою на одиничному колі $\mathbb{T}$, значення якої невід'ємні оператори в просторі $\mathcal{E}$. Зауважимо що функція $\sigma_{\mathfrak{S}}(\zeta)$ (2.1.2) виражається через міру $\sigma_{\mathfrak{S}}(dt)$ за допомогою інтеграла Пуассона:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathfrak{S}}(\zeta) &= \rho^*\left[\int_{\mathbb{T}}((1-\overline{\zeta}t)^{-1} + (1-\zeta\overline{t})^{-1} - 1)\ E_{\mathcal{U}}(dt)\right]\rho \\ &= \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|\zeta|^2}{|1-\overline{\zeta}t|^2}\,\sigma_{\mathfrak{S}}(dt).\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Інтеграл Лебега збігається в сенсі сильної операторної топології.

Ми говоримо що дві унітарні системи розсіювання $(\mathcal{U},\rho;\mathcal{K},\mathcal{E})$ і $(\mathcal{U}',\rho';\mathcal{K}',\mathcal{E})$ (з тим же самим простором коефіцієнтів $\mathcal{E}$) *є унітарно еквівалентними* якщо існує унітарне відображення $\tau\colon \mathcal{K}\to\mathcal{K}'$ таке що

$$\tau\mathcal{U} = \mathcal{U}'\tau, \qquad \tau\rho = \rho'. \tag{2.1.7}$$

Ми говоримо що унітарна система розсіювання $\mathfrak{S} = (\mathcal{U},\rho;\mathcal{K},\mathcal{E})$ *мінімальна* якщо лінійний многовид $\rho(\mathcal{E}) \subset \mathcal{K}$ є $*$-циклічним для оператора $\mathcal{U}$, тобто, найменшим підпростором що містить $\rho(\mathcal{E})$ і інваріантним щодо $\mathcal{U}$ і $\mathcal{U}^*$ є весь простір $\mathcal{K}$. *Спектральна функція є повним інваріантом класів унітарно еквівалентних мінімальних унітарних систем розсіювання* в наступному сенсі

Твердження 2.1. Дві унітарно еквівалентні унітарні системи розсіювання

$$\mathfrak{S} = (\mathcal{U},\rho;\mathcal{K},\mathcal{E}) \text{ і } \mathfrak{S}' = (\mathcal{U}',\rho';\mathcal{K}',\mathcal{E})$$

мають одну і ту ж спектральну функцію ($\sigma_{\mathfrak{S}}(\zeta) = \sigma_{\mathfrak{S}'}(\zeta)$ для всіх $\zeta \in \mathbb{D}$).

Зворотно, якщо $\mathfrak{S} = (\mathcal{U}, \rho; \mathcal{K}, \mathcal{E})$ і $\mathfrak{S}' = (\mathcal{U}', \rho'; \mathcal{K}', \mathcal{E})$ дві *мінімальні* унітарні системи розсіювання мають одну і ту ж спектральну функцію, то $\mathfrak{S}$ і $\mathfrak{S}'$ унітарно еквівалентні.

Доведення. Це Теорема 4.1$'$ [27]. Нехай $\tau\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ задовольняє умовам сплетіння (2.1.7), тоді

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathfrak{S}'}(\zeta) &= \rho'^* \left[(I - \overline{\zeta}\mathcal{U}')^{-1} + (I - \zeta\mathcal{U}'^*)^{-1} - I\right] \rho' \\ &= \rho^*\tau^* \left[(I - \overline{\zeta}\mathcal{U}')^{-1} + (I - \zeta\mathcal{U}'^*)^{-1} - I\right] \tau\rho \\ &= \rho^* \left[(I - \overline{\zeta}\mathcal{U})^{-1} + (I - \zeta\mathcal{U}^*)^{-1} - I\right] \rho \\ &= \sigma_{\mathfrak{S}}(\zeta).\end{aligned}$$

Зворотно, припустимо що $\mathfrak{S}$ і $\mathfrak{S}'$ *мінімальні* унітарні системи розсіювання з тим же самим простором коефіцієнтів $\mathcal{E}$, спектральні функції яких дорівнюють одна одній $\sigma_{\mathfrak{S}}(\zeta) = \sigma_{\mathfrak{S}'}(\zeta)$ для всіх $\zeta \in \mathbb{D}$. Збіг гармонійних функцій $\sigma_{\mathfrak{S}}(\zeta) = \sigma_{\mathfrak{S}'}(\zeta)$ тягне збіг відповідних коефіцієнтів Фур'є

$$\rho^*\mathcal{U}^n\rho = \rho'^*\mathcal{U}'^n\rho' \text{ при} n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

Зауважимо що

$$\langle \mathcal{U}^n\rho e, \mathcal{U}^m\rho\widetilde{e}\rangle = \langle \rho^*\mathcal{U}^{n-m}\rho e, \widetilde{e}\rangle = \langle \rho'^*\mathcal{U}'^{n-m}\rho' e, \widetilde{e}\rangle = \langle \mathcal{U}'^n\rho' e, \mathcal{U}'^m\rho'\widetilde{e}\rangle$$

для всіх $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ і $e, \widetilde{e} \in \mathcal{E}$, і, отже, формула

$$\tau : \mathcal{U}^n\rho e \mapsto \mathcal{U}'^n\rho' e \tag{2.1.8}$$

поширюється по лінійності і неперервності до ізометричного відображення

$$\mathcal{D} = \overline{\operatorname{span}}\{\mathcal{U}^n\rho e\colon n \in \mathbb{Z},\ e \in \mathcal{E}\}$$

на

$$\mathcal{R} := \overline{\operatorname{span}}\{\mathcal{U}'^n\rho' e\colon n \in \mathbb{Z},\ e \in \mathcal{E}\}.$$

В силу мінімальності $\mathfrak{S}$ і $\mathfrak{S}'$, $\mathcal{D} = \mathcal{K}$ і $\mathcal{R} = \mathcal{K}'$. Отже, τ є унітарним відображенням $\mathcal{K}$ на $\mathcal{K}'$. Формула (2.1.8) при $n = 0$ означає що $\tau\rho = \rho'$, а при довільному n що $\tau\mathcal{U}k = \mathcal{U}'\tau k$ для векторів $k \in \mathcal{K}$ виду $k = \mathcal{U}^n\rho^* e$, $n \in \mathbb{Z}$

і $e \in \mathcal{E}$. В силу мінімальності $\mathfrak{S}$, лінійна оболонка таких векторів щільна в $\mathcal{K}$, і, отже, рівність $\tau\mathcal{U}k = \mathcal{U}'\tau k$ є справедливою для довільного k з $\mathcal{K}$. Твердження 2.1 доведено. $\square$

2.2 Простір Хеллінгера

Тут ми в основному дотримуємося визначень і позначень роботи [27]. Більш ранні виклади містяться в роботах [61], [62], [63], [64], [72]. Класичними посиланнями по інтегралу Хеллінгера є [53], [87], [89], [88]; в роботі [83] розглядаються застосування інтеграла Хеллінгера до стохастических диференціальних рівнянь.

Нехай $\mathcal{E}$ це Ґільбертів простір і σ це невід'ємна $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ - значна борелівська міра на $\mathbb{T}$. Визначимо простір $\mathcal{L}^\sigma$ як множину всіх $\mathcal{E}$ - значних векторних мір ν для яких існує скалярна міра μ на $\mathbb{T}$ така що оператор

$$\begin{bmatrix} \mu(\Delta) & \nu(\Delta)^* \\ \nu(\Delta) & \sigma(\Delta) \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{C} \oplus \mathcal{E}) \tag{2.2.1}$$

є невід'ємним для будь-якої борелівської підмножини $\Delta \subseteq \mathbb{T}$. З невід'ємності (2.2.1) випливає що для будь-якого $\nu \in \mathcal{L}^\sigma$ і будь-якої борелівської $\Delta \subseteq \mathbb{T}$, $\nu(\Delta) \in \operatorname{im} \sigma(\Delta)^{1/2}$ і що найменшою константою $C_\nu(\Delta)$, яку можна підставити замість $\mu(\Delta)$ в (2.2.1) не втрачаючи невід'ємності, є

$$C_\nu(\Delta) = \ |\sigma(\Delta)^{[-1/2]}\nu(\Delta)\ |^2 \tag{2.2.2}$$

де вираз $\sigma(\Delta)^{[-1/2]}\nu(\Delta)$ позначає єдиний прообраз $\nu(\Delta)$ щодо оператора $\sigma(\Delta)^{1/2}$, ортогональний ядру останнього (він же єдиний прообраз мінімальної норми).

Далі можна показати ([62], [63], [64], [27]) що серед всіх мір μ таких, що (2.2.1) є невід'ємним, існує єдина *мінімальна* μ_ν, в тому сенсі що

$$\mu(\Delta) \geq \mu_\nu(\Delta) \text{ для всіх борелівських} \Delta \subseteq \mathbb{T}$$

Цю єдину міру μ_ν називатимемо*(скалярною) мірою Хеллінгера векторної міри ν відносно σ.*

Функція $\Delta \mapsto C_\nu(\Delta)$, взагалі кажучи, не є адитивною функцією множини Δ, а лише напівадитивною, тобто, якщо Δ_1, Δ_2 борелівські підмножини $\mathbb{T}$ що не перетинаються, то можна гарантувати лише нерівність

$$C_\nu(\Delta_1 \cup \Delta_2) \leq C_\nu(\Delta_1) + C_\nu(\Delta_2).$$

Тоді міра Хеллінгера μ_ν може бути визначена як мінімальна міра що домінує напівадитивну функцію C_ν, а саме як

$$\mu_\nu(\Delta) = \sup\{\sum_{k=1}^{n} \ |\sigma(\Delta_k)^{[-1/2]}\nu(\Delta_k)\ |_{\mathcal{E}}^2 \colon \Delta_1, \ldots, \Delta_n$$

$$\text{утворюють скінченне диз'юнктивне покриття}\Delta\}$$

$$= \lim_{\Delta = \dot\cup_{k=1}^{n}\Delta_k} \sum_{k=1}^{n} \ |\sigma(\Delta_k)^{[-1/2]}\nu(\Delta_k)\ |_{\mathcal{E}}^2. \tag{2.2.3}$$

Тут границя береться вздовж спрямованості скінченних розбиттів Δ, частково впорядкованої по подрібненню. Далі визначимо норму $\ |\cdot\ |_{\mathcal{L}^\sigma}$ як

$$|\nu\ |_{\mathcal{L}^\sigma} = \mu_\nu(\mathbb{T})^{1/2}. \tag{2.2.4}$$

Як було показано в [62], [63], [64], [27], ця норма задає структуру Гільбертового простору на $\mathcal{L}^\sigma$. Формула для скалярного добутку в $\mathcal{L}^\sigma$ може бути отримана поляризацією формули (2.2.3) і має вигляд

$$\langle \nu_1, \nu_2 \rangle_{\mathcal{L}^\sigma} = \lim_{\mathbb{T} = \dot\cup_{k=1}^{n}\Delta_k} \sum_{k=1}^{n} \left\langle \sigma(\Delta_k)^{[-1/2]}\nu_1(\Delta_k), \sigma(\Delta_k)^{[-1/2]}\nu_2(\Delta_k) \right\rangle_{\mathcal{E}}. \tag{2.2.5}$$

Далі ми формулюємо два твердження з [27], які будуть використовуватися в подальшому. Обидва спочатку перевіряються для простих функцій з використанням формул (2.2.3) і (2.2.5), потім для вимірних функцій за допомогою граничного переходу.

Твердження 2.2. Нехай $\nu \in \mathcal{L}^\sigma$ з асоційованою мірою Хеллінгера μ_ν і f є вимірна скалярна функція на $\mathbb{T}$ для якої $\int\limits_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 \mu_\nu(dt) < \infty$, тоді міра $\nu \cdot f$ що визначена за формулою

$$(\nu \cdot f)(\Delta) = \int\limits_{\Delta} \nu(dt) f(t)$$

теж належить до $\mathcal{L}^{\sigma}$ і асоційована міра Хеллінгера $\mu_{\nu\cdot f}$ обчислюється за формулою $\mu_{\nu}\cdot|f|^2$, тобто,

$$\mu_{\nu\cdot f}(\Delta)=(\mu_{\nu}\cdot|f|^2)(\Delta)=\int\limits_{\Delta}\mu_{\nu}(dt)|f(t)|^2.$$

Твердження 2.3. Нехай f це довільна $\mathcal{E}$ - значна вимірна функція на $\mathbb{T}$ така що

$$\int\limits_{\mathbb{T}}\langle\sigma(dt)f(t),f(t)\rangle<\infty,$$

тоді векторна міра $\sigma\cdot f$ що визначається формулою

$$(\sigma\cdot f)(\Delta)=\int\limits_{\Delta}d\sigma(t)f(t)$$

належить до $\mathcal{L}^{\sigma}$ і $\mu_{\sigma\cdot f}=f^*\cdot\sigma\cdot f$, де $f^*\cdot\sigma\cdot f$ скалярна міра що обчислюється за формулою

$$(F^*\cdot\sigma\cdot f)(\Delta)=\int\limits_{\Delta}\langle\sigma(dt)f(t),f(t)\rangle_{\mathcal{E}}. \tag{2.2.6}$$

Більш того, для будь-якої такої f скалярний добуток $\sigma\cdot f$ з довільною $\nu\in\mathcal{L}^{\sigma}$ обчислюється за формулою

$$\langle\nu\ \ \sigma\cdot f\rangle_{\mathcal{L}^{\sigma}}=\int\limits_{\mathbb{T}}\langle\nu(dt),f(t)\rangle_{\mathcal{E}}. \tag{2.2.7}$$

Нам знадобиться наступний факт єдиності.

Лема 2.4. Якщо σ і $\widetilde{\sigma}$ дві невід'ємні $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ - значні міри такі що $\mathcal{L}^{\sigma}=\mathcal{L}^{\widetilde{\sigma}}$ з рівністю норм, то $\sigma=\widetilde{\sigma}$.

Доведення. Припустимо що $\mathcal{L}^{\sigma}=\mathcal{L}^{\widetilde{\sigma}}$ з

$$\|\nu\|^2_{\mathcal{L}^{\sigma}}=\|\nu\|^2_{\mathcal{L}^{\widetilde{\sigma}}}\text{ для всіх }\nu\in\mathcal{L}^{\sigma}=\mathcal{L}^{\widetilde{\sigma}}.$$

Тоді це має місце і для $\chi_{\Delta}\nu$ з будь-якою борелівською Δ. Отже, $\mu_{\nu}=\widetilde{\mu}_{\nu}$, де μ_{ν} і $\widetilde{\mu}_{\nu}$ це міри Хеллінгера ν відносно σ і $\widetilde{\sigma}$ відповідно. Покладемо $\nu=\sigma e$, тоді, в силу (2.2.3), $\mu_{\sigma e}=e^*\sigma e$, отже, $\widetilde{\mu}_{\sigma e}=\mu_{\sigma e}=e^*\sigma e$. звідси випливає що

$$\begin{bmatrix} e^*\sigma e & e^*\sigma \\ \sigma e & \widetilde{\sigma}\end{bmatrix}\geq 0.$$

Отже,

$$\begin{bmatrix} e^*\sigma e & e^*\sigma e \\ e^*\sigma e & e^*\widetilde{\sigma} e \end{bmatrix} \geq 0.$$

Остання нерівність тягне $e^*\widetilde{\sigma}e \geq e^*\sigma e$. Тобто, $\widetilde{\sigma} \geq \sigma$. Протилежна нерівність може бути отримана аналогічно (σ і $\widetilde{\sigma}$ обмінюються ролями). □

Простір $\mathcal{L}^\sigma$ допускає і іншу реалізацію, а саме як простір гармонійних вектор функцій в крузі $\mathbb{D} = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$. Будь-яка векторна міра ν на $\mathbb{T}$ має гармонійне продовження в $\mathbb{D}$ за допомогою інтеграла Пуассона:

$$\nu(\zeta) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1 - |\zeta|^2}{|t - \zeta|^2} \nu(dt). \tag{2.2.8}$$

Нехай $\nu \in \mathcal{L}^\sigma$ і μ домінуюча міра в сенсі (2.2.1). Розглянемо інтеграл Пуассона

$$\begin{bmatrix} \mu(\zeta) & \nu(\zeta)^* \\ & \\ \nu(\zeta) & \sigma(\zeta) \end{bmatrix} = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1 - |\zeta|^2}{|t - \zeta|^2} \begin{bmatrix} \mu(dt) & \nu(dt)^* \\ & \\ \nu(dt) & \sigma(dt) \end{bmatrix}. \tag{2.2.9}$$

Таким чином існує скалярна гармонійна функція $\mu(\zeta)$ домінуюча векторну гармонійну функцію $\nu(\zeta)$ в наступному сенсі

$$\begin{bmatrix} \mu(\zeta) & \nu(\zeta)^* \\ & \\ \nu(\zeta) & \sigma(\zeta) \end{bmatrix} \geq 0. \tag{2.2.10}$$

Зворотно, якщо $\mu(\zeta)$ є гармонійною мажорантою в $\mathbb{D}$ гармонійної векторфункції $\nu(\zeta)$ в сенсі (2.2.10), то ліва частина (2.2.10) допускає інтегральне представлення (2.2.9). Отже, $\nu(\zeta)$ є інтегралом Пуассона міри з $\mathcal{L}^\sigma$. Міра $\nu(dt)$ може розглядатися як межове значення функції $\nu(\zeta)$ в слабкому сенсі. Таким чином можна сформулювати наступну теорему:

Теорема 2.5. Інтеграл Пуассона (2.2.9) здійснює взаємно-однозначну відповідність між векторними мірами на $\mathbb{T}$, що допускають мажоруючу міру в сенсі (2.2.1) і гармонійними вектор-функціями в $\mathbb{D}$, що допускають гармонійну мажоранту в сенсі (2.2.10). При цьому також здійснюється взаємно-однозначна відповідність між $\mu(dt)$, що мажорують міри $\nu(dt)$, і гармонійними мажорантами $\mu(\zeta)$ для $\nu(\zeta)$, відповідно. Зокрема, найкраща гармонійна мажоранта (яку ми будемо позначати $\mu_\nu(\zeta)$) відповідає мірі Хеллінгера $\mu_\nu(dt)$.

Мають місце також наступні факти

Теорема 2.6. Норма в просторі $\mathcal{L}^\sigma$ (визначення (2.2.4)) може бути обчислена як значення найкращої гармонійної мажоранти $\mu_\nu(\zeta)$ в нулі

$$\|\nu\|^2_{\mathcal{L}^\sigma} = \mu_\nu(0). \tag{2.2.11}$$

Ця норма також може бути обчислена як

$$\|\nu\|^2_{\mathcal{L}^\sigma} = \lim_{r\nearrow 1} \int\limits_{\mathbb{T}} \|\sigma(rt)^{[-1/2]}\nu(Rt)\|^2_{\mathcal{E}} m(dt), \tag{2.2.12}$$

де $m(dt)$ нормована міра Лебега на $\mathbb{T}$. Використовуючи Пропозицію 2.2 з $f = \chi_\Delta$, можна отримати формулу

$$\mu_\nu(\Delta) = \|\nu\chi_\Delta\|^2_{\mathcal{L}^\sigma} = \lim_{r\nearrow 1} \int\limits_{\mathbb{T}} \|\sigma(rt)^{[-1/2]}(\nu\chi_\Delta)(Rt)\|^2_{\mathcal{E}} m(dt), \tag{2.2.13}$$

для будь-якої борелівської $\Delta \subseteq \mathbb{T}$, де $(\nu\chi_\Delta)(\zeta)$ інтеграл Пуассона міри $\nu\chi_\Delta$.

2.3 Модель Хеллінгера унітарних систем розсіювання

Унітарні системи розсіювання (2.1.1) і простори векторних мір $\mathcal{L}^\sigma$ (див. (2.2.1)) пов'язані наступним чином. З Пропозиції 2.2 випливає що $\nu\cdot t \in \mathcal{L}^\sigma$ якщо $\nu \in \mathcal{L}^\sigma$, при цьому норми дорівнюють одна одній $|\nu \cdot t\,|_{\mathcal{L}^\sigma} = \ |\nu\,|_{\mathcal{L}^\sigma}$ (тут t позначає функцію $f(t) = t$ на $\mathbb{T}$); оскільки те ж саме вірно і для $\nu \cdot t^{-1} = \nu \cdot \bar{t}$, то оператор

$$\mathcal{U}_\sigma \colon \nu \mapsto \nu \cdot t$$

є унітарним в $\mathcal{L}^\sigma$, його спектральна міра $E_{\mathcal{U}_\sigma}$ обчислюється за формулою

$$E_{\mathcal{U}_\sigma}(\Delta)\colon \nu \mapsto \nu\cdot\chi_\Delta, \text{ для будь-якого } \nu \in \mathcal{L}^\sigma.$$

В силу визначення простору Хеллінгера і міри Хеллінгера, $\sigma e \in \mathcal{L}^\sigma$ і $\mu_{\sigma e}(\Delta) = \langle \sigma(\Delta)e, e\rangle$. Зокрема,

$$\|\sigma e\|^2_{\mathcal{L}^\sigma} = \langle \sigma(\mathbb{T})e, e\rangle_{\mathcal{E}} \leq \|\sigma(\mathbb{T})\| \cdot \|e\|^2.$$

Отже, оператор ρ_σ

$$\rho_\sigma \colon e \mapsto \sigma \cdot e$$

обмежений як оператор з $\mathcal{E}$ в $\mathcal{L}^\sigma$. Таким чином, сукупність

$$\mathfrak{S}_\sigma = (\mathcal{U}_\sigma, \rho_\sigma; \mathcal{L}^\sigma, \mathcal{E}) \tag{2.3.1}$$

є унітарною системою розсіювання для будь-якої невід'ємної $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ - значної міри σ. Більш того, просте обчислення

$$\begin{aligned}\langle \rho_\sigma^* E_{\mathcal{U}_\sigma}(\Delta)\rho_\sigma e,\ e\rangle_{\mathcal{L}^\sigma} &= \langle E_{\mathcal{U}_\sigma}(\Delta)\sigma e,\ \sigma e\rangle_{\mathcal{L}^\sigma}\\ &= \langle \sigma \cdot \chi_\Delta e,\ \sigma e\rangle_{\mathcal{L}^\sigma}\\ &= \langle \sigma(\Delta)e,\ e\rangle_{\mathcal{E}} \text{ за формулою (2.2.5)}\end{aligned}$$

показує що міра σ є спектральною мірою $\rho_\sigma^* E_{\mathcal{U}_\sigma}(\cdot)\rho_\sigma$ унітарної системи розсіювання $\mathfrak{S}_\sigma$. Зокрема, *для будь-якої невід'ємної $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ - значної борелівської міри σ, існує унітарна система розсіювання $\mathfrak{S}_\sigma$, спектральна міра якої дорівнює σ.* Наступна теорема стверджує що по суті будь-яка унітарна система розсіювання еквівалентна модельній (Теорема 4.1 в [27]).

Теорема 2.7. Розглянемо унітарну систему розсіювання $\mathfrak{S} = (\mathcal{U}, \rho; \mathcal{K}, \mathcal{E})$ (2.1.1). Нехай σ це її спектральна міра.

$$\sigma(dt) = \rho^* E_{\mathcal{U}}(dt)\rho.$$

Задамо *представлення Фур'є системи* $\mathfrak{S}$ наступним чином:

$$\mathcal{F} \colon k \mapsto \nu_k, \tag{2.3.2}$$

де $k \in \mathcal{K}$ і

$$\nu_k(dt) = \rho^* E_{\mathcal{U}}(dt)k.$$

Оператор $\mathcal{F}$ є коізометричним що діє з $\mathcal{K}$ на $\mathcal{L}^\sigma$. Він задовольняє наступним сплітаючим співвідношенням

$$\mathcal{F}\mathcal{U} = \mathcal{U}_\sigma \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F}\rho = \rho_\sigma.$$

$\mathcal{F}$ є ізометричним на мінімальному підпросторі, що приводить $\mathcal{U}$ і містить $\operatorname{im}\rho$, на ортогональному доповненні до цього підпростору $\mathcal{F}$ дорівнює нулю. Зокрема, якщо система $\mathfrak{S}$ є мінімальною, то оператор $\mathcal{F}\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}^\sigma$ є унітарним і здійснює унітарну еквівалентність унітарних систем розсіювання $\mathfrak{S}$ (2.1.1) і $\mathfrak{S}_\sigma$ (2.3.1).

Зауваження 2.8. *За допомогою інтеграла Пуассона можна зіставити всім векторним мірам на колі* $\mathbb{T}$, *що належить до простору* $\mathcal{L}^\sigma$, *векторно-значні гармонійні функції в крузі* $\mathbb{D}$ *(див. Розділ 2.2, формула* (2.2.8)*, Теорема 2.5). У гармонійної реалізації відповідні об'єкти визначаються наступним чином*

$$\sigma(\zeta) \ = \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2}\sigma(dt) = \rho^*\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\zeta)\rho, \tag{2.3.3}$$

$$\nu_k(\zeta) \ = \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|\zeta|^2}{|t-\zeta|^2}\nu_k(dt) = \rho^*\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\zeta)k, \tag{2.3.4}$$

де $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\zeta)$ *це ядро Пуассона оператора* $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\zeta) &= (\mathbf{1}-\zeta\mathcal{U})^{-1} + (\mathbf{1}-\bar{\zeta}\mathcal{U}^*)^{-1} - \mathbf{1} = \\ &= (1-|\zeta|^2)(\mathbf{1}-\zeta\mathcal{U})^{-1}(\mathbf{1}-\bar{\zeta}\mathcal{U}^*)^{-1}.\end{aligned}$$

Представлення Фур'є (2.3.2) *ми часто будемо розуміти як відображення в простір гармонійних вектор-функцій.*

$$\mathcal{F}\colon k \mapsto \nu_k, \tag{2.3.5}$$

де ν_k *визначається формулою* (2.3.4)*. Детальніше це викладено в роботах [26, 27, 61, 62, 63, 64].*

Відзначимо також що в роботі [25] представлені узагальнення викладеної вище моделі на випадок системи комутовних унітарних операторів $(\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_d)$ *або системи операторів, для яких блоковий оператор-рядок* $\begin{bmatrix}\mathcal{U}_1 & \cdots & \mathcal{U}_d\end{bmatrix}$ *є унітарним (представлення алгебри Кунца). В цих моделях замість простору Хеллінгера використовуються формальні Ґільбертові простори з відтворюючими ядрами.*

2.4 Шурівські доповнення мір та ортогональні розбиття простору Хеллінгера

Нам знадобиться наступний результат що стосується ортогональних розкладів просторів Хеллінгера $\mathcal{L}^\sigma$ який в основному міститься в Теоремі 2.8 в [27].

Теорема 2.9. Нехай σ це $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ - значна невід'ємна міра. Припустимо що Ґільбертів простір коефіцієнтів $\mathcal{E}$ розбито в ортогональну суму двох підпросторів $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$. Представимо міру σ в блоковому вигляді що відповідає цьому розбиттю

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix},$$

де для будь-якої борелівської множини Δ, $\sigma_{ij}(\Delta) \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_j, \mathcal{E}_i)$, $i, j = 1, 2$. Визначимо підпростори $\mathcal{L}_1^\sigma$ і $\mathcal{L}_2^\sigma$ простору $\mathcal{L}^\sigma$ наступним чином

$$\mathcal{L}_1^\sigma = \left\{ \nu = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}^\sigma \colon \|\nu\|_{\mathcal{L}^\sigma} = \|\nu_1\|_{\mathcal{L}^{\sigma_{11}}} \right\},$$

$$\mathcal{L}_2^\sigma = \left\{ \nu = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}^\sigma \colon \nu_1 = 0 \right\}.$$

Тоді:

1. $\mathcal{L}_1^\sigma = \operatorname{Clos}\left\{ \sigma \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} p \colon p \in \mathcal{E}_1[t, t^{-1}] \right\}$, де $\mathcal{E}_1[t, t^{-1}]$ позначає простір тригонометричних поліномів з коефіцієнтами в $\mathcal{E}_1$, і
2. $\mathcal{L}_2^\sigma = \mathcal{L}^\sigma \ominus \mathcal{L}_1^\sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix} \colon q \in \mathcal{L}^{\sigma_{11}^\perp} \right\}$, де $\sigma_{11}^\perp = \sigma_{22} - \sigma_{21}\sigma_{11}^{[-1]}\sigma_{12}$ це Шурівське доповнення σ_{11} в σ в сенсі [27, Параграф 2]. Зокрема,

$$\mathcal{L}_1^\sigma = \mathcal{L}^\sigma \text{ тоді і тільки тоді коли } \sigma_{11}^\perp = 0. \tag{2.4.1}$$

Доведення. Доведемо твердження (1), воно неявно міститься в Теоремі 2.8 [27].

Нехай $p \in \mathcal{E}_1[t, t^{-1}]$, наступне обчислення

$$\begin{aligned}\left\langle \sigma \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} p,\, \sigma \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} p \right\rangle_{\mathcal{L}^\sigma} &= \int_{\mathbb{T}} p(t)^* \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \sigma(dt) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} p(t) \\ &= \int_{\mathbb{T}} p(t)^* \sigma_{11}(dt) p_{11}(t) \\ &= \langle \sigma_{11} p,\, \sigma_{11} p \rangle_{\mathcal{L}^{\sigma_{11}}}\end{aligned}$$

показує що відображення

$$\sigma_{11} p \mapsto \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} p, \quad p \in \mathcal{E}_1[t, t^{-1}]$$

є ізометричним вкладає щільну в просторі $\mathcal{L}^{\sigma_{11}}$ множину в простір $\mathcal{L}_1^\sigma$. Той факт що образ цієї множини щільний в $\mathcal{L}_1^\sigma$ випливає з визначення $\mathcal{L}_1^\sigma$ і з того що $\{\sigma_{11} p \colon p \in \mathcal{E}_1[t, t^{-1}]\}$ щільно в $\mathcal{L}^{\sigma_{11}}$. Твердження (2) цілком доведено в теоремі 2.8 [27]. □

2.5 Узагальнені резольвенти ізометричних операторів

Нехай $\mathcal{H}_0$ це Ґільбертів простір і V це ізометричний оператор в $\mathcal{H}_0$ з областю визначення d_V і областю значень Δ_V. Позначимо через N_{d_V} і N_{Δ_V} ортогональні доповнення d_V і Δ_V відповідно. Підпростори N_{d_V} і N_{Δ_V} називаються дефектними підпросторами V. Нехай $\mathcal{E}$ це інший Ґільбертів простір (простір коефіцієнтів) і $\rho : \mathcal{E} \to \mathcal{H}_0$ обмежений лінійний оператор (масштаб). Нехай $\mathcal{U}$ це унітарний оператор в Ґільбертовому просторі $\mathcal{K}$, який є розширенням V. Тим самим ми маємо унітарну систему розсіювання $\mathfrak{S} = (\mathcal{U}, \rho; \mathcal{K}, \mathcal{E})$, див. Розділ 2.1.

Розглянемо спектральну функцію цієї системи розсіювання [1]

$$\sigma_{\mathcal{U},\rho}(\zeta) = \rho^* \mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\zeta) \rho,$$

---

[1] Для спрощення позначень тут і далі ми вказуємо тільки оператор еволюції системи і масштаб і опускаємо відповідні простори.

де $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\zeta)$ це ядро Пуассона оператора $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\zeta) &= (\mathbf{1}-\zeta\mathcal{U})^{-1}+(\mathbf{1}-\bar{\zeta}\mathcal{U}^*)^{-1}-\mathbf{1}= \\ &= (1-|\zeta|^2)(\mathbf{1}-\zeta\mathcal{U})^{-1}(\mathbf{1}-\bar{\zeta}\mathcal{U}^*)^{-1}.\end{aligned}$$

$\mathcal{E}$ -значна оператор-функкція $\sigma(\zeta)$ є невід'ємною і гармонійною в крузі $\mathbb{D}$.

Наша мета тут: отримати явну параметризацію функцій $\sigma(\zeta)$, пов'язаних із заданою ізометрією V і масштабом ρ як описано вище. Для цього нам знадобиться більш детальна інформація про структуру унітарних розширень $\mathcal{U}$ ізометрії V. Визначимо унітарний вузол

$$A_0 : N_2 \oplus \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0 \oplus N_1,$$

де N_1 і N_2 це копії просторів N_{d_V} і N_{Δ_V} відповідно,

$$A_0 \Big| d_V = V,$$

A_0 відображає тотожно N_{d_V} на N_1 і N_2 на N_{Δ_V}. Унітарні розширення $\mathcal{U}$ ізометрії V є *з'єднаннями зі зворотним зв'язком* унітарного вузла A_0 і унітарних вузлів A_1 наступного виду:

$$A_1 : N_1 \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1 \oplus N_2,$$

де N_1 і N_2 ті ж підпростори що і вище. З'єднання зі зворотним зв'язком $\mathcal{U}$ вузла A_0 і вузла A_1 є унітарним оператором що діє в просторі $\mathcal{K}=\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1$. Оператор $\mathcal{U}$ визначається разом з допоміжним оператором $\Gamma : \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \to N_1 \oplus N_2$ як

$$\begin{aligned}\mathcal{U}\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} &\overset{def}{=\!=} \begin{bmatrix} h_0' \\ h_1' \end{bmatrix}, \\ \Gamma\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} &\overset{def}{=\!=} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \qquad (2.5.1)$$

де $h_0', h_1',\ n_1, n_2$ є єдиними розв'язками наступної системи лінійних рівнянь

$$\begin{aligned}A_0(n_2 \oplus h_0) &= h_0' \oplus n_1, \\ A_1(n_1 \oplus h_1) &= h_1' \oplus n_2.\end{aligned} \qquad (2.5.2)$$

Існування і єдність розв'язку системи (2.5.2) слідують з наступної властивості вузла A_0

$$A_0 : N_2 \to \mathcal{H}_0. \tag{2.5.3}$$

Визначимо відображення i як

$$i = \Gamma^* : N_1 \oplus N_2 \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \tag{2.5.4}$$

і будемо називати його дефектним масштабом, відповідним з'єднанню $\mathcal{U}$. Розглянемо також масштаб

$$[i, \rho] : N_1 \oplus N_2 \oplus \mathcal{E} \to \mathcal{K}, \tag{2.5.5}$$

де i діє на $N_1 \oplus N_2$ і ρ діє на $\mathcal{E}$, і відповідну систему розсіювання $(\mathcal{U}, [i, \rho]; \mathcal{K}, N_1 \oplus N_2 \oplus \mathcal{E})$. спектральну функцію цієї системи розсіювання позначимо через $\Sigma_{\mathcal{U},[i,\rho]}(\zeta)$ і запишемо її в блоковому вигляді

$$\Sigma_{\mathcal{U},[i,\rho]}(\zeta) = \begin{bmatrix} i^* \\ \rho^* \end{bmatrix} \mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\zeta)[I, \rho] = \begin{bmatrix} \sigma_{\mathcal{U},i} & \sigma_{\mathcal{U},i\rho} \\ \sigma^*_{\mathcal{U},i\rho} & \sigma_{\mathcal{U},\rho} \end{bmatrix}. \tag{2.5.6}$$

Таким чином $\sigma_{\mathcal{U},i}$ це спектральна функція системи розсіювання $(\mathcal{U}, i; \mathcal{K}, N_1 \oplus N_2)$, а $\sigma_{\mathcal{U},\rho}$ спектральна функція системи $(\mathcal{U}, \rho; \mathcal{K}, \mathcal{E})$.

Як було оголошено вище, нас цікавить функція $\sigma_{\mathcal{U},\rho}$, проте ми обчислимо всі блоки матриці (2.5.6). Технічно простіше обчислюється $\sigma_{\mathcal{U},i}$, потім вона використовується для обчислення $\sigma_{\mathcal{U},\rho}$.

Спочатку ми обчислимо функції пов'язані з A_0 і з A_1 окремо, а потім обчислимо функції пов'язані зі з'єднанням. Розглянемо унітарну дилатацію вузла A_0:

$$\mathcal{K}_0 = \cdots \oplus N_2^{(1)} \oplus N_2^{(0)} \oplus \mathcal{H}_0 \oplus N_1^{(-1)} \oplus N_1^{(-2)} \oplus \cdots, \tag{2.5.7}$$

де простори $N_1^{(k)}$ і $N_2^{(k)}$ це копії просторів N_1 і N_2 відповідно. Оператор $\mathcal{U}_0$ діє на $N_2^{(0)} \oplus \mathcal{H}_0$ також як A_0

$$\mathcal{U}_0 : N_2^{(0)} \oplus \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0 \oplus N_1^{(0)}, \tag{2.5.8}$$

$\mathcal{U}_0$ діє як зсув на "хвостах"

$$\mathcal{U}_0 : \;\; N_1^{(k)} \to N_1^{(k-1)}, \;\; k \leq -1,$$

$$\mathcal{U}_0: \ N_2^{(k)} \to N_2^{(k-1)}, \quad k \geq 1. \tag{2.5.9}$$

Визначимо масштаб $i_0 : N_1 \oplus N_2 \to \mathcal{K}_0$ за допомогою наступних ототожнень:

$$i_0^{(2)}: \ N_2 \to N_2^{(0)},$$

$$i_0^{(1)}: \ N_1 \to \mathcal{U}_0^* N_1^{(-1)} \overset{def}{=} N_1^{(0)} \subseteq \mathcal{H}_0. \tag{2.5.10}$$

Спектральна функція системи розсіювання $(\mathcal{U}_0, i_0; \mathcal{K}_0, N_1 \oplus N_2)$ дорівнює

$$\sigma_{\mathcal{U}_0, i_0}(\zeta) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_1} & s(\zeta) \\ \\ s(\zeta)^* & \mathbf{1}_{N_2} \end{bmatrix} \ N_1 \oplus N_2 \to N_1 \oplus N_2, \tag{2.5.11}$$

де $s(\zeta)$ характеристична функція вузла A_0. Функція $s(\zeta) : N_2 \to N_1$ є операторно-значною функцією класу Шура і

$$s(0) = 0. \tag{2.5.12}$$

Остання рівність випливає з властивості (2.5.3) вузла A_0. Функції з простору $\mathcal{L}^{\sigma_{\mathcal{U}_0, i_0}}$ теж будемо записувати у вигляді пар

$$\nu(\zeta) = \begin{bmatrix} \nu_1(\zeta) \\ \nu_2(\zeta) \end{bmatrix}. \tag{2.5.13}$$

Для них (2.2.10) з урахуванням (2.5.11) і (2.5.13) приймає вид

$$\begin{bmatrix} \mu_\nu(\zeta) & \nu_1(\zeta)^* & \nu_2(\zeta)^* \\ \nu_1(\zeta) & \mathbf{1}_{N_1} & s(\zeta) \\ \nu_2(\zeta) & s(\zeta)^* & \mathbf{1}_{N_2} \end{bmatrix} \geq 0. \tag{2.5.14}$$

З (2.5.14) зокрема слід що

$$\begin{aligned} \|\nu_1(\zeta)\|^2_{N_1} &\leq \mu_\nu(\zeta), \\ \|\nu_2(\zeta)\|^2_{N_2} &\leq \mu_\nu(\zeta). \end{aligned} \tag{2.5.15}$$

Представлення Фур'є системи $(\mathcal{U}_0, i_0; \mathcal{K}_0, N_1 \oplus N_2)$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0, i_0} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{\mathcal{U}_0, i_0^{(1)}} \\ \\ \mathcal{F}_{\mathcal{U}_0, i_0^{(2)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_0^{(1)^*} \\ \\ i_0^{(2)^*} \end{bmatrix} \mathcal{P}_{\mathcal{U}_0}(\zeta) \tag{2.5.16}$$

відображає $\mathcal{K}_0$ на $\mathcal{L}^{\sigma_{\mathcal{U}_0,i_0}}$. Зі специфіки структури простору $\mathcal{K}_0$ і масштабу i_0 слід що для будь-якого $h_0 \in \mathcal{H}_0$, $\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0^{(1)}}h_0$ аналітична в $\mathbb{D}$, а $\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0^{(2)}}h_0$ антианалітична в $\mathbb{D}$ і дорівнює нулю в нулі. Ця обставина, в силу нерівностей (2.5.15), тягне що для будь-якого $h_0 \in \mathcal{H}_0$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0^{(1)}}h_0 \in H^2_+(N_1),$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0^{(2)}}h_0 \in H^2_-(N_2). \tag{2.5.17}$$

Розглянемо також унітарну систему розсіювання

$$(\mathcal{U}_0, [i_0, \rho]; \mathcal{K}_0, N_1 \oplus N_2 \oplus \mathcal{E}).$$

Позначимо її спектральну функцію через $\Sigma_{\mathcal{U}_0,[i_0,\rho]}(\zeta)$:

$$\Sigma_{\mathcal{U}_0,[i_0,\rho]} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_1} & s & r_1 \\ s^* & \mathbf{1}_{N_2} & r_2^* \\ r_1^* & r_2 & \sigma_0 \end{bmatrix} : N_1 \oplus N_2 \oplus \mathcal{E} \to N_1 \oplus N_2 \oplus \mathcal{E}. \tag{2.5.18}$$

Оскільки $\rho : \mathcal{E} \to \mathcal{H}_0$, то $r_1(\zeta)$ аналітична в $\mathbb{D}$, а $r_2(\zeta)^*$ антианалітична в $\mathbb{D}, i\ r_2(0)^* = 0$. Крім того, так як $\Sigma_0(\zeta) \geq 0$, то

$$\|r_1(\zeta)e\|^2_{N_1} \quad \leq \quad < \sigma_0(\zeta)e, e >,$$

$$\|r_2(\zeta)^*e\|^2_{N_2} \quad \leq \quad < \sigma_0(\zeta)e, e > . \tag{2.5.19}$$

Оскільки $\sigma_0(\zeta)$ гармонійна, то (2.5.19) тягне що r_1 є сильною H^2_+ оператор-функцією, а r_2^* є сильною H^2_- оператор-функцією ([91]).

Аналогічно зв'яжемо унітарну систему розсіювання $(\mathcal{U}_1, i_1; \mathcal{K}_1, N_1 \oplus N_2)$ з унітарною вузлом

$$A_1 : N_1 \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1 \oplus N_2$$

наступним чином

$$\mathcal{K}_1 = \ \cdots \oplus N_1^{(1)} \oplus N_1^{(0)} \oplus \mathcal{H}_1 \oplus N_2^{(-1)} \oplus N_2^{(-2)} \oplus \cdots$$

$$\mathcal{U}_1 : N_1^{(0)} \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1 \oplus N_2^{(-1)} \ \text{ як } \ A_1,$$

$$\mathcal{U}_1 \text{ діє як зсув на хвостах },$$

$$i_1^{(1)} : N_1 \to N_1^{(0)},\ i_1^{(2)} : N_2 \to \mathcal{U}_1^* N_2^{(-1)}. \tag{2.5.20}$$

Спектральна функція системи $(\mathcal{U}_1, i_1; \mathcal{K}_1, N_1 \oplus N_2)$ дорівнює

$$\sigma_{\mathcal{U}_1,i_1}(\zeta) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_1} & \omega^* \\ & \\ \omega & \mathbf{1}_{N_2} \end{bmatrix}, \tag{2.5.21}$$

де ω характеристична функція вузла A_1. У нашому контексті функція $\omega(\zeta)$ може бути довільною операторно-значною функцією класу Шура в крузі $\mathbb{D}$, $\omega(\zeta) : N_1 \to N_2$.

Також як і вище функції з простору $\mathcal{L}^{\sigma_{\mathcal{U}_1,i_1}}$ можуть бути записані у вигляді пар

$$\nu(\zeta) = \begin{bmatrix} \nu_1(\zeta) \\ \nu_2(\zeta) \end{bmatrix}. \tag{2.5.22}$$

Для них (2.2.10) з урахуванням (2.5.21) і (2.5.22) приймає вид

$$\begin{bmatrix} \mu_\nu(\zeta) & \nu_1(\zeta)^* & \nu_2(\zeta)^* \\ \nu_1(\zeta) & \mathbf{1}_{N_1} & \omega(\zeta)^* \\ \nu_2(\zeta) & \omega(\zeta) & \mathbf{1}_{N_2} \end{bmatrix} \geq 0. \tag{2.5.23}$$

З (2.5.23) також як і раніше випливає існування гармонійних мажорант

$$\begin{aligned} \|\nu_1(\zeta)\|_{N_1}^2 &\leq \mu(\zeta), \\ \|\nu_2(\zeta)\|_{N_2}^2 &\leq \mu(\zeta). \end{aligned} \tag{2.5.24}$$

Представлення Фур'є системи $(\mathcal{U}_1, i_1; \mathcal{K}_1, N_1 \oplus N_2)$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}_1,i_1} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{\mathcal{U}_1,i_1^{(1)}} \\ \\ \mathcal{F}_{\mathcal{U}_1,i_1^{(2)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1^{(1)*} \\ \\ i_1^{(2)*} \end{bmatrix} \mathcal{P}_{\mathcal{U}_1}(\zeta) \tag{2.5.25}$$

відображає $\mathcal{K}_1$ на $\mathcal{L}^{\sigma_{\mathcal{U}_1,i_1}}$. Зі специфіки структури простору $\mathcal{K}_1$ і масштабу i_1 випливає що для будь-якого $h_1 \in \mathcal{H}_1$, $\mathcal{F}_{\mathcal{U}_1,i_1^{(2)}} h_0$ аналітична в $\mathbb{D}$, а $\mathcal{F}_{\mathcal{U}_1,i_1^{(1)}} h_0$

антианалітична в $\mathbb{D}$ і наближається до нуля в нулі. Ця обставина, в силу нерівностей (2.5.24), тягне що для будь-якого $h_1 \in \mathcal{H}_1$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}_1, i_1^{(1)}} h_1 \in H^2_-(N_1),$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{U}_1, i_1^{(2)}} h_1 \in H^2_+(N_2). \tag{2.5.26}$$

Зараз почнемо обчислення.

Лема 2.10.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\zeta) &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\mathcal{U}_0}(\zeta) & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_{\mathcal{U}_1}(\zeta) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathcal{P}^-_{\mathcal{U}_0}(\zeta)^* & 0 \\ 0 & \mathcal{P}^-_{\mathcal{U}_1}(\zeta)^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i_0^{(1)} & i_0^{(2)} \\ i_1^{(1)} & -i_1^{(2)} \end{bmatrix} i^* \mathcal{P}^+_{\mathcal{U}}(\zeta) \\ &+ \begin{bmatrix} \mathcal{P}^+_{\mathcal{U}_0}(\zeta)^* & 0 \\ 0 & \mathcal{P}^+_{\mathcal{U}_1}(\zeta)^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0^{(1)} & -i_0^{(2)} \\ -i_1^{(1)} & i_1^{(2)} \end{bmatrix} i^* \mathcal{P}^-_{\mathcal{U}}(\zeta). \end{aligned} \tag{2.5.27}$$

Доведення. Згідно з визначеннями (2.5.1), (2.5.2), (2.5.4) оператора $\mathcal{U}$ і масштабу i, (2.5.10) масштабу i_0, і (2.5.20) масштабу i_1 запишемо наступні рівності

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0(i_0^{(2)} i^{(2)^*} + P_{\mathcal{H}_0})\binom{h_0}{h_1} = P_{\mathcal{H}_0}\mathcal{U}\binom{h_0}{h_1} + \mathcal{U}_0 i_0^{(1)} i^{(1)^*}\binom{h_0}{h_1} \\ \mathcal{U}_1(i_1^{(1)} i^{(1)^*} + P_{\mathcal{H}_1})\binom{h_0}{h_1} = P_{\mathcal{H}_1}\mathcal{U}\binom{h_0}{h_1} + \mathcal{U}_1 i_1^{(2)} i^{(2)^*}\binom{h_0}{h_1}. \end{cases} \tag{2.5.28}$$

Підставимо в (2.5.28) $\mathcal{P}^+_{\mathcal{U}}(\zeta)\binom{h_0}{h_1}$ замість $\binom{h_0}{h_1}$. Оскільки

$$\mathcal{U}\mathcal{P}^+_{\mathcal{U}}(\zeta) = \frac{\mathcal{P}^+_{\mathcal{U}}(\zeta) - \mathbf{1}}{\zeta} \tag{2.5.29}$$

то

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0(i_0^{(2)} i^{(2)^*}\mathcal{P}^+_{\mathcal{U}}(\zeta) + P_{\mathcal{H}_0}\mathcal{P}^+_{\mathcal{U}}(\zeta)) = P_{\mathcal{H}_0}\frac{\mathcal{P}^+_{\mathcal{U}}(\zeta)-\mathbf{1}}{\zeta} + \mathcal{U}_0 i_0^{(1)} i^{(1)^*}\mathcal{P}^+_{\mathcal{U}}(\zeta) \\ \mathcal{U}_1(i_1^{(1)} i^{(1)^*}\mathcal{P}^+_{\mathcal{U}}(\zeta) + P_{\mathcal{H}_1}\mathcal{P}^+_{\mathcal{U}}(\zeta)) = P_{\mathcal{H}_1}\frac{\mathcal{P}^+_{\mathcal{U}}(\zeta)-\mathbf{1}}{\zeta} + \mathcal{U}_1 i_1^{(2)} i^{(2)^*}\mathcal{P}^+_{\mathcal{U}}(\zeta) \end{cases} \tag{2.5.30}$$

що може бути переписано наступним чином:

$$\begin{cases} (\mathbf{1}-\zeta\mathcal{U}_0)P_{\mathcal{H}_0}\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{+}(\zeta) = P_{\mathcal{H}_0} + \zeta\mathcal{U}_0(i_0^{(2)}i^{(2)^*} - i_0^{(1)}i^{(1)^*})\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{+}(\zeta) \\ \\ (\mathbf{1}-\zeta\mathcal{U}_1)P_{\mathcal{H}_1}\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{+}(\zeta) = P_{\mathcal{H}_1} + \zeta\mathcal{U}_1(i_1^{(1)}i^{(1)^*} - i_1^{(2)}i^{(2)^*})\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{+}(\zeta). \end{cases} \tag{2.5.31}$$

Тобто,

$$\begin{cases} P_{\mathcal{H}_0}\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{+}(\zeta) = \mathcal{P}_{\mathcal{U}_0}^{+}(\zeta)P_{\mathcal{H}_0} + \mathcal{P}_{\mathcal{U}_0}^{-}(\zeta)^*[-i_0^{(1)}, i_0^{(2)}]i^*\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{+}(\zeta) \\ \\ P_{\mathcal{H}_1}\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{+}(\zeta) = \mathcal{P}_{\mathcal{U}_1}^{+}(\zeta)P_{\mathcal{H}_1} + \mathcal{P}_{\mathcal{U}_1}^{-}(\zeta)^*[i_1^{(1)}, -i_1^{(2)}]i^*\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{+}(\zeta). \end{cases} \tag{2.5.32}$$

остаточно отримуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{+}(\zeta) &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\mathcal{U}_0}^{+}(\zeta) & 0 \\ \\ 0 & \mathcal{P}_{\mathcal{U}_1}^{+}(\zeta) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\mathcal{U}_0}^{-}(\zeta)^* & 0 \\ \\ 0 & \mathcal{P}_{\mathcal{U}_1}^{-}(\zeta)^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i_0^{(1)} & i_0^{(2)} \\ \\ i_1^{(1)} & -i_1^{(2)} \end{bmatrix} i^*\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{+}(\zeta). \end{aligned} \tag{2.5.33}$$

Аналогічно, підставляючи $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{-}(\zeta)\binom{h_0}{h_1}$ в (2.5.28) замість $\binom{h_0}{h_1}$, і використовуючи

$$\mathcal{U}\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{-}(\zeta) = \bar{\zeta}(\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{-}(\zeta) + \mathbf{1}), \tag{2.5.34}$$

отримаємо

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0(i_0^{(2)}i^{(2)^*}\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{-}(\zeta) + P_{\mathcal{H}_0}\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{-}(\zeta)) = \ \bar{\zeta}P_{\mathcal{H}_0}(\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{-}(\zeta) + \mathbf{1}) + \mathcal{U}_0 i_0^{(1)}i^{(1)^*}\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{-}(\zeta), \\ \\ \mathcal{U}_1(i_1^{(1)}i^{(1)^*}\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{-} + P_{\mathcal{H}_1}\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{-}(\zeta)) = \ \bar{\zeta}P_{\mathcal{H}_1}(\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{-}(\zeta) + \mathbf{1}) + \mathcal{U}_1 i_1^{(2)}i^{(2)^*}\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{-}(\zeta). \end{cases} \tag{2.5.35}$$

Помноживши першу рівність на $\mathcal{U}_0^*$ і другу на $\mathcal{U}_1^*$ отримаємо

$$\begin{cases} (\mathbf{1}-\bar{\zeta}\mathcal{U}_0^*)P_{\mathcal{H}_0}\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{-}(\zeta) = \bar{\zeta}\mathcal{U}_0^*P_{\mathcal{H}_0} + \begin{bmatrix} i_0^{(1)} & -i_0^{(2)} \end{bmatrix} i^*\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{-}(\zeta) \\ \\ (\mathbf{1}-\bar{\zeta}\mathcal{U}_1^*)P_{\mathcal{H}_1}\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{-}(\zeta) = \bar{\zeta}\mathcal{U}_1^*P_{\mathcal{H}_1} + \begin{bmatrix} -i_1^{(1)} & i_1^{(2)} \end{bmatrix} i^*\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^{-}(\zeta) \end{cases} \tag{2.5.36}$$

що веде до

$$\mathcal{P}^{-}_{\mathcal{U}}(\zeta) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}^{-}_{\mathcal{U}_0}(\zeta) & 0 \\ 0 & \mathcal{P}^{-}_{\mathcal{U}_1}(\zeta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{P}^{+}_{\mathcal{U}_0}(\zeta)^* & 0 \\ 0 & \mathcal{P}^{+}_{\mathcal{U}_1}(\zeta)^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0^{(1)} & -i_0^{(2)} \\ -i_1^{(1)} & i_1^{(2)} \end{bmatrix} i^*\mathcal{P}^{-}_{\mathcal{U}}(\zeta). \tag{2.5.37}$$

Записуючи разом (2.5.33) і (2.5.37) отримаємо (2.5.27). Лему доведено. □

Лема 2.11.

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\mathcal{U},i}\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix})(\zeta) &= \left(\mathbf{1} - \begin{bmatrix} 0 & s(\zeta) \\ \omega(\zeta) & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} (\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0^{(1)}}h_0)(\zeta) \\ (\mathcal{F}_{\mathcal{U}_1,i_1^{(2)}}h_1)(\zeta) \end{bmatrix} + \\ &+ \left(\mathbf{1} - \begin{bmatrix} 0 & \omega(\zeta)^* \\ s(\zeta)^* & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} (\mathcal{F}_{\mathcal{U}_1,i_1^{(1)}}h_1)(\zeta) \\ (\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0^{(2)}}h_0)(\zeta) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.5.38}$$

Доведення. Нагадаємо що в силу (2.5.17) і (2.5.26), вектор-функції $\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0^{(1)}}h_0$ і $\mathcal{F}_{\mathcal{U}_1,i_1^{(2)}}h_1$ належать до H^2_+, а вектор-функції $\mathcal{F}_{\mathcal{U}_1,i_1^{(1)}}h_1$ і $\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0^{(2)}}h_0$ належать до H^2_-. Отже, вони мають межові значення на колі майже всюди. Подіємо $\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0^{(1)}}$ на першу компоненту (2.5.33) і використовуємо наступну властивість

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0}\mathcal{P}^{+}_{\mathcal{U}_0}(\zeta)h_0)(t) &= \frac{(\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0}h_0)(t)}{1-\bar{t}\zeta} \\ (\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0}\mathcal{P}^{-}_{\mathcal{U}_0}(\zeta)h_0)(t) &= \frac{(\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0}h_0)(t)}{1-t\bar{\zeta}}t\bar{\zeta}, \quad \text{м.в.} \ , |t|=1. \end{aligned} \tag{2.5.39}$$

тоді

$$\left(\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0^{(1)}}P_{\mathcal{H}_0}\mathcal{P}^{+}_{\mathcal{U}_0}(\zeta)\tbinom{h_0}{h_1}\right)(t) =$$

$$\frac{(\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0^{(1)}}h_0)(t)}{1-\bar{t}\zeta} + \frac{\bar{t}\zeta}{1-\bar{t}\zeta}\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0^{(1)}}(\begin{bmatrix} -i_0^{(1)} & i_0^{(2)} \end{bmatrix})(t) \cdot i^*\mathcal{P}^{+}_{\mathcal{U}}(\zeta)\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{t(\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0^{(1)}}h_0)(t)}{t-\zeta} + \frac{\zeta}{t-\zeta}\begin{bmatrix} -\mathbf{1} & s(t) \end{bmatrix} \cdot i^*\mathcal{P}^{+}_{\mathcal{U}}(\zeta)\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix}. \tag{2.5.40}$$

Остання рівність випливає з (2.5.11). Згідно (2.5.17), ліва частина рівності (2.5.40) належить до $H^2_+(N_1)$, що тягне

$$(\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0^{(1)}}h_0)(\zeta)+\begin{bmatrix}-\mathbf{1} & s(\zeta)\end{bmatrix}\cdot i^*\mathcal{P}^+_{\mathcal{U}}(\zeta)\begin{bmatrix}h_0\\ h_1\end{bmatrix}=0. \tag{2.5.41}$$

Аналогічно, застосовуючи $\mathcal{F}_{\mathcal{U}_1,i_1^{(2)}}$ до другої компоненті (2.5.33) отримаємо

$$(\mathcal{F}_{\mathcal{U}_1,i_1^{(2)}}h_1)(\zeta)+\begin{bmatrix}\omega(\zeta) & -\mathbf{1}\end{bmatrix}\cdot i^*\mathcal{P}^+_{\mathcal{U}}(\zeta)\begin{bmatrix}h_0\\ h_1\end{bmatrix}=0. \tag{2.5.42}$$

(2.5.41) і (2.5.42) разом дають

$$\begin{bmatrix}\mathbf{1} & -s(\zeta)\\ \\ -\omega(\zeta) & \mathbf{1}\end{bmatrix} i^*\mathcal{P}^+_{\mathcal{U}}(\zeta)\begin{bmatrix}h_0\\ \\ h_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0,i_0^{(1)}}h_0)(\zeta)\\ \\ (\mathcal{F}_{\mathcal{U}_1,i_1^{(2)}}h_1)(\zeta)\end{bmatrix}, \tag{2.5.43}$$

що приводить до першого доданку в (2.5.38). Другий доданок отримуємо з (2.5.37) аналогічним чином. Лему доведено. □

Теорема 2.12. Мають місце наступні формули ($|\zeta|<1$)

$$\sigma_{\mathcal{U},i}=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{1}+\begin{bmatrix}0 & s\\ \omega & 0\end{bmatrix}}{\mathbf{1}-\begin{bmatrix}0 & s\\ \omega & 0\end{bmatrix}}+\frac{\mathbf{1}+\begin{bmatrix}0 & \omega^*\\ s^* & 0\end{bmatrix}}{\mathbf{1}-\begin{bmatrix}0 & \omega^*\\ s^* & 0\end{bmatrix}}\right), \tag{2.5.44}$$

$$\sigma_{\mathcal{U},i\rho}=\left(\mathbf{1}-\begin{bmatrix}0 & s\\ \\ \omega & 0\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}r_1\\ \\ 0\end{bmatrix}+\left(\mathbf{1}-\begin{bmatrix}0 & \omega^*\\ \\ s^* & 0\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \\ r_2^*\end{bmatrix} \tag{2.5.45}$$

$$\sigma_{\mathcal{U},\rho}=\sigma_0+r_2\omega(\mathbf{1}-s\omega)^{-1}r_1+r_1^*(\mathbf{1}-\omega^*s^*)^{-1}\omega^*r_2^* \tag{2.5.46}$$

де $\sigma_{\mathcal{U},i},\sigma_{\mathcal{U},i\rho},\sigma_{\mathcal{U},\rho}$ визначені як блоки в (2.5.6), s,r_1,r_2,σ_0 визначені в (2.5.11), (2.5.18), ω в (2.5.21).

Доведення. Щоб отримати (2.5.44) і (2.5.45) досить підставити

$$\begin{bmatrix}h_0\\ h_1\end{bmatrix}=i\begin{bmatrix}n_1\\ n_2\end{bmatrix}\quad i\quad\begin{bmatrix}h_0\\ h_1\end{bmatrix}=\rho e$$

в (2.5.38) відповідно. Підставимо спочатку

$$\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} = \rho e. \tag{2.5.47}$$

Оскільки $\rho : \mathcal{E} \to \mathcal{H}_0$, то

$$h_0 = \rho e, \quad h_1 = 0$$

в (2.5.47). Тоді, згідно з визначенням (2.5.18),

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0, i_0^{(1)}} \rho e)(\zeta) &= i_0^{(1)^*} \mathcal{P}_{\mathcal{U}_0}(\zeta) \rho e = r_1(\zeta) e \\ (\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0, i_0^{(2)}} \rho e)(\zeta) &= i_0^{(2)^*} \mathcal{P}_{\mathcal{U}_0}(\zeta) \rho_0 e = r_2^*(\zeta) e. \end{aligned} \tag{2.5.48}$$

Підставляючи (2.5.48) в (2.5.38) отримуємо (2.5.45). Щоб обчислити (2.5.44) нам знадобиться інше представлення для i. Вважаючи $\zeta = 0$ в (2.5.38) маємо

$$i^* \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ \omega(0) & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0^{(1)^*} h_0 \\ i_1^{(2)^*} h_1 \end{bmatrix}. \tag{2.5.49}$$

тоді,

$$i \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_0^{(1)} & 0 \\ 0 & P_{\mathcal{H}_1} i_1^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \omega(0)^* \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}. \tag{2.5.50}$$

В силу визначення (2.5.20)

$$i_1^{(2)} N_2 = \mathcal{U}_1^* N_2^{(-1)}.$$

отже,

$$i_1^{(2)} N_2 \in N_1^{(0)} \oplus \mathcal{H}_1.$$

тоді

$$P_{\mathcal{H}_1} i_1^{(2)} = i_1^{(2)} - P_{N_1^{(0)}} i_1^{(2)}.$$

Знову в силу визначення (2.5.20),

$$P_{N_1^{(0)}} = i_1^{(1)} i_1^{(1)^*}.$$

Таким чином

$$P_{\mathcal{H}_1} i_1^{(2)} = i_1^{(2)} - i_1^{(1)} i_1^{(1)^*} i_1^{(2)}.$$

В силу (2.5.21),

$$i_1^{(1)^*} i_1^{(2)} = \omega(0)^*.$$

Отже,

$$P_{\mathcal{H}_1} i_1^{(2)} = i_1^{(2)} - i_1^{(1)} \omega(0)^*.$$

Тепер (2.5.50) приймає вигляд

$$i^* \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_0^{(1)} \ (n_1 + \omega(0)^* n_2) \\ \\ i_1^{(2)} \ n_2 - i_1^{(1)} \omega(0)^* n_2 \end{bmatrix}. \tag{2.5.51}$$

Підставимо останній вираз в (2.5.38). Нагадаємо що

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0, i_0^{(1)}} i_0^{(1)} = \mathbf{1}_{N_1} \\ &\mathcal{F}_{\mathcal{U}_0, i_0^{(2)}} i_0^{(1)} = s^* \\ &\mathcal{F}_{\mathcal{U}_1, i_1^{(1)}} (i_1^{(2)} - i_1^{(1)} \omega(0)^*) = \omega^* - \omega(0)^* \\ &\mathcal{F}_{\mathcal{U}_1, i_1^{(2)}} (i_1^{(2)} - i_1^{(1)} \omega(0)^*) = \mathbf{1} - \omega\omega(0)^*. \end{aligned} \tag{2.5.52}$$

Тоді (2.5.38) перетворюється в

$$\begin{aligned} &\sigma_{\mathcal{U},i}(\zeta) \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \\ &= \left(\mathbf{1} - \begin{bmatrix} 0 & s(\zeta) \\ \\ \omega(\zeta) & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} n_1 + \omega(0)^* n_2 \\ \\ (\mathbf{1} - \omega(\zeta)\omega(0)^*) n_2 \end{bmatrix} \\ &+ \left(\mathbf{1} - \begin{bmatrix} 0 & \omega(\zeta)^* \\ \\ s(\zeta)^* & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \omega(\zeta)^* - \omega(0)^*) n_2 \\ \\ s(\zeta)^* (n_1 + \omega(0)^* n_2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.5.53}$$

Тобто,

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{U},i}(\zeta) \ = \ & \left(\mathbf{1} - \begin{bmatrix} 0 & s(\zeta) \\ \\ \omega(\zeta) & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \omega(0)^* \\ \\ 0 & \mathbf{1} - \omega(\zeta)\omega(0)^* \end{bmatrix} \\ + \ & \left(\mathbf{1} - \begin{bmatrix} 0 & \omega(\zeta)^* \\ \\ s(\zeta)^* & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \omega(\zeta)^* - \omega(0)^*) \\ \\ s(\zeta)^* & s(\zeta)^* \omega(0)^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \left(\mathbf{1} - \begin{bmatrix} 0 & s(\zeta) \\ \omega(\zeta) & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} + \left(\mathbf{1} - \begin{bmatrix} 0 & \omega(\zeta)^* \\ s(\zeta)^* & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \omega(\zeta)^* \\ s(\zeta)^* & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \left(\mathbf{1} - \begin{bmatrix} 0 & s(\zeta) \\ \omega(\zeta) & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \omega(0)^* \\ 0 & -\omega(\zeta)\omega(0)^* \end{bmatrix}$$
$$- \left(\mathbf{1} - \begin{bmatrix} 0 & \omega(\zeta)^* \\ s(\zeta)^* & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \omega(0)^* \\ 0 & -s(\zeta)^*\omega(0)^* \end{bmatrix}. \tag{2.5.54}$$

Третій (з чотирьох) доданок після останнього знака рівності спрощується таким чином

$$\left(\mathbf{1} - \begin{bmatrix} 0 & s(\zeta) \\ \omega(\zeta) & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} \left(\mathbf{1} - \begin{bmatrix} 0 & s(\zeta) \\ \omega(\zeta) & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 0 & \omega(0)^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & \omega(0)^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.5.55}$$

Аналогічно останній доданок в (2.5.54) дорівнює (зі знаком мінус)

$$\left(\mathbf{1} - \begin{bmatrix} 0 & \omega(\zeta)^* \\ s(\zeta)^* & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} \left(\mathbf{1} - \begin{bmatrix} 0 & \omega(\zeta)^* \\ s(\zeta)^* & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 0 & \omega(0)^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & \omega(0)^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.5.56}$$

Таким чином, останні два доданки в (2.5.54) скорочуються. Тоді (2.5.54) перетворюється до необхідного виду (2.5.44) шляхом вирахування $\frac{1}{2}\mathbf{1}$ з першого доданку і додавання цієї величини до другого.

Перейдемо тепер до виводу формули (2.5.46). Згідно (2.5.47)), нам потрібно обчислити

$$\sigma_{\mathcal{U},\rho}(\zeta) = \rho^*\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\zeta)\rho = \begin{bmatrix}\rho^* & 0\end{bmatrix} \mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\zeta) \begin{bmatrix}\rho \\ 0\end{bmatrix}. \tag{2.5.57}$$

В силу (2.5.27) і (2.5.45)

$$\begin{aligned}
\rho^*\mathcal{P}_{\mathcal{U}}(\zeta)\rho &= \rho^*\mathcal{P}_{\mathcal{U}_0}(\zeta)\rho \\
&+ \rho_0^*\mathcal{P}_{\mathcal{U}_0}^-(\zeta)^* \begin{bmatrix}-i_0^{(1)} & i_0^{(2)}\end{bmatrix} i^*\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^+(\zeta) \begin{bmatrix}\rho \\ 0\end{bmatrix} \\
&+ \rho^*\mathcal{P}_{\mathcal{U}_0}^+(\zeta)^* \begin{bmatrix}i_0^{(1)} & -i_0^{(2)}\end{bmatrix} i^*\mathcal{P}_{\mathcal{U}}^-(\zeta) \begin{bmatrix}\rho \\ 0\end{bmatrix} \\
&= \sigma_0(\zeta) + \begin{bmatrix}0 & r_2(\zeta)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{1} & -s(\zeta) \\ -\omega(\zeta) & \mathbf{1}\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}r_1(\zeta) \\ 0\end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix}r_1(\zeta)^* & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{1} & -\omega(\zeta)^* \\ -s(\zeta)^* & \mathbf{1}\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}0 \\ r_2(\zeta)^*\end{bmatrix} \\
&= \sigma_0(\zeta) + r_2(\zeta)\omega(\zeta)(\mathbf{1} - s(\zeta)\omega(\zeta))^{-1}r_1(\zeta) \\
&+ r_1(\zeta)^*(\mathbf{1} - \omega(\zeta)^*s(\zeta)^*)^{-1}\omega(\zeta)^*r_2(\zeta)^*.
\end{aligned}$$

В останньому перетворенні використовується формула

$$\begin{bmatrix}\mathbf{1} & -s \\ -\omega & \mathbf{1}\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}(\mathbf{1} - s\omega)^{-1} & s(\mathbf{1} - \omega s)^{-1} \\ \omega(\mathbf{1} - s\omega)^{-1} & (\mathbf{1} - \omega s)^{-1}\end{bmatrix}. \tag{2.5.58}$$

Існування зворотних матриць при всіх $|\zeta| < 1$ гарантуються тим що $s(0) = 0$ (див. (2.5.12)). □

Зауваження 2.13. На закінчення цього розділу зауважимо що система розсіювання $(\mathcal{U}_0, [i_0, \rho]; \mathcal{K}_0, N_1 \oplus \mathbb{N}_2 \oplus \mathcal{E})$ збігається з системою розсіювання, яка виходить описаним вище чином при з'єднанні зі зворотним зв'язком вузла A_0 і вузла A_1, такого що характеристична функція останнього дорівнює нулю $\omega(\zeta) \equiv 0$.

2.6 З'єднання зі зворотним зв'язком та відповідна динаміка

Припустимо що задані лінійні простори $\mathcal{X}_0, \widetilde{\mathcal{X}}_0, \mathcal{X}_1, \widetilde{\mathcal{X}}_1, \mathcal{F}, \mathcal{F}_*$ і лінійні оператори, записані в блоковому вигляді

$$U_0 = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{X}_0 \\ \mathcal{F} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{X}}_0 \\ \mathcal{F}_* \end{bmatrix},$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{F}_* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{X}}_1 \\ \mathcal{F} \end{bmatrix}. \tag{2.6.1}$$

Визначимо з'єднання зі зворотним зв'язком

$$U := \mathcal{F}_\ell(U_0, U_1) : \begin{bmatrix} \mathcal{X}_0 \\ \mathcal{X}_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{X}}_0 \\ \widetilde{\mathcal{X}}_1 \end{bmatrix}$$

наступним чином

$$\mathcal{F}_\ell(U_0, U_1) \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{x}_0 \\ \widetilde{x}_1 \end{bmatrix},$$

де

$$\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{x}_0 \\ f_* \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ f_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{x}_1 \\ f \end{bmatrix}, \tag{2.6.2}$$

в припущенні що при будь-яких x_0 і x_1 існують і єдині $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{x}_1$, $f \in \mathcal{F}$ і $f_* \in \mathcal{F}_*$ що задовольняють (2.6.2). Визначимо також *допоміжний оператор* $\Gamma_\ell(U_0, U_1)$

$$\Gamma_\ell(U_0, U_1) \colon \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f \\ f_* \end{bmatrix}. \tag{2.6.3}$$

У наступній теоремі показано що це визначення коректно тоді і тільки тоді коли оператор $I - D_1 D_0$ є зворотнім в просторі $\mathcal{F}$.

Теорема 2.14. Припустимо що задані блокові оператори U_0 і U_1 як в (2.6.1). Припустимо що $(I - D_1 D_0)^{-1}$, і отже також $(I - D_0 D_1)^{-1}$, існують як оператори в $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_*$, відповідно. Тоді з'єднання зі зворотним зв'язком (2.6.2) коректно визначено. Тобто, для будь-яких $\left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ x_1 \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$ існують і єдині $\left[\begin{smallmatrix} \widetilde{x}_0 \\ \widetilde{x}_1 \end{smallmatrix}\right] \in \widetilde{\mathcal{X}}_0 \oplus \widetilde{\mathcal{X}}_1$, $f \in \mathcal{F}$, $f_* \in \mathcal{F}_*$, які задовольняють (2.6.2).

Оператор з'єднання зі зворотним зв'язком тоді може бути визначений як $\mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)\colon \left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ x_1 \end{smallmatrix}\right] \mapsto \begin{bmatrix} \widetilde{x}_0 \\ \widetilde{x}_1 \end{bmatrix}$. Мають місце такі явні формули для $\mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$

$$\mathcal{F}_\ell(U_0, U_1) = \begin{bmatrix} A_0 + B_0(I - D_1D_0)^{-1}D_1C_0 & B_0(I - D_1D_0)^{-1}C_1 \\ B_1(I - D_0D_1)^{-1}C_0 & A_1 + B_1(I - D_0D_1)^{-1}D_0C_1 \end{bmatrix}. \tag{2.6.4}$$

і для допоміжного оператора (2.6.3)

$$\Gamma_\ell(U_0, U_1) = \begin{bmatrix} (I - D_1D_0)^{-1}D_1C_0 & (I - D_1D_0)^{-1}C_1 \\ (I - D_0D_1)^{-1}C_0 & (I - D_0D_1)^{-1}D_0C_1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f \\ f_* \end{bmatrix}. \tag{2.6.5}$$

Доведення. З другого рівняння першої системи в (2.6.2) маємо

$$f_* = C_0x_0 + D_0f.$$

Підставимо цю формулу у друге рівняння другої системи, отримаємо

$$\begin{aligned} f &= C_1x_1 + D_1f_* = C_1x_1 + D_1(C_0x_0 + D_0f) \\ &= D_1C_0x_0 + C_1x_1 + D_1D_0f. \end{aligned}$$

За умови що $I - D_1D_0$ має зворотній, можемо висловити f как

$$f = (I - D_1D_0)^{-1}D_1C_0x_0 + (I - D_1D_0)^{-1}C_1x_1.$$

Підставимо цей вислів в формулу для f_* (див. вище)

$$\begin{aligned} f_* &= C_0x_0 + D_0f \\ &= C_0x_0 + D_0(I - D_1D_0)^{-1}D_1C_0x_0 + D_0(I - D_1D_0)^{-1}C_0x_1 \\ &= (I - D_0D_1)^{-1}C_0x_0 + (I - D_0D_1)^{-1}D_0C_1x_1. \end{aligned}$$

Формулу (2.6.5) для допоміжного оператора f $\Gamma_\ell(U_0, U_1)$ отримано.

Тепер залишається підставити ці вирази для f, f_* в термінах x_0, x_1 в перші рівняння обох систем в (2.6.2) щоб отримати формулу (2.6.4) для $\mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$. □

Хоча формула (2.6.4) дає явний вираз для $\mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$ через U_0 и U_1, обчислення ступенів U^n $(n = 2, 3, \dots)$ за цією формулою уявляється громіздким. Далі пропонується більш ефективний підхід до обчислення цих ступенів, який теж використовує з'єднання зі зворотним зв'язком, але на рівні траєкторій динамічної системи. Введемо деякі позначення.

Для будь-якого векторного простору $\mathcal{G}$ позначимо через $\ell_{\mathcal{G}}(\mathbb{Z})$ (в літературі також використовується позначення $\mathcal{G}^{\mathbb{Z}}$) простір всіх $\mathcal{G}$-значних функцій на множині всіх цілих чисел $\mathbb{Z}$. Аналогічно $\ell_{\mathcal{G}}(\mathbb{Z}_+)$ позначатиме простір всіх $\mathcal{G}$-значних функцій на множині невід'ємних цілих чисел $\mathbb{Z}_+$; Простір $\ell_{\mathcal{G}}(\mathbb{Z}_+)$ можна ототожнити з підпростором простору $\ell_{\mathcal{G}}(\mathbb{Z})$, яке складається з функцій що дорівнюють нулю в від'ємних точках. Аналогічно визначається $\ell_{\mathcal{G}}(\mathbb{Z}_-)$ як простір всіх $\mathcal{G}$-значних функцій на множині від'ємних цілих $\mathbb{Z}_-$; воно також ототожнюється з підпростором $\ell_{\mathcal{G}}(\mathbb{Z})$, що складається з усіх $\mathcal{G}$-значних функцій на $\mathbb{Z}$ що дорівнюють нулю на $\mathbb{Z}_+$. Через $\mathcal{P}^+$ и $\mathcal{P}^-$ будемо позначати природні проекції $\ell_{\mathcal{G}}(\mathbb{Z})$ на $\ell_{\mathcal{G}}(\mathbb{Z}_+)$ і $\ell_{\mathcal{G}}(\mathbb{Z}_-)$, відповідно. Іноді будемо використовувати позначення

$$\vec{g}^{\,+} = \mathcal{P}^+\vec{g}, \quad \vec{g}^{\,-} = \mathcal{P}^-\vec{g}. \tag{2.6.6}$$

Через J позначимо двосторонній зсув $J : \vec{g} \mapsto \vec{g}\,'$, де $\vec{g}\,'(n) = \vec{g}(n-1)$.

З унітарним вузлом U

$$U = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{E} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{E}_* \end{bmatrix} \tag{2.6.7}$$

можна пов'язати лінійну динамічну систему

$$\begin{bmatrix} x(n+1) \\ e_*(n) \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} x(n) \\ e(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax(n) + Be(n) \\ Cx(n) + De(n) \end{bmatrix}. \tag{2.6.8}$$

Якщо задати початковий стан системи $x(0) = x_0$ і послідовність входів $\vec{e} \in \ell_{\mathcal{E}}(\mathbb{Z}_+)$, то рівняння (2.6.8) однозначно визначать послідовність станів $\vec{x} \in \ell_{\mathcal{X}}(\mathbb{Z}_+)$ і послідовність виходів $\vec{e}_* \in \ell_{\mathcal{E}_*}(\mathbb{Z}_+)$; маємо

$$\begin{aligned} x(n) &= A^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} Be(k), \\ e_*(n) &= CA^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} CA^{n-1-k} Be(k) + De(n) \text{ for } n = 0, 1, 2, \dots. \end{aligned} \tag{2.6.9}$$

Якщо представити елементи просторів $\ell_{\mathcal{X}}(\mathbb{Z}_+)$, $\ell_{\mathcal{E}}(\mathbb{Z}_+)$ і $\ell_{\mathcal{E}_*}(\mathbb{Z}_+)$ у вигляді векторів-стовпців, то рівняння (2.6.9) можна записати у вигляді

$$\begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{e}_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_0^+ & W_2^+ \\ W_1^+ & W^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \vec{e} \end{bmatrix}$$

де блоки оператора

$$\mathbf{W}^+ := \begin{bmatrix} W_0^+ & W_2^+ \\ W_1^+ & W^+ \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{X} \\ \ell_{\mathcal{E}}(\mathbb{Z}_+) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \ell_{\mathcal{X}}(\mathbb{Z}_+) \\ \ell_{\mathcal{E}_*}(\mathbb{Z}_+) \end{bmatrix} \tag{2.6.10}$$

задані формулами

$$W_0^+ = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{X}} \\ A \\ \vdots \\ A^{n-1} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad W_2^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & & & \\ B & 0 & 0 & \dots & & & \\ AB & B & 0 & \dots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ A^{n-1}B & A^{n-2}B & A^{n-3}B & \dots & B & 0 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$W_1^+ = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad W^+ = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & & & \\ CB & D & 0 & & & \\ CAB & CB & D & & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ CA^{n-1}B & CA^{n-2}B & CA^{n-3}B & \dots & D & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots \end{bmatrix}. \tag{2.6.11}$$

В теорії управління оператор W_0^+ називається *відображенням початкового стану - траєкторії системи* (у додатному напрямку часу), оператор W_2^+ називається *відображенням входу - траєкторії системи*, оператор W_1^+ називається *оператором спостереження* і оператор W^+ називається *відображенням входу-виходу*. Відзначимо що якщо застосувати перетворення Фур'є

$$\vec{f} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \vec{f}(n) z^n$$

до послідовностей входів і виходів $\vec{e}$ и $\vec{e}_*$, то оператор входу - виходу W^+ перейде в оператор множення на

$$\widehat{W}^+(z) = D + zC(I - zA)^{-1}B.$$

Останній вираз є *характеристичною функцією* вузла U (її також називають *передавальною функцією* лінійної системи (2.6.8)). Весь оператор $\mathbf{W}^+$ називатимемо *розширеним відображенням входу-виходу* (у додатному напрямку часу), пов'язаним з вузлом U.

Якщо матриця вузла U (2.6.7) оборотна, то можна запустити систему назад по часу:

$$\begin{bmatrix} x(n) \\ e(n) \end{bmatrix} = U^{-1} \begin{bmatrix} x(n+1) \\ e_*(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x(n+1) + \beta e_*(n) \\ \gamma x(n+1) + \delta e_*(n) \end{bmatrix} \tag{2.6.12}$$

де ми позначили $U^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right] : \mathcal{X} \oplus \mathcal{E}_* \to \mathcal{X} \oplus \mathcal{E}$. Тепер значення початкового стану системи $x(0)$ і вихідного сигналу у від'ємні моменти часу $\vec{e}_* \in \ell_{\mathcal{E}_*}(\mathbb{Z}_-)$ однозначно визначають траєкторію системи $\vec{x}_- \in \ell_{\mathcal{X}}(\mathbb{Z}_-)$ і вхідний сигнал $\vec{e}_- \in \ell_{\mathcal{E}}(\mathbb{Z}_-)$ у від'ємні моменти часу:

$$\begin{aligned} x(-n) &= \alpha^n x(0) + \sum_{k=1}^{n} \alpha^{n-k} \beta e_*(-k), \\ e(-n) &= \gamma \alpha^{n-1} x(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma \alpha^{n-1-k} \beta e_*(-k) + \delta e_*(-n) \text{ for } n = 1, 2, \dots . \end{aligned} \tag{2.6.13}$$

Якщо представити елементи $\vec{x} = \{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_-}$ простору $\ell_{\mathcal{X}}(\mathbb{Z}_-)$ як вектори-стовпці

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \\ x(-3) \\ x(-2) \\ x(-1) \end{bmatrix},$$

то рівняння (2.6.13) можуть бути виражені у вигляді

$$\begin{bmatrix} \vec{x}_- \\ \vec{e}_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_0^- & W_1^- \\ W_2^- & W^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \vec{e}_{*-} \end{bmatrix}, \tag{2.6.14}$$

де оператор

$$\mathbf{W}^- := \begin{bmatrix} W_0^- & W_1^- \\ W_2^- & W^- \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{X} \\ \ell_{\mathcal{E}_*}(\mathbb{Z}_-) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \ell_{\mathcal{X}}(\mathbb{Z}_-) \\ \ell_{\mathcal{E}}(\mathbb{Z}_-) \end{bmatrix}$$

заданий формулами

$$W_0^- = \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha^n \\ \vdots \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad W_1^- = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \beta & \dots & \alpha^{n-3}\beta & \alpha^{n-2}\beta & \alpha^{n-1}\beta \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & \beta & \alpha\beta & \alpha^2\beta \\ & & & & \beta & \alpha\beta \\ & & & & & \beta \end{bmatrix},$$

$$W_2^- = \begin{bmatrix} \vdots \\ \gamma\alpha^n \\ \vdots \\ \gamma\alpha^2 \\ \gamma\alpha \end{bmatrix}, \quad W^- = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \delta & \dots & \gamma\alpha^{n-3}\beta & \gamma\alpha^{n-2}\beta & \gamma\alpha^{n-1}\beta \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & \delta & \gamma\beta & \gamma\alpha\beta \\ & & & & \delta & \gamma\beta \\ & & & & & \delta \end{bmatrix}. \tag{2.6.15}$$

Оператори W_0^-, W_1^-, W_2^- и W^- можна інтерпретувати як версії в *зворотному напрямку часу* операторів *початкового стану - траєкторії системи*, *входу - траєкторії системи*, *спостереження* і *входу-виходу*, відповідно. Будемо називати оператор $\mathbf{W}^-$ *розширеним відображення входу-виходу в зворотному напрямку часу.*

Припустимо що U_0 и U_1 два вузла

$$U_0 = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{X}_0 \\ \mathcal{D} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{X}_0 \\ \mathcal{D}_* \end{bmatrix}, \tag{2.6.16}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{D}_* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{D} \end{bmatrix} \tag{2.6.17}$$

такі що $I - D_1D_0$ і, отже, $I - D_0D_1$ оборотні в $\mathcal{D}$ и в $\mathcal{D}_*$ відповідно. Тоді з'єднання зі зворотним зв'язком $U = \mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$ є коректно визначеним оператором в $\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$, як показано в Теоремі 2.14. Розглянемо відповідні розширені відображення входу-виходу для U_0 и U_1

$$\mathbf{W}(U_0)^+ = \begin{bmatrix} W(U_0)_0^+ & W(U_0)_2^+ \\ W(U_0)_1^+ & W(U_0)^+ \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{X}_0 \\ \ell_{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}_+) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \ell_{\mathcal{X}_0}(\mathbb{Z}_+) \\ \ell_{\mathcal{D}_*}(\mathbb{Z}_+) \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{W}(U_1)^+ = \begin{bmatrix} W(U_1)_0^+ & W(U_1)_2^+ \\ W(U_1)_1^+ & W(U_1)^+ \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \ell_{\mathcal{D}_*}(\mathbb{Z}_+) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \ell_{\mathcal{X}_1}(\mathbb{Z}_+) \\ \ell_{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}_+) \end{bmatrix}. \qquad (2.6.18)$$

Якщо

$$I_{\ell_{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}_+)} - W(U_1)^+ W(U_0)^+ \qquad (2.6.19)$$

є оборотним в $\ell_{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}_+)$, то визначено з'єднання зі зворотним зв'язком $\mathcal{F}_\ell(\mathbf{W}(U_0)^+, \mathbf{W}(U_1)^+)$. Наступна лема показує що якщо $\mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$ коректно визначено, то і $\mathcal{F}_\ell(\mathbf{W}(U_0)^+, \mathbf{W}(U_1)^+)$ коректно визначено.

Лема 2.15. Нехай U_0 и U_1 визначені як в (2.6.16) и (2.6.17). Припустимо що $I - D_1 D_0$ є оборотним в $\mathcal{D}$. Тоді і $I - W(U_1)^+ W(U_0)^+$ є оборотним в $\ell_{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}_+)$.

Доведення. З формули (2.6.11), що визначає $\mathbf{W}^+$, видно що матриці $W(U_1)^+$ і $W(U_0)^+$ є Тьопліцевими нижньо трикутними, діагональні блоки яких дорівнюють D_1 і D_0, відповідно. Отже, $I - W(U_1)^+ W(U_0)^+$ теж нижньо трикутна Тьопліцева з діагональними блоками рівними $I - D_1 D_0$. Звідси випливає оборотність $I - W(U_1)^+ W(U_0)^+$ в $\ell_{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}_+)$. □

Наступна теорема містить основний результат цього розділу, а саме обчислення ступенів $\mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$ за допомогою $\mathcal{F}_\ell(\mathbf{W}(U_0), \mathbf{W}(U_1))$. Нам знадобиться ще одне позначення. нехай U це оператор в Ґільбертовому просторі $\mathcal{K}$. Нехай $\mathcal{G}$ це допоміжний Ґільбертів простір і $i_{\mathcal{G}} \colon \mathcal{G} \to \mathcal{K}$ ізометричне вкладення $\mathcal{G}$ в $\mathcal{K}$. Визначимо перетворення $\Lambda_{\mathcal{G},+}(U) \colon \mathcal{K} \to \ell_{\mathcal{G}}(\mathbb{Z}_+)$ (яке будемо називати *представленням Фур'є оператора* U) як

$$\Lambda_{\mathcal{G},+}(U) \colon k \to \{i_{\mathcal{G}}^* U^n k\}_{n \in \mathbb{Z}_+}. \qquad (2.6.20)$$

Відзначимо що якщо $\mathcal{G} = \mathcal{K}$ и $i_{\mathcal{G}}$ тотожне відображення, то

$$\Lambda_{\mathcal{K},+}(U) \colon k \to \{U^n k\}_{n \in \mathbb{Z}_+}.$$

Теорема 2.16. Припустимо що задані два вузла (2.6.16), (2.6.17) такі що $I - D_1 D_0$ є оборотним в $\mathcal{D}$ і $U = \mathcal{F}_\ell(U_0, U_1) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1)$. Тоді з'єднання зі зворотним зв'язком на рівні траєкторій системи $\mathcal{F}_\ell(\mathbf{W}(U_0)^+, \mathbf{W}(U_1)^+)$ обчислює ступені $U = \mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$:

$$\Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,+}(U) = \mathcal{F}_\ell(\mathbf{W}(U_0)^+, \mathbf{W}(U_1)^+) \colon \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1 \to \ell_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1}(\mathbb{Z}_+). \tag{2.6.21}$$

Після природного ототожнення просторів $\ell_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1}(\mathbb{Z}_+)$ і $\ell_{\mathcal{X}_0}(\mathbb{Z}_+) \oplus \ell_{\mathcal{X}_1}(\mathbb{Z}_+)$ можна записати $\Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,+}(U)$ в блоковому вигляді

$$\Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,+}(U) = \begin{bmatrix} \Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,+}(U)_{11} & \Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,+}(U)_{12} \\ \Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,+}(U)_{21} & \Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,+}(U)_{22} \end{bmatrix} \colon \begin{bmatrix} \mathcal{X}_0 \\ \mathcal{X}_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \ell_{\mathcal{X}_0}(\mathbb{Z}_+) \\ \ell_{\mathcal{X}_1}(\mathbb{Z}_+) \end{bmatrix}$$

де

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,+}(U)_{11} &= W(U_0)^+_0 + W(U_0)^+_2 (I - W(U_1)^+ W(U_0)^+)^{-1} W(U_1)^+ W(U_0)^+_1, \\
\Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,+}(U)_{12} &= W(U_0)^+_2 (I - W(U_1)^+ W(U_0)^+)^{-1} W(U_1)^+_1, \\
\Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,+}(U)_{21} &= W(U_1)^+_2 (I - W(U_0)^+ W(U_1)^+)^{-1} W(U_0)^+_1, \\
\Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,+}(U)_{22} &= W(U_1)^+_0 + W(U_1)^+_2 (I - W(U_0)^+ W(U_1)^+)^{-1} W(U_0)^+ W(U_1)^+_1.
\end{aligned} \tag{2.6.22}$$

Доведення. Лема 2.15 гарантує що з'єднання зі зворотним зв'язком на рівні траєкторій $\mathcal{F}_\ell(\mathbf{W}(U_0)^+, \mathbf{W}(U_1)^+)$ коректно визначено. За визначенням

$$\mathcal{F}_\ell(\mathbf{W}(U_0)^+, \mathbf{W}(U_1)^+) \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{x_0(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \\ \{x_1(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \end{bmatrix} \tag{2.6.23}$$

означає що мають місце рівності

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ d_*(n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(n) \\ d(n) \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ d(n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ d_*(n) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.6.24}$$

з деякими однозначно визначеними $\{d(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \in \ell_{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}_+)$ і $\{d_*(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \in \ell_{\mathcal{D}_*}(\mathbb{Z}_+)$. Оскільки $U = \mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$, то при $n = 0$ рівняння (2.6.24) дають

$$\begin{bmatrix} x_0(1) \\ x_1(1) \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_1(0) \end{bmatrix}.$$

В силу (2.6.24)

$$\begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_1(n+1) \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix}.$$

Тоді индуктивно отримаємо що

$$\begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} = U^n \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_1(0) \end{bmatrix} \tag{2.6.25}$$

виконується при всіх $n = 0, 1, 2, \ldots$. Нарешті відзначимо що (2.6.25) в поєднанні з (2.6.23) тягне (2.6.21). А формули (2.6.22) слідують з (2.6.4) при заміні U_0, U_1 на $\mathbf{W}(U_0)^+$, $\mathbf{W}(U_1)^+$. □

Якщо U_0 і U_1 оборотні

$$U_0^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{X}_0 \\ \mathcal{D}_* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{X}_0 \\ \mathcal{D} \end{bmatrix}, \quad U_1^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{D} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{D}_* \end{bmatrix} \tag{2.6.26}$$

і $I_{\mathcal{D}_*} - \delta_1\delta_0$ оборотний, то аналогічним чином можна обчислити від'ємні ступені $U = \mathcal{F}(U_0, U_1)$. Розглянемо відображення $\Lambda_{\mathcal{G},-} \colon \mathcal{K} \to \ell_{\mathcal{G}}(\mathbb{Z}_-)$ (поряд з (2.6.20) також зване *представленням Фур'є оператора* U)

$$\Lambda_{\mathcal{G},-}(U) \colon k \mapsto \{i_{\mathcal{G}}^* U^n k\}_{n\in\mathbb{Z}_-}.$$

В окремому випадку

$$\Lambda_{\mathcal{K},-}(U)k \colon \mapsto \{U^n k\}_{n\in\mathbb{Z}_-}.$$

Тоді має місце наступний аналог Теореми 2.16 для від'ємних моментів часу. З огляду на повну аналогічність, доказ опустимо.

Теорема 2.17. Припустимо що задані два вузла U_0 и U_1 як в (2.6.16), (2.6.17), які оборотні та для їх зворотних (2.6.26) виконана умова оборотності $I - \delta_1\delta_0$ в $\mathcal{D}_*$. Нехай $U = \mathcal{F}_\ell(U_0, U_1) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1)$. Тоді від'ємні ступені $U = \mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$ обчислюються в термінах з'єднання зі зворотним зв'язком на рівні траєкторій системи $\mathcal{F}_\ell(\mathbf{W}(U_0)^-, \mathbf{W}(U_1)^-)$:

$$\Lambda_{\mathcal{X}_0\oplus\mathcal{X}_1,-}(U) = \mathcal{F}_\ell(\mathbf{W}(U_0)^-, \mathbf{W}(U_1)^-) \colon \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1 \to \ell_{\mathcal{X}_0\oplus\mathcal{X}_1}(\mathbb{Z}_-). \tag{2.6.27}$$

Після природного ототожнення просторів $\ell_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1}(\mathbb{Z}_-)$ і $\ell_{\mathcal{X}_0}(\mathbb{Z}_-) \oplus \ell_{\mathcal{X}_1}(\mathbb{Z}_-)$ отримуємо

$$\Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,-}(U) = \begin{bmatrix} \Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,-}(U)_{11} & \Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,-}(U)_{12} \\ \Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,-}(U)_{21} & \Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,-}(U)_{22} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{X}_0 \\ \mathcal{X}_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \ell_{\mathcal{X}_0}(\mathbb{Z}_-) \\ \ell_{\mathcal{X}_1}(\mathbb{Z}_-) \end{bmatrix}$$

де

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,-}(U)_{11} &= W(U_0)^-_0 + W(U_0)^-_1 (I - W(U_1)^- W(U_0)^-)^{-1} W(U_1)^- W(U_0)^-_2, \\ \Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,-}(U)_{12} &= W(U_0)^-_1 (I - W(U_1)^- W(U_0)^-)^{-1} W(U_1)^-_2, \\ \Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,-}(U)_{21} &= W(U_0)^-_1 (I - W(U_0)^- W(U_1)^-)^{-1} W(U_0)^-_2, \\ \Lambda_{\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1,+}(U)_{22} &= W(U_1)^-_0 + W(U_1)^-_1 (I - W(U_0)^- W(U_1)^-)^{-1} W(U_0)^- W(U_1)^-_2. \end{aligned} \tag{2.6.28}$$

Висновки до розділу 2

В Розділі 2 викладено попередні відомості які використовуються у дисертації. Наведені усі необхідні визначення що стосуються унітарних систем розсіювання. Детально описано простір мір Хеллінгера, що відповідає заданій операторній мірі, та деякі його властивості. Показано як унітарні системи розсіювання реалізуються у просторі Хеллінгера. Викладено конструкцію Шурівських додатків мір та відповідного ортогонального розкладу простору Хеллінгера. Описана параметризація унітарних розширень ізометрій, їх резольвент. Викладено числення з'єднань зі зворотним зв'язком та обчислена динаміка з'єднаної системи. Обчислено функції розсіювання з'єднаної системи відносно заданого масштабу та масштабу з'єднання.

Результати розділу опубліковано в роботах [26, 27, 28, 29, 20].

РОЗДІЛ 3

АБСТРАКТНА ЗАДАЧА ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

3.1 Ортогональна задача

Наступна Абстрактна Задача Інтерполяції (АЗІ) була введена і вивчена в роботах [61] (також [62], [63], [64], [72] и [69]) . Дані задачі мають наступну структуру: X лінійний простір, $D(x,y)$ невід'ємна півтора-лінійна форма на X, T_1 і T_2 лінійні оператори в просторі X, $M_1 : X \to E_1$, $M_2 : X \to E_2$ лінійні відображення з простору X в задані Ґільбертові простори E_1 і E_2 відповідно. Ці об'єкти пов'язані тотожністю

$$D(T_1x,T_1y) + < M_1x, M_1y >_{E_1} = D(T_2x,T_2y) + < M_2x, M_2y > . \qquad (3.1.1)$$

Ми будемо використовувати такі позначення

$$L^w = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & w \\ w^* & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{1/2} \begin{bmatrix} L^2(E_2) \\ L^2(E_1) \end{bmatrix}, \qquad (3.1.2)$$

наділена нормою образу;

$$H^w = L^w \cap \begin{bmatrix} H^2_+(E_2) \\ H^2_-(E_1) \end{bmatrix}, \qquad (3.1.3)$$

з нормою індукованої з L^w. Тут L^2 це простір квадратично інтегровних відносно міри Лебега вектор-функцій на одиничному колі $\mathbb{T}$; H^2_+, H^2_- відповідні простори Харді.

Аналітична в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ стискуюча оператор-функція $w(\zeta) : E_1 \to E_2$ називається розв'язком задачі якщо існує лінійне відображення

$$F : X \to H^w$$

таке що

$$(i) \qquad \bar{t}((FT_1x)(t) + \begin{bmatrix} w(t) \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} M_1x) = (FT_2x)(t) + \bar{t} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ w(t)^* \end{bmatrix} M_2X, \qquad (3.1.4)$$

для майже всіх t на одиничному колі $\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$;

$$(ii) \qquad \|Fx\|^2_{H^w} \leq D(x,x). \tag{3.1.5}$$

В основі опису множини розв'язків полягає наступна конструкція. Невід'ємна форма D задає в просторі X структуру Ґільбертового простору (після факторизації і поповнення). Цей Ґільбертів простір будемо позначати через H_0. Тоді рівність (3.1.1) означає ізометричність наступного оператора

$$V : E_1 \oplus H_0 \to H_0 \oplus E_2, \tag{3.1.6}$$

з областю визначення

$$d_V = Clos\{M_1 x \oplus [T_1 x], x \in X\} \subseteq E_1 \oplus H_0 \tag{3.1.7}$$

і областю значень

$$\Delta_V = Clos\{[T_2 x] \oplus M_2 x, x \in X\} \subseteq H_0 \oplus E_2, \tag{3.1.8}$$

де $[T_1 x]$ и $[T_2 x]$ позначають відповідні класи еквівалентності.

В силу нерівності (3.1.5) Fx залежить від класу еквівалентності $[x]$, а не від x і, отже, відображення F може бути продовжено по неперервності на H_0 зі збереженням нерівності

$$\|Fh_0\|^2_{H^w} \leq \|h_0\|^2_{H_0}. \tag{3.1.9}$$

Простір L^w визначений в (3.1.2) розкладається в наступну ортогональную суму

$$L^w = \begin{bmatrix} w \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} H^2_+(E_1) \oplus H^w \oplus \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ w^* \end{bmatrix} H^2_-(E_2). \tag{3.1.10}$$

Визначимо

$$F : E_1 \to L^w, \ F : E_2 \to L^w$$

наступним чином

$$Fe_1 = \begin{bmatrix} w \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} e_1, \ Fe_2 = \bar{t} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ w^* \end{bmatrix} e_2. \tag{3.1.11}$$

Зауважимо що, згідно з (3.1.10), $F(E_1),\ F(H_0),\ F(E_2)$ взаємно ортогональні в L^w, і

$$F : E_1 \oplus H_0 \to \begin{bmatrix} w \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} E_1 \oplus H^w,$$

$$F : H_0 \oplus E_2 \to H^w \oplus \bar{t} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ w^* \end{bmatrix} E_2. \tag{3.1.12}$$

У цих позначеннях (3.1.4) набирає вигляд

$$FV \Big|_{d_V} = \bar{t}F \Big|_{d_V}. \tag{3.1.13}$$

Покладемо

$$N_{d_V} = (E_1 \oplus H_0) \ominus d_V \ \text{ і } \ N_{\Delta_V} = (H_0 \oplus E_2) \ominus \Delta_V. \tag{3.1.14}$$

і визначимо унітарний вузол

$$A_0 : N_2 \oplus E_1 \oplus H_0 \to N_1 \oplus E_2 \oplus H_0 \tag{3.1.15}$$

де N_1 і N_2 копії N_{d_V} и N_{Δ_V} відповідно, як

$$A_0 \Big| d_V = V,$$

$$A_0 : N_{d_V} \to N_1 \qquad \text{ототожнення},$$

$$A_0 : N_2 \to N_{\Delta_V} \qquad \text{ототожнення}. \tag{3.1.16}$$

Позначимо через $S(\zeta)$ характеристичну функцію A_0:

$$S(\zeta) = P_{N_1 \oplus E_2} A_0 (\mathbf{1} - \zeta P_{H_0} A)^{-1} \Big|_{N_2 \oplus E_1},$$

$$S(\zeta) = \begin{bmatrix} s(\zeta) & s_1(\zeta) \\ s_2(\zeta) & s_0(\zeta) \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} N_2 \\ E_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} N_1 \\ E_2 \end{bmatrix}. \tag{3.1.17}$$

Нехай $A_1 : N_1 \oplus H_1 \to H_1 \oplus N_2$ це довільний унітарний вузол з простором входу N_1 і простором виходу N_2. Нехай $\omega(\zeta)$ це його характеристична функція, $\omega(\zeta) : N_1 \to N_2$. З'єднання A_0 і A_1 (останній служить в якості зворотного зв'язку) дає унітарний вузол A, який розширює ізометрію V

$$A : E_1 \oplus H \to H \oplus E_1,$$

де $H = H_0 \oplus H_1$. A є мінімальним розширенням V тоді і тільки тоді коли вузол A_1 є простим. Характеристичні функції цих розширень A складають в точності множину всіх розв'язків АЗІ. Звідси виходить формула що описує всі розв'язки задачі

$$w = s_0 + s_2\omega(\mathbf{1} - s\omega)^{-1}s_1. \tag{3.1.18}$$

З будь-яким унітарною вузлом $A : E_1 \oplus H \to H \oplus E_1$ пов'язане перетворення Фур'є $\mathcal{F}_A$, що відображає простір H на простір де Бранжа - Ровняка H^w, де w це характеристична функція вузла A

$$(\mathcal{F}_A h)(\zeta) = \begin{bmatrix} (\mathcal{F}_A^+ h)(\zeta) \\ \\ (\mathcal{F}_A^- h)(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{E_2}A(\mathbf{1}_{H\oplus E_1} - \zeta P_H A)^{-1}h \\ \\ \overline{\zeta} P_{E_1}A^*(\mathbf{1}_{H\oplus E_2} - \overline{\zeta} P_H A^*)^{-1}h \end{bmatrix}.$$

Це відображення в загальному випадку є частковою ізометрією. Воно унітарно тоді і тільки тоді коли вузол A простий (тобто, в просторі H немає підпростору, який приводить A).

Для вузла A, що є з'єднанням вузлів A_0 і A_1 як описано вище, має місце наступна формула для представлення Фур'є

$$\mathcal{F}_A \begin{bmatrix} h_0 \\ \\ h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi\omega & \mathbf{1}_{E_2} & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & \varphi^*\omega^* & \mathbf{1}_{E_1} \end{bmatrix} \mathcal{F}_{A_0}h_0 + \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ \\ 0 & \varphi^* \end{bmatrix} \mathcal{F}_{A_1}h_1 \ , \tag{3.1.19}$$

де

$$\varphi(\zeta) = (\mathbf{1}_{N_1} - s(\zeta)\omega(\zeta))^{-1}s_1(\zeta)$$

і

$$\psi(\zeta) = s_2(\zeta)(\mathbf{1}_{N_2} - \omega(\zeta)s(\zeta))^{-1}.$$

Відображення $F : X \to H^w$, яке бере участь в постановці задачі, при цьому дорівнює

$$Fx = \mathcal{F}_A[x] = \begin{bmatrix} \psi\omega & \mathbf{1}_{E_2} & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & \varphi^*\omega^* & \mathbf{1}_{E_1} \end{bmatrix} \mathcal{F}_{A_0}[x] \ . \tag{3.1.20}$$

Припустимо що вузли A_0 і A_1 є простими (тобто відображення $\mathcal{F}_{A_0}$ і $\mathcal{F}_{A_1}$ є унітарними). Їх з'єднання - вузол A - проте може не бути простим. Далі наводяться дві теореми які дають критерії простоти цього вузла A.

Теорема 3.1. ([64, 62, 69, 72]). Припустимо що вузол A отримано як результат з'єднання простих вузлів A_0 і A_1 описаним вище чином. Тоді вузол A простий тоді і тільки тоді коли має місце рівність

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1_{N_2}+\omega(\zeta)s(\zeta)}{1_{N_2}-\omega(\zeta)s(\zeta)} & 2\omega(\zeta)(1_{N_1}-s(\zeta)\omega(\zeta))^{-1} \\ & \\ 2s(\zeta)(1_{N_2}-\omega(\zeta)s(\zeta))^{-1} & \dfrac{1_{N_1}+s(\zeta)\omega(\zeta)}{1_{N_1}-s(\zeta)\omega(\zeta)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega(0) \\ -\omega(0)^* & 0 \end{bmatrix} \tag{3.1.21}$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{t+\zeta}{t-\zeta} \begin{bmatrix} \psi^* & \omega\varphi \\ \omega^*\psi^* & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{E_1} & w \\ w^* & 1_{E_2} \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} \psi & \psi\omega \\ \varphi^*\omega^* & \varphi^* \end{bmatrix} m(dt),$$

де $\omega(\zeta) : N_1 \to N_2$ характеристична функція вузла A_1, S характеристична функція (3.1.17) вузла A_0, φ и ψ визначені вище. Зворотна матриця розуміється в сенсі Мура-Пенроуза.

Зауваження 3.2. Зауважимо що ліва частина (3.1.21) записана як

$$a_\omega(\zeta) \equiv \frac{I_{N_2 \oplus N_1} + \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ s & 0 \end{bmatrix}}{I_{N_2 \oplus N_1} - \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ s & 0 \end{bmatrix}}, \tag{3.1.21}$$

де I це одинична матриця. Відзначимо також що матриця-функція $a_\omega(\zeta)$ має невід'ємну дійсну частину.

Як зазначалося вище, вузол A простий тоді і тільки тоді коли відображення $\mathcal{F}_A$ є унітарним. Виявляється, що

Теорема 3.3. ([64, 62]). Вузол A простий тоді і тільки тоді коли обмеження $\mathcal{F}_A$ на H_0 унітарно. Тим самим, вузол A простий тоді і тільки тоді коли для відображення F має місце рівність

$$\|Fx\|^2_{H^w} = D(x,x), \quad \text{при всіх } x \in \mathcal{X},$$

замість нерівності (3.1.5).

3.2 Від ортогональної задачі до неортогональної

Ми спочатку переформулюємо постановку АЗІ а потім узагальнимо її. Переформулювання буде в термінах систем розсіювання замість унітарних вузлів. Нехай $\tilde{X}$ це простір векторів $\tilde{x}$ виду

$$\tilde{x} = (\cdots e_1^{(1)}, e_2^{(0)}, x, e_2^{(-1)}, e_2^{(-2)}, \cdots) \tag{3.2.1}$$

таких що

$$x \in X,\ e_1^{(k)} \in E_1,\ k \geq 0 \ \text{ і } \ \sum_{k=0}^{\infty} \|e_1^{(k)}\|^2 < \infty,$$

$$e_2^{(k)} \in E_2,\ k \leq -1 \ \text{ і } \ \sum_{k=-\infty}^{-1} \|e_2^{(k)}\|^2 < \infty.$$

Визначимо

$$\tilde{D}(\tilde{x},\tilde{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \|e_1^{(k)}\|^2 + D(x,x) + \sum_{k=-\infty}^{-1} \|e_2^{(k)}\|^2, \tag{3.2.2}$$

$$\tilde{T}_1\tilde{x} = (\cdots, e_1^{(1)}, e_1^{(0)}, M_1x, T_1x, e_2^{(-1)}, e_2^{(-2)}, e_2^{(-3)}, \cdots) \tag{3.2.3}$$

і

$$\tilde{T}_2\tilde{x} = (\cdots, e_1^{(2)}, e_1^{(1)}\ ,\ e_1^{(0)}, T_2x, M_2x\ , e_2^{(-1)}, e_2^{(-2)}, \cdots). \tag{3.2.4}$$

Тоді (3.1.1) можна записати як

$$\tilde{D}(\tilde{T}_1\tilde{x}, \tilde{T}_1\tilde{y}) = \tilde{D}(\tilde{T}_2\tilde{x}, \tilde{T}_2\tilde{y}). \tag{3.2.5}$$

$\tilde{D}$ наділяє $\tilde{X}$ структурою Ґільбертового простору. В результаті отримуємо простір

$$\tilde{H}_0 = \cdots \oplus E_1^{(1)} \oplus E_1^{(0)} \oplus H_0 \oplus E_2^{(-1)} \oplus E_2^{(-2)} \oplus \cdots\ . \tag{3.2.6}$$

Тут $E_1^{(k)},\ k \geq 0$ $(E_2^{(k)}, k \leq -1)$ підпростір векторів $\tilde{x}$, таких що всі координати крім $e_1^{(k)}$ (відповідно $e_2^{(k)}$) дорівнюють нулю. Визначимо ізометрію $\tilde{V}$:

$$\tilde{V} : [\tilde{T}_1\tilde{x}] \to [\tilde{T}_2\tilde{x}] \tag{3.2.7}$$

з областю визначення

$$d_{\tilde{V}} = Clos\{[\tilde{T}_1\tilde{x}], \tilde{x} \in \tilde{X}\} \subseteq \tilde{H}_0, \tag{3.2.8}$$

і областю значень

$$\Delta_{\tilde{V}} = Clos\{[\tilde{T}_2\tilde{x}], \tilde{x} \in \tilde{X}\} \subseteq \tilde{H}_0. \tag{3.2.9}$$

Зауважимо що

$$\tilde{H}_0 \ominus d_{\tilde{V}} = N_{d_V} = H_0 \ominus d_V \tag{3.2.10}$$

і

$$\tilde{H}_0 \ominus \Delta_{\tilde{V}} = N_{\Delta_V} = H_0 \ominus \Delta_V \tag{3.2.11}$$

ті ж самі підпростори що і в Розділі 3.1. Продовжимо відображення $F : X \to H^w$ Розділу 3.1 до відображення

$$\tilde{F} : \tilde{X} \to L^w \tag{3.2.12}$$

як

$$(\tilde{F}\tilde{X})(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} t^k e_1^{(k)} + Fx + \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \\ w(t)^* \end{bmatrix} \sum_{k=-\infty}^{-1} \bar{t}^{|k|} e_2^{(k)}, \tag{3.2.13}$$

$|t| = 1$, де збіжність рядів розуміється в сенсі L^2. Таким чином

$$\tilde{F}\,\Big|\,X = F : X \to H^w,$$

$$\tilde{F} : \prod_{k=\infty}^{0} E_1^{(k)} \to \begin{bmatrix} w \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} H_+^2(E_1)$$

$$\tilde{F} : \prod_{k=-1}^{-\infty} E_2^{(k)} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ w^* \end{bmatrix} H_-^2(E_2), \tag{3.2.14}$$

дві останні частини є бієкціями. Для тих $\tilde{x}$ у яких елемент x дорівнює нулю має місце рівність

$$\|\tilde{F}\tilde{x}\|^2_{L^w} = \tilde{D}(\tilde{x}, \tilde{x}). \tag{3.2.15}$$

Властивість (3.1.5) Розділу 3.1 тягне що

$$\|\tilde{F}\tilde{x}\|^2_{L^w} \leq \tilde{D}(\tilde{x}, \tilde{x}). \tag{3.2.16}$$

За аналогією з Розділом 3.1, відображення $\tilde{F}$ природно інтерпретувати як відображення з $\tilde{H}_0$,

$$\tilde{F} : \tilde{H}_0 \to L^w.$$

Тоді (3.2.16) означає, що

$$\|\tilde{F}\tilde{h}_0\|^2_{L^w} \leq \|\tilde{h}_0\|^2_{\tilde{H}_0}. \tag{3.2.17}$$

Властивість (3.1.4) Розділу 3.1, з огляду на визначення $\tilde{V}$ і $\tilde{F}$, означає що

$$\tilde{F}\tilde{V} \,\big|\, d_{\tilde{V}} = \bar{t}\tilde{F} \,\big|\, d_{\tilde{V}}. \tag{3.2.18}$$

Відзначимо, що

$$\begin{aligned} &\tilde{F} \quad \text{відображає} \quad E_1^{(0)} \quad \text{на} \quad \begin{bmatrix} w \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} E_1 \quad \text{ізометрично,} \\ &\tilde{F} \quad \text{відображає} \quad E_2^{(-1)} \quad \text{на} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ w \end{bmatrix} \bar{t}E_2 \quad \text{ізометрично.} \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Нам це знадобиться надалі. Виявляється що будь-яке відображення $\tilde{F} : \tilde{X} \to L^w$ що має властивості (3.2.17)-(3.2.19) має структуру описану вище, а саме має місце наступна

Твердження 3.4. Нехай $\tilde{X}$ і $\tilde{D}$ такі як вище. Нехай відображення $\tilde{F} : \tilde{X} \to L^w$ має властивості (3.2.17)-(3.2.19). Нехай $F = \tilde{F} \,\big|\, X$. Тоді

- (i) $F : X \to H^w$, і F задовольняє (3.1.4);
- (ii) $\tilde{F} : E_1^{(k)} \to \begin{bmatrix} w \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} t^k E_1,\ k \geq 0, \qquad \tilde{F} : E_2^{(k)} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ w^* \end{bmatrix} \bar{t}^{|k|} E_2,\ k \leq -1,$

і

$$\|\tilde{F}\tilde{x}\|_{L^w}^2 = \tilde{D}(\tilde{x},\tilde{x}).$$

для

$$\tilde{x} \in \left(\prod_{k=\infty}^{0} E_1^{(k)}\right) \times \{0\} \times \left(\prod_{k=-1}^{-\infty} E_2^{(k)}\right)$$

Доведення. Властивості (ii) слідують безпосередньо з (3.2.18), (3.2.19) і визначення $\tilde{V}$. Основне що потрібно перевірити це те що

$$\tilde{F} : X \to H^w.$$

В силу властивості (3.2.17)

$$\begin{bmatrix} \|\tilde{F}\tilde{x}\|_{L^w}^2 & < \tilde{F}\tilde{y}, \tilde{F}\tilde{x} >_{L^w} \\ \\ < \tilde{F}\tilde{x}, \tilde{F}\tilde{y} >_{L^w} & \|\tilde{F}\tilde{y}\|_{L^w}^2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \tilde{D}(\tilde{x},\tilde{x}) & \tilde{D}(\tilde{y},\tilde{x}) \\ \\ \tilde{D}(\tilde{x},\tilde{y}) & \tilde{D}(\tilde{y},\tilde{y}) \end{bmatrix} \tag{3.2.20}$$

для всіх $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$. Виберемо $\tilde{x} = x \in X$, $\tilde{y} \in \left(\prod\limits_{k=\infty}^{0} E_1^{(k)}\right) \times \{0\} \times \left(\prod\limits_{k=-1}^{-\infty} E_2^{(k)}\right)$. Тоді за визначенням $\tilde{D}$:

$$\tilde{D}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0, \quad \tilde{D}(\tilde{x},\tilde{x}) = D(x,x). \tag{3.2.21}$$

Як ми вже довели

$$\|\tilde{F}\tilde{y}\|_{L^w}^2 = \tilde{D}(\tilde{y},\tilde{y}). \tag{3.2.22}$$

Підставляючи (3.2.21) і (3.2.22) в (3.2.20) , отримаємо

$$\begin{bmatrix} \|\tilde{F}x\|_{L^w}^2 & < \tilde{F}\tilde{y}, \tilde{F}x >_{L^w} \\ \\ < \tilde{F}x, \tilde{F}\tilde{y} >_{L^w} & \tilde{D}(\tilde{y},\tilde{y}) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} D(x,x) & 0 \\ \\ 0 & \tilde{D}(\tilde{y},\tilde{y}) \end{bmatrix}.$$

Тобто,

$$\begin{bmatrix} D(x,x) - \|\tilde{F}x\|_{L^w}^2 & < \tilde{F}\tilde{y}, \tilde{F}x >_{L^w} \\ \\ < \tilde{F}x, \tilde{F}\tilde{y} >_{L^w} & 0 \end{bmatrix} \geq 0.$$

А це тягне

$$< \tilde{F}x, \tilde{F}\tilde{y} >_{L^w} = 0 \tag{3.2.23}$$

для будь-яких $x \in X$ і $\tilde{y}$ зазначеного виду. В силу властивості (ii) $\tilde{F}\tilde{y}$ пробігає всю множину $\begin{bmatrix} w \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} H^2_+(E_1) \oplus \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ w^* \end{bmatrix} H^2_-(E_2)$. Тоді (3.2.23) означає що $\tilde{F}x \in H^w$, для всех $x \in X$. Першу частину твердження (i) доведено. Частина твердження (i), що залишилася, випливає безпосередньо з (3.2.18) і визначення $\tilde{V}$. □

Зробимо зараз додаткове припущення. В цьому і наступному розділах будемо припускати що

$$E_2^{(-1)} \subset \Delta_{\tilde{V}}. \tag{3.2.24}$$

Тоді

$$\tilde{V}^{-1} E_2^{(-1)} \subset d_{\tilde{V}} \subseteq \tilde{H}_0. \tag{3.2.25}$$

Визначимо $\rho_0 : E_1 \oplus E_2 \to \tilde{H}_0$ за допомогою природних ототожнень

$$\rho_0 : E_1 \to E_1^{(0)}\ , \quad \rho_0 : E_2 \to \tilde{V}^{-1} E_2^{(-1)}\ . \tag{3.2.26}$$

За визначенням

$$\begin{aligned} \|\rho_0 e_1\|_{\tilde{H}_0} &= \|e_1\|_{E_1} \\ \|\rho_0 e_2\|_{\tilde{H}_0} &= \|e_2\|_{E_2}. \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

В цілому ρ_0 не обов'язково є ізометричним, але для всіх $e = e_1 \oplus e_2$

$$\|\rho_0 e\|_{\tilde{H}_0} \leq \sqrt{2} \|e\|_{E_1 \oplus E_2}\ . \tag{3.2.28}$$

Позначимо через $\sigma(\zeta)$ гармонійну оператор функцію

$$\sigma(\zeta) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & w(\zeta) \\ & \\ w(\zeta)^* & \mathbf{1} \end{bmatrix},\ |\zeta| < 1 \tag{3.2.29}$$

а через $\sigma(dt)$:

$$\sigma(dt) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & w(t) \\ & \\ w(t)^* & \mathbf{1} \end{bmatrix} m(dt),\ |t| = 1 \tag{3.2.30}$$

відповідну міру на $\mathbb{T}$, де $m(dt)$ це нормована міра Лебега. Простір L^w можна ототожнити з простором Хеллінгера L^σ (див. Розділ 2.2).

Зараз ми відмовляємося від спеціальної структури даних АЗІ˜ , яку ми мали вище. Тим самим отримаємо більш загальну постановку задачі.

АЗІ˜ . Нехай $\tilde{X}$ это це лінійний простір, $\tilde{D}$ невід'ємна форма на $\tilde{X}, \tilde{T}_1$ і $\tilde{T}_2$ два лінійних оператори в $\tilde{X}$. Припустимо що ці об'єкти пов'язані тотожністю

$$\tilde{D}(\tilde{T}_1\tilde{x}, \tilde{T}_1\tilde{y}) = \tilde{D}(\tilde{T}_2\tilde{x}, \tilde{T}_2\tilde{y}) \tag{3.2.31}$$

для всіх $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$. Нехай $\widetilde{H}_0$ це Ґільбертів простір що побудовано на базі $\tilde{X}$ за допомогою форми $\tilde{D}$. Нехай E це допоміжний Ґільбертів простір і

$$\rho_0 : E \to \tilde{H}_0 \tag{3.2.32}$$

обмежений лінійний оператор. Невід'ємна гармонійна в крузі $\mathbb{D}$ операторно значна функція $\sigma(\zeta) : E \to E$ (або відповідна операторно-значна міра $\sigma(dt)$ на одиничному колі $\mathbb{T}$) називається розв'язком АЗІ˜ якщо існує лінійне відображення

$$\tilde{F} : \tilde{X} \to L^\sigma, \tag{3.2.33}$$

де L^σ простір Хеллінгера пов'язаний з σ (див. Розділ 2.2), таке що

$$(i) \quad \tilde{F}\tilde{T}_2\tilde{x} = \bar{t}\tilde{F}\tilde{T}_1 x$$

$$(ii) \quad \|\tilde{F}\tilde{x}\|^2_{L^\sigma} \le \tilde{D}(\tilde{x}, \tilde{x})$$

$$(iii) \quad \tilde{F}\rho_0 e = \sigma(dt)e, \ \forall e \in E. \tag{3.2.34}$$

У властивості (iii) $\tilde{F}$ розуміється як продовження $\tilde{F}$ на $\tilde{H}_0$, що можливо з огляду на нерівності (ii).

Тотожність (3.2.31) дозволяє визначити ізометрію в $\tilde{H}_0$

$$\widetilde{V} : [T_1\tilde{x}] \to [T_2\tilde{x}], \tag{3.2.35}$$

яка відіграє центральну роль у розв'язанні задачі.

Зауваження 3.5. Якщо дані АЗІ˜ побудовані за даними АЗІ, то ці дві задачі еквівалентні і всі розв'язки $\sigma(dt)$ АЗІ˜ мають вигляд (3.2.30). Дійсно, в цьому випадку має місце рівність

$$U \mid E_2^{(-1)} \oplus E_2^{(-2)} \oplus \cdots = \tilde{V} \mid E_2^{(-1)} \oplus E_2^{(-2)} \oplus \cdots$$

для будь-якого розширення U ізометрії $\tilde{V}$, оскільки $E_2^{(-1)} \oplus E_2^{(-2)} \oplus \cdots \subseteq d_{\tilde{V}}$. Отже, $E_2^{(-1)}$ є блукаючим підпростором для всіх U. Аналогічно,

$$U^* \Big| \cdots \oplus E_1^{(1)} \oplus E_1^{(0)} = V^{-1} \Big| \cdots \oplus E_1^{(1)} \oplus E_1^{(0)}.$$

звідки випливає що $E_1^{(0)}$ блукаючий підпростір для всіх U. А це тягне що $\sigma(dt)$ має вигляд (3.2.30). Деталі можна знайти в [27].

В Розділі 3.3 дається розв'язок АЗІ˜ в загальному випадку.

3.3 Розв'язання неортогональної задачі.

З даними АЗІ˜ природно пов'язаний Ґільбертів простір $\widetilde{H}_0$ і ізометрія (3.2.35) $\widetilde{V}$ в ньому з областю визначення $d_{\widetilde{V}}$ і областю значень $\Delta_{\widetilde{V}}$. Нехай $N_{d_{\widetilde{V}}}$ і $N_{\Delta_{\widetilde{V}}}$ будуть ортогональні доповнення $d_{\widetilde{V}}$ і $\Delta_{\widetilde{V}}$ в H_0. Підпростори $N_{d_{\widetilde{V}}}$ і $N_{\Delta_{\widetilde{V}}}$ будемо називати дефектними підпросторами задачі.

Теорема 3.6. Нехай $\widetilde{V}$ це ізометрія (3.2.35) пов'язана з даними АЗІ˜ і $\mathcal{U}^*$ унітарне розширення $\widetilde{V}$ (тобто, $\mathcal{U}^* : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, де $\mathcal{K} \supseteq \widetilde{H}_0$ і $\mathcal{U}^* \Big| d_{\widetilde{V}} = \widetilde{V}$). Тоді

$$\sigma(\zeta) = \rho_0^* \mathcal{P}_{\mathcal{U}^*}(\zeta) \rho_0$$

є розв'язком АЗІ˜ де ρ_0 це оператор (3.2.32) і $\mathcal{P}_{\mathcal{U}^*}(\zeta)$ ядро Пуассона оператора $\mathcal{U}^*$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{U}^*}(\zeta) \quad &= (\mathbf{1} - \zeta \mathcal{U}^*)^{-1} + (\mathbf{1} - \bar{\zeta} \mathcal{U})^{-1} - \mathbf{1} \\ &= (1 - |\zeta|^2)(\mathbf{1} - \zeta \mathcal{U}^*)^{-1} (\mathbf{1} - \bar{\zeta} \mathcal{U})^{-1}. \end{aligned}$$

Більш того, всі розв'язки АЗІ˜ виходять таким чином. Нагадаємо що трійка $(\mathcal{K}, \mathcal{U}^*, \rho_0)$ є унітарною системою розсіювання і $\sigma(\zeta)$ є її спектральної функцією відносно масштабу ρ_0 (див. Розділ 2.1). Доведення аналогічно доведенню для АЗІ ([KKY], [Kh1], [Kh2], [Kh3], [Kh4] і [BTr]).

Комбінуючи Теореми 2.12 і 3.6 отримаємо опис всіх розв'язків АЗІ˜ .

Теорема 3.7. Всі розв'язки АЗІ˜ описуються наступною формулою

$$\sigma_\rho = \sigma_0 + r_2 \omega (\mathbf{1} - s\omega)^{-1} r_1 + r_1^* (\mathbf{1} - \omega^* s^*)^{-1} \omega^* r_2^*. \qquad (3.3.1)$$

де s, r_1, r_2, σ_0 визначені в (2.5.11), (2.5.18), а ω в (2.5.21).

Зауваження 3.8. У випадку ортогональної АЗІ (див. Розділ 3.1), $E = E_1 \oplus E_2$, $\rho_0(E_1)$ і $\rho_0(E_2)$ є блукаючими підпросторами для $\mathcal{U}_0^*$ з ортогональними напівканалами. Тоді σ_0 в (2.5.18) має спеціальний вигляд

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & s_0^* \\ s_0 & \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

де s_0 функція класу Шура, r_1 і r_2 мають вид

$$r_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ s_2 \end{bmatrix}, \quad r_1 = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отже, всі розв'язки (3.3.1) σ_ρ також мають вигляд

$$\sigma_\rho = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & w^* \\ w & \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

де w функції класу Шура. Таким чином приходимо до відомої раніше спрощеної формули для опису розв'язків ортогональної АЗІ

$$w = s_0 + s_2\omega(\mathbf{1} - s\omega)^{-1}s_1.$$

Висновки до розділу 3

В Розділі 3 спочатку викладено схему Абстрактної Задачі Інтерполяції, яка була розвинута раніше і яка добре працює в задачах аналізу де розв'язки є аналітичними функціями (таких як задача Неванлінни-Піка, задача Сарасона, Проблема Моментів). В основі цієї схеми покладено теорію операторних вузлів. Далі показано як унітарний вузол вкладається в унітарну систему розсіювання. Показано як Абстрактна Задача Інтерполяції формулюється (еквівалентним чином) у термінах систем розсіювання (замість унітарних вузлів). Після цього відкинуто умову ортогональності, яка була присутня в попередній схемі, і сформульовано нову схему Абстрактної Задачі Інтерполяції, розв'язками якої можуть бути не тільки аналітичні, але й гармонійні функції. Далі цю нову Абстрактну Задачу Інтерполяції розв'язано з використанням унітарних розширень ізометрій та відповідних систем розсіювання. Отримано параметризацію розв'язків задачі.

Результати розділу опубліковано в роботі [71].

РОЗДІЛ 4

ПРЯМА ТА ЗВОРОТНА ЗАДАЧІ ПРО ЛІФТИНГ

Результати цього розділу були опубліковані в [20] і [21].

4.1 Постановка задачі

Теорема про ліфтинг комутанту Б.С.-Надя і Ч. Фойаша є одним з результатів які визначили розвиток Теорії Операторів і її додатків за останні півстоліття. Формулювання її таке:

Теорема 4.1. Нехай задані два стискуючі оператора T', T'' в Ґільбертових просторах $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$ і їх ізометричні дилатації $\mathcal{V}'$ і $\mathcal{V}''$ в Ґільбертових просторах $\mathcal{K}' \supset \mathcal{H}'$ і $\mathcal{K}'' \supset \mathcal{H}''$. Нехай заданий стискуючий оператор $X\colon \mathcal{H}' \to \mathcal{H}''$ такий що $XT' = T''X$. Тоді існує оператор $Y\colon \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$, теж стискуючий ($\|Y\| \leq 1$), такий що $Y\mathcal{V}' = \mathcal{V}''Y$ і $XP_{\mathcal{H}'} = P_{\mathcal{H}''}Y$, де $P_{\mathcal{H}'}$ і $P_{\mathcal{H}''}$ ортогональні проекції $\mathcal{K}'$ на $\mathcal{H}'$ і $\mathcal{K}''$ на $\mathcal{H}''$.

Відомо що загальний випадок цієї теореми зводиться до наступного спеціального: $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}''$ унітарні оператори в Ґільбертових просторах $\mathcal{K}'$ і $\mathcal{K}''$; $\mathcal{H}' = \mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{K}'$ підпростір інваріантний відносно $\mathcal{U}'$, $\mathcal{H}'' = \mathcal{K}''_- \subset \mathcal{K}''$ підпростір інваріантний відносно $\mathcal{U}''^*$; $T' = \mathcal{U}'_+|\mathcal{K}'_+$, $T'' = P_{\mathcal{K}'_-}\mathcal{U}''_-|\mathcal{K}'_-$. Для цього спеціального випадку задача про ліфтинг комутанту (для стислості - просто задача про ліфтинг) формулюється так:

Задача 4.2 (Задача про Ліфтинг). Задані два унітарних оператора $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}''$ в Ґільбертових просторах $\mathcal{K}'$ і $\mathcal{K}''$, також задані підпростори $\mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{K}'$ і $\mathcal{K}''_- \subset \mathcal{K}''$ такі що

$$\mathcal{U}'\mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{K}'_+, \qquad \mathcal{U}''^*\mathcal{K}''_- \subset \mathcal{K}''_-. \tag{4.1.1}$$

Заданий стискуючий оператор $X\colon \mathcal{K}'_+ \to \mathcal{K}''_-$, який має таку сплітаючу властивість

$$X\mathcal{U}'|_{\mathcal{K}'_+} = P_{\mathcal{K}''_-}\mathcal{U}''X. \tag{4.1.2}$$

Потрібно охарактеризувати всі стискуючі оператори Y, які сплітають $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}''$

$$Y\mathcal{U}' = \mathcal{U}''Y$$

і які є ліфтингами X (по Халмошу), тобто,

$$P_{\mathcal{K}''_-}Y|_{\mathcal{K}'_+} = X. \tag{4.1.3}$$

Ми також будемо припускати що підпростори $\mathcal{K}'_+$ и $\mathcal{K}''_-$ є $*$-циклічними для $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}''$ відповідно. $*$-циклічність $\mathcal{K}'_+$ для $\mathcal{U}'$ в $\mathcal{K}'$ означає, что $\mathcal{K}'$ є найменшим підпростором в $\mathcal{K}'$ що містить $\mathcal{K}'_+$ і приводить $\mathcal{U}'$ (тобто є інваріантним відносно $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}'^*$). Аналогічно визначається $*$-циклічність $\mathcal{K}'_-$ для $\mathcal{U}''$ в $\mathcal{K}''$.

Розв'язання прямої задачі про ліфтинг детально викладається нижче. Тут тільки відзначимо що з кожним ліфтингом Y ми пов'язуємо символ w, що є гармонійною оператор-функцією в крузі. Символи всіх ліфтингів описуються у вигляді дробово-лінійного перетворення

$$w = s_0 + s_2(I - \omega s)^{-1}\omega s_1, \tag{4.1.4}$$

де ω довільна оператор-функція класу Шура - вільний параметр, а четвірка функцій (коефіцієнти) однозначно визначається даними задачі.

Зворотна задача полягає в характеризації тих четвірок коефіцієнтів, які виникають в контексті задачі про ліфтинг (при всіляких даних). Повне розв'язання цієї зворотної задачі дано в Теоремах 4.13, 4.18, 4.24 в термінах властивостей простору Хеллінгера асоційованого з даною четвіркою.

Відправною точкою нашого підходу є метод унітарних розширень, вперше застосований до задач інтерполяції Адамяном, Аровим і Крейном в циклі робіт [6, 2, 3, 4], і згодом розвинений в роботах [45, 13, 12, 61, 64, 79, 62, 63, 72, 69, 70, 71, 50, 77]. При цьому підході розв'язки задачі пов'язані з мінімальними унітарними розширеннями ізометрії, природним чином побудованої за даними задачі. Ми використовуємо термін *ізометрія* (в літературі також використовується термін *напівунітарний оператор*) в наступному сенсі: задан Ґільбертів простір $\mathcal{H}_0$, його підпростори $\mathcal{D}$ і $\mathcal{D}_*$ і лінійний оператор V який відображає $\mathcal{D}$ ізометрично на $\mathcal{D}_*$; ми будемо говорити що V є *ізометрією в* $\mathcal{H}_0$ *с областю визначення* $\mathcal{D}$ *и областю значень* $\mathcal{D}_*$. Під *мінімальним унітарним розширенням* ізометрії V ми розуміємо унітарний оператор $\mathcal{U}$ в Ґільбертовому просторі $\mathcal{K}$, що містить $\mathcal{H}_0$ як підпростір, такий що обмеження $\mathcal{U}$ на $\mathcal{D}$ збігається з V і такий що в $\mathcal{K}$ немає нетривіального підпростору, що містить $\mathcal{H}_0$ і приводить $\mathcal{U}$ (тобто інваріантного відносно $\mathcal{U}$ і $\mathcal{U}^*$. Існує спеціальний унітарний вузол U_0 (який ми називаємо *універсальним вузлом пов'язаним з ізометрією* V) такий що будь-яке мінімальне унітарне розширення $\mathcal{U}^*$ ізометрії V виходить в результаті операції з'єднання зі зворотним зв'язком (див. Розділи 2.5 і 2.6)

$$\mathcal{U}^* = \mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$$

універсального вузла U_0 з довільним унітарною вузлом U_1 певного вигляду (див. Теорему 4.7), який тим самим є вільним параметром розширення.

Серед всіх унітарних розширень ізометрії V є одне, яке позначимо $\mathcal{U}_0^*$ і будемо називати *центральним (або універсальним) унітарним розширенням.* Структура цього розширення описана в Розділі 4.6. У термінах універсального розширення обчислюються коефіцієнти (див. Розділ 4.7) формули (4.5.4), що параметризує розв'язки задачі.

Для того щоб обчислити ліфтинг Y по унітарному розширенню $\mathcal{U}^*$ ізометрії V треба побудувати хвильовий оператор, для чого в свою чергу потрібно обчислення ступенів $\mathcal{U}^*$, ([70, 71]). Ліфтинг Y однозначно визначається своїми моментами $w_Y(n) = i_*^* Y^n i$, де i_* і i певні ізометричні відображення (*оператори масштабування* [27]). Ми називаємо послідовність цих моментів *символом* ліфтингу Y. Обчислення цих моментів зводиться до обчислення ступенів $\mathcal{U}^* = \mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$ в термінах універсального вузла U_0 (який залежить тільки від даних задачі) і вільного параметра U_1 (або його характеристичної функції $\omega(\zeta)$). Загальний алгоритм обчислення ступенів оператора $\mathcal{U}^*$ заданого як з'єднання зі зворотним зв'язком $\mathcal{U}^* = \mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$ двох вузлів U_0 и U_1 (що представляє незалежний інтерес) викладено в Розділі 2.6 цієї дисертації, опубліковано в [70], [20].

Застосовуючи цю загальну конструкцію, ми отримуємо явну формулу що параметризує символи $\{w_Y(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ що відповідають розв'язкам задачі про Ліфтинг Y (див. Теорему 4.8). Це дробово-лінійна формула типу Редхеффера. Матриця коефіцієнтів цього дробово-лінійного перетворення є символом універсального розширення $\mathcal{U}_0$ (див. формулу (4.6.38) в Теоремі 4.15 нижче).

Цей загальний алгоритм коротко зводиться до наступного. Припустимо, що оператор $\mathcal{U}$ є з'єднанням зі зворотним зв'язком

$$U_0 = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{X}_0 \\ \mathcal{D} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{X}_0 \\ \mathcal{D}_* \end{bmatrix}, \quad U_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{D}_* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{D} \end{bmatrix}.$$

В нашому контексті завжди $D_0 = 0$. З кожним вузлом

$$U = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{E} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{E}_* \end{bmatrix}$$

зв'язується лінійна динамічна система з дискретним часом Σ_U

$$\begin{bmatrix} x(n+1) \\ e_*(n) \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} x(n) \\ e(n) \end{bmatrix}, \quad x(0) = x_0 \tag{4.1.5}$$

де $\{e(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ інтерпретується як вхідний сигнал, $\{e_*(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ як вихідний, $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ як еволюція внутрішнього стану системи, $x(0) = x_0$ початковий внутрішній стан. Введемо позначення для *розширеного відображення входу-виходу*, яке розширює звичайне відображення входу-виходу в тому сенсі що враховує початковий стан системи $x(0) = x_0$, яке не обов'язково дорівнює нулю, а також показує динаміку внутрішнього стану:

$$W(U)^+ := \begin{bmatrix} W(U)^+_0 & W(U)^+_2 \\ W(U)^+_1 & W(U_0)^+ \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_0 \\ \{e(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \\ \{e_*(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \end{bmatrix},$$

де $\{e(n), x(n), e_*(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ задовольняють системі (4.1.5). Тоді: *ступені* $\mathcal{U}^n$ *оператора* $\mathcal{U} = \mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$ *можуть бути обчислені в термінах з'єднання зі зворотним зв'язком розширених відображень входу-виходу*

$$\left\{ \mathcal{U}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{Z}_+} = \left\{ \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{Z}_+} = \mathcal{F}_\ell\left(W(U_0)^+, W(U_1)^+\right) \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Структуру універсального розширення $\mathcal{U}_0$ з вкладеними підпросторами $(\mathcal{U}',\mathcal{K}')$, $(\mathcal{U}'',\mathcal{K}'')$, які пов'язані з даними задачі, і просторами $\widetilde{\Delta}$, $\widetilde{\Delta}_*$ (звідки і куди діє вільний параметр $\omega(z)$) можна інтерпретувати як чотириразове унітарне зчеплення в сенсі Адамяна-Арова (АА унітарне зчеплення) [1]. При цьому можна охарактеризувати специфіку структури чотириразових АА-унітарних зчеплень які виникають в контексті задачі про ліфтинг. В результаті приходимо до розв'язання зворотної задачі (Теореми 4.13, 4.18, 4.24), а саме отримуємо характеризацію матриць коефіцієнтів що виникають при параметризації розв'язків задачі про ліфтинг (*із заданими операторами* $\mathcal{U}'$,$\mathcal{U}''$ *і підпросторами* $\mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{K}'$,$\mathcal{K}''_- \subset \mathcal{K}''$). Ці результати узагальнюють результати [15, 66, 68], отримані в контексті задачі Нехарі і бі-дотичної задачі Неванлінни-Піка.

Цей Розділ організовано таким чином. В підрозділі 4.2 дається огляд ідей [1] щодо відповідності між стисненнями Y, які сплітають два унітарних оператори $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}''$, з одного боку і унітарними зчепленнями $\mathcal{U}$ цих же унітарних операторів $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}''$ з іншого. У підрозділі 4.3 враховується що сплітаючий оператор Y є ліфтингом заданого стиснення X, яке сплітає укорочені версії $\mathcal{U}'_+, \mathcal{U}''_-$ операторів $\mathcal{U}', \mathcal{U}''$. Тут же встановлюється відповідність між розв'язками Y задачі про ліфтинг і унітарними розширеннями $\mathcal{U}^*$ ізометрії V, побудованої за даними задачі. У підрозділі 4.4 показано (див. також [16, 17]) що такі унітарні розширення виходять як з'єднання зі зворотним зв'язком універсального вузла U_0 з довільним унітарним вузлом U_1 у якого фіксовані вхід і вихід. В підрозділі 4.5 загальна конструкція Розділу 2.6 застосовується для параметризації символів $\{w_Y(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ пов'язаних з розв'язками Y задачі про Ліфтинг. В підрозділі 4.6 визначається універсальне унітарне розширення ізометрії V і показується що воно є чотириразовим АА-унітарним зчепленням двох унітарних операторів $\mathcal{U}', \mathcal{U}''$ (які є частиною даних задачі) і двох двосторонніх зсувів, пов'язаних з дефектними просторами задачі. Далі виявляється специфіка геометрії цього зчеплення, яка дозволяє характеризувати АА-зчеплення що виникають в контексті задачі про ліфтинг. А це в свою чергу приводить до "безкоординатної" версії зворотної теореми (Теорема 4.13). У цьому ж підрозділі виходить формула для матриці коефіцієнтів Редхеффера в термінах універсального унітарного розширення. У підрозділах 4.7 і 4.8, використовуючи функціональний простір Хеллінгера, отримано дві більш конкретні теоретико-функціональні версії зворотної Теореми 4.13: Теорема 4.18 і Теорема 4.24. В підрозділі 4.9 отримані результати ілюструються на прикладі класичної задачі Нехарі.

4.2 Сплітаючі оператори та зчеплення унітарних операторів

У цьому параграфі подаються факти про унітарні зчеплення унітарних операторів , [1], які використовуються в наступному параграфі для переформулювання задачі про ліфтинг.

Припустимо що задані два унітарних оператора в відповідних Ґільбертових просторах $(\mathcal{U}',\mathcal{K}')$ і $(\mathcal{U}'',\mathcal{K}'')$. Будемо говорити що сукупність $(\mathcal{U}, i_{\mathcal{K}'}, i_{\mathcal{K}''}; \mathcal{K})$ є *унітарним зчепленням по Адамяну-Арову* (для стислості *АА-унітарним зчепленням*) операторів $(\mathcal{U}',\mathcal{K}')$ и $(\mathcal{U}'',\mathcal{K}'')$ якщо $\mathcal{U}$ унітарний оператор в Ґільбертовому просторі $\mathcal{K}$ а $i_{\mathcal{K}'}\colon \mathcal{K}' \to \mathcal{K}$ і $i_{\mathcal{K}''}\colon \mathcal{K}'' \to \mathcal{K}$ ізометричні вкладення відповідно $\mathcal{K}'$ і $\mathcal{K}''$ в $\mathcal{K}$ такі що

$$i_{\mathcal{K}'}\mathcal{U}' = \mathcal{U} i_{\mathcal{K}'}, \qquad i_{\mathcal{K}''}\mathcal{U}'' = \mathcal{U} i_{\mathcal{K}''}. \tag{4.2.1}$$

Зауважимо що оператор $Y = i_{\mathcal{K}''}^* i_{\mathcal{K}'}\colon \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$ є стисненням ($\|Y\| \leq 1$) і що Y сплітає $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}''$

$$Y\mathcal{U}' = i_{\mathcal{K}''}^* i_{\mathcal{K}'}\mathcal{U}' = i_{\mathcal{K}''}^* \mathcal{U} i_{\mathcal{K}'} = \mathcal{U}'' i_{\mathcal{K}''}^* i_{\mathcal{K}'} = \mathcal{U}''Y.$$

Протилежне твердження міститься в Теоремі 4.3 нижче. АА-унітарне зчеплення $(\mathcal{U}, i_{\mathcal{K}'}, i_{\mathcal{K}''}; \mathcal{K})$ унітарних операторів $(\mathcal{U}',\mathcal{K}')$ і $(\mathcal{U}'',\mathcal{K}'')$ називається *мінімальним* якщо

$$\operatorname{im} i_{\mathcal{K}'} + \operatorname{im} i_{\mathcal{K}''} \text{ щільно в } \mathcal{K}, \tag{4.2.2}$$

а два АА-унітарних зчеплення $(\mathcal{U}, i_{\mathcal{K}'}, i_{\mathcal{K}''}; \mathcal{K})$ и $(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{i}_{\mathcal{K}'}, \widetilde{i}_{\mathcal{K}''}; \widetilde{\mathcal{K}})$ називаються *унітарно еквівалентними* якщо існує унітарний оператор $\tau\colon \mathcal{K} \to \widetilde{\mathcal{K}}$ такий що

$$\tau\mathcal{U}=\widetilde{\mathcal{U}}\tau, \qquad \tau i_{\mathcal{K}'}=\widetilde{i}_{\mathcal{K}'}, \qquad \tau i_{\mathcal{K}''}=\widetilde{i}_{\mathcal{K}''}. \tag{4.2.3}$$

Має місце наступний важливий зв'язок між АА-унітарними зчепленнями і стисненнями що сплітають два даних унітарних оператори (див. [1] і [45]).

Теорема 4.3. Припустимо що задані два унітарних оператори $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}''$ в Ґільбертових просторах $\mathcal{K}'$ і $\mathcal{K}''$, відповідно. Тоді має місце взаємнооднозначна відповідність між класами унітарно еквівалентних мінімальних АА-унітарних зчеплень $(\mathcal{U}, i_{\mathcal{K}'}, i_{\mathcal{K}''}; \mathcal{K})$ з одного боку, і стисненнями $Y\colon \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$, що сплітають $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$ и $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$ з іншого. А саме:

1. Нехай $\mathfrak{A} := (\mathcal{U}, i_{\mathcal{K}'}, i_{\mathcal{K}''}; \mathcal{K})$ це АА-унітарне зчеплення $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$ и $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$. Визначимо оператор $Y = Y(\mathfrak{A})\colon \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$ як

$$Y = Y(\mathfrak{A}) = i^*_{\mathcal{K}''} i_{\mathcal{K}'}. \tag{4.2.4}$$

   Тоді Y є стисненням що сплітає $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$ і $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$. Еквівалентні АА-унітарні зчеплення задають за формулою (4.2.4) один і той же сплітаючий оператор Y.

2. Припустимо що $Y\colon \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$ є стисненням що сплітає $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$ і $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$. Розглянемо Ґільбертів простір $\mathcal{K} := \mathcal{K}'' *_Y \mathcal{K}'$ є поповненням лінійної множини $\left[\begin{smallmatrix}\mathcal{K}''\\ \mathcal{K}'\end{smallmatrix}\right]$ наділеної скалярним добутком

$$\left\langle \begin{bmatrix} k'' \\ k' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h'' \\ h' \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{K}' *_Y \mathcal{K}''} = \left\langle \begin{bmatrix} I_{\mathcal{K}''} & Y \\ Y^* & I_{\mathcal{K}'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'' \\ k' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h'' \\ h' \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{K}'' \oplus \mathcal{K}'}, \tag{4.2.5}$$

   де $k'', h'' \in \mathcal{K}''$ и $k', h' \in \mathcal{K}'$ (пари $\left[\begin{smallmatrix}k''\\ k'\end{smallmatrix}\right]$ що мають нульовий скалярний квадрат ототожнюються з 0). Задамо оператор $\mathcal{U} = \mathcal{U}'' *_Y \mathcal{U}'$ на щільній в $\mathcal{K}$ множині

$$\mathcal{U}\colon \begin{bmatrix} k'' \\ k' \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathcal{U}''k'' \\ \mathcal{U}'k' \end{bmatrix}, \tag{4.2.6}$$

   задамо два вкладення $i_{\mathcal{K}'}\colon \mathcal{K}' \to \mathcal{K}$ і $i_{\mathcal{K}''}\colon \mathcal{K}'' \to \mathcal{K}$

$$i_{\mathcal{K}'}\colon k' \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ k' \end{bmatrix}, \qquad i_{\mathcal{K}''}\colon k'' \mapsto \begin{bmatrix} k'' \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.2.7}$$

Тоді набір

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(Y) := (\mathcal{U}'' *_Y \mathcal{U}', i_{\mathcal{K}'}, i_{\mathcal{K}''}; \mathcal{K}'' *_Y \mathcal{K}') \tag{4.2.8}$$

є мінімальним АА-унітарним зчепленням $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$ і $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$, при цьому Y відновлюється як $Y = i^*_{\mathcal{K}''} i_{\mathcal{K}'}$. Будь-яке мінімальне АА-унітарне зчеплення $(\mathcal{U}, i_{\mathcal{K}'}, i_{\mathcal{K}''}; \mathcal{K})$ операторів $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$ и $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$ для якого $i^*_{\mathcal{K}''} i_{\mathcal{K}'} = Y$ є унітарно еквівалентним зчепленню, яке задається (4.2.5), (4.2.6), (4.2.7).

Більш того, відповідності $\mathfrak{A} \mapsto Y(\mathfrak{A})$ в (4.2.4) і $Y \mapsto \mathfrak{A}(Y)$ в (4.2.8) є взаємно зворотними і, тим самим, встановлюють необхідну взаємнооднозначну відповідність.

Доведення. Доведення першої частини вже було обговорено перед формулюванням теореми.

Назад, припустимо що $Y\colon \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$ довільне стиснення що сплітає $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$ и $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$ і нехай $(\mathcal{U}' *_Y \mathcal{U}'', i_{\mathcal{K}'}, i_{\mathcal{K}''}; \mathcal{K}' *_Y \mathcal{K}'')$ АА-унітарне зчеплення операторів $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$ і $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$ що задається (4.2.8). З форми скалярного добутку (4.2.5) видно що $i_{\mathcal{K}'}\colon \mathcal{K}' \to \mathcal{K}$ і $i_{\mathcal{K}''}\colon \mathcal{K}'' \to \mathcal{K}$ що задаються (4.2.7) є ізометріями. З визначення

$$\mathcal{K} := \mathcal{K}'' *_Y \mathcal{K}'$$

як замикання $\left[\begin{smallmatrix} \mathcal{K}'' \\ \mathcal{K}' \end{smallmatrix}\right]$ в скалярному добутку (4.2.5), слід що лінійна оболонка образів $\operatorname{im} i_{\mathcal{K}''} + \operatorname{im} i_{\mathcal{K}'}$ щільна в $\mathcal{K}$. Використовуючи умову сплетіння $Y\mathcal{U}' = \mathcal{U}''Y$ спільно з властивістю унітарності $\mathcal{U}''$ и $\mathcal{U}'$, отримуємо що

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{bmatrix} I_{\mathcal{K}''} & Y \\ Y^* & I_{\mathcal{K}'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}''k'' \\ \mathcal{U}'k' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{U}''h'' \\ \mathcal{U}'h' \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{K}''\oplus\mathcal{K}'} \\
&\quad = \left\langle \begin{bmatrix} \mathcal{U}'' & 0 \\ 0 & \mathcal{U}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathcal{K}''} & Y \\ Y^* & I_{\mathcal{K}'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'' \\ k' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{U}'' & 0 \\ 0 & \mathcal{U}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h'' \\ h' \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{K}''\oplus\mathcal{K}'} \\
&\quad = \left\langle \begin{bmatrix} I_{\mathcal{K}''} & Y \\ Y^* & I_{\mathcal{K}'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'' \\ k' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h'' \\ h' \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{K}''\oplus\mathcal{K}'}
\end{aligned}$$

і, отже, оператор

$$\mathcal{U}\colon \begin{bmatrix} k'' \\ k' \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathcal{U}''k'' \\ \mathcal{U}'k' \end{bmatrix} \tag{4.2.9}$$

продовжується до унітарного оператора в $\mathcal{K} = \mathcal{K}'' *_Y \mathcal{K}'$. Таким чином $(\mathcal{U}' *_Y \mathcal{U}'', i_{\mathcal{K}'}, i_{\mathcal{K}''}; \mathcal{K}' *_Y \mathcal{K}'')$ є мінімальним АА-унітарним зчепленням $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$ і $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$, і твердження (2) теореми доведено. При цьому з виду скалярного добутку випливає що Y відновлюється за формулою $Y = i^*_{\mathcal{K}''} i_{\mathcal{K}'}$.

Нехай тепер $(\mathcal{U}, i_{\mathcal{K}'}, i_{\mathcal{K}''}; \mathcal{K})$ буде будь-яке АА-унітарне зчеплення $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$ і $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$. Покладемо $Y = i^*_{\mathcal{K}''} i_{\mathcal{K}'} \colon \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$. Для $k', \ell' \in \mathcal{K}'$ и $k'', \ell'' \in \mathcal{K}''$ обчислимо

$$\left\langle \begin{bmatrix} I & Y \\ Y^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'' \\ k' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \ell'' \\ \ell' \end{bmatrix} \right\rangle = \langle k'' + i^*_{\mathcal{K}''} i_{\mathcal{K}} k', \ell'' \rangle_{\mathcal{K}''} + \langle i^*_{\mathcal{K}'} i_{\mathcal{K}''} k'' + k', \ell' \rangle_{\mathcal{K}'}$$

$$= \langle k'', \ell'' \rangle_{\mathcal{K}''} + \langle i_{\mathcal{K}'} k', i_{\mathcal{K}''} \ell'' \rangle_{\mathcal{K}} + \langle i_{\mathcal{K}''} k'', i_{\mathcal{K}'} \ell' \rangle_{\mathcal{K}} + \langle k', \ell' \rangle_{\mathcal{K}'}$$

$$= \langle i_{\mathcal{K}''} k'' + i_{\mathcal{K}'} k', i_{\mathcal{K}''} \ell'' + i_{\mathcal{K}'} \ell' \rangle_{\mathcal{K}}. \tag{4.2.10}$$

Звідси ми робимо висновок що

$$\tau \colon \begin{bmatrix} k'' \\ k' \end{bmatrix} \mapsto i_{\mathcal{K}''} k'' + i_{\mathcal{K}'} k'$$

ізометрично відображає щільний підмноговид $\left[\begin{smallmatrix} \mathcal{K}'' \\ \mathcal{K}' \end{smallmatrix}\right]$ простору $\mathcal{K}'' *_Y \mathcal{K}'$ на $\operatorname{im} i_{\mathcal{K}'} + \operatorname{im} i_{\mathcal{K}''}$. Отже, τ продовжується до ізометричного відображення всього простору $\mathcal{K}'' *_Y \mathcal{K}'$ на замикання $\operatorname{im} i_{\mathcal{K}''} + \operatorname{im} i_{\mathcal{K}'}$ в $\mathcal{K}$ і значить τ унітарно тоді і тільки тоді коли $(\mathcal{U}, i_{\mathcal{K}'}, i_{\mathcal{K}''}; \mathcal{K})$ є мінімальним АА-унітарним зчепленням. Більш того, $\tau(\mathcal{U}' *_Y \mathcal{U}'') = \mathcal{U}\tau$: спочатку це перевіряється на щільному підмноговиді $\left[\begin{smallmatrix} \mathcal{K}'' \\ \mathcal{K}' \end{smallmatrix}\right]$ простору $\mathcal{K}'' *_Y \mathcal{K}'$, потім продовжується по неперервності на весь простір. Таким чином ми бачимо що описана вище відповідність між сплітаючими стисненнями і класами унітарно еквівалентних мінімальних АА-унітарних зчеплень є взаємно-однозначною. □

Розглянемо тепер довільне АА-унітарне зчеплення $(\mathcal{U}, i_{\mathcal{K}'}, i_{\mathcal{K}''}; \mathcal{K})$ унітарних операторів $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$ и $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$ а також два підпростори $\mathcal{G}' \subset \mathcal{K}'$ і $\mathcal{G}'' \subset \mathcal{K}''$ які є $*$ - циклічними для $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{U}''$ відповідно. Визначимо вкладення $i_{\mathcal{G}'} \colon \mathcal{G}' \to \mathcal{K}$ і $i_{\mathcal{G}''} \colon \mathcal{G}'' \to \mathcal{K}$ як суперпозиції вкладення $\mathcal{G}'$ в $\mathcal{K}'$ з вкладенням $\mathcal{K}'$ в $\mathcal{K}$ і вкладення $\mathcal{G}''$ в $\mathcal{K}''$ з вкладенням $\mathcal{K}''$ в $\mathcal{K}$, відповідно:

$$i_{\mathcal{G}'} := i_{\mathcal{G}' \to \mathcal{K}} = i_{\mathcal{K}' \to \mathcal{K}} i_{\mathcal{G}' \to \mathcal{K}'},$$

$$i_{\mathcal{G}''} := i_{\mathcal{G}''\to\mathcal{K}} = i_{\mathcal{K}''\to\mathcal{K}} i_{\mathcal{G}''\to\mathcal{K}''}.$$

Розглянемо унітарну систему розсіювання

$$\mathfrak{S}_{AA} := \left(\mathcal{U}, \begin{bmatrix} i_{\mathcal{G}''} & i_{\mathcal{G}'} \end{bmatrix}; \mathcal{K}, \mathcal{G}'' \oplus \mathcal{G}'\right).$$

З цією системою ми можемо пов'язати спектральну міру

$$\sigma_{\mathfrak{S}_{AA}}(\cdot) = \begin{bmatrix} i^*_{\mathcal{G}''} \\ i^*_{\mathcal{G}'} \end{bmatrix} E_{\mathcal{U}}(\cdot) \begin{bmatrix} i_{\mathcal{G}''} & i_{\mathcal{G}'} \end{bmatrix}, \tag{4.2.11}$$

спектральну функцію

$$\widehat{w}_{\mathfrak{S}_{AA}}(\zeta) = \begin{bmatrix} i^*_{\mathcal{G}''} \\ i^*_{\mathcal{G}'} \end{bmatrix} [(I - \overline{\zeta}\mathcal{U})^{-1} + (I - \zeta\mathcal{U}^*)^{-1} - I] \begin{bmatrix} i_{\mathcal{G}''} & i_{\mathcal{G}'} \end{bmatrix}$$

і спектральну моментну послідовність

$$\{w_{\mathfrak{S}_{AA}}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ with } w_{\mathfrak{S}_{AA}}(n) = \begin{bmatrix} i^*_{\mathcal{G}''} \\ i^*_{\mathcal{G}'} \end{bmatrix} \mathcal{U}^{*n} \begin{bmatrix} i_{\mathcal{G}''} & i_{\mathcal{G}'} \end{bmatrix}.$$

Зауважимо що елемент (1,2) n -го спектрального моменту $w_{\mathfrak{S}_{AA},n}$ тісно пов'язаний зі сплітаючим оператором $Y = i^*_{\mathcal{K}''} i_{\mathcal{K}}$, що відповідає АА-унітарному зчепленню $(\mathcal{U}, i_{\mathcal{K}'}, \, i_{\mathcal{K}''}; \mathcal{K})$:

$$\langle [w_{\mathfrak{S}_{AA}}(n)]_{12}\, g', g'' \rangle = \left\langle i^*_{\mathcal{G}''} \mathcal{U}^{*n} i_{\mathcal{G}'} g', g'' \right\rangle = \langle Y\mathcal{U}'^{*n} g', g'' \rangle = \langle Y g', \mathcal{U}''^{*n} g'' \rangle.$$

Нехай стиснення $Y \colon \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$ сплітає $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$ и $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$. Двосторонню послідовність операторів $\{w_Y(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, задану формулою

$$w_Y(n) = [w_{\mathfrak{S}_{AA}}(n)]_{12} = i^*_{\mathcal{G}''\to\mathcal{K}''} \mathcal{U}''^{*n} Y i_{\mathcal{G}'\to\mathcal{K}'} = i^*_{\mathcal{G}''\to\mathcal{K}''} Y \mathcal{U}'^{*n} i_{\mathcal{G}'\to\mathcal{K}'} \tag{4.2.12}$$

ми будемо називати *символом* (відносно підпросторів $\mathcal{G}' \subset \mathcal{K}'$ і $\mathcal{G}'' \subset \mathcal{K}''$) сплітаючого оператора Y. Якщо $\mathcal{G}'$ є $*$ - циклічним для $\mathcal{U}'$ і $\mathcal{G}''$ є $*$ - циклічним для $\mathcal{U}''$, то підпростори

$$\mathcal{K}'_0 = \overline{\operatorname{span}}\{\mathcal{U}'^n g' \colon g' \in \mathcal{G}' \text{ і } n \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathcal{K}''_0 = \overline{\operatorname{span}}\{\mathcal{U}''^n g'' \colon g'' \in \mathcal{G}'' \text{ і } n \in \mathbb{Z}\}$$

збігаються з $\mathcal{K}'$ і $\mathcal{K}''$, відповідно, а співвідношення

$$\langle w_Y(n-m)\; g', g'' \rangle = \langle Y\mathcal{U}\;'^{*n} g', \mathcal{U}''^{*m} g'' \rangle, \tag{4.2.13}$$

показує що відповідність між сплітаючими стисненнями Y і їх символами w_Y (відносно фіксованої пари $*$ - циклічних підпросторів $\mathcal{G}'$ і $\mathcal{G}''$) є взаємно однозначною. Більш того, $\mathcal{L}(\mathcal{G}', \mathcal{G}'')$-значні послідовності $w = \{w(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, які є символами $w = w_Y$ сплітаючих стиснень Y можуть бути охарактеризовані наступним чином

Теорема 4.4. Припустимо що $\{w(n)\}$ це символ (4.2.12) стиснення Y, що сплітає унітарні оператори $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$ і $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$, відносно $*$-циклічних підпросторів $\mathcal{G}' \subset \mathcal{K}'$ і $\mathcal{G}'' \subset \mathcal{K}''$. Тоді $\{w(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ є послідовністю тригонометричних моментів (зворотним перетворенням Фур'є)

$$w(n) = \int_{\mathbb{T}} t^{-n}\widehat{w}(dt)$$

деякої $\mathcal{L}(\mathcal{G}', \mathcal{G}'')$-значної міри $\widehat{w}$, такої що

$$\sigma := \begin{bmatrix} \sigma'' & \widehat{w} \\ \widehat{w}^* & \sigma' \end{bmatrix} \text{ є невід'ємною } \mathcal{L}(\mathcal{G}', \mathcal{G}'') - \text{значною мірою.} \qquad (4.2.14)$$

Тут

$$\sigma' = i^*_{\mathcal{G}'} E_{\mathcal{U}'}(\cdot) i_{\mathcal{G}'}, \quad \sigma'' = i^*_{\mathcal{G}''} E_{\mathcal{U}''}(\cdot) i_{\mathcal{G}''}. \qquad (4.2.15)$$

І навпаки, зворотне перетворення Фур'є

$$w(n) := \int_{\mathbb{T}} t^{-n}\widehat{w}(dt)$$

будь-якої $\mathcal{L}(\mathcal{G}', \mathcal{G}'')$-значної міри $\widehat{w}$ на $\mathbb{T}$, що задовольняє нерівності (4.2.14), є символом (відносно підпросторів $\mathcal{G}'$ і $\mathcal{G}''$) єдиного сплітаючого стиснення

Доведення. Пряме твердження фактично доведено раніше. Для доведення зворотного скористаємося моделлю Хеллінгера. Припустимо що $\widehat{w}$ це міра, яка задовольняє (4.2.14), де σ' і σ'' невід'ємні міри (4.2.15). Розглянемо простір Хеллінгера $\mathcal{L}^\sigma$ (див. Розділ 2.2)і оператор $\mathcal{U}^\sigma$ множення на незалежну змінну t в ньому. Визначимо вкладення

$$i_{\mathcal{K}'} : \mathcal{K}' \to \mathcal{L}^\sigma \; and \;\; i_{\mathcal{K}''} : \mathcal{K}'' \to \mathcal{L}^\sigma$$

наступним чином: спочатку ми відобразимо $\mathcal{K}'$ на $\mathcal{L}^{\sigma'}$ і $\mathcal{K}''$ на $\mathcal{L}^{\sigma''}$ за допомогою представлення Фур'є

$$k' \mapsto i^*_{\mathcal{G}'} E'(dt)k', \quad k' \mapsto i^*_{\mathcal{G}''} E''(dt)k'',$$

а потім вкладемо $\mathcal{L}^{\sigma'}$ и $\mathcal{L}^{\sigma''}$ в $\mathcal{L}^{\sigma}$. Це останнє вкладення спочатку визначається на щільних множинах

$$\sigma' p' \mapsto \begin{bmatrix} \widehat{w} \\ \sigma' \end{bmatrix} p', \quad \sigma'' p'' \mapsto \begin{bmatrix} \sigma'' \\ \widehat{w}^* \end{bmatrix} p'',$$

де p', p'' довільні тригонометричні поліноми, а потім продовжується по неперервності. Як було показано в [27]

$$\operatorname{im} i_{\mathcal{K}'} + \operatorname{im} i_{\mathcal{K}''} \text{ є щільним в } \mathcal{L}^{\sigma}.$$

Таким чином ми отримуємо мінімальне АА-унітарне зчеплення $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}''$. Символом відповідного цьому АА-унітарному зчепленню сплітаюче стиснення є послідовність тригонометричних моментів цієї міри $\widehat{w}$. Як було зазначено раніше, співвідношення (4.2.13) тягне взаємну однозначність відповідності між сплітаючими стисненнями Y і їх символами $\{w(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Крім того, відповідність між символами $\{w(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ і їх перетвореннями Фур'є $\widehat{w}$ також є взаємно-однозначною. □

Зауваження 4.5. Доведення Теореми 4.4 показує що для будь-якого АА-унітарного зчеплення $(\mathcal{U}, i_{\mathcal{K}'}, i_{\mathcal{K}''}; \mathcal{K})$ двох унітарних операторів $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$ і $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$ вибір $*$ - циклічних підпросторів $\mathcal{G}' \subset \mathcal{K}'$ і $\mathcal{G}'' \subset \mathcal{K}''$ дозволяє побудувати унітарну еквівалентність цього унітарного зчеплення $(\mathcal{U}, i_{\mathcal{K}'}, i_{\mathcal{K}''}; \mathcal{K})$ і модельного АА-унітарного зчеплення

$$(\mathcal{U}^{\sigma}, i_{\mathcal{K}'\to\mathcal{L}^{\sigma}}, i_{\mathcal{K}''\to\mathcal{L}^{\sigma}}; \mathcal{L}^{\sigma})$$

де $\sigma = \sigma_{\mathfrak{S}_{AA}}$ визначена формулою (4.2.11), $\mathcal{L}^{\sigma}$ це простір Хеллінгера, а вкладення $i_{\mathcal{K}'\to\mathcal{L}^{\sigma}}, i_{\mathcal{K}''\to\mathcal{L}^{\sigma}}$ визначені в Теоремі 4.4 .

4.3 Задача про Ліфтинг та унітарні розширення ізометрій

В цьому розділі обговорено яким чином розв'язки задачі про ліфтинг пов'язані з унітарними розширеннями ізометрії V, яка будується за даними задачі. На множині векторів $\begin{bmatrix}\mathcal{K}''_-\\ \mathcal{K}'_+\end{bmatrix}$ задамо скалярний добуток

$$\left\langle \begin{bmatrix}k''_-\\ k'_+\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\ell''_-\\ \ell'_+\end{bmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix}I & X\\ X^* & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k''_-\\ k'_+\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\ell''_-\\ \ell'_+\end{bmatrix}\right\rangle_{\mathcal{K}''_-\oplus\mathcal{K}'_+}. \tag{4.3.1}$$

Отриманий передґільбертів простір поповнимо і позначимо це поповнення як $\mathcal{H}_0$

$$\mathcal{H}_0 = \operatorname{clos}\begin{bmatrix}\mathcal{K}''_-\\ \mathcal{K}'_+\end{bmatrix}. \tag{4.3.2}$$

Розглянемо наступні підпростори в $\mathcal{H}_0$:

$$\mathcal{D} := \operatorname{clos}\begin{bmatrix}\mathcal{K}''_-\\ \mathcal{U}'\mathcal{K}'_+\end{bmatrix}\subset\mathcal{H}_0, \qquad \mathcal{D}_* := \operatorname{clos}\begin{bmatrix}\mathcal{U}''^*\mathcal{K}''_-\\ \mathcal{K}'_+\end{bmatrix}\subset\mathcal{H}_0. \tag{4.3.3}$$

Визначимо оператор $V\colon \mathcal{D}\to\mathcal{D}_*$ (спочатку на щільній множині в $\mathcal{D}$)

$$V = \begin{bmatrix}\mathcal{U}''^* & 0\\ 0 & \mathcal{U}'^*\end{bmatrix} : \begin{bmatrix}k''_-\\ \mathcal{U}'k'_+\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}\mathcal{U}''^*k''_-\\ k'_+\end{bmatrix}. \tag{4.3.4}$$

де $k''_-\in\mathcal{K}''_-$ і $k'_+\in\mathcal{K}'_+$. Обчислення аналогічне (4.2.10) показує що V зберігає норму, і отож, продовжується до ізометричного відображення $\mathcal{D}$ на $\mathcal{D}_*$. Відзначимо що V цілком визначається даними задачі.

Будемо говорити що оператор $\mathcal{U}^*$ в Ґільбертовому просторі $\mathcal{K}$ є *мінімальним унітарним розширенням* V якщо $\mathcal{U}^*$ є унітарним та існує ізометричне вкладення $i_{\mathcal{H}_0}\colon \mathcal{H}_0\to\mathcal{K}$ простору $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{K}$ таке що

$$i_{\mathcal{H}_0}V = \mathcal{U}^* i_{\mathcal{H}_0}|_{\mathcal{D}}. \tag{4.3.5}$$

і

$$\overline{\operatorname{span}}_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{U}^n \operatorname{im} i_{\mathcal{H}_0} = \mathcal{K}. \tag{4.3.6}$$

Зауважимо що в такому разі також має місце рівність

$$i_{\mathcal{H}_0}V^* = \mathcal{U} i_{\mathcal{H}_0}|_{\mathcal{D}_*}. \tag{4.3.7}$$

Два таких мінімальних унітарних розширення $(\mathcal{U}^*, i_{\mathcal{H}_0}; \mathcal{K})$ і $(\widetilde{\mathcal{U}}^*, \widetilde{i}_{\mathcal{H}_0}; \widetilde{\mathcal{K}})$ називаються *унітарно еквівалентними* якщо існує унітарний оператор

$\tau\colon \mathcal{K} \to \widetilde{\mathcal{K}}$ такий що

$$\tau\mathcal{U}^* = \widetilde{\mathcal{U}}^*\tau, \qquad \tau i_{\mathcal{H}_0} = \widetilde{i}_{\mathcal{H}_0}.$$

Наступна теорема встановлює зв'язок між мінімальними унітарними розширеннями V і ліфтингами X.

Теорема 4.6. Розглянемо задачу про ліфтинг 4.2. Припустимо що підпростори $\mathcal{K}'_+$ і $\mathcal{K}''_-$ є $*$-циклічними. Нехай $V\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}_*$ це ізометрія що визначена в (4.3.4). Тоді існує канонічне взаємно-однозначне співвідношення між класами еквівалентних мінімальних АА-унітарних зчеплень $(\mathcal{U}, i_{\mathcal{K}'}, i_{\mathcal{K}''}; \mathcal{K})$ операторів $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$ і $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$ таких що сплітаючий оператор $Y = i^*_{\mathcal{K}''}i_{\mathcal{K}'}$ є ліфтингом X, с одного боку і класами еквівалентних мінімальних унітарних розширень $(\mathcal{U}^*, i_{\mathcal{H}_0}; \mathcal{K})$ ізометрії V, з другого.

Доведення. Припустимо що $(\mathcal{U}, i_{\mathcal{K}'}, i_{\mathcal{K}''}; \mathcal{K})$ є мінімальним АА-унітарним зчепленням $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$ і $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$. Позначимо відображення

$$i_{\mathcal{H}_0}\colon \begin{bmatrix} k''_- \\ k'_+ \end{bmatrix} \mapsto i_{\mathcal{K}''}k''_- + i_{\mathcal{K}'}k'_+. \tag{4.3.8}$$

Оскільки $i_{\mathcal{K}'}$ і $i_{\mathcal{K}''}$ є ізометріями, то $i_{\mathcal{H}_0}$ є ізометрією тоді і тільки тоді коли

$$\langle i_{\mathcal{K}''}k''_-, i_{\mathcal{K}'}k'_+\rangle_{\mathcal{K}} = \langle k''_-, k'_+\rangle_{\mathcal{H}_0} := \langle k''_-, Xk'_+\rangle_{\mathcal{K}''}.$$

Останнє в свою чергу означає що сплітаючий оператор $Y = i^*_{\mathcal{K}''}i_{\mathcal{K}'}$ є ліфтингом X. Далі,

$$\begin{aligned} i_{\mathcal{H}_0}V\begin{bmatrix} k''_- \\ \mathcal{U}'k'_+ \end{bmatrix} &= i_{\mathcal{H}_0}\begin{bmatrix} \mathcal{U}''^*k''_- \\ k'_+ \end{bmatrix} = i_{\mathcal{K}''}\mathcal{U}''^*k''_- + i_{\mathcal{K}'}k'_+ \\ &= \mathcal{U}^*(i_{\mathcal{K}''}k''_- + i_{\mathcal{K}'}\mathcal{U}'k'_+) = \mathcal{U}^*i_{\mathcal{H}_0}\begin{bmatrix} k''_- \\ \mathcal{U}'k'_+ \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тобто, виконується (4.3.5). Таким чином, $\mathcal{U}^*$ в $\mathcal{K}$ разом з вкладанням $i_{\mathcal{H}_0}$ є унітарним розширенням V. Оскільки, за умовою, $\mathcal{K}'_+$ є $*$-циклічним для $\mathcal{U}'$ в $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K}''_-$ є $*$-циклічним для $\mathcal{U}''$ в $\mathcal{K}''$, і оскільки АА-унітарне зчеплення $(\mathcal{U}, i_{\mathcal{K}'}, i_{\mathcal{K}''}; \mathcal{K})$ є мінімальним, то

$$\overline{\operatorname{span}}_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{U}^n \operatorname{im} i_{\mathcal{H}_0} = \mathcal{K}.$$

Таким чином, $(\mathcal{U}^*, i_{\mathcal{H}_0}; \mathcal{K})$ є мінімальним унітарним розширенням V.

Зворотно, припустимо що $(\mathcal{U}^*, i_{\mathcal{H}_0}; \mathcal{K})$ є мінімальним унітарним розширенням V. Застосуємо тут конструкцію хвильових операторів (див. також [71] Розділ 4), яка в даному випадку істотно спрощується завдяки тому що $\mathcal{K}'_+$ і $\mathcal{K}''_-$ вкладені ізометрично в $\mathcal{H}_0$. Для $k' \in \mathcal{U}'^{*n}\mathcal{K}'_+$ і $m \geq n$ відзначимо що $\mathcal{U}^{*m} i_{\mathcal{H}_0} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \mathcal{U}'^m k' \end{smallmatrix}\right]$ визначено (оскільки $\mathcal{U}'^m k' \in \mathcal{K}'_+$ і, отож, $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \mathcal{U}'^m k' \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{H}_0$) та не залежить від m (оскільки $\mathcal{U}^*$ є розширенням V, див. (4.3.7)). Таким чином, формула

$$i_{\mathcal{K}'} \colon k' \mapsto \lim_{m \to \infty} \mathcal{U}^{*m} i_{\mathcal{H}_0} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{U}'^m k' \end{bmatrix} \tag{4.3.9}$$

задає ізометрію з $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}'^{*n}\mathcal{K}'_+$ в $\mathcal{K}$. За припущенням, $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}'^{*n}\mathcal{K}'_+$ щільно в $\mathcal{K}'$, і, отож, $i_{\mathcal{K}'}$ продовжується по неперервності до ізометрії з $\mathcal{K}'$ в $\mathcal{K}$. Аналогічно, формула

$$i_{\mathcal{K}''} \colon k'' \mapsto \lim_{m \to \infty} \mathcal{U}^{m} i_{\mathcal{H}_0} \begin{bmatrix} \mathcal{U}''^{*m} k'' \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.3.10}$$

задає ізометрію з $\mathcal{K}''$ в $\mathcal{K}$. Безпосередньо з формул (4.3.9) і (4.3.10) випливає що

$$\mathcal{U} i_{\mathcal{K}'} = i_{\mathcal{K}'} \mathcal{U}' \quad \text{і} \quad \mathcal{U} i_{\mathcal{K}''} = i_{\mathcal{K}''} \mathcal{U}''.$$

таким чином ми приходимо до АА-унітарного зчеплення $(\mathcal{U}, i_{\mathcal{K}''}, i_{\mathcal{K}'}; \mathcal{K})$ операторів $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$ і $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$. Для того щоб перевірити його мінімальність зауважимо що (4.3.9) і (4.3.10) тягнуть що

$$\operatorname{im} i_{\mathcal{K}'} = \overline{\operatorname{span}}_{n \in \mathbb{Z}_-} \mathcal{U}^n i_{\mathcal{H}_0} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{K}'_+ \end{bmatrix}$$

і

$$\operatorname{im} i_{\mathcal{K}''} = \overline{\operatorname{span}}_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{U}^n i_{\mathcal{H}_0} \begin{bmatrix} \mathcal{K}''_- \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $i_{\mathcal{H}_0} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{K}'_+ \end{bmatrix}$ інваріантно відносно $\mathcal{U}$ і $i_{\mathcal{H}_0} \begin{bmatrix} \mathcal{K}''_- \\ 0 \end{bmatrix}$ інварінтно відносно

$\mathcal{U}^*$, приходимо до висновку, що

$$\operatorname{im} i_{\mathcal{K}'} + \operatorname{im} i_{\mathcal{K}''} \supseteq \operatorname{span}_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{U}^n i_{\mathcal{H}_0} \begin{bmatrix} \mathcal{K}''_- \\ \mathcal{K}'_+ \end{bmatrix}.$$

Отож,

$$\overline{\operatorname{im} i_{\mathcal{K}'} + \operatorname{im} i_{\mathcal{K}''}} \supseteq \overline{\operatorname{span}}_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{U}^n i_{\mathcal{H}_0} = \mathcal{K}.$$

Остання рівність виконується в силу мінімальності розширення. Таким чином

$$\overline{\operatorname{im} i_{\mathcal{K}'} + \operatorname{im} i_{\mathcal{K}''}} = \mathcal{K}.$$

Тим самим мінімальність АА-унітарного зчеплення доведено. Більш того, $Y = i^*_{\mathcal{K}''} i_{\mathcal{K}'}$ є ліфтингом X оскільки

$$\langle Y k'_+, k''_- \rangle_{\mathcal{K}} = \langle i_{\mathcal{K}'} k'_+, i_{\mathcal{K}''} k''_- \rangle_{\mathcal{K}} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ k'_+ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k''_- \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle X k'_+, k''_- \rangle_{K''_-}.$$

Описані вище відповідності між АА-унітарними зчепленнями і унітарними розширеннями є взаємно зворотними. Як прямо випливає з визначень, при цих відповідностях еквівалентні АА-унітарні зчеплення переходять в еквівалентні унітарні розширення і еквівалентні унітарні розширення переходять в еквівалентні АА-унітарні зчеплення.

□

4.4 Структура унітарних розширень

В попередньому параграфі було встановлено відповідність між стискуючими ліфтингами Y стеснення X і мінімальними унітарними розширеннями $\mathcal{U}^*$ певної ізометрії V в гҐільбертовому просторі $\mathcal{H}_0$ з областб визначеня $\mathcal{D}$ і областю значень $\mathcal{D}_*$

$$V\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}_*.$$

В цьому параграфі буде дана параметризація всіх таких розширень.

Визначимо Δ и Δ_* як ортогональні доповнення

$$\Delta := \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{D}, \quad \Delta_* := \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{D}_*.$$

Нехай $\mathcal{U}^*$ це деяке мінімальне розширення V у Ґільбертів простір $\mathcal{K}$, тобто, $\mathcal{U}$ є унітарним оператором у Ґільбертовому просторі $\mathcal{K}$, який містить простір $\mathcal{H}_0$, при цьому найменшим підпростором в $\mathcal{K}$, який містить $\mathcal{H}_0$ і приводить $\mathcal{U}$, є весь простір $\mathcal{K}$, а обмеження $\mathcal{U}^*$ на $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{K}$ збігається з V: $\mathcal{U}^*|_{\mathcal{D}} = V$. Визначимо $\mathcal{H}_1$ як $\mathcal{K} \ominus \mathcal{H}_0$, тоді $\mathcal{K} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. З розширенням $\mathcal{U}^*$ зв'яжемо два унітарних вузли U_1 і U_0. Оскільки $\mathcal{U}^*|_{\mathcal{D}} = V$ відображає $\mathcal{D}$ на $\mathcal{D}_*$ і $\mathcal{U}^*$ є унітарним, то $\mathcal{U}^*$ відображає $\mathcal{K} \ominus \mathcal{D} = \Delta \oplus \mathcal{H}_1$ на $\mathcal{K} \ominus \mathcal{D}_* = \Delta_* \oplus \mathcal{H}_1$. Для того щоб визначити вузол U_1, розглянемо другу копію $\widetilde{\Delta}$ підпростору Δ і другу копію $\widetilde{\Delta}_*$ підпростору Δ_* а також відображення ототожнення

$$i_{\widetilde{\Delta}} \colon \widetilde{\Delta} \to \Delta \subset \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{K}, \quad i_{\widetilde{\Delta}_*} \colon \widetilde{\Delta}_* \to \Delta_* \subset \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{K}. \tag{4.4.1}$$

Зараз визначимо вузол

$$U_1 := \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \widetilde{\Delta} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \widetilde{\Delta}_* \end{bmatrix} \tag{4.4.2}$$

за формулою

$$U_1 = \begin{bmatrix} i_{\mathcal{H}_1}^* \\ i_{\widetilde{\Delta}_*}^* \end{bmatrix} \mathcal{U}^* \begin{bmatrix} i_{\mathcal{H}_1} & i_{\widetilde{\Delta}} \end{bmatrix} \tag{4.4.3}$$

де $i_{\mathcal{H}_1} \colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{K} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ природне вкладення. Другий вузол $U_0 \colon \mathcal{H}_0 \oplus \widetilde{\Delta}_* \to \mathcal{H}_0 \oplus \widetilde{\Delta}$ визначимо з використанням двох ортогональних розкладів простору $\mathcal{H}_0$

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{D} \oplus \Delta = \mathcal{D}_* \oplus \Delta_*.$$

А саме,

$$U_0 = \begin{bmatrix} V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_{\widetilde{\Delta}_*} \\ 0 & i_{\widetilde{\Delta}}^* & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{D} \\ \Delta \\ \widetilde{\Delta}_* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{D}_* \\ \Delta_* \\ \widetilde{\Delta} \end{bmatrix}, \tag{4.4.4}$$

або, у формі вузла

$$U_0 = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{H}_0 \\ \widetilde{\Delta}_* \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{H}_0 \\ \widetilde{\Delta} \end{bmatrix} \tag{4.4.5}$$

де

$$A_0|_{\mathcal{D}} = V, \quad A_0|_{\Delta} = 0, \quad C_0|_{\mathcal{D}} = 0, \quad C_0|_{\Delta} = i_{\widetilde{\Delta}}^*,$$

$$B_0 = i_{\widetilde{\Delta}_*} \text{ з } \operatorname{im} B_0 = \Delta_* \subset \mathcal{H}_0. \tag{4.4.6}$$

Зауважимо що вузол U_0 визначається виключно даними задачі (тобто, ізометрією V з областю визначення $\mathcal{D}$ і областю значень $\mathcal{D}_*$ в просторі $\mathcal{H}_0$) і є одним і тим же для всіх розширень $\mathcal{U}^*$. Має місце наступна

Теорема 4.7. Оператор $\mathcal{U}^*$ в просторі $\mathcal{K}$ є унітарним розширенням V тоді і тільки тоді коли він має вигляд (визначення дано в (2.6.2))

$$\mathcal{U}^* = \mathcal{F}_\ell(U_0, U_1),$$

де $\mathcal{K} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, U_0 універсальний вузол (4.4.6), визначений даними задачі, а U_1 довільний унітарний вузол виду (4.4.2), тобто, довільний вузол з простором входу $\widetilde{\Delta}$ и простором виходу $\widetilde{\Delta}_*$. Більш того, $\mathcal{U}^*$ є *мінімальним унітарним розширенням* V, тобто, найменший підпростір, що приводить $\mathcal{U}^*$ і містить $\mathcal{H}_0$, це весь простір $\mathcal{K} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, *тоді і тільки тоді коли* U_1 *є простим унітарним вузлом*, тобто, найменший підпростір що приводить A_1 і містить $\operatorname{im} B_1 + \operatorname{im} C_1^*$, це весь простір $\mathcal{H}_1$.

Доведення. Зауважимо відразу що оскільки $(2,2)$-блок матриці $U_0 = \left[\begin{smallmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ дорівнює нулю, то в силу Теореми 2.14, з'єднання зі зворотним зв'язком $\mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$ визначено для *будь-якого* вузла (зокрема, для будь-якого унітарного вузла) U_1 виду (4.4.2).

З самого визначення видно, що якщо вузол U_1 побудований з розширення $\mathcal{U}^*$ згідно з формулою (4.4.3), то $\mathcal{U}^*$ є з'єднаням U_0 зі зворотним зв'язком U_1: $\mathcal{U}^* = \mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$. Таким чином, в одну сторону теорему доведено.

Назад, нехай тепер $\mathcal{U}^* = \mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$ з довільним унітарним вузлом U_1 вигляду (4.4.2). Покажемо що $\mathcal{U}^*$ є унітарним розширенням V. За формулою (2.6.4) для $\mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$, вважаючи що $D_0 = 0$, отримуємо

$$\mathcal{F}_\ell(U_0, U_1) \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 + B_0 D_1 C_0 & B_0 C_1 \\ B_1 C_0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix}. \tag{4.4.7}$$

Вважаючи тут $h_0 = d \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}_0$, $h_1 = 0$ і використовуючи формули (4.4.6) для A_0 і C_0, отримуємо

$$\mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)\begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 d \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Vd \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тим самим доведено що $\mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$ є розширенням V.

Більш того, підставляючи явні формули (4.4.6) для A_0, B_0, C_0 в (4.4.7), безпосередньо перевіряється що U_1 відновлюється з $\mathcal{U}^* := \mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$ за формулою (4.4.3) і що $\mathcal{U}^*$ є унітарним тоді і тільки тоді коли U_1 унітарним.

Залишається перевірити що $\mathcal{U}^*$ мінімальне розширення V тоді і тільки тоді коли U_1 простий вузол. Розглянемо мінімальний підпростір що приводить $\mathcal{U}^*$ і містить $\mathcal{H}_0$, тоді його ортогональне доповнення (яке є підпростором в $\mathcal{H}_1$) також приводить $\mathcal{U}^*$. З визначення U_1 видно, що цей підпростір нульовий тоді і тільки тоді коли U_1 простий. □

Отже, раз встановлено що унітарні розширення $\mathcal{U}^*$ ізометрії V є сполуками зі зворотним зв'язком $\mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$, то ми можемо скористатися Теоремами 2.16 і 2.17 для обчислення додатніх і від'ємних ступенів $\mathcal{U}^*$. Позначимо прямий і зворотний допоміжні оператори входу-виходу універсального вузла U_0 через

$$\mathbf{S}^+ = \begin{bmatrix} S_0^+ & S_2^+ \\ S_1^+ & S^+ \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{H}_0 \\ \ell_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \ell_{\mathcal{H}_0}(\mathbb{Z}_+) \\ \ell_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_+) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}^- = \begin{bmatrix} S_0^- & S_1^- \\ S_2^- & S^- \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{H}_0 \\ \ell_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_-) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \ell_{\mathcal{H}_0}(\mathbb{Z}_-) \\ \ell_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_-) \end{bmatrix} \tag{4.4.8}$$

і позначимо прямий і зворотний допоміжні оператори входу-виходу вільного параметра - унітарного вузла U_1 через

$$\mathbf{\Omega}^+ = \begin{bmatrix} \Omega_0^+ & \Omega_2^+ \\ \Omega_1^+ & \Omega^+ \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \ell_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_+) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \ell_{\mathcal{H}_1}(\mathbb{Z}_+) \\ \ell_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Omega}^- = \begin{bmatrix} \Omega_0^- & \Omega_1^- \\ \Omega_2^- & \Omega^- \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \ell_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_-) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \ell_{\mathcal{H}_1}(\mathbb{Z}_-) \\ \ell_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_-) \end{bmatrix} \tag{4.4.9}$$

З перших рядків формул (2.6.22) і (2.6.28) отримуємо що

$$\Lambda_{\mathcal{H}_0}(U) = \begin{bmatrix} \Lambda_{\mathcal{H}_0,-}(U) \\ \Lambda_{\mathcal{H}_0,+}(U) \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{H}_0 \\ \mathcal{H}_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \ell_{\mathcal{H}_0}(\mathbb{Z}_-) \\ \ell_{\mathcal{H}_0}(\mathbb{Z}_+) \end{bmatrix}$$

обчислюються за формулою

$$\Lambda_{\mathcal{H}_0}(U) = \begin{bmatrix} S_0^- + S_1^-(I - \Omega^- S^-)^{-1}\Omega^- S_2^- & S_1^-(I - \Omega^- S^-)^{-1}\Omega_2^- \\ \\ S_0^+ + S_2^+(I - \Omega^+ S^+)^{-1}\Omega^+ S_1^+ & S_2^+(I - \Omega^+ S^+)^{-1}\Omega_1^+ \end{bmatrix}. \qquad (4.4.10)$$

З других рядків формул (2.6.22) і (2.6.28) отримуємо що

$$\Lambda_{\mathcal{H}_1}(U) = \begin{bmatrix} \Lambda_{\mathcal{H}_1,-}(U) \\ \Lambda_{\mathcal{H}_1,+}(U) \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{H}_0 \\ \mathcal{H}_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \ell_{\mathcal{H}_1}(\mathbb{Z}_-) \\ \ell_{\mathcal{H}_1}(\mathbb{Z}_+) \end{bmatrix}$$

обчислюються за формулою

$$\Lambda_{\mathcal{H}_1}(U) = \begin{bmatrix} \Omega_1^-(I - S^-\Omega^-)^{-1}S_2^- & \Omega_0^- + \Omega_1^-(I - S^-\Omega^-)^{-1}S^-\Omega_2^- \\ \\ \Omega_2^+(I - S^+\Omega^+)^{-1}S_1^+ & \Omega_0^+ + \Omega_2^+(I - S^+\Omega^+)^{-1}S^+\Omega_1^+ \end{bmatrix}. \qquad (4.4.11)$$

4.5 Параметризація символів сплітаючих операторів

Розглянемо дані задачі про ліфтинг 4.2.

$$(X, \quad (\mathcal{U}', \mathcal{K}'), \quad (\mathcal{U}'', \mathcal{K}''), \quad \mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{K}', \quad \mathcal{K}''_- \subset \mathcal{K}'') \qquad (4.5.1)$$

Якщо задані $*$ - циклічні підпростори $\mathcal{G}'$ і $\mathcal{G}''$ для $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}''$ відповідно, лінійні оболонки множин

$$\{\mathcal{U}'^n g' \colon n \in \mathbb{Z},\, g' \in \mathcal{G}'\}, \quad \{\mathcal{U}''^n g'' \colon n \in \mathbb{Z},\, g'' \in \mathcal{G}''\}$$

щільні в $\mathcal{K}'$ и в $\mathcal{K}''$ відповідно. Нехай $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{K}', \mathcal{K}'')$ задовольняють умові сплетіння $Y\mathcal{U}' = \mathcal{U}''Y$. Тоді наступне обчислення

$$\langle Y\mathcal{U}'^n g', \mathcal{U}''^m g''\rangle_{\mathcal{K}''} = \langle \mathcal{U}''^{(n-m)} Y g', g''\rangle_{\mathcal{K}''} = \langle i^*_{\mathcal{G}''}\mathcal{U}''^{(n-m)} Y i_{\mathcal{G}'}, g', g''\rangle_{\mathcal{G}''}$$

показує що Y однозначно визначається своїм *символом*

$$\{Y_n = i^*_{\mathcal{G}''}\mathcal{U}''^{*n} Y i_{\mathcal{G}'} = i^*_{\mathcal{G}''} Y \mathcal{U}'^{*n} i_{\mathcal{G}'}\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Отже, в принципі, для опису сплітаючих стиснень Y, які є ліфтингами заданого стиснення $X \colon \mathcal{K}'_+ \to \mathcal{K}''_-$, досить описати їх символи w_Y. Такий опис дається наступною теоремою.

Теорема 4.8. За даними (4.5.1) задачі про ліфтинг 4.2, побудуємо універсальний унітарний вузол $U_0\colon \begin{bmatrix}\mathcal{H}_0\\ \widetilde{\Delta}_*\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\mathcal{H}_0\\ \widetilde{\Delta}\end{bmatrix}$ згідно (4.4.4) або (4.4.5) і (4.4.6) та відповідні допоміжні відображення входу-виходу $\mathbf{S}^+$ і $\mathbf{S}^-$ згідно (4.4.8). Нехай $\mathcal{G}'$ і $\mathcal{G}''$ це задані $\mathcal{U}'$-$*$-циклічний і $\mathcal{U}''$-$*$-циклічний підпростори $\mathcal{K}'$ и $\mathcal{K}''$, відповідно, відносно яких припускаємо що

$$\mathcal{G}' \subset \mathcal{K}'_+, \quad \mathcal{G}'' \subset \mathcal{K}''_-.$$

Нехай $i_{\mathcal{G}'}\colon \mathcal{G}' \to \mathcal{H}_0$ це вкладення $\mathcal{G}'$ в $\mathcal{H}_0$ що є композицією вкладення $\mathcal{G}'$ в $\mathcal{K}'_+$ и вкладення $\mathcal{K}'_+$ в $\mathcal{H}_0$, і, аналогічно, нехай $i_{\mathcal{G}''}$ це вкладення $\mathcal{G}''$ в $\mathcal{H}_0$ що є композицією вкладення $\mathcal{G}''$ в $\mathcal{K}''_-$ и вкладення $\mathcal{K}''_-$ в $\mathcal{H}_0$. Нехай $\mathcal{I}^*_{\mathcal{G}''} = \operatorname{diag}_{n\in\mathbb{Z}}\{i^*_{\mathcal{G}''}\}$ це покоординатна проекція $\ell_{\mathcal{H}_0}(\mathbb{Z})$ на $\ell_{\mathcal{G}''}(\mathbb{Z})$. Тоді $\mathcal{L}(\mathcal{G}', \mathcal{G}'')$-значна двостороння послідовність $w = \{w(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ є символом $w = w_Y$ (відносно $\mathcal{G}'$ і $\mathcal{G}''$) деякого стискуючого ліфтингу Y сплітаючого стиснення X тоді і тільки тоді коли w (як нескінченний вектор-стовпець) може бути представлений у вигляді

$$w_Y = \begin{bmatrix} \mathcal{I}^*_{\mathcal{G}''}S_0^- i_{\mathcal{G}'} \\ \mathcal{I}^*_{\mathcal{G}''}[S_0^+ + S_2^+(I-\Omega^+S^+)^{-1}\Omega^+S_1^+]i_{\mathcal{G}'} \end{bmatrix}, \tag{4.5.2}$$

де $\mathbf{\Omega}^+$ і $\mathbf{\Omega}^-$ відповідні допоміжні відображення входу-виходу (4.4.9) деякого унітарного вузла

$$U_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \widetilde{\Delta} \to \mathcal{H}_1 \oplus \widetilde{\Delta}_*.$$

Зауваження 4.9. Позначимо

$$s_0^+ = \mathcal{I}^*_{\mathcal{G}''}S_0^+ i_{\mathcal{G}'}, \quad s_2^+ = \mathcal{I}^*_{\mathcal{G}''}S_2^+, \quad s_1^+ = S_1^+ i_{\mathcal{G}'}, \quad s^+ = S^+, \tag{4.5.3}$$

тоді формула (4.5.2) набуде вигляду

$$w_Y = \begin{bmatrix} s_0^- \\ s_0^+ + s_2^+(I-\Omega^+s^+)^{-1}\Omega^+s_1^+ \end{bmatrix}. \tag{4.5.4}$$

Коефіцієнти $\begin{bmatrix} s_0^+ & s_2^+ \\ s_1^+ & s^+ \end{bmatrix}$ и s_0^- повністю визначаються даними задачі, а Ω^+ це відображення входу-виходу довільного унітарного вузла U_1 зазначеного вище вигляду. Таким чином, Ω^+ є вільним параметром.

Якщо вважати що $\ell_{\mathcal{G}''}(\mathbb{Z}_+)$ природним чином вкладено в $\ell_{\mathcal{G}''}(\mathbb{Z})$, то формулу (4.5.4) можна переписати в більш компактному вигляді

$$w_Y = s_0 + s_2(I - \omega s)^{-1}\omega s_1, \tag{4.5.5}$$

де

$$\begin{aligned} &(s_0 g')(m) = \begin{cases} (s_0^- g')(m) & \text{для } m < 0 \\ (s_0^+ g')(m) & \text{для } m \geq 0, \end{cases} \\ &s_2 = \iota s_2^+, \text{ де } \iota\colon \ell_{\mathcal{G}''}(\mathbb{Z}_+) \to \ell_{\mathcal{G}''}(\mathbb{Z}) \text{ природне вкладення}, \\ &s = s^+, \quad \omega = \Omega^+, \quad s_1 = s_1^+. \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

Доведення. Теорема 4.6 дозволяє ототожнити стискуючі сплітаючі ліфтинги $\mathcal{U}^*$ і унітарні розширення ізометрії $V\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}_*$ що діє в $\mathcal{H}_0$ і побудованої за даними задачі про ліфтинг, а Теорема 4.7 дає параметризацію таких унітарних розширень у вигляді сполук зі зворотним зв'язком. Більш того, (4.4.10) дозволяє обчислити ступені $\mathcal{U}^* = \mathcal{F}_\ell(U_0, U_1)$ і їх проекції на підпростір $\mathcal{H}_0$. Символ w_Y визначається як

$$w_Y(n) = i_{\mathcal{G}''}^* \mathcal{U}^{*n} i_{\mathcal{G}}.$$

Формула параметризації (4.5.2) слід з (4.4.10) після перевірки того що

$$i_{\mathcal{G}''}^* S_1^-(I - \Omega^- S^-)^{-1} S_2^- i_{\mathcal{G}'} = 0. \tag{4.5.7}$$

Ми покажемо навіть більше, а саме що

$$S_2^- i_{\mathcal{G}'} = 0. \tag{4.5.8}$$

Дійсно, за визначенням $S_2^- h_0 = \{\widetilde{\delta}_*(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_-}$. Це означає що $\widetilde{\delta}_*(n)$ задається наступною рекурсією

$$\begin{aligned} h_0(n) &= A_0^* h_0(n+1), \quad h_0(0) = h_0, \\ \widetilde{\delta}_*(n) &= B_0^* h_0(n) \text{ for } n = -1, -2, \ldots. \end{aligned}$$

Покладемо $m = -n$, тоді

$$\widetilde{\delta}_*(-m) = B_0^* A_0^{*m} h_0.$$

Якщо $h_0 = i_{\mathcal{G}'} g' \in i_{\mathcal{K}'_+} \mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{R}$, то

$$A_0^* h_0 = V^* i_{\mathcal{G}'} g' = i_{\mathcal{K}'_+} \mathcal{U}' g' \in \mathcal{D}_*$$

і, за індукцією, якщо $A_0^{*m} h_0 = i_{\mathcal{K}'_+} k'_+ \in i_{\mathcal{K}'_+} \mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{D}_*$, то

$$A_0^{*m+1} h_0 = A_0^* i_{\mathcal{K}'_+} k'_+ = V^* i_{\mathcal{K}'_+} k'_+ = i_{\mathcal{K}'_+} \mathcal{U}' k'_+ \in i_{\mathcal{K}'_+} \mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{D}_*.$$

Оскільки $\mathcal{D}_*$ ортогонально Δ_* (тобто, образу вкладення $i_{\widetilde{\Delta}_*}$), то, при $m = 1, 2, \ldots$,

$$B_0^* A_0^{*m} i_{\mathcal{G}'} g' = i_{\widetilde{\Delta}_*}^* A_0^{*m} i_{\mathcal{G}'} g' = 0 \text{ for } m = 1, 2, \ldots$$

таким чином (4.5.8) и (4.5.7) доведені. □

Зауваження 4.10. *Зауважимо що при $n \leq 0$ значення символу $w_Y(n)$ однакові для всіх ліфтингів Y. Насправді, при $n \leq 0$, $g' \in \mathcal{G}'$ і $g'' \in \mathcal{G}''$ (де як завжди ми припускаемо що $\mathcal{G}' \subset \mathcal{K}'_+$ и $\mathcal{G}'' \subset \mathcal{K}''_-$), має місце*

$$\langle w_Y(n) g', g'' \rangle_{\mathcal{G}''} = \langle \mathcal{U}''^{*n} Y g', g'' \rangle_{\mathcal{K}''_-} = \langle Y g', \mathcal{U}''^n g'' \rangle_{\mathcal{K}''_-} = \langle X g', \mathcal{U}''^n g'' \rangle_{\mathcal{K}''_-}$$

оскільки $\mathcal{U}''^n g'' \in \mathcal{K}''_-$ для $n \leq 0$ і $g'' \in \mathcal{G}'' \subset \mathcal{K}''_-$.

Розглянемо окремий випадок коли

$$\mathcal{G}' := \mathcal{K}'_+ \text{ а } \mathcal{G}'' = \mathcal{E}'' := \mathcal{K}''_- \ominus \mathcal{U}''^* \mathcal{K}''_-.$$

тоді $\mathcal{E}''$ є блукаючим підпростором для $\mathcal{U}''$ і $\mathcal{K}''$ може бути розкладено в наступну ортогональну суму

$$\mathcal{K}'' = \mathcal{K}''_- \oplus \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}''^n (\mathcal{U}'' \mathcal{E}'').$$

В цьому випадку представлення Фур'є

$$\Phi'' \colon k'' \mapsto \{ i_{\mathcal{E}''}^* \mathcal{U}''^{*n+1} k'' \}_{n \in \mathbb{Z}_+}$$

є частковою ізометрією, що відображає $\mathcal{K}''$ на $\ell^2_{\mathcal{E}''}(\mathbb{Z}_+)$. Ядро Φ'' дорівнює $\mathcal{K}''_-$, а обмеження Φ'' на $\mathcal{K}'' \ominus \mathcal{K}''_- = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}''^n (\mathcal{U}'' \mathcal{E}'')$ є ізометрією.

Довільний ліфтинг Y однозначно визначаєтьcя своїм звуженням $Y|_{\mathcal{K}'_+}$ на підпростір $\mathcal{K}'_+$ за допомогою хвильових операторів; таким чином для того щоб описати все ліфтинги $Y \colon \mathcal{K}' \to \mathcal{K}''$ досить описати *їх звуження* $Y|_{\mathcal{K}'_+} \colon \mathcal{K}'_+ \to \mathcal{K}''$. *Більш того, використовуючи представлення Фур'є* Φ'', *можна ототожнити* $\mathcal{K}'' \ominus \mathcal{K}''_-$ *с* $\ell^2_{\mathcal{E}''}(\mathbb{Z}_+)$, *і, отже,* $\mathcal{K}''$ *з* $\begin{bmatrix} \mathcal{K}''_- \\ \ell^2_{\mathcal{E}''}(\mathbb{Z}_+) \end{bmatrix}$. *Використовуючи це ототожнення можна представити звуження ліфтингу* $Y|_{\mathcal{K}'_+}$ *в матричній формі*

$$Y|_{\mathcal{K}'_+} = \begin{bmatrix} X \\ Y_+ \end{bmatrix} : \mathcal{K}'_+ \to \begin{bmatrix} \mathcal{K}''_- \\ \ell^2_{\mathcal{E}''}(\mathbb{Z}_+) \end{bmatrix}.$$

У цій формі вся інформація про ліфтинг Y *зберігається навіть якщо підпростір* $\mathcal{G}'' := \mathcal{E}'' \subset \mathcal{K}''_-$ *не є* $*$*-циклічним для* $\mathcal{U}''$. *Зауважимо далі що стисливість матриці* $\begin{bmatrix} X \\ Y_+ \end{bmatrix}$ *еквівалентна нерівності*

$$\|Y_+ k'_+\| \leq \|D_X k'_+\|,$$

де $D_X := (I - X^* X)^{1/2}$ *дефектний оператор оператора* X. *Що дозволяє визначити стиснення* Y_{0+} *за формулою*

$$Y_{0+} D_X k'_+ = Y_+ k'_+, \tag{4.5.9}$$

а потім продовжити його за неперервністю до стиснення з $\mathcal{D}_X := \overline{\operatorname{Ran} D_X}$ *в* $\ell^2_{\mathcal{E}''}(\mathbb{Z}_+)$.

Використовуючи параметризацію (4.5.2), *оператор* Y_+ *можна представити у вигляді нескінченної матриці-стовпця*

$$Y_+ = \begin{bmatrix} w_Y(1) \\ w_Y(2) \\ \vdots \\ w_Y(n+1) \\ \vdots \end{bmatrix} = J_+^* \mathcal{I}^*_{\mathcal{E}''} (S_0^+ + S_2^+ (I - \Omega^+ S^+)^{-1} \Omega^+ S_1^+) i_{\mathcal{K}'_+}$$

де J_+ *це оператор зсуву в* $\ell^2_{\mathcal{E}''}(\mathbb{Z}_+)$ *а* Ω^+ *це відображення входу-виходу пов'язане з з вільним параметром - унітарним вузлом* U_1.

Простір $\ell^2_{\mathcal{E}''}(\mathbb{Z}_+)$ *природним чином ототожнюється з простором Харді* $H^2_{\mathcal{E}''}$

$$\{e''(n)\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} e''(n) \zeta^n.$$

При цьому оператор $\widehat{Y}_+\colon \mathcal{K}'_+ \to H^2_{\mathcal{E}''}$ *відповідний* $Y_+\colon \mathcal{K}'_+ \to \ell^2_{\mathcal{E}''}(\mathbb{Z}_+)$ *є множенням на* $\mathcal{L}(\mathcal{K}'_+, \mathcal{E}'')$*-значну функцію*

$$\widehat{Y}_+(\zeta) = \{\zeta^{-1}[\widehat{s}_0^+(\zeta) - \widehat{s}_0^+(0)] + \zeta^{-1}\widehat{s}_2(\zeta)(I - \omega(\zeta)\widehat{s}(\zeta))^{-1}\omega(\zeta)\widehat{s}_1(\zeta)\}i_{\mathcal{K}'_+} \tag{4.5.10}$$

де

$$\widehat{s}_0^+(\zeta) = i^*_{\mathcal{E}''}\widehat{S}_0^+(\zeta)i_{\mathcal{G}'},\quad \widehat{s}_2(\zeta) = i^*_{\mathcal{E}''}\widehat{S}_2^+(\zeta),\quad \widehat{s}_1(\zeta) = \widehat{S}_1^+(\zeta)i_{\mathcal{G}'},\quad \widehat{s}(\zeta) = \widehat{S}^+(\zeta),$$

$$\begin{bmatrix} \widehat{S}_0^+(\zeta) & \widehat{S}_2^+(\zeta) \\ \widehat{S}_1^+(\zeta) & \widehat{S}^+(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - \zeta A_0)^{-1} & \zeta(I - \zeta A_0)^{-1}B_0 \\ C_0(I - \zeta A_0)^{-1} & \zeta C_0(I - \zeta A)^{-1}B_0 \end{bmatrix}$$

частотна версія допоміжного відображення входу-виходу асоційованого з унітарною вузлом U_0 *(І, отже, повністю визначається даними задачі), а*

$$\omega(\zeta) = D_1 + \zeta C_1(I - \zeta A_1)^{-1}B_1$$

характеристична функція вільного параметра - унітарного вузла U_1.

Теперь параметризація звужень ліфтингу може бути переписана у вигляді

$$\widehat{Y}|_{\mathcal{K}'_+} = \begin{bmatrix} X \\ \widehat{Y}_+(\zeta) \end{bmatrix} : \mathcal{K}'_+ \to \begin{bmatrix} \mathcal{K}''_- \\ H^2_{\mathcal{E}''} \end{bmatrix},$$

де $\widehat{Y}_+(\zeta)$ *задаеться формулою* (4.5.10).

Формула (4.5.9) *може бути переписана як* $\widehat{Y}_+(\zeta) = \widehat{Y}_{0+}(\zeta)D_X$. *В термінах функції* $\widehat{Y}_{0+}(\zeta)$ *сплітаюча властивість* (4.1.3) *переписується безпосередньо як*

$$Y_{0+}(\zeta)D_X\mathcal{U}_+ = i^*_{\mathcal{E}''}X + \zeta Y_{0+}(\zeta)D_X. \tag{4.5.11}$$

Тут образ відображення $i^*_{\mathcal{E}''}$ *розуміється як підпростір постійних функцій в* $H^2_{\mathcal{E}''}$. *Ізометрія асоційована з даними задачі про ліфтинг може бути задана в такий спосіб* $\rho\colon \mathcal{F} \to \mathcal{E}'' \oplus \mathcal{D}_X$ *де*

$$\mathcal{F} = \overline{\operatorname{Ran} D_X}\mathcal{U}'_+$$

(спочатку на щільній множині)

$$\rho D_X\mathcal{U}'_+k'_+ = \begin{bmatrix} \rho_1 D_X\mathcal{U}'k'_+ \\ \rho_2 D_X\mathcal{U}'k'_+ \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} i^*_{\mathcal{E}''}Xk'_+ \\ D_Xk'_+ \end{bmatrix}. \tag{4.5.12}$$

Умову сплетіння (4.5.11) *може бути виражено безпосередньо в термінах ізометрії* ρ *як*

$$\rho_1 + \zeta \cdot \widehat{Y}_{0+}(\zeta)\rho_2 = \widehat{Y}_{0+}(\zeta)|_{\mathcal{F}}. \tag{4.5.13}$$

4.6 Універсальне розширення

Теорема 4.8 дає параметризацію всіх символів ліфтингів (і тим самим самих ліфтингів за умови що підпростори $\mathcal{G}'$ і $\mathcal{G}''$ є $*$ - циклічними) за допомогою дробово-лінійного перетворення застосованого до вільного параметру. Вільним параметром є відображення входу-виходу довільного унітарного вузла з фіксованими просторами входу і виходу $\widetilde{\Delta}$ и $\widetilde{\Delta}_*$ або характеристична функція цього вузла: довільна функція класу Шура, діюча між просторами $\widetilde{\Delta}$ і $\widetilde{\Delta}_*$.

Нашою подальшою метою є вивчення властивостей коефіцієнтів цього дробово-лінійного перетворення, а точніше характеризация коефіцієнтів що виникають в контексті задачі про ліфтинг. Як було показано в Розділі 4.2 ці коефіцієнти є елементами спектральної функції унітарного вузла U_0, побудованого за даними задачі (цей вузол ми називаємо *універсальним вузлом задачі*). Таким чином властивості коефіцієнтів визначаються властивостями цього вузла.

Технічно зручніше працювати з унітарною системою розсіювання що відповідає вузлу U_0. Цю систему ми називаємо *універсальною системою задачі* також її ще називають *універсальним або центральним розширенням.* Остання назва пояснюється тим що універсальна система також є розширенням ізометрії задачі, яка відповідає параметру U_1, що має нульову характеристичну функцію ω. Універсальна система виходить з вузла U_0 шляхом прибудови зсуву і козсуву. Оператор універсальної системи задається формулою

$$\mathcal{U}_0^* := \begin{bmatrix} A_0 & 0 & i_{\widetilde{\Delta}_*} i_{\widetilde{\Delta}_*}^{(0)*} \\ i_{\widetilde{\Delta}}^{(-1)} i_{\widetilde{\Delta}}^* & J_-^* & 0 \\ 0 & 0 & J_+^* \end{bmatrix} \text{ в просторі } \mathcal{K}_0 := \begin{bmatrix} \mathcal{H}_0 \\ \ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_-) \\ \ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+) \end{bmatrix}, \tag{4.6.1}$$

де

$$J_-\colon (\cdots, x(-2), x(-1)) \mapsto (\cdots, x(-3), x(-2))$$

зрізаний зсув в $\ell^2_{\mathcal{X}}(\mathbb{Z}_-)$,

$$J_+\colon (x(0), x(1), x(2), \dots) \mapsto (0, x(0), x(1), \dots)$$

зсув в $\ell^2_{\mathcal{X}}(\mathbb{Z}_+)$ (з простором коефіцієнтів $\mathcal{X}$ зрозумілим з контексту),

$$i^{(-1)}_{\widetilde{\Delta}}\colon x \mapsto (\dots, 0, x)$$

природне відображення $\widetilde{\Delta}$ на підпростір $\ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_-)$, що складається з векторів, у яких всі компоненти дорівнюють нулю крім компоненти з індексом $\{-1\}$,

$$i^{(0)}_{\widetilde{\Delta}_*}\colon x \mapsto (x, 0, 0, \dots)$$

природне відображення $\widetilde{\Delta}_*$ на підпростір $\ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+)$, що складається з векторів, у яких всі компоненти дорівнюють нулю крім компоненти з індексом $\{0\}$; $i_{\widetilde{\Delta}}$ і $i_{\widetilde{\Delta}_*}$ природні вкладення просторів $\widetilde{\Delta}$ і $\widetilde{\Delta}_*$ в $\mathcal{H}_0$ (Нагадаємо що спочатку $\widetilde{\Delta}$ и $\widetilde{\Delta}_*$ є підпросторами $\mathcal{H}_0$).

Спряжений оператор має вигляд

$$\mathcal{U}_0 = \begin{bmatrix} A_0^* & i_{\widetilde{\Delta}} i^{(-1)*}_{\widetilde{\Delta}} & 0 \\ 0 & J_- & 0 \\ i^{(0)}_{\widetilde{\Delta}_*} i^*_{\widetilde{\Delta}_*} & 0 & J_+ \end{bmatrix}. \tag{4.6.2}$$

Доповнимо оператор $(\mathcal{U}_0, \mathcal{K}_0)$ вкладеннями

$$i_{\widetilde{\Delta},0}\colon \widetilde{\Delta} \to \mathcal{K}_0, \quad i_{\widetilde{\Delta}_*,0}\colon \widetilde{\Delta}_* \to \mathcal{K}_0, \quad i_{\mathcal{K}''_-,0}\colon \mathcal{K}''_- \to \mathcal{K}_0, \quad i_{\mathcal{K}'_+,0}\colon \mathcal{K}'_+ \to \mathcal{K}_0$$

де

$$i_{\widetilde{\Delta},0} = \begin{bmatrix} 0 \\ i^{(-1)}_{\widetilde{\Delta}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i_{\widetilde{\Delta}_*,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i^{(0)}_{\widetilde{\Delta}_*} \end{bmatrix}, \quad i_{\mathcal{K}''_-,0} = \begin{bmatrix} i_{\mathcal{K}''_- \to \mathcal{H}_0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i_{\mathcal{K}'_+,0} = \begin{bmatrix} i_{\mathcal{K}'_+ \to \mathcal{H}_0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тоді сукупність об'єктів

$$\mathfrak{S}_0 = (\mathcal{U}_0, \quad \begin{bmatrix} i_{\widetilde{\Delta},0} & i_{\widetilde{\Delta}_*,0} & i_{\mathcal{K}''_-,0} & i_{\mathcal{K}'_+,0} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{K}_0, \quad \widetilde{\Delta} \oplus \widetilde{\Delta}_* \oplus \mathcal{K}''_- \oplus \mathcal{K}'_+) \tag{4.6.3}$$

є унітарною системою розсіювання в сенсі визначення Параграфу 2.1 (див. (2.1.1)). Більш того, вкладення $i_{\widetilde{\Delta},0}$, $i_{\widetilde{\Delta}_*,0}$, $i_{\mathcal{K}''_-,0}$, $i_{\mathcal{K}'_+,0}$ допускають однозначне продовження до вкладень

$$\vec{i}_{\widetilde{\Delta},0} \colon \ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{K}_0, \quad \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0} \colon \ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{K}_0, \quad i_{\mathcal{K}'',0} \colon \mathcal{K}'' \to \mathcal{K}_0, \quad i_{\mathcal{K}',0} \colon \mathcal{K}' \to \mathcal{K}_0$$

які задовольняють умовам сплетіння

$$\vec{i}_{\widetilde{\Delta},0} J = \mathcal{U}_0 \vec{i}_{\widetilde{\Delta},0}, \quad \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0} J = \mathcal{U}_0 \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}, \quad i_{\mathcal{K}'',0} \mathcal{U}'' = \mathcal{U}_0 i_{\mathcal{K}'',0}, \quad i_{\mathcal{K}',0} \mathcal{U}' = \mathcal{U}_0 i_{\mathcal{K}',0}$$

де J це двосторонній зсув в просторі $\ell^2_{\mathcal{X}}(\mathbb{Z})$ (простір коефіцієнтів $\mathcal{X}$ залежить від контексту). Тоді сукупність об'єктів

$$\mathfrak{S}_{AA,0} = (\mathcal{U}_0, \quad \vec{i}_{\widetilde{\Delta},0}, \quad \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}, \quad i_{\mathcal{K}'',0}, \quad i_{\mathcal{K}',0}; \quad \mathcal{K}_0) \tag{4.6.4}$$

можна інтерпретувати як *AA-унітарне зчеплення* чотирьох унітарних операторів

$$(J, \ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z})), \quad (J, \ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z})), \quad (\mathcal{U}'', \mathcal{K}''), \quad (\mathcal{U}', \mathcal{K}')$$

що має ряд додаткових властивостей. Деякі з цих властивостей описуються в наступній теоремі.

Теорема 4.11. Унітарна система розсіювання (4.6.3), (4.6.2), пов'язана з задачею про ліфтинг, і відповідне чотирикратне AA-унітарне зчеплення (4.6.2) мають такі властивості:

1. Властивість щільності

$$\operatorname{im} i_{\mathcal{K}',0} + \operatorname{im} i_{\mathcal{K}'',0} \text{ щільно в } \mathcal{K}_0, \tag{4.6.5}$$

$$\begin{aligned} \overline{\operatorname{span}}\{\operatorname{im} i_{\mathcal{K}',0}, \operatorname{im} i_{\mathcal{K}''_-,0}\} &= \mathcal{K}_0 \ominus \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+)), \\ \overline{\operatorname{span}}\{\operatorname{im} i_{\mathcal{K}'_+,0}, \operatorname{im} i_{\mathcal{K}'',0}\} &= \mathcal{K}_0 \ominus \vec{i}_{\widetilde{\Delta},0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_-)), \end{aligned} \tag{4.6.6}$$

і

$$\begin{aligned} &\overline{\operatorname{span}}\{\operatorname{im} i_{\mathcal{K}',0}, \operatorname{im} i_{\mathcal{K}''_-,0}\} \cap \overline{\operatorname{span}}\{\operatorname{im} i_{\mathcal{K}'_+,0}, \operatorname{im} i_{\mathcal{K}'',0}\} \\ &= \overline{\operatorname{span}}\{\operatorname{im} i_{\mathcal{K}'_+,0}, \operatorname{im} i_{\mathcal{K}''_-,0}\}. \end{aligned} \tag{4.6.7}$$

2. Властивість ортогональності

$$\begin{aligned}&\vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+)) \perp \operatorname{im} i_{\mathcal{K}''_-,0}, \quad \vec{i}_{\widetilde{\Delta},0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_-)) \perp \operatorname{im} i_{\mathcal{K}'_+,0},\\ &\vec{i}_{\widetilde{\Delta},0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_-)) \perp \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+))\end{aligned} \tag{4.6.8}$$

і

$$\vec{i}_{\widetilde{\Delta},0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_-)) \perp \operatorname{im} i_{\mathcal{K}''_-,0}, \quad \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+)) \perp \operatorname{im} i_{\mathcal{K}'_+,0}. \tag{4.6.9}$$

3. Збіг підпросторів

$$\mathcal{U}_0^* \operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta}_*,0} = i_{\mathcal{H}_0,0}\Delta_*, \quad \mathcal{U}_0 \operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta},0} = i_{\mathcal{H}_0,0}\Delta. \tag{4.6.10}$$

Доведення. Введемо наступне позначення

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_0 = \operatorname{im} i_{\mathcal{H}_0,0}$$

для образу $\mathcal{H}_0$ при вкладенні в $\mathcal{K}_0$. Властивість (4.6.5) безпосередньо випливає з простоти вузла U_0.

Для перевірки властивості (4.6.6) скористаємося ортогональним розкладанням простору $\mathcal{K}_0$ (см. (4.6.1))

$$\mathcal{K}_0 = \vec{i}_{\widetilde{\Delta},0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_-)) \oplus \operatorname{im} i_{\mathcal{H}_0,0} \oplus \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+)). \tag{4.6.11}$$

З формули для $\mathcal{U}_0^*$ в (4.6.1) випливає що найменшим $\mathcal{U}_0$-інваріантним підпростором $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0+}$, що містить, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0$ є

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0+} = \boldsymbol{\mathcal{H}}_0 \oplus \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+)) = \mathcal{K}_0 \ominus \operatorname{im} \vec{i}_{\widetilde{\Delta},0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_-)).$$

З іншого боку, за побудовою, цей найменший $\mathcal{U}_0$-інваріантний підпростір має вигляд $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0+} = \overline{\operatorname{span}}\{\operatorname{im} i_{\mathcal{K}'',0}, \operatorname{im} i_{\mathcal{K}'_+,0}\}$. Порівнюючи ці дві форми отримуємо першу частину (4.6.6). Друга частина виходить аналогічним чином. Найменшим $\mathcal{U}_0^*$-інваріантним підпростором $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0-}$, що містить $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0$, є $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0-} = \mathcal{K}_0 \ominus \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+))$, який також дорівнює $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0-} = \overline{\operatorname{span}}\{\operatorname{im} i_{\mathcal{K}''_-,0}, \operatorname{im} i_{\mathcal{K}',0}\}$.

Як ми тільки що відзначили

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0+} &= \boldsymbol{\mathcal{H}}_0 \oplus \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+)),\\ \boldsymbol{\mathcal{H}}_{0-} &= \boldsymbol{\mathcal{H}}_0 \oplus \vec{i}_{\widetilde{\Delta},0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_-)).\end{aligned}$$

Оскільки $\vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+))$ і $\vec{i}_{\widetilde{\Delta},0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_-))$ ортогональні одне одному, то $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0+} \cap \boldsymbol{\mathcal{H}}_{0-} = \boldsymbol{\mathcal{H}}_0$. Звідки випливає (4.6.7).

Властивості ортогональності (4.6.8) і (4.6.9) слідують з (4.6.11). В дійсності має місце більш сильна умова ортогональності ніж (4.6.9), а саме

$$\operatorname{im} \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0} \perp \operatorname{im} i_{\mathcal{K}',0}, \quad \operatorname{im} \vec{i}_{\widetilde{\Delta},0} \perp \operatorname{im} i_{\mathcal{K}'',0}. \tag{4.6.12}$$

Для того щоб в цьому переконатися зауважимо що $\mathcal{K}'_+$ інваріантно відносно $\mathcal{U}'$ і $i_{\mathcal{K}'_+,0}\mathcal{U}' = \mathcal{U}_0 i_{\mathcal{K}'_+,0}$. Отже, $\operatorname{im} i_{\mathcal{K}'_+,0}$ інваріантно відносно $\mathcal{U}_0$ і перша властивість ортогональності в (4.6.9) тягне що $\mathcal{U}_0^{*n}\vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+))$ ортогонально $\operatorname{im} i_{\mathcal{K}'_+,0}$. Оскільки підпростір

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_0^{*n}\vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \vec{i}_{\widetilde{\Delta},0}(J^{*n}\ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+))$$

є щільним в $\operatorname{im} \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}$, робимо висновок що $\operatorname{im} \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}$ є ортогональним $\operatorname{im} i_{\mathcal{K}'_+,0}$. Оскільки $\operatorname{im} \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}$ приводить $\mathcal{U}_0$, робимо висновок що дійсно $\operatorname{im} \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}$ є ортогональним найменшому підпростору що приводить $\mathcal{U}_0$ і який містить $\operatorname{im} i_{\mathcal{K}'_+,0}$, тобто, підпростору $\operatorname{im} i_{\mathcal{K}',0}$. Тим самим першу властивість (4.6.12) доведено. Друга властивість ортогональності в (4.6.12) випливає аналогічним чином з того що $\operatorname{im} i_{\mathcal{K}''_-}$ є інваріантним відносно $\mathcal{U}''^*$.

Збіг підпросторів (4.6.10) випливає з визначень, зокрема, з визначення $\mathcal{U}_0$ (4.4.4). □

Зауваження 4.12. *Властивості ортогональності* (4.6.8) *і* (4.6.9) *можуть бути записані в більш компактній формі*

$$i^*_{\mathcal{K}''_-,0}\mathcal{U}_0^{*n} i_{\widetilde{\Delta}_*,0} = 0 \text{ для } n \leq 0, \tag{4.6.13}$$

$$i^*_{\widetilde{\Delta},0}\mathcal{U}_0^{*n} i_{\mathcal{K}'_+,0} = 0 \text{ для } n < 0, \tag{4.6.14}$$

$$i^*_{\widetilde{\Delta},0}\mathcal{U}_0^{*n} i_{\widetilde{\Delta}_*,0} = 0 \text{ для } n < 0, \tag{4.6.15}$$

і

$$i^*_{\widetilde{\Delta},0}\mathcal{U}_0^{*n} i_{\mathcal{K}''_-,0} = 0 \text{ для } n \geq 0, \tag{4.6.16}$$

$$i^*_{\widetilde{\Delta}_*,0}\mathcal{U}_0^{*n} i_{\mathcal{K}'_+,0} = 0 \text{ для } n < 0. \tag{4.6.17}$$

Оскільки мають місце більш сильні властивості (4.6.12), *то рівності* (4.6.16) *і* (4.6.17) *виконуються при всіх цілих* $n \in \mathbb{Z}$*:*

$$i^*_{\widetilde{\Delta},0}\mathcal{U}_0^{*n} i_{\mathcal{K}''_-,0} = 0 \text{ для всіх } n \in \mathbb{Z}, \tag{4.6.18}$$

$$i^*_{\widetilde{\Delta}_*,0}\mathcal{U}_0^{*n} i_{\mathcal{K}'_+,0} = 0 \text{ для всіх } n \in \mathbb{Z}. \tag{4.6.19}$$

Одним з наших основних результатів є те що властивості (4.6.5), (4.6.6), (4.6.8), (4.6.9) и (4.6.10) характеризують універсальне розширення $\mathcal{U}_0$ пов'язане з задачею про ліфтинг. Нижче запропоновано дві версії цього результату.

Теорема 4.13. Нехай задані унітарні оператори $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$ и $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$. Припустимо що $\mathcal{K}''_- \subset \mathcal{K}''$ і $\mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{K}'$ є інваріантними відносно $\mathcal{U}''^*$ и $\mathcal{U}'$, відповідно, при цьому зазначені підпростори є $*$ - циклічними для зазначених операторів. Нехай задані два Ґільбертових простори $\widetilde{\Delta}$ і $\widetilde{\Delta}_*$ і нехай задана унітарна система розсіювання вигляду

$$\mathfrak{S}_0 = (\mathcal{U}_0, \quad \begin{bmatrix} i_{\widetilde{\Delta},0} & i_{\widetilde{\Delta}_*,0} & i_{\mathcal{K}''_-,0} & i_{\mathcal{K}'_+,0} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{K}_0, \quad \widetilde{\Delta} \oplus \widetilde{\Delta}_* \oplus \mathcal{K}''_- \oplus \mathcal{K}'_+)$$

де $i_{\widetilde{\Delta},0}$, $i_{\widetilde{\Delta}_*,0}$, $i_{\mathcal{K}''_-,0}$ и $i_{\mathcal{K}'_+,0}$ є ізометричними вкладеннями $\widetilde{\Delta}$, $\widetilde{\Delta}_*$, $\mathcal{K}''_-$ і $\mathcal{K}'_+$ в $\mathcal{K}_0$. Припустимо що ця система розширюється до АА-унітарного зчеплення

$$\mathfrak{S}_{AA,0} = \left(\mathcal{U}_0, \quad \vec{i}_{\widetilde{\Delta},0}, \quad \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}, \quad i_{\mathcal{K}'',0}, \quad i_{\mathcal{K}',0}; \quad \mathcal{K}_0\right)$$

чотирьох унітарних операторів

$$(J, \ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z})), \quad (J, \ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z})), \quad (\mathcal{U}'', \mathcal{K}''), \quad (\mathcal{U}', \mathcal{K}')$$

в наступному сенсі

$$\begin{gathered} i_{\widetilde{\Delta},0} = \vec{i}_{\widetilde{\Delta},0} \circ i^{(-1)}_{\widetilde{\Delta}}, \quad i_{\widetilde{\Delta}_*,0} = \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0} \circ i^{(0)}_{\widetilde{\Delta}_*}, \\ i_{\mathcal{K}'',0}|_{\mathcal{K}''_-} = i_{\mathcal{K}''_-,0}, \qquad i_{\mathcal{K}',0}|_{\mathcal{K}'_+} = i_{\mathcal{K}'_+}. \end{gathered} \tag{4.6.20}$$

Визначимо підпростори $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_*$, Δ і Δ_* простору $\mathcal{K}_0$

$$\mathcal{H}_0 = \operatorname{clos} \operatorname{im} \begin{bmatrix} i_{\mathcal{K}''_-,0} & i_{\mathcal{K}'_+,0} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} = \operatorname{clos}\left(\operatorname{im} i_{\mathcal{K}''_-,0} + i_{\mathcal{K}'_+,0}(\mathcal{U}'\mathcal{K}'_+)\right), \tag{4.6.21}$$

$$\mathcal{D}_* = \operatorname{clos}\left(i_{\mathcal{K}''_-,0}(\mathcal{U}''^*\mathcal{K}''_-) + \operatorname{im} i_{\mathcal{K}'_+,0}\right), \quad \Delta = \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{D}, \quad \Delta_* = \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{D}_*$$

і позначимо через $i_{\mathcal{H}_0,0}\colon \mathcal{H}_0 \to \mathcal{K}_0$ природне вкладення. Тепер припустимо що виконується одна з наступних двох груп додаткових умов:

1. (4.6.5), (4.6.8), (4.6.9) і (4.6.10)

   або

2. (4.6.6), (4.6.7), (4.6.8), (4.6.9) і ослаблена форма умови (4.6.10)

$$\operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta}_*,0} \perp \operatorname{im} \mathcal{U} i_{\widetilde{\Delta},0}. \tag{4.6.22}$$

Тоді $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_{AA,0}$ є, відповідно, системою розсіювання і чотириразовим AA-унітарним зчепленням пов'язаними з універсальним розширенням $\mathcal{U}_0^*$ задачі про ліфтинг з деяким сплітаючим стисненням $X : \mathcal{K}'_+ \to \mathcal{K}''_-$.

Зауваження 4.14. *З першої версії Теореми 4.13 слід що якщо виконуються умови* (4.6.5), (4.6.8), (4.6.9) *і* (4.6.10), *то також виконуються умови* (4.6.12), (4.6.6) *і* (4.6.7). *З другої версії слід що якщо виконуються умови* (4.6.6), (4.6.7), (4.6.8), (4.6.9) *і* (4.6.22), *то також виконуються умови* (4.6.12), (4.6.5) *і* (4.6.10).

Нижче будемо використовувати такі позначення

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_0 = \operatorname{im} i_{\mathcal{H}_0},\ \boldsymbol{\mathcal{D}} = i_{\mathcal{H}_0,0}(\mathcal{D}),\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_* = i_{\mathcal{H}_0,0}(\mathcal{D}_*),\ \boldsymbol{\Delta} = i_{\mathcal{H}_0}(\Delta),\ \boldsymbol{\Delta}_* = i_{\mathcal{H}_0,0}(\Delta_*)$$

для підпросторів визначених в (4.6.21) і які розуміються як підпростори $\mathcal{K}_0$, а не $\mathcal{H}_0$, а також такі позначення

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_- = \vec{i}_{\widetilde{\Delta},0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_-)) \subset \mathcal{K}_0, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}_{*+} = \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+)) \subset \mathcal{K}_0.$$

Доведення 1-ої версії: Припущення (4.6.8) і (4.6.9) тягнуть що наступні три підпростори $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0, \boldsymbol{\mathcal{G}}_-, \boldsymbol{\mathcal{G}}_{*+}$ попарно ортогональні. Отже, їх лінійна оболонка $\mathcal{K}_{00}$ допускає ортогональне розкладання

$$\mathcal{K}_{00} = \boldsymbol{\mathcal{H}}_0 \oplus \boldsymbol{\mathcal{G}}_- \oplus \boldsymbol{\mathcal{G}}_{*+}. \tag{4.6.23}$$

За визначенням, простір $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0$ допускає ортогональне розкладання двома способами

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_0 = \boldsymbol{\mathcal{D}} \oplus \boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\mathcal{D}}_* \oplus \boldsymbol{\Delta}_*. \tag{4.6.24}$$

В силу сплітаючих співвідношень

$$\mathcal{U}_0 i_{\mathcal{K}'',0} = i_{\mathcal{K}'',0}\mathcal{U}'', \quad \mathcal{U}_0 i_{\mathcal{K}'} = i_{\mathcal{K}'}\mathcal{U}'$$

маємо

$$\mathcal{U}_0^*(\boldsymbol{\mathcal{D}}) = \boldsymbol{\mathcal{D}}_* \tag{4.6.25}$$

і крім того отримуємо альтернативний опис підпросторів $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ і $\boldsymbol{\mathcal{D}}_*$:

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \{h \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_0 \colon \mathcal{U}_0^* h \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_0\}, \quad \boldsymbol{\mathcal{D}}_* = \{h_* \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_0 \colon \mathcal{U}_0 h_* \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_0\}. \tag{4.6.26}$$

В силу припущення (4.6.10) маємо

$$\mathcal{U}_0^* \left(\operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta}_*,0}\right) = \boldsymbol{\Delta}_*, \quad \mathcal{U}_0^* \boldsymbol{\Delta} = \operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta},0} \tag{4.6.27}$$

і, в силу сплітаючих співвідношень $\mathcal{U}_0^* \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0} = \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0} J^*$ и $\mathcal{U}_0^* \vec{i}_{\widetilde{\Delta},0} = \vec{i}_{\widetilde{\Delta},0} J^*$, маємо

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_- = \mathcal{U}_0^* \boldsymbol{\mathcal{G}}_- \oplus \operatorname{im} \vec{i}_{\widetilde{\Delta},0}, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}_{*+} = \operatorname{im} \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0} \oplus \mathcal{U}_0 \boldsymbol{\mathcal{G}}_{*+}. \tag{4.6.28}$$

З ортогональних розкладів (4.6.23) і (4.6.24) просторів $\mathcal{K}_0$ і $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0$ з урахуванням (4.6.25), (4.6.27) і (4.6.28) видно що підпростір $\mathcal{K}_{00}$ приводить оператор $\mathcal{U}_0$. Виходячи з припущення (4.6.5) робимо висновок що $\mathcal{K}_{00} = \mathcal{K}_0$, тим самим розкладання (4.6.23) має місце для $\mathcal{K}_0$, тобто, маємо розкладання

$$\mathcal{K}_0 = \boldsymbol{\mathcal{G}}_- \oplus \boldsymbol{\mathcal{H}}_0 \oplus \boldsymbol{\mathcal{G}}_{*+}. \tag{4.6.29}$$

Співвідношення (4.6.25) дозволяє визначити ізометрію V в просторі $\mathcal{H}_0$ з областю визначення $\mathcal{D}$ і областю значень cD_* наступним чином

$$Vd = d_*, \text{ якщо } \mathcal{U}_0^* i_{\mathcal{H}_0,0} d = i_{\mathcal{H}_0,0} d_*, \text{ де } d \in \mathcal{D},\ d_* \in \mathcal{D}_*.$$

Тепер безпосередньо перевіряється що $\mathcal{U}_0^*$ є універсальним розширенням ізометрії V. Далі перевіряється що V є ізометрією побудованою за даними Задачі про ліфтинг

$$X = i^*_{\mathcal{K}''_-,0} i_{\mathcal{K}'_+,0}, \quad (\mathcal{U}'', \mathcal{K}''), \quad (\mathcal{U}', \mathcal{K}'), \quad \mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{K}', \quad \mathcal{K}''_- \subset \mathcal{K}''.$$

Тим самим доведення Теореми 4.13 завершено. □

Доведення 2-ої версії: В силу припущень (4.6.8) і (4.6.9) як і при доведенні 1-ої версії, будуємо підпростір $\mathcal{K}_{00}$ (4.6.23). Визначимо $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0$ згідно

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 := \mathcal{K}_0 \ominus [\boldsymbol{\mathcal{G}}_- \oplus \boldsymbol{\mathcal{G}}_{*+}],$$

тоді за визначенням отримаємо

$$\mathcal{K}_0 = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 \oplus \boldsymbol{\mathcal{G}}_- \oplus \boldsymbol{\mathcal{G}}_{*+}. \tag{4.6.30}$$

Для стислості введемо тимчасові позначення

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0-} = \overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{im}\, i_{\mathcal{K}',0},\, \mathrm{im}\, i_{\mathcal{K}''_-,0}\}, \tag{4.6.31}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0+} = \overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{im}\, i_{\mathcal{K}'_+,0},\, \mathrm{im}\, i_{\mathcal{K}'',0}\}. \tag{4.6.32}$$

Відзначимо що $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0-}$ є найменшим $\mathcal{U}_0^*$ - інваріантним підпростором простору $\mathcal{K}_0$ що містить $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0$ і що $\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0+}$ є найменшим $\mathcal{U}_0$ -інваріантним підпростором простору $\mathcal{K}_0$ що містить $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0$. Тепер Припущення (4.6.6) може бути записано у вигляді

$$\mathcal{K}_0 = \boldsymbol{\mathcal{H}}_{0-} \oplus \boldsymbol{\mathcal{G}}_{*+}, \tag{4.6.33}$$

$$\mathcal{K}_0 = \boldsymbol{\mathcal{H}}_{0+} \oplus \boldsymbol{\mathcal{G}}_{-}. \tag{4.6.34}$$

Співвідношення (4.6.33) і (4.6.34) спільно з (4.6.30) дають

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0-} = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 \oplus \boldsymbol{\mathcal{G}}_-, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}_{0+} = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 \oplus \boldsymbol{\mathcal{G}}_{*+}.$$

Оскільки $\boldsymbol{\mathcal{G}}_-$ є ортогональним $\boldsymbol{\mathcal{G}}_{*+}$ в $\mathcal{K}_0$, то

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0-} \cap \boldsymbol{\mathcal{H}}_{0+} = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0.$$

Застосовуючи тепер (4.6.7), робимо висновок що $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0 = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0$ і, отже, також $\mathcal{K}_{00} = \mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_0$ допускає ортогональне розкладання (4.6.29).

З третьої умови ортогональності (4.6.8) з урахуванням (4.6.22) бачимо що

$$\mathcal{U}_0^* \,\mathrm{im}\, i_{\widetilde{\Delta}_*,0} \perp \boldsymbol{\mathcal{G}}_-, \quad \mathcal{U}\,\mathrm{im}\, i_{\widetilde{\Delta},0} \perp \boldsymbol{\mathcal{G}}_{*+}.$$

Але крім того

$$\mathcal{U}^* \,\mathrm{im}\, i_{\widetilde{\Delta}_*,0} \perp \boldsymbol{\mathcal{G}}_{*+}, \quad \mathcal{U}\,\mathrm{im}\, i_{\widetilde{\Delta},0} \perp \boldsymbol{\mathcal{G}}_-.$$

Отже,

$$\mathcal{U}^* \operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta}_*,0} \perp \boldsymbol{\mathcal{G}}_- \oplus \boldsymbol{\mathcal{G}}_{*+}, \quad \mathcal{U} \operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta},0} \perp \boldsymbol{\mathcal{G}}_- \oplus \boldsymbol{\mathcal{G}}_{*+}.$$

З ортогонального розкладання простору $\mathcal{K}_0$ (4.6.11) ми робимо висновок що

$$\mathcal{U}_0^* \operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta}_*,0} \subset \boldsymbol{\mathcal{H}}_0, \quad \mathcal{U}_0 \operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta},0} \subset \boldsymbol{\mathcal{H}}_0. \tag{4.6.35}$$

Також як і при доведенні 1-ої версії, ми бачимо що підпростори $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ і $\boldsymbol{\mathcal{D}}_*$ допускають описи у вигляді (4.6.26), а $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0$ допускає два ортогональних розкладання (4.6.24). З цих спостережень, використовуючи розкладання (4.6.29) простору $\mathcal{K}_0$ і той факт що $\mathcal{U}_0$ є унітарною оператором в просторі $\mathcal{K}_{00}$, ми бачимо що включення (4.6.35) в дійсності тягнуть

$$\mathcal{U}_0^* \operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta}_*,0} = \boldsymbol{\Delta}_*, \quad \mathcal{U}_0 \operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta},0} = \boldsymbol{\Delta},$$

тобто, має місце (4.6.10). З (4.6.10) з урахуванням вже доведеного розкладання (4.6.29) для простору $\mathcal{K}_0$ ми бачимо що також має місце і (4.6.5).

Тепер з уже доведеної 1-ої версії цієї теореми випливає, що унітарна система розсіювання $\mathfrak{S}_0$ і чотириразове АА-унітарне зчеплення $\mathfrak{S}_{AA,0}$ є універсальними об'єктами пов'язаними з задачею про ліфтинг. Терему доведено. ☐

Теорема 4.8 дає параметризацію множини всіх символів w_Y (відносно пари масштабних підпросторів $\mathcal{G}'' \subset \mathcal{K}''_-$ и $\mathcal{G}' \subset \mathcal{K}'_+$) за допомогою дробово-лінійного перетворення (4.5.4)

$$w_Y = s_0 + s_1(I - \omega s)^{-1} \omega s_2$$

де вільним параметром $\omega \colon \ell_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_+) \to \ell_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+)$ є відображення входу-виходу довільного унітарного вузла з фіксованими просторами входу і виходу, а коефіцієнти цього дробово-лінійного перетворення (див. (4.5.6))

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_2 \\ s_1 & s \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{G}' \\ \ell_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \ell_{\mathcal{G}''}(\mathbb{Z}) \\ \ell_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}) \end{bmatrix}$$

повністю визначаються даними Задачі про Ліфтинг. Зауважимо що якщо елементи простору $\ell_{\mathcal{G}''\oplus\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z})$ записані у вигляді нескінченних векторів-стовпців, то перший стовпець матриці коефіцієнтів

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} : \mathcal{G}' \to \begin{bmatrix} \ell_{\mathcal{G}''}(\mathbb{Z}) \\ \ell_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}) \end{bmatrix} =: \ell_{\mathcal{G}''\oplus\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z})$$

теж можна записати як нескінченну матрицю-стовпець

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = \mathrm{col}_{n\in\mathbb{Z}} \begin{bmatrix} s_0(n) \\ s_1(n) \end{bmatrix}.$$

Якщо також елементи простору $\ell_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+)$ представлені у вигляді нескінченних векторів-стовпців, то другий стовпець матриці коефіцієнтів

$$\begin{bmatrix} s_2 \\ s \end{bmatrix} : \ell_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+) \to \ell_{\mathcal{G}''\oplus\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z})$$

може бути записаний у вигляді нескінченної Тьопліцевої матриці:

$$\begin{bmatrix} s_2 \\ s \end{bmatrix}_{n,m} = \begin{bmatrix} s_2 \\ s \end{bmatrix}_{n-m,0} =: \begin{bmatrix} s_2(n-m) \\ s(n-m) \end{bmatrix} \text{ для } n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.6.36}$$

Визначимо *символ матриці коефіцієнтів* як послідовність операторів

$$\left\{ \begin{bmatrix} s_0(n) & s_2(n) \\ s_1(n) & s(n) \end{bmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{4.6.37}$$

Наступна теорема показує як символ матриці коефіцієнтів виражається безпосередньо в термінах універсального розширення $\mathcal{U}_0$. Введемо наступні позначення

$$i_{\mathcal{G}',0} \colon \mathcal{G}' \to \mathcal{K}_0, \quad i_{\mathcal{G}'',0} \colon \mathcal{G}'' \to \mathcal{K}_0$$

для вкладення $\mathcal{G}'$ в $\mathcal{K}_0$ яке є суперпозицією $i_{\mathcal{G}',0} = i_{\mathcal{H}_0,0} i_{\mathcal{G}'}$ вкладення $\mathcal{G}'$ в $\mathcal{H}_0$ з подальшим вкладенням $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{K}_0$, і аналогічно $i_{\mathcal{G}'',0} = i_{\mathcal{H}_0,0} i_{\mathcal{G}''}$.

Теорема 4.15. Символ $\left\{ \left[\begin{smallmatrix} s_0(n) & s_2(n) \\ s_1(n) & s(n) \end{smallmatrix}\right] \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ матриці коефіцієнтів задачі про ліфтинг обчислюється в термінах універсального розширення $\mathcal{U}_0$ (див. (4.4.4) або (4.4.5) і (4.4.6)) за такою формулою

$$\begin{bmatrix} s_0(n) & s_2(n) \\ s_1(n) & s(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^*_{\mathcal{G}'',0} \\ i^*_{\widetilde{\Delta},0} \mathcal{U}^*_0 \end{bmatrix} \mathcal{U}^{*n}_0 \begin{bmatrix} i_{\mathcal{G}',0} & i_{\widetilde{\Delta}_*,0} \end{bmatrix}. \tag{4.6.38}$$

Більш того,

$$s_2(m) = 0 \text{ для } m \le 0, \quad s_1(m) = 0 \text{ and } s(m) = 0 \text{ для } m < 0, \tag{4.6.39}$$

а також

$$s(0) = 0. \tag{4.6.40}$$

Доведення. Спочатку перевіримо формулу (4.6.38) при $n < 0$. В силу визначень (4.5.3), (4.5.6), при $n < 0$ маємо

$$s_0(n) = i^*_{\mathcal{G}'',0}\mathcal{U}^{*n} i_{\mathcal{G}',0}, \quad s_1(n) = 0, \quad s_2(n) = 0, \quad s(n) = 0.$$

Перша формула відповідає рівності верхніх лівих блоків в (4.6.38). Так як за умовою $\mathcal{G}'' \subset \mathcal{K}''_-$ і $\mathcal{G}' \subset \mathcal{K}'_+$, то в силу (4.6.13), (4.6.14) и (4.6.15) отримуємо рівність інших відповідних блоків при $n < 0$.

Далі перевіримо (4.6.38) при $n \ge 0$. Для цього, в силу Тьопліцевої структури (4.6.36), досить показати що при $n \ge 0$

$$\begin{bmatrix} s_0^+ & s_2^+ \\ s_1^+ & s^+ \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} g' \\ i_{\widetilde{\Delta}_*,0}\widetilde{\delta}_* \end{bmatrix} \mapsto \left\{ \begin{bmatrix} i^*_{\mathcal{G}'',0} \\ i^*_{\widetilde{\Delta},0}\mathcal{U}_0^{*n} \end{bmatrix} \mathcal{U}_0^* \begin{bmatrix} i_{\mathcal{G}',0} & i_{\widetilde{\Delta}_*,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g' \\ i_{\widetilde{\Delta}_*,0}\widetilde{\delta}_* \end{bmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \tag{4.6.41}$$

За визначенням (4.5.3) маємо

$$\begin{bmatrix} s_0^+ & s_2^+ \\ s_1^+ & s^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{\mathcal{G}''} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0^+ & S_2^+ \\ S_1^+ & S^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\mathcal{G}'} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Враховуючи (4.6.41), ми бачимо що досить перевірити

$$\begin{bmatrix} S_0^+ & S_2^+ i_{\widetilde{\Delta}_*^{(0)}} \\ S_1^+ & S^+ i_{\widetilde{\Delta}_*^{(0)}} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} h_0 \\ \widetilde{\delta}_* \end{bmatrix} \mapsto \left\{ \begin{bmatrix} i^*_{\mathcal{H}_0,0} \\ i^*_{\widetilde{\Delta},0}\mathcal{U}_0^* \end{bmatrix} \mathcal{U}_0^{*n} \begin{bmatrix} i_{\mathcal{G}',0} & i_{\widetilde{\Delta}_*,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ \widetilde{\delta}_* \end{bmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{Z}_+}. \tag{4.6.42}$$

За визначенням $\left[\begin{smallmatrix} S_0^+ & S_2^+ \\ S_1^+ & S^+ \end{smallmatrix}\right]$ як допоміжного відображення входу-виходу (при прямій течії часу) пов'язаного з унітарною вузлом U_0, маємо

$$\begin{bmatrix} S_0^+ & S_2^+ i_{\widetilde{\Delta}_*^{(0)}} \\ S_1^+ & S^+ i_{\widetilde{\Delta}_*^{(0)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ \widetilde{\delta}_* \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} h_0(n) \\ \widetilde{\delta}(n) \end{bmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{Z}_+}.$$

Іншими словами, при $n \ge 0$

$$h_0(0) = h_0, \quad \begin{bmatrix} h_0(1) \\ \widetilde{\delta}(0) \end{bmatrix} = U_0 \begin{bmatrix} h_0 \\ \widetilde{\delta}_* \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} h_0(n+1) \\ \widetilde{\delta}(n) \end{bmatrix} = U_0 \begin{bmatrix} h_0(n) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.6.43}$$

Покажемо що при заданих $h_0 \in \mathcal{H}_0$ и $\widetilde{\delta}_* \in \widetilde{\Delta}_*$ розв'язок (4.6.43) має вигляд

$$\begin{bmatrix} h_0(n) \\ \widetilde{\delta}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^*_{\mathcal{H}_0,0} \\ i^*_{\widetilde{\Delta},0}\mathcal{U}^*_0 \end{bmatrix} \mathcal{U}^{*n}_0 k, \text{ где } k = i_{\mathcal{H}_0,0}h_0 + i_{\widetilde{\Delta}_*,0}\widetilde{\delta}_*. \tag{4.6.44}$$

Тим самим (4.6.42), а отже і (4.6.38) буде доведено.

Перша рівність в (4.6.43) випливає з ортогональності $\operatorname{im} i_{\mathcal{H}_{0,0}}$ и $\operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta}_*,0}$ в $\mathcal{K}_0$: by (4.6.44),

$$h_0(0) = i^*_{\mathcal{H}_0,0}\left(i_{\mathcal{H}_0,0}h_0 + i_{\widetilde{\Delta}_*,0}\widetilde{\delta}_*\right) = h_0.$$

Для подальшої перевірки зручно переписати (4.6.44) у вигляді ($n \geq 0$)

$$\begin{bmatrix} h_0(n+1) \\ \widetilde{\delta}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^*_{\mathcal{H}_0,0} \\ i^*_{\widetilde{\Delta},0} \end{bmatrix} \mathcal{U}^{*n+1}_0 \left(i_{\mathcal{H}_0,0}h_0 + i_{\widetilde{\Delta}_*,0}\widetilde{\delta}_*\right). \tag{4.6.45}$$

Друга рівність в (4.6.43) випливає з формули

$$U_0 = \begin{bmatrix} i^*_{\mathcal{H}_0,0} \\ i^*_{\widetilde{\Delta},0} \end{bmatrix} \mathcal{U}^*_0 \begin{bmatrix} i_{\mathcal{H}_0,0} & i_{\widetilde{\Delta}_*,0} \end{bmatrix}, \tag{4.6.46}$$

що пов'язує U_0 і $\mathcal{U}^*_0$. Остання формула випливає з формули (4.6.1) для $\mathcal{U}^*_0$.

Третя рівність в (4.6.43) також випливає з (4.6.46) за індукцією. Для $n \geq 1$ припустимо що $h_0(n) = i^*_{\mathcal{H}_0,0}\mathcal{U}^{*n}_0 k$ где $k = i_{\mathcal{H}_0,0}h_0 + i_{\widetilde{\Delta}_*,0}\delta_*$ і обчислимо

$$\begin{aligned} U_0 \begin{bmatrix} h_0(n) \\ 0 \end{bmatrix} &= U_0 \begin{bmatrix} i^*_{\mathcal{H}_0,0}\mathcal{U}^{*n}_0 k \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i^*_{\mathcal{H}_0,0} \\ i^*_{\widetilde{\Delta},0} \end{bmatrix} \mathcal{U}^*_0 i_{\mathcal{H}_0,0} i^*_{\mathcal{H}_0,0}\mathcal{U}^{*n}_0 k \text{ (згідно (4.6.46))} \\ &= \begin{bmatrix} i^*_{\mathcal{H}_0,0} \\ i^*_{\widetilde{\Delta},0} \end{bmatrix} \mathcal{U}^*_0 P_{\mathcal{H}_0}\mathcal{U}^{*n}_0 k \end{aligned} \tag{4.6.47}$$

де $P_{\mathcal{H}_0}$ ортогональна проекція $\mathcal{K}_0$ на $\operatorname{im} i_{\mathcal{H}_0,0}$. Таким чином для перевірки третьої рівності в (4.6.43) залишається показати що проектор $P_{\mathcal{H}_0}$ можна відкинути в останньому виразі (4.6.47). З цією метою скористаємося тепер ортогональним розкладанням

$$\mathcal{K}_0 = \vec{i}_{\widetilde{\Delta},0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_-)) \oplus \operatorname{im} i_{\mathcal{H}_0,0} \oplus \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}_*,0}(\mathbb{Z}_+)).$$

Зауважимо що $\mathcal{U}_0^{*n}k \perp \vec{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+))$, тобто,

$$\mathcal{U}_0^{*n}k \in \vec{i}_{\widetilde{\Delta},0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_-)) \oplus \operatorname{im} i_{\mathcal{H}_0,0} \tag{4.6.48}$$

при $n > 0$. Більш того, можна перевірити що

$$\mathcal{U}_0^{*}\vec{i}_{\widetilde{\Delta},0}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_-)) \perp \operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta},0} \oplus \operatorname{im} i_{\mathcal{H}_0,0}. \tag{4.6.49}$$

Зі співвідношень (4.6.48) і (4.6.49) випливає що дійсно проектор $P_{\mathcal{H}_0}$ можна вилучити в (4.6.47). Тим самим третє твердження в (4.6.43) доведено.

Вважаючи тепер $n = 0$ в (4.6.38) і в (4.6.13), робимо висновок що $s_2(0) = 0$. Нарешті рівність $s(0) = i^*_{\widetilde{\Delta},0}\mathcal{U}_0 i_{\widetilde{\Delta}_*,0} = 0$, тобто, властивість ортогональності

$$\operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta},0} \perp \mathcal{U}_0^* \operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta}_*,0}$$

слід безпосередньо з визначення $\mathcal{U}_0^*$ (4.6.1). □

4.7 Спектральна міра та модель Хеллінгера універсального розширення

Далі в цій главі будемо припускати що підпростори $\mathcal{G}' \subset \mathcal{K}'_+$ і $\mathcal{G}'' \subset \mathcal{K}''_-$ обрані таким чином

$$\mathcal{G}' = \mathcal{K}'_+, \quad \mathcal{G}'' = \mathcal{K}''_-.$$

З даними задачі про ліфтинг

$$X, \quad (\mathcal{U}', \mathcal{K}'), \quad (\mathcal{U}'', \mathcal{K}''), \quad \mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{K}', \quad \mathcal{K}''_- \subset \mathcal{K}'' \tag{4.7.1}$$

пов'язане універсальне розширення $\mathcal{U}_0$ і унітарна система розсіювання $\mathfrak{S}_0$ (4.6.3). Визначимо *універсальну спектральну міру* $\widehat{\Sigma}$ для даних задачі про ліфтинг (4.7.1), дотримуючись Розділу 2.1 (див. (2.1.5)) з невеликою модифікацією, як

$$\widehat{\Sigma}_0(dt) = \begin{bmatrix} i^*_{\widetilde{\Delta},0}\mathcal{U}_0^* \\ i^*_{\widetilde{\Delta}_*,0} \\ i^*_{\mathcal{K}''_-,0} \\ i^*_{\mathcal{K}'_+,0} \end{bmatrix} E_{\mathcal{U}_0}(dt) \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 i_{\widetilde{\Delta},0} & i_{\widetilde{\Delta}_*,0} & i_{\mathcal{K}''_-,0} & i_{\mathcal{K}'_+,0} \end{bmatrix}, \tag{4.7.2}$$

де $E_{\mathcal{U}_0}(dt)$ спектральна міра унітарного оператора $\mathcal{U}_0$. У наступній теоремі доводяться деякі властивості універсальної спектральної міри $\widehat{\Sigma}_0(dt)$.

Теорема 4.16. Універсальна спектральна міра $\widehat{\Sigma}_0(dt)$, що пов'язана з даними задачі про ліфтинг (4.7.1) і яка визначена в (4.7.2) має такі властивості:

1. $\widehat{\Sigma}_0$ є невід'ємною операторною мірою наступного окремого вигляду

$$\widehat{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} mI_{\widetilde{\Delta}} & \widehat{s} & 0 & \widehat{s}_1 \\ \widehat{s}^* & mI_{\widetilde{\Delta}_*} & \widehat{s}_2^* & 0 \\ 0 & \widehat{s}_2 & \sigma'' & \widehat{s}_0 \\ \widehat{s}_1^* & 0 & \widehat{s}_0^* & \sigma' \end{bmatrix}, \tag{4.7.3}$$

   де m міра Лебега на одиничному колі $\mathbb{T}$.

2. Символи $\left\{ \left[\begin{smallmatrix} s_0(m) & s_2(m) \\ s_1(m) & s(m) \end{smallmatrix} \right] \right\}_{m \in \mathbb{Z}}$ коефіцієнтів дробово-лінійного перетворювання (див. Теорему 4.8) є моментами відповідних мір $\widehat{s}_0$, $\widehat{s}_2$, $\widehat{s}_1$ и $\widehat{s}$, що входять до $\widehat{\Sigma}_0$ як блоки:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s_0(m) & s_2(m) \\ s_1(m) & s(m) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} i^*_{\mathcal{K}''_-,0} \\ i^*_{\widetilde{\Delta},0}\mathcal{U}_0^* \end{bmatrix} \mathcal{U}_0^{*m} \begin{bmatrix} i_{\widetilde{\Delta}_*,0} & i_{\mathcal{K}'_+,0} \end{bmatrix} \\ &= \int_{\mathbb{T}} t^{-m} \begin{bmatrix} \widehat{s}_0 & \widehat{s}_2 \\ \widehat{s}_1 & \widehat{s} \end{bmatrix} (dt). \end{aligned} \tag{4.7.4}$$

3. Міри $\widehat{s}$, $\widehat{s}_2$, $\widehat{s}_1$ є аналітичними, тобто,

$$\int_{\mathbb{T}} t^{-m} \widehat{s}(dt) = 0, \quad m \le 0, \tag{4.7.5}$$

   і

$$\int_{\mathbb{T}} t^{-m} \widehat{s}_1(dt) = 0, \quad m < 0, \quad \int_{\mathbb{T}} t^{-m} \widehat{s}_2(dt) = 0, \quad m \le 0. \tag{4.7.6}$$

Доведення. В силу спектральної теореми, моменти міри $\widehat{\Sigma}_0$ дорівнюють

$$\widehat{\Sigma}_{0,m} = \begin{bmatrix} i^*_{\widetilde{\Delta},0}\mathcal{U}_0^* \\ i^*_{\widetilde{\Delta}_*,0} \\ i^*_{\mathcal{K}''_-,0} \\ i^*_{\mathcal{K}'_+,0} \end{bmatrix} \mathcal{U}_0^{*m} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 i_{\widetilde{\Delta},0} & i_{\widetilde{\Delta}_*,0} & i_{\mathcal{K}''_-,0} & i^*_{\mathcal{K}'_+,0} \end{bmatrix}.$$

Зокрема,

$$[\widehat{\Sigma}_{0,m}]_{1,1} = i^*_{\widetilde{\Delta},0}\mathcal{U}_0^{*m} i_{\widetilde{\Delta},0} = \delta_{m,0} I_{\widetilde{\Delta}}$$

(де $\delta_{m,0}$ дельта символ Кронекера: $\delta_{m,0} = 1$, якщо $m = 0$, і $\delta_{m,0} = 0$, якщо $m \neq 0$) оскільки $\operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta},0}$ є блукаючим підпростором для $\mathcal{U}_0$. Звідки робимо висновок що $(1,1)$-блок $[\widehat{\Sigma}_0]_{1,1}$ міри $\widehat{\Sigma}_0$ дорівнює $mI_{\widetilde{\Delta}}$, де m міра Лебега. Аналогічно, $(2,2)$-блок міри $[\widehat{\Sigma}_0]_{2,2}$ дорівнює $mI_{\widetilde{\Delta}_*}$.

З формули (4.6.38) бачимо що символи коефіцієнтів (4.6.37) (нагадаємо, що розглядаємо випадок $\mathcal{G}' = \mathcal{K}'_+$ и $\mathcal{G}'' = \mathcal{K}''_-$) дорівнюють

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} s_0(m) & s_2(m) \\ s_1(m) & s(m) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} i^*_{\mathcal{K}''_-} \\ i^*_{\widetilde{\Delta},0}\mathcal{U}_0^* \end{bmatrix} \mathcal{U}_0^{*m} \begin{bmatrix} i_{\mathcal{K}'_+} & i_{\widetilde{\Delta}_*,0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left[\widehat{\Sigma}_{0,m}\right]_{3,4} & \left[\widehat{\Sigma}_{0,m}\right]_{3,2} \\ \left[\widehat{\Sigma}_{0,m}\right]_{1,4} & \left[\widehat{\Sigma}_{0,m}\right]_{1,2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \widehat{s}_{0,m} & \widehat{s}_{2,m} \\ \widehat{s}_{1,m} & \widehat{s}_m \end{bmatrix} \\
&= \int_{\mathbb{T}} t^{-m} \begin{bmatrix} \widehat{s}_0 & \widehat{s}_2 \\ \widehat{s}_1 & \widehat{s} \end{bmatrix} (dt).
\end{aligned}$$

Звідки отримуємо (4.7.4). Властивості аналітичності (4.7.6) і (4.7.5) тепер отримуємо як слідства (4.6.39) і (4.6.40) символів коефіцієнтів, або, що те ж саме, як наслідок співвідношень ортогональності (4.6.8) і того факту що $\mathcal{U}_0^* \operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta}_*,0} \perp \operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta},0}$.

Залишається перевірити що $[\widehat{\Sigma}_0]_{1,3} = 0$ and $[\widehat{\Sigma}_0]_{2,4} = 0$. У термінах моментів це означає, що

$$i^*_{\widetilde{\Delta},0}\mathcal{U}_0^{*m+1} i_{\mathcal{K}''_-,0} = 0 \text{ і } i^*_{\widetilde{\Delta}_*,0}\mathcal{U}_0^{*m} i_{\mathcal{K}'_+} = 0 \text{ для всіх } m \in \mathbb{Z}.$$

Але ці рівності як раз є посиленими версіями (4.6.18) і (4.6.19) властивостей ортогональності (4.6.9) в Теоремі 4.11. Терему 4.16 доведено. □

Скористаємося універсальною спектральною мірою для побудови моделі Хеллінгера універсального розширення $\mathcal{U}_0$, асоційованоїсистеми розсіювання $\mathfrak{S}_0$ і чотириразового АА-унітарного зчеплення $\mathfrak{S}_{0,AA}$. Розглянемо універсальну систему розсіювання

$$\left(\mathcal{U}_0,\quad \begin{bmatrix}\mathcal{U}_0 i_{\widetilde{\Delta},0} & i_{\widetilde{\Delta}_*,0} & i_{\mathcal{K}''_-,0} & i_{\mathcal{K}'_+,0}\end{bmatrix};\quad \mathcal{K}_0,\quad \widetilde{\Delta}\oplus\widetilde{\Delta}_*\oplus\mathcal{K}''_-\oplus\mathcal{K}'_+\right).$$

Оскільки $\operatorname{im}\begin{bmatrix}i_{\mathcal{K}''_-,0} & i_{\mathcal{K}'_+,0}\end{bmatrix}$ є $*$ - циклічним для $\mathcal{U}_0$, то

$$\operatorname{im}\begin{bmatrix}\mathcal{U}_0 i_{\widetilde{\Delta},0} & i_{\widetilde{\Delta}_*,0} & i_{\mathcal{K}''_-,0} & i_{\mathcal{K}'_+,0}\end{bmatrix}$$

тим більше є $*$ - циклічним для $\mathcal{U}_0$, а тоді оператор представлення Фур'є (див. (2.3.2))

$$\mathcal{F}_0\colon k_0 \mapsto \begin{bmatrix} i^*_{\widetilde{\Delta},0}\mathcal{U}_0^* \\ i^*_{\widetilde{\Delta}_*,0} \\ i^*_{\mathcal{K}''_-,0} \\ i^*_{\mathcal{K}'_+,0}\end{bmatrix} E_{\mathcal{U}_0}(dt)k_0$$

відображає $\mathcal{K}_0$ унітарно на простір Хеллінгера $\mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}$ (див. Розділи 2.2 і 2.3) В просторі $\mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}$ розглянемо наступні підпростори:

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}'' := \mathcal{F}_0(\operatorname{im} i_{\mathcal{K}'',0}) = \widehat{\Sigma}_0\begin{bmatrix}0\\0\\\sigma''^{[-1]}\mathcal{L}^{\sigma''}\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mathcal{K}}' := \mathcal{F}_0(\operatorname{im} i_{\mathcal{K}',0}) = \widehat{\Sigma}_0\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\sigma'^{[-1]}\mathcal{L}^{\sigma'}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}''_- := \mathcal{F}_0(\operatorname{im} i_{\mathcal{K}''_-,0}) = \widehat{\Sigma}_0\begin{bmatrix}0\\0\\\mathcal{K}''_-\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mathcal{K}}'_+ := \mathcal{F}_0(\operatorname{im} \mathcal{K}'_+) = \widehat{\Sigma}_0\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\mathcal{K}'_+\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_0 := \mathcal{F}_0(\operatorname{im} i_{\mathcal{H}_0,0}) = \operatorname{clos}\widehat{\Sigma}_0\begin{bmatrix}0\\0\\\mathcal{K}''_-\\\mathcal{K}'_+\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mathcal{D}} := \mathcal{F}_0(i_{\mathcal{H}_0,0}(\mathcal{D})) = \operatorname{clos}\widehat{\Sigma}_0\begin{bmatrix}0\\0\\\mathcal{K}''_-\\\mathcal{U}'\mathcal{K}'_+\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_* := \mathcal{F}_0(i_{\mathcal{H}_0,0}(\mathcal{D}_*)) = \operatorname{clos}\widehat{\Sigma}_0\begin{bmatrix}0\\0\\\mathcal{U}''^*\mathcal{K}''_-\\\mathcal{K}'_+\end{bmatrix}, \tag{4.7.7}$$

$$\widetilde{\mathbf{\Delta}}_*^{(0)} := \mathcal{F}_0(\operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta}_*,0}) = \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ \widetilde{\Delta}_* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{\Delta}}^{(-1)} := \mathcal{F}_0(\operatorname{im} i_{\widetilde{\Delta},0}) = t^{-1}\widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} \widetilde{\Delta} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

У термінах цих підпросторів властивості (4.6.10) набирають такий вигляд

$$\begin{aligned} \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} \widetilde{\Delta} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \operatorname{clos} \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{K}''_- \\ \mathcal{K}'_+ \end{bmatrix} \ominus \operatorname{clos} \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{K}''_- \\ \mathcal{U}'\mathcal{K}'_+ \end{bmatrix}, \\ t^{-1}\widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ \widetilde{\Delta}_* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \operatorname{clos} \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{K}''_- \\ \mathcal{K}'_+ \end{bmatrix} \ominus \operatorname{clos} \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{U}''^*\mathcal{K}''_- \\ \mathcal{K}'_+ \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.7.8}$$

і як наслідок (4.6.11) маємо

$$\mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0} = \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} H^{2\perp}_{\widetilde{\Delta}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \oplus \operatorname{clos} \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{K}''_- \\ \mathcal{K}'_+ \end{bmatrix} \oplus \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ H^2_{\widetilde{\Delta}_*} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.7.9}$$

Крім того отримуємо наступний результат, що узагальнює класичну теорему Адамяна, Арова і Крейна [2].

Теорема 4.17. Якщо $\widehat{\Sigma}_0$ універсальна спектральна міра задачі про ліфтинг, яка задана в (4.7.2), то

$$\begin{bmatrix} mI_{\widetilde{\Delta}} & \widehat{s} \\ \widehat{s}^{\,*} & mI_{\widetilde{\Delta}_*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widehat{s}_1 \\ \widehat{s}_2^{\,*} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'' & \widehat{s}_0 \\ \widehat{s}_0^{\,*} & \sigma' \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} 0 & \widehat{s}_2 \\ \widehat{s}_1^{\,*} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.7.10}$$

в сенсі Шурівського доповнення мір (див. Розділ 2.4)

Доведення. Дано що $\operatorname{im} i_{\mathcal{K}''_-} + \operatorname{im} i_{\mathcal{K}'_+}$ є $*$-циклічним для $\mathcal{U}_0$ в $\mathcal{K}_0$. Переносячи цю умову в простір $\mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}$ за допомогою (унітарного) представлення Фурь'є $\mathcal{F}_0$, отримуємо що $\boldsymbol{\mathcal{K}}'_+ + \boldsymbol{\mathcal{K}}''_-$ $*$-слабо щільно в $\mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}$. В силу твердження

(2.4.1) Теореми 2.9 ми бачимо що це еквівалентно рівності нулю Шурівського доповнення блоку $\left[\begin{smallmatrix}\sigma'' & \widehat{s}_0\\ \widehat{s}_0^* & \sigma'\end{smallmatrix}\right]$ в матричній мірі $\widehat{\Sigma}_0$, тобто, виконанню умови (4.7.10). □

Наступний результат стверджує зворотне: властивості (4.7.6), (4.7.5), (4.7.8) і (4.7.10) характеризують універсальні спектральні міри задачі про ліфтинг.

Теорема 4.18. Припустимо що задані унітарні оператори $(\mathcal{U}'', \mathcal{K}'')$ и $(\mathcal{U}', \mathcal{K}')$ і $*$-циклічні підпростори $\mathcal{K}''_- \subset \mathcal{K}''$ і $\mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{K}'$, інваріантні відповідно відносно $\mathcal{U}''^*$ і $\mathcal{U}'$. Припустимо що $\widetilde{\Delta}_*$ і $\widetilde{\Delta}$ Ґільбертові простори і що задана $\mathcal{L}(\widetilde{\Delta} \oplus \widetilde{\Delta}_* \oplus \mathcal{K}''_- \oplus \mathcal{K}'_+)$-значна міра $\widehat{\Sigma}_0$ виду (4.7.3) що має наступні властивості:

1. Міри σ'' і σ' задані

$$\sigma''(dt) = i^*_{\mathcal{K}''_- \to \mathcal{K}''} E_{\mathcal{U}''}(dt) i_{\mathcal{K}''_- \to \mathcal{K}''}, \quad \sigma'(dt) = i^*_{\mathcal{K}'_+ \to \mathcal{K}'} E_{\mathcal{U}'}(dt) i_{\mathcal{K}'_+ \to \mathcal{K}'} \tag{4.7.11}$$

   де $i_{\mathcal{K}'' \to \mathcal{K}''}$ і $i_{\mathcal{K}'_+ \to \mathcal{K}'}$ вкладення $\mathcal{K}''_-$ в $\mathcal{K}''$ і $\mathcal{K}'_+$ в $\mathcal{K}'$, відповідно, і де $E_{\mathcal{U}''}$ і $E_{\mathcal{U}'}$ спектральні міри $\mathcal{U}''$ і $\mathcal{U}'$ відповідно.

2. Виконується умова рівності нулю Шурівського доповнення (4.7.10).

3. Міри $\widehat{s}$, $\widehat{s}_1$ і $\widehat{s}_2$ є аналітичними в сенсі (4.7.5) и (4.7.6).

4. Виконуються умови (4.7.8).

Тоді існують дані задачі про ліфтинг такі що $(M_t, \mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0})$ є відповідним універсальним розширенням, сукупність

$$\mathfrak{S}_0 = (M_t, \quad M_{\widehat{\Sigma}_0}; \quad \mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}, \quad \widetilde{\Delta} \oplus \widetilde{\Delta}_* \oplus \mathcal{K}''_- \oplus \mathcal{K}'_+) \tag{4.7.12}$$

є асоційованою універсальною системою розсіювання, і

$$\begin{bmatrix} s_0(m) & s_2(m) \\ s_1(m) & s(m) \end{bmatrix} := \int_{\mathbb{T}} t^{-m} \begin{bmatrix} \widehat{s}_0 & \widehat{s}_2 \\ \widehat{s}_1 & \widehat{s} \end{bmatrix} (dt)$$

є символом коефіцієнтів дробово-лінійного перетворення що описує всі розв'язки задачі. Тут M_t оператор множення на незалежну змінну t в просторі $\mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}$ і

$$M_{\widehat{\Sigma}_0} \colon \widetilde{\Delta} \oplus \widetilde{\Delta}_* \oplus \mathcal{K}''_- \oplus \mathcal{K}'_+ \to \mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}$$

вкладення в модельний простір $\mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}$ за допомогою множення зліва на міру $\widehat{\Sigma}_0$.

Доведення. Розглянемо підпростори простору $\mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}$ задані в правих частинах формул (4.7.7) і будемо використовувати для них ті ж позначення $\boldsymbol{\mathcal{K}}''$, $\boldsymbol{\mathcal{K}}'$, $\boldsymbol{\mathcal{K}}''_-$, $\boldsymbol{\mathcal{K}}'_+$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0$, $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, $\boldsymbol{\mathcal{D}}_*$, $\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_*^{(0)}$, $\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_*^{(0)}$, $\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}^{(-1)}$. Застосуємо першу версію Теореми 4.13 до модельної системі розсіювання $\mathfrak{S}_0$. Переконаємося спочатку що систему розсіювання $\mathfrak{S}_0$ (4.7.12) можна розширити до чотириразового АА-унітарного зчеплення

$$\mathfrak{S}_{AA,0} = (M_t, \quad \vec{\mathbf{i}}_{\widetilde{\Delta}}, \quad \vec{\mathbf{i}}_{\widetilde{\Delta}_*}, \quad \mathbf{i}_{\mathcal{K}''}, \quad \mathbf{i}_{\mathcal{K}'}; \quad \mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}) \tag{4.7.13}$$

унітарних операторів

$$(J, \ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z})), \quad (J, \ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z})), \quad (\mathcal{U}'', \mathcal{K}''), \quad (\mathcal{U}', \mathcal{K}') \tag{4.7.14}$$

що потрібно для застосування Теореми 4.13. Для $\vec{\delta} \in \ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z})$ виду $\vec{\delta} = J^n i^{(0)}_{\widetilde{\Delta}} \widetilde{\delta}$ при деякому $n \in \mathbb{Z}$ и $\widetilde{\delta} \in \widetilde{\Delta}$, визначимо $\vec{\mathbf{i}}_{\widetilde{\Delta}} \vec{\delta} = t^n \widehat{\Sigma}_0(dt) \begin{bmatrix} \widetilde{\delta} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Оскільки $(1,1)$-блок матриці $\widehat{\Sigma}_0$ дорівнює $m \cdot I_{\widetilde{\Delta}}$, отримуємо що $\vec{\mathbf{i}}_{\widetilde{\Delta}}$ продовжується до ізометричного відображення $\ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z})$ в простір $\mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}$, при цьому $\mathbf{i}_{\widetilde{\Delta}} := t^{-1} \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{i}}_{\widetilde{\Delta}} \circ i^{(-1)}_{\widetilde{\Delta}} \colon \widetilde{\Delta} \to \widetilde{\boldsymbol{\Delta}}^{(-1)}$. Аналогічно, формула $\vec{\mathbf{i}}_{\widetilde{\Delta}_*} \colon J^n i^{(0)}_{\widetilde{\Delta}_*} \widetilde{\delta}_* \mapsto t^n \widehat{\Sigma}_0(dt) \begin{bmatrix} 0 \\ \widetilde{\delta}_* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ продовжується до ізометричного вкладення $\ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z})$ в $\mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}$ і при цьому $\mathbf{i}_{\widetilde{\Delta}_*} := \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{i}}_{\widetilde{\Delta}_*} \circ i^{(0)}_{\widetilde{\Delta}_*} \colon \widetilde{\Delta}_* \to \widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_*^{(0)}$. Більш того, визначення (4.7.11) σ' и σ'' тягне що $M_t M_{\sigma'} = M_{\sigma'} \mathcal{U}'$ в $\mathcal{L}(\mathcal{K}'_+, \mathcal{L}^{\sigma'})$ и $M_{t^{-1}} M_{\sigma''} = M_{\sigma''} \mathcal{U}''^*$ в $\mathcal{L}(\mathcal{K}''_-, \mathcal{L}^{\sigma''})$. Звідси випливає що ми можемо скористатися конструкцією хвильових операторів для побудови ізометричних вкладень

$$\mathbf{i}_{\mathcal{K}'} \colon \mathcal{K}' \to \mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}, \quad \mathbf{i}_{\mathcal{K}''} \colon \mathcal{K}'' \to \mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}$$

які продовжують задані вкладення

$$\mathbf{i}_{\mathcal{K}'}|_{\mathcal{K}'_+} = \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{\mathcal{K}'_+} \end{bmatrix} =: \mathbf{i}_{\mathcal{K}'_+} : \mathcal{K}'_+ \to \boldsymbol{\mathcal{K}}'_+, \quad \mathbf{i}_{\mathcal{K}''}|_{\mathcal{K}''_-} = \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{\mathcal{K}''_-} \\ 0 \end{bmatrix} =: \mathbf{i}_{\mathcal{K}''_-} : \mathcal{K}''_- \to \boldsymbol{\mathcal{K}}''_-.$$

Зі структури хвильових операторів бачимо що

$$\operatorname{im} \mathbf{i}_{\mathcal{K}''} = \boldsymbol{\mathcal{K}}'', \quad \operatorname{im} \mathbf{i}_{\mathcal{K}'} = \boldsymbol{\mathcal{K}}'.$$

Відзначимо також що

$$\vec{\mathbf{i}}_{\widetilde{\Delta}}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}_-)) = \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} H^{2\perp}_{\widetilde{\Delta}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{i}}_{\widetilde{\Delta}_*}(\ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}_+)) = \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ H^2_{\widetilde{\Delta}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким чином (4.7.13) є чотирикразовим АА-унітарною зчепленням унітарних операторів (4.7.14), яке розширює систему розсіювання $\mathfrak{S}_0$ що і потрібно для застосування Теореми 4.13.

Для того щоб застосувати першу версію Теореми 4.13 залишається перевірити умови (4.6.5), (4.6.8), (4.6.9) і (4.6.10). Як ми бачили при доведенні Теореми 4.17, рівність нулю Шурівського доповнення (4.7.10) є модельною версією умови (4.6.5). Властивості аналітичності (4.7.6) тягнуть

$$\boldsymbol{\mathcal{K}}'_- \perp \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} H^{2\perp}_{\widetilde{\Delta}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}'_+ \perp \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ H^2_{\widetilde{\Delta}_*} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{K}}''_- \perp \boldsymbol{\mathcal{K}}'_+$$

де $\boldsymbol{\mathcal{K}}'_+$ и $\boldsymbol{\mathcal{K}}''_-$ визначені в (4.7.7); але ці умови є модельними версіями властивостей ортогональності (4.6.8). Рівність нулю блоків $(1,3)$ и $(2,4)$ матриці $\widehat{\Sigma}_0$ є еквівалентною умові ортогональності

$$\widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} L^2_{\widetilde{\Delta}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \perp \boldsymbol{\mathcal{K}}'', \quad \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ L^2_{\widetilde{\Delta}_*} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \perp \boldsymbol{\mathcal{K}}'$$

яка є модельним еквівалентом умови (4.6.9) і навіть в більш сильній формі (4.6.12). Як ми вже зазначили, припущення (4.7.8) є модельним еквівалентом умови (4.6.10).

За першою версією Теореми 4.13 робимо висновок що $(M_t, \mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0})$ є універсальним розширенням, $\mathfrak{S}_0$ є універсальною системою розсіювання, а $\mathfrak{S}_{AA,0}$ є універсальним АА-унітарним зчепленням асоційованими з даними задачі про ліфтинг

$$X = \mathbf{i}^*_{\mathcal{K}''}\mathbf{i}_{\mathcal{K}'} = \widehat{s}_0(\mathbb{T}), \quad (\mathcal{U}'', \mathcal{K}''), \quad (\mathcal{U}', \mathcal{K}'), \quad \mathcal{K}''_- \subset \mathcal{K}'', \quad \mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{K}'. \quad (4.7.15)$$

На завершення, застосовуючи формулу (4.6.38) в даному контексті, отримуємо формулу для символів коефіцієнтів дробово-лінійного перетворення

$$\begin{bmatrix} s_0(m) & s_2(m) \\ s_1(m) & s(m) \end{bmatrix} = \int_{\mathbb{T}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t^{-m} \widehat{\Sigma}_0(dt) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \int_{\mathbb{T}} t^{-m} \begin{bmatrix} \widehat{s}_0 & \widehat{s}_2 \\ \widehat{s}_1 & \widehat{s} \end{bmatrix} (dt).$$

Теорему 4.18 доведено. □

Зауваження 4.19. Відзначимо що умови 1.-3. Теореми 4.18 гарантують що символи які надаються формулою (4.5.5) є розв'язками задачі про ліфтинг з наступними даними: міри σ' і σ'' визначають унітарні оператори $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}''$ (точніше їх моделі), також задані підпростори $\mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{K}'$ и $\mathcal{K}''_- \subset \mathcal{K}''$, сплітаються оператор X визначається по s_0 формулою (4.7.15). Умова 4. гарантує що ця формула творить *всі* розв'язки задачі про ліфтинг з цими даними. Таким чином, клас матриць описаний в Теоремі 4.18 можна розглядати як аналог (в контексті більш загальної задачі про ліфтинг) класу регулярних по Арову γ -твірних матриць-функцій (пов'язаних із задачею Нехарі, яка є окремим випадком задачі про ліфтинг).

Теорема 4.13 є безкоординатною версією цього ж результату: в ній характеризуються чотирикратні АА-унітарні зчеплення, які виникають як універсальні в задачі про ліфтинг. Ще одна версія результату такого типу дана нижче в Теоремі 4.24.

На закінчення цього розділу наведемо кілька зауважень щодо абсолютної неперервності мір $\widehat{s}_1$, $\widehat{s}_2$ і $\widehat{s}$, що входять в універсальні спектральні міри, що виникають в контексті задачі про ліфтинг; ці результати узагальнюють аналогічні результати отримані Адамяном, Аровим і Крейном в [2] для задачі Нехарі.

Необхідні відомості щодо абсолютної неперервності операторних мір у

Ґільбертовому просторі детально викладені в Розділі 3 роботи [27] (Див., зокрема, визначення (3.1), (3.5), (3.23), (3.24) і формули (3.6), (3.26) цієї роботи) і в [29].

Теорема 4.20. Нехай $\widehat{\Sigma}_0$ це додатна сильна операторна міра виду (4.7.3). Тоді міра $\widehat{s}$ абсолютно неперервна відносно міри Лебега в рівномірному сенсі, а міри $\widehat{s}_1$ і $\widehat{s}_2{}^*$ абсолютно неперервні відносно міри Лебега в сильному сенсі. [1]

Доведення. Додатність міри $\widehat{\Sigma}_0$ (див. (4.7.3)) тягне що для будь-якої борелівської множини $B \subseteq \mathbb{T}$ виконується нерівність

$$\|\widehat{s}(B)\| \leq m(B),$$

що в свою чергу тягне абсолютну неперервність $\widehat{s}$ відносно міри Лебега m в рівномірній операторній топології. З додатності $\widehat{\Sigma}_0$ також слід нерівність

$$\|\widehat{s}_1(B)k'_+\| \leq \sqrt{m(B)}\,\sqrt{\langle\sigma'(B)k'_+, k'_+\rangle}.$$

Тоді, за визначенням варіації векторної міри (див. Формулу (3.1) Розділу 3 в [27]),

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}_{\widehat{s}_1 k'_+}(B) &= \sup_{B=\cup B_j} \sum_j \|\widehat{s}_1 k'_+(B_j)\| \\
&\leq \sup_{B=\cup B_j} \sum_j \sqrt{m(B_j)}\,\sqrt{\langle\sigma'(B_j)k'_+, k'_+\rangle} \\
&\leq \sup_{B=\cup B_j} \sqrt{\sum_j m(B_j)}\,\sqrt{\sum_j \langle\sigma'(B_j)k'_+, k'_+\rangle} \\
&= \sqrt{m(B)}\,\sqrt{\langle\sigma'(B)k'_+, k'_+\rangle}.
\end{aligned}$$

Звідси випливає абсолютна неперервність варіації векторної міри $\widehat{s}_1 k'_+$ відносно міри Лебега, що, за визначенням, означає абсолютну неперервність самої векторної міри $\widehat{s}_1 k'_+$ відносно міри Лебега. Абсолютна неперервність векторної міри $\widehat{s}_2{}^* k''_-$ відносно міри Лебега доводиться аналогічно. □

---

[1] Зауважимо що міри $\widehat{s}$ і $\widehat{s}\,^*$ є рівномірними, а міри $\widehat{s}_1$, $\widehat{s}_2$ і їх спряжені, взагалі кажучи, є тільки сильними, як і $\widehat{\Sigma}_0$ в цілому.

Зауваження 4.21. Зауважимо що абсолютну неперервність мір $\widehat{s}$, $\widehat{s}_1$ и $\widehat{s}_2$ можна вивести і іншим способом. Якщо скористатися умовою (4.7.6) аналітичності мір $\widehat{s}_1$, $\widehat{s}_2$ і $\widehat{s}$, то принаймні їх слабка абсолютна неперервність відносно міри Лебега випливає з теореми братів Ріс (див., наприклад, [56, стр. 47]).

Використовуючи специфіку нашої ситуації в повній мірі, припустимо що $\widehat{\Sigma}_0$ є універсальною спектральної мірою деякої задачі про ліфтинг, тобто, що виконуються умови Теореми 4.18. Використовуючи співвідношення (4.6.38) між $\widehat{\Sigma}_0$ і відповідним символом спільно з явною формулою для символу (див. (4.5.3) і (4.5.6)) отримаємо що [2]

$$\widehat{s}(dt) = s(t) \cdot m(dt), \quad \widehat{s}_1(t) = s_1(t) \cdot m(dt), \quad \widehat{s}_2(dt)^* = s_2(t)^* \cdot m(dt)$$

де $s(t)$ граничне значення функції класу Шура

$$s(\zeta) = \zeta C_0(I - \zeta A_0)^{-1} B_0,$$

а $s_1(t)$ и $s_2(t)^*$ граничні значення сильних операторно-значних H^2_+ и H^2_- функцій відповідно

$$\begin{aligned} s_1(\zeta) &= C_0(I - \zeta A_0)^{-1} i_{\mathcal{K}'_+ \to \mathcal{H}_0} \\ s_2^*(\zeta) &= \overline{\zeta} B_0^*(I - \overline{\zeta} A_0^*)^{-1} i_{\mathcal{K}''_- \to \mathcal{H}_0}, \end{aligned}$$

тут $U_0 = \left[\begin{smallmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ це універсальний вузол, побудований за даними задачі про ліфтинг (див. (4.4.4), (4.4.5), (4.4.6)).

---

[2] Перша рівність розуміється в рівномірному сенсі, а друга і третя в сильному.

4.8 Характеризація та додаткові властивості коефіцієнтів параметризуючої формули

Припустимо що $\widehat{\Sigma}_0$ це універсальна спектральна міра (4.7.2) деякої задачі про ліфтинг. Як ми бачили, підпростір

$$\widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{K}''_-[t] \\ \mathcal{K}'_+[t^{-1}] \end{bmatrix} \tag{4.8.1}$$

є щільним в $\mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}$. Нагадаємо шо $\mathcal{K}''_-[t]$ це простір аналітичних тригонометричних поліномів з коефіцієнтами в $\mathcal{K}''_-$, а $\mathcal{K}'_+[t^{-1}]$ це простір антианалітичних тригонометричних поліномів з коефіцієнтами в $\mathcal{K}'_+$. Ця щільність випливає з умови (4.6.5) (або, в термінах міри, з умови (4.7.10)). Застосовуючи Теорему 2.9 з $\widehat{\sigma}_0 := \left[\begin{smallmatrix} \sigma'' & \widehat{s}_0 \\ \widehat{s}_0^* & \sigma' \end{smallmatrix}\right]$ як σ_{11}, бачимо що замикання підпростору (4.8.1) можна ототожнити з простором $\mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0}$. Більш того, якщо виконується умова (4.7.10), то як слідство рівності (2.4.1) ми бачимо що відображення

$$U_{\widehat{\sigma}_0, \widehat{\Sigma}_0} \colon \widehat{\sigma}_0 \begin{bmatrix} p'' \\ p' \end{bmatrix} \mapsto \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p'' \\ p' \end{bmatrix} \tag{4.8.2}$$

(де $\left[\begin{smallmatrix} p'' \\ p' \end{smallmatrix}\right] \in \left[\begin{smallmatrix} \mathcal{K}''_- \\ \mathcal{K}'_+ \end{smallmatrix}\right][t, t^{-1}]$ тригонометричний поліном з коефіцієнтами в $\left[\begin{smallmatrix} \mathcal{K}''_- \\ \mathcal{K}'_+ \end{smallmatrix}\right]$) продовжується до унітарного відображення простору $\mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0}$ на простір $\mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}$.

Зауважимо що можна також безпосередньо побудувати модель універсальної системи розсіювання на базі простору $\mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0}$. Визначимо відображення

$$\mathbf{i}_{\mathcal{K}'_+,0} \colon \mathcal{K}'_+ \to \mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0}, \quad \mathbf{i}_{\mathcal{K}''_-,0} \colon \mathcal{K}''_- \to \mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0}$$

наступним чином

$$\mathbf{i}_{\mathcal{K}'_+,0} \colon k'_+ \mapsto \widehat{\sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ k'_+ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_{\mathcal{K}''_-,0} \colon k''_- \mapsto \widehat{\sigma}_0 \begin{bmatrix} k''_- \\ 0 \end{bmatrix}$$

і продовжимо його до відображення

$$\mathbf{i}_{\mathcal{K}',0}\colon \mathcal{K}' \to \mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0}, \quad \mathbf{i}_{\mathcal{K}'',0}\colon \mathcal{K}'' \to \mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0}$$

за допомогою зсувів

$$\mathbf{i}_{\mathcal{K}',0}\colon \mathcal{U}'^{*n}k'_+ \mapsto \widehat{\sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ t^{-n}k'_+ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_{\mathcal{K}'',0}\colon \mathcal{U}''^{n}k''_- \mapsto \widehat{\sigma}_0 \begin{bmatrix} t^{n}k''_- \\ 0 \end{bmatrix},$$

де $k'_+ \in \mathcal{K}'_+$ и $k''_- \in \mathcal{K}''_-$. Визначимо підпростори

$$\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_0^{(-1)} := \begin{bmatrix} 0 \\ t^{-1}\widehat{s}_1^*\widetilde{\Delta} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_{*0}^{(0)} := \begin{bmatrix} \widehat{s}_2\widetilde{\Delta}_* \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Визначимо ізометричні відображення на них

$$\mathbf{i}_{\widetilde{\Delta},0}\colon \widetilde{\Delta} \to \widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_0^{(-1)}, \quad \mathbf{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}\colon \widetilde{\Delta}_* \to \widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_0^{(0)}$$

формулами

$$\mathbf{i}_{\widetilde{\Delta},0}\colon \widetilde{\delta} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ t^{-1}\widehat{s}_1^*\widetilde{\delta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0}\colon \widetilde{\delta}_* \mapsto \begin{bmatrix} \widehat{s}_2\widetilde{\delta}_* \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Продовжимо їх до відображень

$$\vec{\mathbf{i}}_{\widetilde{\Delta},0}\colon \ell^2_{\widetilde{\Delta}}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0}, \quad \vec{\mathbf{i}}_{\widetilde{\Delta}_*,0}\colon \ell^2_{\widetilde{\Delta}_*}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0}$$

як

$$\vec{\mathbf{i}}_{\widetilde{\Delta},0}\colon \{\widetilde{\delta}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{s}_1^*\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widetilde{\delta}(n)t^{n-1}\right) \end{bmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{i}}_{\widetilde{\Delta}_*,0}\colon \{\widetilde{\delta}_*(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \begin{bmatrix} \widehat{s}_2\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widetilde{\delta}_*(n)t^{n}\right) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ізометричність визначених вище відображень випливає з тотожності (4.7.10). Використовуючи техніку просторів Хеллінгера (див. [27])можна показати що

$$\mathfrak{S}_{00} := (M_t, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{\widetilde{\Delta},0} & \mathbf{i}_{\widetilde{\Delta}_*,0} & \mathbf{i}_{\mathcal{K}''_-,0} & \mathbf{i}_{\mathcal{K}'_+,0} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0}, \quad \widetilde{\Delta}\oplus\widetilde{\Delta}_*\oplus\mathcal{K}''_-\oplus\mathcal{K}'_+)$$

теж є універсальною системою розсіювання пов'язаною з тими ж даними задачі про ліфтинг (4.7.1). Ця система добудовується (в сенсі Теореми 4.13) до чотириразового АА-унітарного зчеплення

$$\mathfrak{S}_{AA,00} := (M_t, \quad \vec{\mathbf{i}}_{\widetilde{\Delta},0}, \quad \vec{\mathbf{i}}_{\widetilde{\Delta}_*,0}, \quad \mathbf{i}_{\mathcal{K}'',0} \quad , \mathbf{i}_{\mathcal{K}',0}; \quad \mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0})$$

унітарних операторів (4.7.14). Відзначимо що властивість (4.6.6) передбачає наступну властивість простору $\mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{clos}\widehat{\sigma}_0 \begin{bmatrix} \mathcal{K}''_-[t] \\ \mathcal{K}'_+ \end{bmatrix} &= \operatorname{im}\mathbf{i}_{\mathcal{H}_0,0} \oplus \begin{bmatrix} \widehat{s}_2 H^2_{\widetilde{\Delta}_*} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0} \ominus \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{s}_1^* H^{2\perp}_{\widetilde{\Delta}} \end{bmatrix}, \\
\operatorname{clos}\widehat{\sigma}_0 \begin{bmatrix} \mathcal{K}''_- \\ \mathcal{K}'_+[t^{-1}] \end{bmatrix} &= \operatorname{im}\mathbf{i}_{\mathcal{H}_0,0} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{s}_1^* H^{2\perp}_{\widetilde{\Delta}} \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0} \ominus \begin{bmatrix} \widehat{s}_2 H^2_{\widetilde{\Delta}_*} \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.8.3}$$

Зауважимо що при побудові простору $\mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0}$ явно не використовуються функції $\widehat{s}_1$, $\widehat{s}_2$, $\widehat{s}$, при тому що вони присутні в $\widehat{\Sigma}_0$. Отже, функції $\widehat{s}_1$, $\widehat{s}_2$ і $\widehat{s}$ повинні визначатися за σ', σ'' і $\widehat{s}_0$. Відповідні теореми і формули доводяться далі в цьому розділі. Їх зміст можна коротко описати як "максимальні підлеглі факторизації".

Теорема 4.22. Припустимо що $\widehat{\Sigma}_0$ виду (4.7.3) є універсальною спектральною мірою (4.7.2) деякої задачі про діфтинг. Тоді:

1. Має місце наступна нерівність між $\widehat{s}_0$ і $\widehat{s}_1$.

   $$\sigma' - \widehat{s}_0^* \sigma''^{[-1]} \widehat{s}_0 \geq \widehat{s}_1^* \frac{1}{m} \widehat{s}_1 \tag{4.8.4}$$

   Більш того, $\widehat{s}_1^* \frac{1}{m} \widehat{s}_1$ є *максимальною правою факторизаційною мінорантою* міри $\sigma' - \widehat{s}_0^* \sigma''^{[-1]} \widehat{s}_0$ в наступному сенсі: якщо сильна $\mathcal{L}(\mathcal{K}'_+, \mathcal{N})$-значна антианалітична міра r_1^* задовольняє нерівності

   $$\sigma' - s_0^* \sigma''^{[-1]} s_0 \geq r_1^* \frac{1}{m} r_1, \tag{4.8.5}$$

   то існує стискуюча сильно антианалітична $\mathcal{L}(\mathcal{N}, \widetilde{\Delta})$-значна функція θ_1^* така що

   $$r_1^* = \widehat{s}_1^* \theta_1^*. \tag{4.8.6}$$

   Тут рівність між мірами розуміється в сильному сенсі.

2. Має місце наступна нерівність між $\widehat{s}_0$ і $\widehat{s}_2$

   $$\sigma'' - \widehat{s}_0 \sigma'^{[-1]} \widehat{s}_0^* \geq (t^{-1}\widehat{s}_2) \frac{1}{m} (t^{-1}\widehat{s}_2)^* \tag{4.8.7}$$

Більш того, $(t^{-1}\widehat{s}_2)\frac{1}{m}(t^{-1}\widehat{s}_2)^*$ є *максимальною лівою факторизаційною мінорантою* міри $\sigma'' - \widehat{s}_0\sigma'^{[-1]}\widehat{s}_0^*$ в наступному сенсі: якщо сильна $\mathcal{L}(\mathcal{N}_*, \mathcal{K}''_-)$-значна аналітична міра r_2 задовольняє нерівності

$$\sigma'' - s_0\sigma'^{[-1]}s_0^* \geq r_2\frac{1}{m}r_2^*, \tag{4.8.8}$$

то існує стискуюча сильно аналітична $\mathcal{L}(\mathcal{N}_*, \widetilde{\Delta}_*)$-значна функція θ_2 така що

$$r_2 = (t^{-1}\widehat{s}_2)\theta_2. \tag{4.8.9}$$

$\widehat{s}_1$ і $\widehat{s}_2$ універсальної міри $\widehat{\Sigma}_0$ задачі про ліфтинг відновлюються однозначно (з точністю до лівої / правої унітарної константи) по блоку $\widehat{s}_0$.

Доведення. Доведемо тільки перше твердження, друге повністю аналогічно. Додатність міри $\widehat{\Sigma}_0$ зокрема тягне:

$$\begin{bmatrix} mI_{\widetilde{\Delta}} & 0 & \widehat{s}_1 \\ 0 & \sigma'' & \widehat{s}_0 \\ \widehat{s}_1^* & \widehat{s}_0^* & \sigma' \end{bmatrix} \geq 0. \tag{4.8.10}$$

Це є еквівалентним додатності Шурівського доповнення

$$\sigma' - \begin{bmatrix} \widehat{s}_1^* & \widehat{s}_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mI_{\widetilde{\Delta}} & 0 \\ 0 & \sigma'' \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} \widehat{s}_1 \\ \widehat{s}_0 \end{bmatrix} \geq 0,$$

звідки отримуємо (4.8.4).

Далі, припустимо що r_1 така як в припущеннях (4.8.5). Знову застосовуючи Шурівські доповнення, бачимо що (4.8.5) еквівалентно наступному

$$\widehat{\sigma}_0 := \begin{bmatrix} \sigma'' & \widehat{s}_0 \\ \widehat{s}_0^* & \sigma' \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ r_1^* \end{bmatrix} \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 & r \end{bmatrix}.$$

І ще раз застосовуючи Шурівські доповнення, перетворимо до виду

$$\begin{bmatrix} mI_{\mathcal{N}} & 0 & r_1 \\ 0 & \sigma'' & \widehat{s}_0 \\ r_1^* & \widehat{s}_0^* & \sigma' \end{bmatrix} \geq 0.$$

З визначення простору Хеллінгера (див. Розділ 2.2 зокрема формулу (2.2.1)), слід що $\begin{bmatrix} 0 \\ r_1^* \end{bmatrix} n \in \mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0}$ при будь-якому $n \in \mathcal{N}$. В силу антианалітичності міри $r_1^* n$ маємо

$$t^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r_1^* n \end{bmatrix} \perp \widehat{\sigma}_0 \begin{bmatrix} \mathcal{K}_-''[t] \\ \mathcal{K}_+' \end{bmatrix}. \tag{4.8.11}$$

З умови (4.8.3) слід що замикання підпростору $\widehat{\sigma}_0 \begin{bmatrix} \mathcal{K}_-''[t] \\ \mathcal{K}_+' \end{bmatrix}$ збігається з ортогональним доповненням підпростору $\begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{s}_1^* H^{2\perp}_{\widetilde{\Delta}} \end{bmatrix}$ в $\mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0}$. Отже, існує елемент $g_{-,n}$ в просторі $H^{2\perp}_{\widetilde{\Delta}}$ такий що

$$t^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r_1^* n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{s}_1^* \end{bmatrix} g_{-,n}.$$

З лінійності відповідності $n \mapsto g_{-,n}$ отримуємо що існує сильно антианалітична функція θ_1^* така що $g_{-,n} = t^{-1} \theta_1^* n$. Тим самим отримуємо (4.8.6). Далі, розгляд Шурівського доповнення $\begin{bmatrix} \sigma'' & \widehat{s}_0 \\ \widehat{s}_0^* & \sigma' \end{bmatrix}$ в (4.8.10) дає

$$mI_{\mathcal{N}} - \begin{bmatrix} 0 & r_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'' & \widehat{s}_0 \\ \widehat{s}_0^* & \sigma' \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} 0 \\ r_1^* \end{bmatrix} = mI_{\mathcal{N}} - \theta_1 \begin{bmatrix} 0 & \widehat{s}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'' & \widehat{s}_0 \\ \widehat{s}_1^* & \sigma' \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{s}_1^* \end{bmatrix} \theta_1^* \geq 0.$$

Залишається зауважити що (4.7.10) зокрема містить рівність

$$\begin{bmatrix} 0 & \widehat{s}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'' & \widehat{s}_0 \\ \widehat{s}_0^* & \sigma' \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{s}_1 \end{bmatrix} = mI_{\widetilde{\Delta}},$$

і ми отримуємо $I_{\mathcal{N}} - \theta_1 \theta_1^* \geq 0$. Тобто, θ є стисненням. Це завершує доведення Теореми 4.22. □

Аналогічним чином в наступній теоремі доводиться ще одна екстремальна властивість, тепер всієї четвірки коефіцієнтів разом.

Теорема 4.23. Припустимо що міра $\widehat{\Sigma}_0$ виду (4.7.3) є універсальною мірою (4.7.2) деякої задачі про ліфтинг. Розглянемо матрицю

$$\widehat{S} = \begin{bmatrix} \widehat{s}_0 & \widehat{s}_2 \\ \widehat{s}_1 & \widehat{s} \end{bmatrix}$$

Тоді:

1.
$$\begin{bmatrix} \sigma'' & 0 \\ 0 & mI_{\widetilde{\Delta}_*} \end{bmatrix} - \widehat{S}^* \begin{bmatrix} \sigma' & 0 \\ 0 & mI_{\widetilde{\Delta}_*} \end{bmatrix}^{[-1]} \widehat{S} \geq 0. \tag{4.8.12}$$

Більш того, 0 у правій частині нерівності (4.8.12) є максимальною факторизаційною мінорантою для лівої частини в наступному сенсі: якщо сильно антианалітична $\mathcal{L}\left(\mathcal{N}, \begin{bmatrix} \mathcal{K}'_+ \\ \widetilde{\Delta}_* \end{bmatrix}\right)$-значна міра Φ^* задовольняє нерівності

$$\begin{bmatrix} \sigma'' & 0 \\ 0 & mI_{\widetilde{\Delta}_*} \end{bmatrix} - \widehat{S}^* \begin{bmatrix} \sigma' & 0 \\ 0 & mI_{\widetilde{\Delta}_*} \end{bmatrix}^{[-1]} \widehat{S} \geq \Phi^* \frac{1}{m} \Phi, \tag{4.8.13}$$

то $\Phi = 0$.

2.
$$\begin{bmatrix} \sigma'' & 0 \\ 0 & mI_{\widetilde{\Delta}_*} \end{bmatrix} - \widehat{S} \begin{bmatrix} \sigma'' & 0 \\ 0 & mI_{\widetilde{\Delta}} \end{bmatrix}^{[-1]} \widehat{S}^* \geq 0. \tag{4.8.14}$$

Більш того, 0 у правій частині (4.8.14) є максимальною факторизаційною мінорантою лівої частині в наступному сенсі: якщо сильно аналітична $\mathcal{L}\left(\mathcal{N}_*, \begin{bmatrix} \mathcal{K}''_- \\ \widetilde{\Delta} \end{bmatrix}\right)$-значна міра Φ_* задовольняє нерівності

$$\begin{bmatrix} \sigma'' & 0 \\ 0 & mI_{\widetilde{\Delta}_*} \end{bmatrix} - \widehat{S} \begin{bmatrix} \sigma'' & 0 \\ 0 & mI_{\widetilde{\Delta}} \end{bmatrix}^{[-1]} \widehat{S}^* \geq \Phi_* \frac{1}{m} \Phi_*^*,$$

то $\Phi_* = 0$.

Доведення. Доведемо тільки твердження (1), твердження (2) доводиться аналогічно. Після перестановки другого і третього рядків та відповідних стовпців в (4.7.3), отримаємо

$$\widetilde{\Sigma}'_0 := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} mI_{\widetilde{\Delta}} & 0 \\ 0 & \sigma'' \end{bmatrix} & \widehat{S}' \\ \widehat{S}'^* & \begin{bmatrix} mI_{\widetilde{\Delta}_*} & 0 \\ 0 & \sigma' \end{bmatrix} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} mI_{\widetilde{\Delta}} & 0 & \widehat{s} & \widehat{s}_1 \\ 0 & \sigma'' & \widehat{s}_2 & \widehat{s}_0 \\ \widehat{s}^* & \widehat{s}_2^* & mI_{\widetilde{\Delta}_*} & 0 \\ \widehat{s}_1^* & \widehat{s}_0^* & 0 & \sigma' \end{bmatrix} \geq 0,$$

Далі, якщо переставити перші два рядки і відповідні стовпці, і останні два рядки і відповідні стовпці, то отримаємо

$$\widetilde{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'' & 0 \\ 0 & mI_{\widetilde{\Delta}} \end{bmatrix} & \widehat{S} \\ \widehat{S}^* & \begin{bmatrix} \sigma' & 0 \\ 0 & mI_{\widetilde{\Delta}_*} \end{bmatrix} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \sigma'' & 0 & \widehat{s}_0 & \widehat{s}_2 \\ 0 & mI_{\widetilde{\Delta}} & \widehat{s}_1 & \widehat{s} \\ \widehat{s}_0^* & \widehat{s}_1^* & \sigma' & 0 \\ \widehat{s}_2^* & \widehat{s}^* & 0 & mI_{\widetilde{\Delta}_*} \end{bmatrix}.$$

Додатність $\widetilde{\Sigma}_0$ еквівалентна додатності $\widehat{\Sigma}_0$. За допомогою Шурівського доповнення бачимо що додатність $\widetilde{\Sigma}_0$ еквівалентна (4.8.12). А екстремальність 0 в (4.8.12) еквівалентна його екстремальності в

$$\begin{bmatrix} mI_{\widetilde{\Delta}_*} & 0 \\ 0 & \sigma' \end{bmatrix} - \widehat{S}'^* \begin{bmatrix} mI_{\widetilde{\Delta}} & 0 \\ 0 & \sigma'' \end{bmatrix}^{[-1]} \widehat{S}' \geq 0. \tag{4.8.15}$$

Застосовуючи Шурівське доповнення до (4.8.13), отримаємо

$$\begin{bmatrix} mI_{\mathcal{N}} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \Phi \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} mI_{\widetilde{\Delta}} & 0 \\ 0 & \sigma'' \end{bmatrix} & \widehat{S}' \\ \Phi^* & \widehat{S}'^* & \begin{bmatrix} mI_{\widetilde{\Delta}_*} & 0 \\ 0 & \sigma' \end{bmatrix} \end{bmatrix} \geq 0.$$

За визначенням простору Хеллінгера, остання нерівність спричиняє що $\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Phi^* \end{bmatrix} n \in \mathcal{L}^{\widetilde{\Sigma}'_0}$ при будь-якому $n \in \mathcal{N}$. Оскільки за припущенням Φ^* є сильно антианалітичною, то, як і при доведенні Теореми 4.22, маємо

$$t^{-1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Phi^* n \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} mI_{\widetilde{\Delta}} & 0 \\ 0 & \sigma'' \end{bmatrix} & \widehat{S}' \\ \widehat{S}'^* & \begin{bmatrix} mI_{\widetilde{\Delta}_*} & 0 \\ 0 & \sigma' \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^2_{\widetilde{\Delta}} \\ \mathcal{K}''_-[t] \\ H^2_{\widetilde{\Delta}_*} \\ \mathcal{K}'_+ \end{bmatrix}.$$

Але в силу (4.7.9), підпростір

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} mI_{\widetilde{\Delta}} & 0 \\ 0 & \sigma'' \end{bmatrix} & \widehat{S}' \\ \widehat{S}'^* & \begin{bmatrix} mI_{\widetilde{\Delta}_*} & 0 \\ 0 & \sigma' \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^{2\perp}_{\widetilde{\Delta}} \\ \mathcal{K}''_- \\ H^2_{\widetilde{\Delta}_*} \\ \mathcal{K}'_+ \end{bmatrix}$$

є щільним в $\mathcal{L}^{\widetilde{\Sigma}'_0}$. Отже, $\Phi = 0$. Тим самим твердження (1) цієї теореми доведено. □

Теорема 4.22 веде до характеризації універсальних спектральних мір в природних теоретико функціональних термінах (пор. з Теоремою 4.18).

Теорема 4.24. Нехай задана сильна $\mathcal{L}(\widetilde{\Delta} \oplus \widetilde{\Delta}_* \oplus \mathcal{K}''_- \oplus \mathcal{K}'_+)$-значна міра $\widehat{\Sigma}_0$ виду (4.7.3). Позначимо через $\widehat{\sigma}_0 := \begin{bmatrix} \sigma'' & \widehat{s}_0 \\ \widehat{s}_0^* & \sigma' \end{bmatrix}$ додатньу $\mathcal{L}(\mathcal{K}''_- \oplus \mathcal{K}'_+)$-значну міру і припустимо що вона визначає інші блоки $\widehat{s}_1$, $\widehat{s}_2$, $\widehat{s}$ в $\widehat{\Sigma}_0$ наступним чином:

1. $\widehat{s}_1$ аналітична міра така що $\widehat{s}_1^*\frac{1}{m}\widehat{s}_1$ є максимальною факторизаційною мінорантою міри $\sigma' - \widehat{s}_0^*\sigma''^{[-1]}\widehat{s}_0$.
2. $\widehat{s}_2$ аналітична міра з $\widehat{s}_2(\mathbb{T}) = 0$ така що $(t^{-1}\widehat{s}_2)\frac{1}{m}(t^{-1}\widehat{s}_2)^*$ є максимальною факторизаційною мінорантою міри $\sigma'' - \widehat{s}_0\sigma'^{[-1]}\widehat{s}_0^*$.
3. $\widehat{s}$ аналітична і визначається за формулою

$$\begin{bmatrix} mI_{\widetilde{\Delta}} & \widehat{s} \\ \widehat{s}^* & mI_{\widetilde{\Delta}_*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widehat{s}_1 \\ \widehat{s}_2^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'' & \widehat{s}_0 \\ \widehat{s}_0^* & \sigma' \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} 0 & \widehat{s}_2 \\ \widehat{s}_1^* & 0 \end{bmatrix} \tag{4.8.16}$$

   крім того

$$\widehat{s}(\mathbb{T}) = \int_{\mathbb{T}} \widehat{s}(dt) = 0. \tag{4.8.17}$$

Припустимо що має місце рівність між підпросторами простору $\mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0}$

$$\operatorname{clos} \widehat{\sigma}_0 \begin{bmatrix} \mathcal{K}''_-[t] \\ \mathcal{K}'_+ \end{bmatrix} \cap \operatorname{clos} \widehat{\sigma}_0 \begin{bmatrix} \mathcal{K}''_- \\ \mathcal{K}'_+[t^{-1}] \end{bmatrix} = \operatorname{clos} \widehat{\sigma}_0 \begin{bmatrix} \mathcal{K}''_- \\ \mathcal{K}'_+ \end{bmatrix}. \tag{4.8.18}$$

Тоді $\widehat{\Sigma}_0$ є універсальною спектральною мірою деякої задачі про ліфтинг.

Доведення. Ми застосуємо другу версію Теореми 4.13. З припущення (4.8.16) і зауваження (2.4.1) слід що виконується (4.6.5) в умові другої версії Теореми 4.13. Умова максимальності факторизацій $\widehat{s}_1$ і $\widehat{s}_2$ тягне що

$$\operatorname{clos} \widehat{\sigma}_0 \begin{bmatrix} \mathcal{K}''_-[t] \\ \mathcal{K}'_+ \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0} \ominus \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{s}_1 H^{2\perp}_{\widetilde{\Delta}_*} \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{clos}\widehat{\sigma}_0 \begin{bmatrix} \mathcal{K}''_- \\ \mathcal{K}'_+[t^{-1}] \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0} \ominus \begin{bmatrix} \widehat{s}_2 H^2_{\widetilde{\Delta}} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.8.19}$$

Властивість (4.8.16) тягне що відображення $U_{\widehat{\sigma}_0,\widehat{\Sigma}_0}$, задане формулою (4.8.2), є унітарним з $\mathcal{L}^{\widehat{\sigma}_0}$ на $\mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}$. Крім того

$$U_{\widehat{\sigma}_0,\widehat{\Sigma}_0}\colon \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{s}_1 H^{2\perp}_{\widetilde{\Delta}_*} \end{bmatrix} \mapsto \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} H^{2\perp}_{\widetilde{\Delta}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U_{\widehat{\sigma}_0,\widehat{\Sigma}_0}\colon \begin{bmatrix} \widehat{s}_2 H^2_{\widetilde{\Delta}} \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ H^2_{\widetilde{\Delta}_*} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отже, рівність (4.8.19) можна еквівалентним чином переформулювати в термінах простору $\mathcal{L}^{\Sigma_0}$:

$$\operatorname{clos}\widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{K}''_-[t] \\ \mathcal{K}'_+ \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0} \ominus \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} H^{2\perp}_{\widetilde{\Delta}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\operatorname{clos}\widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{K}''_- \\ \mathcal{K}'_+[t^{-1}] \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0} \ominus \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ H^2_{\widetilde{\Delta}_*} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.8.20}$$

Умови (4.8.20) є функціонально модельним еквівалентом умов (4.6.6), а умова (4.8.18) модельним еквівалентом умови (4.6.7).

Умови (4.6.8) випливають з аналітичності $t^{-1}\widehat{s}_2$, $\widehat{s}_1$ и $\widehat{s}$. аналогічно, умови (4.6.9) з обернення в нуль блоків $(1,3)$ і $(2,4)$ матриці $\widehat{\Sigma}_0$. Умова (4.8.17) еквівалентна (4.6.22). Таким чином всі припущення Теореми 4.13 виконані. □

Комбінуючи Теореми 4.24 і 4.22 приходимо до наступного наслідку. Для задачі Нехарі цей результат був отриманий Адамяном, Аровим і Крейном [4], див. також [68].

Наслідок 4.25. Розглянемо дані задачі про ліфтинг

$$(\mathcal{U}',\mathcal{K}'), \quad (\mathcal{U}'',\mathcal{K}''), \quad \mathcal{K}'_+ \subset \mathcal{K}', \quad \mathcal{K}''_- \subset \mathcal{K}'',$$

покладемо

$$\sigma'(dt) = (i_{\mathcal{K}'_+\to\mathcal{K}'})^* E_{\mathcal{U}'}(dt) i_{\mathcal{K}'_+\to\mathcal{K}'}, \quad \sigma''(dt) = (i_{\mathcal{K}''_-\to\mathcal{K}''})^* E_{\mathcal{U}''}(dt) i_{\mathcal{K}''_-\to\mathcal{K}''}$$

Нехай задана $\mathcal{L}(\mathcal{K}'_+,\mathcal{K}''_-)$-значна міра $\widehat{s}_0$ така що

$$\sigma_0 := \begin{bmatrix} \sigma'' & \widehat{s}_0 \\ \widehat{s}_0^* & \sigma' \end{bmatrix} \geq 0.$$

Побудуємо міри $\widehat{s}_1$ і $\widehat{s}_2$ як максимальні факторизаційні мінoранти в (4.8.5)—(4.8.9) Теореми 4.22 і визначимо $\widehat{s}$ за формулою (4.7.10). Тоді $\widehat{s}_0$ є центральним символом задачі про ліфтинг асоційованої з оператором $X = \widehat{s}_0(\mathbb{T}) \in \mathcal{L}(\mathcal{K}'_+, \mathcal{K}''_-)$ тоді і тільки тоді коли $\widehat{s}$ аналітична, $\widehat{s}(\mathbb{T}) = 0$ і виконується умова (4.8.18). В цьому випадку $\widehat{\Sigma}^0$ що задана в (4.7.3) є універсальною спектральною мірою цієї задачі.

4.9 Застосування до задачі Нехарі

У цьому розділі в якості додатку викладених вище загальних результатів за задачею про ліфтинг обговорюється класична задача Нехарі. Ця задача формулюється в такий спосіб ("часова" версія): *задана послідовність $\{\gamma_n\}_{n=-1,-2,\dots}$ комплексних чисел, що пронумерована від'ємними цілими індексами; потрібно описати всі її продовження в область позитивних індексів $\{\gamma_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ такі що двостороння Тьопліцева матриця $\Gamma_e = [\gamma_{i-j}]_{i,j\in\mathbb{Z}}$ є стискуючим оператором в $\ell^2(\mathbb{Z})$, $\|\Gamma_e\| \le 1$.*

Тут ми будемо використовувати одновимірні простори $\mathbb{C}$ в якості масштабів $\mathcal{G}'$ и $\mathcal{G}''$. Задача Нехарі є окремим випадком задачі про ліфтинг, що відповідає наступним даним

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}' = \mathcal{K}'' = \ell^2(\mathbb{Z}),\\
&\mathcal{U}' = \mathcal{U}'' = J \text{ (двосторонні зсуви)},\\
&\mathcal{K}'_+ = \ell^2(\mathbb{Z}_+),\ \mathcal{K}''_- = \ell^2(\mathbb{Z}_-),\\
&X = [\gamma_{i-j}]_{i\in\mathbb{Z}_-, j\in\mathbb{Z}_+} : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_-).
\end{aligned}$$

Еквівалентна "частотна" версія постановки задачі Нехарі є такою: *задана послідовність комплексних чисел $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{Z}_-}$, описати всі L^∞-функції φ на одиничному колі $\mathbb{T}$ такі що*

$$\|\varphi\|_\infty \le 1 \text{ і } \varphi_n = \gamma_n \text{ при } n = -1, -2, -3, \dots,$$

де $\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n t^n$ розклад φ в ряд Фур'є.

В силу угод Зауваження 4.10 "часовий" символ $\{w_Y\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ліфтингу Y пов'язаний з відповідним "частотним"символом φ формулою

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_Y(n+1)t^n,$$

Тобто, якщо ми покладемо $\widehat{w}_Y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_Y(n)t^n$, то $\varphi(t) = t^{-1}\widehat{w}_Y(t)$. Тоді формула, що параметризує множину всіх розв'язків, набуде вигляду

$$\varphi(t) = t^{-1}s_0(t) + t^{-1}s_2(t)(1-\omega(t)s(t))^{-1}\omega(t)s_1(t),$$

де функція класу Шура ω є вільним параметром, а s_0, s_1, s_2, s визначені в (4.5.6). Для спрощення позначень покладемо

$$\widetilde{s}_0(t) = t^{-1}s_0(t), \quad \widetilde{s}_2(t) = t^{-1}s_2(t), \quad \widetilde{s}(t) = s(t), \quad \widetilde{s}_1(t) = s_1(t), \tag{4.9.1}$$

тоді

$$\varphi(t) = \widetilde{s}_0(t) + \widetilde{s}_2(t)(1-\omega(t)\widetilde{s}(t))^{-1}\omega(t)\widetilde{s}_1(t). \tag{4.9.2}$$

Простори $\mathcal{K}'$ і $\mathcal{K}''$ можна реалізувати у вигляді L^2 з масштабними операторами $c \in \mathbb{C} \mapsto c \in L^2$. Універсальна спектральна міра (4.7.2) тут має вигляд:

$$\widehat{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & \widetilde{s} & 0 & \widetilde{s}_1 \\ \widetilde{s}^* & 1 & \widetilde{s}_2^* & 0 \\ 0 & \widetilde{s}_2 & 1 & \widetilde{s}_0 \\ \widetilde{s}_1^* & 0 & \widetilde{s}_0^* & 1 \end{bmatrix} \cdot m \ \geq 0, \tag{4.9.3}$$

де m це міра Лебега. У цьому розділі ми будемо позначати густину цієї міри щодо міри Лебега тією ж буквою $\widehat{\Sigma}_0$ (тобто, будемо опускати множник $\cdot m$).

Зворотна задача полягає в наступному: *охарактеризувати такі* $2\times\ 2$ L^∞ *матриці-функції* $\left[\begin{smallmatrix} \widetilde{s} & \widetilde{s}_1 \\ \widetilde{s}_2 & \widetilde{s}_0 \end{smallmatrix}\right]$, *елементи яких є коефіцієнтами дробово-лінійного перетворення* (4.9.2), *що описує множину всіх розв'язків деякої задачі Нехарі.*

Позитивність (4.9.3) тягне що $\|\widetilde{s}_0\|_\infty \leq 1$. Більш того,

$$1 - |\widetilde{s}_0|^2 \geq |\widetilde{s}_1|^2, \quad 1 - |\widetilde{s}_0|^2 \geq |\widetilde{s}_2|^2. \tag{4.9.4}$$

Відповідно до класичного результату [3] (див., наприклад, [56]), має місце дихотомія. Або функція $\log(1-|\widetilde{s}_0(t)|^2)$ не є інтегровною відносно міри Лебега на колі $\mathbb{T}$ и тоді $\widetilde{s}_1=\widetilde{s}_2=0$. Або функція $\log(1-|\widetilde{s}_0(t)|^2)$ є інтегровною і тоді існує єдина зовнішня функція a, $a(0)>0$, така що

$$|a(t)|^2 = 1-|\widetilde{s}_0(t)|^2 \text{ при п.в.} t\in\mathbb{T}. \tag{4.9.5}$$

Оскільки, згідно з Теоремі 4.22, $\widetilde{s}_1$ і $\widetilde{s}_2$ є максимальними такими факторизаціями, то в цьому випадку вони повинні збігатися з a з точністю до унімодулярного множника, а при відповідному нормуванні ототожнень (4.4.1) просто збігаються з a. Таким чином, в разі інтегровності $\log(1-|\widetilde{s}_0(t)|^2)$ ми маємо рівності в нерівностях (4.9.4)

$$1-|\widetilde{s}_0|^2=|\widetilde{s}_1|^2, \quad 1-|\widetilde{s}_0|^2=|\widetilde{s}_2|^2, \tag{4.9.6}$$

і

$$\widetilde{s}_1=\widetilde{s}_2=a, \tag{4.9.7}$$

де a зовнішня функція, $a(0)>0$.

У першому випадку, в силу формули (4.9.2), $\widetilde{s}_0$ є єдиним розв'язком задачі. У другому, простори $\widetilde{\Delta}$ і $\widetilde{\Delta}_*$ одномірні (їх розмірності не більше одиниці в силу визначення і не менше в силу того що $\widetilde{s}_1$ і $\widetilde{s}_2$ відмінні від нуля). Отже, знову в силу формули (4.9.2), задача має нескінченно багато розв'язків.

Відповідно до формули (4.8.16) Теореми 4.24

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}1 & \widetilde{s}\\ \widetilde{s}^* & 1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & a\\ \overline{a} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \widetilde{s}_0\\ \widetilde{s}_0^* & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & a\\ \overline{a} & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & a\\ \overline{a} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\overline{a}a} & -\frac{\widetilde{s}_0^*}{\overline{a}a}\\ -\frac{\widetilde{s}_0}{\overline{a}a} & \frac{1}{\overline{a}a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a\\ \overline{a} & 0\end{bmatrix} \text{(оскільки } 1-|\widetilde{s}_0|^2=\overline{a}a)\\ &= \begin{bmatrix}1 & -\frac{a}{\overline{a}}\widetilde{s}_0^*\\ -\frac{\overline{a}}{a}\widetilde{s}_0 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Звідки отримуємо

$$\widetilde{s} = -\frac{a}{\overline{a}}\widetilde{s}_0^*. \tag{4.9.8}$$

---

[3] Нагадаємо що цей результат відноситься виключно до скалярного випадку.

Позначимо $b := \widetilde{s}$. В силу умови (4.8.17) маємо

$$b(0) = \widetilde{s}(0) = 0. \tag{4.9.9}$$

У цих позначеннях формулу (4.9.2) (використовуючи співвідношення (4.9.6), (4.9.7) і (4.9.8)) може бути записано як

$$w = -\frac{a}{\overline{a}}\overline{b} + \frac{a^2\omega}{1-\omega b} = \frac{a}{\overline{a}}\frac{\omega - \overline{b}}{1-\omega b}, \quad \omega \in Ball(H^\infty_+). \tag{4.9.10}$$

Визначення 4.26. Пара функцій (a, b), що має перелічені вище властивості, а саме

1. $a, b \in H^\infty$,
2. a зовнішня, $b(0) = 0$,
3. $|a|^2 + |b|^2 = 1$ майже усюди на $\mathbb{T}$,

називається, дотримуючись термінології Д. З. Арова, *γ-твірною парою.*

Назва пояснюється тим що функція φ вигляду (4.9.2) з $\widetilde{s}, \widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2, \widetilde{s}_0$

$$\widetilde{S} = \begin{bmatrix} \widetilde{s} & \widetilde{s}_1 \\ \widetilde{s}_2 & \widetilde{s}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ a & -\frac{a}{\overline{a}}\overline{b} \end{bmatrix} \tag{4.9.11}$$

має $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ і її від'ємні коефіцієнти Фур'є $[\varphi]_{-1}, [\varphi]_{-2}, \ldots$ не залежать від вибору вільного параметру ω. Однак, в загальному випадку формула (4.9.2) творить не всі функції φ с $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ з цими від'ємними коефіцієнтами Фур'є (див., наприклад, [65, 66, 67]).

Визначення 4.27. У тому випадку коли формула (4.9.2) творить *всі* функції φ с $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ з заданими від'ємними коефіцієнтами Фур'є (тобто, *всі* розв'язки задачі Нехарі), то відповідна пара (a, b) називається *регулярною γ-твірною парою.*

Це поняття також було введено Д. З. Аровым і їм була отримана характеризація таких пар (див. [15], [14]). Детальніше це буде обговорено в Розділі 5.1. Наступна характеризація регулярних γ-твірних пар, відмінна від наведеної Д. З. Аровим, була отримана в роботах дисертанта [66, 68]. Нижче ми показуємо що ця характеризація є окремим випадком Теореми 4.18.

Теорема 4.28 ([66, 68]). γ-твірна пара (a, b) є регулярною тоді і тільки тоді коли (на додаток до умов (1) – (3) наведених вище) (a, b) задовольняє ще й четвертій умові

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{clos} \left\{ \begin{bmatrix} ah \\ P_{H^2} \widetilde{s}_0 h \end{bmatrix} : h \in H^2 \right\} \tag{4.9.12}$$

де $\widetilde{s}_0 := -\frac{a}{\overline{a}}\overline{b}$.

Доведення. В силу Теореми 4.18 ця четверта властивість виходить з співвідношень (4.7.8) якщо застосувати їх до контексту задачі Нехарі:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \overline{b} \\ 0 \\ \overline{a} \end{bmatrix} \mathbb{C} = \operatorname{clos} \begin{bmatrix} 1 & b & 0 & a \\ \overline{b} & 1 & \overline{a} & 0 \\ 0 & a & 1 & \widetilde{s}_0 \\ \overline{a} & 0 & \overline{\widetilde{s}}_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H^{2\perp} \\ H^2 \end{bmatrix} \ominus \operatorname{clos} \begin{bmatrix} 1 & b & 0 & a \\ \overline{b} & 1 & \overline{a} & 0 \\ 0 & a & 1 & \widetilde{s}_0 \\ \overline{a} & 0 & \overline{\widetilde{s}}_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H^{2\perp} \\ tH^2 \end{bmatrix} \tag{4.9.13}$$

і

$$\overline{t} \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \mathbb{C} = \operatorname{clos} \begin{bmatrix} 1 & b & 0 & a \\ \overline{b} & 1 & \overline{a} & 0 \\ 0 & a & 1 & \widetilde{s}_0 \\ \overline{a} & 0 & \overline{\widetilde{s}}_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H^{2\perp} \\ H^2 \end{bmatrix} \ominus \operatorname{clos} \begin{bmatrix} 1 & b & 0 & a \\ \overline{b} & 1 & \overline{a} & 0 \\ 0 & a & 1 & \widetilde{s}_0 \\ \overline{a} & 0 & \overline{\widetilde{s}}_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \overline{t}H^{2\perp} \\ H^2 \end{bmatrix}. \tag{4.9.14}$$

Оскільки для будь-якої γ-твірної пари обидві частини рівності (4.9.13) одномірні і оскільки

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \overline{b} \\ 0 \\ \overline{a} \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} 1 & b & 0 & a \\ \overline{b} & 1 & \overline{a} & 0 \\ 0 & a & 1 & \widetilde{s}_0 \\ \overline{a} & 0 & \overline{\widetilde{s}}_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H^{2\perp} \\ tH^2 \end{bmatrix},$$

то (для γ-твірних пар) (4.9.13) еквівалентно наступному

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \overline{b} \\ 0 \\ \overline{a} \end{bmatrix} \in \operatorname{clos} \begin{bmatrix} 1 & b & 0 & a \\ \overline{b} & 1 & \overline{a} & 0 \\ 0 & a & 1 & \widetilde{s}_0 \\ \overline{a} & 0 & \overline{\widetilde{s}}_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H^{2\perp} \\ H^2 \end{bmatrix}. \tag{4.9.15}$$

Аналогічно співвідношення (4.9.14) є еквівалентним

$$\bar{t}\begin{bmatrix} b \\ 1 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{clos} \begin{bmatrix} 1 & b & 0 & a \\ \bar{b} & 1 & \bar{a} & 0 \\ 0 & a & 1 & \widetilde{s}_0 \\ \bar{a} & 0 & \overline{\widetilde{s}}_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H^{2\perp} \\ H^2 \end{bmatrix}. \tag{4.9.16}$$

Оскільки матриця функція $\widetilde{S} = \left[\begin{smallmatrix} b & a \\ a & \widetilde{s}_0 \end{smallmatrix}\right]$ унітарна майже всюди на колі $\mathbb{T}$, то на увазі Теореми 2.9 застосовуючи перетворення з Шурівськими доповненнями, отримуємо що $f = \left[\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{smallmatrix}\right]$ належить $\mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}$ тоді і тільки тоді коли

$$f \in L^2 \text{ і } \begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \end{bmatrix} = \widetilde{S} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_4 \end{bmatrix}. \tag{4.9.17}$$

Звідси зокрема випливає що всі елементи $f \in \mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}$ мають вигляд

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \\ 0 \\ f_4 \end{bmatrix} = \widehat{\Sigma}_0 \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ f_3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

А тоді

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}} = \left\| \begin{bmatrix} f_2 \\ f_4 \end{bmatrix} \right\|_{L^2} \text{ і } \|f\|_{\mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}} = \left\| \begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \end{bmatrix} \right\|_{L^2}. \tag{4.9.18}$$

З першої рівності в (4.9.18) бачимо що (4.9.15) еквівалентне

$$\begin{bmatrix} \bar{b} \\ \bar{a} \end{bmatrix} \in \operatorname{clos} \begin{bmatrix} \bar{a} & 0 \\ \overline{\widetilde{s}}_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^{2\perp} \\ H^2 \end{bmatrix}. \tag{4.9.19}$$

Тут замикання розуміється вже в звичайній L^2 метриці. Остання умова еквівалентна тому що

$$\begin{bmatrix} \bar{b} \\ \bar{a} - \overline{a(0)} \end{bmatrix} \in \operatorname{clos} P_{H^{2\perp}} \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \overline{\widetilde{s}}_0 \end{bmatrix} H^{2\perp}. \tag{4.9.20}$$

З другої умови в (4.9.18) бачимо що також (4.9.15) еквівалентне

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{clos} \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & \widetilde{s}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^{2\perp} \\ H^2 \end{bmatrix}, \tag{4.9.21}$$

а це в свою чергу є еквівалентним

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{clos} P_{H^2} \begin{bmatrix} a \\ \widetilde{s}_0 \end{bmatrix} H^2. \tag{4.9.22}$$

Аналогічно, перша умова в (4.9.18) показує що (4.9.14) еквівалентне

$$\bar{t} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \in \operatorname{clos} \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & \widetilde{s}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^{2\perp} \\ H^2 \end{bmatrix}, \tag{4.9.23}$$

а це є еквівалентним

$$\begin{bmatrix} b/t \\ \frac{a-a(0)}{t} \end{bmatrix} \in \operatorname{clos} P_{H^2} \begin{bmatrix} a \\ \widetilde{s}_0 \end{bmatrix} H^2. \tag{4.9.24}$$

Друга умова в (4.9.18) показує що (4.9.14) також еквівалентне

$$\begin{bmatrix} \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{Clos} \begin{bmatrix} \bar{a} & 0 \\ \overline{\widetilde{s}}_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^{2\perp} \\ H^2 \end{bmatrix}, \tag{4.9.25}$$

що в свою чергу є еквівалентним

$$\begin{bmatrix} \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{clos} P_{H^{2\perp}} \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \overline{\widetilde{s}}_0 \end{bmatrix} H^{2\perp}. \tag{4.9.26}$$

Далі зауважимо що рівності (4.9.23) і (4.9.19) комплексно спряжені одна одній і, отже, (4.9.23) і (4.9.19) є еквівалентними. Звідси робимо висновок що (4.9.13) і (4.9.14) еквівалентні одне одному. До цього ж висновку можна прийти помітивши що (4.9.21) і (4.9.25) спряжені одне одному.

Таким чином γ-твірна пара є регулярною в точності тоді коли виконується одна з еквівалентних умов (4.9.20), (4.9.22), (4.9.24), (4.9.26). В формулювання цієї теореми ми винесли одне з них (4.9.22). □

Зауваження 4.29. *Відомо що (див. [85, Section 6]) формула* $f = (a/(1-b))^2$ *здійснює взаємно-однозначну відповідність між* γ *-твірними парами* (a, b) *і крайніми точками одиничної кулі в просторі* H^1*. Ця ж формула здійснює взаємно-однозначну відповідність між регулярними* γ*-твірними парами* (a, b) *і виступаючими точками одиничного кулі в просторі* H^1*. Дана вище характеризація регулярних* γ*-твірних пар є в той* *же час найкращою відомої характеризацією виступаючих точок одиничної кулі в просторі* H^1

Зауваження 4.30. *Зауважимо що (для* γ*-твірних пар)* (4.9.13)/(4.9.14) *є еквівалентними*

$$\mathcal{S} := \begin{bmatrix}1\\ \overline{b}\\ 0\\ \overline{a}\end{bmatrix} H^{2\perp} \oplus \operatorname{clos} \begin{bmatrix}1&b&0&a\\ \overline{b}&1&\overline{a}&0\\ 0&a&1&\widetilde{s}_0\\ \overline{a}&0&\overline{\widetilde{s}}_0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ H^{2\perp}\\ H^2\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}b\\ 1\\ a\\ 0\end{bmatrix} H^2 = L^{\widehat{\Sigma}_0}, \tag{4.9.27}$$

тобто, (4.7.9)*. Дійсно, якщо виконуються* (4.9.13)/(4.9.14)*, то (як в Теоремах 4.13 і 4.18)* $\mathcal{S}$ *є* $*$ *- циклічним підпростором що приводить , отже, він збігається з* $L^{\widehat{\Sigma}_0}$*. Назад, припустимо що виконується* (4.9.27)*. Безпосередньо перевіряється що*

$$t\begin{bmatrix}1\\ \overline{b}\\ 0\\ \overline{a}\end{bmatrix}\overline{t} = \begin{bmatrix}1\\ \overline{b}\\ 0\\ \overline{a}\end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix}1\\ \overline{b}\\ 0\\ \overline{a}\end{bmatrix} H^{2\perp} \oplus \operatorname{clos} \begin{bmatrix}1&b&0&a\\ \overline{b}&1&\overline{a}&0\\ 0&a&1&\widetilde{s}_0\\ \overline{a}&0&\overline{\widetilde{s}}_0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ H^{2\perp}\\ tH^2\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}b\\ 1\\ a\\ 0\end{bmatrix} H^2. \tag{4.9.28}$$

З розкладання (4.9.27) *робимо висновок що*

$$\begin{bmatrix}1\\ \overline{b}\\ 0\\ \overline{a}\end{bmatrix} \in \operatorname{clos} \begin{bmatrix}1&b&0&a\\ \overline{b}&1&\overline{a}&0\\ 0&a&1&\widetilde{s}_0\\ \overline{a}&0&\overline{\widetilde{s}}_0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ H^{2\perp}\\ H^2\end{bmatrix}.$$

Комбінуючи це з (4.9.28)*, бачимо що*

$$t\begin{bmatrix}1\\ \overline{b}\\ 0\\ \overline{a}\end{bmatrix}\overline{t} = \begin{bmatrix}1\\ \overline{b}\\ 0\\ \overline{a}\end{bmatrix} \in \operatorname{clos} \begin{bmatrix}1&b&0&a\\ \overline{b}&1&\overline{a}&0\\ 0&a&1&\widetilde{s}_0\\ \overline{a}&0&\overline{\widetilde{s}}_0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ H^{2\perp}\\ H^2\end{bmatrix} \ominus \operatorname{clos} \begin{bmatrix}1&b&0&a\\ \overline{b}&1&\overline{a}&0\\ 0&a&1&\widetilde{s}_0\\ \overline{a}&0&\overline{\widetilde{s}}_0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ H^{2\perp}\\ tH^2\end{bmatrix}.$$

Це тягне (4.9.13)*, оскільки обидві частини одномірні. Аналогічним чином виходить рівність в* (4.9.14)*.*

Рівність в (4.9.27) *еквівалентним чином може бути сформульовано як:* $f \in \mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}$ *є ортогональним* $\mathcal{S}$*, тоді і тільки тоді коли* $f = 0$*. З іншого* *боку,* $f \in \mathcal{L}^{\widehat{\Sigma}_0}$ *є ортогональним* $\mathcal{S}$*, тоді і тільки тоді коли* f_1, f_3 *лежать в* H^2 *і* f_2, f_4 *лежать в* $H^{2\perp}$*. Враховуючи* (4.9.17)*, це означає що рівність в* (4.9.27) *є еквівалентною тому що рівняння*

$$\widetilde{S}^* \begin{bmatrix} u_+ \\ v_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_- \\ v_- \end{bmatrix} \text{ с } \begin{bmatrix} u_+ \\ v_+ \end{bmatrix} \in H^2 \text{ и } \begin{bmatrix} u_- \\ v_- \end{bmatrix} \in H^{2\perp} \tag{4.9.29}$$

має тільки тривіальний розв'язок, де $\widetilde{S}^*$ *задана* (4.9.11)*. Тим самим отримуємо ще одну характеризацію регулярних* γ*-твірних пар (теж отриману в [66, 68]):*

Теорема 4.31. [66, 68] *γ-твірна пара є регулярною тоді і тільки тоді коли* (4.9.29) *має тільки тривіальний розв'язок.*

Висновки до розділу 4

В Розділі 4 вивчено загальну задачу про Ліфтинг Комутанту. Розглянуто унітарне зчеплення двох унітарних операторів та відповідний сплітаючий оператор. Введено поняття символів заданого стиснення як спектральних мір (відносно заданих масштабів) зчеплень що відповідають ліфтингам цього стиснення. Використовуючи конструкцію хвильових операторів, доведено що зплітаючи оператори які є ліфтингами заданого стиснення і тільки вони породжують зчеплення що є унітарними розширеннями певної ізометрії що будується відповідно даним задачі. Це дозволяє отримати параметризацію усіх символів даного стиснення. Вивчена структура універсального (центрального) розширення, її спектральна міра та відповідний простір Хеллінгера. На базі цього отримана повна характеризація коефіцієнтів параметризуючої формули. Також отримані додаткові властивості цих коефіцієнтів. Результати застосовані до задачі Нехарі, для якої вони теж є новими.

Результати розділу опубліковано в роботах [70, 68, 20, 21]

РОЗДІЛ 5

АРОВ-РЕГУЛЯРНІСТЬ

5.1 Регуляризація γ-твірних пар. Розв'язок однієї проблеми Д.Сарасона

5.1.1 γ-твірні пари та регулярні γ-твірні пари. Формулювання основного результату. Будемо дотримуватися наступних позначень: $\mathbb{D}$ одиничний диск у комплексній площині $\mathbb{C}$; $\mathbb{T}$ одиничне коло; L^p простір вимірних функцій на одиничному колі $\mathbb{T}$, з інтегровним p-ступенем; L^∞ простір обмежених вимірних функцій на колі $\mathbb{T}$; $H^p_\pm$ простір Харді аналітичних (антианалітичних) функцій в диску $\mathbb{D}$; $P_\pm$ ортогональні проектори з L^2 на $H^2_\pm$; $\mathrm{Ball}(L)$ куля одиничного радіусу з центром в нулі лінійного метричного простору L; t незалежна змінна на $\mathbb{T}$.

У розділі 4.9 було дано визначення γ-твірних пар і сформульовано задачу Нехарі. Нагадаємо їх.

Визначення 5.1. *Пара* (a, b) *називається* γ*-твірною* якщо

(i) $a \in H^\infty_+, b \in H^\infty_+$

(ii) $a(0) > 0$, a зовнішня функція

(iii) $b(0) = 0$

(iv) $|a|^2 + |b|^2 = 1$, майже всюди на $\mathbb{T}$.

Задача 5.2 (Задача Нехарі, [2, 6, 3, 4, 51, 81])**.** Нехай $\gamma_{-1}, \gamma_{-2}, \ldots$ задана послідовність комплексних чисел. Потрібно знайти усі функції w, $w \in L^\infty$, $|w| < 1$, такі що

$$P_- w = \gamma_{-1}\bar{t} + \gamma_{-2}\bar{t}^2 + \cdots$$

Необхідні і достатні умови розв'язання задачі добре відомі. Нам зручно розглянути версію задачі Нехарі коли один з розв'язків уже задано. Нехай $w_0 \in L^\infty$ на $\mathbb{T}$, $|w_0| < 1$. Потрібно описати усі функції w цього ж класу такі, що $w - w_0 \in H^\infty_+$ тобто, P_- частини функцій w і w_0 збігаються). При такому підході питання про існування розв'язків немає.

Теорема 5.3 ([2, 6, 3, 4], дивіться також [51, 81]). *Множина розв'язків невизначеної задачі Нехарі (тобто такої що має більше одного розв'язку), допускає наступний опис (див. формулу* (4.9.10) *Розділу 4.9):*

$$w = s_0 + \frac{a^2\omega}{1-\omega b} = -\frac{a}{\bar a}\bar b + \frac{a^2\omega}{1-\omega b} = \frac{a}{\bar a}\frac{\omega - \bar b}{1-\omega b}, \quad \omega \in Ball(H^\infty_+), \qquad (5.1.1)$$

де (a, b) *– це* γ*-твірна пара, яка однозначно визначається даними задачі Нехарі (див. Розділ 4.9).*

Визначення 5.4. γ-твірна пара (a, b) називається *регулярною* якщо вона виникає в контексті невизначеної задачі Нехарі, як описано вище.

В подальшому нам знадобиться наступний принцип максимуму Смірнова (див., наприклад, [81], Лекція 1, [60], Параграф 3).

Теорема 5.5. [Принцип Максимуму Смирнова] *Припустимо, що функція* f *є відношенням двох обмежених аналітичних функцій у диску* $\mathbb{D}$,

$$f = \frac{f_1}{f_2}, \; f_1 \in H^\infty_+, \; f_2 \in H^\infty_+,$$

і припустимо, що знаменник f_2 *є зовнішньою функцією. Тоді, якщо* $f \in L^p$, *то* $f \in H^p_+$.

Зауваження 5.6. Кожна γ-твірна пара (a, b) задає відображення з одиничної кулі $Ball(H^\infty_+)$ до одиничної кулі $Ball(L^\infty)$ за формулою (5.1.1), при цьому, P_- частина функції w не залежить від вибору параметра ω. Дійсно, з формули (5.1.5) видно, що

$$a\omega(1 - b\omega)^{-1}a = w - s_0 \in L^\infty.$$

Оскільки функція $1 - b\omega$ зовнішня, то звідси, за принципом максимуму Смирнова, випливає, що $a\omega(1-b\omega)^{-1}a \in H^\infty$. Отже, формула (5.1.1) утворює функції w, що мають одну й ту саму P_- частину. Однак, не кожна пара утворює таким чином *усі* функції w у одиничній кулі $Ball(L^\infty)$ із заданою P_- частиною. Таким чином, клас регулярних γ-твірних пар є правильним підкласом класу γ-твірних пар.

Наступна теорема є основним результатом цього розділу:

Теорема 5.7 (Основний результат)**.** Для довільної γ-твірної пари (a, b) існує внутрішня функція θ така, що пара $(a, b\theta)$ є регулярною.

Зауваження 5.8. У якості наслідку зазначимо, що a-елементи регулярних пар не мають ніяких додаткових властивостей в порівнянні з a-елементами γ-твірних пар. Будь-яка зовнішня функція a така, що $|a| < 1$ на $\mathbb{D}$ і $\ln(1 - |a|^2) \in L^1$ на $\mathbb{T}$ є a-елементом деяких регулярних пар. Тим самим отримано позитивний розв'язок задачі Д. Сарасона, сформульованої їм у роботі [85].

Зауваження 5.9. Відзначимо також, що елемент b довільної γ-твірної пари однозначно визначає її a-елемент (зовнішню функцію). Будемо називати функцію b

$$b \in H^\infty, \quad b(0) = 0, \quad |b| \le 1, \quad \ln(1 - |b|^2) \in L^1 \tag{5.1.2}$$

регулярною, якщо відповідна γ-твірна пара є регулярною. Теорема 5.7 стверджує що будь-яка функція b виду (5.1.2) може бути зроблена регулярною шляхом множення на деяку внутрішню функцію.

5.1.2 Регулярні і сингулярні γ-твірні пари та їх композиція.

Визначення 5.10 ([14, 15])**.** Матриця-функція $\begin{bmatrix} \overline{p} & \overline{q} \\ q & p \end{bmatrix}$, що задана майже всюди на $\mathbb{T}$, називається *γ-твірною матрицею*, якщо $p = \frac{1}{a}$, $q = -\frac{b}{a}$, де (a, b) є γ-твірною парою.

Цей клас був введений і вивчений Д. З. Аровим в [14, 15]. Нехай $j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Безпосередньо перевіряється що γ-твірні матриці є j-унітарними, тобто,

$$\begin{bmatrix} \overline{p} & \overline{q} \\ q & p \end{bmatrix} j \begin{bmatrix} \overline{p} & \overline{q} \\ q & p \end{bmatrix}^* = j$$

і

$$\begin{bmatrix} \overline{p} & \overline{q} \\ q & p \end{bmatrix}^* j \begin{bmatrix} \overline{p} & \overline{q} \\ q & p \end{bmatrix} = j,$$

де $*$ позначає спряжену матрицю. У цих позначеннях формула (5.1.1) приймає вигляд

$$w = -\frac{a}{\overline{a}}\overline{b} + \frac{a^2\omega}{1-\omega b} = \frac{a}{\overline{a}}\frac{\omega - \overline{b}}{1-\omega b} = \frac{\overline{p}\omega + \overline{q}}{q\omega + p}, \quad \omega \in Ball(H_+^\infty), \tag{5.1.3}$$

а (при $\omega = 0$)

$$s_0 = -\frac{a}{\overline{a}}\overline{b} = \frac{\overline{p}}{q}. \tag{5.1.4}$$

Наступне визначення було дано Д. З. Аровим у [[14, 15]].

Визначення 5.11. γ-твірна пара (a, b), відповідна γ-твірна матриця и матриця розсіювання називаються *сингулярними* якщо

$$s_0 = -\frac{a}{\overline{a}}\overline{b} \in H_+^\infty. \tag{5.1.5}$$

Це означає, що відображення (5.1.3) діє з $Ball(H_+^\infty)$ у $Ball(H_+^\infty)$, тобто, утворює аналітичні функції (функції з нульовою P_- частиною), але не усі такі функції.

Лема 5.12. *Якщо* (a, b) *є сингулярною парою, то* $u \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{\overline{a}} \in H_+^\infty$, *тобто, є внутрішньою функцією.*

Доведення. За визначенням,

$$s_0 = -\frac{a}{\overline{a}}\overline{b} \in H_+^\infty.$$

Помноживши цю рівність на b і використовуючи $|a|^2 + |b|^2 = 1$ м. в. на $\mathbb{T}$, отримуємо

$$s_0 b = -\frac{a}{\overline{a}}(1 - a\overline{a}).$$

Отже,

$$u \equiv \frac{a}{\overline{a}} = a^2 - s_0 b \in H_+^\infty.$$

□

Лема 5.13. Якщо (a_1, b_1) γ-твірна пара і (a_2, b_2) сингулярна γ-твірна пара, то суперпозиція дробово-лінійних перетворень типу (5.1.3) визначена (спочатку застосовується перетворення з індексом 2, потім з індексом 1) і має такий же вигляд з γ-твірною парою (a, b), де

$$a = \frac{a_1 a_2}{1 - b_1 s_0^{(2)}}, \quad b = b_2 + \frac{b_1 a_2^2}{1 - b_1 s_0^{(2)}}, \tag{5.1.6}$$

$$s_0^{(2)} = -\frac{a_2}{\overline{a}_2}\overline{b}_2 \in H_+^\infty. \tag{5.1.7}$$

Доведення. Формули перевіряються прямим обчисленням. Композиції дробово-лінійних перетворень відповідає добуток γ-твірних матриць

$$\begin{bmatrix} \overline{p} & \overline{q} \\ q & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{p}_1 & \overline{q}_1 \\ q_1 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{p}_2 & \overline{q}_2 \\ q_2 & p_2 \end{bmatrix}. \tag{5.1.8}$$

Оскільки добуток j-унітарних матриць є j-унітарною матрицею, ми отримуємо, що $|a|^2 + |b|^2 = 1$ м. в. на $\mathbb{T}$. Оскільки b_1 і $s_0^{(2)}$ належать до H_+^∞ і обмежені по модулю 1, то функція $1 - b_1 s_0^{(2)}$ є зовнішньою. В силу принципу максимуму Смирнова (див. Розділ 5.1.1) $a \in H_+^\infty$, $b \in H_+^\infty$. Оскільки a_1 і a_2 зовнішні, то a є зовнішньою. Оскільки $b_2(0) = 0$ и $b_1(0) = 0$, то $b(0) = 0$. Таким чином (a, b) є γ-твірною парою. □

Теорема 5.14. ([14, 15]) *Будь-яка γ-твірна пара (матриця) допускає єдину регулярно-сингулярну факторизацію типу* (5.1.6) *(еквівалентно* (5.1.8)*).*

Теорема 5.15 ([14, 15])**.** *γ-твірна пара є регулярною тогді і тільки тогді, коли у регулярно-сингулярній факторизації сингулярний множник є постійним.*

5.1.3 Зведення основної теореми до сингулярного випадку.

Теорема 5.14 дозволяє звести доведення основної Теореми 5.7 про регуляризацію до випадку Аров-сингулярних пар:

Теорема 5.16. Нехай

$$(a, b) = (a_1, b_1) \circ (a_2, b_2)$$

$$\begin{bmatrix} \overline{p} & \overline{q} \\ q & p \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \overline{p}_1 & \overline{q}_1 \\ q_1 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{p}_2 & \overline{q}_2 \\ q_2 & p_2 \end{bmatrix} \tag{5.1.9}$$

регулярно-сингулярна факторизація. Тоді, якщо $(a_2, b_2\theta)$ є регулярною, то і $(a, b\theta)$ є регулярною.

Доведення. Розглянемо дробово-лінійне перетворення, що відповідає парі $(a, b\theta)$

$$\frac{a}{\overline{a}}\frac{\omega - \overline{b\theta}}{1 - \omega b\theta}, \quad \omega \in Ball(H^\infty_+). \tag{5.1.10}$$

Відображення $\omega = 0$ є $\overline{\theta} s_0$, де $s_0 = -\frac{a}{\overline{a}}\overline{b}$. Щоб довести регулярність пари $(a, b\theta)$, треба показати, що для будь-якого розв'язку w задачі Нехарі з заданими $P_-(\overline{\theta} s_0)$ знайдеться $\omega \in Ball(H^\infty_+)$ таке, що w є відображенням цього ω при відображенні (5.1.10).

Оскільки w і $\overline{\theta} s_0$ є розв'язками однієї задачі Нехарі, це означає, що $w \in Ball(L^\infty)$, $w - \overline{\theta} s_0 \in H^\infty_+$. Але тоді і $\theta w - s_0 \in H^\infty_+$. Отже, θw і s_0 також є розв'язками однієї (іншої) задачі Нехарі. При цьому за формулою (5.1.9),

$$s_0 = \frac{a_1}{\overline{a}_1}\frac{s_0^{(2)} - \overline{b}_1}{1 - b_1 s_0^{(2)}},$$

де

$$s_0^{(2)} = -\frac{a_2}{\overline{a}_2}\overline{b}_2 \in H^\infty_+.$$

Оскільки пара (a_1, b_1) регулярна, то вона описує усі розв'язки деякої задачі Нехарі. Як ми бачимо, s_0 – це один з розв'язків цієї задачі. Тоді θw – це розв'язок цієї ж задачі, тобто, існує $\omega_1 \in Ball(H^\infty_+)$ така, що

$$\theta w = \frac{a_1}{\overline{a}_1}\frac{\omega_1 - \overline{b}_1}{1 - b_1\omega_1}. \tag{5.1.11}$$

з умови j-унітарності матриці $\begin{bmatrix} \overline{p}_1 & \overline{q}_1 \\ q_1 & p_1 \end{bmatrix}$, випливає

$$\theta w - s_0 = \tfrac{1}{q_1\omega_1 + p_1}(\omega_1 - s_0^{(2)})\tfrac{1}{q_1 s_0^{(2)} + p_1} \tag{5.1.12}$$

$$= \tfrac{a_1}{1 - b_1\omega_1}(\omega_1 - s_0^{(2)})\tfrac{a_1}{1 - b_1 s_0^{(2)}}. \tag{5.1.13}$$

Отже,

$$\overline{\theta}(\omega_1 - s_0^{(2)}) = \frac{1 - b_1\omega_1}{a_1}(w - \overline{\theta} s_0)\frac{1 - b_1 s_0^{(2)}}{a_1}.$$

За Принципом Максимуму Смирнова, права частина належить до H^∞_+. Тоді $\overline{\theta}\omega_1$ і $\overline{\theta} s_0^{(2)}$ є розв'язками однієї і тієї ж (третьої) задачі Нехарі. Оскільки

$$\overline{\theta} s_0^{(2)} = \frac{a_2}{\overline{a}_2}\frac{0 - \overline{b_2\theta}}{1 - 0 \cdot b_2\theta}.$$

і $(a_2, b_2\theta)$ є регулярною, то існує ω така, що

$$\overline{\theta}\omega_1 = \frac{a_2}{\overline{a}_2}\,\frac{\omega - \overline{b_2\theta}}{1 - \omega b_2\theta}.$$

Таким чином,

$$\omega_1 = \frac{a_2}{\overline{a}_2}\,\frac{\omega\theta - \overline{b_2}}{1 - \omega\theta b_2}. \tag{5.1.14}$$

Комбінуючи (5.1.11) і (5.1.14), отримуємо

$$\theta w = \frac{a}{\overline{a}}\,\frac{\omega\theta - \overline{b}}{1 - \omega\theta b}.$$

І, звичайно,

$$w = \frac{a}{\overline{a}}\,\frac{\omega - \overline{b\theta}}{1 - \omega b\theta}.$$

$\square$

5.1.4 Регуляризація γ-твірних пар.

Нехай (a, b) – це сингулярна γ-твірна пара, тобто,

$$s_0 = -\frac{a}{\overline{a}}\overline{b} \in H^\infty_+. \tag{5.1.15}$$

Умова (5.1.15) інтерпретується як умова псевдопродовження

$$\frac{s_0}{a} = -\frac{\overline{b}}{\overline{a}}, \qquad \text{м. в. на } \mathbb{T}. \tag{5.1.16}$$

Ліва частина рівності аналітична у $\mathbb{D}$, права антианалітична у $\mathbb{D}$, межові значення збігаються майже всюди на $\mathbb{T}$. Ми хочемо довести, що існує внутрішня функція θ така, що пара $(a, b\theta)$ є регулярною, тобто, згідно з формулою (4.9.22) твердження Теореми 4.28, що

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{clos}\left\{ \begin{bmatrix} ah \\ P_+ s_0 \overline{\theta} h \end{bmatrix} : h \in H^2_+ \right\}.$$

Ми доведемо це в три етапи (лема, наслідок, теорема). Нагадаємо, що, якщо $h = \frac{1}{a} \in H^2$, то, за формулою (5.1.16), додатковий множник θ не потрібен. У загальному випадку функцію $\frac{1}{a} \notin H^2$ треба апроксимувати функціями з H^2. В якому саме сенсі ми уточнимо нижче. Тут ми використовуємо конструкцію, застосовану В. Е. Кацнельсоном у роботі [60] (Параграфи 1 і 7). Визначимо

$$\tilde{h}_\epsilon \overset{\text{def}}{=} \frac{\frac{1}{a}}{1+\epsilon\left|\frac{1}{a}\right|^2} = \frac{\frac{1}{a}}{1+\epsilon+\epsilon\left|\frac{s_0}{a}\right|^2}, \quad \text{м.в. на } \mathbb{T}. \tag{5.1.17}$$

$\tilde{h}_\epsilon \in L^\infty$ і допускає аналітичне продовження у диск $\mathbb{D}$ (за допомогою (5.1.16)). А саме,

$$\tilde{h}_\epsilon = \frac{\frac{1}{a}}{1+\epsilon+\epsilon\frac{s_0}{a}\cdot\frac{\overline{s_0}}{\overline{a}}} = \frac{\frac{1}{a}}{1+\epsilon-\epsilon\frac{s_0}{a}\frac{b}{a}} = \frac{a}{a^2+\epsilon(a^2-s_0b)}.$$

Розглянемо зовнішньо-внутрішню факторизацію знаменника $\tilde{h}_\epsilon$

$$a^2+\epsilon(a^2-s_0b) = \theta_\epsilon\varphi_\epsilon.$$

Тоді, в силу Принципу Максимуму Смирнова,

$$h_\epsilon \overset{\text{def}}{=} \theta_\epsilon\tilde{h}_\epsilon = \tfrac{a}{\varphi_\epsilon} \in H^\infty_+. \tag{5.1.18}$$

Лема 5.17. Для усіх $|\zeta|<1$, $\theta_\epsilon(\zeta)\to 1$ при $\epsilon\to 0$.

Доведення. Функція $\varphi_\epsilon(\zeta), |\zeta|<1$, визначена наступним чином

$$\varphi_\epsilon(\zeta) = \exp\left\{\int_{\mathbb{T}}\frac{t+\zeta}{t-\zeta}\ln|a^2+\epsilon\cdot(a^2-s_0b)|dm(t)\right\}.$$

Зауважимо, що на колі

$$|a^2+\epsilon\cdot(a^2-s_0b)| = |a^2|\cdot\left|1+\epsilon\left|\frac{1}{a}\right|^2\right| = |a^2|+\epsilon.$$

Отже,

$$\ln|a^2+\epsilon\cdot(a^2-s_0b)|$$

має сумовну мажоранту і міноранту. Оскільки

$$a^2+\epsilon\cdot(a^2-s_0b)\to a^2,$$

м. в. на $\mathbb{T}$ при $\epsilon\to 0$, то, за Теоремою про сумовну мажоранту,

$$\varphi_\epsilon(\zeta)\to a^2(\zeta)$$

при $\epsilon\to 0$ для будь якого $|\zeta|<1$. Отже,

$$\theta_\epsilon(\zeta)\to 1$$

при $\epsilon\to 0$ для будь-якого $|\zeta|<1$. □

Наслідок 5.18. Можна вибрати послідовність $\epsilon_k \downarrow 0$ таку, що добуток $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \theta_{\epsilon_k}^2$ збігається у L^2 і тим самим визначає внутрішню функцію θ.

Доведення. За Лемою 5.17, $\theta_\epsilon(0) \to 1$, коли $\epsilon \to 0$. Тоді можна вибрати послідовність $\epsilon_k \downarrow 0$ таку, що добуток $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \theta_{\epsilon_k}^2(0)$ збігається. Це тягне за собою збіжність добутку $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \theta_{\epsilon_k}^2$ в L^2 до деякої функції θ, оскільки

$$\|\prod_{k=1}^{n} \theta_{\epsilon_k}^2 - \prod_{k=1}^{m} \theta_{\epsilon_k}^2\|_{L^2}^2 = 2 - 2\mathrm{Re} \prod_{k=m}^{n} \theta_{\epsilon_k}^2(0), (n > m).$$

θ є внутрішньою, бо існує підпослідовність послідовності $\prod\limits_{k=1}^{n} \theta_{\epsilon_k}^2$, що збігається до θ майже всюди. $\square$

Теорема 5.19. $\begin{bmatrix} ah_{\epsilon_k} \\ P_+ s_0 \overline{\theta} h_{\epsilon_k} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ у L^2 при $k \to \infty$.

Доведення. Оскільки $ah_{\epsilon_k} = \theta_{\epsilon_k} \frac{1}{1+\epsilon\left|\frac{1}{a}\right|^2}$, то

$$ah_{\epsilon_k} - 1 = \theta_{\epsilon_k}\left(\frac{1}{1+\epsilon\left|\frac{1}{a_0}\right|^2} - 1\right) + (\theta_{\epsilon_k} - 1)$$

і

$$\|ah_{\epsilon_k} - 1\|_{L^2} \leq \left\|\frac{1}{1+\epsilon\left|\frac{1}{a_0}\right|^2} - 1\right\|_{L^2} + \|\theta_{\epsilon_k} - 1\|_{L^2} \to 0$$

при $k \to \infty$. Перший доданок в правій частині збігається до нуля в силу Теореми про сумовну мажоранту, другий, оскільки

$$\|\theta_{\epsilon_k} - 1\|_{L^2}^2 = 2 - 2\mathrm{Re}\theta_{\epsilon_k}(0) \to 0,$$

в силу Леми 5.17. Далі,

$$\begin{aligned} s_0\overline{\theta}h_{\epsilon_k} &= \frac{\overline{\theta}}{\overline{\theta_{\epsilon_k}^2}} s_0 \overline{\theta_{\epsilon_k}^2} h_{\epsilon_k} = \frac{\overline{\theta}}{\overline{\theta_{\epsilon_k}^2}} \overline{\theta}_{\epsilon_k} \frac{\frac{s_0}{a}}{1+\epsilon\left|\frac{1}{a}\right|^2} \\ &= -\frac{\overline{\theta}}{\overline{\theta_{\epsilon_k}^2}} \overline{\theta}_{\epsilon_k} \frac{\frac{\overline{b}}{a}}{1+\epsilon\left|\frac{1}{a}\right|^2} = -\frac{\overline{\theta}}{\overline{\theta_{\epsilon_k}^2}} \overline{b}\, \overline{h}_{\epsilon_k} \in H_-^2. \end{aligned}$$

Отже,

$$P_+ s_0 \overline{\theta} h_{\epsilon_k} = 0.$$

□

Зауваження 5.20. Використовуючи Теорему Фростмана-Рудіна (див. [59, 60]), можна выбрати $\epsilon_k \downarrow 0$ таку, що θ_{ϵ_k} будуть добутками Бляшке. Тоді θ буде добутком Бляшке.

5.2 Сингулярна пара з рівністю Парсеваля як контрприклад до однієї гипотези Д.Сарасона

5.2.1 Постановка проблеми та формулювання основного результату. Наступний клас функцій природно з'явився в статті Адамяна, Арова і Крейна [2], див. також [5]: Нехай b буде функція класу Шура в одиничному крузі $\mathbb{D}$ вигляду (5.1.2).

Визначення 5.21. Будемо говорити що функція b має властивість *абсолютної неперервності* (ac) якщо для будь-якої функції класу Шура ω міра $\sigma_{b\omega}$ в представленні Ріса-Герглотца

$$\frac{1 + b(\zeta)\omega(\zeta)}{1 - b(\zeta)\omega(\zeta)} = \int_{\mathbb{T}} \frac{t + \zeta}{t - \zeta} \sigma_{b\omega}(dt), \quad |\zeta| < 1$$

є абсолютно неперервною.

В роботі [2] було показано що регулярні функції b (див. Зауваження 5.9) мають властивість (ac). Адамяном, Аровим і Крейном в [2, 5] було сформульовано питання: чи вірно зворотне твердження? Тобто, чи вірно що всяка функція b виду (5.1.2), що має властивість (ac), регулярна? Твердження еквівалентне цьому було сформульовано Д. Сарасоном у вигляді гіпотези в роботі [85] в зв'язку з виступаючими точками одиничної кулі в просторі H^1 (обговорення еквівалентності цих двох питань див. в [65, 68]). У цьому розділі буде показано що це твердження не є вірним.

Більш конкретно, ми покажемо що пари (a, b), що виникають при параметризації розв'язань межової інтерполяційної задачі (тісно пов'язаної з нескінченною проблемою моментів) мають властивість (ас), але є сингулярними, тобто ніяк не можуть бути регулярними.

Ідея доведення полягає в наступному. Межова інтерполяційна задача вкладається в схему ортогональної Абстрактної Задачі Інтерполяції (див. Розділ 3.1). Властивість (ас) випливає з того що для будь-якого розв'язку цієї задачі (точніше для асоційованого з розв'язком представлення Фур'є (3.1.4)) має місце рівність в нерівності (3.1.5): $\|Fx\|^2_{H^w} = D(x,x)$. Тобто, ця задача має властивість *рівності Парсеваля.* Оскільки за самим змістом задачі всі її розв'язки лежать в H^∞, то в тому числі і центральний розв'язок $s_0 = -\frac{a}{\bar{a}}\bar{b}$ лежить в H^∞. Таким чином, для доказу сингулярності пари (a,b) достатньо довести що a є зовнішньою.

5.2.2 Проблема моментів Гамбургера та пов'язані з нею об'єкти. Нехай проблема моментів Гамбургера (ПМГ) формулюється наступним чином [10]:

Задача 5.22. Нехай $c_0, c_1, \ldots$ задані дійсні числа. Потрібно знайти міру $\sigma(dx) \geq 0$ на дійсній осі $\mathbb{R}$ таку, що

$$c_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \sigma(dx) \tag{5.2.1}$$

при всіх невід'ємних цілих k.

Критерій розв'язності добре відомий [10]: проблема моментів є розв'язною тоді і тільки тоді коли

$$\sum_{k,j=0}^{N} c_{k+j}\xi_k\bar{\xi}_j \geq 0 \tag{5.2.2}$$

при всіх невід'ємних цілих N і $\xi_k \in \mathbb{C}$.

Нехай $\mathcal{X}$– це простір поліномів однієї змінної X з коефіцієнтами у $\mathbb{C}$, $\mathcal{X} = \{p = \sum_{k=0}^{N} \xi_k X^k, \xi_k \in \mathbb{C}\}$. Визначимо квадратичну форму D на $\mathcal{X}$:

$$D(X^k, X^j) \overset{\text{def}}{=} c_{k+j}. \tag{5.2.3}$$

Критерій розв'язності означає, що

$$D(p,p) \geq 0 \tag{5.2.4}$$

для усіх поліномів $p \in \mathcal{X}$. Для кожного полінома $p \in \mathcal{X}$ визначимо дуальний поліном $\tilde{p}$ за формулою

$$\tilde{p}(z) \overset{\text{def}}{=} D\left(\frac{p(X)-p(z)}{X-z}, 1\right). \qquad (5.2.5)$$

Розглянемо наступний оператор у просторі $\mathcal{X}$

$$(Tp)(X) = \frac{(X-i)p(X) + 2ip(-i)}{X+i}. \qquad (5.2.6)$$

Твердження 5.23.

$$D(p,q) - D(Tp,Tq) = M_1p \cdot \overline{M_1q} - M_2p \cdot \overline{M_2q}, \quad p, q \in \mathcal{X}, \qquad (5.2.7)$$

де

$$M_1p = p(-i) + i\tilde{p}(-i), \quad M_2p = p(-i) - i\tilde{p}(-i), \qquad (5.2.8)$$

і $\tilde{p}$ визначений формулою (5.2.5).

Доведення. Спростимо спочатку праву частину (5.2.7)

$$\begin{aligned}
& M_1p \cdot \overline{M_1q} - M_2p \cdot \overline{M_2q} \\
= \; & (p(-i) + i\tilde{p}(-i)) \cdot \overline{(q(-i) + i\tilde{q}(-i))} \qquad (5.2.9)\\
- \; & (p(-i) - i\tilde{p}(-i)) \cdot \overline{(q(-i) - i\tilde{q}(-i))} \\
= \; & 2i\widetilde{p}(-i)\overline{q(-i)} - 2ip(-i)\overline{\widetilde{q}(-i)}.
\end{aligned}$$

Оскільки будь-який поліном можна записати у вигляді

$$p(X) = (X+i)f(X) + p(-i),$$

то перевірка (5.2.7) зводиться до розгляду двох випадків.

Випадок 1: Обидва поліноми $p(X)$ і $q(X)$ мають вигляд

$$p(X) = (X+i)f(X) \text{ и } q(X) = (X+i)g(X),$$

тобто, $p(-i) = 0$ и $q(-i) = 0$. У цьому випадку права частина (5.2.7), в силу (5.2.9), дорівнює нулю. При цьому

$$(Tp)(X) = (X-i)f(X) \text{ и } (Tq)(X) = (X-i)g(X).$$

І, отже, ліва частина (5.2.7) дорівнює

$$D((X+i)f(X), (X+i)g(X)) - D((X-i)f(X), (X-i)g(X))$$

$$= 2iD(f, Xg) - 2iD(Xf, g) = 0.$$

Випадок 2: Один з поліномів є постійним. Для визначеності нехай $q(X) = 1$. В цьому випадку $\widetilde{q}(X) = 0$ і права частина (5.2.7), в силу (5.2.9), дорівнює

$$2i\widetilde{p}(-i).$$

Далі, $(Tq)(X) = 1$ і ліва частина (5.2.7) приймає вигляд

$$\begin{aligned} D(p, 1) - D(Tp, 1) &= D((I - T)p, 1) \\ &= D\left(2i\frac{p(X) - p(-i)}{X + i}, 1\right) = 2i\tilde{p}(-i). \end{aligned}$$

□

На завершення цього параграфа обчислимо резольвенту оператора T.

Твердження 5.24. При $\zeta \neq 1$

$$(\zeta - T)^{-1}p = \frac{1}{\zeta - 1}\frac{(X + i)p(X) - (z + i)p(z)}{X - z}, \qquad (5.2.10)$$

де $z = i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$. Оператор $I - T$ є незворотним.

Доведення. Позначимо

$$(\zeta - T)^{-1}p = q.$$

Тоді

$$\begin{aligned} p(X) = (\zeta - T)q &= \zeta q(X) - \frac{Xq(X) + iq(-i)}{X + i} + i\frac{q(X) - q(-i)}{X + i} \\ &= \left(\zeta - \frac{X}{X + i} + \frac{i}{X + i}\right)q(X) - \frac{2iq(-i)}{X + i}. \end{aligned}$$

Звідки

$$(\zeta(X + i) - X + i)\, q(X) = (X + i)p(X) + C,$$

де C – константа. Або

$$q(X) = \frac{(X + i)p(X) + C}{(\zeta - 1)X + i(\zeta + 1)}.$$

Якщо $\zeta \neq 1$, то константа C визначається однозначно за поліномом $p(X)$ з умови, що $q(X)$ – це поліном

$$q(X) = \frac{1}{\zeta - 1} \frac{(X+i)p(X) - (z+i)p(z)}{X - z},$$

де $z = i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$. При $\zeta = 1$, константа C довільна і оператор $I - T$ має нетривіальне (одномірне) ядро $(I-T)1 = 1$, хоча і є сюр'єктивним. □

Зауваження 5.25. Формула

$$z = i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}. \tag{5.2.11}$$

визначає конформне відображення одиничного диску $\mathbb{D}$ на верхню півплощину $Im\ z > 0$. Зворотне відображення задається формулою

$$\zeta = \frac{z-i}{z+i}. \tag{5.2.12}$$

Надалі будемо дотримуватися позначень, що величини ζ і z зв'язані співвідношеннями (5.2.11) і (5.2.12). Зауважимо, що

$$\frac{1}{\zeta - 1} = \frac{1}{\frac{z-i}{z+i} - 1} = -\frac{z+i}{2i}.$$

Тоді (5.2.10) можна переписати у вигляді

$$(\zeta - T)^{-1}p = -\frac{z+i}{2i} \cdot \frac{(X+i)p(X) - (z+i)p(z)}{X - z}. \tag{5.2.13}$$

де $z = i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$, при $\zeta \neq 1$, відповідно, $z \neq \infty$.

5.2.3 Межова задача інтерполяції.

Розглянемо Абстрактну Задачу Інтерполяції (див. Розділ 3.1) з даними, що було введено в попередньому параграфі. Зв'язок цієї задачі з проблемою моментів Гамбургера, а також мотивування конструкцій попереднього параграфу детально обговорюються у роботі [67]. Ця задача також пов'язана із задачею, що розглядається в Розділі 6.2.

Задача 5.26. Отже, нехай $\mathcal{X}$ - це простір поліномів від однієї змінної X з комплексними коефіцієнтами; D - півтора-лінійна форма на $\mathcal{X}$:

$$D(X^k, X^j) = c_{k+j},$$

$c_0, c_1, \ldots$ - задані дійсні числа такі, що $D(p,p) \geq 0$; T - лінійний оператор у $\mathcal{X}$:

$$(Tp)(X) = \frac{(X-i)p(X) + 2i \cdot p(-i)}{X+i}; \tag{5.2.14}$$

$E_1 = \mathbb{C}$, $E_2 = \mathbb{C}$; лінійні відображення з $\mathcal{X}$ у E_1 і E_2 відповідно

$$\begin{aligned} M_1 p &= \quad p(-i) + i\tilde{p}(-i), \\ M_2 p &= - \ p(-i) + i\tilde{p}(-i). \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

Нагадаємо, що

$$\tilde{p}(z) \overset{\text{def}}{=} D\left(\frac{p(X) - p(z)}{X - z}, 1\right).$$

Визначені вище об'єкти пов'язані тотожністю (Твердження 5.23)

$$D(p,q) - D(Tp, Tq) = M_1 p \cdot \overline{M_1 q} - M_2 p \cdot \overline{M_2 q}, \quad p, q \in \mathcal{X}. \tag{5.2.16}$$

Розв'язками задачі називаються такі функції w класу Шура у одиничному диску для яких (див. Розділ 3.1, (3.1.4)) існує лінійне відображення $F = \begin{bmatrix} F_+ \\ F_- \end{bmatrix}$ з $\mathcal{X}$ у простір де Бранжа-Ровняка H^w (див. Розділ 3.1, (3.1.3)) таке, що $\forall p \in \mathcal{X}$,

1. $$(FTp)(t) = t(Fp)(t) - \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ \overline{w(t)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_2 p \\ M_1 p \end{bmatrix}, \tag{5.2.17}$$ м. в. $|t| = 1$;

2. $$\|Fp\|_{H^w}^2 \leq D(p,p). \tag{5.2.18}$$

відображення F називається *представленням Фур'є*, що відповідає розв'язку w.

5.2.4 Представлення Фур'є пов'язане з розв'язком w.

Оскільки для даних Задачі 5.26 оператори $(\zeta - T)^{-1}$ і $(\mathbf{1} - \overline{\zeta}T)^{-1}$ існують при усіх $\zeta \neq 1$ (див. Твердження 5.24), то (5.2.17) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} (F_+^w p)(\zeta) &= \quad (w(\zeta)M_1 - M_2)(\zeta - T)^{-1} p, \\ (F_-^w p)(\zeta) &= \overline{\zeta}(M_1 - \overline{w(\zeta)} M_2)(I - \overline{\zeta}T)^{-1} p. \end{aligned} \tag{5.2.19}$$

Для наших даних F^w може бути явно обчислено.

Теорема 5.27. Для будь-якого поліному $p \in \mathcal{X}$,

$$(F^w p)(t) = -\frac{x+i}{2i} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & w(t) \\ \overline{w(t)} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(x) - i\tilde{p}(x) \\ p(x) + i\tilde{p}(x) \end{bmatrix} \tag{5.2.20}$$

при м.в. $t \in \mathbb{T}$, де $x = i\frac{1+t}{1-t}$ $(\in \mathbb{R})$.

Доведення. За формулами (5.2.19), і з огляду на визначення (5.2.15) функціоналів M_1 і M_2, обчислення зводиться до знаходження

$$\left((\zeta - T)^{-1} p\right)(-i) \text{ і } \left((\zeta - T)^{-1} p\right)^{\sim}(-i)$$

Скориставшись формулою (5.2.13), отримуємо

$$\left((\zeta - T)^{-1} p\right)(-i) = -\frac{z+i}{2i} \cdot \frac{-(z+i)p(z)}{-i-z} = -\frac{z+i}{2i} p(z). \tag{5.2.21}$$

і

$$\begin{aligned}
&\left((\zeta - T)^{-1} p\right)^{\sim}(-i) \\
&= D\left(\frac{\left((\zeta - T)^{-1} p\right)(X) - \left((\zeta - T)^{-1} p\right)(-i)}{X+i}, 1 \right) \\
&= D\left(\frac{-\frac{z+i}{2i} \cdot \frac{(X+i)p(X) - (z+i)p(z)}{X-z} + \frac{z+i}{2i} p(z)}{X+i}, 1 \right) \\
&= -\frac{z+i}{2i} D\left(\frac{p(X) - p(z)}{X-z}, 1 \right) = -\frac{z+i}{2i} \widetilde{p}(z).
\end{aligned} \tag{5.2.22}$$

Підставляючи (5.2.21) і (5.2.22) у першу формулу (5.2.15), з урахуванням визначення (5.2.15) функціоналів M_1 і M_2, отримуємо,

$$\begin{aligned}
(F^w_+ p)(\zeta) &= (w(\zeta) M_1 - M_2)(\zeta - T)^{-1} p \\
&= -\frac{z+i}{2i} \left(w(\zeta)[p(z) + i\widetilde{p}(z)] + [p(z) - i\widetilde{p}(z)] \right).
\end{aligned}$$

Переходячи на межу, отримуємо рівність перших елементів (5.2.20). Оскільки

$$\overline{\zeta}(I - \overline{\zeta} T)^{-1} = (\frac{1}{\overline{\zeta}} - T)^{-1}$$

і при відображенні $z = i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$, $\frac{1}{\zeta}$ переходить в $\overline{z}$, то для другої формули (5.2.15) отримуємо

$$\begin{aligned}(F^w_- p)(\zeta) &= \overline{\zeta}(M_1 - \overline{w(\zeta)}M_2)(I - \overline{\zeta}T)^{-1}p \\ &= -\frac{\overline{z}+i}{2i}\left([p(\overline{z}) + i\widetilde{p}(\overline{z})] + \overline{w(\zeta)}[p(\overline{z}) - i\widetilde{p}(\overline{z})]\right).\end{aligned}$$

Переходячи на межу, отримуємо рівність других елементів (5.2.20). □

Зокрема можна обчислити представлення Фур'є F^w для мономів

$$p = X^k$$

Твердження 5.28.

$$(F^w(X^k))(t) = -\frac{x+i}{2i}\cdot x^k \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - i\sum_{j=1}^k \frac{c_{j-1}}{x^j} \\ 1 + i\sum_{j=1}^k \frac{c_{j-1}}{x^j} \end{bmatrix}. \tag{5.2.23}$$

Доведення. В силу Теореми 5.27 потрібно обчислити $\widetilde{X^k}$:

$$\begin{aligned}\widetilde{X^k}(z) &= D\left(\frac{X^k - z^k}{X - z}, 1\right) \\ &= \sum_{j=1}^k D(X^{j-1}z^{k-j}, 1) \\ &= \sum_{j=1}^k z^{k-j}D(X^{j-1}, 1) = \sum_{j=1}^k z^{k-j}c_{j-1}.\end{aligned}$$

Отже

$$\widetilde{X^k}(z) = \sum_{j=1}^k z^{k-j}c_{j-1} = z^k\sum_{j=1}^k \frac{c_{j-1}}{z^j}. \tag{5.2.24}$$

Підставляючи (5.2.24) у (5.2.20), отримуємо (5.2.23). □

Нам знадобиться кілька наслідків Пропозиції 5.28.

Твердження 5.29.

$$(F^w(X^{k+1}))(t) = x(F^w(X^k))(t) + i\frac{x+i}{2i}\begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}c_k. \tag{5.2.25}$$

Перевіряється безпосередньо використовуючи формулу (5.2.23).

Лема 5.30.

$$\begin{aligned} xF_+^w(X^k) + (x+i)c_k &\in H_+^2, \\ xF_-^w(X^k) - (x+i)c_k &\in H_-^2. \end{aligned} \tag{5.2.26}$$

Доведення. При $k = 0$ формула (5.2.23) має вигляд

$$F^w 1 = -\frac{x+i}{2i} \begin{bmatrix} 1 & w \\ w^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5.2.27}$$

Використовуючи (5.2.27), можна переписати (5.2.25) двома способами:

$$\begin{aligned} F^w(X^{k+1}) &= xF^w(X^k) + iF^w(c_k) + (x+i) \begin{bmatrix} 1 & w \\ w^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} c_k, \\ F^w(X^{k+1}) &= xF^w(X^k) - iF^w(c_k) - (x+i) \begin{bmatrix} 1 & w \\ w^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} c_k. \end{aligned} \tag{5.2.28}$$

З першої компоненти першої формули випливає

$$F_+^w(X^{k+1}) = xF_+^w(X^k) + iF_+^w(c_k) + (x+i)c_k, \tag{5.2.29}$$

а друга компонента другої формули задає

$$F_-^w(X^{k+1}) = xF_-^w(X^k) - iF_-^w(c_k) - (x+i)c_k, \tag{5.2.30}$$

тобто,

$$\begin{aligned} xF_+^w(X^k) + (x+i)c_k &= F_+^w(X^{k+1}) - iF_+^w(c_k), \\ xF_-^w(X^k) - (x+i)c_k &= F_-^w(X^{k+1}) + iF_-^w(c_k). \end{aligned}$$

Звідки випливає потрібне. □

Теорема 5.31. Для будь-якого розв'язку w задачі і для будь-якого цілого додатного k

$$\frac{1-|w|^2}{|t-1|^{2k}} \in L^1 \tag{5.2.31}$$

Доведення. Підставляючи вираз (5.2.23) в нерівність (5.2.18) отримуємо

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{|x+i|^2}{4} x^{2k} \begin{bmatrix} 1 - i\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{c_{j-1}}{x^j} \\ 1 + i\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{c_{j-1}}{x^j} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - i\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{c_{j-1}}{x^j} \\ 1 + i\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{c_{j-1}}{x^j} \end{bmatrix} m(dt) \le c_{2k}.$$

Оскільки

$$\begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - w\overline{w} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{w} & 1 \end{bmatrix},$$

то отримуємо

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{|x+i|^2}{4} x^{2k} \left| 1 - i \sum_{j=1}^{k} \frac{c_{j-1}}{x^j} \right|^2 (1 - |w|^2) m(dt) \leq c_{2k}.$$

Звідки випливає, що

$$\int\limits_{\mathbb{T}} x^{2k} (1 - |w|^2) m(dt) \leq 4c_{2k}.$$

Оскільки $x = i\dfrac{1+t}{1-t}$, то отримуємо потрібне. □

5.2.5 Параметризація розв'язків задачі.

Відповідно до загальної схеми розв'язку АЗІ (див. Розділ 3.1), форма D задає структуру Ґільбертового простору, який позначимо через H_0. Співвідношення (5.2.16), що пов'язує дані Задачі 5.26, задає ізометрію $V : H_0 \oplus \mathbb{C} \to H_0 \oplus \mathbb{C}$ з областю визначення

$$d_V = \operatorname{Clos}\{Tp \oplus M_1 p, p \in \mathcal{X}\} \subseteq H_0 \oplus E_1 \tag{5.2.32}$$

і областю значень

$$\Delta_V = \operatorname{Clos}\{p \oplus M_2 p, p \in \mathcal{X}\} \subseteq H_0 \oplus E_2. \tag{5.2.33}$$

Нагадаємо, що $E_1 = \mathbb{C}$ і $E_2 = \mathbb{C}$ (див. (5.2.15)). Дефектні підпростори ізометрії V

$$N_{d_V} = (H_0 \oplus \mathbb{C}) \ominus d_V \quad \text{и} \quad N_{\Delta_V} = (H_0 \oplus \mathbb{C}) \ominus \Delta_V. \tag{5.2.34}$$

в цьому випадку не більше ніж одновимірні. З ізометрією V пов'яжемо унітарний вузол (3.1.15)

$$A_0 : H_0 \oplus N_2 \oplus E_1 \to H_0 \oplus N_1 \oplus E_2 \tag{5.2.35}$$

де N_1 і N_2 копії N_{d_V} і N_{Δ_V} відповідно. Позначимо через S характеристичну матрицю (3.1.17)

$$S = \begin{bmatrix} s & s_1 \\ s_2 & s_0 \end{bmatrix} : N_2 \oplus E_1 \to N_1 \oplus E_2. \tag{5.2.36}$$

Множина розв'язків задачі описується формулою (3.1.18)

$$w = s_0 + s_2\omega(\mathbf{1} - s\omega)^{-1}s_1, \tag{5.2.37}$$

де $\omega(\zeta)$ довільна стискаюча аналітична функція $\omega(\zeta) : N_1 \to N_2$. Звідси, зокрема, видно, що розв'язок задачі є неєдиним тоді і тільки тоді коли обидва простори N_1 і N_2 одновимірні.

5.2.6 Представлення Фур'є вузла A_0. З вузлом A_0 пов'язано представлення Фур'є G_0

$$\begin{aligned} G_{0,+}(\zeta)h_0 &= P_{N_1\oplus E_2}A_0(1-\zeta P_{H_0}A_0)^{-1}h_0, && (5.2.38)\\ G_{0,-}(\zeta)h_0 &= \overline{\zeta}P_{N_2\oplus E_1}(A_0)^*(1-\overline{\zeta}P_{H_0}(A_0)^*)^{-1}h_0, && (5.2.39)\end{aligned}$$

$$h_0 \in H_0, \quad |\zeta| < 1, \quad G_{0,-}h_0 = \begin{bmatrix} G_{0,+}h_0 \\ G_{0,-}h_0 \end{bmatrix}.$$

G_0 відображає H_0 на H^S і G_0 є стискує (див. [64],[62],[63]). Визначимо відображення $F^S : \mathcal{X} \to H^S$ наступним чином

$$F^S p \overset{\text{def}}{=} G_0 p, \quad p \in \mathcal{X}.$$

З визначення A_0 випливає, що F^S задовольняє співвідношенню аналогічному (5.2.18):

$$F^S T p = tF^S p - \begin{bmatrix} I & S \\ S^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -M_2 p \\ ----- \\ 0 \\ M_1 p \end{bmatrix}, \quad \text{м.в. на } \mathbb{T}, \tag{5.2.40}$$

$$\|F^S p\|^2_{H^S} \le D(p,p), \quad p \in \mathcal{X},$$

з якого, аналогічно Теоремі 5.27, отримуємо

$$(F^S p)(t) = -\frac{x+i}{2i} \begin{bmatrix} I & S(t) \\ S(t)^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ p(x) - i\tilde{p}(x) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ p(x) + i\tilde{p}(x) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \text{м.в. на } \mathbb{T}, \tag{5.2.41}$$

$p \in \mathcal{X}$, $x = i\frac{1+t}{1-t}$. Звідси випливає наступне

Твердження 5.32. Множина функцій (5.2.41) щільна у H^S.

Доведення. Оскільки G_0 відображає H_0 на H^S і $\mathcal{X}$ є щільним у H_0, то G_0 відображає $\mathcal{X}$ на множину, щільну у H^S. □

Формулу (5.2.41) можна записати у більш розгорнутому вигляді

$$(F^S p)(t) = -\frac{x+i}{2i} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (p(x) - i\tilde{p}(x)) + \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_0(t) \end{bmatrix} (p(x) + i\tilde{p}(x)) \\ \\ \begin{bmatrix} s_2(t)^* \\ s_0(t)^* \end{bmatrix} (p(x) - i\tilde{p}(x)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (p(x) + i\tilde{p}(x)) \end{bmatrix} \tag{5.2.42}$$

м.в. на $\mathbb{T}$, $p \in \mathcal{X}$. Зокрема, $(F^S X^k)(t) =$

$$= -\frac{x+i}{2i}\, x^k \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (1 - i\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{c_{j-1}}{x^j}) + \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_0(t) \end{bmatrix} (1 + i\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{c_{j-1}}{x^j}) \\ \\ \begin{bmatrix} \overline{s_2(t)} \\ \overline{s_0(t)} \end{bmatrix} (1 - i\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{c_{j-1}}{x^j}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (1 + i\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{c_{j-1}}{x^j}) \end{bmatrix} \tag{5.2.43}$$

м.в. на $\mathbb{T}$, $p \in \mathcal{X}$.

5.2.7 Рівність Парсеваля.

Метою цього розділу є доведення наступної теореми:

Теорема 5.33. Для будь-якого розв'язку w межової інтерполяційної Задачі 5.26 (див. Розділ 5.2.3) має місце рівність

$$< F^w p, F^w q >_{H^w} = D(p,q), \quad \forall p, q \in \mathcal{X}, \tag{5.2.44}$$

тобто, для цієї задачі у нерівності (5.2.18) завжди має місце рівність

Визначення 5.34. Ми говоримо, що інтерполяційна задача має властивість *Рівності Парсеваля*, якщо в нерівності (5.2.18) має місце рівність для будь-якого розв'язку задачі w.

Теорема 5.33 стверджує, що Задача 5.26 має властивість Рівності Парсеваля.

Для доведення Теореми 5.33 достатньо перевірити (5.2.44) для поліномів $p = X^j$, $q = X^k$ $(j, k \geq 0)$

$$< F^w(X^j), F^w(X^k) >_{H^w} = c_{j+k} = D(X^j, X^k). \tag{5.2.45}$$

Ми зробимо це в два етапи.

Лема 5.35. Для $j \geq 0$

$$< F^w(X^j), F^w(1) >_{H^w} = c_j. \tag{5.2.46}$$

Лема 5.36. Для $j, k \geq 0$

$$< F^w(X^{j+1}), F^w(X^k) >_{H^w} = < F^w(X^j), F^w(X^{k+1}) >_{H^w} . \tag{5.2.47}$$

Теорема 5.33 випливає з цих двох Лем.

Доведення. (Теореми 5.33).

$$< F^w(X^j), F^w(X^k) >_{H^w} = < F^w(X^{j+k}), F^w(1) >_{H^w} = c_{j+k} = D(X^j, X^k).$$

□

Доведення. (Леми 5.35). В силу (5.2.27),

$$(F^w 1)(t) = -\frac{x+i}{2i} \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

тобто, $|t| = 1$, де $x = i\frac{1+t}{1-t}$. Отже,

$$\begin{aligned} < F^w(X^j), F^w 1 >_{H^w} &= \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{x-i}{2i} \left(F^w_+(X^j) + F^w_-(X^j)\right) m(dt) \\ &= \int\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{x-i}{2i} F^w_+(X^j) + \frac{x+i}{2i} c_j\right) m(dt) \\ &+ \int\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{x-i}{2i} F^w_-(X^j) - \frac{x+i}{2i} c_j\right) m(dt). \end{aligned}$$

В силу Леми 5.30, вирази в двох останніх інтегралах належать H^2_+ і H^2_-, відповідно. Отже,

$$< F^w(X^j), F^w 1 >_{H^w} = \left(\frac{z-i}{2i} F^w_+(X^j) + \frac{z+i}{2i} c_j\right)_{|\zeta=0} .$$

Оскільки $z = i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$, то при $\zeta = 0$, маємо $z = i$. Отже,

$$\left(\frac{z-i}{2i} F_+^w(X^j) + \frac{z+i}{2i} c_j \right)_{|\zeta=0} = c_j.$$

Остаточно,

$$< F^w(X^j), F^w 1 >_{H^w} = c_j.$$

Лему доведено. □

Доведення. (Леми 5.36). Розглянемо різницю Δ між лівою і правою частинами (5.2.47),

$$\Delta =< F^w(X^{j+1}), F^w(X^k) >_{H^w} - < F^w(X^j), F^w(X^{k+1}) >_{H^w} .$$

Використовуючи (5.2.25), можна переписати Δ у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta &= < xF^w(X^j) + \frac{x+i}{2} \begin{bmatrix} 1 & w \\ w^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} c_j, F^w(X^k) >_{H^w} \\ &- < F^w(X^j), xF^w(X^k) + \frac{x+i}{2} \begin{bmatrix} 1 & w \\ w^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} c_k >_{H^w} \\ &= \int\limits_{\mathbb{T}} \left\{ \frac{x+i}{2} < \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} c_j, F^w(X^k) > \right. \\ &- \left. \frac{x-i}{2} < F^w(X^j), \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} c_k > \right\} m(dt) \\ &= \int\limits_{\mathbb{T}} \left\{ \frac{x+i}{2} c_j \overline{(F_+^w(X^k) - F_-^w(X^k))} \right. \\ &- \left. \frac{x-i}{2} \left(F_+^w(X^j) - F_-^w(X^j) \right) c_k \right\} m(dt). \end{aligned}$$

Відділимо H_+^2 і H_-^2 частини, використовуючи Лему 5.30, див. також обчислення в Лемі 5.35

$$\begin{aligned} &\frac{x-i}{2}(F_+^w(X^j) - F_-^w(X^j)) \\ &= \left(\frac{x-i}{2} F_+^w(X^j) + \frac{x+i}{2} c_j \right) - \left(\frac{x-i}{2} F_-^w(X^j) - \frac{x+i}{2} c_j \right) - (x+i)c_j. \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
&\frac{x+i}{2}\overline{(F_+^w(X^k)-F_-^w(X^k))}\\
&= \overline{\left(\frac{x-i}{2}F_+^w(X^k)+\frac{x+i}{2}c_k\right)}-\overline{\left(\frac{x-i}{2}F_-^w(X^k)-\frac{x+i}{2}c_k\right)}-(x-i)c_k.
\end{aligned}$$

Тепер отримуємо

$$\begin{aligned}
\Delta &= \int\limits_{\mathbb{T}}\left\{\overline{\left(\frac{x-i}{2}F_+^w(X^k)+\frac{x+i}{2}c_k\right)}\,c_j\right.\\
&- \overline{\left(\frac{x-i}{2}F_-^w(X^k)-\frac{x+i}{2}c_k\right)}\,c_j-(x-i)c_kc_j\\
&- c_k\left(\frac{x-i}{2}F_+^w(X^j)+\frac{x+i}{2}c_j\right)\\
&+ \left. c_k\left(\frac{x-i}{2}F_-^w(X^j)-\frac{x+i}{2}c_j\right)+(x+i)c_kc_j\right\}m(dt)\\
&= -ic_kc_j+0+ic_kc_j-ic_kc_j+0+ic_kc_j=0.
\end{aligned} \tag{5.2.48}$$

□

Зауваження 5.37. У постановці зрізаної проблеми моментів бере участь тільки скінченне число моментів $c_0,\dots,c_{2n}$. У цьому випадку Задача 5.26 модифікується тільки в тій частині, де простір $\mathcal{X}$ складається з поліномів ступеня не вище n: $p\in\mathcal{X}$, $\deg p\le n$. Лема 5.36 як і раніше справедлива і доводиться так само. Тобто,

$$< F^w(X^j), F^w(X^k) >_{H^w} \overset{\text{def}}{=}: c^w_{j+k}$$

$(0\le j\le n,\, 0\le k\le n)$ залежить від суми індексів $(j+k)$. Однак доведення леми 5.35 проходить тільки при $0\le j\le n-1$. Звідки випливає, що $c_j^w=c_j$ при $0\le j\le n-1$. Розглянемо тепер дві форми на $\mathcal{X}$,: задану форму $D(p,q)$ і форму

$$D^w(p,q)\overset{\text{def}}{=} < F^wp, F^wq >_{H^w} \tag{5.2.49}$$

$(\deg p\le n,\ \deg q\le n)$. Оскільки w розв'язок задачі, то

$$D\ge D^w. \tag{5.2.50}$$

Матриці цих форм щодо базису $\{X^k\}$ мають вигляд:

$$(c_{j+k})_{j,k=0}^{n} \quad \text{і} \quad (c_{j+k}^{w})_{j,k=0}^{n}$$

відповідно. Їх різниця також є Ганкелевою матрицею, і вона невід'ємна в силу (5.2.50). Як ми бачили, верхній лівий елемент дорівнює нулю (навіть весь перший рядок дорівнює нулю). Тоді, в силу ганкелевості і невід'ємності, усі елементи дорівнюють нулю, окрім можливо, правого нижнього. Отже $c_j^w = c_j$ $(0 \le j \le 2n-1)$, $c_{2n}^w \le c_{2n}$. З цією зрізаною задачею тісно пов'язана задача, що розглядається в Розділі 6.2.

Зауважимо також, що

$$\|F^S p\|_{H^S}^2 = D(p,p), \quad \forall p \in \mathcal{X}. \tag{5.2.51}$$

5.2.8 Наслідки рівності Парсеваля. Рівність Парсеваля спричиняє деякі додаткові властивості матриці (5.2.36)

$$S = \begin{bmatrix} s & s_1 \\ s_2 & s_0 \end{bmatrix}.$$

Теорема 5.38. Для будь-якого параметру ω, міри що відповідають функціям

$$\frac{1_{N_2} + \omega(\zeta)s(\zeta)}{1_{N_2} - \omega(\zeta)s(\zeta)} \quad \text{и} \quad \frac{1_{N_1} + s(\zeta)\omega(\zeta)}{1_{N_1} - s(\zeta)\omega(\zeta)}$$

є абсолютно неперервними.

Доведення. В силу доведеної рівності Парсеваля (5.2.44), має місце Теорема 3.1. Абсолютна неперервність, що доводиться тут, випливає з формули (3.1.21) Теореми 3.1. □

Теорема 5.39.

$$\begin{bmatrix} 1_{N_2} & s^* \\ s & 1_{N_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2^* & 0 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{E_1} & s_0 \\ s_0^* & 1_{E_2} \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & s_1^* \end{bmatrix} \tag{5.2.52}$$

майже всюди на колі $\mathbb{T}$.

Доведення. При $\omega = 0$, формула (3.1.21) Теореми 3.1 перетворюється в

$$\begin{bmatrix} 1_{N_2} & 0 \\ s(\zeta) & 1_{N_1} \end{bmatrix} = \int_{\mathbb{T}} \frac{t+\zeta}{t-\zeta} \begin{bmatrix} s_2^* & 0 \\ 0 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{E_1} & w \\ w^* & 1_{E_2} \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & s_1^* \end{bmatrix} m(dt). \qquad (5.2.53)$$

Розглядаючи дійсну частину рівності (5.2.53) і переходячи на межу, отримуємо (5.2.52). □

Теорема 5.40. Для будь-якого розв'язку w задачі, що розглядається, має місце наступний розклад простору H^w

$$H^w = \mathrm{Clos}\,\{F^w p, p \in \mathcal{X}\} \oplus \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \varphi^* \end{bmatrix} H^\omega, \qquad (5.2.54)$$

де $F^w p$ визначено формулою (5.2.20)

$$F^w p = -\frac{x+i}{2i} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & w(t) \\ \overline{w(t)} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(x) - i\tilde{p}(x) \\ p(x) + i\tilde{p}(x) \end{bmatrix}.$$

Зокрема, при $\omega = 0$,

$$H^{s_0} = \mathrm{Clos}\,\{F^{s_0} p, p \in \mathcal{X}\} \oplus \begin{bmatrix} s_2 & 0 \\ 0 & s_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_+^2(N_2) \\ H_-^2(N_1) \end{bmatrix}, \qquad (5.2.55)$$

де

$$F^{s_0} p = -\frac{x+i}{2i} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & s_0(t) \\ \overline{s_0(t)} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(x) - i\tilde{p}(x) \\ p(x) + i\tilde{p}(x) \end{bmatrix}.$$

Доведення. З доведеної рівності Парсеваля, в силу Теореми 3.3, випливає що представлення Фур'є $\mathcal{F}_A$ (3.1.19) відображає унітарно $H_0 \oplus H_1$ на H^w. Рівність (5.2.54) випливає з того, що $\mathcal{X}$ щільно в H^0. Окремий випадок отримуємо в силу того, що при $\omega = 0$

$$H^\omega = \begin{bmatrix} H_+^2(N_2) \\ H_-^2(N_1) \end{bmatrix}.$$

□

5.2.9 Аров-сингулярність

Знову позначимо через $S(\zeta)$ матрицю (5.2.36)

$$S = \begin{bmatrix} s & s_1 \\ s_2 & s_0 \end{bmatrix}.$$

Метою цього розділу є доведення Аров-сингулярності ([14, 15]) матриці S. Основною частиною доведення є

Теорема 5.41. Функція s_1 є зовнішньою, тобто, множина функцій

$$\{s_1 e_1^+, e_1^+ \in H^2_+(E_1)\}$$

щільна у $H^2_+(N_1)$ або, що те ж саме, що

$$P_+ s_1^* n_1^+ = 0, \quad n_1^+ \in H^2_+(N_1) \Rightarrow n_1^+ = 0 \ . \tag{5.2.56}$$

Функція s_2 є *-зовнішньою, тобто, множина функцій

$$\{s_2^* e_2^-, e_2^- \in H^2_-(E_2)\}$$

щільна у $H^2_-(N_2)$ або, що те ж саме, що

$$P_- s_2 n_2^- = 0, \quad n_2^- \in H^2_-(N_2) \Rightarrow n_2^- = 0. \tag{5.2.57}$$

Доведення. Припустимо, що

$$n_1^+ \in H^2_+(N_1) \quad \text{и} \quad P_+ s_1^* n_1^+ = 0. \tag{5.2.58}$$

Розглянемо функцію

$$f_{n_1^+} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & S \\ S^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^+ \\ 0 \end{bmatrix} \\ -P_+ S^* \begin{bmatrix} n_1^+ \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} . \tag{5.2.59}$$

Вона належить простору H^S, $f_{n_1^+} \in H^S$. Розглянемо скалярний добуток, $p \in \mathcal{X}$,

$$\langle F^S p, f_{n_1^+} \rangle_{H^S} = \langle F^S p, \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^+ \\ 0 \end{bmatrix} \\ -P_+ S^* \begin{bmatrix} n_1^+ \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \rangle_{L^2}.$$

Оскільки $F^S_- p \in H^2_-$, маємо

$$\langle F^S p, f_{n_1^+} \rangle_{H^S} = \langle F^S_+ p, \begin{bmatrix} n_1^+ \\ 0 \end{bmatrix} \rangle_{L^2}.$$

Скориставшись формулою (5.2.42) для $F^S p$, отримуємо

$$\begin{aligned} \langle F^S p, f_{n_1^+} \rangle_{H^S} &= \langle -\frac{x+i}{2i} s_1(p + i\tilde{p}), n_1^+ \rangle_{L^2} \\ &= \int\limits_{\mathbb{T}} -\frac{x+i}{2i} \langle s_1(t)(p(x) + i\tilde{p}(x)), n_1^+(t) \rangle_{N_1} m(dt). \end{aligned} \tag{5.2.60}$$

Оскільки $x = i\frac{1+t}{1-t}$, то $-\frac{x+i}{2i} = \frac{1}{t-1}$, і

$$p(x) + i\tilde{p}(x) = \frac{q(t)}{(t-1)^k},$$

де $q(t)$ – поліном від змінної t, а $k = \deg p$. Таким чином вираз під інтегралом (5.2.60) дорівнює

$$\frac{1}{(t-1)^{k+1}} \cdot \langle q(t), s_1(t)^* n_1^+(t) \rangle_E. \tag{5.2.61}$$

Як і будь-який поліном змінної t, $q \in H_+^\infty(E)$ в диску $\mathbb{D}$. В силу припущення (5.2.58), $s_1^* n_1^+ \in H_-^2(E)$. Отже, функція

$$\langle q(t), s_1(t)^* n_1^+(t) \rangle_E \in H_+^2$$

дорівнює нулю в нулі. Підсумуємо властивості функції (5.2.61):

- Аналітична в диску $\mathbb{D}$ і має обмежену характеристику (як відношення H_+^2 функції і полінома).
- Належить L^1 на $\mathbb{T}$ (див. (5.2.60)).
- знаменник $(t-1)^{k+1}$ є зовнішньої функцією.

Застосовуючи Принцип Максимуму Смирнова (Теорема 5.5) робимо висновок, що функція (5.2.61) належить до H_+^1. А оскільки вона дорівнює нулю в нулі, інтеграл (5.2.60) дорівнює нулю.

Таким чином, з припущення (5.2.58) випливає, що

$$\langle F^S p, f_{n_1^+} \rangle_{H^S} = 0, \quad \forall p \in \mathcal{X}. \tag{5.2.62}$$

Оскільки множина $\{F^S p, p \in \mathcal{X}\}$ щільна в H^S, це означає, що $f_{n_1^+} = 0$.

Згадуючи визначення (5.2.59) $f_{n_1^+}$, маємо

$$f_{n_1^+} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^+ \\ 0 \end{bmatrix} - SP_+S^* \begin{bmatrix} n_1^+ \\ 0 \end{bmatrix} \\ P_-S^* \begin{bmatrix} n_1^+ \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 0,$$

тобто,

$$f_{n_1^+} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^+ \\ 0 \end{bmatrix} - SP_+ \begin{bmatrix} s^* \\ s_1^* \end{bmatrix} n_1^+ \\ P_- \begin{bmatrix} s^* \\ s_1^* \end{bmatrix} n_1^+ \end{bmatrix} = 0.$$

Звідси, зокрема, випливає, що

$$P_-s_1^*n_1^+ = 0.$$

Комбінуючи останнє з (5.2.58) ($P_+s_1^*n_1^+ = 0$), отримуємо

$$s_1^*n_1^+ = 0. \tag{5.2.63}$$

Оскільки правий нижній блок формули (5.2.52) можна записати наступним чином

$$1_{N_1} = s_1(1_{E_1} - s_0^*s_0)^{[-1]}s_1^*,$$

то з (5.2.63) випливає, що $n_1^+ = 0$.

Доведення того, що функція s_2 є *-зовнішньою проводиться аналогічним чином: припускаючи, що

$$P_-s_2n_2^- = 0, \quad n_2^- \in H_-^2(N_2), \tag{5.2.64}$$

розглянемо функцію

$$f_{n_2^-} = \begin{bmatrix} 1 & S \\ S^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P_-S \begin{bmatrix} n_2^- \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n_2^- \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \in H^S\ ,$$

і покажемо, що з припущення (5.2.10) випливає, що $f_{n_2^-} = 0$. □

Теорема 5.42. Якщо $\ln(1-|s_0|^2) \notin L^1$, то $\dim N_1 = 0$ і $\dim N_2 = 0$. При цьому s_0 є єдиним розв'язком задачі. Якщо $\ln(1-|s_0|^2) \in L^1$, то $\dim N_1 = 1$ і $\dim N_2 = 1$. При цьому $s_1 = s_2 = a$ (при нормуванні, скажімо, коли всі функції позитивні в нулі), де a зовнішня функція така, що

$$1-|s_0|^2 = |a|^2.$$

Доведення. Припустимо, що $\ln(1-|s_0|^2) \notin L^1$, тоді з нерівностей

$$1-s_0^*s_0 \geq s_1^*s_1 \text{ і } 1-s_0s_0^* \geq s_2s_2^*$$

випливають рівності

$$s_1 = 0 \text{ и } s_2 = 0.$$

Тоді застосовуючи Теорему 5.41, отримуємо що для будь-якого $n_1 \in N_1$, $n_1 = 0$ і для будь-якого $n_2 \in N_2$, $n_2 = 0$. Перша частина твердження доведена.

Припустимо, що $\ln(1-|s_0|^2) \in L^1$, тоді, в силу Теореми Сегьо, існує зовнішня функція a така, що

$$1-|s_0|^2 = |a|^2. \tag{5.2.65}$$

З Теореми 5.31, формули (5.2.31) випливає, що при будь-якому k

$$\frac{a}{(t-1)^k} \in H_+^2. \tag{5.2.66}$$

Рівність (5.2.65) може бути записана у вигляді

$$1-\begin{bmatrix}\overline{a} & \overline{s}_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{[-1]}\begin{bmatrix}a\\ s_0\end{bmatrix} = 0,$$

а, використовуючи доповнення Шура отримуємо, що

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & s_0\\ \overline{a} & \overline{s}_0 & 1\end{bmatrix} \geq 0, \tag{5.2.67}$$

а також

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & ta\\ 0 & 1 & s_0\\ \overline{ta} & \overline{s}_0 & 1\end{bmatrix} \geq 0. \tag{5.2.68}$$

З останньої нерівності випливає, що

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{t}\overline{a} \end{bmatrix} \in H^{s_0}.$$

Ми збираємося скористатися розкладом (5.2.55) простору H^{s_0}. Обчислимо скалярний добуток

$$\langle F^{s_0}p, \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{t}\overline{a} \end{bmatrix} \rangle_{H^{s_0}} = \langle -\frac{x+i}{2i}(p+i\tilde{p}), \bar{t}\overline{a} \rangle_{L^2}$$

Оскільки $x = i\frac{1+t}{1-t}$, то $-\frac{x+i}{2i} = \frac{1}{t-1}$, і

$$p(x) + i\tilde{p}(x) = \frac{q(t)}{(t-1)^k},$$

де $q(t)$ – поліном від змінної t, а $k = \deg p$. Отже,

$$\langle F^{s_0}p, \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{t}\overline{a} \end{bmatrix} \rangle_{H^{s_0}} = \langle \frac{q(t)}{(t-1)^{k+1}}, \bar{t}\overline{a} \rangle_{L^2} = \langle q(t), \frac{\overline{ta}}{\overline{(t-1)^{k+1}}} \rangle = 0.$$

Рівність нулю випливає з (5.2.66). В силу розкладу (5.2.55) простору H^{s_0}, це означає, що

$$\bar{t}\overline{a} \in s_1^* H_-^2(N_1).$$

Звідси, по-перше, робимо висновок, що простір $H_-^2(N_1)$ нетривіальний і, отже, $\dim N_1 = 1$. Далі маємо

$$a = hs_1,$$

де $h \in H_+^2$. Нерівність (5.2.67) еквівалентна наступному

$$1 - \begin{bmatrix} 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s_0 \\ s_0^* & 1 \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{a} \end{bmatrix} \geq 0.$$

Підставляючи сюди a, маємо

$$1 - h \begin{bmatrix} 0 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s_0 \\ s_0^* & 1 \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} 0 \\ s_1^* \end{bmatrix} h^* \geq 0.$$

Скориставшись тим що правий нижній блок формули (5.2.52) можна записати наступним чином

$$1_{N_1} = s_1(1_{E_1} - s_0^* s_0)^{[-1]} s_1^*,$$

отримуємо $1 - hh^* \geq 0$. Тобто, функція h є стискуючою. Таким чином, $|a| \leq |s_1|$ на $\mathbb{T}$. З іншого боку,

$$|a|^2 = 1 - |s_0|^2 \geq |s_1|^2.$$

Отже, $|a| = |s_1|$ на $\mathbb{T}$. Оскільки обидві функції зовнішні, то при нормуванні на позитивність в нулі вони збігаються всюди в диску.

Рівність $s_2 = a$ доводиться аналогічно. □

Наслідок 5.43. За умови, що $\ln(1 - |s_0|^2) \in L^1$

$$s_1 = s_2 = a, \quad s = -\frac{a}{\overline{a}}\overline{s}_0, \tag{5.2.69}$$

де $|a|^2 = 1 - |s_0|^2$. При цьому множина розв'язків задачі нескінчена і відповідність між параметрами і розв'язками взаємно однозначна.

Доведення. Перші дві формули (5.2.69) доведені вище, доведемо третю. Розглянемо лівий нижній блок формули (5.2.52)

$$s = \begin{bmatrix} 0 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s_0 \\ s_0^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -s_0 \\ -s_0^* & 1 \end{bmatrix}^{[-1]} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{1 - |s_0|^2}$$

$$= -\frac{a^2\overline{s}_0}{|a|^2} = -\frac{a}{\overline{a}}\overline{s}_0.$$

Формула, що описує розв'язки може бути переписана наступним чином

$$w = s_0 + \frac{a^2\omega}{1 - s\omega}.$$

Звідси випливає взаємна однозначність:

$$w_1 = w_2$$

тягне (оскільки $a \neq 0$)

$$\frac{\omega_1}{1 - s\omega_1} = \frac{\omega_2}{1 - s\omega_2},$$
$$\omega_1(1 - s\omega_2) = (1 - \omega_1 s)\omega_2,$$

звідки випливає, що

$$\omega_1 = \omega_2.$$

□

5.2.10 Заключне зауваження. Пара (a, s), що побудована вище (в контексті невизначеної степеневої проблеми моментів) має такі властивості: a і s належать до H^∞; a є зовнішньої, $s(0) = 0$;

$$-\frac{a}{\overline{a}}\overline{s} = s_0 \in H^\infty$$

(це просто інша форма третьої формули у (5.2.69)); звідси зокрема випливає, що $|s| = |s_0|$ м.в. на $\mathbb{T}$ і тоді

$$|a|^2 + |s|^2 = |a|^2 + |s_0|^2 = 1$$

м.в. на $\mathbb{T}$. Отже ця пара є сингулярною за Аровим.

Як доведено в Теоремі 5.38, для будь-якого параметра ω, міри які відповідають функціям

$$\frac{1 + \omega(\zeta)s(\zeta)}{1 - \omega(\zeta)s(\zeta)}$$

є абсолютно неперервними.

Тим самим, такі пари дають негативну відповідь на питання Адамяна, Арова і Крейна, а також служать контрприкладом до гіпотези Сарасона.

Висновки до розділу 5

В Розділі 5 розв'язано дві проблеми поставлені Д. Сарасоном. У першій доведено що для кожної γ-твірної пари (a, b) існує внутрішня за Бьорлінгом функція θ така що пара $(a, \theta b)$ є регулярною, тобто відповідає деякій задачі Нехарі. Загальний випадок зводиться до випадку коли пара (a, b) сингулярна. Після цього застосовується характеризація регулярних γ-твірних пар, що отримана у Розділі 4, та певна апроксимація функції $1/a$ (яка у загальному випадку не належить до простору H^2).

У підрозділі 5.2.1 побудовано клас контрприкладів до іншої проблеми Д. Сарасона. Будемо говорити що γ-твірна пара (a, b) має властивість абсолютної неперервності (ac) якщо для будь-якої функції класу Шура ω міра $\sigma_{b\omega}$ в представленні Ріса-Герглотца

$$\frac{1 + b(\zeta)\omega(\zeta)}{1 - b(\zeta)\omega(\zeta)} = \int_{\mathbb{T}} \frac{t + \zeta}{t - \zeta} \sigma_{b\omega}(dt), \quad |\zeta| < 1$$

є абсолютно неперервною. Гіпотеза Д. Сарасона стверджувала що ця властивість пари (a, b) тягне її регулярність. У даному підрозділі показано що це не так.

Більш конкретно, було показано що пари (a, b), що виникають при параметризації розв'язків межової інтерполяційної задачі (що тісно пов'язана з нескінченною проблемою моментів) мають властивість (ac), але є сингулярними, тобто не можуть бути регулярними.

Метод доведення полягає у наступному. Межова інтерполяційна задача вкладається в схему ортогональної Абстрактної Задачі Інтерполяції (див. Розділ 3.1). Властивість (ac) випливає з того що для будь-якого розв'язку цієї задачі (точніше для пов'язаного з розв'язком перетворення Фур'є (3.1.4)) має місце рівність у нерівності (3.1.5): $\|Fx\|_{H^w}^2 = D(x, x)$. Тобто, ця задача має властивість *рівності Парсеваля*. Оскільки, по самому змісту задачі, усі її розв'язки лежать в H^∞, то зокрема й центральний розв'язок $s_0 = -\frac{a}{\bar{a}}\bar{b}$ лежить в H^∞. Таким чином, для доведення сингулярності пари (a, b) достатньо довести що a є зовнішньою по Бьорлінгу. Що зроблено у цьому розділі.

Результати розділу опубліковано в роботах [65, 66, 67, 68]

РОЗДІЛ 6

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ ЖЮЛІА - КАРАТЕОДОРІ ТА МЕЖОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

6.1 Теорема Жюліа - Каратеодорі вищого порядку

6.1.1 Позначення та формулювання результату. Через $\mathcal{S}$ будемо позначати клас Шура, тобто клас функцій, що аналітичні у відкритому одиничному диску $\mathbb{D}$ і відображають його в своє замикання. Будемо писати $z\widehat{\to}t_0$, якщо точка диску z наближається до межової точки $t_0 \in \mathbb{T}$ недотичним чином і $z \to t_0$, якщо z наближається до t_0 довільним чином, залишаючись у $\mathbb{D}$. Сформулюємо класичну теорему Жюліа - Каратеодорі ([43], [58] а також [90, Chapter 4] і [86, Chapter 6]), [84]–[90].

Теорема 6.1. Для $w \in \mathcal{S}$ і t_0 наступні умови є еквівалентними:

$$(1) \quad d_1 := \liminf_{z\to t_0} \frac{1-|w(z)|^2}{1-|z|^2} < \infty; \qquad (2) \quad d_2 := \lim_{z\widehat{\to}t_0} \frac{1-|w(z)|^2}{1-|z|^2} < \infty.$$

$$(3) \quad \text{Границі } \; w_0 := \lim_{z\widehat{\to}t_0} w(z) \; \text{ і } \; d_3 := \lim_{z\widehat{\to}t_0} \frac{1-w(z)\overline{w}_0}{1-z\bar{t}_0}$$

існують і задовольняють $|w_0| = 1$ і $d_3 \geq 0$.

$$(4) \quad \text{Границі } \; w_0 := \lim_{z\widehat{\to}t_0} w(z) \; \text{ і } \; w_1 := \lim_{z\widehat{\to}t_0} w'(z)$$

існують і задовольняють $|w_0| = 1$ і $t_0 w_1 \overline{w}_0 \geq 0$.

Більш того, при виконанні цих умов виконуються рівності $d_1 = d_2 = d_3 = t_0 w_1 \overline{w}_0$.

В цьому розділі встановлюється кратний аналог Теореми Жюліа - Каратеодорі. Введемо деякі позначення. Для будь-якої функції класу Шура w *матриця Шварца - Піка*

$$\mathbf{P}_n^w(z) := \left[\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\frac{1-|w(z)|^2}{1-|z|^2}\right]_{i,j=0}^{n} \tag{6.1.1}$$

є невід'ємною при будь-якому $n \geq 0$ і $z \in \mathbb{D}$. Ми також будемо розглядати *межову матрицю Шварца - Піка* в точці $t_0 \in \mathbb{T}$

$$\mathbf{P}_n^w(t_0) = \lim_{z \widehat{\to} t_0} \mathbf{P}_n^w(z) \qquad (n \geq 0), \tag{6.1.2}$$

за умови, що остання границя існує. Ця матриця теж невід'ємна.

Нехай $w \in \mathcal{S}$ і припустимо, що недотичні границі

$$w_j(t_0) := \lim_{z \widehat{\to} t_0} \frac{w^{(j)}(z)}{j!} \quad \text{при } \ j = 0, \ldots, 2n+1 \tag{6.1.3}$$

існують. Визначимо

$$\mathbb{P}_n^w(t_0) := \begin{bmatrix} w_1(t_0) & \cdots & w_{n+1}(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n+1}(t_0) & \cdots & w_{2n+1}(t_0) \end{bmatrix} \mathbf{\Psi}_n(t_0) \begin{bmatrix} \overline{w_0(t_0)} & \ldots & \overline{w_n(t_0)} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \overline{w_0(t_0)} \end{bmatrix}. \tag{6.1.4}$$

Тут перший множник є Ганкелевою матрицею, третій верхньо-трикутною Тьопліцевою матрицею і $\mathbf{\Psi}_n(t_0) = [\Psi_{j\ell}]_{j,\ell=0}^n$ верхньо-трикутна матриця з елементами

$$\Psi_{j\ell} = \begin{cases} 0, & \text{if } \ j > \ell \\ (-1)^\ell \binom{\ell}{j} t_0^{\ell+j+1}, & \text{if } \ j \leq \ell. \end{cases} \tag{6.1.5}$$

Матриця (6.1.4) вперше з'явилася у роботі І. В. Ковалішиної [73] в контексті межової інтерполяційної задачі в класі Шура. Позначимо (n, n)-й елемент матриці Шварца - Піка $\mathbf{P}_n^w(z)$ через

$$d_{w,n}(z) := \frac{1}{(n!)^2} \frac{\partial^{2n}}{\partial z^n \partial \bar{z}^n} \frac{1 - |w(z)|^2}{1 - |z|^2}. \tag{6.1.6}$$

Тепер ми готові сформулювати кратний аналог Теореми 6.1.

Теорема 6.2. Для $w \in \mathcal{S}$, $t_0 \in \mathbb{T}$ і $n \in \mathbb{Z}_+$, наступні умови еквівалентні:

(1) $\liminf_{z \to t_0} d_{w,n}(z) < \infty.$ (6.1.7)

(2) $\lim_{z \widehat{\to} t_0} d_{w,n}(z) < \infty.$ (6.1.8)

(3) Існує межова матриця Шварца - Піка $\mathbf{P}_n^w(t_0)$.

(4) Недотичні границі (6.1.3) існують і задовольняють

$$|w_0(t_0)| = 1 \quad \text{і} \quad \mathbb{P}_n^w(t_0) \geq 0, \tag{6.1.9}$$

де матриця $\mathbb{P}_n^w(t_0)$ визначена формулою (6.1.4).

Більш того, при виконанні цих умов границі у (6.1.7) і у (6.1.8) збігаються. Також має місце рівність

$$\mathbf{P}_n^w(t_0) = \mathbb{P}_n^w(t_0). \tag{6.1.10}$$

Цей розділ має таку структуру. У другому параграфі ми викладаємо відомості о просторах аналітичних функцій де Бранжа-Ровняка і про відтворюючі ядра цих просторів. У третьому параграфі розглядаються межові відтворюючі ядра, які (як буде показано) існують тільки при виконанні умови (6.1.7). У четвертому параграфі доводиться Теорема 6.2. У п'ятому параграфі обговорюються подальші результати пов'язані з Теоремою 6.2.

6.1.2 Простори де Бранжа-Ровняка та їх відтворюючі ядра

З Шурівською функцією w пов'язують Ґільбертові простори L^w і H^w. Нехай L_2 – це простір квадратично інтегровних функцій на одиничному колі $\mathbb{T}$, H_2^+ і H_2^- простори Харді з рівними нулю від'ємними (відповідно, невід'ємними) коефіцієнтами Фур'є. Елементи H_2^+ і H_2^- допускають аналітичне (відповідно, антианалітичне) продовження в диск.

Розглянемо матрицю $W(t) := \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix}$. Простір L^w визначається як множина $W^{1/2}(L_2 \oplus L_2)$, що наділена нормою образу. Більш детально: для кожного елемента $f(t)$ з L^w при майже усіх $t \in \mathbb{T}$ існує єдиний $g_f(t) \in L_2 \oplus L_2$ ортогональний $\operatorname{Ker} W(t)$ такий, що $f = W^{1/2} g_f$. Цей єдиний g_f будемо позначати $g_f := W^{[-1/2]} f$. При цьому L^w-норма f визначається наступним чином

$$\|f\|_{L^w}^2 := \|g_f\|_{L_2 \oplus L_2}^2 = \int_{\mathbb{T}} \left\| \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix}^{[-1/2]} f(t) \right\|_{\mathbb{C}^2}^2 m(dt),$$

де $m(dt)$ нормована міра Лебега на $\mathbb{T}$. Оскільки

$$\operatorname{Ran} W(t) = \operatorname{Ran} W(t)^{1/2}$$

майже всюди на $\mathbb{T}$, можна також написати, що

$$\langle f,\ h\rangle_{L^w} = \int_{\mathbb{T}} \left\langle \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix}^{[-1]} f(t),\ h(t) \right\rangle_{\mathbb{C}^2} m(dt). \tag{6.1.11}$$

Тут застосування оберненої матриці означає, що обирається довільна вектор-функція $g(t)$, що задовольняє умові $f(t) = W(t)g(t)$. Ця g не обов'язково належить до $L_2(\mathbb{C}^2)$. Однак, функція сумовна у (6.1.11) не залежить від вибору $g(t)$, оскільки $h(t) \in \operatorname{Ran} W(t)$ при майже усіх t.

Визначення 6.3. Будемо говорити, що функція $f = \begin{bmatrix} f_+ \\ f_- \end{bmatrix}$ належить простору H^w, якщо вона належить L^w і, якщо $f_+ \in H_2^+$ і $f_- \in H_2^-$.

Простір H^w є замкнутим підпростором L^w; P_{H^w} позначає ортогональний проектор L^w на H^w. H_2^+ і H_2^- є Ґільбертовими просторами з відтворюючими ядрами, відповідно

$$k_z(t) = \frac{1}{1 - t\bar{z}} \quad \text{і} \quad \widetilde{k}_z(t) = \frac{1}{t - z} \tag{6.1.12}$$

в тому значенні, що

$$\langle f_+,\ k_z\rangle_{L_2} = f_+(z) \quad \text{і} \quad \left\langle f_-,\ \widetilde{k}_z \right\rangle_{L_2} = f_-(z)/\bar{z} \tag{6.1.13}$$

для будь-якого $f_+ \in H_2^+$, $f_- \in H_2^-$ і $z \in \mathbb{D}$. Більш того, ядра

$$k_{j,z}(t) \ := \ \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial \bar{z}^j} k_z(t) = \frac{t^j}{(1 - t\bar{z})^{j+1}}, \tag{6.1.14}$$

$$\widetilde{k}_{j,z}(t) \ := \ \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial z^j} \widetilde{k}_z(t) = \frac{1}{(t - z)^{j+1}} \tag{6.1.15}$$

відтворюють значення похідних:

$$\langle f_+,\ k_{j,z}\rangle_{L_2} = \frac{1}{j!} f_+^{(j)}(z), \quad \left\langle f_-,\ \widetilde{k}_{j,z} \right\rangle_{L_2} = \frac{1}{j!}\left(\frac{f_-(z)}{\bar{z}}\right)^{(j)}. \tag{6.1.16}$$

Розглянемо вектор-функції

$$K_z(t) \ = \ \begin{bmatrix} K_{z,+}(t) \\ K_{z,-}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -w(z)^* \end{bmatrix} \cdot k_z(t), \tag{6.1.17}$$

$$\widetilde{K}_z(t) \;=\; \begin{bmatrix} \widetilde{K}_{z,+}(t) \\ \widetilde{K}_{z,-}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -w(z) \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \widetilde{k}_z(t), \quad (6.1.18)$$

де $z \in \mathbb{D}$ і $t \in \mathbb{T}$, а також

$$K_z^{(j)}(t) := \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial \bar{z}^j} K_z(t) \quad \text{і} \quad \widetilde{K}_z^{(j)}(t) := \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial z^j} \widetilde{K}_z(t) \quad , \qquad (6.1.19)$$

$j \in \mathbb{Z}_+$. Використовуючи (6.1.14) і (6.1.15), отримуємо такі явні формули для $K_z^{(j)}$ і $\widetilde{K}_z^{(j)}$:

$$K_z^{(j)}(t) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{j,z}(t) \\ -\sum\limits_{\ell=0}^{j} w_{j-\ell}(z)^* k_{\ell,z}(t) \end{bmatrix}, \qquad (6.1.20)$$

$$\widetilde{K}_z^{(j)}(t) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sum\limits_{\ell=0}^{j} w_{j-\ell}(z) \widetilde{k}_{\ell,z}(t) \\ \widetilde{k}_{j,z}(t) \end{bmatrix}, \qquad (6.1.21)$$

де $w_\ell(z)$ коефіцієнти Тейлора функції w в точці z

$$w(\zeta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} w_\ell(z)(\zeta - z)^\ell, \quad w_\ell(z) = \frac{w^{(\ell)}(z)}{\ell!}. \qquad (6.1.22)$$

Формули (6.1.20) і (6.1.21) визначають $K_z^{(j)}(t)$ і $\widetilde{K}_z^{(j)}(t)$ як вектор-функції від t на одиничному колі. Їх компоненти допускають аналітичне (антианалітичне) продовження в одиничний диск:

$$K_{z,+}^{(j)}(\zeta) \;=\; k_{j,z}(\zeta) - w(\zeta) \sum_{\ell=0}^{j} w_{j-\ell}(z)^* k_{\ell,z_i}(\zeta), \qquad (6.1.23)$$

$$K_{z,-}^{(j)}(\zeta) \;=\; \bar{\zeta} \left(w(\zeta)^* \widetilde{k}_{j,z}(\zeta)^* - \sum_{\ell=0}^{j} w_{j-\ell}(z)^* \widetilde{k}_{\ell,z}(\zeta)^* \right), \qquad (6.1.24)$$

$$\widetilde{K}_{z,+}^{(j)}(\zeta) \;=\; w(\zeta) \widetilde{k}_{j,z}(\zeta) - \sum_{\ell=0}^{j} w_{j-\ell}(z) \widetilde{k}_{\ell,z}(\zeta), \qquad (6.1.25)$$

$$\widetilde{K}_{z,-}^{(j)}(\zeta) \;=\; \bar{\zeta} \left(k_{j,z}(\zeta)^* - w(\zeta)^* \sum_{\ell=0}^{j} w_{j-\ell}(z) k_{\ell,z}(\zeta)^* \right). \qquad (6.1.26)$$

Лема 6.4. При будь-якому $j \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{D}$, функції $K_z^{(j)}$ і $\widetilde{K}_z^{(j)}$ належать простору H^w. Для будь-якого $f = \begin{bmatrix} f_+ \\ f_- \end{bmatrix} \in H^w$

$$\left\langle f,\ K_z^{(j)} \right\rangle_{H^w} = \frac{1}{j!}\frac{d^j}{dz^j} f_+(z), \quad \left\langle f,\ \widetilde{K}_z^{(j)} \right\rangle_{H^w} = \frac{1}{j!}\frac{d^j}{d\bar{z}^j}\left(\frac{f_-(z)}{\bar{z}}\right). \tag{6.1.27}$$

Доведення. Зауважимо, що в силу формул (6.1.20) і (6.1.21), функції

$$\begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix}^{[-\frac{1}{2}]} K_z^{(j)}(t) \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix}^{[-\frac{1}{2}]} \widetilde{K}_z^{(j)}(t)$$

обмежені на $\mathbb{T}$ при будь-якому фіксованому $z \in \mathbb{D}$ і, отже, $K_z^{(j)}$ та $\widetilde{K}_z^{(j)}$ належать до L^w. Оскільки $w \in H^\infty$, $k_{\ell,z} \in H_+^2$ і $\widetilde{k}_{\ell,z} \in H_-^2$, безпосередньо з формул (6.1.23) і (6.1.26) випливає, що $K_{z,+}^{(j)} \in H_2^+$ і $\widetilde{K}_{z,-}^{(j)} \in H_2^-$. Підставляючи розклад Тейлора (6.1.22) функції w у (6.1.25), отримуємо

$$\widetilde{K}_{z,+}^{(j)}(\zeta) = \sum_{\ell=j+1}^{\infty} w_\ell(z)(\zeta - z)^{\ell-j-1} \tag{6.1.28}$$

звідки випливає, що $\widetilde{K}_{z,+}^{(j)} \in H_2^+$. Аналогічно, з (6.1.24) випливає, що $K_{z,-}^{(j)} \in H_2^-$. Таким чином перші компоненти $K_z^{(j)}$ і $\widetilde{K}_z^{(j)}$ належать до H_2^+, другі належать до H_2^- і, отже, $K_z^{(j)}$ і $\widetilde{K}_z^{(j)}$ належать до H^w. Далі, в силу формули (6.1.17) для K_z і формули (6.1.11) для скалярного добутку у L^w,

$$\langle f,\ K_z \rangle_{H^w} = \left\langle \begin{bmatrix} f_+ \\ f_- \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -w(z)^* \end{bmatrix} k_z \right\rangle_{L^2 \oplus L^2} = \langle f_+,\ k_z \rangle_{L^2} + \langle f_-,\ w(z)^* k_z \rangle_{L^2}.$$

Оскільки f_- належить до H_2^- і $w(z)^* k_z$ (як функція від t) належить до H_2^+, отримуємо, що другий член дорівнює нулю. Перший, в силу (6.1.13), дорівнює $f_+(z)$. Співвідношення $\langle f,\ \widetilde{K}_z \rangle_{H^w} = \frac{f_-(z)}{\bar{z}}$ перевіряється аналогічно. Таким чином, маємо

$$\langle f,\ K_z \rangle_{H^w} = f_+(z) \quad \text{i} \quad \langle f,\ \widetilde{K}_z \rangle_{H^w} = \frac{f_-(z)}{\bar{z}} \tag{6.1.29}$$

Відтворюючі властивості (6.1.27) випливають з (6.1.29) шляхом диференціювання інтегралів за параметрами z і $\bar{z}$. □

Лема 6.5. Нехай $K_z^{(j)}$ і $\widetilde{K}_z^{(j)}$ ядра, визначені формулами (6.1.19), z і ζ дві точки диску $\mathbb{D}$. Тоді

$$\begin{aligned} \left\langle K_\zeta^{(j)},\, K_z^{(i)} \right\rangle_{H^w} &= \frac{1}{i!j!}\,\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar\zeta^j}\left(\frac{1-w(z)w(\zeta)^*}{1-z\bar\zeta}\right), && (6.1.30)\\ \left\langle \widetilde{K}_\zeta^{(j)},\, \widetilde{K}_z^{(i)} \right\rangle_{H^w} &= \frac{1}{i!j!}\,\frac{\partial^{i+j}}{\partial \bar z^i \partial \zeta^j}\left(\frac{1-w(z)^*w(\zeta)}{1-\bar z\zeta}\right), && (6.1.31)\\ \left\langle \widetilde{K}_z^{(i)},\, K_z^{(j)} \right\rangle_{H^w} &= w_{i+j+1}(z). && (6.1.32) \end{aligned}$$

Доведення. В силу першої формули в (6.1.29) і визначення (6.1.17),

$$\langle K_\zeta,\, K_z\rangle_{H^w} = K_{\zeta,+}(z) = \frac{1-w(z)w(\zeta)^*}{1-z\bar\zeta}.$$

З іншого боку, в силу першої формули в (6.1.19),

$$\langle K_\zeta^{(j)},\, K_z^{(j)}\rangle_{H^w} = \frac{1}{i!j!}\,\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial\bar\zeta^j}\langle K_\zeta,\, K_z\rangle_{H^w}$$

Підставляючи попереднє в останнє, отримуємо (6.1.30). Перевірка (6.1.31) аналогічна. Для перевірки (6.1.32) скористаємося формулою (6.1.28) для $\widetilde{K}_{z,+}^{(i)}$. В силу відтворюючої властивості (6.1.27) маємо

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{K}_z^{(i)},\, K_\zeta^{(j)}\rangle_{H^w} &= \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial z^j}\widetilde{K}_{z,+}^{(i)}(\zeta) = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial z^j}\left(\sum_{\ell=i+1}^{\infty} w_\ell(z)(\zeta-z)^{\ell-i-1}\right)\\ &= \sum_{\ell=i+j+1}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\ell-i-1\\ j\end{array}\right) w_\ell(z)(\zeta-z)^{\ell-i-j-1}, \end{aligned}$$

звідки випливає (6.1.32), оскільки

$$\lim_{\zeta\to z}\sum_{\ell=i+j+1}^{\infty}\left(\begin{array}{c}\ell-i-1\\ j\end{array}\right) w_\ell(z)(z-\zeta)^{\ell-i-j-1} = w_{i+j+1}(z).$$

□

Зауваження 6.6. Вважаючи $\ell = j = n$ і $\zeta = z$ в формулах (6.1.30) і (6.1.31) Леми 6.5, отримуємо

$$\left\| K_z^{(n)} \right\|_{H^w}^2 = \left\| \widetilde{K}_z^{(n)} \right\|_{H^w}^2 = d_{w,n}(z), \qquad (6.1.33)$$

де $d_{w,n}(z)$ визначена формулою (6.1.6). Отже, умова (6.1.7) означає, що

$$\liminf_{z\to t_0} \|K_z^{(n)}\|_{H^w} = \liminf_{z\to t_0} \|\widetilde{K}_z^{(n)}\|_{H^w} < \infty.$$

Зауваження 6.7. Формули (6.1.30) дозволяють переписати визначення (6.1.1) матриці $\mathbf{P}_n^w(z)$ у вигляді

$$\mathbf{P}_n^w(z) = \left[\left\langle K_z^{(j)},\ K_z^{(i)}\right\rangle_{H^w}\right]_{i,j=0}^n \tag{6.1.34}$$

і тим самим представити матрицю Шварца - Піка як матрицю Грама системи функцій $\{K_z^{(j)}\}_{j=0}^n$.

Лема 6.8. Нехай $w \in \mathcal{S}$, $z \in \mathbb{D}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $K_z^{(j)}$ і $\widetilde{K}_z^{(j)}$ визначені формулами (6.1.20) і (6.1.21), відповідно. Тоді

$$K_z^{(j)} = P_{H^w} \begin{bmatrix} 1 & w \\ w^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{j,z} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{K}_z^{(j)} = P_{H^w} \begin{bmatrix} 1 & w \\ w^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \widetilde{k}_{j,z} \end{bmatrix}. \tag{6.1.35}$$

де P_{H^w} ортогональний проектор L^w на H^w, а $k_{j,z}$ і $\widetilde{k}_{j,z}$ ядра, визначені в (6.1.14) і (6.1.15).

Доведення. Функція $g := \begin{bmatrix} 1 & w \\ w^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{j,z} \\ 0 \end{bmatrix}$ належить простору L^w. Скористаємося (6.1.11) для обчислення скалярного добутку в L^w між g і довільною функцією $f = \begin{bmatrix} f_+ \\ f_- \end{bmatrix} \in H^w$:

$$\langle f,\, g\rangle_{L^w} = \left\langle \begin{bmatrix} f_+ \\ f_- \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} k_{j,z} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle_{L^2} = \langle f_+,\ k_{j,z}\rangle_{L_2} = \frac{1}{j!} f_+^{(j)}(z).$$

Оскільки $f \in H^w$, маємо $P_{H^w} f = f$. Тобто,

$$\langle f,\, P_{H^w} g\rangle_{H^w} = \langle P_{H^w} f,\, g\rangle_{L^w} = \langle f,\, g\rangle_{L^w} = \frac{1}{j!} f_+^{(j)}(z).$$

З першої відтворюючої властивості в (6.1.27) випливає, що $\langle f,\, P_{H^w} g\rangle_{H^w} = \langle f,\, K_z^{(j)}\rangle_{H^w}$. Звідки випливає перша формула (6.1.35). Друга перевіряється аналогічно. □

Наступна Лема перевіряється безпосередньо.

Лема 6.9. Якщо $g_1 \in L_2$ і $g_2 \in H_2^+$, то

$$P_{H^w} \begin{bmatrix} 1 & w \\ w^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = P_{H^w} \begin{bmatrix} 1 & w \\ w^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.1.36}$$

Лема 6.10. Нехай w – це Шурівська функція і нехай h довільний елемент простору L^w. Тоді для будь-якого $t_0 \in \mathbb{T}$, $z \in \mathbb{D}$ і $n \geq 0$ функція

$$h_z(t) = \left(\frac{1 - t\bar{t}_0}{1 - t\bar{z}} \right)^n h(t) \tag{6.1.37}$$

належить до L^w і $\lim\limits_{z \widehat{\to} t_0} \|h_z - h\|_{L^w} = 0$.

Доведення. Оскільки простір L^w інваріантний відносно множення на обмежену скалярну функцію, то h_z належить L^w. В силу (6.1.37),

$$\|h_z - h\|_{L^w}^2 = \int_{\mathbb{T}} \left\| \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix}^{[-\frac{1}{2}]} h(t) \right\|_{\mathbb{C}^2}^2 \cdot \left| \left(\frac{1 - t\bar{t}_0}{1 - t\bar{z}} \right)^n - 1 \right|^2 m(dt).$$

Твердження Леми отримуємо за допомогою Теореми про Мажорантну збіжність, оскільки для будь-якого z в недотичному околі

$$\Gamma_a(t_0) = \{ z \in \mathbb{D} : \ |t_0 - z| < a(1 - |z|) \} \quad (a > 1), \tag{6.1.38}$$

точки t_0, і для будь-якого $t \in \mathbb{T}$ маємо

$$\left| \frac{1 - t\bar{t}_0}{1 - t\bar{z}} \right| = \left| 1 + t \frac{\bar{z} - \bar{t}_0}{1 - t\bar{z}} \right| \leq 1 + \left| \frac{z - t_0}{t - z} \right| < 1 + \frac{|t_0 - z|}{1 - |z|} \leq 1 + a,$$

і, отже,

$$\left| \left(\frac{1 - t\bar{t}_0}{1 - t\bar{z}} \right)^n - 1 \right| \leq (1 + a)^n + 1.$$

□

6.1.3 Межові відтворюючі ядра У цьому параграфі розглядаються межові аналоги $K_{t_0}^{(n)}$ і $\widetilde{K}_{t_0}^{(n)}$ (тут $t_0 \in \mathbb{T}$) відтворюючих ядер $K_z^{(n)}$ і $\widetilde{K}_z^{(n)}$, визначених у (6.1.20) і (6.1.21). Основний результат цієї частини

Теорема 6.11. Попутно також доводиться імплікація (1) $\Rightarrow$ (2) Теореми 6.2. Почнемо з межових аналогів ядер (6.1.14) і (6.1.15):

$$k_{j,t_0}(\zeta) = \frac{\zeta^j}{(1-\zeta\bar{t}_0)^{j+1}}, \qquad \widetilde{k}_{j,t_0}(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - t_0)^{j+1}}. \tag{6.1.39}$$

Теорема 6.11. Нехай $w \in \mathcal{S}$, $t_0 \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ і нехай $\liminf\limits_{z\to t_0} d_{w,n}(z) < \infty$. Тоді

(1) Існують наступні недотичні границі:

$$w_j(t_0) := \lim_{z \widehat{\to} t_0} w_j(z) \quad \text{при } \ j = 0, \dots, n, \tag{6.1.40}$$

де $w_j(z) := \dfrac{w^{(j)}(z)}{j!}$.

(2) Функції

$$K_{t_0}^{(n)}(t) := \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{n,t_0}(t) \\ -\sum\limits_{\ell=0}^{n} w_{n-\ell}(t_0)^* k_{\ell,t_0}(t) \end{bmatrix}, \tag{6.1.41}$$

$$\widetilde{K}_{t_0}^{(n)}(t) := \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sum\limits_{\ell=0}^{n} w_{n-\ell}(t_0) \widetilde{k}_{\ell,t_0}(t) \\ \widetilde{k}_{n,t_0}(t) \end{bmatrix} \tag{6.1.42}$$

належать до простору H^w.

(3) Ядра $K_z^{(n)}$ і $\widetilde{K}_z^{(n)}$ визначені у (6.1.20) і (6.1.21) збігаються відповідно до $K_{t_0}^{(n)}$ і $\widetilde{K}_{t_0}^{(n)}$ в просторі H^w коли $z \widehat{\to} t_0$:

$$K_z^{(n)} \xrightarrow{H^w} K_{t_0}^{(n)} \quad \text{і} \quad \widetilde{K}_z^{(n)} \xrightarrow{H^w} \widetilde{K}_{t_0}^{(n)} \qquad (z \widehat{\to} t_0). \tag{6.1.43}$$

(4) Наступна недотична границя існує і

$$\lim_{z \widehat{\to} t_0} d_{w,n}(z) = \|K_{t_0}^{(n)}\|_{H^w}^2 < \infty. \tag{6.1.44}$$

Доведення. В силу Зауваження 6.6, припущення (6.1.7) забезпечує існування послідовності $\{z_i\}$ точок диску $\mathbb{D}$, яка збігається до t_0 і при цьому послідовності $\left\|K_{z_i}^{(n)}\right\|_{H^w}$ і $\left\|\widetilde{K}_{z_i}^{(n)}\right\|_{H^w}$ обмежені. Оскільки обмежені множини в Ґільбертовому просторі слабо компактні, існує підпослідовність послідовності $\{z_i\}$ (яку як і раніше будемо позначати $\{z_i\}$) така, що послідовності $\{K_{z_i}^{(n)}\}$ і $\{\widetilde{K}_{z_i}^{(n)}\}$ слабо збігаються в H^w. Позначимо через F, $\widetilde{F} \in H^w$ їх слабкі границі:

$$F = \begin{bmatrix} F_+ \\ F_- \end{bmatrix} = \text{w-}\lim_{z_i \to t_0} K_{z_i}^{(n)} \quad \text{і} \quad \widetilde{F} = \begin{bmatrix} \widetilde{F}_+ \\ \widetilde{F}_- \end{bmatrix} = \text{w-}\lim_{z_i \to t_0} \widetilde{K}_{z_i}^{(n)}. \tag{6.1.45}$$

Оскільки F належить до H^w, скориставшись відтворюючою властивістю (6.1.29), отримуємо

$$F_+(\zeta) = \langle F,\ K_\zeta \rangle_{H^w} = \lim_{z_i \to t_0} \left\langle K_{z_i}^{(n)},\ K_\zeta \right\rangle_{H^w} = \lim_{z_i \to t_0} K_{z_i,+}^{(n)}(\zeta), \tag{6.1.46}$$

$$\frac{F_-(\zeta)}{\bar{\zeta}} = \langle F,\ \widetilde{K}_\zeta \rangle_{H^w} = \lim_{z_i \to t_0} \langle K_{z_i}^{(n)},\ \widetilde{K}_\zeta \rangle_{H^w} = \lim_{z_i \to t_0} \frac{K_{z_i,-}^{(n)}(\zeta)}{\bar{\zeta}}, \tag{6.1.47}$$

а з урахуванням (6.1.23) і (6.1.24) маємо

$$F_+(\zeta) \ = \ \lim_{z_i \to t_0} \left(k_{n,z_i}(\zeta) - w(\zeta) \sum_{\ell=0}^{n} w_{n-\ell}(z_i)^* k_{\ell,z_i}(\zeta) \right), \tag{6.1.48}$$

$$\frac{F_-(\zeta)}{\bar{\zeta}} \ = \ \lim_{z_i \to t_0} \left(w(\zeta)^* \widetilde{k}_{n,z_i}(\zeta)^* - \sum_{\ell=0}^{n} w_{n-\ell}(z_i)^* \widetilde{k}_{\ell,z_i}(\zeta)^* \right). \tag{6.1.49}$$

З (6.1.49) і формули (6.1.15) для $\widetilde{k}_{\ell,z}$ випливає, що

$$(\bar{\zeta} - \bar{t}_0)^{n+1} \frac{F_-(\zeta)}{\bar{\zeta}} = w(\zeta)^* - \lim_{z_i \to t_0} \sum_{\ell=0}^{n} w_\ell(z_i)^* (\bar{\zeta} - \bar{z}_i)^\ell \tag{6.1.50}$$

і, таким чином, границя в правій частині існує. Оскільки коефіцієнти полінома ступеню n однозначно визначаються його значеннями в $n+1$ точці і залежать від цих значень неперервним чином, робимо висновок, що існують границі послідовностей $\{w_\ell(z_i)\}_i$ для $\ell = 0, \dots, n$. Вважаючи

$$w_\ell := \lim_{z_i \to t_0} w_\ell(z_i) \qquad (\ell = 0, \dots, n), \tag{6.1.51}$$

запишемо (6.1.48) і (6.1.49) у вигляді

$$F_+(\zeta) \ = \ k_{n,t_0}(\zeta) - w(\zeta) \sum_{\ell=0}^{n} w_{n-\ell}^* k_{\ell,t_0}(\zeta), \tag{6.1.52}$$

$$F_-(\zeta) \;=\; \bar\zeta\left(w(\zeta)^*\widetilde{k}_{n,t_0}(\zeta)^* - \sum_{\ell=0}^{n} w^*_{n-\ell}\widetilde{k}_{\ell,t_0}(\zeta)^*\right). \qquad (6.1.53)$$

Оскільки $F \in H^w$, то $F_- \in H^2_-$ і, отже, функція $f(\zeta) := \frac{\overline{F_-(\zeta)}}{\zeta}$ належить простору H^2_+. Одна зі стандартних властивостей функцій класу H^2_+ полягає в тому, що $\lim_{\zeta\widehat{\to}t_0}(\zeta - t_0)f(\zeta) = 0$. У нашому випадку, в силу формули (6.1.53), отримуємо

$$\lim_{\zeta\widehat{\to}t_0}(\zeta - t_0)\left(w(\zeta)\widetilde{k}_{n,t_0}(\zeta) - \sum_{\ell=0}^{n} w_{n-\ell}\widetilde{k}_{\ell,t_0}(\zeta)\right) = 0,$$

а з урахуванням визначення (6.1.39) ядра $\widetilde{k}_{\ell,t_0}$ маємо

$$w(\zeta) = \sum_{\ell=0}^{n}(\zeta - t_0)^\ell w_\ell + o((\zeta - t_0)^n) \qquad (\zeta\widehat{\to}t_0).$$

Останнє тягне (див., наприклад, [31, Corollary 7.9]), що недотичні границі (6.1.40) існують і дорівнюють числам w_ℓ, що визначені у (6.1.51).

Покладаючи $\zeta = t \in \mathbb{T}$ у (6.1.52) і (6.1.53) і зважаючи на те, що $\bar t \cdot \widetilde{k}_{j,t_0}(t)^* = k_{j,t_0}(t)$ для $t \in \mathbb{T}$, отримуємо наступний вираз для F:

$$F(t) = \begin{bmatrix} F_+(t) \\ F_-(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{n,t_0}(t) \\ -\sum_{\ell=0}^{n} w^*_{n-\ell}k_{\ell,t_0}(t) \end{bmatrix}. \qquad (6.1.54)$$

Оскільки, як тільки що було показано, числа $w_0, \ldots, w_n$ збігаються з недотичними межовими значеннями $w_0(t_0), \ldots, w_n(t_0)$ з (6.1.40), то вирази в правій частині (6.1.54) ідентичні виразам в (6.1.41). Таким чином, $F = K^{(n)}_{t_0}$ і необхідну належність $K^{(n)}_{t_0} \in H^w$ доведено, оскільки F належить простору H^w за визначенням (6.1.45).

Розглянемо тепер допоміжну функцію

$$h_z(t) = K^{(n)}_{t_0}(t)\cdot\left(\frac{1 - t\bar t_0}{1 - t\bar z}\right)^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}$$

де, в силу (6.1.54),

$$g_1(t) \;=\; k_{n,t_0}(t)\cdot\left(\frac{1 - t\bar t_0}{1 - t\bar z}\right)^{n+1} = \frac{t_n}{(1 - t\bar z)^{n+1}} = k_{n,z}(t), \qquad (6.1.55)$$

$$
\begin{aligned}
g_2(t) &= -\sum_{\ell=0}^{n} w_{n-\ell}^* k_{\ell,t_0}(t)\left(\frac{1-t\bar{t}_0}{1-t\bar{z}}\right)^{n+1}\\
&= -\frac{\sum\limits_{\ell=0}^{n} w_\ell^* t^{n-\ell}(1-t\bar{t}_0)^\ell}{(1-t\bar{z})^{n+1}}.
\end{aligned}
\tag{6.1.56}
$$

Покладаючи $h = K_{t_0}^{(n)}$ в Лемі 6.10 (це можна зробити оскільки $K_{t_0}^{(n)} \in H^w$), робимо висновок, що $h_z \xrightarrow{L^w} K_{t_0}^{(n)}$ коли z збігається до t_0 недотичним чином. Отже,

$$
P_{_{H^w}} h_z \xrightarrow{H^w} P_{_{H^w}} K_{t_0}^{(n)} = K_{t_0}^{(n)} \qquad (z \widehat{\to} t_0). \tag{6.1.57}
$$

З іншого боку, з (6.1.56) видно, що $g_2 \in H_+^2$. Тоді, в силу Леми 6.9,

$$
P_{_{H^w}} h_z = P_{_{H^w}} \begin{bmatrix} 1 & w \\ w^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = P_{_{H^w}} \begin{bmatrix} 1 & w \\ w^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.1.58}
$$

З огляду на спеціальну форму (6.1.55) функції g_1 і використовуючи першу формулу з (6.1.35), робимо висновок, що в (6.1.58) $P_{_{H^w}} h_z = K_z^{(n)}$. Тоді (6.1.57) перетворюється в $K_z^{(n)} \xrightarrow{H^w} K_{t_0}^{(n)}$. Тим самим першу збіжність в (6.1.43) доведено. Ті ж самі міркування, застосовані до $\widetilde{F}$ в (6.1.45), показують, що $\widetilde{F}$ збігається з ядром $\widetilde{K}_{t_0}^{(n)}$, що задано (6.1.42) і, що ядра $\widetilde{K}_z^{(n)}$ збігаються до ядер $\widetilde{K}_{t_0}^{(n)}$ по нормі простору H^w коли z збігається до t_0 недотичним чином. Це завершує доказ перших трьох тверджень теореми. На закінчення, в силу (6.1.43) і (6.1.33),

$$
\lim_{z \widehat{\to} t_0} d_{w,n}(z) = \lim_{z,\zeta \to t_0} \|K_z^{(n)}\|_{_{H^w}}^2 = \|\lim_{z \to t_0} K_z^{(n)}\|_{_{H^w}}^2 = \|K_{t_0}^{(n)}\|_{_{H^w}}^2 < \infty,
$$

що доводить рівність (6.1.44). □

Зауваження 6.12. Границі в (6.1.7) і у (6.1.8) збігаються.

Доведення. Нерівність $\liminf\limits_{z \to t_0} d_{w,n}(z) \leq \lim\limits_{z \widehat{\to} t_0} d_{w,n}(z)$ очевидна в силу того, що в лівій частинз z збігається до t_0 довільним чином (залишаючись всередині кругу), а в правій частині - недотичним чином. Для того щоб довести зворотню нерівність розглянемо послідовність $\{z_j\}$, уздовж якої відбувається наближення до нижньої межі в лівій частині. Тобто, таку що послідовність чисел

$$\|K_{z_j}^{(n)}\|_{H^w}^2 = d_{w,n}(z_j)$$

збігається до зазначеної нижньої межі. Зокрема, ця послідовність обмежена. Тоді існує підпослідовність послідовності $\{z_j\}$ (яку як і раніше будемо позначати $\{z_j\}$) така що $K_{z_j}^{(n)}$ збігається до $K_{t_0}^{(n)}$ слабо в H^w. Але тоді

$$\|K_{t_0}^{(n)}\|_{H^w}^2 \leq \lim_{z_j \to t_0} \|K_{z_j}^{(n)}\|_{H^w}^2 = \liminf_{z \to t_0} d_{w,n}(z),$$

і, в силу (6.1.44),

$$\lim_{z \widehat{\to} t_0} d_{w,n}(z) = \|K_{t_0}^{(n)}\|_{H^w}^2 \leq \liminf_{z \to t_0} d_{w,n}(z).$$

□

Зауваження 6.13. Формули (6.1.41) і (6.1.42) для межових ядер $K_{t_0}^{(n)}$ і $\widetilde{K}_{t_0}^{(n)}$ отримуються формальної заміною z на t_0 і $w_0(z), \ldots, w_n(z)$ на $w_0(t_0), \ldots, w_n(t_0)$ в формулах (6.1.20) і (6.1.21) для відповідних ядер внутрішньої точки z. Теорема 6.11 показує, що межові ядра належать простору H^w тоді і тільки тоді, коли виконується умова (6.1.7). Якщо ж ця умова не виконується, то функції $K_{t_0}^{(n)}$ і $\widetilde{K}_{t_0}^{(n)}$, що визначені формулами (6.1.41) і (6.1.42), не належать простору H^w які б значення $w_0, \ldots, w_n$ не були обрані.

Якщо умова (6.1.7) виконується, то формули (6.1.41) і (6.1.42) можуть бути використані для визначення межових ядер $K_{t_0}^{(j)}$ і $\widetilde{K}_{t_0}^{(j)}$ при $j = 0, \ldots, n$. Наступний результат доповнює Теорему 6.11.

Теорема 6.14. Нехай $w \in \mathcal{S}$, $t_0 \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Припустимо, що умова (6.1.7) виконується. Тоді ядра $K_{t_0}^{(j)}$ і $\widetilde{K}_{t_0}^{(j)}$, що визначені формулами (6.1.41) і (6.1.42), належать простору H^w при $j = 0, \ldots, n$ і

$$K_z^{(j)} \xrightarrow{H^w} K_{t_0}^{(j)}, \qquad \widetilde{K}_z^{(j)} \xrightarrow{H^w} \widetilde{K}_{t_0}^{(j)} \qquad \text{коли } z \widehat{\to} t_0, \tag{6.1.59}$$

де ядра $K_z^{(j)}$ і $\widetilde{K}_z^{(j)}$ визначені формулами (6.1.20) і (6.1.21).

Доведення. Ми доведемо частину, що стосується ядер $K_{t_0}^{(j)}$. В силу Теореми 6.11 з умови (6.1.7) випливає, що $K_{t_0}^{(n)} \in H^w$. Покажемо, що

$$K_{t_0}^{(j)} \in H^w \implies K_{t_0}^{(j-1)} \in H^w. \tag{6.1.60}$$

Тоді твердження Теореми буде випливати за індукцією. Для доведення (6.1.60) скористаємося рекурентним співвідношенням

$$K_{t_0}^{(j-1)}(t) = \frac{1}{t}\left((1-t\bar{t}_0)K_{t_0}^{(j)}(t) + \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ w_j(t_0)^* \end{bmatrix}\right), \quad (6.1.61)$$

яке перевіряється безпосередньо. Якщо $K_{t_0}^{(j)} \in H^w$, то зокрема, $K_{t_0}^{(j)} \in L^w$ і з (6.1.61) випливає, що $K_{t_0}^{(j-1)} \in L^w$. Далі, в силу (6.1.61), $K_{t_0,+}^{(j-1)}(\zeta) = \frac{f_+(\zeta)}{\zeta}$, де

$$f_+(\zeta) := (1-\zeta\bar{t}_0)K_{t_0,+}^{(j)}(\zeta) + w(\zeta)w_j(t_0)^*.$$

Функція f_+ належить до H_2^+, оскільки $K_{t_0,+}^{(j)} \in H_2^+$. Оскільки

$$f_+(0) = K_{t_0,+}^{(j)}(0) + w(0)w_j(t_0)^* = -w(0)w_j(t_0)^* + w(0)w_j(t_0)^* = 0,$$

то $K_{t_0,+}^{(j-1)}(\zeta) = \frac{f_+(\zeta)}{\zeta}$ теж належить H_2^+. Порівнюючи другі компоненти в (6.1.61), отримуємо

$$K_{t_0,-}^{(j-1)}(\zeta) = (\bar{\zeta} - \bar{t}_0)K_{t_0,-}^{(j)}(\zeta) + \bar{\zeta}w_j(t_0)^*.$$

Звідки видно, що з припущення $K_{t_0,-}^{(j)} \in H_2^-$ випливає, що $K_{t_0,-}^{(j-1)} \in H_2^-$. Отже, $K_{t_0}^{(j-1)} \in H^w$, що доводить імплікацію (6.1.60). На закінчення відзначимо, що перша група збіжностей в (6.1.59) випливає з Теореми 6.11. Твердження щодо $\widetilde{K}_{t_0,-}^{(j)}$ доводяться так само. □

Наступне Зауваження показує роль $K_{t_0}^{(n)}$ і $\widetilde{K}_{t_0}^{(n)}$ як межових відтворюючих ядер: вони відтворюють межові значення похідних компонент функцій простору H^w. Для випадку $n = 0$ це твердження в дещо іншій формі міститься в роботах [84], [86].

Зауваження 6.15. Нехай $w \in \mathcal{S}$ і нехай виконується умова (6.1.7). Тоді для будь-якої функції $f = \begin{bmatrix} f_+ \\ f_- \end{bmatrix} \in H^w$, наступні недотичні границі існують і відтворюються ядрами $K_{t_0}^{(j)}$ і $\widetilde{K}_{t_0}^{(j)}$:

$$\lim_{z \widehat{\to} t_0} \frac{1}{j!}\frac{d^j}{dz^j}f_+(z) = \left\langle f,\, K_{t_0}^{(j)} \right\rangle_{H^w}, \quad \lim_{z \widehat{\to} t_0} \frac{1}{j!}\frac{d^j}{d\bar{z}^j}\left(\frac{f_-(z)}{\bar{z}}\right) = \left\langle f,\, \widetilde{K}_{t_0}^{(j)} \right\rangle_{H^w}$$

для $j = 0, \ldots, n$.

Для доведення достатньо використати відтворюючі властивості (6.1.27) ядер $K_z^{(n)}$ і $\widetilde{K}_z^{(n)}$ і перейти до границі, скориставшись (6.1.59).

На закінчення покажемо, що при виконанні умови (6.1.7), межові ядра $K_{t_0}^{(j)}$ і $\widetilde{K}_{t_0}^{(j)}$ виражаються одне через одного лінійним чином.

Теорема 6.16. Нехай $w \in \mathcal{S}$ і припустимо, що виконується умова (6.1.7). Тоді

1. Недотичні межові значення

$$w_j = w_j(t_0) := \lim_{z \widehat{\to} t_0} w_j(z) \quad (j = 0, \dots, n) \tag{6.1.62}$$

(які існують в силу Теореми 6.11) задовольняють наступному співвідношенню

$$\begin{bmatrix} w_0 & w_1 & \dots & w_n \\ 0 & w_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & w_1 \\ 0 & \dots & 0 & w_0 \end{bmatrix} \mathbf{\Psi}_n(t_0) \begin{bmatrix} w_0^* & w_1^* & \dots & w_n^* \\ 0 & w_0^* & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & w_1^* \\ 0 & \dots & 0 & w_0^* \end{bmatrix} = \mathbf{\Psi}_n(t_0). \tag{6.1.63}$$

Тут перший і третій множники в лівій частині рівності є верхньо-трикутними Тьопліцевими матрицями, а $\mathbf{\Psi}_n(t_0)$ верхньо-трикутна матриця $\Psi_{j\ell}$, елементи якої визначені в (6.1.5). Зокрема, $|w_0| = 1$.

2. Ядра $K_{t_0}^{(j)}$ і $\widetilde{K}_{t_0}^{(j)}$, що визначені за формулами (6.1.41) і (6.1.42) при $j = 0, \dots, n$, задовольняють співвідношенням

$$\sum_{i=0}^{j} \widetilde{K}_{t_0}^{(i)} g_{i,j} = K_{t_0}^{(j)} \quad (j = 0, \dots, n), \tag{6.1.64}$$

де $g_{i,j}$ визначаються за формулами

$$g_{i,j} := \sum_{\ell=0}^{j-i} \Psi_{i,j-\ell} w_\ell^* \quad \text{при} \quad 0 \le i \le j \le n. \tag{6.1.65}$$

Доведення. Зауважимо спочатку, що ядра (6.1.39) задовольняють співвідношенням

$$k_{j,t_0}(\zeta) = -\sum_{i=0}^{j} \Psi_{ij} \widetilde{k}_{i,t_0}(\zeta) \qquad (j \in \mathbb{Z}_+,\ \zeta \neq t_0). \tag{6.1.66}$$

Безпосереднє обчислення можна знайти в [31, Proposition 10.4]. Використовуючи ці співвідношення, отримуємо

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{j} w_{j-\ell}^* k_{\ell,t_0}(\zeta) &= -\sum_{\ell=0}^{j} w_{j-\ell}^* \sum_{i=0}^{\ell} \Psi_{i,\ell} \widetilde{k}_{i,t_0}(\zeta) = -\sum_{i=0}^{j} \left(\sum_{\ell=i}^{j} \Psi_{i,\ell} w_{j-\ell}^* \right) \widetilde{k}_{i,t_0}(\zeta) \\ &= -\sum_{i=0}^{j} \left(\sum_{\ell=0}^{j-i} \Psi_{i,j-\ell} w_\ell^* \right) \widetilde{k}_{i,t_0}(\zeta) = -\sum_{i=0}^{j} g_{ij} \widetilde{k}_{i,t_0}(\zeta). \quad (6.1.67)\end{aligned}$$

Підставляючи (6.1.66) і (6.1.67) в (6.1.41), отримуємо

$$K_{t_0}^{(j)}(t) = \begin{bmatrix} K_{t_0,+}^{(j)}(t) \\ K_{t_0,-}^{(j)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w(t) \\ w(t)^* & 1 \end{bmatrix} \sum_{i=0}^{j} \begin{bmatrix} -\Psi_{ij} \\ g_{ij} \end{bmatrix} \widetilde{k}_{i,t_0}(t). \quad (6.1.68)$$

За Теоремою 6.11, ядра $K_{t_0}^{(j)}$ належать простору H^w, $j = 0, \dots, n$; зокрема, перша компонента належить H_+^2, а друга H_-^2. Так само як і в Теоремі 6.11 (міркування після формули (6.1.53)), з властивості $K_{t_0,-}^{(j)} \in H_-^2$ випливає асимптотика

$$w(z) = \sum_{\ell=0}^{j} (z - t_0)^\ell w_\ell + o((z - t_0)^j) \qquad \text{при} \quad z \widehat{\rightarrow} t_0. \quad (6.1.69)$$

З іншого боку, оскільки $K_{t_0,+}^{(j)}$ належить до H_+^2 отримуємо, що

$$(z - t_0) K_{t_0,+}^{(j)}(z) \to 0 \qquad \text{при} \quad z \widehat{\rightarrow} t_0. \quad (6.1.70)$$

Підставляючи в (6.1.68) визначені (6.1.39) ядра $\widetilde{k}_{i,t_0}$, отримуємо

$$K_{t_0,+}^{(j)}(z) \;=\; \frac{w(z) \cdot \sum_{i=0}^{j} g_{ij}(z - t_0)^{j-i} - \sum_{i=0}^{j} \Psi_{i,j}(z - t_0)^{j-i}}{(z - t_0)^{j+1}}.$$

З урахуванням (6.1.70) маємо

$$w(z) \cdot \sum_{i=0}^{j} g_{ij}(z - t_0)^{j-i} - \sum_{i=0}^{j} \Psi_{i,j}(z - t_0)^{j-i} = o((z - t_0)^j), \qquad z \widehat{\rightarrow} t_0.$$

Тепер підставимо сюди замість w її асимптотику (6.1.69) (ми використовуємо позначення r і i замість $j - i$ в другій і третій сумах відповідно)

$$\left(\sum_{\ell=0}^{j} (z - t_0)^\ell w_\ell \right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{j} g_{j-r,j}(z - t_0)^r \right) - \sum_{i=0}^{j} \Psi_{j-i,j}(z - t_0)^i = o((z - t_0)^j).$$

Вираз в лівій частині є поліномом $p(z) = \sum_{i=0}^{2j} p_i(z-t_0)^i$ і отримана вище асимптотика означає, що $p_i = 0$ для $i = 0, \ldots, j$. Таким чином,

$$p_i = \sum_{\ell=0}^{i} w_\ell g_{j-i+\ell,j} - \Psi_{j-i,j} = 0, \quad \text{для} \quad i = 0, \ldots, j,$$

що, в силу (6.1.65), можна переписати наступним чином (знову використовуємо $j-i$ замість i)

$$\Psi_{i,j} = \sum_{\ell=0}^{j-i} w_\ell g_{i+\ell,j} = \sum_{\ell=0}^{i} w_\ell \sum_{r=0}^{j-i-\ell} \Psi_{i+\ell,j-r} w_r^* \qquad (i = 0, \ldots, j). \tag{6.1.71}$$

Це співвідношення дає рівність ij-х елементів матриць в матричній рівності (6.1.63) при $0 \le i \le j \le n$. Всі інші елементи в лівій і правій частинах (6.1.63) дорівнюють нулю; таким чином, рівність (6.1.63) доведено. Рівність елементів з індексами 00 в (6.1.63) означає, що $w_0 \Psi_{00} w_0^* = \Psi_{00}$, що еквівалентно (оскільки $\Psi_{00} = t_0 \neq 0$) $|w_0| = 1$. Цим завершено доведення твердження (1) цієї теореми.

Для перевірки (6.1.64) скористаємося формулами (6.1.68) і (6.1.42) для межових ядер $K_{t_0,+}^{(j)}$ і $\widetilde{K}_{t_0,+}^{(j)}$. Оскільки всі ядра містять загальний множник $\begin{bmatrix} 1 & w \\ w^* & 1 \end{bmatrix}$, то нам достатньо перевірити рівність

$$\sum_{i=0}^{j} \begin{bmatrix} -\sum_{\ell=0}^{i} w_{i-\ell} \widetilde{k}_{\ell,t_0}(t) \\ \widetilde{k}_{i,t_0}(t) \end{bmatrix} g_{ij} = \sum_{i=0}^{j} \begin{bmatrix} -\Psi_{ij} \\ g_{ij} \end{bmatrix} \widetilde{k}_{i,t_0}(t) \tag{6.1.72}$$

для $j = 0, \ldots, n$. Рівність других компонент тавтологічна. Рівність перших компонент перевіряється наступним чином

$$\sum_{i=0}^{j} g_{ij} \sum_{\ell=0}^{i} w_{i-\ell} \widetilde{k}_{\ell,t_0}(t) = \sum_{\ell=0}^{j} \left(\sum_{i=0}^{j-\ell} w_i g_{i+\ell,j} \right) \widetilde{k}_{\ell,t_0}(t) = \sum_{\ell=0}^{j} \Psi_{\ell j} \widetilde{k}_{\ell,t_0}(t).$$

Тут перша рівність виходить перестановкою порядку сумовності і підстановкою $i := i - \ell$, друга випливає з (6.1.71). □

Зауваження 6.17. Зауважимо, що з рівності правих стовпців в (6.1.63) вже випливає рівність усіх матриць (див. [31, Теорема 10.5]). Іншими словами, матрична рівність (6.1.63) є еквівалентною наступній системі рівностей (пор. з (6.1.71)):

$$\sum_{\ell=0}^{i} w_\ell \sum_{r=0}^{n-i-\ell} \Psi_{i+\ell,n-r} w_r^* = \Psi_{i,n} \qquad (i = 0, \dots, n). \tag{6.1.73}$$

Зауваження 6.18. Цікаво відзначити, що всі висновки Теореми 6.16 випливають з припущення, що

$$K_{t_0,+}^{(n)} \in H_+^2 \quad \text{и} \quad K_{t_0,-}^{(n)} \in H_-^2. \tag{6.1.74}$$

Дійсно, існування межових значень (6.1.62) випливає з того, що $K_{t_0,-}^{(n)} \in H_-^2$. В силу Теореми 6.14, умови (6.1.74) забезпечують, що $K_{t_0,+}^{(j)} \in H_+^2$ і $K_{t_0,-}^{(j)} \in H_-^2$ при усіх $j = 0, \dots, n$. І це все, що потрібно для перевірки (6.1.63), що в свою чергу тягне (6.1.64). При цьому 6.1.74) слабкіше ніж (6.1.7), оскільки (6.1.7) еквівалентно тому, що $K_{t_0}^{(n)} \in H^w$, а це еквівалентно тому, що $K_{t_0}^{(n)} \in L^w$. Останнє ж спричиняє (6.1.74) але не випливає з (6.1.74).

Зауваження 6.19. Відзначимо також, що співвідношення (6.1.64) і (6.1.65) в Теоремі 6.16 мають трикутну форму і можуть бути записані в матричному вигляді. Нехай $\mathbf{\Psi}_n(t_0)$ визначені в (6.1.5) і нехай $\mathbf{W}_n$ і $\mathbf{G}_n$ це верхньо-трикутні матриці з елементами

$$W_{ij} = \begin{cases} w_{j-i}^*, & \text{якщо} \quad j \geq i, \\ 0, & \text{якщо} \quad j < i, \end{cases} \qquad G_{ij} = \begin{cases} g_{ij}, & \text{якщо} \quad j \geq i, \\ 0, & \text{якщо} \quad j < i, \end{cases} \qquad (i, j = 0, \dots, n), \tag{6.1.75}$$

де числа $w_0, \dots, w_n$ і g_{ij} визначені формулами (6.1.62) і (6.1.65) (нагадаємо, що $\mathbf{W}_n$ бере участь в (6.1.63) в якості правого множника в лівій частині рівності). Тоді співвідношення (6.1.64) і (6.1.65) можуть бути переписані в матричному вигляді

$$\left[\begin{array}{ccc} \widetilde{K}_{t_0}^{(0)} & \dots & \widetilde{K}_{t_0}^{(n)} \end{array} \right] \mathbf{G}_n = \left[\begin{array}{ccc} K_{t_0}^{(0)} & \dots & K_{t_0}^{(n)} \end{array} \right] \quad \text{і} \quad \mathbf{G}_n = \mathbf{\Psi}_n(t_0) \mathbf{W}_n, \tag{6.1.76}$$

відповідно.

6.1.4 Доведення Теореми 6.2

У цьому розділі ми завершуємо доведення Теореми 6.2. Імплікації (1) $\Leftrightarrow$ (2) і рівність границь в (6.1.7) і

(6.1.8) вже доведено в Теоремі 6.11 і в Зауваженні 6.12. Зараз ми скористаємося результатами попереднього параграфу для доведення (1) $\Rightarrow$ (3), (1) $\Rightarrow$ (4) і рівності (6.1.10).

Як і раніше припускаємо, що умова (6.1.7) виконується для Шурівської функції w в межовій точці $t_0 \in \mathbb{T}$. Тоді існують недотичні межові значення

$$w_j = w_j(t_0) := \lim_{z \widehat{\to} t_0} \frac{w^{(j)}(z)}{j!} \tag{6.1.77}$$

для $j = 0, \dots, n$ (за Теоремою 6.11), $|w_0| = 1$ (за твердженням 1 Теореми 6.16), ядра $K_{t_0}^{(j)}$ і $\widetilde{K}_{t_0}^{(j)}$ визначені формулами (6.1.41) і (6.1.42) для $j = 0, \dots, n$ належать простору H^w (за Теоремою 6.14) і задовольняють співвідношенням (6.1.65) (за твердженням 2 Теореми 6.1.62); нарешті, ядра $K_z^{(j)}$ і $\widetilde{K}_z^{(j)}$, що визначені формулами (6.1.20) і (6.1.21) збігаються до $K_{t_0}^{(j)}$ і $\widetilde{K}_{t_0}^{(j)}$:

$$K_z^{(j)} \xrightarrow{H^w} K_{t_0}^{(j)}, \qquad \widetilde{K}_z^{(j)} \xrightarrow{H^w} \widetilde{K}_{t_0}^{(j)} \qquad \text{при} \ \ z \widehat{\to} t_0, \tag{6.1.78}$$

за Теоремою 6.14. Використовуючи (6.1.2), (6.1.34) і (6.1.78), отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n^w(t_0) := \lim_{z \widehat{\to} t_0} \mathbf{P}_n(z) &= \lim_{z \widehat{\to} t_0} \left[\left\langle K_z^{(j)}, \, K_z^{(i)} \right\rangle_{H^w} \right]_{i,j=0}^n \\ &= \left[\left\langle K_{t_0}^{(j)}, \, K_{t_0}^{(i)} \right\rangle_{H^w} \right]_{i,j=0}^n, \end{aligned} \tag{6.1.79}$$

що доводить існування межової матриці Шварца-Піка а також показує, що $\mathbf{P}_n^w(t_0)$ є матрицею Грама системи функцій $\{K_{t_0}^{(j)}\}_{j=0}^n$. Цим завершується доведення імплікації (1) $\Rightarrow$ (3) в Теоремі 6.2. Покажемо тепер що недотичні границі (6.1.77) існують також при $j = n+1, \dots, 2n+1$. З (6.1.32) і (6.1.78) отримуємо

$$\begin{aligned} w_{i+j+1}(t_0) := \lim_{z \widehat{\to} t_0} w_{i+j+1}(z) &= \lim_{z \widehat{\to} t_0} \left\langle \widetilde{K}_z^{(i)}, \, K_z^{(j)} \right\rangle_{H^w} \\ &= \left\langle \widetilde{K}_{t_0}^{(i)}, \, K_{t_0}^{(j)} \right\rangle_{H^w} \end{aligned} \tag{6.1.80}$$

для $i, j = 0, \dots n$. Звідки випливає необхідне. За допомогою цих границь за формулою (6.1.4) обчислюється матриця $\mathbb{P}_n^w(t_0)$:

$$\mathbb{P}_n^w(t_0) = \mathbf{H}_n \mathbf{\Psi}_n(t_0) \mathbf{W}_n, \tag{6.1.81}$$

де $\mathbf{H}_n = [w_{i+j+1}]_{i,j=0}^n$ і $\mathbf{W}$ визначена формулою (6.1.75). Для доказу імплікації (1) $\Rightarrow$ (4) залишається показати, що $\mathbb{P}_n^w(t_0) \geq 0$. А це буде випливати з рівності (6.1.10) оскільки $\mathbf{P}_n^w(t_0) \geq 0$. Для перевірки (6.1.10) зафіксуємо два вектор-стовпця

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n+1} \quad \text{і припустимо} \quad e = \begin{bmatrix} e_0 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} := \mathbf{G}_n x, \tag{6.1.82}$$

де $\mathbf{G}_n$ визначена в (6.1.75). За формулою (6.1.79),

$$y^*\mathbf{P}_n(t_0)x = \left\langle \begin{bmatrix} K_{t_0}^{(0)} & \dots & K_{t_0}^{(n)} \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} K_{t_0}^{(0)} & \dots & K_{t_0}^{(n)} \end{bmatrix} y \right\rangle_{H^w}.$$

Трансформуємо цей вираз, використовуючи (6.1.76), (6.1.82), (6.1.80) і знову (6.1.82)

$$\begin{aligned} y^*\mathbf{P}_n(t_0)x &= \left\langle \begin{bmatrix} \widetilde{K}_{t_0}^{(0)} & \dots & \widetilde{K}_{t_0}^{(n)} \end{bmatrix} \mathbf{G}_n x, \begin{bmatrix} K_{t_0}^{(0)} & \dots & K_{t_0}^{(n)} \end{bmatrix} y \right\rangle_{H^w} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} \widetilde{K}_{t_0}^{(0)} & \dots & \widetilde{K}_{t_0}^{(n)} \end{bmatrix} e, \begin{bmatrix} K_{t_0}^{(0)} & \dots & K_{t_0}^{(n)} \end{bmatrix} y \right\rangle_{H^w} \\ &= \sum_{i,j=0}^{n} \left\langle \widetilde{K}_{t_0}^{(i)} e_i, K_{t_0}^{(j)} y_j \right\rangle_{H^w} \\ &= \sum_{i,j=0}^{n} \bar{y}_j w_{i+j+1} e_i = y^*\mathbf{H}_n e = y^*\mathbf{H}_n\mathbf{G}_n x. \end{aligned}$$

Таким чином, $\mathbf{P}_n(t_0) = \mathbf{H}_n\mathbf{G}$, що з урахуванням (6.1.76) задає

$$\mathbf{P}_n(t_0) = \mathbf{H}_n\mathbf{G}_n = \mathbf{H}_n\boldsymbol{\Psi}_n(t_0)\mathbf{W}_n = \mathbb{P}_n^w(t_0)$$

Це завершує доказ імплікації (1) $\Rightarrow$ (4) в Теоремі 6.2. Імплікації (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) є очевидними. Залишається довести імплікацію (4) $\Rightarrow$ (2). Це доведення засновано на наступній лемі, яка використовує методи інтерполяції.

Лема 6.20. Нехай $t_0 \in \mathbb{T}$, f і w функції аналітичні на множині $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{D} : \ |z - t_0| < \varepsilon\}$. Припустимо, що в точці t_0 існують недотичні межові значення похідних цих функцій до порядку $2n+1$ і припустимо, що

$$w_j(t_0) = f_j(t_0) \quad \text{для} \ \ j = 0, \dots, 2n+1, \tag{6.1.83}$$

де $w_j(z)$ позначає $\frac{1}{j!}w^{(j)}(z)$. Тоді $d_{w,n}(z) - d_{f,n}(z) = o(1)$ при $z\widehat{\rightarrow}t_0$.

Доведення. Безпосереднє диференціювання добутку

$$\frac{1}{(n!)^2}w(z)\frac{1}{1-|z|^2}w(z)^*$$

дає

$$\frac{1}{(n!)^2}\,\frac{\partial^{2n}}{\partial z^n \partial \bar{z}^n}\,\frac{|w(z)|^2}{1-|z|^2} = \sum_{i,j=0}^{n} w_{n-i}(z)\frac{u_{i,j}(z)}{(1-|z|^2)^{i+j+1}}w_{n-j}(z)^*, \tag{6.1.84}$$

де

$$u_{i,j}(z) = \sum_{\ell=0}^{\min(i,j)} \frac{(i+j-\ell)!}{(i-\ell)!\,(j-\ell)!\,l!}\,\bar{z}^{i-\ell}z^{j-\ell}(1-|z|^2)^{\ell}, \tag{6.1.85}$$

для $i, j = 0, \ldots, n$. Використовуючи (6.1.84) і аналогічну формулу для f, отримуємо

$$\begin{aligned} d_{w,n}(z) - d_{f,n}(z) &= \frac{1}{(n!)^2}\,\frac{\partial^{2n}}{\partial z^n \partial \bar{z}^n}\frac{|f(z)|^2 - |w(z)|^2}{1-|z|^2} \\ &= \sum_{i,j=0}^{n} f_{n-i}(z)\frac{u_{i,j}(z)}{(1-|z|^2)^{i+j+1}}f_{n-j}(z)^* \\ &\quad -\sum_{i,j=0}^{n} w_{n-i}(z)\frac{u_{i,j}(z)}{(1-|z|^2)^{i+j+1}}w_{n-j}(z)^* \\ &= \sum_{i,j=0}^{n} \left(f_{n-i}(z) - w_{n-i}(z)\right)\frac{u_{i,j}(z)}{(1-|z|^2)^{i+j+1}}f_{n-j}(z)^* \\ &\quad -\sum_{i,j=0}^{n} w_{n-i}(z)\frac{u_{i,j}(z)}{(1-|z|^2)^{i+j+1}}\left(w_{n-j}(z)^* - f_{n-j}(z)^*\right). \end{aligned} \tag{6.1.86}$$

В силу (6.1.83) маємо

$$f_i(z) - w_i(z) = o((z-t_0)^{2n+1-i}) \quad \text{при} \quad z\widehat{\rightarrow}t_0.$$

Оскільки $z - t_0 = O(1-|z|^2)$ при z, що збігається до t_0 недотичним чином, то

$$\frac{f_{n-i}(z) - w_{n-i}(z)}{(1-|z|^2)^{i+j+1}} = o\left((z-t_0)^{2n+1-(n-i)-(i+j+1)}\right) = o((z-t_0)^{n-j}), \quad z\widehat{\rightarrow}t_0$$

при усіх $i, j = 0, \ldots, n$. Залишається зауважити, що з (6.1.85) випливає $u_{i,j}(z) = O(1)$ при $z\widehat{\rightarrow}t_0$, а тоді з (6.1.86) випливає необхідне. □

Доведення імплікації (4) $\Rightarrow$ (2) **Теореми 6.2:** Отже, ми припускаємо що існують недотичні межові значення

$$w_j = w_j(t_0) := \lim_{z \widehat{\to} t_0} \frac{w^{(j)}(z)}{j!} \quad (j = 0, \ldots, 2n+1) \tag{6.1.87}$$

і, що вони задовольняють (6.1.9). Тоді існує скінченний добуток Бляшке f такий, що

$$f_j(t_0) = w_j \quad \text{при } j = 0, \ldots, 2n+1. \tag{6.1.88}$$

Дійсно, рівності (6.1.88) можна розглядати як інтерполяційні умови на функцію класу Шура в межовій точці $t_0 \in \mathbb{T}$. При цьому інтерполяційні значення $w_0, \ldots, w_{2n+1} \in \mathbb{C}$ задовольняють умові (6.1.9), тобто

$$|w_0| = 1 \quad \text{i} \quad \mathbb{P}_n^w(t_0) := \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n+1} & \cdots & w_{2n+1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_n(t_0) \begin{bmatrix} \overline{w}_0 & \ldots & \overline{w}_n \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \overline{w}_0 \end{bmatrix} \geq 0. \tag{6.1.89}$$

Ця задача розглядалася в [73], [18, Section 21], [31, Section 13]. Результати цих робіт зокрема показують що, якщо матриця $\mathbb{P}_n^w(t_0)$ позитивно визначена, то існує нескінченно багато розв'язків цієї задачі в класі Шура, а серед них нескінченно багато скінченних добутків Бляшке.

В силу (6.1.87) і (6.1.88), мають місце рівності $w_j(t_0) = f_j(t_0)$ при $j = 0, \ldots, 2n+1$ і ми можемо застосувати Лему 6.20, яка стверджує, що $d_{w,n}(z) - d_{f,n}(z) = o(1)$ коли z збігається до t_0 недотичним чином. Оскільки f це скінченний добуток Бляшке, то існує кінчена границя $\lim_{z \to t_0} d_{f,n}(z)$ (див. [34, Proposition 6.2]). Отже, $\lim\limits_{z \widehat{\to} t_0} d_{w,n}(z) = \lim\limits_{z \to t_0} d_{f,n}(z) < \infty$ і властивість (2) доведено.

Якщо $\mathbb{P}_n^w(t_0) \geq 0$ є виродженою, то w сама є скінченним добутком Бляшке ступеню, що дорівнює рангу матриці $\mathbb{P}_n^w(t_0)$. Отже, властивість (2) виконується і в цьому випадку. $\square$

6.1.5 Заключні зауваження

Теорема 6.2 накладає обмеження двох різних типів і встановлює співвідношення між ними: з одного боку відношення $\frac{1-|w(z)|^2}{1-|z|^2}$ і його частинні похідні (властивості 1-3), з іншого боку недотичні межові значення похідних w (властивість 4). Умова (6.1.7) є найслабшим припущенням першого типу, яке тягне всі інші властивості в Теоремі 6.2. Тут ми хочемо обговорити до якої міри можна послабити припущення про недотичні межові похідні у властивості 4 щоб властивість (6.1.7) як і раніше мала місце. Зауважимо, що при доведенні (4) $\Rightarrow$ (2) (в кінці Розділу 6.1.4) ми не користувалися тим, що w функція класу Шура. Іншими словами, (6.1.8) виконується для будь-якої функції w аналітичної в $\mathbb{D}$ для якої недотичні межові значення (6.1.87) існують і задовольняють співвідношенню (6.1.9). Припущення, що $\mathbb{P}_n^w(t_0)$ в (6.1.89) позитивна тут не потрібно.

Теорема 6.21. ([32]) Припустимо, що функція w аналітична в околі $\{z \in \mathbb{D} : \ |z - t_0| < \varepsilon\}$ точки $t_0 \in \mathbb{T}$. Припустимо, що недотичні межові значення (6.1.87) існують, що

$$|w_0| = 1 \quad \text{и} \quad \mathbb{P}_n^w(t_0) = \mathbb{P}_n^w(t_0)^*, \tag{6.1.90}$$

де $\mathbb{P}_n^w(t_0)$ визначена в (6.1.89). Тоді властивість (6.1.8) має місце.

Доведення цього факту міститься в Теоремі 6.40 наступного розділу.

6.2 Интерполяція у межовій точці. Симетрія даних інтерполяції

У цьому розділі показано, що наступні властивості функцій узагальненого класу Шура в граничної точці $t_0 \in \mathbb{T}$ еквівалентні: умова Жюліа-Каратеодорі порядку n (6.1.7); збіг асимптотик (6.2.17), (6.2.18) порядку $2n+1$ зсередини і ззовні кругу $\mathbb{D}$; t_0-ізометричність коефіцієнтів граничної асимптотики; ермітовість матриці $\mathbb{P}$, що визначена формулою (6.2.11) за цими коефіцієнтами. Встановлюються деякі зв'язки між цими властивостями в більш широких класах функцій. Результати цього розділу опубліковані в роботах [36], [37], [32].

6.2.1 Позначення та формулювання результату. У цьому розділі ми розглядаємо додаткові питання, пов'язані з Теоремою Жюліа-Каратеодорі. Для точки t_0 одиничного кола $\mathbb{T}$ введемо такі позначення

$$\mathcal{U}_{t_0,\varepsilon} := \{z \in \mathbb{D} : \ 0 < |z - t_0| < \varepsilon\},$$

$$\Gamma^{\text{int}}_{t_0,\alpha,\varepsilon} := \{z \in \mathcal{U}_{t_0,\varepsilon} : \ |\arg(z - t_0)| < \alpha\} \quad \text{для } \ \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$\Gamma^{\text{ext}}_{t_0,\alpha,\varepsilon} := \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{\bar{z}} \in \Gamma^{\text{int}}_{t_0,\alpha,\varepsilon}\}$$

і

$$\Gamma_{t_0,\alpha,\varepsilon} := \Gamma^{\text{int}}_{t_0,\alpha,\varepsilon} \cup \Gamma^{\text{ext}}_{t_0,\alpha,\varepsilon}$$

Ми розглядаємо $\mathcal{U}_{t_0,\varepsilon}$ як проколотий окіл і $\Gamma_{t_0,\alpha,\varepsilon}$ як проколотий недотичний окіл точки t_0, останній складається з внутрішньої і зовнішньої частин. Ми будемо опускати параметр ε в позначеннях. Через a^* будемо позначати комплексне спряження числа $a \in \mathbb{C}$. Символом $\mathcal{S}$ позначимо клас Шура функцій аналітичних в одиничному крузі, що відображають його в себе. Кратний аналог класичної Теореми Жюліа-Каратеодорі був розглянутий в попередньому розділі (Теорема 6.2).

Тут ми коротко нагадаємо результати попереднього розділу, а також трохи модифікуємо позначення. Для функції w аналітичної в $z \in \mathbb{D}$ (не обов'язково класу Шура) і цілого додатного $n \in \mathbb{Z}_+$ розглядається ермітова матриця

$$\mathbf{P}^w_n(z) := \left[\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\frac{1 - |w(z)|^2}{1 - |z|^2}\right]^n_{i,j=0} \tag{6.2.1}$$

яку ми називаємо *матрицею Шварца-Піка* (для функцій класу Шура, $w \in \mathcal{S}$, матриця $\mathbf{P}^w_n(z)$ є невід'ємною). Для точки кола $t_0 \in \mathbb{T}$ і функції w аналітичної в околі $\mathcal{U}_{t_0}$ визначимо *межову матрицю Шварца-Піка*

$$\mathbf{P}^w_n(t_0) := \lim_{z \widehat{\to} t_0} \mathbf{P}^w_n(z), \tag{6.2.2}$$

якщо ця недотична границя існує. Якщо $\mathbf{P}^w_n(t_0)$ існує, то вона ермітова (і вона невід'ємна, якщо $w \in \mathcal{S}$). Правий-нижній елемент матриці $\mathbf{P}^w_n(z)$ позначимо через

$$d_{w,n}(z) := \frac{1}{(n!)^2}\frac{\partial^{2n}}{\partial z^n \partial \bar{z}^n}\frac{1 - |w(z)|^2}{1 - |z|^2}. \tag{6.2.3}$$

Ми використовуємо позначення $w_j(z) := \frac{w^{(j)}(z)}{j!}$ і $w_j(t_0)$ для недотичних межових значень

$$w_j(t_0) := \lim_{z \widehat{\rightarrow} t_0} w_j(z) = \lim_{z \widehat{\rightarrow} t_0} \frac{w^{(j)}(z)}{j!}. \tag{6.2.4}$$

Якщо границі (6.2.4) існують при $j = 0, \ldots, 2n+1$, ми можемо побудувати наступні матриці

$$\mathbb{U}_n^w(t_0) := \begin{bmatrix} w_0(t_0)^* & w_1(t_0)^* & \ldots & w_n(t_0)^* \\ 0 & w_0(t_0)^* & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & w_1(t_0)^* \\ 0 & \ldots & 0 & w_0 \end{bmatrix}, \tag{6.2.5}$$

$$\mathbb{H}_n^w(t_0) := \begin{bmatrix} w_1(t_0) & w_2(t_0) & \ldots & w_{n+1}(t_0) \\ w_2(t_0) & w_3(t_0) & \ldots & w_{n+2}(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{n+1}(t_0) & w_{n+2}(t_0) & \ldots & w_{2n+1}(t_0) \end{bmatrix}, \tag{6.2.6}$$

а також матрицю

$$\mathbb{P}_n^w(t_0) = \mathbb{H}_n^w(t_0) \boldsymbol{\Psi}_n(t_0) \mathbb{U}_n^w(t_0), \tag{6.2.7}$$

де $\boldsymbol{\Psi}_n(t_0) = [\Psi_{j\ell}]_{j,\ell=0}^n$ верхньо трикутна матриця

$$\boldsymbol{\Psi}_n(t_0) = \begin{bmatrix} t_0 & -t_0^2 & t_0^3 & \cdots & (-1)^n \binom{n}{0} t_0^{n+1} \\ 0 & -t_0^3 & 2t_0^4 & \cdots & (-1)^n \binom{n}{1} t_0^{n+2} \\ \vdots & & t_0^5 & \cdots & (-1)^n \binom{n}{2} t_0^{n+3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & (-1)^n \binom{n}{n} t_0^{2n+1} \end{bmatrix}, \tag{6.2.8}$$

тобто,

$$\Psi_{j\ell} = \begin{cases} 0, & \text{if } j > \ell \\ (-1)^\ell \binom{\ell}{j} t_0^{\ell+j+1}, & \text{if } j \leq \ell. \end{cases} \tag{6.2.9}$$

Також будемо використовувати матриці схожої структури, асоційовані з точкою $t_0 \in \mathbb{T}$ і довільною послідовністю комплексних чисел $\{w_j\}$:

$$\mathbb{U}(w_0, \ldots, w_n) = \begin{bmatrix} w_0^* & \ldots & w_n^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & w_0^* \end{bmatrix}, \quad \mathbb{H}(w_1, \ldots, w_{2n+1}) = [w_{i+j+1}]_{i,j=0}^{n} \tag{6.2.10}$$

і

$$\mathbb{P}(t_0, w_0, \ldots, w_{2n+1}) := \mathbb{H}(w_1, \ldots, w_{2n+1})\boldsymbol{\Psi}_n(t_0)\mathbb{U}(w_0, \ldots, w_n). \tag{6.2.11}$$

Визначення 6.22. Нехай $t_0 \in \mathbb{T}$. Будемо говорити, що послідовність $\{w_0, \ldots, w_n\}$ комплексних чисел є t_0-ізометричною, якщо

$$\overline{\mathbb{U}}(w_0, \ldots, w_n)\boldsymbol{\Psi}_n(t_0)\mathbb{U}(w_0, \ldots, w_n) = \boldsymbol{\Psi}_n(t_0), \tag{6.2.12}$$

де матриця $\overline{\mathbb{U}}$ складена з елементів комплексно-спряжених елементам $\mathbb{U}$. Нескінченну послідовність $\{w_i\}_{i=0}^{\infty}$ будемо називати t_0-ізометричною, якщо рівності (6.2.12) виконуються при будь-якому $n \in \mathbb{Z}_+$.

Зауваження 6.23. В силу верхньо-трикутної структури матриць в (6.2.12), якщо послідовність $\{w_0, \ldots, w_n\}$ є t_0-ізометричною, то і її частина $\{w_0, \ldots, w_k\}$ є t_0-ізометричною при будь-якому $k < n$. Відзначимо, що при $n = 0$ t_0-ізометричність означає, що $|w_0| = 1$.

Наступна теорема доведена в попередньому розділі (Теорема 6.2).

Теорема 6.24. Нехай $w \in \mathcal{S}$, $t_0 \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ і нехай $d_{w,n}(z)$ визначена формулою (6.2.3). Наступні властивості еквівалентні

1. Наступна нижня границя є скінченною

$$\widetilde{d}_n := \liminf_{z \to t_0} d_{w,n}(z) < \infty. \tag{6.2.13}$$

2. Наступна недотична границя існує і є скінченною

$$d_{w,n}(t_0) := \lim_{z \widehat{\to} t_0} d_{w,n}(z) < \infty. \tag{6.2.14}$$

3. Межова матриця Шварца-Піка $\mathbf{P}_n^w(t_0)$, що визначена як недотична границя (6.2.2) існує.

4. Недотичні межові значення $w_j(t_0)$ існують при $j = 0, \ldots, 2n+1$ і задовольняють
$$|w_0(t_0)| = 1 \quad \text{і} \quad \mathbb{P}_n^w(t_0) \geq 0,$$
де $\mathbb{P}_n^w(t_0)$ матриця визначена в (6.2.7).

При виконанні цих умов $\widetilde{d}_n = d_{w,n}(t_0)$ і $\mathbf{P}_n^w(t_0) = \mathbb{P}_n^w(t_0)$.

Виявляється, що властивість (3) Теореми 6.24 випливає навіть з більш слабких припущень (не тільки для функцій класу Шура)

$$|w_0(t_0)| = 1 \quad \text{і} \quad \mathbb{P}_n^w(t_0) = \mathbb{P}_n^w(t_0)^*, \tag{6.2.15}$$

Наступну теорему буде доведено в Розділі 6.2.3.

Теорема 6.25. Припустимо, що функція w аналітична в околі $\mathcal{U}_{t_0}$ точки $t_0 \in \mathbb{T}$, припустимо, що існують недотичні межові значення $w_j(t_0)$ при $j = 0, \ldots, 2n+1$. Тоді наступні властивості еквівалентні:

1. Мають місце співвідношення (6.2.15).
2. Послідовність $\{w_0(t_0), \ldots, w_{2n+1}(t_0)\}$ є t_0-ізометричною, тобто,
$$\overline{\mathbb{U}}(w_0, \ldots, w_{2n+1})\mathbf{\Psi}_{2n+1}(t_0)\mathbb{U}(w_0, \ldots, w_{2n+1}) = \mathbf{\Psi}_{2n+1}(t_0).$$
3. Існує раціональна унімодулярна на колі $\mathbb{T}$ функція f (відношення двох скінченних добутків Бляшке) така, що
$$w(z) = f(z) + o((z - t_0)^{2n+1}) \quad \text{при} \quad z \widehat{\to} t_0 \tag{6.2.16}$$
зсередини кругу.
4. Асимптотика
$$w(z) \;=\; \sum_{j=0}^{2n+1} w_j(t_0)(z - t_0)^j + o((z - t_0)^{2n+1}) \tag{6.2.17}$$
має місце, коли z збігається до t_0 недотичним чином зсередини і (!) ззовні одиничного кругу $\mathbb{D}$, де при $|z| > 1$ ми вважаємо, що
$$w(z) := \frac{1}{\overline{w(1/\bar{z})}}. \tag{6.2.18}$$

Крім того, при виконанні цих умов межова матриця Шварца-Піка $\mathbf{P}_n^w(t_0)$ існує і дорівнює $\mathbb{P}_n^w(t_0)$.

Зауваження 6.26. Продовження (6.2.18) називається продовженням за симетрією і ніяк не пов'язане з аналітичним продовженням за винятком того випадку, коли функція w унімодулярна на деякій дузі кола $\mathbb{T}$. Існування недотичної асимптотики (6.2.17) для функцій $w(z)$ зсередини кругу $\mathbb{D}$ з $w(t_0) \neq 0$ спричиняє існування асимптотики того ж порядку ззовні кругу (для продовження функції w за симетрією). Однак, в загальному випадку, коефіцієнти асимптотик зсередини і ззовні відрізняються одні від одних. Таким чином, збіг двох асимптотик є спеціальною властивістю функції w. Теорема 6.25 зокрема стверджує, що цей збіг спричиняє (6.2.13), а Теорема 6.24 показує, що для функцій класу Шура збіг асимптотик випливає з (6.2.13). Як буде показано в параграфі 6.2.4, у загальному випадку (6.2.13) не спричиняє збіг внутрішньої і зовнішньої асимптотики, але для функцій узагальненого класу Шура - спричиняє. І, взагалі, Теорема 6.25 буквально переноситься на узагальнений клас Шура. Збіг внутрішньої і зовнішньої асимптотики було покладено І. В. Ковалішиною в основу її вивчення межової задачі інтерполяції в роботі [73]. На відміну від цього, наші побудови засновані на (6.2.13).

Наступна теорема (її теж буде доведено в параграфі 6.2.4) є версією Теореми 6.25 при декілька ослаблених припущеннях: існування недотичного межового значення $w_{2n+1}(t_0)$ ослаблене до недотичної обмеженості $w^{(2n+1)}$:

$$\sup_{z\in\Gamma_{t_0,\alpha}} |w^{(2n+1)}(z)| < \infty \quad \text{при деякому } \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}). \tag{6.2.19}$$

Як буде показано в Лемі 6.36, ця умова забезпечує існування недотичних межових значень $w_j(t_0) := \lim\limits_{z \widehat{\to} t_0} \dfrac{w^{(j)}(z)}{j!}$ при $j = 0, \dots, 2n$.

Теорема 6.27. Нехай w аналітична в околі $\mathcal{U}_{t_0}$ точки $t_0 \in \mathbb{T}$. Тоді такі властивості еквівалентні

1. Має місце обмеженість (6.2.19) і послідовність $\{w_0(t_0), \dots, w_{2n}(t_0)\}$ є t_0-ізометричною.
2. Існує раціональна унімодулярна функція f (відношення скінченних добутків Бляшке) така, що
$$w(z) = f(z) + O((z-t_0)^{2n+1}) \quad \text{когда} \ \ z \widehat{\to} t_0. \tag{6.2.20}$$
3. Має місце асимптотичний розклад
$$w(z) \ = \ \sum_{j=0}^{2n} w_j(t_0)(z-t_0)^j + O((z-t_0)^{2n+1}),$$
при $z \widehat{\to} t_0$ зсередини і ззовні кругу $\mathbb{D}$.

При виконанні цих умов
$$\sup_{z \in \Gamma_{t_0,\alpha}} d_{w,n}(z) < \infty. \tag{6.2.21}$$

В якості наслідку отримуємо наступну розширену версію Теореми 6.24 для функцій класу Шура.

Теорема 6.28. Нехай $w \in \mathcal{S}$, $t_0 \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Твердження 1-4 Теореми 6.24, твердження 1-4 Теореми 6.25 і твердження 1-3 Теореми 6.27 еквівалентні.

Для доказу досить зауважити, що кожна властивість в Теоремі 6.25 спричиняє (6.2.14), а умова (6.2.21) очевидно сильніша ніж (6.2.13).

6.2.2 t_0-ізометричні послідовності. В силу Визначення 6.22, послідовність $\{w_0, \dots, w_n\}$ є t_0-ізометричною, якщо
$$\begin{bmatrix} w_0 & \dots & w_n \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & w_0 \end{bmatrix} \mathbf{\Psi}_n(t_0) \begin{bmatrix} w_0^* & \dots & w_n^* \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & w_0^* \end{bmatrix} = \mathbf{\Psi}_n(t_0). \tag{6.2.22}$$

Зауваження 6.29. Зауважимо, що ця матрична рівність еквівалентна наступній системі $n+1$ рівностей
$$\sum_{j=0}^{k} \sum_{\ell=0}^{k-j} (-1)^\ell \binom{k-\ell}{j} t_0^{j-\ell} w_j w_\ell^* = 1 \quad \text{при} \ \ k = 0, \dots, n. \tag{6.2.23}$$

Дійсно, помножуючи обидві частини (6.2.23) на $(-1)^k t_0^{k+1}$ і використовуючи визначення (6.2.9) чисел $\Psi_{j\ell}$, отримуємо

$$\sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{k-j} w_j \Psi_{j,k-\ell} w_\ell^* = \Psi_{0,k} \quad \text{for } k = 0, \dots, n,$$

що може бути записано наступним чином

$$\begin{bmatrix} w_0 & \dots & w_n \end{bmatrix} \mathbf{\Psi}_n(t_0) \begin{bmatrix} w_0^* & \dots & w_n^* \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & w_0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{00} & \dots & \Psi_{0n} \end{bmatrix}. \tag{6.2.24}$$

Таким чином отримано рівність перших рядків в (6.2.22). Як було показано в [31], (6.2.24) еквівалентно (6.2.22).

Лема 6.30. Нехай $t_0 \in \mathbb{T}$, $w_0, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ і нехай $T \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$ і M, $E \in \mathbb{C}^{(n+1)\times 1}$ визначені як

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & t_0 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 & t_0 \end{bmatrix}, \quad E_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M_n = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}. \tag{6.2.25}$$

Розв'язок X рівняння

$$X - T_n X T_n^* = E_n E_n^* - M_n M_n^* \tag{6.2.26}$$

існує тоді і тільки тоді коли послідовність $\{w_0, \dots, w_n\}$ є t_0-ізометричною. Більш того, в цьому випадку будь-який розв'язок X рівняння (6.2.26) має вигляд (6.2.11) з деякими числами $w_{n+1}, \dots, w_{2n+1} \in \mathbb{C}$.

Доказ цієї леми міститься в [31, Section 10].

Теорема 6.31. Припустимо, що w аналітична на множині

$$D_{r,\,\varepsilon}(t_0) = \{z : r < |z| < \frac{1}{r}\ , \arg t_0 - \varepsilon < \arg z < \arg t_0 + \varepsilon\}$$

і унімодулярна на $D_{r,\,\varepsilon}(t_0) \cap \mathbb{T}$. Розкладемо функцію w в ряд Тейлора з центром в точці t_0.

$$w(z) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j(t_0)(z - t_0)^j \tag{6.2.27}$$

Тоді

1. Існує межова матриця Шварца-Піка $\mathbf{P}_n^w(t_0)$ і має місце рівність
$$\mathbf{P}_n^w(t_0) = \mathbb{P}_n^w(t_0) \tag{6.2.28}$$
для будь-якого $n \in \mathbb{Z}_+$, де $\mathbb{P}_n^w(t_0)$ визначена за формулою (6.2.7). Отже, $\mathbb{P}_n^w(t_0)$ ермітова.

2. Послідовність $\{w_j(t_0)\}_{j=0}^{\infty}$ є t_0-ізометричною.

Доведення. Оскільки w унімодулярна на $D_{r,\,\varepsilon}(t_0) \cap \mathbb{T}$, то має місце рівність
$$w(z)\overline{w(1/\bar{z})} = 1 \quad \text{для будь-якого} \;\; z \in D_{r,\,\varepsilon}(t_0). \tag{6.2.29}$$
Отже,
$$K_w(z,z) := \frac{1 - w(z)\overline{w(z)}}{1 - z\bar{z}} = \frac{w(z) - w(1/\bar{z})}{z - \frac{1}{\bar{z}}} \cdot \frac{\overline{w(z)}}{\bar{z}}. \tag{6.2.30}$$
Зауважимо, що при $z = 1/\bar{z}$, тобто в точках дуги кола,
$$K_w(z,z) = zw'(z)\overline{w(z)}. \tag{6.2.31}$$
Для обчислення
$$\mathbf{P}_n^w(z) = \left[\frac{1}{i!j!}\,\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\,K_w(z,z)\right]_{i,j=0}^{n}, \tag{6.2.32}$$
ми скористаємося представленням (6.2.30) і формулою Лейбніца:
$$\begin{aligned}
(\mathbf{P}_n^w)_{ij}(z) &= \frac{1}{i!j!}\,\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\left(\frac{w(z) - w(1/\bar{z})}{z - \frac{1}{\bar{z}}} \cdot \frac{\overline{w(z)}}{\bar{z}}\right) \\
&= \frac{1}{i!j!}\sum_{\ell=0}^{j}\begin{pmatrix} j \\ \ell \end{pmatrix}\frac{\partial^{i+\ell}}{\partial z^i \partial \bar{z}^\ell}\left(\frac{w(z) - w(1/\bar{z})}{z - \frac{1}{\bar{z}}}\right)\overline{\left(\frac{w(z)}{z}\right)^{(j-\ell)}}.
\end{aligned} \tag{6.2.33}$$
Ми хочемо показати, що $(\mathbf{P}_n^w)_{ij}(t_0)$ дорівнює ij-у елементу матриці $\mathbb{P}_n^w(t_0)$, тобто, (в силу формули (6.2.7)), що
$$(\mathbf{P}_n^w)_{ij}(t_0) \;=\; \begin{bmatrix} w_{i+1}(t_0) & w_{i+2}(t_0) & \dots & w_{i+j+1}(t_0) \end{bmatrix} \mathbf{\Psi}_n(t_0) \begin{bmatrix} w_j(t_0)^* \\ \vdots \\ w_0(t_0)^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{j} w_{i+\ell+1}(t_0) \sum_{k=0}^{j-\ell} \Psi_{\ell,j-k} w_{j-\ell-k}(t_0)^*. \qquad (6.2.34)$$

Безпосереднє обчислення показує (подробиці можна знайти в [34, Section 6]), що

$$\frac{1}{i!k!}\frac{\partial^{i+k}}{\partial z^i \partial\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^k} \left(\frac{w(z)-w(1/\bar{z})}{z-\frac{1}{\bar{z}}}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{\bar{z}}} = \frac{w^{(i+k+1)}(z)}{(i+k+1)!} = w_{i+k+1}(z)$$

при $i, k \in \mathbb{Z}_+$. З іншого боку, диференціюючи складну функцію, отримуємо

$$\frac{1}{\ell!}\frac{\partial^\ell}{\partial \bar{z}^\ell} = (-1)^\ell \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{\begin{pmatrix} \ell-1 \\ k \end{pmatrix}}{\bar{z}^{\ell+k+1}(k+1)!} \cdot \frac{\partial^{k+1}}{\partial\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^{k+1}} \quad (\ell = 1, 2, \ldots)$$

комбінація останніх двох формул дає

$$\begin{aligned} &\frac{1}{i!\ell!}\,\frac{\partial^{i+\ell}}{\partial z^i \partial \bar{z}^\ell} \left(\frac{w(z)-w(1/\bar{z})}{z-\frac{1}{\bar{z}}}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{\bar{z}}=t_0} \\ &= (-1)^\ell \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{\begin{pmatrix} \ell-1 \\ k \end{pmatrix}}{\bar{z}^{\ell+k+1} i!(k+1)!} \cdot \frac{\partial^{i+k+1}}{\partial z^i \partial\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^{k+1}} \left(\frac{w(z)-w(1/\bar{z})}{z-\frac{1}{\bar{z}}}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{\bar{z}}=t_0} \\ &= (-1)^\ell \sum_{k=0}^{\ell-1} t_0^{\ell+k+1} \begin{pmatrix} \ell-1 \\ k \end{pmatrix} w_{i+k+2}(t_0) \end{aligned}$$

при $\ell = 1, 2, \ldots$, а при $\ell = 0$ маємо

$$\frac{1}{i!}.\frac{\partial^i}{\partial z^i} \left(\frac{w(z)-w(1/\bar{z})}{z-\frac{1}{\bar{z}}}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{\bar{z}}=t_0} = w_{i+1}(t_0).$$

В силу формули Лейбніца,

$$\frac{1}{(j-\ell)!}\left(\frac{w(z)}{z}\right)^{(j-\ell)}\Bigg|_{z=t_0} = \sum_{m=0}^{j-\ell}(-1)^m \bar{t}_0^{m+1} w_{j-\ell-m}(t_0).$$

І нарешті, підставляючи останні три формули в (6.2.33), отримуємо

$$(\mathbf{P}_n^w)_{ij}(t_0) \;=\; w_{i+1}(t_0) \sum_{m=0}^{j} (-1)^m \bar{t}_0^{m+1} w_{j-m}(t_0)^*$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{\ell=1}^{j}\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{m=0}^{j-\ell}(-1)^{\ell+m}t_0^{\ell+k+m+2}\begin{pmatrix}\ell-1\\ k\end{pmatrix}w_{i+k+2}(t_0)w_{j-\ell-m}(t_0)^*\\
=\ & w_{i+1}(t_0)\sum_{m=0}^{j}(-1)^m\bar{t}_0^{m+1}w_{j-m}(t_0)^*\\
&+\sum_{\ell=1}^{j}w_{i+\ell+1}(t_0)\sum_{k=0}^{j-\ell}(-1)^{j-k}t_0^{j+\ell+1-k}\begin{pmatrix}j-k\\ \ell\end{pmatrix}w_{j-\ell-k}(t_0)^*\\
=\ & \sum_{\ell=0}^{j}w_{i+\ell+1}(t_0)\sum_{k=0}^{j-\ell}(-1)^{j-k}t_0^{j+\ell+1-k}\begin{pmatrix}j-k\\ \ell\end{pmatrix}w_{j-\ell-k}(t_0)^*.
\end{aligned}
$$

Згадуючи визначення (6.2.9) чисел $\Psi_{\ell j}$,

$$
(\mathbf{P}_n^w)_{ij}(t_0)=\sum_{\ell=0}^{j}w_{i+\ell+1}(t_0)\sum_{k=0}^{j-\ell}\Psi_{\ell,j-k}w_{j-\ell-k}(t_0)^*,
$$

що збігається з (6.2.34) і, отже, доводить рівність (6.2.28). Ця рівність, зокрема, спричиняє, що структурна матриця $\mathbb{P}_n^w(t_0)$ виду (6.2.7) ермітова (оскільки $\mathbf{P}_n^w(t_0)$ є такою). А тоді, як було показано в [36, Theorem 7.1], $\mathbb{P}_n^w(t_0)$ задовольняє тотожності

$$
\mathbb{P}_n^w(t_0)-T_n\mathbb{P}_n^w(t_0)T_n^*=E_nE_n^*-M^w(t_0)_nM_n^w(t_0)^*,
$$

де T_n і E_n визначені в (6.2.25) і

$$
M_n^w(t_0)=\begin{bmatrix} w_0(t_0) & \ldots & w_n(t_0)\end{bmatrix}^\top.
$$

Але тоді послідовність $\{w_0,\ldots,w_n\}$ є t_0-ізометричною за Лемою 6.30. Оскільки $n\in\mathbb{Z}_+$ довільно, друге твердження теореми доведено. Відмітимо, що t_0-ізометричність послідовності $\{w_0,\ldots,w_n\}$ може бути отримана і безпосередньо з рівності (6.2.29) шляхом диференціювання. □

Лема 6.32. Припустимо, що t_0 і $w_0,\ldots,w_{2n+1}\in\mathbb{C}$ такі, що $|w_0|=1$ і $\mathbb{P}(t_0;w_0,\ldots,w_{2n+1})$, що визначена в (6.2.11), є ермітовою. Тоді існують числа $f_0,\ldots,f_{2n+1}\in\mathbb{C}$ такі, що $|f_0|=1$ і матриці $\mathbb{P}(t_0;f_0,\ldots,f_{2n+1})$ та $\mathbb{P}(t_0;s_0,\ldots,s_{2n+1})$ позитивно визначені, де s_j визначаються наступним чином

$$s_j = \sum_{\ell=0}^{j} f_{j-\ell} w_\ell \quad \text{при} \quad j = 0, \dots, 2n+1. \tag{6.2.35}$$

Доведення. Розглянемо матриці визначені в (6.2.10) і (6.2.11):

$$\mathbb{U}_k^w := \mathbb{U}(w_0, \dots, w_k), \quad \mathbb{H}_k^w := \mathbb{H}(w_0, \dots, w_{2k+1})$$

і

$$\mathbb{P}_k^w := \mathbb{P}(t_0; w_0, \dots, w_{2k+1}) = \mathbb{H}_k^w \boldsymbol{\Psi}_k(t_0) \mathbb{U}_k^w, \tag{6.2.36}$$

а також аналогічні матриці асоційовані з послідовностями $\{f_j\}$ і $\{s_j\}$. Оскільки s_j визначені формулами згортки (6.2.35), то

$$\mathbb{U}_k^s = \mathbb{U}_k^w \mathbb{U}_k^f \quad \text{и} \quad \mathbb{H}_k^s = (\mathbb{U}_k^f)^* \mathbb{H}_k^w + \mathbb{H}_n^f(t_0) \overline{\mathbb{U}_k^s}. \tag{6.2.37}$$

Потрібну послідовність $\{f_0, \dots, f_{2n+1}\}$ будемо будувати індуктивно. При кожнім $k < n$ матриця $\mathbb{P}_k^w$ є ермітовою як головна підматриця матриці $\mathbb{P}_n^w$, яка є ермітовою за припущенням леми. При $k = 0$ маємо $\mathbb{P}_0^w := t_0 w_1 w_0^* \in \mathbb{R}$. Виберемо f_0 і f_1 так щоб

$$|f_0| = 1 \quad \text{і} \quad \mathbb{P}_0^f = t_0 f_1 f_0^* > \max\{0, \ -t_0 w_1 w_0^*\}.$$

Тоді для $s_0 = f_0 w_0$ і $s_1 = f_0 w_1 + f_1 w_0$ маємо $|s_0| = 1$ і

$$\mathbb{P}_0^s = t_0 s_1 s_0^* = t_0 (f_0 w_1 + f_1 w_0) f_0^* w_0^* = t_0 w_1 w_0^* + t_0 f_1 f_0^* > 0.$$

Тепер припустимо, що для $k < n$ вже побудована послідовність $\{f_0, \dots, f_{2k-1}\}$ така, що матриці $\mathbb{P}_{k-1}^f$ і $\mathbb{P}_{k-1}^s$ позитивно визначені, де s_j задані формулою (6.2.35), $j = 0, \dots, 2k-1$.

Оскільки $|f_0| = 1$ і $\mathbb{P}_{k-1}^f > 0$, то (див, наприклад, [73, 18, 33]), існує скінченний добуток Бляшке $b(z)$ такий, що

$$\frac{b^{(j)}(t_0)}{j!} = f_j \quad \text{при} \quad j = 0, \dots, 2k-1. \tag{6.2.38}$$

Покладемо

$$f_{2k} = \frac{b^{(2k)}(t_0)}{(2k)!} \quad \text{і} \quad f_{2k+1} = \frac{b^{(2k+1)}(t_0)}{(2k+1)!},$$

визначимо s_{2k} і s_{2k+1} за формулами (6.2.35). Тоді матриця

$$\mathbb{P}_k^f := \mathbb{H}_k^f \boldsymbol{\Psi}_k(t_0)\mathbb{U}_k^f. \tag{6.2.39}$$

позитивно визначена, оскільки за визначенням дорівнює матриці $\mathbb{P}_k^b(t_0)$, пов'язаною з скінченним добутком Бляшке b за формулою (6.2.7) і, отже, дорівнює (за Теоремою 6.31) межовій матриці Шварца-Піка $\mathbf{P}_n^b(t_0)$, яка є позитивно визначеною, оскільки $b \in \mathcal{S}$.

Оскільки структурна матриця $\mathbb{P}_k^w$ є ермітовою, вона задовольняє (доказ міститься в [36], Theorem 7.1) тотожності

$$\mathbb{P}_k^w - T_k \mathbb{P}_k^w T_k^* = E_k E_k^* - M_k M_k^*,$$

де T_k, E_k і M_k визначені формулами (6.2.25). Тогді, в силу Леми 6.30, послідовність $\{w_0, \ldots, w_k\}$ є t_0-ізометричною:

$$\overline{\mathbb{U}_k^w}\boldsymbol{\Psi}_k(t_0)\mathbb{U}_k^w = \boldsymbol{\Psi}_n(t_0). \tag{6.2.40}$$

Розглянемо матрицю

$$\mathbb{P}_k^s := \mathbb{H}_k^s \boldsymbol{\Psi}_k(t_0)\mathbb{U}_k^s.$$

Підставимо вираз (6.2.37) і скористаємося (6.2.40)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_k^s &= \left((\mathbb{U}_k^f)^*\mathbb{H}_k^w + \mathbb{H}_k^f\overline{\mathbb{U}_k^w}\right)\boldsymbol{\Psi}_k(t_0)\mathbb{U}_k^w\mathbb{U}_k^f \\
&= (\mathbb{U}_k^f)^*\mathbb{H}_k^w\boldsymbol{\Psi}_n(t_0)\mathbb{U}_k^w\mathbb{U}_k^f + \mathbb{H}_k^f\overline{\mathbb{U}^w}\boldsymbol{\Psi}_n(t_0)\mathbb{U}_k^w\mathbb{U}_k^f \\
&= (\mathbb{U}_k^f)^*\mathbb{H}_k^w\boldsymbol{\Psi}_n(t_0)\mathbb{U}_k^w\mathbb{U}_k^f + \mathbb{H}_k^f\boldsymbol{\Psi}_n(t_0)\mathbb{U}_k^f,
\end{aligned}$$

що з урахуванням (6.2.36) і (6.2.39) набирає вигляду

$$\mathbb{P}_k^s = (\mathbb{U}_k^f)^*\mathbb{P}_k^w\mathbb{U}_k^f + \mathbb{P}_k^f. \tag{6.2.41}$$

Оскільки матриці $\mathbb{P}_k^w$ і $\mathbb{P}_k^f$ є ермітовими, то матриця $\mathbb{P}_k^s$ теж ермітова. Зі структури матриці в правій частині (6.2.39) видно, що єдиний елемент $\mathbb{P}_k^f$, який залежить від f_{2k+1} – це

$$\left[\mathbb{P}_k^f\right]_{k+1,k+1} = \sum_{\ell=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-\ell} f_{k+\ell+1}\Psi_{\ell,k-j}f_{k-\ell-j}^*$$

$$= \ (-1)^k t_0^{2k+1} f_{2k+1} f_0^* + \sum_{\ell=0}^{k-1} f_{k+\ell+1} \sum_{j=0}^{k-\ell} \Psi_{\ell,k-j} f_{k-\ell-j}^*.$$

Він невід'ємний, оскільки $\mathbb{P}_k^f \geq 0$. Оскільки $|f_0| = 1$, то заміна

$$f_{2k+1} \to f_{2k+1} + (-1)^k \bar{t}_0^{2k+1} f_0 x \quad \text{де} \ \ x > 0, \tag{6.2.42}$$

тільки збільшує цей елемент матриці $\mathbb{P}_k^f$ на x і не впливає на інші елементи. При цьому s_{2k+1} (згідно з (6.2.35)) зміниться наступним чином

$$s_{2k+1} \to s_{2k+1} + (-1)^k \bar{t}_0^{2k+1} f_0 w_0 x = s_{2k+1} + (-1)^k \bar{t}_0^{2k+1} s_0 x,$$

але s_j при $j \leq 2k$ не зміняться. Оскільки матриця $\mathbb{U}_k^f$ залежить тільки від $f_0, \ldots, f_k$, з (6.2.41) випливає, що усі елементи $\mathbb{P}_k^s$ за винятком $[\mathbb{P}_k^s]_{k+1,k+1}$ не змінюються, а цей останній збільшується на x, і, отже, стане позитивним, якщо x досить велике. Тим самим матриця $\mathbb{P}_k^s$ стане позитивною. Це завершує доказ леми. □

В Теоремі 6.31 ми бачили як функція, що є аналітичною в околі t_0 і унімодулярною на дузі кола, творить нескінченну t_0-ізометричну послідовність. Крім того, ця t_0-ізометрична послідовність додатково має наступну властивість

$$\limsup_{j \to \infty} |w_j|^{\frac{1}{j}} < \infty$$

оскільки радіус збіжності ряду (6.2.27) позитивний. Випадок скінченної послідовності простіший: в наступній теоремі показано, що кожна *скінченна* t_0-ізометрична послідовність є послідовністю коефіцієнтів Тейлора в точці t_0 відношення двох скінченних добутків Бляшке.

Теорема 6.33. Нехай $t_0 \in \mathbb{T}$ і $w_0, \ldots, w_{2n+1} \in \mathbb{C}$. Наступні твердження є еквівалентними:

1. $|w_0| = 1$ і матриця $\mathbb{P}(t_0; w_0, \ldots, w_{2n+1})$, що визначена в (6.2.11), є ермітовою.
2. Послідовність $\{w_0, \ldots, w_{2n+1}\}$ є t_0-ізометричною.

3. Існують скінченні добутки Бляшке s і f такі, що функція $w = \dfrac{s}{f}$ задовольняє інтерполяційним умовам
$$w_j(t_0) := \frac{w^{(j)}(t_0)}{j!} = w_j \quad \text{при} \ \ j = 0, \dots, 2n+1. \tag{6.2.43}$$

Доведення. Імплікація (3) $\Rightarrow$ (2) міститься в твердженні 2 Теореми 6.31.

(2) $\Rightarrow$ (1): Припустимо, що $\{w_0, \dots, w_{2n+1}\}$ t_0-ізометрична, нехай матриці T_{2n+1}, E_{2n+1} і M_{2n+1} визначені формулами (6.2.25). За Лемою 6.30, існує розв'язок $X = [X_{ij}]_{i,j=0}^{2n+1}$ рівняння
$$X - T_{2n+1} X T_{2n+1}^* = E_{2n+1} E_{2n+1}^* - M_{2n+1} M_{2n+1}^*. \tag{6.2.44}$$

Порівнюючи ліву і праву частини (6.2.44) поелементно, отримуємо систему рівнянь
$$\begin{aligned} t_0 X_{0i} = \bar{t}_0 X_{i0} &= w_{i+1} w_0^* & (i = 0, \dots, 2n), \\ t_0 X_{i+1,j} + \bar{t}_0 X_{i,j+1} + X_{ij} &= w_{i+1} w_{j+1}^* & (i = 1, \dots, 2n;\ j = 0, \dots, 2n), \end{aligned}$$

яку можна розв'язати рекурсивно
$$X_{k\ell} = \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{i=0}^{j} (-1)^j \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} t_0^{i+j+1} w_{k+i+1} w_{\ell-j}^*, \tag{6.2.45}$$

де
$$0 \le k + \ell \le 2n - 1. \tag{6.2.46}$$

Таким чином елементи з індексами (6.2.46) розв'язку X рівняння (6.2.44) визначені однозначно. Більш того, ці елементи мають властивість симетрії
$$X_{k\ell} = X_{\ell k}^* \quad (0 \le k + \ell \le 2n - 1) \tag{6.2.47}$$

яка випливає з згаданої вище єдиності і з того, що X^* є розв'язком рівняння (6.2.44) тоді і тільки тоді, коли X є розв'язком. Використовуючи числа Ψ_{ij}, що визначені в (6.2.9), можна переписати (6.2.45) наступним чином
$$X_{k\ell} = \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{i=0}^{j} w_{k+i+1} \Psi_{ij} w_{\ell-j}^* \quad \text{при} \quad 0 \le k + \ell \le 2n - 1. \tag{6.2.48}$$

Останнє означає, що для $k, \ell \in \{0, \ldots, n\}$, $X_{k\ell}$ дорівнюють відповідним елементам матриці $\mathbb{P}(t_0; w_0, \ldots, w_{2n+1})$, визначеної в (6.2.11). Іншими словами, $\mathbb{P}(t_0; w_0, \ldots, w_{2n+1})$ є $(n+1) \times (n+1)$ головною підматрицею матриці X. Тим самим (6.2.47) спричиняє ермітовість матриці $\mathbb{P}(t_0; w_0, \ldots, w_{2n+1})$. Рівність $|w_0| = 1$ є частиною визначення t_0-симетрії.

(1) $\Rightarrow$ (3): Припустимо, що $|w_0| = 1$ і що матриця $\mathbb{P}(t_0; w_0, \ldots, w_{2n+1})$ визначена в (6.2.11) є ермітовою. За Лемою 6.32, існує $f_0, \ldots, f_{2n+1} \in \mathbb{C}$ з $|f_0| = 1$ така, що $\mathbb{P}(t_0; f_0, \ldots, f_{2n+1})$ і $\mathbb{P}(t_0; s_0, \ldots, s_{2n+1})$ позитивно визначені, де s_j визначені формулою (6.2.35). Оскільки $s_0 = w_0 f_0$, то $|s_0| = 1$. В силу інтерполяційного результату використаного в доказі Леми 6.32, існують скінченні добутки Бляшке $s(z)$ і $f(z)$, що задовольняють умовам

$$\frac{s^{(j)}(t_0)}{j!} = s_j \quad \text{і} \quad \frac{f^{(j)}(t_0)}{j!} = f_j \quad \text{при } j = 0, \ldots, 2n+1.$$

Тоді з (6.2.35) випливає, що відношення $w(z) = \dfrac{s(z)}{f(z)}$ задовольняє умовам (6.2.43). □

На завершення цього розділу зробимо декілька зауважень. Перше (доказ міститься в [31, Corollary 7.9]) встановлює зв'язок між третіми твердженнями в Теоремах 6.25 і 6.33:

Зауваження 6.34. Нехай $t_0 \in \mathbb{T}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $w_0, \ldots, w_k \in \mathbb{C}$ і нехай w аналітична в $\mathcal{U}_{t_0}$. Недотичні межові значення $w_j(t_0)$ існують і задовольняють

$$w_j(t_0) := \lim_{z \widehat{\to} t_0} \frac{w^{(j)}(z)}{j!} = w_j \quad \text{при} \quad j = 0, \ldots, k$$

тоді і тільки тоді, коли має місце асимптотичне співвідношення

$$w(z) = w_0 + w_1(z - t_0) + \ldots + w_k(z - t_0)^k + o((z - t_0)^k \quad \text{при } z \widehat{\to} t_0.$$

Зауваження 6.35. Будь-яка t_0-ізометрична послідовність $\{w_0, \ldots, w_n\}$ допускає t_0-ізометричне продовження. Справді, якщо $\{w_0, \ldots, w_n\}$ t_0-ізометрична, то $|w_0| = 1$ (в силу Зауваження 6.23) і рівняння (6.2.26) має розв'язок X (за Лемою 6.30). Безпосередньо видно, що X^* теж задовольняє (6.2.26) і, отже, $Y := \frac{1}{2}(X + X^*)$ є ермітовим розв'язком (6.2.26). В силу другого твердження Леми 6.30, існують $w_{n+1}, \dots, w_{2n+1}$ такі, що

$$Y = \mathbb{P}(t_0, w_0, \dots, w_{2n+1})$$

Оскільки Y ермітова, то, за Теоремою 6.33 послідовність $\{w_0, \dots, w_{2n+1}\}$ є t_0-ізометричною.

6.2.3 Доведення Теорем 6.25 та 6.27

Ми почнемо з кількох попередніх результатів.

Лема 6.36. Нехай функція w аналітична в $\mathcal{U}_{t_0}$ і нехай $w^{(2n+1)}$ обмежена у відкритому недотичному околі $\Gamma_{t_0,\alpha}$ точки $t_0 \in \mathbb{T}$:

$$|w_{2n+1}(z)| \le \gamma \qquad (z \in \Gamma_{t_0,\alpha}). \tag{6.2.49}$$

Тоді існують такі недотичні границі

$$w_j(t_0) = \lim_{z \to t_0} w_j(z), \quad w_j(z) := \frac{w^{(j)}(z)}{j!}$$

при $j = 0, \dots, 2n$ і

$$w_j(z) = \sum_{i=0}^{2n-j} \begin{pmatrix} j+i \\ i \end{pmatrix} w_{j+i}(t_0)(z-t_0)^i + O((z-t_0)^{2n-j+1}) \quad (z \widehat{\to} t_0). \tag{6.2.50}$$

Доведення. Запишемо формулу Тейлора для функції $w_j(z)$ у вигляді

$$w_j(z) = \sum_{i=0}^{2n-j} \frac{w_j^{(i)}(\omega)}{i!}(z-\omega)^i + \int_{\omega}^{z} \frac{w_j^{(2n-j+1)}(\zeta)}{(2n-j)!}(z-\zeta)^{2n-j} d\zeta \tag{6.2.51}$$

в точці $\omega \in \Gamma_{t_0,\alpha}$. Оскільки

$$\frac{w_j^{(i)}(z)}{i!} = \frac{w^{(j+i)}(z)}{i!\,j!} = \frac{(j+i)!}{i!\,j!} w_{j+i}(z) = \begin{pmatrix} j+i \\ i \end{pmatrix} w_{j+i}(z),$$

формула (6.2.51) може бути переписана у вигляді

$$w_j(z) \ = \ \sum_{i=0}^{2n-j} \begin{pmatrix} j+i \\ j \end{pmatrix} w_{j+i}(\omega)(z-\omega)^i$$

$$+(2n+1)\begin{pmatrix} 2n \\ j \end{pmatrix}\int_{\omega}^{z} w_{2n+1}(\zeta)\,(z-\zeta)^{2n-j}d\zeta. \qquad (6.2.52)$$

Останній інтеграл не залежить від шляху інтегрування між точками ω і z. Позначимо для стислості

$$G_{\omega,z}=\int_{\omega}^{z} w_{2n+1}(\zeta)\,(z-\zeta)^{2n-j}d\zeta. \qquad (6.2.53)$$

Оскільки $w(z)$ обмежена в $\Gamma_{t_0,\alpha}$ і $z-\zeta$ теж обмежена в $\Gamma_{t_0,\alpha}\times\Gamma_{t_0,\alpha}$, робимо висновок, що наступні два інтеграла існують і мають місце граничні співвідношення

$$G_{\omega,t_0}=\int_{\omega}^{t_0} w_{2n+1}(\zeta)\,(t_0-\zeta)^{2n-j}d\zeta=\lim_{z\widehat{\to}t_0} G_{\omega,z},$$

і

$$G_{t_0,z}=\int_{t_0}^{z} w_{2n+1}(\zeta)\,(z-\zeta)^{2n-j}d\zeta=\lim_{\omega\widehat{\to}t_0} G_{\omega,z}.$$

Направляючи $z\in\mathcal{U}$ до t_0 в (6.2.52) (при фіксованому ω), отримаємо існування границі

$$w_j(t_0)=\lim_{z\widehat{\to}t_0} w_j(z)=\sum_{i=0}^{2n-j}\begin{pmatrix} j+i \\ j \end{pmatrix} w_{j+i}(\omega)(t_0-\omega)^i+(2n+1)\begin{pmatrix} 2n \\ j \end{pmatrix} G_{\omega,t_0}$$

при $j=0,\dots,2n$. Це доводить перше твердження леми і дозволяє перейти до границі в (6.2.52) при $\omega\in\Gamma_{t_0,\alpha}$, що прямує до t_0 і фіксованому z. Отримуємо

$$w_j(z)=\sum_{i=0}^{2n-j}\begin{pmatrix} j+i \\ j \end{pmatrix} w_{j+i}(t_0)(z-t_0)^i+(2n+1)\begin{pmatrix} 2n \\ j \end{pmatrix} G_{t_0,z}.$$

Вибираючи в якості шляху інтегрування для $G_{t_0,z}$ прямолінійний відрізок що з'єднує точки z і t_0 і використовуючи (6.2.49), приходимо до нерівності

$$|G_{t_0,z}|\le\gamma|z-t_0|^{2n-j+1}, \qquad (6.2.54)$$

звідки випливає (6.2.50). □

У наступній Лемі

$$\mathbf{P}^{w}_{i,j}(z)=\frac{1}{i!j!}\,\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}\,\frac{1-|w(z)|^2}{1-|z|^2} \qquad (6.2.55)$$

позначає ij-й елемент матриці Шварца-Піка $\mathbf{P}^{w}_{n}(z)$.

Лема 6.37. Припустимо, що $w(z)$ і $f(z)$ дві функції аналітичні в $\mathbb{D}$ такі, що $w^{(2n+1)}(z)$ і $f^{(2n+1)}(z)$ обмежені в деякому відкритому недотичному околі $\Gamma_{t_0,\alpha}$ точки $t_0 \in \mathbb{T}$ і нехай

$$\lim_{z\to t_0} w_j(z) = \lim_{z\to t_0} f_j(z) =: w_j(t_0) \qquad \text{при} \quad j = 0, \dots, 2n \tag{6.2.56}$$

(нагадаємо, що границі в (6.2.56) існують в силу Леми 6.36). Тоді

$$\mathbf{P}^w_{i,j}(z) - \mathbf{P}^f_{i,j}(z) = O((z-t_0)^{2n-i-j}) \tag{6.2.57}$$

для $i, j = 0, \dots, n$ при $z \widehat{\to} t_0$. Зокрема, $d_{w,n}(z) - d_{f,n}(z) = O(1)$.

Доведення. Безпосереднє диференціювання дає

$$\frac{1}{i!j!}\,\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\,\frac{|w(z)|^2}{1-|z|^2} = \sum_{k=0}^{i}\sum_{\ell=0}^{j} w_{i-k}(z)\frac{u_{k,\ell}(z)}{(1-|z|^2)^{k+\ell+1}} w_{j-\ell}(z)^*, \tag{6.2.58}$$

де, як і раніше, $w_j(z)$ позначає $\frac{1}{j!}w^{(j)}(z)$ і

$$u_{k,\ell}(z) = \sum_{m=0}^{\min(k,\ell)} \frac{(k+\ell-m)!}{(k-m)!\,(\ell-m)!\,m!}\,\bar{z}^{k-m} z^{\ell-m}(1-|z|^2)^m. \tag{6.2.59}$$

Підставляючи (6.2.55), (6.2.58) і аналогічні формули для f в (6.2.57) отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^w_{i,j}(z) - \mathbf{P}^f_{i,j}(z) &= \frac{1}{i!j!}\,\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\frac{|f(z)|^2 - |w(z)|^2}{1-|z|^2} \\ &= \sum_{k=0}^{i}\sum_{\ell=0}^{j} f_{i-k}(z)\frac{u_{k,\ell}(z)}{(1-|z|^2)^{k+\ell+1}} f_{j-\ell}(z)^* \\ &\quad - \sum_{k=0}^{i}\sum_{\ell=0}^{j} w_{i-k}(z)\frac{u_{k,\ell}(z)}{(1-|z|^2)^{k+\ell+1}} w_{j-\ell}(z)^* \\ &= \sum_{k=0}^{i}\sum_{\ell=0}^{j} (f_{i-k}(z) - w_{i-k}(z))\,\frac{u_{k,\ell}(z) f_{j-\ell}(z)^*}{(1-|z|^2)^{k+\ell+1}} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{i}\sum_{\ell=0}^{j} \frac{w_{i-k}(z) u_{k,\ell}(z)}{(1-|z|^2)^{k+\ell+1}}\,(f_{j-\ell}(z)^* - w_{j-\ell}(z)^*)\,. \end{aligned} \tag{6.2.60}$$

Застосовуючи (6.2.50) до функці w_k і f_k використовуючи рівності (6.2.56), робимо висновок, що

$$w_k(z) - f_k(z) = O\left((z-t_0)^{2n-k+1}\right) \quad \text{при} \ \ z \widehat{\to} t_0$$

для $k = 0, \ldots, 2n$. Оскільки $z - t_0 = O(1 - |z|^2)$ при $z \widehat{\to} t_0$ недотичним чином, то маємо

$$\begin{aligned}
\frac{f_{i-k}(z) - w_{i-k}(z)}{(1 - |z|^2)^{k+\ell+1}} &= O\left((z - t_0)^{2n-i-\ell}\right)), \quad 0 \le k \le i \le n, & (6.2.61)\\
\frac{f_{j-\ell}(z) - w_{j-\ell}(z)}{(1 - |z|^2)^{k+\ell+1}} &= O\left((z - t_0)^{2n-j-k}\right), \quad 0 \le \ell \le j \le n. & (6.2.62)
\end{aligned}$$

Але тоді асимптотичне співвідношення (6.2.57) випливає з (6.2.60), (6.2.61) і (6.2.62). Останнє твердження випливає з (6.2.57) при $i = j = n$. □

Лема 6.38. Нехай w і f дві функції аналітичні в околі $\mathcal{U}_{t_0}$ точки $t_0 \in \mathbb{T}$. Припустимо, що існують недотичні межові значення їх похідних до порядку $2n + 1$ включно в точці t_0 і що вони рівні:

$$w_j(t_0) = f_j(t_0) \quad \text{при} \quad j = 0, \ldots, 2n + 1. \tag{6.2.63}$$

Тоді

$$\mathbf{P}_n^w(z) - \mathbf{P}_n^f(z) = o(1) \quad \text{при} \quad z \widehat{\to} t_0 \tag{6.2.64}$$

де $\mathbf{P}_n^w(z)$ і $\mathbf{P}_n^f(z)$ матриці Шварца-Піка функцій w і f, що визначені за формулою (6.2.1).

Доведення. В силу Зауваження 6.34, рівності (6.2.63) тягнуть асимптотичне співвідношення

$$w(z) - f(z) = o((z - t_0)^{2n+1}) \quad \text{при} \quad z \widehat{\to} t_0. \tag{6.2.65}$$

Отже, маємо

$$w_k(z) - f_k(z) = o\left((z - t_0)^{2n-k+1}\right) \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, 2n + 1 \quad \text{при} \quad z \to t_0.$$

Підставляючи цю асимптотику в (6.2.57), отримуємо

$$\mathbf{P}_{i,j}^w(z) - \mathbf{P}_{i,j}^f(z) = o((z - t_0)^{2n-i-j}) \quad (i, j = 0, \ldots, n),$$

що спричиняє (6.2.64). □

Доведення Теореми 6.25: Третє твердження Теореми 6.25 формулюється еквівалентним чином: *існує раціональна унімодулярна функція* f

що задовольняє умовам (6.2.63). Застосовуючи тепер Теорему 6.33 до послідовності $\{w_0, \dots, w_{2n+1}\}$, де $w_j := w_j(t_0)$, робимо висновок, що Твердження 1-3 Теореми 6.25 є еквівалентними.

Припустимо, що виконуються асимптотичні співвідношення (6.2.16) (це є еквівалентним тому, що мають місце рівності (6.2.63)) з раціональною унімодулярною функцією f. Тоді $\mathbb{P}_n^w(t_0) = \mathbb{P}_n^f(t_0)$, за визначенням (6.2.7), і співвідношення (6.2.64) виконується в силу Леми 6.38. Далі, оскільки f є раціональною і унімодулярною на $\mathbb{T}$, то існує межова матриця Шварца-Піка $\mathbf{P}_n^f(t_0)$ і вона дорівнює $\mathbb{P}_n^f(t_0)$, за Твердженням 1 Теореми 6.31. Переходячи тепер до недотичної границі в (6.2.64), отримуємо

$$\mathbf{P}_n^w(t_0) = \lim_{z \widehat{\to} t_0} \mathbf{P}_n^w(z) = \lim_{z \widehat{\to} t_0} \mathbf{P}_n^f(z) = \mathbf{P}_n^f(t_0) = \mathbb{P}_n^f(t_0) = \mathbb{P}_n^w(t_0).$$

Для завершення доказу Теореми 6.25 залишається показати, що (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (2).

Доказ імплікації (3) $\Rightarrow$ (4)**:** Припустимо, що має місце асимптотична рівність

$$w(z) = f(z) + o((z - t_0)^{2n+1}) \tag{6.2.66}$$

(еквівалентно, виконуються рівності (6.2.63)) при $z \widehat{\to} t_0$ зсередини і ззовні кругу $\mathbb{D}$, де функція f раціональна і унімодулярна на колі. Тоді маємо з (6.2.66) при $|z| > 1$

$$w(z) := \overline{w(1/\bar{z})}^{-1} = \left(\overline{f(1/\bar{z})} + \overline{o((\frac{1}{\bar{z}} - t_0)^{2n+1})} \right)^{-1}.$$

Оскільки f раціональна і унімодулярна на $\mathbb{T}$, то

$$\overline{f(1/\bar{z})} = f(z)^{-1}.$$

Зауважимо, що

$$\frac{1}{z} - \bar{t}_0 = \frac{-\bar{t}_0(z - t_0)}{z} = O((z - t_0)) \quad \text{при} \;\; z \to t_0. \tag{6.2.67}$$

З урахуванням цього отримуємо ($|z| > 1$)

$$w(z) = \left(f(z)^{-1} + o((z - t_0)^{2n+1}) \right)^{-1}$$

$$= f(z)\left(1+f(z)o((z-t_0)^{2n+1})\right)^{-1} = f(z)+o((z-t_0)^{2n+1}) \qquad (6.2.68)$$

при $z\widehat{\rightarrow}t_0$ ззовні $\mathbb{D}$. Таким чином (6.2.66) має місце при збіжності z до t_0 зсередини і ззовні $\mathbb{D}$. Оскільки f аналітична в околі t_0, то її асимптотики зсередини і ззовні кругу збігаються. Маємо

$$w(z) = \sum_{j=0}^{2n+1} f_j(t_0)(z-t_0)^j + o((z-t_0)^{2n+1}$$

при збіжності z до t_0 зсередини і ззовні. Тоді, в силу Зауваження 6.34, існують границі $w_j(t_0)$ при $j=0,\ldots,2n+1$, коли $z\widehat{\rightarrow}t_0$ зсередини і ззовні $\mathbb{D}$ і вони збігаються з $f_j(t_0)$. Тим самим асимптотичні рівності (6.2.17) доведено.

Доказ імплікації (4) $\Rightarrow$ (2)**:** Припустимо, що асимптотичні співвідношення (6.2.17) виконуються зсередини і ззовні $\mathbb{D}$. За визначенням, маємо (продовження за симетрією не обов'язково збігається з аналітичним)

$$\overline{w(1/\bar{z})} \equiv w(z)^{-1}, \quad |z|<1.$$

Підставляючи в (6.2.17) $1/\bar{z}$, $|z|<1$, отримуємо (знову з урахуванням (6.2.67))

$$\overline{w(1/\bar{z})} = \sum_{j=0}^{k} w_j(t_0)^* \left(\frac{1}{z}-\bar{t}_0\right)^j + o((z-t_0)^k),$$

$k=0,\ldots,2n+1$ і, отже, що

$$\begin{aligned} z^k w(z)^{-1} \equiv z^k\overline{w(1/\bar{z})} &= \sum_{j=0}^{k} w_j(t_0)^* z^{k-j}(1-z\bar{t}_0)^j + o((z-t_0)^k) \\ &= \sum_{j=0}^{k} (-\bar{t}_0)^j w_j(t_0)^* z^{k-j}(z-t_0)^j + o((z-t_0)^k). \end{aligned}$$

при $|z|<1$. Перегрупування членів, засноване на рівності

$$z^\ell = \sum_{i=0}^{\ell} \begin{pmatrix} \ell \\ i \end{pmatrix} t_0^{\ell-i}(z-t_0)^i,$$

веде до

$$z^k w(z)^{-1} = \sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{\ell=0}^{k-j}(-1)^\ell t_0^{j-\ell}\begin{pmatrix} k-\ell \\ j \end{pmatrix} w_\ell(t_0)^*\right)(z-t_0)^{k-j} + o((z-t_0)^k).$$

Помноживши обидві частини останньої рівності на $w(z)$ і підставляючи асимптотику (6.2.17) ($|z| < 1$) отримуємо

$$\left(\sum_{j=0}^{k} w_j(t_0)(z-t_0)^j\right)\left(\sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{\ell=0}^{k-j}(-1)^{\ell} t_0^{j-\ell}\left(\begin{array}{c} k-\ell \\ j \end{array}\right) w_\ell(t_0)^*\right)(z-t_0)^{k-j}\right)$$

$$= z^k + o((z-t_0)^k) = \sum_{j=0}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array}\right) t_0^{k-j}(z-t_0)^j + o((z-t_0)^k)$$

Порівнюючи коефіцієнти при $(z-t_0)^k$, отримуємо

$$\sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{k-j}(-1)^{\ell}\left(\begin{array}{c} k-\ell \\ j \end{array}\right) t_0^{j-\ell} w_j(t_0) w_\ell(t_0)^* = 1 \quad \text{при} \;\; k = 0, \ldots, 2n+1.$$

В силу Зауваження 6.29, останні рівності означають, що послідовність $\{w_0(t_0), \ldots, w_{2n+1}(t_0)\}$ є t_0-ізометричною. □

Доведеня Теореми 6.27: Припустимо, що $w^{(2n+1)}$ обмежена в $\Gamma_{t_0,\alpha}$ і, що послідовність $\{w_0, \ldots, w_{2n}\}$ недотичних межових значень $w_j := w_j(t_0)$ є t_0-ізометричною (існування цих границь гарантовано Лемою 6.36). Нехай w_{2n+1} – це будь-яке число таке, що продовжена послідовність $\{w_0, \ldots, w_{2n}, w_{2n+1}\}$ є t_0-ізометричною (таке число існує згідно із Зауваженнями 6.35). За Теоремою 6.33, існує раціональна унімодулярна функція f така, що $f_j(t_0) = w_j$, $j = 0, \ldots, 2n+1$. Функції f і w задовольняють умовам Леми 6.37. Отже,

$$d_{w,n}(z) - d_{f,n}(z) = O(1) \tag{6.2.69}$$

коли z збігається до t_0 недотичним чином. Оскільки f раціональна унімодулярна функція, то існує $d_{f,n}(t_0)$. Зокрема, $d_{f,n}(z)$ обмежена в $\Gamma_{t_0,\alpha}$. Тоді (6.2.69) спричиняє (6.2.19). Імплікації (1) $\Leftrightarrow$ (2)) $\Leftrightarrow$ (3) В Теоремі 6.27 встановлюються так само як і в Теоремі 6.25. □

6.2.4 Узагальнений клас Шура.

Умова (6.2.13) не має великого сенсу для аналітичних функцій загального вигляду. Наприклад, функція $w(z) = e^{\frac{i}{1-z}}$ задовольняє умові (6.2.13) (при $n = 0$) в $t_0 = 1$ оскільки $|w(z)| = 1$ на радіусі $[0, 1)$;однак, у цієї функції немає радіальної границі коли z збігається до 1. Таким чином Теорема 6.24 не може бути поширена на загальні аналітичні функції. Однак вона залишається справедливою для функцій *узагальненого класу Шура*. Доказу цього присвячено даний розділ. Нагадаємо, що функція w належить узагальненого класу Шура $\mathcal{S}_\kappa$, якщо вона допускає представлення вигляду

$$w(z) = \frac{s(z)}{b(z)}, \tag{6.2.70}$$

де s функція класу Шура і b - скінченний добуток Бляшке ступеня κ. Ці функції мають скінченне число полюсів в $\mathbb{D}$. Будемо позначати область аналітичності w ($\mathbb{D}$ без скінченного числа точок) через $\rho(w)$. Добре відома властивість функцій класу $\mathcal{S}_\kappa$ полягає в тому що, ядро

$$K_w(z,\zeta) := \frac{1 - w(z)\overline{w(\zeta)}}{1 - z\bar{\zeta}}$$

має κ від'ємних квадратів. Матриця Шварца-Піка $\mathbf{P}_n^w(z)$ як і раніше може бути визначена формулою (6.2.1), вона має не більше ніж κ від'ємних квадратів при кожному $z \in \rho(w)$ і кожному $n \in \mathbb{Z}_+$: $\mathrm{sq}_- \mathbf{P}_n^w(z) \le \kappa$.

Зауваження 6.39. Якщо межова матриця Шварца-Піка $\mathbf{P}_n^w(t_0)$ існує, то вона теж має цю властивість $\mathrm{sq}_- \mathbf{P}_n^w(t_0) \le \kappa$.

Наступна теорема узагальнює Теорему 6.24.

Теорема 6.40. Нехай $w \in \mathcal{S}_\kappa$, $t_0 \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ і величина $d_{w,n}$ визначена формулою (6.2.3). Наступні твердження еквівалентні.

1. $\widetilde{d} := \liminf\limits_{z \to t_0} d_{w,n}(z) < \infty$.
2. $d_{w,n}(t_0) := \lim\limits_{z \widehat{\to} t_0} d_{w,n}(z) < \infty$.
3. існує межова матриця Шварца-Піка $\mathbf{P}_n^w(t_0)$.
4. Існують недотичні межові значення $w_j(t_0)$ при $j = 0, \dots, 2n+1$ і вони задовольняють співвідношенням

   $$|w_0(t_0)| = 1, \quad \mathbb{P}_n^w(t_0) = \mathbb{P}_n^w(t_0)^* \quad \text{и} \quad \mathrm{sq}_- \mathbb{P}_n^w(t_0) \le \kappa,$$

   де матриця $\mathbb{P}_n^w(t_0)$ визначена формулою (6.2.7).

При виконанні цих умов

$$\widetilde{d} = d_{w,n}(t_0) \quad \text{і} \quad \mathbf{P}_n^w(t_0) = \mathbb{P}_n^w(t_0). \tag{6.2.71}$$

Доказу теореми передуватиме низка тверджень. Для функції w виду (6.2.70) маємо

$$\frac{1-|w(z)|^2}{1-|z|^2} = \frac{1-|s(z)|^2}{|b(z)|^2(1-|z|^2)} - \frac{1-|b(z)|^2}{|b(z)|^2(1-|z|^2)}.$$

Застосовуючи $\frac{1}{i!j!^2}\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{j}^n}$ до обох частин цієї рівності, отримуємо, за визначенням (6.2.1),

$$\mathbf{P}_n^w(z) = L^{s,b}(z) - L^{b,b}(z), \tag{6.2.72}$$

де

$$L^{s,b}(z) := \left[\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\frac{1}{b(z)}\frac{1-|s(z)|^2}{1-|z|^2}\frac{1}{\overline{b(z)}}\right]_{i,j=0}^n, \tag{6.2.73}$$

$$L^{b,b}(z) := \left[\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\frac{1}{b(z)}\frac{1-|b(z)|^2}{1-|z|^2}\frac{1}{\overline{b(z)}}\right]_{i,j=0}^n. \tag{6.2.74}$$

В силу формули Лейбніца, з урахуванням аналітичності (антианалітичності) множників, маємо

$$\left[\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\frac{1}{b(z)}K(z,z)\frac{1}{\overline{b(z)}}\right]_{i,j=0}^n = \mathbb{U}_n^{1/b}(z)^* \left[\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}K(z,z)\right]_{i,j=0}^n \mathbb{U}_n^{1/b}(z)$$

де

$$K(z,\zeta) = \frac{1-s(z)\overline{s(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}} \quad \text{або} \quad K(z,\zeta) = \frac{1-b(z)\overline{b(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}}.$$

Оскільки $\mathbb{U}_n^{1/b}(z) = \mathbb{U}_n^b(z)^{-1}$, якщо $b(z) \neq 0$, то

$$L^{s,b}(z) := \mathbb{U}_n^b(z)^{-1*}\mathbf{P}_n^s(z)\mathbb{U}_n^b(z)^{-1} \tag{6.2.75}$$

де $\mathbf{P}_n^s(z)$ матриця Шварца-Піка, визначена формулою (6.2.1). Аналогічно

$$L^{b,b}(z) = \mathbb{U}_n^b(z)^{-1*}\mathbf{P}_n^b(z)\mathbb{U}_n^b(z)^{-1}. \tag{6.2.76}$$

Зауваження 6.41. Припустимо, що s функція класу Шура і b скінченний добуток Бляшке. Нехай $L^{s,b}(z)$ і $L^{b,b}(z)$ визначені формулами (6.2.73) і (6.2.74). Тоді

1. Недотична границя
$$L^{s,b}(t_0) := \lim_{z \widehat{\to} t_0} L^{s,b}(z) \tag{6.2.77}$$
існує тоді і тільки тоді коли існує межова матриця Шварца-Піка $\mathbf{P}_n^s(t_0)$, в цьому випадку
$$L^{s,b}(t_0) = \mathbb{U}_n^b(t_0)^{-1*}\mathbf{P}_n^s(t_0)\mathbb{U}_n^b(t_0)^{-1}. \tag{6.2.78}$$

2. Границя
$$L^{b,b}(t_0) = \lim_{z \to t_0} L^{b,b}(z) = \mathbb{U}_n^b(t_0)^{-1*}\mathbf{P}_n^b(t_0)\mathbb{U}_n^b(t_0)^{-1} \tag{6.2.79}$$
існує для будь-якого $n \in \mathbb{Z}_+$, при z, що збігається до $t_0 \in \mathbb{T}$ довільним чином в $\mathbb{C}$.

Доведення. Оскільки b аналітична в точці $t_0 \in \mathbb{T}$ і $b(t_0) \neq 0$, межова матриця $\mathbb{U}_n^b(t_0) := \lim_{z \to t_0} \mathbb{U}_n^b(z)$ існує і зворотня. Тоді перше твердження випливає з (6.2.75) шляхом переходу до границі при $z \widehat{\to} t_0$. В силу Теореми 6.31, існує межова матриця $\mathbf{P}_n^b(t_0)$. Звідси випливає друге твердження. □

Наслідок 6.42. Нехай $w \in \mathcal{S}_\kappa$, тобто має вигляд (6.2.70) з Шурівською функцією s і скінченним добутком Бляшке b. Тоді межова матриця Шварца-Піка $\mathbf{P}_n^w(t_0)$ існує тоді і тільки тоді, коли існує $\mathbf{P}_n^s(t_0)$. В цьому випадку
$$\mathbf{P}_n^w(t_0) = \mathbb{U}_n^b(t_0)^{-1*}\left(\mathbf{P}_n^s(t_0) - \mathbf{P}_n^b(t_0)\right)\mathbb{U}_n^b(t_0)^{-1}. \tag{6.2.80}$$

Доведення. Оскільки границя (6.2.79) існує при будь-якому способі збіжності z до t_0, то, як видно з (6.2.72), $\mathbf{P}_n^w(t_0)$ існує тоді і тільки тоді, коли існує $L^{s,b}(t_0)$; останнє еквівалентно існуванню $\mathbf{P}_n^s(t_0)$, за Зауваженням 6.41. Переходячи до границі в (6.2.72) при $z \widehat{\to} t_0$ і використовуючи (6.2.78) і (6.2.79), приходимо до (6.2.80). □

Лема 6.43. Нехай $s \in \mathcal{S}_0$ – це функція класу Шура, f функція аналітична в точці $t_0 \in \mathbb{T}$ і $n \in \mathbb{Z}_+$. Тоді
$$\liminf_{z \to t_0} \frac{\partial^{2n}}{\partial z^n \partial \bar{z}^n} \left(f(z) \frac{1 - |s(z)|^2}{1 - |z|^2} \overline{f(z)} \right) < \infty$$

тоді і тільки тоді, коли існує скінченна границя:

$$\lim_{z \widehat{\to} t_0} \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \left(f(z) \frac{1-|s(z)|^2}{1-|z|^2} \overline{f(z)} \right) < \infty \quad (i,j = 0, \ldots, n). \tag{6.2.81}$$

В цьому випадку обидві границі є рівними

$$\liminf_{z \to t_0} \frac{\partial^{2n}}{\partial z^n \partial \bar{z}^n} \left(f(z) \frac{1-|s(z)|^2}{1-|z|^2} \overline{f(z)} \right) = \lim_{z \widehat{\to} t_0} \frac{\partial^{2n}}{\partial z^n \partial \bar{z}^n} \left(f(z) \frac{1-|s(z)|^2}{1-|z|^2} \overline{f(z)} \right). \tag{6.2.82}$$

Цей результат було отримано в [35] в контексті операторно значних Шурівських функцій s і векторно значних f. Тут ми застосовуємо тільки скалярний варіант

Наслідок 6.44. Припустимо, що s це Шурівська функція, b скінченний добуток Бляшке і

$$L^{s,b}_{nn}(z) = \frac{1}{(n!)^2} \frac{\partial^{2n}}{\partial z^n \partial \bar{z}^n} \frac{1-|s(z)|^2}{|b(z)|^2(1-|z|^2)}, \tag{6.2.83}$$

(нижній діагональний елемент матриці $L^{s,b}(z)$ визначеної формулою (6.2.73)). Припустимо, що

$$\liminf_{z \to t_0} L^{s,b}_{nn}(z) < \infty \quad (t_0 \in \mathbb{T}). \tag{6.2.84}$$

Тоді існує недотична границя (6.2.77) і

$$\lim_{z \widehat{\to} t_0} L^{s,b}_{nn}(z) = \liminf_{z \to t_0} L^{s,b}_{nn}(z). \tag{6.2.85}$$

Крім того, існує межова матриця Шварца-Піка $\mathbf{P}^s_n(t_0)$.

Доведення. Зроблені припущення дозволяють застосувати Лему 6.43 з функцією $f(z) = \frac{1}{b(z)}$. З співвідношень (6.2.81) видно, що усі елементи матриці $L^{s,b}(z)$ мають недотичні межові границі, тобто існує границя (6.2.77). Тоді, в силу Зауваження 6.41, існують $\mathbf{P}^s_n(t_0)$. Нарешті, рівність (6.2.82) з $f = \frac{1}{b}$ дає (6.2.85). □

Доказ Теореми 6.40: Нехай $w \in \mathcal{S}_\kappa$ функція узагальненого класу Шура з представленням Крейна-Лангера (6.2.70). Припустимо, що

$$\widetilde{d} := \liminf_{z \to t_0} d_{w,n}(z) < \infty$$

Порівняння нижніх діагональних елементів в матричній рівності (6.2.72) дає

$$d_{w,n}(z) = L_{nn}^{s,b}(z) - L_{nn}^{b,b}(z), \tag{6.2.86}$$

де $L_{nn}^{s,b}(z)$ визначена в (6.2.83) і

$$L_{nn}^{b,b}(z) = \frac{1}{(n!)^2} \frac{\partial^{2n}}{\partial z^n \partial \bar{z}^n} \frac{1 - |b(z)|^2}{|b(z)|^2(1 - |z|^2)}.$$

В силу Зауваження 6.41, існує границя

$$L_{nn}^{b,b}(t_0) = \lim_{z \to t_0} L_{nn}^{b,b}(z).$$

Тоді з (6.2.86) випливає, що

$$\liminf_{z \to t_0} d_{w,n}(z) = \liminf_{z \to t_0} L_{nn}^{s,b}(z) - L_{nn}^{b,b}(t_0) \tag{6.2.87}$$

і оскільки нижня границя в лівій частині скінченна, робимо висновок, що виконується умова (6.2.84). Тоді межова матриця Шварца-Піка $\mathbf{P}_n^s(t_0)$ існує за Слідством 6.44. За Слідством 6.42, межова матриця Шварца-Піка $\mathbf{P}_n^w(t_0)$ теж існує. Тепер можемо перейти до границі в (6.2.86) при $z \widehat{\to} t_0$:

$$d_{w,n}(t_0) = \lim_{z \widehat{\to} t_0} d_{w,n}(z) = \lim_{z \widehat{\to} t_0} L_{nn}^{s,b}(z) - L_{nn}^{b,b}(t_0).$$

Звідси, враховуючи (6.2.87) і рівність (6.2.85) (які виконується в силу Наслідку 6.44), отримуємо

$$d_{w,n}(t_0) = \liminf_{z \to t_0} d_{w,n}(z).$$

Тим самим доведено імплікації (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) в Теоремі 6.40 і перша рівність в (6.2.71).

Оскільки $s \in \mathcal{S}$, то існування $\mathbf{P}_n^s(t_0)$ гарантує (за Теоремою 6.24) існування недотичних межових значень

$$s_j(t_0) := \lim_{z \to t_0} \frac{s^{(j)}(z)}{j!}, \qquad j = 0, \dots, 2n+1, \tag{6.2.88}$$

при цьому $|s_0(t_0)| = 1$ і матриця $\mathbb{P}_n^s(t_0)$, визначена формулою (6.2.7), ермітова. Тоді, за Теоремою 6.33, $\{s_0(t_0), \dots, s_{2n+1}(t_0)\}$ є t_0-ізометричною:

$$\overline{\mathbb{U}}_{2n+1}^s(t_0) \boldsymbol{\Psi}_{2n+1}(t_0) \mathbb{U}_{2n+1}^s(t_0) = \boldsymbol{\Psi}_{2n+1}(t_0). \tag{6.2.89}$$

Послідовність $\{b_0(t_0), \ldots, b_{2n+1}(t_0)\}$ t_0-ізометрична, по другому твердженню Теореми 6.31:

$$\overline{\mathbb{U}}^b_{2n+1}(t_0)\boldsymbol{\Psi}_{2n+1}(t_0)\mathbb{U}^b_{2n+1}(t_0) = \boldsymbol{\Psi}_{2n+1}(t_0). \tag{6.2.90}$$

Оскільки b аналітична в t_0 і $b(t_0) \neq 0$, існування межових значень

$$w_j(t_0) := \lim_{z \to t_0} \frac{w^{(j)}(z)}{j!} \quad (j = 0, \ldots, 2n+1) \tag{6.2.91}$$

випливає з (6.2.70) і (6.2.90). Оскільки $s = wb$, то $\mathbb{U}^s_{2n+1}(t_0) = \mathbb{U}^w_{2n+1}(t_0)\mathbb{U}^b_{2n+1}(t_0)$, тобто

$$\mathbb{U}^w_{2n+1}(t_0) = \mathbb{U}^s_{2n+1}(t_0)\mathbb{U}^b_{2n+1}(t_0)^{-1}.$$

Останнє спільно з (6.2.89) і (6.2.90) спричиняє

$$\overline{\mathbb{U}}^w_{2n+1}(t_0)\boldsymbol{\Psi}_{2n+1}(t_0)\mathbb{U}^w_{2n+1}(t_0) = \boldsymbol{\Psi}_{2n+1}(t_0)$$

тобто, послідовність $\{w_0(t_0), \ldots, w_{2n+1}(t_0)\}$ t_0-ізометрична. Отже, за Теоремою 6.25, умова (6.2.15) виконується і матриця $\mathbb{P}^w_n(t_0)$, що визначена межовими значеннями (6.2.91) за допомогою формули (6.2.7), збігається з межовою матрицею Шварца-Піка $\mathbf{P}^w_n(t_0)$. Це доводить другу рівність в (6.2.71). Крім того, ця рівність спричиняє ермітовість $\mathbb{P}^w_n(t_0)$ і (в силу Зауваження 6.39) $\mathrm{sq}\_\mathbf{P}^w_n(t_0) \leq \kappa$. Доведення Теореми 6.40 завершено. □

Наступна теорема частково узагальнює Теорему 6.40.

Теорема 6.45. Нехай $w = \dfrac{s}{f}$ відношення двох функцій класу Шура які задовольняють умовам

$$\liminf_{z \to t_0} d_{s,n}(z) < \infty \quad \text{і} \quad \liminf_{z \to t_0} d_{f,n}(z) < \infty \tag{6.2.92}$$

де $t_0 \in \mathbb{T}$ и $n \in \mathbb{Z}_+$. Тоді

1. Існують недотичні межові значення $w_j(t_0)$, $j = 0, \ldots, 2n+1$ і $|w_0(t_0)| = 1$.
2. Існує межова матриця Шварца-Піка $\mathbf{P}^w_n(t_0)$ і вона збігається з матрицею $\mathbb{P}^w_n(t_0)$, визначеною формулою (6.2.7). Зокрема, $\mathbb{P}^w_n(t_0)$ ермітова.

За Теоремою 6.24, умови (6.2.92) забезпечують існування межових матриць Шварца-Піка $\mathbf{P}_n^s(t_0)$ и $\mathbf{P}_n^f(t_0)$. Решта доводиться так само як в Теоремі 6.40.

Відзначимо, що якщо $w = \frac{s}{f}$ відношення двох функцій класу Шура, то умова

$$\liminf_{z\to t_0} d_{w,n}(z) < \infty \tag{6.2.93}$$

випливає з (6.2.92), але взагалі кажучи, не спричиняє (6.2.92). Можливо припущення Теореми 6.45 можуть бути послаблені, але не до умов (6.2.93).

6.2.5 Нескінченні t_0-ізометричні послідовності. Теорема 6.33 показує, що будь-яка скінченна t_0-ізометрична послідовність $\{w_0, \dots, w_n\}$ є послідовністю перших $n+1$ коефіцієнтів Тейлора в точці t_0 деякої раціональної унімодулярної функції. У цьому розділі ми отримаємо схожу характеризацію нескінченних t_0-ізометричних послідовностей.

Визначення 6.46. Будемо називати послідовність комплексних чисел $\{w_j\}_{j=0}^{\infty}$ *t_0-позитивною*, якщо $|w_0| = 1$ і матриця $\mathbb{P}(t_0, w_0, \dots, w_{2n+1})$, визначена формулою (6.2.11), невід'ємна при всіх $n \geq 0$.

Зауваження 6.47. За Теоремою 6.33, послідовність є t_0-ізометричною тоді і тільки тоді, коли $|w_0| = 1$ і матриця $\mathbb{P}(t_0, w_0, \dots, w_{2n+1})$ ермітова при всіх $n \geq 0$. Зокрема, будь-яка t_0-позитивна послідовність є t_0-ізометричною.

Визначення 6.48. Нехай $t_0 \in \mathbb{T}$. Будемо говорити, що Шурівська функція *w належить до класу $\mathcal{S}_{t_0}$*, якщо

$$\liminf_{z\to t_0} d_{w,n}(z) < \infty \quad \text{при усіх } \ n \geq 0, \tag{6.2.94}$$

еквівалентно, якщо

$$\lim_{z \widehat{\to} t_0} d_{w,n}(z) < \infty \quad \text{при усіх } \ n \geq 0, \tag{6.2.95}$$

де $d_{w,n}(z)$ визначена в (6.2.3). Через $\mathcal{QS}_{t_0}$ будемо позначати клас функцій w вигляду $w = \frac{s}{f}$, де $s,\ f \in \mathcal{S}_{t_0}$.

Теорема 6.49. Нехай $t_0 \in \mathbb{T}$ і нехай $w \in \mathcal{S}_{t_0}$. Тоді недотичні межові значення $w_j(t_0)$ існують при всіх $j \geq 0$ і послідовність $\{w_j(t_0)\}_{j=0}^{\infty}$ є t_0-позитивною; будь-яка t_0-позитивна послідовність може бути отримана таким чином.

Доведення. Перше твердження випливає з Теореми 6.24 і Визначення (6.46) t_0-позитивності. Для доказу другого нагадаємо результат [67] (аналогічний критерію розв'язності класичної проблеми моментів Гамбургера [54]) який стверджує, що послідовність $\{w_j\}_{j=0}^{\infty}$ t_0-позитивна тоді і тільки тоді, коли існує функція класу Шура w така, що

$$w_j(t_0) := \lim_{z \widehat{\rightarrow} t_0} \frac{w^{(j)}(z)}{j!} = w_j \quad \text{при} \quad j \geq 0.$$

Для цієї функції w маємо $|w_0| = 1$ і $\mathbb{P}_n^w(t_0) \geq 0$ для всіх $n \geq 0$ і, отже, за Теоремою 6.24 (імплікація (4) $\Rightarrow$ (2)), що умова (6.2.14) виконується при всіх $n \geq 0$, тобто, що $w \in \mathcal{S}_{t_0}$. □

Теорема 6.50. Нехай $t_0 \in \mathbb{T}$ і нехай $w \in \mathcal{QS}_{t_0}$. Тоді недотичні межові значення $w_j(t_0)$ існують для всіх $j \geq 0$ і послідовність $\{w_j(t_0)\}_{j=0}^{\infty}$ є t_0-ізометричною; будь-яка t_0-ізометрична послідовність може бути отримана таким чином.

Доведення. Перше твердження випливає з теореми 6.45. Для доказу другого припустимо, що $\{w_j(t_0)\}_{j=0}^{\infty}$ t_0-ізометрична послідовність. Тоді за Зауваженням 6.47, $|w_0| = 1$ і $\mathbb{P}(t_0, w_0, \ldots, w_{2n+1})$ ермітова при будь-якому $n \geq 0$. Застосуємо індуктивну побудову з доведення Леми 6.32 і отримуємо t_0-позитивну послідовність $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$ таку, що послідовність $\{s_j\}_{j=0}^{\infty}$, що визначається наступним чином

$$s_j = \sum_{\ell=0}^{j} f_{j-\ell} w_\ell \quad \text{для} \quad j = 0, 1, \ldots \tag{6.2.96}$$

є t_0-позитивною. За Теоремою 6.49, існують функції $s(z)$ і $f(z)$ класу $\mathcal{S}_{t_0}$, що задовольняють співвідношенням

$$\frac{s^{(j)}(t_0)}{j!} = s_j \quad \text{і} \quad \frac{f^{(j)}(t_0)}{j!} = f_j \quad \text{для} \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{6.2.97}$$

Тоді з (6.2.96) випливає, що відношення $w(z) = \dfrac{s}{f}$ (яке належить $\mathcal{QS}_{t_0}$) задовольняє (6.2.95). □

Для довільних аналітичних функцій маємо наступний нескінченний аналог Теореми 6.25.

Теорема 6.51. Припустимо, що w аналітична в околі $\mathcal{U}_{t_0}$ точки $t_0 \in \mathbb{T}$. Наступні властивості еквівалентні:

1. Існують недотичні межові значення $w_j(t_0)$ при усіх $j \in \mathbb{Z}_+$ і послідовність $\{w_j(t_0)\}_{j=0}^{\infty}$ є t_0-ізометричною.
2. Існує функція $f \in \mathcal{QS}_{t_0}$ така, що
$$w(z) = f(z) + o((z - t_0)^n) \quad \text{для будь якого } \ n \geq 0 \quad \text{при } \ z\widehat{\to}t_0. \tag{6.2.98}$$
3. Продовження w за симетрією $w(z) = \frac{1}{\overline{w(1/\bar{z})}}$ є аналітичним у зовнішньому недотичному околі
$$\widetilde{\Gamma}_{t_0,\alpha,\varepsilon} := \{z \notin \mathbb{D} : \ |z - t_0| < \varepsilon, \ |\arg(z - t_0)| < \alpha\}$$
точки t_0 при будь якому $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ і деякому $\varepsilon = \varepsilon(\alpha) > 0$ і границі всіх похідних в точці t_0 зсередини і ззовні збігаються.

Доведення. Для доведення (1) $\Leftrightarrow$ (3) досить помітити, що недотична асимптотична рівність (6.2.17), що виконується при кожному $n \in \mathbb{Z}_+$ зсередини і ззовні одиничного кругу, є еквівалентною Властивості 3 Теореми 6.51. Еквівалентність (1) $\Leftrightarrow$ (2) випливає з Теореми 6.50: оскільки границі $f_j(t_0)$ існують для всіх $j \geq 0$, співвідношення (6.2.98) є еквівалентним існуванню границь $w_j(t_0) = f_j(t_0)$ для всіх $j \geq 0$. □

Висновки до Розділу 6

У Розділі 6 отримано аналог класичної теореми Жюліа-Каратеодорі про кутову межову похідну для похідних вищого порядку. Виявлено усі еквівалентні умови для її існування у сенсі аналогічному до похідної першого порядку. Теорему сформульовано у термінах властивостей відповідних матриць. У підрозділі 6.2 розглянуто відповідну межову інтерполяційну задачу, яка еквівалентна задачі розглянутій у Розділі 5.2.1. Але на відміну від Розділу 5.2.1, де увага сконцентрована на множині розв'язків та на властивостях коефіцієнтів параметризуючої формули, у Розділі 6.2 йдеться про конкретно аналітичний зміст межової задачі. Зокрема доведено що кратний аналог умови Жюліа-Каратеодорі є еквівалентним умові симетрії межових похідних, яка виникала в працях І.В. Ковалішиної.

Результати розділу опубліковано в роботах [32, 33, 35, 36, 37].

РОЗДІЛ 7

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ У РОЗШИРЕНОМУ КЛАСІ КРЕЙНА-ЛАНГЕРА

7.1 Розширений клас Крейна–Лангера: стрибки та полюси. Стандартні функції

У цьому розділі розглядається клас функцій визначених в одиничному крузі (можливо за виключенням множини ізольованих точок) таких що всі їх матриці Піка мають не більше заданого числа від'ємних квадратів. Мероморфні функції такого типу вивчалися в контексті спектральної теорії операторів в просторах Понтрягіна [74], [75], [48], при побудові функціональних моделей таких операторів [11]. Як буде показано, використання таких функцій також природно в задачах інтерполяції. Виявляється що типова функція цього класу аналітична поза скінченного числа точок, а в цих точках має або полюс або стрибок, кількість особливих точок не перевищує числа від'ємних квадратів матриць Піка.

7.1.1 Позначення та формулювання основних результатів. Комплексно-значну функцію S називають *функцією класу Шура* якщо S визначена у відкритому одиничному крузі $\mathbb{D}$, аналітична і $|S(z)| \leq 1$ при будь-якому $z \in \mathbb{D}$. Тобто, S аналітичне відображення кругу $\mathbb{D}$ в себе. Функції класу Шура допускають таке еквівалентне визначення: *Функція S визначена в $\mathbb{D}$ є функцією класу Шура тоді і тільки тоді коли ядро*

$$K_S(z,w) = \frac{1 - S(z)S(w)^*}{1 - zw^*} \tag{7.1.1}$$

невід'ємне в $\mathbb{D}$. Невід'ємність ядра (7.1.1) в $\mathbb{D}$ означає що для будь-якого натурального n і для будь-якого набору точок $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{D}$, *матриця Піка*

$$P_n(S;\, z_1, \ldots, z_n) = \left[\frac{1 - S(z_i)S(z_j)^*}{1 - z_i z_j^*}\right]_{i,j=1}^{n}$$

невід'ємна: $P_n(S;\, z_1, \dots, z_n) \geq 0$. Більш того, як показав Хіндмарш [55] (див. також [49]), якщо S визначена на довільній підмножині $U \subseteq \mathbb{D}$ і всі матриці Піка $P_n(S;\, z_1, z_2, z_3)$ невід'ємні, $z_1, z_2, z_3 \in U$, то S допускає продовження в D до функції класу Шура.

У цьому розділі ми розглядаємо функції, матриці Піка яких мають обмежене число від'ємних квадратів. З огляду на те що такі функції можуть мати сингулярності, ми будемо припускати що область визначення це $\mathbb{D} \backslash \Lambda$, де Λ множина ізольованих точок кругу, які можуть накопичуватися тільки до межі. Множина Λ залежить від функції. Точніше:

Визначення 7.1. Нехай κ задане натуральне число. Клас $\mathcal{S}_\kappa$ складається з (комплексно-значних) функцій f визначених в $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{D} \setminus \Lambda$, де $\Lambda = \Lambda(f)$ дискретна множина, і таких що всі матриці Піка

$$P_n(f;\, z_1, \dots, z_n) := \left[\frac{1 - f(z_i) f(z_j)^*}{1 - z_i z_j^*} \right]_{i,j=1}^{n}, \quad z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D} \setminus \Lambda \qquad (7.1.2)$$

мають не більше κ від'ємних квадратів, і принаймні одна з них має рівно κ від'ємних квадратів.

Зауважимо що без обмеження загальності в Визначенні 7.1 можна вважати що всі точки $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D} \setminus \Lambda$ є різними. Мероморфні функції класу $\mathcal{S}_\kappa$ вивчалися в різних контекстах: в теорії апроксимації [9], в теорії унітарних операторів в просторах Понтрягіна [74], [75] і їх функціональних моделей [11], в задачах інтерполяції [7], [82], [52], [19],

Будемо дотримуватися наступних позначень: $\operatorname{Dom}(f)$ область визначення функції f, $Z(f)$ множина нулів f:

$$Z(f) = \{z \in \operatorname{Dom}(f) : \; f(z) = 0\}.$$

Число від'ємних квадратів матриці P будемо позначати через $\mathrm{sq}_- P$. Для функції f визначеної в $\mathbb{D} \setminus \Lambda$, де Λ дискретна множина, позначимо через $\mathbf{k}_n(f)$ максимальне число від'ємних квадратів матриць Піка порядку n:

$$\mathbf{k}_n(f) := \max_{z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D} \setminus \Lambda} \mathrm{sq}_- P_n(f;\, z_1, \dots, z_n), \qquad (7.1.3)$$

$\mathbf{k}_0(f) = 0$. Послідовність $\{\mathbf{k}_n(f)\}$ є неспадною і якщо $f \in \mathcal{S}_\kappa$, то

$$\mathbf{k}_n(f) = \kappa \tag{7.1.4}$$

для всіх досить великих n.

Наступна класична теорема Крейна-Лангера [74] характеризує *мероморфні* функції класу $\mathcal{S}_\kappa$.

Теорема 7.2. Нехай f є функція мероморфна в $\mathbb{D}$. Тоді $f \in \mathcal{S}_\kappa$ тоді і тільки тоді коли $f(z)$ може бути представлено у вигляді $f(z) = \dfrac{S(z)}{B(z)}$, де S функція класу Шура і B добуток Бляшке ступеня κ, S і B не мають спільних нулів.

Однак, як показує наступний простий приклад, не всі функції класу $\mathcal{S}_\kappa$ є мероморфними.

Приклад 7.3. Розглянемо функцію f визначену в $\mathbb{D}$ як $f(z) = 1$ при $z \neq 0$ і $f(0) = 0$. $P_n(f; z_1, \ldots, z_n) = 0$ якщо всі z_j відмінні від нулю; якщо одна з точок нуль (скажімо, $z_1 = 0$), то $P_n(f; z_1, \ldots, z_n)$ матриця з одиницями в першому рядку і першому стовпці і іншими елементами рівними нулю. Ця матриця має ранг два: один додатній і один від'ємний квадрат. Отже, $f \in \mathcal{S}_1$.

Визначення 7.4. Будемо називати функцію f *стандартною функцією* якщо вона допускає представлення

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{S(z)}{B(z)} & \text{якщо } z \notin \mathcal{W} \cup \mathcal{Z}, \\ \gamma_j & \text{якщо } z = z_j \in \mathcal{Z}, \end{cases} \tag{7.1.5}$$

де:

1. $\mathcal{Z} = \{z_1, \ldots, z_\ell\}$ і $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_p\}$ дві скінченні підмножини $\mathbb{D}$ що не перетинаються;
2. $B(z)$ добуток Бляшке ступеня $q \geq 0$ і $S(z)$ функція класу Шура такі що

   $$\mathcal{W} \subseteq Z(B) \subseteq \mathcal{W} \cup \mathcal{Z} \quad \text{і} \quad Z(B) \cap Z(S) = \emptyset;$$

   де $Z(B)$ і $Z(S)$ множини нулів, відповідно $B(z)$ і $S(z)$.

3. якщо $z_j \in \mathcal{Z} \setminus Z(B)$, то $\dfrac{S(z_j)}{B(z_j)} \neq \gamma_j$.

Областю визначення стандартної функції f виду (7.1.5) є $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{D} \setminus \mathcal{W}$. Менш формально, f має стрибки ($f(z_0) \neq \lim_{z\to z_0} f(z)$) і полюси. Крім того, в деяких полюсах функція може також приймати скінченне значення, а в деяких полюсах вона може бути не визначена. Множина $\mathcal{W}$ складається з тих полюсів функції $\dfrac{S(z)}{B(z)}$ де f не визначена. Множина $\mathcal{Z}$ складається зі стрибків f і полюсів $\dfrac{S(z)}{B(z)}$ де f визначена. Останні теж можна вважати стрибками (нескінченної величини). Будемо говорити що $f(z)$ має q полюсів (кількість нулів $B(z)$ з урахуванням їх кратності), і ℓ стрибків $z_1, \dots, z_\ell$ (включаючи і нескінченні стрибки, тобто полюси в яких функції приписане скінченне значення). Таким чином точка може одночасно бути і полюсом і (нескінченним) стрибком.

Теорема 7.5. Припустимо що функція f визначена в $\mathbb{D}\setminus\Lambda$, де Λ дискретна множина. Нехай κ невід'ємне ціле число. Наступні властивості еквівалентні:

1. f належить до $\mathcal{S}_\kappa$.
2. f допускає продовження до стандартної функції з ℓ стрибками, $0 \leq \ell \leq \kappa$, і $\kappa - \ell$ полюсами. Всі стрибки продовження містяться в $\mathbb{D} \setminus \Lambda$. Таке продовження єдине.
3. Існує $n \geq 0$ таке що
$$\mathbf{k}_n(f) = \mathbf{k}_{n+3}(f) = \kappa. \tag{7.1.6}$$

Еквівалентність **1** $\Leftrightarrow$ **3** узагальнює теорему Хіндмарша [55] (див. також [49]), яка відноситься до випадку $\kappa = 0$.

У зв'язку з третім твердженням Теореми 7.5 виникає питання про мінімальне значення n для якого виконується (7.1.4). Позначимо це мінімальне значення через $N(f)$:

$$N(f) = \min_n \{n : \ \mathbf{k}_n(f) = \kappa\}, \qquad f \in \mathcal{S}_\kappa. \tag{7.1.7}$$

Теорема 7.6. Припустимо що f це стандартна функція з q полюсами і ℓ стрибками. Тоді $f \in \mathcal{S}_\kappa$, де $\kappa = q + \ell$ и

$$q + \ell \leq N(f) \leq q + 2\ell. \tag{7.1.8}$$

Ліва нерівність в (7.1.8) очевидна (щоб мати κ від'ємних квадратів, ермітова матриця повинна бути як мінімум розміру $\kappa \times \kappa$). Ми також покажемо що нерівності (7.1.8) є точними. Наведемо тут простий приклад який ілюструє це

Приклад 7.7. Розглянемо функцію

$$f(z) = \begin{cases} 1, & z \neq 0, \\ a \neq 1, & z = 0. \end{cases}$$

$f(z)$ є стандартною функцією класу $\mathcal{S}_1$ без полюсів і з одним стрибком. За Теоремою 7.6, $1 \leq N(f) \leq 2$. Якщо $|a| > 1$, то $\mathbf{k}_n(f) = 1$ при $n \geq 1$ і, отже, $1 = N(f) < 2$. Якщо $|a| \leq 1$, то $\mathbf{k}_1(f) = 0$, $\mathbf{k}_n(f) = 1$ при $n \geq 2$ і, отже, $1 < N(f) = 2$.

Наступне зауваження доповнює Теорему 7.6 і вказує як можна вибирати $q + 2\ell$ точок щоб матриця Піка мала $q + \ell$ від'ємних квадратів.

Зауваження 7.8. Припустимо що f це стандартна функція з q полюсами і ℓ стрибками. Нехай $w_1, \ldots, w_k$ це різні полюси f кратностей $r_1, \ldots, r_k$, і нехай $z_1, \ldots, z_\ell$ (різні) стрибки f.Тоді існує $\epsilon > 0$ таке що

$$\mathrm{sq}_- P_m(f; y_1, \ldots, y_m) = q + \ell$$

для будь-якого набору $m := q + 2\ell$ різних точок $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$, що задовольняють наступним умовам

1. ℓ точок множини Y збігаються з $z_1, \ldots, z_\ell$;
2. в ϵ околі кожної з точок $z_1, \ldots, z_\ell$ вибране ще по одній точці відмінній від них;

3. інші q точок множини Y вибираються так: в ϵ околі кожного полюса w_j, $j = 1, \ldots, k$, вибираються r_j різних точок, відмінних від w_j і від точки обраної в пункті 2.

Доведення Зауваження 7.8 є частиною доведення Теореми 7.6.

Клас функцій $\mathcal{S}_\kappa$ допускає ще одну характеризацію:

Теорема 7.9. Нехай f є функцією такою як в Теоремі 7.5 і κ невід'ємне ціле число. Тоді:

1. якщо $\mathbf{k}_{2\kappa}(f) = \mathbf{k}_{2\kappa+3}(f) = \kappa$, то $f \in \mathcal{S}_\kappa$.
2. якщо $f \in \mathcal{S}_\kappa$, то $\mathbf{k}_{2\kappa}(f) = \kappa$.

Приклад 7.7 (з $|a| \leq 1$) показує що при $\kappa = 1$, індекс 2κ в Теоремі 7.9 не може бути зменшений.

Теореми 7.5, 7.6 і 7.9 складають основний зміст цього розділу.

Доведення Теорем 7.5 і 7.6 містяться в параграфах 7.1.2 – 7.1.4. В параграфі 7.1.5 показано що для будь-якої функції $f \in \mathcal{S}_\kappa$ і будь-якої відкритої множини Ω що міститься в $\mathrm{Dom}\,(f)$, необхідне число від'ємних власних значень матриці Піка $P_n(f; z_1, \ldots, z_n)$ може бути досягнуто на наборах точок z_j шо лежать в Ω.

Якщо не обумовлене інше, то всі функції вважаються скалярними комплексно-значними. Символ * позначає комплексно спряжене число або комплексно спряжену матрицю.

7.1.2 Теорема 7.5: початок доведення. У цьому параграфі ми доводимо імплікацію **3** $\Rightarrow$ **1** Теореми 7.5. Ми почнемо з кількох попередніх лем.

Лема 7.10. Припустимо що матриця X розміру $m \times m$ має ранг $k < m$. В цьому випадку 0 є власним значенням матриці X. Припустимо що його кратність дорівнює $m-k$. Тоді існує невироджена головна підматриця матриці X розміру $k \times k$.

Доведення. В силу припущень, характеристичний поліном матриці X має вигляд $\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-k}\lambda^{m-k}$, где $a_{m-k} \neq 0$. Оскільки $\pm a_{m-k}$ є сумою всіх головних мінорів матриці X розміру $k \times k$, то хоча б один з них повинен бути відмінним від нуля. $\square$

Лема 7.11. Розглянемо ермітову матрицю X розміру $n \times n$. Тоді

1. sq_Y $\geq$ sq_X для будь-якої ермітової матриці $Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ в деякому околі X.

2. Якщо X' є головною підматрицею матриці X розміру $s \times s$, то

$$\text{sq\_}X' \leq \text{sq\_}X \leq \text{sq\_}X' + n - s. \tag{7.1.9}$$

3. Нехай $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$ це послідовність ермітових матриць така що sq_$X_m \leq k$ при $m = 1, 2, \ldots$, і $\lim\limits_{m\to\infty} X_m = X$, тоді також sq_$X \leq k$.

Доведення. Перше і третє твердження випливають з того що власні значення ермітової матриці неперервно залежать від її елементів. Друге твердження випливає з того що якщо X' головна підматриця матриці X розміру $(n-1)\times(n-1)$ (див., Наприклад, [57] Теорема 4.3.17, стор. 242) , то власні значення X' перемежовуються з власними значеннями X, отже

$$\text{sq\_}X - 1 \leq \text{sq\_}X' \leq \text{sq\_}X,$$

що є еквівалентним

$$\text{sq\_}X' \leq \text{sq\_}X \leq \text{sq\_}X' + 1.$$

Далі застосовуємо індукцію. $\square$

Лема 7.12. Припустимо що функція f визначена на множині $\mathbb{D} \setminus \Lambda$, де Λ це дискретна множина.

1. Якщо функція g визначена на множині $(\mathbb{D} \setminus \Lambda) \cup \{w_1, \ldots, w_k\}$, де $\{w_1, \ldots, w_k\} \subset \Lambda$ і $g(z) = f(z)$ для всіх $z \in \mathbb{D} \setminus \Lambda$, то

$$\mathbf{k}_n(f) \leq \mathbf{k}_n(g) \leq \max_{0\leq r\leq \min\{k,n\}} \{\mathbf{k}_{n-r}(f) + r\} \leq \mathbf{k}_n(f) + k, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{7.1.10}$$

2. Якщо функція g визначена на множині $\mathbb{D} \setminus \Lambda$, и $g(z) = f(z)$ для всіх $z \in \mathbb{D} \setminus \Lambda$, за винятком k різних точок $z_1, \dots z_k \in \mathbb{D} \setminus \Lambda$, то

$$\mathbf{k}_n(g) \leq \mathbf{k}_n(f) + k, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Доведення. Доведемо перше твердження. Перша нерівність в (7.1.10) випливає з визначення (7.1.3) $\mathbf{k}_n(f)$. Виберемо n різних точок $y_1, \dots, y_n$ в множині $(\mathbb{D} \setminus \Lambda) \cup \{w_1, \dots, w_k\}$, і припустимо що r з них містяться в множині $\{w_1, \dots w_k\}$. Для спрощення позначень припустимо що $y_1, \dots, y_r \in \{w_1, \dots w_k\}$. Маємо

$$P_n(g; y_1, \dots, y_n) = \begin{bmatrix} \times & \times \\ \times & P_{n-r}(f; y_{r+1}, \dots, y_n) \end{bmatrix},$$

де символ × позначає блоки які нас в даний момент не цікавлять. В силу (7.1.9),

$$\mathrm{sq}_{-} P_n(g; y_1, \dots, y_n) \leq \mathrm{sq}_{-} P_{n-r}(f; y_{r+1}, \dots, y_n) + r \leq \mathbf{k}_{n-r}(f) + r.$$

Друга і третя нерівності в (7.1.10) випливають з того що

$$0 \leq r \leq \min\{n, k\}.$$

Доведемо друге твердження. Розглянемо спочатку випадок $k = 1$. Виберемо довільно n різних точок $y_1, \dots, y_n$ в $\mathbb{D} \setminus \Lambda$. Тоді

$$P_n(g; y_1, \dots, y_n) = P_n(f; y_1, \dots, y_n) + Q, \tag{7.1.11}$$

де Q або нульова матриця (якщо $y_j \neq z_1$), або Q містить нульову головну підматрицю розміру $(n-1) \times (n-1)$ (якщо $y_j = z_1$ при деякому j). Ранг матриці Q не перевищує 2. Якщо Q знаковизначена (додатно або від'ємно), то всі її недіагональні елементи дорівнюють нулю, і, отже, її ранг не перевищує 1. Таким чином, якщо ранг Q дорівнює 2, то вона не може бути знаковизначеною, і, отже має одне від'ємне і одне додатне значення. Як ми бачимо, в будь-якому випадку Q має не більше одного від'ємного власного значення. Запишемо нерівність Вейля для власних значень суми ермітових матриць (див., наприклад, [57], Теорема 4.3.1, стр. 239)

$$\lambda_{i-j+1}(P) + \lambda_j(Q) \leq \lambda_i(P + Q),$$

где $1 \leq j \leq i \leq n$, $P = P_n(f; y_1, \ldots, y_n)$ і власні значення пронумеровані в порядку зростання. Зокрема, при $j = 2$

$$\lambda_{i-1}(P) + \lambda_2(Q) \leq \lambda_i(P + Q), \quad i \geq 2.$$

Оскільки $\lambda_2(Q) \geq 0$, то маємо

$$\lambda_{i-1}(P) \leq \lambda_i(P + Q), \quad i \geq 2.$$

Звідси випливає що якщо P має s невід'ємних власних значень, то $P + Q$ має як мінімум $s-1$ невід'ємне власне значення. Отже, для числа від'ємних власних значень має місце наступна нерівність

$$\mathrm{sq}_-(P + Q) \leq \mathrm{sq}_- P + 1.$$

Повертаючись до наших позначень, маємо

$$\mathrm{sq}_- P_n(g; y_1, \ldots, y_n) \leq \mathrm{sq}_- P_n(f; y_1, \ldots, y_n) + 1.$$

Далі застосовуємо індукцію. Зауважимо що оскільки в цьому твердженні функції f і g рівноправні, то має місце аналогічна нерівність з перестановкою f і g. □

Доведення імплікації $3 \Rightarrow 1$ *в Теоремі 7.5.* Припустимо що f визначена на множині $\mathbb{D} \backslash \Lambda$, де Λ є дискретним. Припустимо що (7.1.6) виконується при деякому цілому $n \geq 0$ і припустимо що множина

$$\mathcal{Z} = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{D} \backslash \Lambda$$

така що

$$\mathrm{sq}_- P_n(f;\, z_1, \ldots, z_n) = \kappa. \tag{7.1.12}$$

Покажемо що без обмеження загальності можна вважати що матриця

$$P_n(f;\, z_1, \ldots, z_n) = \left[\frac{1 - f(z_i) f(z_j)^*}{1 - z_i z_j^*} \right]_{i,j=1}^{n} \tag{7.1.13}$$

невироджена. Справді, якщо матриця (ref 2.1-bkr1-S) вироджена і її ранг дорівнює $m < n$, то за Лемою 7.10, існує $m \times m$ невироджена головна підматриця $P_m(f; z_{i_1}, \dots, z_{i_m})$ матриці (7.1.13). Тоді Шурівське доповнення $P_m(f; z_{i_1}, \dots, z_{i_m})$ в матриці (7.1.13) дорівнює нулю, і отже

$$\mathrm{sq}_- P_m(f;\, z_{i_1}, \dots, z_{i_m}) = \kappa.$$

А значить і $\mathbf{k}_m(f) = \kappa$. Але тоді, в силу (7.1.6) і неспадання послідовності $\{\mathbf{k}_j(f)\}_{j=1}^{\infty}$, отримуємо що $\mathbf{k}_{m+3}(f) = \kappa$. Тим самим доведення зводиться до невиродженого випадку з заміною n на m.

Отже, нехай матриця (7.1.13) є невиродженою. Для стислості будемо писати просто P замість $P_n(f;\, z_1, \dots, z_n)$. Має місце наступна тотожність

$$P - TPT^* = FJF^*, \tag{7.1.14}$$

де

$$T = \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & f(z_1) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & f(z_n) \end{bmatrix}. \tag{7.1.15}$$

Розглянемо 2×2 матрицю-функцію

$$\Theta(z) = I_2 - (1 - z)F^*(I_n - zT^*)^{-1}P^{-1}(I_n - T)^{-1}FJ \tag{7.1.16}$$

Тотожність (7.1.14) тягне (див., наприклад, [18, Розділ 7.1]) наступну рівність

$$J - \Theta(z)J\Theta(w)^* = (1 - zw^*)F^*(I_n - zT^*)^{-1}P^{-1}(I_n - w^*T)^{-1}F. \tag{7.1.17}$$

Зауважимо що $\Theta(z)$ є раціональною матрицею-функцією що приймає J–унітарні значення на колі $\mathbb{T}$: $\Theta(z)J\Theta(z)^* = J$ при $z \in \mathbb{T}$. Отже, в силу єдиності аналітичної функції, маємо

$$\Theta(z)^{-1} = J\Theta\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^* J = I_2 + (1 - z)F^*(I_n - T^*)^{-1}P^{-1}(zI_n - T)^{-1}FJ.$$

Звідси зокрема випливає що $\Theta(z)$ є оборотною в кожній точці $z \notin \mathcal{Z}$.

Оберемо довільним чином три точки ζ_1, ζ_2, $\zeta_3 \in \mathbb{D}\backslash\Lambda$. З одного боку (див. Лему 7.11)

$$\mathrm{sq}_- P_{n+3}(f;\, z_1, \dots, z_n, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \geq \mathrm{sq}_- P_n(f;\, z_1, \dots, z_n) = \kappa,$$

с іншого

$$\mathrm{sq}_-P_{n+3}(f;\, z_1,\ldots,z_n,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) \le \mathbf{k}_{n+3}(f) = \kappa.$$

Остання рівність виконується в силу припущення (7.1.6). Таким чином

$$\mathrm{sq}_-P_{n+3}(f;\, z_1,\ldots,z_n,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) = \kappa \tag{7.1.18}$$

для будь-якого набору точок ζ_1, ζ_2, $\zeta_3 \in \mathbb{D}\backslash\Lambda$. Запишемо матрицю (7.1.18) в блоковому вигляді

$$P_{n+3}(f;\, z_1,\ldots,z_n,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) = \begin{bmatrix} P & \Psi^* \\ \Psi & P_3(f;\, \zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) \end{bmatrix}, \tag{7.1.19}$$

де

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} \dfrac{1-f(\zeta_i)f(z_1)^*}{1-\zeta_i z_1^*} & \ldots & \dfrac{1-f(\zeta_i)f(z_n)^*}{1-\zeta_i z_n^*} \end{bmatrix} \ (i=1,2,3).$$

Формулу для Ψ_i може бути записано з використанням позначень (7.1.15) наступним чином

$$\Psi_i = [1 \quad -f(\zeta_i)]F^*(I_n - \zeta_i T^*)^{-1} \qquad (i=1,2,3). \tag{7.1.20}$$

В силу (7.1.12) і (7.1.18) маємо

$$P_3(f;\, \zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) - \Psi P^{-1}\Psi^* \ge 0,$$

або більш детально,

$$\left[\frac{1-f(\zeta_i)f(\zeta_j)^*}{1-\zeta_i\zeta_j^*} - \Psi_i P^{-1}\Psi_j^*\right]_{i,j=1}^{3} \ge 0. \tag{7.1.21}$$

В силу (7.1.20) і (7.1.17) маємо

$$\begin{aligned} &\frac{1-f(\zeta_i)f(\zeta_j)^*}{1-\zeta_i\zeta_j^*} - \Psi_i P^{-1}\Psi_j^* \\ &= [1 \quad -f(\zeta_i)]\left\{\frac{J}{1-\zeta_i\zeta_j^*} - F^*(I_n-\zeta_i T^*)^{-1}P^{-1}(I_n-\zeta_j^* T)^{-1}F\right\}\begin{bmatrix} 1 \\ -f(\zeta_j)^* \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.1.22}$$

$$= \ [1 \quad - f(\zeta_i)] \frac{\Theta(\zeta_i) J \Theta(\zeta_j)^*}{1 - \zeta_i \zeta_j^*} \begin{bmatrix} 1 \\ -f(\zeta_j)^* \end{bmatrix},$$

що дозволяє переписати (7.1.21) у вигляді

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & -f(\zeta_i) \end{bmatrix} \frac{\Theta(\zeta_i) J \Theta(\zeta_j)^*}{1 - \zeta_i \zeta_j^*} \begin{bmatrix} 1 \\ -f(\zeta_j)^* \end{bmatrix} \right]_{i,j=1}^{3} \geq 0. \tag{7.1.23}$$

Зокрема

$$\begin{bmatrix} 1 & -f(\zeta) \end{bmatrix} \frac{\Theta(\zeta) J \Theta(\zeta)^*}{1 - \zeta \zeta^*} \begin{bmatrix} 1 \\ -f(\zeta)^* \end{bmatrix} \geq 0 \tag{7.1.24}$$

для будь-якого $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \Lambda$. Запишемо Θ у вигляді 2×2 матриці

$$\Theta(z) = \begin{bmatrix} \theta_{11}(z) & \theta_{12}(z) \\ \theta_{21}(z) & \theta_{22}(z) \end{bmatrix}.$$

Зауважимо що

$$d(z) := \theta_{11}(z) - f(z)\theta_{21}(z) = \begin{bmatrix} 1 & -f(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{11}(z) \\ \theta_{21}(z) \end{bmatrix} \neq 0, \quad z \in \mathbb{D} \setminus (\mathscr{Z} \cup \Lambda). \tag{7.1.25}$$

Справді, припускаючи що $d(\zeta) = 0$ при деякому $\zeta \in \mathbb{D} \setminus (\mathscr{Z} \cup \Lambda)$, отримаємо що

$$\begin{bmatrix} 1 & -f(\zeta) \end{bmatrix} \frac{\Theta(\zeta) J \Theta(\zeta)^*}{1 - |\zeta|^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -f(\zeta)^* \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} 1 & -f(\zeta) \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} \theta_{12}(\zeta) \\ \theta_{22}(\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{12}(\zeta)^* & \theta_{22}(\zeta)^* \end{bmatrix}}{1 - |\zeta|^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -f(\zeta)^* \end{bmatrix} \leq 0,$$

що в поєднанні з (7.1.24) дає

$$\begin{bmatrix} 1 & -f(\zeta) \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} \theta_{12}(\zeta) \\ \theta_{22}(\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{12}(\zeta)^* & \theta_{22}(\zeta)^* \end{bmatrix}}{1 - |\zeta|^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -f(\zeta)^* \end{bmatrix} = 0,$$

тобто,

$$\begin{bmatrix} 1 & -f(\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{12}(\zeta) \\ \theta_{22}(\zeta) \end{bmatrix} = 0.$$

Останнє в поєднанні з припущенням $d(\zeta)=0$ дає

$$\begin{bmatrix} 1 & -f(\zeta) \end{bmatrix} \Theta(\zeta) = 0.$$

Таким чином $\Theta(\zeta)$ є виродженою. Однак, як ми помітили вище, $\Theta(z)$ оборотна в кожній точці $\zeta \notin \mathcal{Z}$. Це протиріччя доводить вірність (7.1.25).

Таким чином

$$\sigma(z) = \frac{\theta_{12}(z) - f(z)\theta_{22}(z)}{\theta_{21}(z)f(z) - \theta_{11}(z)} \tag{7.1.26}$$

визначена на множині $\mathbb{D} \backslash (\mathcal{Z} \cup \Lambda)$. Більш того,

$$\begin{bmatrix} 1 & -f(\zeta) \end{bmatrix} \Theta(\zeta) = -d(\zeta)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -\sigma(\zeta) \end{bmatrix}$$

і отже, нерівність (7.1.23) може бути записано в термінах функції σ

$$\left[d(\zeta_i)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -\sigma(\zeta_i) \end{bmatrix} \frac{J}{1-\zeta_i\zeta_j^*} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sigma(\zeta_j)^* \end{bmatrix} (d(\zeta_j)^*)^{-1} \right]_{i,j=1}^{3} \geq 0,$$

тобто, оскільки $d(\zeta_i) \neq 0$,

$$\left[\frac{1-\sigma(\zeta_i)\sigma(\zeta_j)^*}{1-\zeta_i\zeta_j^*} \right]_{i,j=1}^{3} \geq 0.$$

Остання нерівність означає що $P_3(\sigma;\, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \geq 0$ для будь-якого набору точок ζ_1, ζ_2, ζ_3 в $\mathbb{D} \backslash (\mathcal{Z} \cup \Lambda)$. В силу теореми Хіндмарша [55] (див. також [49]), $\sigma(z)$ продовжується до функції класу Шура на всьому крузі $\mathbb{D}$. З (7.1.26) випливає що f збігається з функцією

$$F(z) = \frac{\theta_{11}(z)\sigma(z) + \theta_{12}(z)}{\theta_{21}(z)\sigma(z) + \theta_{22}(z)}. \tag{7.1.27}$$

в кожній точці множини $z \in \mathbb{D} \setminus (\mathcal{Z} \cup \Lambda)$. Оскільки f не визначена на Λ, то F є (єдиним) мероморфним продовженням f. Однак, F не обов'язково збігається з f в точках $\mathcal{Z}$.

Зараз ми доведемо що $f \in \mathcal{S}_\kappa$. Для цього достатньо переконатися що

$$\operatorname{sq}_- P_{n+r}(f;\, z_1, \ldots, z_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_r) = \kappa \tag{7.1.28}$$

при довільному виборі точок $\zeta_1, \ldots, \zeta_r \in \mathbb{D} \setminus (\mathcal{Z} \cup \Lambda)$. Зауважимо що всі можливі "стрибки"функції f містяться в множині $\mathcal{Z}$, а у всіх інших точках

$\mathbb{D}\setminus\Lambda$ має місце збіг $f(\zeta)=F(\zeta)$. Запишемо тепер матрицю

$$P_{n+r}(f;\,z_1,\dots,z_n,\zeta_1,\dots,\zeta_r)=\begin{bmatrix} P & \mathbf{\Psi}^* \\ \mathbf{\Psi} & P_r(f;\,\zeta_1,\dots,\zeta_r)\end{bmatrix},$$

в блоковому вигляді, де

$$\mathbf{\Psi}=\begin{bmatrix}\Psi_1\\ \vdots \\ \Psi_r\end{bmatrix}$$

і Ψ_i визначені в (7.1.20) для $i=1,\dots,r$. Розглядаючи Шурівські доповнення, робимо висновок що

$$\mathrm{sq}_-P_{n+r}(f;\,z_1,\dots,z_n,\zeta_1,\dots,\zeta_r)=\mathrm{sq}_-P+\mathrm{sq}_-(P_r(f;\,,\zeta_1,\dots,\zeta_r)-\Psi P^{-1}\Psi^*). \tag{7.1.29}$$

Як показує обчислення (7.1.22),

$$P_r(f;\,\zeta_1,\dots,\zeta_r)-\Psi P^{-1}\Psi^*=\left[\begin{bmatrix}1 & -f(\zeta_i)\end{bmatrix}\frac{\Theta(\zeta_i)J\Theta(\zeta_j)^*}{1-\zeta_i\zeta_j^*}\begin{bmatrix}1\\ -f(\zeta_j)^*\end{bmatrix}\right]_{i,j=1}^{r}.$$

Останній вираз може бути записано в термінах σ и d, визначених у (7.1.26) і (7.1.25) відповідно, в такий спосіб

$$P_r(f;\,\zeta_1,\dots,\zeta_r)-\Psi P^{-1}\Psi^*=\left[d(\zeta_i)^{-1}\frac{1-\sigma(\zeta_i)\sigma(\zeta_j)^*}{1-\zeta_i\zeta_j^*}(d(\zeta_j)^*)^{-1}\right]_{i,j=1}^{r}.$$

Як ми показали вище, σ є функцією класу Шура, отже,

$$P_r(f;\,\zeta_1,\dots,\zeta_r)-\Psi P^{-1}\Psi^*\geq 0,$$

що тягне (7.1.28) з огляду на (7.1.29). □

7.1.3 Теорема 7.6: доведення.

Оскільки перша нерівність в (7.1.8) є очевидною, нам потрібно довести лише другу. Позначимо через $\tilde{f}$ мероморфну частину f. За Теоремою 7.2, $\tilde{f}\in\mathcal{S}_q$, і, отже, за Лемою 7.12, $\mathbf{k}_n(f)\leq q+\ell$, при $n=1,2,\dots$. Таким чином, досить показати що існують $q+2\ell$ різних точок $u_1,\dots,u_{q+2\ell}\in\mathrm{Dom}\,(f)$ таких що

$$\mathrm{sq}_-P_{q+2\ell}(f;u_1,\dots,u_{q+2\ell})\geq q+\ell.$$

Позначимо через

$$J_r(a) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 1 & a \end{bmatrix}, \qquad a \in \mathbb{C}$$

нижньо трикутний $r \times r$ Жорданів блок що відповідає власному значенню a. Розглянемо наступні вектори E_r і G_r в $\mathbb{C}^r$

$$E_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^r, \quad G_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^r. \tag{7.1.30}$$

Для довільного впорядкованого набору різних точок комплексної площини $\mathcal{Z} = \{z_1, \ldots, z_k\}$ визначимо нижньо трикутну $k \times k$ матрицю $\Phi(\mathcal{Z})$ наступним чином

$$\Phi(\mathcal{Z}) = [\Phi_{i,j}]_{i,j=1}^k, \qquad \Phi_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{\phi_i'(z_j)}, & \text{якщо } i \geq j, \\ 0, & \text{якщо } i < j, \end{cases} \tag{7.1.31}$$

де $\phi_i(z) = \prod_{j=1}^i (z - z_j)$. Далі, для цього ж набору точок $\mathcal{Z}$ і комплексної функції $v(z)$ визначимо рекурсивно розділені різниці $[z_1, \ldots, z_j]_v$

$$[z_1]_v = v(z_1), \qquad [z_1, \ldots, z_{j+1}]_v = \frac{[z_1, \ldots, z_j]_v - [z_2, \ldots, z_{j+1}]_v}{z_1 - z_{j+1}}, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Розглянемо наступні матриці і вектори:

$$D(\mathcal{Z}) = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_k \end{bmatrix}, \quad J(\mathcal{Z}) = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & z_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 1 & z_k \end{bmatrix},$$

$$v(\mathcal{Z}) = \begin{bmatrix} v(z_1) \\ v(z_2) \\ \vdots \\ v(z_k) \end{bmatrix}, \quad [\mathcal{Z}]_v = \begin{bmatrix} [z_1]_v \\ [z_1, z_2]_v \\ \vdots \\ [z_1, \dots, z_k]_v \end{bmatrix}. \tag{7.1.32}$$

Лема 7.13. Нехай $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_k\}$ це упорядкований набір різних точок, і нехай $\Phi(\mathcal{Z})$ визначена як в (7.1.31). Тоді:

$$\Phi(\mathcal{Z})D(\mathcal{Z}) = J(\mathcal{Z})\Phi(\mathcal{Z}) \qquad \text{і} \qquad \Phi(\mathcal{Z})v(\mathcal{Z}) = [\mathcal{Z}]_v. \tag{7.1.33}$$

Якщо функція $v(z)$ аналітична в точці $z_0 \in \mathbb{C}$, і розкладання Тейлора має вигляд $v(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k(z - z_0)^k$, то

$$\lim_{z_1, \dots, z_k \to z_0} \Phi(\mathcal{Z})v(\mathcal{Z}) = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \end{bmatrix}. \tag{7.1.34}$$

Доведення. Формули (7.1.33) перевіряються прямим обчисленням; формула (7.1.34) випливає з (7.1.33) оскільки

$$\lim_{z_i \to z_0,\ i=1,\dots,j} [z_1, \dots, z_j]_v = \frac{v^{(j-1)}(z_0)}{(j-1)!} = v_{j-1}, \quad j = 1, \dots, k.$$

□

Будемо позначати через $\operatorname{diag}(X_1, \dots, X_k)$ блоково-діагональну матрицю з діагональними блоками $X_1, \dots, X_k$ (в зазначеному порядку).

Лема 7.14. Нехай $w_1, \dots, w_k$ набір різних точок в $\mathbb{D}$, і нехай K єдиний розв'язок рівняння Стейна

$$K - AKA^* = EE^*, \tag{7.1.35}$$

де

$$A = \begin{bmatrix} J_{r_1}(w_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_k}(w_k) \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} E_{r_1} \\ \vdots \\ E_{r_k} \end{bmatrix} \tag{7.1.36}$$

и E_{r_j} визначені першою з формул (7.1.30). Тоді нормалізований добуток Бляшке

$$b(z) = e^{i\alpha} \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{z - w_j}{1 - z w_j^*} \right)^{r_j}, \qquad b(1) = 1, \tag{7.1.37}$$

допускає реалізацію

$$b(z) = 1 + (z-1) E^* (I - zA^*)^{-1} K^{-1} (I - A)^{-1} E, \tag{7.1.38}$$

а також має місце наступна формула:

$$1 - b(z)b(w)^* = (1 - zw^*) E^* (I - zA^*)^{-1} K^{-1} (I - w^* A)^{-1} E, \tag{7.1.39}$$

при $z, w \in \mathbb{D}$.

Доведення. По-перше, зауважимо що оскільки A^j прагне до нуля експоненціальним чином, то K може бути виражена таким збіжним рядом

$$K = \sum_{j=0}^{\infty} A^j E E^* (A^*)^j. \tag{7.1.40}$$

Оскільки пара (E^*, A^*) є спостережною, тобто

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} \operatorname{Ker} (E^* (A^*)^j) = \{0\},$$

то матриця K є додатно визначеною.

Ми хочемо перевірити (7.1.38). Позначимо праву частину цієї рівності через $\widetilde{b}(z)$

$$\widetilde{b}(z) = 1 + (z-1) E^* (I - zA^*)^{-1} K^{-1} (I - A)^{-1} E.$$

Тоді $1 - \widetilde{b}(z)\widetilde{b}(w)^*$ дорівнює правій частині (7.1.39)

$$1 - \widetilde{b}(z)\widetilde{b}(w)^* = (1 - zw^*) E^* (I - zA^*)^{-1} K^{-1} (I - w^* A)^{-1} E.$$

Це виходить прямим обчисленням з використанням тотожності (7.1.35) (Аналогічно тому як була отримана формула (7.1.17)). З останнього зокрема випливає що функція $\widetilde{b}$ є внутрішньою. Використовуючи той факт що $\det(I + XY) = \det(I + YX)$ для матриць X і Y розмірів $u \times v$ і $v \times u$ відповідно, з урахуванням тотожності (7.1.38) отримаємо:

$$\widetilde{b}(z) \;=\; \det \big(I + (z-1)(I - zA^*)^{-1} K^{-1} (I - A)^{-1} E E^* \big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \det\big(I + (z-1)(I - zA^*)^{-1}K^{-1}(I-A)^{-1}(K - AKA^*)\big)\\
&= \det\big((I - zA^*)^{-1}K^{-1}(I-A)^{-1}\big)\\
&\quad \times \det\left((I-A)K(I-zA^*) + (z-1)(K - AKA^*)\right)\\
&= \det\big((I - zA^*)^{-1}K^{-1}(I-A)^{-1}\big) \cdot \det\left((zI - A)K(I - A^*)\right)\\
&= c\,\frac{\det(zI-A)}{\det(I - zA^*)},
\end{aligned}
$$

де c деяке комплексне число, $|c| = 1$. Звідси видно що $\widetilde{b}(z)$ є раціональною функцією ступеня

$$r = \sum_{j=1}^{k} r_j$$

і що $\widetilde{b}(z)$ має нулі в точках $w_1, \ldots, w_k$ кратностей $r_1, \ldots, r_k$, відповідно. Оскільки $\widetilde{b}(1) = 1$, то функція $\widetilde{b}(z)$ дійсно збігається з добутком Бляшке (7.1.37). □

Відзначимо що результат Леми 7.14 відомий і для більш загального випадку матрично-значних функцій (див. [18, Раздел 7.4]).

Нехай тепер

$$
f(z) = \begin{cases} \dfrac{S(z)}{b(z)}, & \text{якщо } z \notin \{z_1, \ldots, z_\ell, w_{t+1}, \ldots, w_k\} \\ f_j, & \text{якщо } z = z_j, j = 1, \ldots, \ell \end{cases} \qquad (7.1.41)
$$

де $S(z)$ функція класу Шура що не дорівнює нулю в точках z_j, $b(z)$ добуток Бляшке (7.1.37). Точки $z_1, \ldots, z_\ell$ лежать в $\mathbb{D}$ і всі різні, точки $w_1, \ldots, w_k$ теж лежать в $\mathbb{D}$ і різні. Ми припускаємо що $w_j = z_j$ при $j = 1, \ldots, t$, $\{w_{t+1}, \ldots, w_k\} \cap \{z_{t+1}, \ldots, z_\ell\} = \emptyset$, і що $\dfrac{S(z_j)}{b(z_j)} \neq f_j$ при $j = t+1, \ldots, \ell$. Випадки коли $t = 0$, тобто, $\{w_1, \ldots, w_k\} \cap \{z_1, \ldots, z_\ell\} = \emptyset$, або коли $t = \min\{k, \ell\}$ не виключаються, проте в цих випадках формулювання що наведені нижче потребують природної модифікації.

Нехай $N = 2\ell + \sum_{j=1}^{k} r_j$. Виберемо N різних точок в одиничному крузі що згруповані в $k+2$ упорядкованих підмножини

$$\mathcal{M}_j = \{\mu_{j,1}, \dots, \mu_{j,r_j}\}, \ j = 1, \dots, k; \quad \mathcal{N} = \{\nu_1, \dots, \nu_\ell\}; \quad \mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_\ell\} \tag{7.1.42}$$

таким чином що $\mathcal{M}_j \cap \mathcal{W} = \emptyset$, $j = 1, \dots, k$, и $\mathcal{N} \cap \mathcal{W} = \emptyset$, где $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_k\}$. Розглянемо відповідну матрицю Піка

$$P = P_N(f; \mu_{1,1}, \dots, \mu_{k,r_k}, \nu_1, \dots, \nu_\ell, z_1, \dots, z_\ell).$$

Покажемо що якщо $\mu_{j,i}$ и ν_j достатньо близькі до w_j і z_j, відповідно, то sq_$P \geq N - \ell$. Безпосередньо перевіряється що P є єдиним розв'язком рівняння Стейна

$$P - TPT^* = G_N G_N^* - CC^* \tag{7.1.43}$$

де $G_N \in \mathbb{C}^N$ визначена в (7.1.30),

$$T = \begin{bmatrix} D(\mathcal{M}_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & D(\mathcal{M}_k) & & \\ & & & D(\mathcal{N}) & \\ & & & & D(\mathcal{Z}) \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} f(\mathcal{M}_1) \\ \vdots \\ f(\mathcal{M}_k) \\ f(\mathcal{N}) \\ f(\mathcal{Z}) \end{bmatrix}.$$

Нагадаємо що за визначенням (7.1.32) і з огляду на (7.1.41),

$$f(\mathcal{M}_j) = \begin{bmatrix} f(\mu_{j,1}) \\ \vdots \\ f(\mu_{j,r_j}) \end{bmatrix}, \quad f(\mathcal{N}) = \begin{bmatrix} f(\nu_1) \\ \vdots \\ f(\nu_\ell) \end{bmatrix}, \quad f(\mathcal{Z}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_\ell \end{bmatrix}.$$

Розглянемо матриці

$$B_j = \Phi(\mathcal{M}_j)\mathrm{diag}\,\big(b(\mu_{j,1}), \dots, b(\mu_{j,r_j})\big) \quad (j = 1, \dots, k).$$

Зауважимо що в силу Леми 7.13,

$$\begin{aligned} B_j D(\mathcal{M}_j) &= \Phi(\mathcal{M}_j) D(\mathcal{M}_j)\mathrm{diag}\,\big(b(\mu_{j,1}), \dots, b(\mu_{j,r_j})\big) \\ &= J(\mathcal{M}_j)\Phi(\mathcal{M}_j)\mathrm{diag}\,\big(b(\mu_{j,1}), \dots, b(\mu_{j,r_j})\big) \\ &= J(\mathcal{M}_j) B_j, \\ B_j f(\mathcal{M}_j) &= \Phi(\mathcal{M}_j) S(\mathcal{M}_j) = [\mathcal{M}_j]_S, \end{aligned}$$

$$B_j G_{r_j} \;=\; \Phi(\mathcal{M}_j) b(\mathcal{M}_j) = [\mathcal{M}_j]_b\,.$$

Три останніх рівності тягнуть (з огляду на блокову структуру матриць T, C і G_N)

$$BT = T_1 B, \quad Y_1 = BY, \quad \text{і} \quad C_1 = BC, \tag{7.1.44}$$

де

$$B = \operatorname{diag}\,(B_1, \dots, B_j,\, I_{2\ell}), \quad T_1 = \operatorname{diag}\,(J(\mathcal{M}_1), \dots, J(\mathcal{M}_k), D(\mathcal{N}), D(\mathcal{Z})), \tag{7.1.45}$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} [\mathcal{M}_1]_b \\ \vdots \\ [\mathcal{M}_k]_b \\ G_{2\ell} \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad C_1 \;=\; \begin{bmatrix} [\mathcal{M}_1]_S \\ \vdots \\ [\mathcal{M}_k]_S \\ f(\mathcal{N}) \\ f(\mathcal{Z}) \end{bmatrix}. \tag{7.1.46}$$

Помноживши зліва і справа (7.1.43) на B и B^*, відповідно, робимо висновок, з огляду на (7.1.44), що матриця $P_1 := BPB^*$ є єдиним розв'язком рівняння Стейна

$$P_1 - T_1 P_1 T_1^* = Y_1 Y_1^* - C_1 C_1^*, \tag{7.1.47}$$

де T_1, Y_1, і C_1 визначені в (7.1.45) і (7.1.46).

Нагадаємо що всі елементи в (7.1.47) залежать від $\mu_{j,i}$. Спрямуємо тепер $\mu_{j,i} \to w_j$, при $i = 1, \dots, r_j$, $j = 1, \dots, k$. Оскільки b має нуль порядку r_j в w_j, то з (7.1.34) випливає що

$$\lim_{\mu_{j,i} \to w_j} [\mathcal{M}_j]_b = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

і, отже,

$$Y_2 := \lim_{\mu_{j,i} \to w_j} Y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ G_{2\ell} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^N.$$

Аналогічно з (7.1.32) отримуємо

$$C_2 := \lim_{\mu_{j,i}\to w_j} C_1 = \begin{bmatrix} \widehat{S}_1 \\ \vdots \\ \widehat{S}_k \\ f(\mathcal{N}) \\ f(\mathcal{Z}) \end{bmatrix}, \quad \text{де} \quad \widehat{S}_j = \begin{bmatrix} S(w_j) \\ \frac{S'(w_j)}{1!} \\ \vdots \\ \frac{S^{(r_j-1)}(w_j)}{(r_j-1)!} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} s_{j,0} \\ s_{j,1} \\ \vdots \\ s_{j,r_{j-1}} \end{bmatrix}.$$

Переходячи до границі в (7.1.45) при $\mu_{j,i} \to w_j$, отримуємо

$$\begin{aligned} T_2 := \lim_{\mu_{j,i}\to w_j} T_1 &= \operatorname{diag}\left(J_{r_1}(w_1), \ldots, J_{r_k}(w_k), D(\mathcal{N}), D(\mathcal{Z})\right) \\ &= \operatorname{diag}\left(A, D(\mathcal{N}), D(\mathcal{Z})\right), \end{aligned}$$

де A визначена в (7.1.36). Оскільки три розглянутих вище границі існують, то також існує і границя

$$P_2 := \lim_{\mu_{j,i}\to w_j} P_1. \tag{7.1.48}$$

При цьому P_2 є єдиним розв'язком рівняння Стейна

$$P_2 - T_2 P_2 T_2^* = Y_2 Y_2^* - C_2 C_2^*. \tag{7.1.49}$$

Нехай нижньо трикутна Тьопліцева матриця $\mathcal{S}_j$ визначена наступним чином:

$$\mathcal{S}_j = \begin{bmatrix} s_{j,0} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ s_{j,1} & s_{j,0} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{j,r_j-2} & & \ldots & s_{j,0} & 0 \\ s_{j,r_j-1} & s_{j,r_j-2} & \ldots & s_{j,1} & s_{j,0} \end{bmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Вона оборотна оскільки $S(w_j) = s_{j,0} \neq 0$, $j = 1, \ldots, k$. Нехай

$$R := \operatorname{diag}(\mathcal{S}_1^{-1}, \ldots, \mathcal{S}_k^{-1}, I_{2\ell}) \quad \text{і} \quad C_3 = \begin{bmatrix} E \\ f(\mathcal{N}) \\ f(\mathcal{Z}) \end{bmatrix},$$

де вектор E визначено в (7.1.36). Блокова структура матриць R, T_2, C_2, C_3, E і Y_2 спільно з співвідношеннями

$$\mathcal{S}_j^{-1} J_{r_j}(w_j) = J_{r_j}(w_j) \mathcal{S}_j^{-1}, \quad \mathcal{S}_j^{-1} \widehat{S}_1 = E_{r_j} \quad (j = 1, \ldots, k),$$

тягнуть

$$RT_2 = T_2R, \qquad RC_2 = C_3 \quad \text{і} \quad RY_2 = Y_2.$$

З урахуванням останніх рівностей, помножимо (7.1.49) зліва на R і справа на R^*. В результаті отримаємо що матриця $P_3 := RP_2R^*$ є єдиним розв'язком рівняння Стейна

$$P_3 - T_2P_3T_2^* = Y_2Y_2^* - C_3C_3^*. \tag{7.1.50}$$

Приймемо наступні позначення

$$\mathcal{N}_1 = \{\nu_1, \dots, \nu_t\}, \qquad \mathcal{Z}_1 = \{z_1, \dots, z_t\},$$

$$\mathcal{N}_2 = \{\nu_{t+1}, \dots, \nu_\ell\}, \qquad \mathcal{Z}_2 = \{z_{t+1}, \dots, z_\ell\}.$$

За припущенням, $\mathcal{Z}_2 \cap \mathcal{W} = \emptyset$. Нехай $\nu_j \to z_j$ при $j = t+1, \dots, \ell$. Тоді

$$f(\mathcal{N}_2) \to \frac{S}{b}(\mathcal{Z}_2).$$

За припущенням,

$$\frac{S}{b}(z_j) \neq f(z_j), \qquad j = t+1, \dots, \ell. \tag{7.1.51}$$

Переходячи до границь в (7.1.50) при $\nu_j \to z_j$ $(j = t+1, \dots, \ell)$, приходимо до рівності

$$P_4 - T_3P_4T_3^* = Y_2Y_2^* - C_4C_4^*, \qquad P_4 := \lim_{\nu_j \to z_j,\ j=t+1,\dots,\ell} P_3, \tag{7.1.52}$$

де

$$T_3 = \operatorname{diag}\left(A, D(\mathcal{N}_1), D(\mathcal{Z}_2), D(\mathcal{Z}_1), D(\mathcal{Z}_2)\right), \quad C_4 = \begin{bmatrix} E \\ f(\mathcal{N}_1) \\ \frac{S}{b}(\mathcal{Z}_2) \\ f(\mathcal{Z}_1) \\ f(\mathcal{Z}_2) \end{bmatrix}.$$

В силу (7.1.51), матриця

$$L := \operatorname{diag}\left(\left(\frac{S}{b} - f\right)(z_{t+1}), \dots, \left(\frac{S}{b} - f\right)(z_\ell)\right)$$

оборотна. Покладемо

$$T_4 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D(\mathcal{Z}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D(\mathcal{Z}_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D(\mathcal{N}_1) \end{bmatrix}, \quad C_5 = \begin{bmatrix} E \\ G_{\ell-t} \\ f(\mathcal{Z}_1) \\ f(\mathcal{N}_1) \end{bmatrix}, \quad Y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ G_{2t} \end{bmatrix} \tag{7.1.53}$$

і

$$X = \begin{bmatrix} I_{N-2\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^{-1} & 0 & -L^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & I_t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Оскільки

$$XT_3 = T_4X, \quad XC_4 = C_5, \quad XY_2 = Y_3,$$

то якщо помножити (7.1.52) зліва на X і справа на X^*, то отримаємо що матриця $P_5 := XP_4X^*$ є єдиним розв'язком рівняння Стейна

$$P_5 - T_4P_5T_4^* = Y_3Y_3^* - C_5C_5^*. \tag{7.1.54}$$

В силу (7.1.53) і (7.1.54), P_5 має вигляд

$$P_5 = \left[\begin{array}{c|ccc} -K & Q_1^* & Q_2^* & Q_3^* \\ \hline Q_1 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ Q_2 & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ Q_3 & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{array}\right],$$

де K визначена в (7.1.40), а Q_j, $j = 1, 2, 3$ є розв'язками рівнянь

$$\begin{aligned} Q_1 - D(\mathcal{Z}_2)Q_1A^* &= -G_{\ell-t}E^*, \\ Q_2 - D(\mathcal{Z}_1)Q_2A^* &= -f(\mathcal{Z}_1)E^*, \\ Q_3 - D(\mathcal{N}_1)Q_3A^* &= -f(\mathcal{N}_1)E^*. \end{aligned}$$

Позначимо через $[Q_\alpha]_j$ j-ий рядок Q_α, $\alpha = 1, 2, 3$, маємо (нагадаємо що $w_j = z_j$ при $j = 1, \dots, t$):

$$[Q_1]_j = -E^*(I - z_{j+t}A^*)^{-1}, \qquad j = 1, \dots, \ell - t;$$

$$\begin{aligned}
[Q_2]_j &= -f_j E^*(I - w_j A^*)^{-1}, \qquad j = 1, \ldots, t; \\
[Q_3]_j &= -f(\nu_j) E^*(I - \nu_j A^*)^{-1}, \qquad j = 1, \ldots, t.
\end{aligned}$$

Далі, використовуємо (7.1.39) і з огляду на $b(w_j) = 0$, отримаємо наступні рівності

$$\begin{aligned}
[Q_1]_j K^{-1} [Q_1]_i^* &= \frac{1 - b(z_{t+j}) b(z_{t+i})^*}{1 - z_{t+j} z_{t+i}^*}, \quad j, i = 1, \ldots, \ell - t, \\
[Q_2]_j K^{-1} [Q_1]_i^* &= \frac{f_j}{1 - w_j z_{t+i}^*}, \quad j = 1, \ldots, t;\ i = 1, \ldots, \ell - t, \\
[Q_3]_j K^{-1} [Q_1]_i^* &= f(\nu_j) \frac{1 - b(\nu_j) b(z_{t+i})^*}{1 - \nu_j z_{t+i}^*}, \quad j = 1, \ldots, t;\ i = 1, \ldots, \ell - t, \\
[Q_2]_j K^{-1} [Q_2]_i^* &= \frac{f_j f_i^*}{1 - w_j w_i^*}, \quad j, i = 1, \ldots, t, \\
[Q_3]_j K^{-1} [Q_2]_i^* &= \frac{f(\nu_j) f_i^*}{1 - \nu_j w_i^*}, \quad j, i = 1, \ldots, t, \\
[Q_3]_j K^{-1} [Q_3]_i^* &= f(\nu_j) f(\nu_i)^* \frac{1 - b(\nu_j) b(\nu_i)^*}{1 - \nu_j \nu_i^*}, \quad j, i = 1, \ldots, t.
\end{aligned}$$

Розглянемо тепер Шурівське доповнення R в P_5

$$\left[R_{u,v} + Q_u K^{-1} Q_v\right]_{u,v=1}^3.$$

Для його блоків маємо наступні формули

$$\begin{aligned}
\left[R_{11} + Q_1 K^{-1} Q_1^*\right]_{ji} &= \frac{-1}{1 - z_{t+j} z_{t+i}^*} + \frac{1 - b(z_{t+j}) b(z_{t+i})^*}{1 - z_{t+j} z_{t+i}^*} \\
&= -\frac{b(z_{t+j}) b(z_{t+i})^*}{1 - z_{t+j} z_{t+i}^*}, \\
\left[R_{21} + Q_2 K^{-1} Q_1^*\right]_{ji} &= 0, \\
\left[R_{31} + Q_3 K^{-1} Q_1^*\right]_{ji} &= -\frac{f(\nu_j)}{1 - \nu_j z_{t+i}^*} + f(\nu_j) \frac{1 - b(\nu_j) b(z_{t+i})^*}{1 - \nu_j z_{t+i}^*} \\
&= -f(\nu_j) \frac{b(\nu_j) b(z_{t+i})^*}{1 - \nu_j z_{t+i}^*} \\
&= -\frac{S(\nu_j) b(z_{t+i})^*}{1 - \nu_j z_{t+i}^*},
\end{aligned}$$

$$\left[R_{22} + Q_2 K^{-1} Q_2^*\right]_{ji} = \frac{1 - f_j f_i^*}{1 - w_j w_i^*} + \frac{f_j f_i^*}{1 - w_j w_i^*} = \frac{1}{1 - w_j w_i^*},$$

$$\begin{aligned}\left[R_{32}+Q_3K^{-1}Q_2^*\right]_{ji} &= \frac{1-f(\nu_j)f_i^*}{1-\nu_j w_i^*}+\frac{f(\nu_j)f_i^*}{1-\nu_j w_i^*}=\frac{1}{1-\nu_j w_i^*},\\ \left[R_{33}+Q_3K^{-1}Q_3^*\right]_{ji} &= \frac{1-f(\nu_j)f(\nu_i)^*}{1-\nu_j\nu_i^*}+f(\nu_j)f(\nu_i)^*\frac{1-b(\nu_j)b(\nu_i)^*}{1-\nu_j\nu_i^*}\\ &= \frac{1-S(\nu_j)S(\nu_i)^*}{1-\nu_j\nu_i^*}.\end{aligned}$$

Перейдемо до границі в цьому Шурівському доповненні при $\nu_j\to w_j$ $(j=1,2,\ldots,t)$ і помножимо його зліва на матрицю $\begin{bmatrix} b(\mathcal{Z}_2)^{-1} & 0\\ 0 & I_{2t}\end{bmatrix}$ и справа на спряжену до неї. В результаті отримаємо

$$\begin{bmatrix} -K_{11} & 0 & K_{31}^*\\ 0 & K_{22} & K_{22}\\ K_{31} & K_{22} & \left[\dfrac{1-S(w_j)S(w_i)^*}{1-w_jw_i^*}\right]_{j,i=1}^{t}\end{bmatrix}, \tag{7.1.55}$$

де

$$K_{11}=\left[\frac{1}{1-z_{t+j}z_{t+i}^*}\right]_{j,i=1}^{\ell-t},\quad K_{22}=\left[\frac{1}{1-w_jw_i^*}\right]_{j,i=1}^{t},\quad K_{31}=\left[-\frac{S(w_j)}{1-w_jz_{t+i}^*}\right]_{j,i=1}^{t,\ell-t}. \tag{7.1.56}$$

Зауважимо що j-й рядок матриці K_{31}, $[K_{31}]_j$ може бути записаний у вигляді

$$[K_{31}]_j=S(w_j)G_{\ell-t}^*(I-w_jD(\mathcal{Z}_2)^*)^{-1}\quad (j=1,\ldots,t).$$

Застосуємо Лему 7.11 і з огляду на перетворення від P до P_5, що виконано вище, ми доведемо що $\mathrm{sq}_-P\geq N-\ell$ якщо переконаємося що Шурівське доповнення $\mathbf{S}$ блоку $\begin{bmatrix} -K_{11} & 0\\ 0 & K_{22}\end{bmatrix}$ в матриці (7.1.55) має не менше t від'ємних власних значень, тобто, є від'ємно визначеним. Це Шурівське доповнення дорівнює

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \left[\frac{1-S(w_j)S(w_i)^*}{1-w_jw_i^*}\right]_{j,i=1}^{t}+K_{31}K_{11}^{-1}K_{31}^*-K_{22} \qquad (7.1.57)\\ &= -\left[\frac{S(w_j)S(w_i)^*}{1-w_jw_i^*}\right]_{j,i=1}^{t}+K_{31}K_{11}^{-1}K_{31}^*\\ &= -\left[\frac{S(w_j)S(w_i)^*}{1-w_jw_i^*}-[K_{31}]_jK_{11}^{-1}\left([K_{31}]_i\right)^*\right]_{j,i=1}^{t}\end{aligned}$$

$$= -\left[\frac{S(w_j)S(w_i)^*}{1-w_jw_i^*} - S(w_j)G_{\ell-t}(I-w_jD(\mathcal{Z}_2)^*)^{-1}\times \right.$$
$$\left. \times K_{11}^{-1}(I-w_i^*D(\mathcal{Z}_2))^{-1}G_{\ell-t}^*S(w_i)^*\right]_{j,i=1}^{t}.$$

Розглянемо раціональну функцію

$$\vartheta(z) = 1+(z-1)G_{\ell-t}^*(I-zD(\mathcal{Z}_2)^*)^{-1}K_{11}^{-1}(I-D(\mathcal{Z}_2))^{-1}G_{\ell-t}. \quad (7.1.58)$$

Зауважимо що K_{11} задовольняє рівнянню Стейна

$$K_{11} - D(\mathcal{Z}_2)K_{11}D(\mathcal{Z}_2)^* = G_{\ell-t}G_{\ell-t}^*.$$

Покладемо $k = \ell - t$, $r_1 = \ldots = r_k = 1$ и виберемо точки $z_{t+1}, \ldots, z_\ell$ замість $w_1, \ldots, w_k$ в Лемі 7.14. Тоді отримаємо $A = D(\mathcal{Z}_2)$, $K = K_{11}$, $E = G_{\ell-t}$. Застосуємо Лему 7.14, і зробимо висновок що

$$\vartheta(z) = e^{i\alpha}\prod_{j=1}^{\ell-t}\frac{z-z_{t+j}}{1-zz_{t+j}^*}, \quad (7.1.59)$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$ вибрано так щоб забезпечити нормалізацію $\vartheta(1) = 1$. У цих позначеннях співвідношення (7.1.39) набирає вигляду

$$1-\vartheta(z)\vartheta(w)^* = (1-zw^*)G_{\ell-t}^*(I-zD(\mathcal{Z}_2)^*)^{-1}K_{11}^{-1}(I-w^*D(\mathcal{Z}_2))^{-1}G_{\ell-t}. \quad (7.1.60)$$

З (7.1.59) випливає що $Z(\vartheta) = \mathcal{Z}_2$ (більш детально, ϑ є раціональною функцією ступеня $\ell - t$ має прості нулі в точках $z_{t+1}, \ldots, z_\ell$). Оскільки $\mathcal{Z}_1 \cap \mathcal{Z}_2 = \emptyset$, то $\vartheta(w_j) \neq 0$, $j = 1, \ldots, t$. Використовуючи (7.1.60), перепишемо (7.1.58) у вигляді

$$\mathbf{S} = -\left[\frac{S(w_j)\vartheta(w_j)\vartheta(w_i)^*S(w_i)^*}{1-w_jw_i^*}\right]_{j,i=1}^{t}. \quad (7.1.61)$$

Так як $S(w_j)\vartheta(w_j) \neq 0$ $(j = 1, \ldots, t)$, то $\mathbf{S}$ від'ємно визначена. У підсумку маємо

$$\begin{aligned} \mathrm{sq}_-P \geq \mathrm{sq}_-P_5 &= \mathrm{sq}_-(-K) + \mathrm{sq}_-\begin{bmatrix} -K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22}\end{bmatrix} + \mathrm{sq}_-\mathbf{S} \\ &= (N-2\ell)+(\ell-t)+t = N-\ell. \end{aligned}$$

Що завершує доведення.

7.1.4 Теореми 7.5 та 7.9: доведення.

Доведення Теореми 7.5. Імплікацію **3** $\Rightarrow$ **1** вже було доведено, імплікація **1** $\Rightarrow$ **3** випливає з визначення $\mathcal{S}_\kappa$. Припустимо що виконується **2**, припустимо що $\tilde{f}$ стандартна функція яка продовжує f як описано в **2**. За Теоремою 7.6, $\tilde{f} \in \mathcal{S}_\kappa$. Тоді, за визначенням $\mathcal{S}_\kappa$, $f \in \mathcal{S}_{\kappa'}$ з деяким $\kappa' \leq \kappa$. Однак, за Зауваженням 7.8, $\kappa' = \kappa$. Тим самим **1** доведено.

Залишається довести імплікацію **3** $\Rightarrow$ **2**. Припустимо що f задовольняє **3**. Міркуючи так само як і при доведенні **3** $\Rightarrow$ **1**, побудуємо мероморфну функцію $F(z)$, яка може бути виражена формулою (7.1.27), при цьому $F(z) = f(z)$ для $z \in \mathbb{D} \setminus (\mathcal{Z} \cup \Lambda)$ (тут ми використовуємо ті ж позначення що і при доведенні **3** $\Rightarrow$ **1**). Так як імплікацію **3** $\Rightarrow$ **1** вже доведено, то ми знаємо що $f \in \mathcal{S}_\kappa$. В силу другого твердження Леми 7.12, $\tilde{F} \in \mathcal{S}_{\kappa'}$ при деякому $\kappa' \leq \kappa + n$, де $\tilde{F}$ це обмеження F на множину $\mathbb{D} \setminus (\mathcal{Z} \cup \Lambda)$. В силу неперервності (Твердження 7.11), функція F, коли розглянута на своїй природній області визначення $\mathbb{D} \setminus P(F)$, де $P(F)$ це множина полюсів F, теж належить $\mathcal{S}_{\kappa'}$. Застосовуючи Теорему 7.2, запишемо $F = \frac{S}{B}$, де S функція класу Шура, B добуток Бляшке ступеня κ', S і B не мають спільних нулів. Таким чином, f допускає продовження до стандартної функції $\tilde{f}$ з κ' полюсами і ρ стрибками, де ρ деяке невід'ємне ціле число. За Теоремою 7.6 і Зауваженням 7.8,

$$\mathbf{k}_m(f) = \kappa' + \rho, \qquad \text{для всіх} \;\; m \geq \kappa' + 2\rho. \tag{7.1.62}$$

З іншого боку, оскільки $f \in \mathcal{S}_\kappa$, то $\mathbf{k}_n(f) = \kappa$ для всіх достатньо великих n. Порівнюючи останню рівність з (7.1.62), бачимо що $\kappa' + \rho = \kappa$. Тим самим **2** доведено. □

Доведення Теореми 7.9. Якщо $f \in \mathcal{S}_\kappa$ і $\tilde{f}$ є стандартним продовженням f (як описано в твердженні **2** Теореми 7.5), то, за Теоремою 7.6,

$$N(f) \leq N(\tilde{f}) \leq 2\kappa.$$

Якщо $\mathbf{k}_{2\kappa}(f) = \mathbf{k}_{2\kappa+3}(f) = \kappa$, то властивість **3** Теореми 7.5 виконується. Отже, $f \in \mathcal{S}_\kappa$, за Теоремою 7.5. □

7.1.5 Локальний результат. Нехай $\Omega \subseteq \mathbb{D}$ є деяка відкрита підмножина. Припустимо що область визначення функції f містить множину Ω. Покладемо

$$\mathbf{k}_n(f;\Omega) := \max_{z_1,\ldots,z_n\in\Omega} \mathrm{sq}_- P_n(f;\, z_1,\ldots,z_n).$$

Відомий локальний результат (див. [11, Theorem 1.1.4]) стверджує що для будь-якої мероморфної функції f класу $\mathcal{S}_\kappa$ і для будь-якої відкритої множини $\Omega \subseteq \mathbb{D}$ яка не містить полюси f, існує ціле число n таке що $\mathbf{k}_n(f;\Omega) = \kappa$. Однак, на відміну від глобального випадку (Теорема 7.6), мінімальне таке n може бути як завгодно великим. Це можна побачити на наступному прикладі.

Приклад 7.15. Зафіксуємо ціле додатне число n і розглянемо функцію

$$f_n(z) = \frac{z^n(2-z)}{2z-1} = \frac{S(z)}{b(z)},$$

де $S(z) = z^n$ функція класу Шура і $b(z) = \frac{z-1/2}{1-z/2}$ множник Бляшке. За Теоремою 7.2, $f_n \in \mathcal{S}_1$, тобто, ядро

$$K(z,w) := \frac{1-f_n(z)f_n(w)^*}{1-zw^*} = 1+zw^*+\ldots+z^{n-1}(w^*)^{n-1} - \frac{3z^n(w^*)^n}{(2z-1)(2w^*-1)}$$

має один від'ємний квадрат в $\mathbb{D}\setminus\{\frac{1}{2}\}$. Оберемо n різних точок $\mathcal{Z} = \{z_1,\ldots,z_n\}$ в околі нуля. Помножимо матрицю Піка $P_n(f;z_1,\ldots,z_n)$ зліва на $\Phi(\mathcal{Z})$ і справа на $\Phi(\mathcal{Z})^*$, де $\Phi(\mathcal{Z})$ визначена в (7.1.31). За Лемою 7.13,

$$\lim_{z_1,\ldots,z_n\to 0} \Phi(\mathcal{Z})P_n(f;z_1,\ldots,z_n)\Phi(\mathcal{Z})^* = \left[\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}\left(\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i\partial(w^*)^j}K(z,w)\right)_{z,w=0}\right]_{i,j=0}^{n-1}. \tag{7.1.63}$$

Остання матриця є одиничною, зокрема додатно визначеною. За Лемою 7.11, існує $\delta_n > 0$ така що $P_n(f;z_1,\ldots,z_n) \geq 0$ при $|z_1|,\ldots,|z_n| < \delta_n$.

З іншого боку, оскільки

$$\left.\frac{\partial^{2n}}{\partial z^n\partial(w^*)^n}K(z,w)\right|_{z,w=0} = -3,$$

то вибираючи $n+1$ різних точок $\mathcal{Z}' = \{z_1, \ldots, z_{n+1}\}$ в околі нуля, аналогічно (7.1.63), отримаємо

$$\begin{aligned}
&\lim_{z_1,\ldots,z_{n+1}\to 0} \Phi(\mathcal{Z}')P_{n+1}(f; z_1, \ldots, z_{n+1})\Phi(\mathcal{Z}')^* \\
&= \left[\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}\left(\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial (w^*)^j} K(z,w)\right)_{z,w=0}\right]_{i,j=0}^{n} \\
&= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Знову за Лемою 7.11, існує $\delta_n' > 0$ така що $P_{n+1}(f; z_1, \ldots, z_{n+1})$ має одне від'ємне власне значення якщо $|z_1|, \ldots, |z_{n+1}| < \delta_n'$.

Аргументи використані в доведенні Теореми 7.5 дозволяють поширити локальний результат на немероморфні функції класу $\mathcal{S}_\kappa$:

Теорема 7.16. Припустимо що $f \in \mathcal{S}_\kappa$ визначена в $\mathbb{D} \setminus \Lambda$, де Λ дискретна множина, тоді для будь-якої відкритої множини $\Omega \subseteq \mathbb{D} \setminus \Lambda$ існує ціле додатне n таке що

$$\mathbf{k}_n(f; \Omega) = \kappa' := q + \ell_\Omega, \tag{7.1.64}$$

де ℓ_Ω число стрибків функції f які потрапляють в Ω а q число полюсів f в $\mathbb{D}$ з урахуванням кратності.

Зауважимо що, з огляду на імплікацію **1** $\Leftrightarrow$ **2** Теореми 7.5, f допускає продовження до стандартної функції з q полюсами і ℓ стрибками; $\kappa = q+\ell$. Нехай $\widetilde{f}$ виходить з f усуненням стрибків що лежать поза Ω. Тоді, знову з огляду на імплікацію **1** $\Leftrightarrow$ **2** Теореми 7.5, $\widetilde{f}$ лежить в $S_{\kappa'}$ з $\kappa' = q + \ell_\Omega = \kappa - \ell_{\Omega^c}$, де ℓ_Ω і ℓ_{Ω^c} число стрибків f в Ω і в доповненні до Ω, відповідно; $\ell_\Omega + \ell_{\Omega^c} = \ell$. Оскільки $f = \widetilde{f}$ в Ω, то

$$\mathbf{k}_m(f; \Omega) = \mathbf{k}_m(\widetilde{f}; \Omega) \leq \kappa' = q + \ell_\Omega, \tag{7.1.65}$$

для будь-якого цілого $m > 0$.

Доведення. З огляду на Теорему 7.5, без обмеження загальності можна вважати що f стандартна функція. Також можемо вважати що f не має стрибків поза Ω, оскільки значення f в стрибках поза Ω не впливають на $\mathbf{k}_m(f;\Omega)$.

Нехай $w_1,\dots,w_k$ різні полюси f в Ω порядків $r_1,\dots,r_k$, відповідно, і нехай $z_1,\dots,z_{ell}$ це стрибки f. За аналогією з (7.1.41) можна сказати що

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\widehat{S}(z)}{b(z)} & \text{якщо } z\notin\{z_1,\dots,z_\ell,w_{t+1},\dots,w_k\}\\ f_j & \text{якщо } z=z_j, j=1,\dots,\ell\end{cases}\tag{7.1.66}$$

де $b(z)$ добуток Бляшке з р нулями $w_1,\dots,w_k$ порядків $r_1,\dots,r_k$, відповідно (див. (7.1.37)). Припустимо, що $w_j=z_j$ при $j=1,\dots,t$, що $\{w_{t+1},\dots,w_k\}\cap\{z_{t+1},\dots,z_\ell\}=\emptyset$ і що $\widehat{S}(z_j)/b(z_j)\neq f_j$ при $j=t+1,\dots,\ell$. Функція $\widehat{S}(z)$ має вигляд $\widehat{S}(z)=S(z)/b_1(z)$, де $S(z)$ функція класу Шура, яка не дорівнює нулю в точках $w_1,\dots,w_k$, а $b_1(z)$ добуток Бляшке, побудований за полюсами f (з урахуванням кратності), які лежать поза Ω. Нехай $N=2\ell+\sum\limits_{j=1}^{k}r_j$. Оберемо N різних точок як в (7.1.42), з додатковою умовою що всі ці точки лежать в Ω. Виберемо ще n різних точок $\Xi=\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$, $\xi_j\in\Omega$, відмінних від (7.1.42), в околі деякої точки $z_0\in\Omega$; припускаємо що f аналітична в z_0. Кількість точок ξ_j і їх вибір будуть більш конкретно описані нижче. Розглянемо матрицю Піка

$$P=P_{N+n}(f;\mu_{j,i},\nu_1,\dots,\nu_\ell,z_1,\dots,z_\ell,\xi_1,\dots,\xi_n).$$

Тут ми повторимо міркування наведені між формулами (7.1.42) s (7.1.55) при доведенні Теореми 7.6, у застосуванні до лівого верхнього блоку розміру $N\times N$ матриці P. В результаті отримаємо наступну блочну матрицю

$$P_6=\begin{bmatrix}-K_{11} & 0 & K_{31}^* & K_{41}^*\\ 0 & K_{22} & K_{22} & K_{42}^*\\ K_{31} & K_{22} & K_{33} & K_{43}^*\\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44}\end{bmatrix},\tag{7.1.67}$$

де K_{11}, K_{22} і K_{31} такі ж як в (7.1.56), а

$$K_{41} = \left[-\frac{\widehat{S}(\xi_j)}{1-\xi_j z_{t+i}^*}\right]_{j,i=1}^{n,\ell-t},\quad K_{42}=\left[\frac{1}{1-\xi_j w_i^*}\right]_{j,i=1}^{n,\ell-t},$$

$$K_{43} = \left[\frac{1-\widehat{S}(\xi_j)\widehat{S}(w_i)^*}{1-\xi_j w_i^*}\right]_{j,i=1}^{n,\ell-t}, \quad K_{44} = \left[\frac{1-\widehat{S}(\xi_j)\widehat{S}(\xi_i)^*}{1-\xi_j \xi_i^*}\right]_{j,i=1}^{n},$$

$$K_{33} = \left[\frac{1-\widehat{S}(w_j)\widehat{S}(w_i)^*}{1-w_j w_i^*}\right]_{j,i=1}^{t}.$$

Розміри матриць K_{11}, K_{22}, K_{33} і K_{44} дорівнюють $(\ell-t)\times(\ell-t)$, $t\times t$, $t\times t$ і $n\times n$, відповідно. Звідси слідує що

$$\mathrm{sq}_- P \geq N - 2\ell + \mathrm{sq}_- P_6 = \sum_{j=1}^{k} r_j + \mathrm{sq}_- P_6. \tag{7.1.68}$$

Нехай $\mathbf{S}$ це Шурівське доповнення блоку $\begin{bmatrix} -K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix}$ в (7.1.67):

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\mathrm{sq}_- P_6 = \ell - t + \mathrm{sq}_- \mathbf{S}. \tag{7.1.69}$$

Блок $\mathbf{S}_{22}$ матриці $\mathbf{S}$ виражається формулою

$$\mathbf{S}_{22} = K_{44} - K_{42}K_{22}^{-1}K_{42}^* + K_{41}K_{11}^{-1}K_{41}^*.$$

Для решти блоків, за аналогією з (7.1.58) і (7.1.61, отримуємо

$$\mathbf{S}_{11} = -\left[\frac{\widehat{S}(w_j)\vartheta(w_j)\vartheta(w_i)^*\widehat{S}(w_i)^*}{1-w_j w_i^*}\right]_{j,i=1}^{t}, \tag{7.1.70}$$

$$\mathbf{S}_{21} = -\left[\frac{\widehat{S}(\xi_j)\vartheta(\xi_j)\vartheta(w_i)^*\widehat{S}(w_i)^*}{1-\xi_j w_i^*}\right]_{j,i=1}^{t,n},$$

де раціональна функція ϑ визначена формулою (7.1.58). Зауважимо що $\widehat{S}(w_i)\vartheta(w_i)\neq 0$, $i=1,\dots,t$.

Помножимо $\mathbf{S}$ зліва на матрицю

$$\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\widehat{S}(w_1)\vartheta(w_1)},\dots,\frac{1}{\widehat{S}(w_t)\vartheta(w_t)}, I\right) \tag{7.1.71}$$

і справа на спряжену до (7.1.71). В результаті отримаємо

$$P_7 = \begin{bmatrix} -\left[\dfrac{1}{1-w_j w_i^*}\right]_{j,i=1}^{t} & \left(-\left[\dfrac{\widehat{S}(\xi_j)\vartheta(\xi_j)}{1-\xi_j w_i^*}\right]_{j,i=1}^{n,t}\right)^* \\ -\left[\dfrac{\widehat{S}(\xi_j)\vartheta(\xi_j)}{1-\xi_j w_i^*}\right]_{j,i=1}^{n,t} & K_{44} - K_{42}K_{22}^{-1}K_{42}^* + K_{41}K_{11}^{-1}K_{41}^* \end{bmatrix}. \tag{7.1.72}$$

Нарешті, розглянемо Шурівські доповнення, які позначимо через P_8, блоку $-\left[\dfrac{1}{1-w_j w_i^*}\right]_{j,i=1}^{t}$ в матриці P_7. Тоді

$$\mathrm{sq\_}\mathbf{S} = t + \mathrm{sq\_}P_8. \tag{7.1.73}$$

Елемент з індексом (j,i) в P_8 обчислюється як

$$\frac{1-\widehat{S}(\xi_j)\widehat{S}(\xi_i)^*}{1-\xi_j\xi_i^*} - G_{\ell-t}^*(I-\xi_j D(\mathcal{W}_1)^*)^{-1}K_{22}^{-1}(I-\xi_i^* D(\mathcal{W}_1))^{-1}G_{\ell-t}$$
$$+\widehat{S}(\xi_j)G_{\ell-t}^*(I-\xi_j D(\mathcal{Z}_2)^*)^{-1}K_{11}^{-1}(I-\xi_i^* D(\mathcal{Z}_2))^{-1}G_{\ell-t}\widehat{S}(\xi_i)^*$$
$$+\widehat{S}(\xi_j)\vartheta(\xi_j)G_{\ell-t}^*(I-\xi_j D(\mathcal{W}_1)^*)^{-1}K_{22}^{-1}(I-\xi_i^* D(\mathcal{W}_1))^{-1}G_{\ell-t}\vartheta(\xi_i)^*\widehat{S}(\xi_i)^*.$$

Оскільки

$$K_{22} - D(\mathcal{W}_1)K_{22}D(\mathcal{W}_1)^* = G_{\ell-t}G_{\ell-t}^*,$$

робимо висновок (так само як це було зроблено для функції ϑ що було визначено за формулою (7.1.58)), що раціональна функція

$$\widehat{\vartheta}(z) = 1 + (z-1)G_{\ell-t}^*(I - zD(\mathcal{W}_1)^*)^{-1}K_{22}^{-1}(I - D(\mathcal{W}_1))^{-1}G_{\ell-t}$$

є внутрішньою і її множина нулів $Z(\widehat{\vartheta})$ збігається з $\mathcal{W}_1$: $Z(\widehat{\vartheta}) = \mathcal{W}_1$. Використовуючи (7.1.60) і формулу

$$1 - \widehat{\vartheta}(z)\widehat{\vartheta}(w)^* = G_{\ell-t}^*(I - zD(\mathcal{W}_1)^*)^{-1}K_{22}^{-1}(I - w^*D(\mathcal{W}_1))^{-1}G_{\ell-t},$$

отримаємо, аналогічно (7.1.60), вираз для (j,i) - го елементу P_8:

$$\frac{1-\widehat{S}(\xi_j)\widehat{S}(\xi_i)^*}{1-\xi_j\xi_i^*} - \frac{1-\widehat{\vartheta}(\xi_j)\widehat{\vartheta}(\xi_i)^*}{1-\xi_j\xi_i^*} + \widehat{S}(\xi_j)\frac{1-\vartheta(\xi_j)\vartheta(\xi_i)^*}{1-\xi_j\xi_i^*}\widehat{S}(\xi_i)^*$$
$$+\widehat{S}(\xi_j)\vartheta(\xi_j)\frac{1-\widehat{\vartheta}(\xi_j)\widehat{\vartheta}(\xi_i)^*}{1-\xi_j\xi_i^*}\vartheta(\xi_i)^*\widehat{S}(\xi_i)^*$$

$$= \widehat{\vartheta}(\xi_j)\frac{1-\widehat{S}(\xi_j)\vartheta(\xi_j)\vartheta(\xi_i)^*\widehat{S}(\xi_i)^*}{1-\xi_j\xi_i^*}\widehat{\vartheta}(\xi_i)^*.$$

Тепер виберемо точку $z_0 \in \Omega$, в околі якої вибираються точки Ξ, так щоб $\widehat{\vartheta}(z_0) \neq 0$. Тоді, при достатньо малому розмірі околу, також $\widehat{\vartheta}(\xi_j) \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Множення P_8 зліва на матрицю $\operatorname{diag}(\widehat{\vartheta}(\xi_1)^{-1}, \ldots, \widehat{\vartheta}(\xi_n)^{-1})$ і справа на спряжену приводить до матриці

$$P_9 = \left[\frac{1-T(\xi_j)T(\xi_i)^*}{1-\xi_j\xi_i^*}\right]_{j,i=1}^n,$$

где $T(z) = \widehat{S}(z)\vartheta(z)$. Маємо

$$\mathrm{sq}_-P_8 = \mathrm{sq}_-P_9 \tag{7.1.74}$$

Зауважимо що $T(z)$ є мероморфною функцією з полюсами що лежать поза Ω. В силу [11, Theorem 1.1.4], існує натуральне n і точки $\xi_1, \ldots, \xi_n$ в околі z_0 такі що P_9 має $q - \sum\limits_{j=1}^{k} r_j$ (число полюсів $T(z)$) від'ємних власних значень. При такому виборі ξ_j, комбінуючи (7.1.68), (7.1.69), (7.1.73) і (7.1.74), отримаємо що

$$\mathrm{sq}_-P \geq q + \ell.$$

Ця нерівність разом зі зворотною нерівністю (7.1.65) тягнуть рівність (7.1.64). □

7.2 Задача Неванлінни-Піка у розширеному класі Крейна–Лангера: стандартні розв'язки

В цьому розділі вивчається інтерполяційна задача Неванлінни-Піка в розширеному класі Крейна-Лангера $\mathbf{S}_\kappa$ (див. Визначення 7.1 в Розділі 7.1.1). Показано що при розв'язанні задачі в цьому класі, природна формула для розв'язків не дає " сторонніх функцій ", як це має місце якщо допускаються тільки мероморфні розв'язки. Крім того показано що в разі виродження задача має єдиний розв'язок, який не обов'язково є мероморфним. Також розглядається задача продовження функції класу $\mathbf{S}_\kappa$ до максимальної функції цього класу.

7.2.1 Позначення та основні результати.

Відомо що функції f класу $\mathcal{S}_0$ допускають продовження до функцій класу *Шура.* Надалі клас функцій Шура в одиничному крузі також будемо позначати через $\mathcal{S}_0$.

Інтерполяційні задачі розглядалися раніше тільки для мероморфних функцій класу $\mathcal{S}_\kappa$: Задача Шура-Такагі [7], Задача Неванлінни-Піка [82], [52], [19]. Як було показано в [18, Раздел 19.3], при такій постановці природна формула, що параметризує розв'язки, дає " зайві розв'язки ". Це питання також розглядалося в [47]. Як ми показуємо в цьому розділі, якщо не обмежуватися тільки мероморфними функціями класу $\mathcal{S}_\kappa$, то зайвих розв'язків не буде.

Отже, в цьому розділі розглядається наступна задача $\mathbf{NP}_\kappa$: *Задані точки* $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{D}$ *и комплексні числа* $F_1, \ldots, F_k$, *знайти всі функції* $F \in \mathcal{S}_\kappa$ *(не обов'язково мероморфні) такі що* $z_1, \ldots, z_k$ *належать області визначення* F *і*

$$F(z_i) = F_i, \qquad (i = 1, \ldots, k). \tag{7.2.1}$$

Для будь-якого розв'язку F задачі $\mathbf{NP}_\kappa$ матриця Піка $P_k(F;\, z_1, \ldots, z_k)$ має вигляд

$$P = \left[\frac{1 - F_i F_j^*}{1 - z_i z_j^*} \right]_{i,j=1}^{k}. \tag{7.2.2}$$

Ця матриця залежить тільки від даних інтерполяції. Будемо називати її *матрицею Піка* задачі $\mathbf{NP}_\kappa$. Зауважимо що P є єдиним розв'язком рівняння Стейна

$$P - TPT^* = EE^* - CC^*, \tag{7.2.3}$$

де

$$T = \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_k \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \end{bmatrix}. \tag{7.2.4}$$

Якщо існує $F \in \mathcal{S}_\kappa$ яка задовольняє інтерполяційним умовам (7.2.1), то $\mathrm{sq}_-(P) \le \kappa$. Таким чином це необхідна умова існування розв'язку задачі

$\mathbf{NP}_\kappa$. З іншого боку відомо (див. [18, Розділ 19.3]) що якщо

$$\operatorname{sq}_-(P) = \kappa \quad \text{i} \quad \det P \neq 0, \tag{7.2.5}$$

то задача $\mathbf{NP}_\kappa$ має нескінченно багато мероморфних розв'язків, які параметризовані дробово-лінійним перетворенням. Ми наведемо тут точне формулювання цього результату. Визначимо 2×2 матрично-значну функцію

$$\begin{aligned}\Theta(z) &= \begin{bmatrix} \Theta_{11}(z) & \Theta_{12}(z) \\ \Theta_{21}(z) & \Theta_{22}(z) \end{bmatrix} \\ &= I_2 + (z-1)\begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix}(I - zT^*)^{-1}P^{-1}(I-T)^{-1}\begin{bmatrix} E & -C \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{7.2.6}$$

Вона є J -унітарною на $\mathbb{T}$ відносно метрики

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

тобто, $\Theta(z)J\Theta(z)^* = J$ при $z \in \mathbb{T}$. Дійсно, використовуючи визначення (7.2.6), стандартним обчисленням отримуємо

$$\begin{aligned}J - \Theta(z)J\Theta(w)^* &= \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix}(I - zT^*)^{-1}P^{-1}(I-T)^{-1} \times \\ &\times L(z,w)(I-T^*)^{-1}P^{-1}(I-w^*T)^{-1}\begin{bmatrix} E & C \end{bmatrix},\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}L(z,w) &= (1-z)(I-w^*T)P(I-T^*) + (1-w^*)(I-T)P(I-zT^*) \\ &- (1-z)(1-w^*)(EE^* - CC^*) \\ &= (1-zw^*)(I-T)P(I-T^*).\end{aligned}$$

В останній рівності використано тотожність (7.2.3). Отже,

$$J - \Theta(z)J\Theta(w)^* = (1-zw^*)\begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix}(I - zT^*)^{-1}P^{-1}(I-w^*T)^{-1}\begin{bmatrix} E & C \end{bmatrix} \tag{7.2.7}$$

виконується всюди де Θ визначена. Зауважимо ще що

$$\det\Theta(z) = \prod_{j=1}^{k} \frac{(z-z_j)(1-z_j^*)}{(1-zz_j^*)(1-z_j)} \tag{7.2.8}$$

и отже $\Theta(z)$ є оборотною при кожному $z \in \mathbb{D} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$. Відомий такий факт

Теорема 7.17 ([18], Розділ 19.3)**.** Нехай матриця Піка P задачі $\mathbf{NP}_\kappa$ задовольняє умовам (7.2.5) і нехай матриця-функція Θ визначена за формулою (7.2.6). Тоді все мероморфні розв'язки F задачі $\mathbf{NP}_\kappa$ параметризовані наступним чином

$$F(z) = \mathbf{T}_\Theta[\mathcal{E}] := \frac{\Theta_{11}(z)\mathcal{E}(z) + \Theta_{12}(z)}{\Theta_{21}(z)\mathcal{E}(z) + \Theta_{22}(z)}, \tag{7.2.9}$$

де $\mathcal{E}$ це довільна функція класу Шура така що

$$\Theta_{21}(z_i)\mathcal{E}(z_i) + \Theta_{22}(z_i) \neq 0 \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{7.2.10}$$

Можна показати що з невиродженості P випливає існування нескінченного числа функцій класу Шура $\mathcal{E}$, які задовольняють (7.2.10). Отже, задача $\mathbf{NP}_\kappa$ має нескінченно багато мероморфних розв'язків. Параметри $\mathcal{E}$ які не задовольняють умовам (7.2.10) традиційно з розгляду виключалися (див. [52], [47]). Функції F які відповідають таким параметрам за формулою (7.2.9) мають в деяких точках інтерполяції або полюс (в цьому випадку інтерполяційна умова порушується) або усунену особливість. В останньому випадку значення, що виходить усуненням особливості, також не збігається з заданим інтерполяційним значенням. Таким чином ці F не є розв'язками задачі в аналітичному сенсі. Крім того, виявляється що ці F лежать в класі $\mathcal{S}_{\kappa'}$ з $\kappa' < \kappa$. Однак, якщо приписати їм " правильні " інтерполяційні значення у всіх точках інтерполяції, то з одного боку вони стануть розв'язками (нехай і не мероморфними), а з іншого опиняться в класі $\mathcal{S}_\kappa$. Це і становить зміст основної теореми цього розділу: дається опис всіх розв'язків невиродженої задачі $\mathbf{NP}_\kappa$, а не тільки мероморфних.

Відзначимо що з огляду на Теорему 7.5 достатньо говорити про функції стандартні в сенсі Визначення 7.4.

Теорема 7.18. Припустимо що матриця Піка P задачі $\mathbf{NP}_\kappa$ задовольняє умовам (7.2.5). Нехай Θ матриця-функція визначена в (7.2.6). Всі стандартні розв'язки F задачі $\mathbf{NP}_\kappa$ описуються наступним чином

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{\Theta_{11}(z)\mathcal{E}(z) + \Theta_{12}(z)}{\Theta_{21}(z)\mathcal{E}(z) + \Theta_{22}(z)}, & \text{якщо } \ z \notin (\{z_1, \dots, z_k\} \cup \{ \text{ нулі } \ \Theta_{21}\mathcal{E} + \Theta_{22}\}) \\ F_i, & \text{якщо } \ z = z_i \ (i = 1, \dots, k). \end{cases} \tag{7.2.11}$$

Тут параметр $\mathcal{E}$ пробігає весь клас Шура $\mathcal{S}_0$.

Підкреслимо ще раз що при удаваній тривіальності твердження теореми (всі функції F є розв'язками за визначенням), не є очевидним той факт що всі вони лежать в $\mathcal{S}_\kappa$ і що інших розв'язків в цьому класі у задачі немає.

Доведення Теореми 7.18 наводиться в наступному параграфі. У третьому параграфі вивчається вироджений випадок задачі $\mathbf{NP}_\kappa$, коли матриця Піка є виродженою. Для цього випадку доводиться єдиність розв'язку, яке не обов'язково є мероморфним. У четвертому параграфі ці результати застосовуються для доказу того що кожна функція класу $\mathcal{S}_\kappa$ що визначена на будь-якій підмножині одиничного кругу (порівняно В Теоремі 7.5 розглядаються тільки відкриті підмножини) допускає продовження до стандартної функції класу $\mathcal{S}_\kappa$. У цьому ж параграфі наводиться приклад який показує що якщо обмежитися розглядом тільки мероморфних функцій класу $\mathcal{S}_\kappa$, то це твердження не є вірним.

7.2.2 Доведення Теореми 7.18.

Нам знадобляться деякі результати з [30], які ми зараз наведемо. Введемо наступні позначення

$$U_\mathcal{E}(z) = \Theta_{11}(z)\mathcal{E}(z) + \Theta_{12}(z), \qquad V_\mathcal{E}(z) = \Theta_{21}(z)\mathcal{E}(z) + \Theta_{22}(z). \tag{7.2.12}$$

Будемо говорити що функція класу Шура $\mathcal{E}$ є *параметром мультипорядку* $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k)$ у формулі (7.2.9) якщо функція $V_\mathcal{E} = \Theta_{21}\mathcal{E} + \Theta_{22}$ має нулі кратностей m_i в точках z_i, відповідно, при $i = 1, \dots, k$:

$$V_\mathcal{E}(z_i) = V_\mathcal{E}'(z_i) = \dots = V_\mathcal{E}^{(m_i-1)}(z_i) = 0, \quad V_\mathcal{E}^{(m_i)}(z_i) \neq 0 \quad (i = 1, \dots, k).$$

З кожним мультиіндексом $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ зв'яжемо число

$$\gamma_{\mathbf{m}} := \text{число індексів } \ i\,(i = 1, \ldots, k) \text{ таких що } m_i > 0. \tag{7.2.13}$$

Теорема 7.19. [30] Припустимо що P оборотна і що $\mathrm{sq}\_P = \kappa$. Нехай $\mathcal{E} \in \mathcal{S}_0$ є параметром мультипорядку $\mathbf{m}$. Тоді мероморфна функція $S = \mathbf{T}_\Theta[\mathcal{E}]$ належить класу $\mathcal{S}_{\kappa-\gamma_{\mathbf{m}}}$, має полюс порядку $m_i - 1$ в z_i, якщо $m_i > 1$, і має усувну особливість в z_i, якщо $m_i = 1$. Більш того, $S(z_i) = F_i$, якщо $m_i = 0$, і $S(z_i) \neq F_i$, якщо $m_i = 1$ (в останньому випадку $S(z_i)$ це значення що отримано аналітичним усуненням особливості).

З цієї теореми випливає що всі функції які виходять за формулою (7.2.11) є стандартними функціями класу $\mathcal{S}_\kappa$ і задовольняють всім інтерполяційним умовам задачі. Залишається довести Теорему 7.18 в зворотну сторону.

Доведення Теореми 7.18. Нехай F визначена формулою (7.2.11) з деякою $\mathcal{E} \in \mathcal{S}_0$. Тоді, за визначенням, вона задовольняє всім інтерполяційним умовам (7.2.1). Нехай $\mathcal{E}$ буде параметр мультипорядку $\mathbf{m}$. Тоді, за Теоремою 7.19, функція $\mathbf{T}_\Theta[\mathcal{E}]$ (мероморфна частина F) належить класу $\mathcal{S}_{\kappa-\gamma_{\mathbf{m}}}$ і задовольняє

$$\mathbf{T}_\Theta[\mathcal{E}](z_i) = F_i \quad \text{якщо} \quad m_i = 0; \quad \mathbf{T}_\Theta[\mathcal{E}](z_i) \neq F_i \quad \text{якщо} \quad m_i > 0.$$

Отже, функція F, що визначається формулою (7.2.11), виходить додаванням $\gamma_{\mathbf{m}}$ стрибків до мероморфної функції $\mathbf{T}_\Theta[\mathcal{E}]$ класу $\mathcal{S}_{\kappa-\gamma_{\mathbf{m}}}$. Тим самим вона є стандартною функцією і, за Теоремою 7.5, F належить класу $\mathcal{S}_\kappa$.

Доведення в зворотну сторону використовує обчислення аналогічні тим які проведені при доведенні імплікації 3 $\Rightarrow$ 1 в Теоремі 7.5 (Розділ 7.1.2). Нехай F є стандартною функцією класу $\mathcal{S}_\kappa$ яка задовольняє інтерполяційним умовам (7.2.1). Оберемо r різних точок $\zeta_1, \ldots, \zeta_r \in \mathbb{D}$ і розглянемо матрицю Піка $P_{k+r}(F;\, z_1, \ldots, z_k, \zeta_1, \ldots, \zeta_r)$. Оскільки F задовольняє умовам (7.2.1), то ця матриця може бути записана в блоковому вигляді як

$$P_{k+r}(f;\, z_1, \ldots, z_k, \zeta_1, \ldots, \zeta_r) = \begin{bmatrix} P & \Psi^* \\ \Psi & P_r(f;\, \zeta_1, \ldots, \zeta_r) \end{bmatrix}, \tag{7.2.14}$$

де

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_r \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} \dfrac{1 - F(\zeta_i)F(z_1)^*}{1 - \zeta_i z_1^*} & \cdots & \dfrac{1 - F(\zeta_i)F(z_k)^*}{1 - \zeta_i z_k^*} \end{bmatrix}$$

при $i = 1, \dots, r$. Формулу для Ψ_i може бути записано в термінах (7.2.4) як

$$\Psi_i = [1 \quad -F(\zeta_i)] \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix} (I_k - \zeta_i T^*)^{-1} \qquad (i = 1, \dots, r). \tag{7.2.15}$$

Оскільки $F \in \mathcal{S}_\kappa$, то матриця P_{k+r} в (7.2.14) має не більше κ від'ємних власних значень. Оскільки головна підматриця P має κ від'ємних власних значень, то

$$\mathrm{sq}_- P_{k+r}(f;\, z_1, \dots, z_k, \zeta_1, \dots, \zeta_r) = \kappa.$$

Отже Шурівське доповнення P в P_{k+r} є додатно визначеним

$$P_r(F;\, \zeta_1, \dots, \zeta_r) - \Psi P^{-1} \Psi^* \geq 0.$$

Більш детально

$$\left[\frac{1 - F(\zeta_i)F(\zeta_j)^*}{1 - \zeta_i \zeta_j^*} - \Psi_i P^{-1} \Psi_j^* \right]_{i,j=1}^{r} \geq 0. \tag{7.2.16}$$

В силу (7.2.15) і (7.2.7),

$$\begin{aligned} &\frac{1 - F(\zeta_i)F(\zeta_j)^*}{1 - \zeta_i \zeta_j^*} - \Psi_i P^{-1} \Psi_j^* \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -F(\zeta_i) \end{bmatrix} \left\{ \frac{J}{1 - \zeta_i \zeta_j^*} \right. \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} E^* \\ C^* \end{bmatrix} (I - \zeta_i T^*)^{-1} P^{-1} (I - \zeta_j^* T)^{-1} \begin{bmatrix} E & C \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ F(\zeta_j)^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -F(\zeta_i) \end{bmatrix} \frac{\Theta(\zeta_i) J \Theta(\zeta_j)^*}{1 - \zeta_i \zeta_j^*} \begin{bmatrix} 1 \\ -F(\zeta_j)^* \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{7.2.17}$$

що дозволяє переписати (7.2.16) у вигляді

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & -F(\zeta_i) \end{bmatrix} \frac{\Theta(\zeta_i) J \Theta(\zeta_j)^*}{1 - \zeta_i \zeta_j^*} \begin{bmatrix} 1 \\ -F(\zeta_j)^* \end{bmatrix} \right]_{i,j=1}^{r} \geq 0. \tag{7.2.18}$$

Розбиваючи матрицю Θ яка визначена в (7.2.6) на чотири скалярних блоки, зауважимо що

$$d(z) := \Theta_{21}(z)F(z) - \Theta_{11}(z) \neq 0, \quad z \notin \{z_1, \dots, z_k\}. \tag{7.2.19}$$

Справді, припускаючи що

$$\Theta_{21}(\zeta)F(\zeta) = \Theta_{11}(\zeta)$$

при деякому $\zeta \notin \{z_1, \dots, z_k\}$, отримаємо

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & -F(\zeta) \end{bmatrix} \frac{\Theta(\zeta)J\Theta(\zeta)^*}{1-|\zeta|^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -F(\zeta)^* \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & -F(\zeta) \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} \Theta_{12}(\zeta) \\ \Theta_{22}(\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{12}(\zeta)^* & \Theta_{22}(\zeta)^* \end{bmatrix}}{1-|\zeta|^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -F(\zeta)^* \end{bmatrix} \leq 0, \end{aligned}$$

що в поєднанні з (7.2.18) тягне $\det \Theta(\zeta) = 0$. Але з (7.2.8) випливає що $\Theta(z)$ є оборотною в кожній точці $\zeta \notin \{z_1, \dots, z_k\}$.

Отже, функція

$$\mathcal{E}(z) = \frac{\Theta_{12}(z) - F(z)\theta_{22}(z)}{\Theta_{21}(z)F(z) - \Theta_{11}(z)} \tag{7.2.20}$$

визначена в $\mathbb{D}\backslash\{z_1, \dots, z_k\}$. Оскільки

$$\begin{bmatrix} 1 & -F(\zeta) \end{bmatrix} \Theta(\zeta) = -d(\zeta)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{E}(\zeta) \end{bmatrix},$$

то нерівність (7.2.18) може бути переписано в термінах $\mathcal{E}$ як

$$\left[d(\zeta_i)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{E}(\zeta_i) \end{bmatrix} \frac{J}{1-\zeta_i\zeta_j^*} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathcal{E}(\zeta_j)^* \end{bmatrix} (d(\zeta_j)^*)^{-1} \right]_{i,j=1}^r \geq 0,$$

або еквівалентно, (так як $d(\zeta_i) \neq 0$) у вигляді

$$\left[\frac{1 - \mathcal{E}(\zeta_i)\mathcal{E}(\zeta_j)^*}{1-\zeta_i\zeta_j^*} \right]_{i,j=1}^r \geq 0.$$

Оскільки $\zeta_1, \dots, \zeta_r$ довільні точки в $z \in \mathbb{D} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ і їх кількість довільна, то остання нерівність означає що $\mathcal{E}(z)$ є функцією класу Шура. З (7.2.20) випливає що

$$F(z) = \frac{\Theta_{11}(z)\mathcal{E}(z) + \Theta_{12}(z)}{\Theta_{21}(z)\mathcal{E}(z) + \Theta_{22}(z)} \tag{7.2.21}$$

при всіх $z \in \mathbb{D} \setminus (\{z_1, \ldots, z_k\} \cup \{\text{нулі } \Theta_{21}\mathcal{E} + \Theta_{22}\})$. $\square$

7.2.3 Вироджений випадок. У цьому параграфі припускаємо що матриця Піка P задачі $\mathbf{NP}_\kappa$ вироджена і показуємо що в цьому випадку задача має єдиний розв'язок. Розглянемо задачу $\mathbf{NP}_\kappa$ з n інтерполяційними умовами

$$F(z_i) = F_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{7.2.22}$$

Припустимо що ранг матриці Піка

$$\widehat{P} = \left[\frac{1 - F_i F_j^*}{1 - z_i z_j^*} \right]_{i,j=1}^{n} \tag{7.2.23}$$

дорівнює $k < n$ і що $\operatorname{sq}_-(\widehat{P}) = \kappa$. За самим змістом величин, маємо $\kappa \leq k$. Без обмеження спільності можна припустити що верхня $k \times k$ головна підматриця P матриці $\widehat{P}$ є оборотною. Тоді

$$\widehat{P} = \begin{bmatrix} P & P_1^* \\ P_1 & P_2 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad P_2 = P_1 P^{-1} P_1^* \quad \text{и} \quad \operatorname{sq}_-(P) = \kappa. \tag{7.2.24}$$

Оскільки ij -й елемент P_2 дорівнює $(1 - F_{k+i}F_{k+j}^*)/(1 - z_{k+i}z_{k+j}^*)$ а q-й рядок P_1 дорівнює

$$(E^* - F_{k+q}C^*)\,(I_k - z_q T^*)^{-1}$$

(це випливає з (7.2.14) і (7.2.15) з заміною ζ_q на z_{k+q}), то рівність $P_2 = P_1 P^{-1} P_1^*$ тягне

$$\frac{1 - F_i F_j^*}{1 - z_i z_j^*} = (E^* - F_i C^*)\,(I - z_i T^*)^{-1} P^{-1} (I - z_j^* T)^{-1} \left(E - C F_j^*\right) \tag{7.2.25}$$

при $j, i = k+1, \ldots, n$.

Теорема 7.20. Вироджена задача $\mathbf{NP}_\kappa$ має єдиний розв'язок в класі стандартних функцій з $\mathcal{S}_\kappa$. Мероморфна частина цього розв'язку є відношенням двох добутків Бляшке: чисельник ступеня k і знаменник ступеня не вище κ.

Доведення. Опишемо спочатку множину всіх функцій $F \in \mathcal{S}_\kappa$ які задовольняють першим k інтерполяційним умовам (7.2.22). Матриця Піка цієї зрізаної задачі дорівнює P, вона не є виродженою і має κ від'ємних власних значень. За Теоремою 7.18, всі функції $F \in \mathcal{S}_\kappa$ що задовольняють $F(z_i) = F_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, параметризовані формулою (7.2.11), де Θ визначена в (7.2.6) і $\mathcal{E}$ довільна функція з $\mathcal{S}_0$. Тепер займемося пошуком параметрів $\mathcal{E}$ для яких функція F виду (7.2.11) задовольняє решті $n - k$ інтерполяційних умов (7.2.22).

Зауважимо що мероморфна частина $\mathbf{T}_\Theta[\mathcal{E}]$ функції F задовольняє умовам

$$z_i \in \operatorname{Dom}(\mathbf{T}_\Theta[\mathcal{E}]) \quad \text{і} \quad \mathbf{T}_\Theta[\mathcal{E}](z_i) = F_i \quad (i = k+1, \ldots, n). \tag{7.2.26}$$

В іншому випадку F матиме в цих точках додаткові стрибки і, по Теоремі 7.5, буде належати класу $\mathcal{S}_{\kappa'}$ з $\kappa' > \kappa$, протиріччя.

Покажемо зараз що кожен параметр $\mathcal{E}$, для якого $V_\mathcal{E}(z_i) = 0$ хоча б при одному $i \in \{k+1, \ldots, n\}$, не веде до розв'язку повної задачі. Якщо $V_\mathcal{E}$ і $U_\mathcal{E}$ мають спільний нуль в точках z, то (див. (7.2.12)) $\Theta(z)$ є виродженою, що можливо тільки при $z \in \{z_1, \ldots, z_k\}$, в силу (7.2.8). Таким чином, якщо $V_\mathcal{E}(z_i) = 0$ при деякому $i \in \{k+1, \ldots, n\}$, то $U_\mathcal{E}(z_i) \neq 0$ и $\mathbf{T}_\Theta[\mathcal{E}]$ має полюс в z_i і не може задовольняти відповідній умові (7.2.26) без додаткового стрибка, що знову переводить функцію в клас з більшим числом від'ємних власних значень. Протиріччя.

Отже, залишаються параметри $\mathcal{E}$ для яких $\mathbf{T}_\Theta[\mathcal{E}]$ аналітична в точках $z_{k+1}, \ldots, z_n$, тобто, такі що

$$\Theta_{21}(z_i)\mathcal{E}(z_i) + \Theta_{22}(z_i) \neq 0, \qquad \text{при } i = k+1, \ldots, n. \tag{7.2.27}$$

Покажемо що для цих параметрів умови (7.2.26) є еквівалентними

$$a_i\mathcal{E}(z_i) = -c_i \quad (i = k+1, \ldots, n), \tag{7.2.28}$$

де a_i, c_i визначаються формулою

$$[a_j \;\; c_j] = [1 \;\; -F_j]\ \Theta(z_j), \qquad j = k+1, \ldots, n. \tag{7.2.29}$$

Дійсно, помножив i-у інтерполяційну умову (7.2.26) на $\Theta_{21}(z_i)\mathcal{E}(z_i) + \Theta_{22}(z_i) \neq 0$, отримаємо

$$\Theta_{11}(z_i)\mathcal{E}(z_i) + \Theta_{12}(z_i) = F_i\left(\Theta_{21}(z_i)\mathcal{E}(z_i) + \Theta_{22}(z_i)\right).$$

Перегрупуємо члени

$$(\Theta_{11}(z_i) - F_i\Theta_{21}(z_j))\,\mathcal{E}(z_i) = F_i\Theta_{22}(z_i) - \Theta_{12}(z_i).$$

Останню рівність може бути записано як

$$[1 \quad -F_j]\begin{bmatrix}\Theta_{11}(z_i)\\ \Theta_{21}(z_i)\end{bmatrix}\mathcal{E}(z_i) = -\,[1 \quad -F_j]\begin{bmatrix}\Theta_{12}(z_i)\\ \Theta_{22}(z_i)\end{bmatrix},$$

що збігається з (7.2.28), з огляду на (7.2.27).

Використовуючи (7.2.25) разом з (7.2.29) і з (7.2.7), отримаємо (при $j, i = k+1, \ldots, n$):

$$\begin{aligned}
&\frac{a_ia_j^* - c_ic_j^*}{1 - z_iz_j^*}\\
&= \begin{bmatrix} a_i & c_i \end{bmatrix}\frac{J}{1 - z_iz_j^*}\begin{bmatrix} a_j^*\\ c_j^* \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & -F_i \end{bmatrix}\frac{\Theta(z_i)J\Theta(z_j)^*}{1 - z_iz_j^*}\begin{bmatrix} 1\\ -F_j^* \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & -F_i \end{bmatrix}\frac{J}{1 - z_iz_j^*}\begin{bmatrix} 1\\ -F_j^* \end{bmatrix}\\
&\quad -\begin{bmatrix} 1 & -F_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E^*\\ C^* \end{bmatrix}(I - zT^*)^{-1}P^{-1}(I - w^*T)^{-1}\begin{bmatrix} E & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\\ -F_j^* \end{bmatrix}\\
&= \frac{1 - F_iF_j^*}{1 - z_iz_j^*} - (E^* - F_iC^*)\,(I - z_iT^*)^{-1}P^{-1}(I - z_j^*T)^{-1}\left(E - CF_j^*\right) \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Звідси зокрема робимо висновок що $|a_j| = |c_j|$, $j = k+1, \ldots, n$. Якщо $a_j = 0$ при деякому $j = k+1, \ldots, n$, то $c_j = a_j = 0$ при цьому ж j. Але тоді, в силу (7.2.29), $\Theta(z_j)$ вироджена. Що суперечить (7.2.8). Таким чином, $a_j \neq 0$ при $j = k+1, \ldots, n$ і $|\mathcal{E}(z_j)| = 1$. Але тоді, за принципом максимуму модуля, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}_0$ є унімодулярною константою і

$$\mathcal{E} = -\frac{c_{k+1}}{a_{k+1}} = \ldots = -\frac{c_n}{a_n}. \tag{7.2.30}$$

Отже, існує тільки одна функція $\mathcal{E} \in \mathcal{S}_0$ для якої виконуються умови (7.2.28) і вона є унімодулярною константою (7.2.30).

Далі перевіримо що (7.2.27) виконується для цієї $\mathcal{E}$. При кожному j,

$j = k+1, \ldots, n$, маємо

$$\begin{aligned}\Theta_{21}(z_j)\mathcal{E} + \Theta_{22}(z_j) &= \Theta_{22}(z_j) - \Theta_{21}(z_j)\frac{c_j}{a_j} = \frac{1}{a_j}\,[a_j \;\; c_j]\begin{bmatrix}\Theta_{22}(z_j)\\ -\Theta_{21}(z_j)\end{bmatrix}\\ (\text{в силу } (7.2.29)) &= \frac{\det\Theta(z_j)}{a_j}\,[1 \;\; -F_j]\;\Theta(z_j)\Theta(z_j)^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \neq 0.\end{aligned}$$

Залишається відзначити що функція $\mathbf{T}_\Theta[\mathcal{E}]$ з $\mathcal{E}$, що визначена в (7.2.30), є відношенням додатків Бляшке зазначених ступенів. □

В [44] було показано що вироджена задача $\mathbf{NP}_\kappa$ не завжди має мероморфні розв'язки. Як випливає з Теорем 7.18 і 7.20, в нашому класі $\mathcal{S}_\kappa$ розв'язок завжди існує.

7.2.4 Результат про продовження.

Теорема 7.21. Нехай функція F визначена на множині $\Omega \subseteq \mathbb{D}$. Припустимо що матриці Піка $P_n(F; z_1, \ldots, z_n)$, $z_1, \ldots, z_n \in \Omega$, мають не більше κ від'ємних власних значень а якась із них має κ від'ємних власних значень. Тоді F допускає продовження до стандартної функції класу $\mathcal{S}_\kappa$.

Доведення. Якщо Ω є множиною єдиності для H^2, то Теорема 7.21 випливає з Теорем [8, Theorem 2.1] і Теореми 7.5. Якщо Ω скінченна множина, то Теорема 7.21 випливає з Теорем 7.17 і 7.20. Нехай Ω є нескінченна дискретна множина що задовольняє умові Бляшке. Нехай $\Omega = \{z_1, \ldots, z_n, \ldots\}$. Якщо при деякому n_0 матриця Піка $P_{n_0}(F; z_1, \ldots, z_{n_0})$ має κ від'ємних власних значень і є виродженою, то, за Теоремою 7.20, існує єдина стандартна функція $\tilde{F} \in \mathcal{S}_\kappa$ така що $\tilde{F}(z_j) = F(z_j)$, $j = 1, \ldots, n_0$. Але тоді $\tilde{F}(z_j) = F(z_j)$ і при $j = n_0 + 1, \ldots$ (див. доведення Теореми 7.20). Залишається випадок коли матриці Піка $P_n(F; z_1, \ldots, z_n)$, $n \geq n_0$, мають κ від'ємних власних значень і є невиродженими.

Візьмемо деякий мероморфний розв'язок f_n задачі $\mathbf{NP}_\kappa$ з матрицею Піка $P_n(F; z_1, \ldots, z_n)$. Запишемо f в формі Крейна-Лангера ([74])

$$f_n = \frac{s_n}{b_n},$$

де s_n функція класу Шура, а b_n добуток Бляшке ступеня κ. Можна вибрати підпослідовність n_k так що

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_k}(z) = b(z)$$

рівномірно на компактах в $\mathbb{D}$, де b добуток Бляшке ступеня $\kappa' \le \kappa$. Щоб переконатися в цьому запишемо добуток Бляшке у вигляді

$$b_n(z) = \frac{p_n(z)}{z^\kappa \overline{p_n(1/\overline{z})}},$$

де p_n поліном ступеня κ з нулями у відкритому крузі $\mathbb{D}$ і старшим коефіцієнтом рівним 1. Тоді

$$|p_n(z)| \le (|z| + 1)^\kappa.$$

Отже поліноми p_n рівномірно (по n) обмежені на компактах в $\mathbb{C}$. Тоді і всі коефіцієнти p_n рівномірно (по n) обмежені. Це видно, наприклад, з формули Коші. Тепер оберемо n_k так щоб всі коефіцієнти p_{n_k} мали границі. Тоді $p_{n_k}(z)$ будуть рівномірно на компактах в $\mathbb{C}$ збігатися до деякого поліному $p(z)$ ступеня κ зі старшим коефіцієнтом 1. Зауважимо що при $|z| > 1$

$$|p_n(z)| \ge (|z| - 1)^\kappa$$

для всіх n. Отже, ця нерівність виконується і для $p(z)$. Звідки випливає що всі нулі $p(z)$ лежать в замкненому одиничному крузі. Тепер маємо збіжність $b_{n_k}(z)$ до

$$b(z) = \frac{p(z)}{z^\kappa \overline{p(1/\overline{z})}}$$

рівномірно на компактах в $\mathbb{D}$. Оскільки деякі нулі p можуть бути на колі, то b є додатком Бляшке ступеню не вище κ.

За Теоремою Монтеля (див., наприклад, [78]), проріджуючи далі підпослідовність n_k (але зберігаючи позначення) отримаємо існування рівномірної на компактах в $\mathbb{D}$ границі

$$\lim_{k\to\infty} s_{n_k}(z) = s(z),$$

де s є функцією класу Шура.

Визначимо тепер функцію

$$f(z) = \frac{s(z)}{b(z)} \;\text{ якщо }\; b(z) \neq 0, \quad f(z_i) = F_i \;\text{ якщо }\; z = z_i \in \Omega.$$

Областю визначення f є $(\mathbb{D} \setminus \{\text{нулі } b\}) \cup \Omega$. Зауважимо що на всій області визначення

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z), \quad z \in \operatorname{Dom}(f).$$

Дійсно, якщо $b(z) \neq 0$, то

$$f(z) = \frac{s(z)}{b(z)} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k}(z)}{\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k}(z)} = \lim_{k\to\infty} \frac{s_{n_k}(z)}{b_{n_k}(z)} = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z),$$

якщо $z_i \in \Omega$, то $f_{n_k}(z_i) = F_i$ для всіх достатньо великих k. Так як за визначенням $f(z_i) = F_i$, то

$$f(z_i) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z_i).$$

Звідси зокрема видно що визначення f несуперечливо, так як якщо $b(z_i) \neq 0$ і $z_i \in \Omega$, то обидві формули дають одне і теж значення

$$f(z_i) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z_i) = F_i.$$

Оскільки матриці Піка f є границями відповідних матриць Піка f_{n_k}, то вони мають не більш κ від'ємних власних значень. Оскільки матриці Піка f в яких бере участь досить багато точок Ω мають κ від'ємних власних значень, то $F \in S_\kappa$. □

На завершення цього параграфа наведемо приклад функції F класу $\mathcal{S}_1$, що визначена на дискретній множині $\Omega \subset \mathbb{D}$, яка допускає єдине продовження до стандартної функції класу $\mathcal{S}_1$ і це єдине продовження не є мероморфним в $\mathbb{D}$; в той же час обмеження F на будь-яку скінченну підмножину Ω має неєдине продовження в класі $\mathcal{S}_1$ і, зокрема, має багато мероморфних продовжень.

Нехай $\Omega = \{0\} \cup \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $z_k \in \mathbb{D}$ є різними, відмінними від нуля і задовольняють умові Бляшке $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1 - |z_k|)^2 < \infty$. Нехай $\widehat{w}$ не внутрішня функція класу Шура, яка однозначно визначається своїми значеннями

$\widehat{w}(z_k)$ в точках $z_k, k = 1, 2, \ldots$. Приклад такої функції наведено в [3], [6]. Розглянемо дві матриці-функції

$$\Theta_{1/2}(z) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4z-1 & 2-2z \\ 2z-2 & 4-z \end{bmatrix}, \quad \Theta_2(z) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4-z & 2z-2 \\ 2-2z & 4z-1 \end{bmatrix},$$

які є окремими випадками (7.2.6) при $k = 1$, $T = 0$, $E = 1$, $C = 1/2$, і при $k = 1$, $T = 0$, $E = 1$, $C = 2$, відповідно. Формула

$$w = \mathbf{T}_{\Theta_{1/2}}[\mathcal{E}], \quad \mathcal{E} \in \mathcal{S}_0 \tag{7.2.31}$$

параметризує розв'язки задачі Неванлінни-Піка $w(0) = 1/2$ в класі $\mathcal{S}_0$ (див. Теорему 7.17). Формула

$$w(z) = \mathbf{G}_{\Theta_2}[\mathcal{E}] := \begin{cases} \mathbf{T}_{\Theta_2}[\mathcal{E}], & \text{якщо } z \neq 0, \\ \quad 2, & \text{якщо } z = 0, \end{cases} \tag{7.2.32}$$

$\mathcal{E} \in \mathcal{S}_0$ описує стандартні розв'язки задачі $w(0) = 2$ в класі $\mathcal{S}_1$ (див. Теорему 7.18).

Розглянемо

$$w_{1/2} = \mathbf{T}_{\Theta_{1/2}}[\widehat{w}]. \tag{7.2.33}$$

$w_{1/2}(0) = 1/2$ (див. (7.2.31)). Оскільки $\widehat{w}$ не є внутрішньою функцією, то і $w_{1/2}$ не є внутрішньою.

Твердження 7.22. Кожна з наступних двох задач Неванлінни-Піка

$$w(0) = 1/2, \quad w(z_k) = w_{1/2}(z_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad w \in \mathcal{S}_0 \tag{7.2.34}$$

і

$$w(z_k) = w_{1/2}(z_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad w \in \mathcal{S}_0 \tag{7.2.35}$$

має єдиний розв'язок що дорівнює $w_{1/2}$.

Доведення. Природно єдиність для першої задачі випливає з єдиності для другої, проте ми спочатку доведемо єдиність для першої, а потім використовуємо це при доведенні єдиності для другої. Припустимо що w є розв'язком задачі (7.2.34). так як $w(0) = 1/2$, то існує функція $\mathcal{E} \in \mathcal{S}_0$ така що

$$w = \mathbf{T}_{\Theta_{1/2}}[\mathcal{E}]. \tag{7.2.36}$$

З використанням (7.2.33) і (7.2.36)) перевіряється що $\mathcal{E}(z_k) = \widehat{w}(z_k)$ при $k = 1, 2, \ldots$, і отже $\mathcal{E} = \widehat{w}$ в силу єдиності $\widehat{w}$.

Тепер припустимо що друга задача (7.2.35) має багато розв'язків. Відомо [80], [93] що в цьому випадку множина розв'язків задачі (7.2.35) описується формулою

$$w = \mathbf{T}_\Theta[\mathcal{E}],$$

де J-внутрішня 2×2 матриця-функція Θ побудована за даними задачі, а $\mathcal{E} \in \mathcal{S}_0$ вільний параметр. Оскільки $w_{1/2}$ є розв'язком задачі (7.2.35), то

$$w_{1/2} = \mathbf{T}_\Theta[\mathcal{E}_{1/2}]$$

з деяким параметром $\mathcal{E}_{1/2} \in \mathcal{S}_0$. Якщо $|\mathcal{E}_{1/2}(0)| = 1$, то функція $\mathcal{E}_{1/2}$ є унімодулярною константою, і отже $w_{1/2}$ внутрішня функція, що суперечить побудові. Якщо $|\mathcal{E}_{1/2}(0)| < 1$, то існує нескінченно багато функцій $\mathcal{E} \in \mathcal{S}_0$ таких що $\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}_{1/2}(0)$. Для кожної такої $\mathcal{E}$

$$w(0) = \mathbf{T}_\Theta[\mathcal{E}](0) = \mathbf{T}_\Theta[\mathcal{E}_{1/2}](0) = w_{1/2}(0) = 1/2.$$

Таким чином, кожна $w = \mathbf{T}_\Theta[\mathcal{E}]$ з параметром $\mathcal{E} \in \mathcal{S}_0$ таким що $\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}_{1/2}(0)$ вирішує не тільки задачу (7.2.35) а і задачу (7.2.34). Тобто, виходить що задача (7.2.34) має нескінченно багато розв'язків. Що суперечить доведеному в першій частині цієї теореми. Отримані протиріччя показують що задача (7.2.35) має єдиний розв'язок. □

Нехай перетворення $\mathbf{T}_{\Theta_{1/2}}$ і $\mathbf{G}_{\Theta_2}$ визначені формулами (7.2.31) і (7.2.32), відповідно. Покладемо

$$w_0 = \mathbf{G}_{\Theta_2}[w_{1/2}] = \mathbf{G}_{\Theta_2}\mathbf{T}_{\Theta_{1/2}}[\widehat{w}].$$

Оскільки

$$\Theta_2(z)\Theta_{1/2}(z) = \frac{7z}{9}I,$$

де I одинична матриця, то

$$w_0 = \begin{cases} \widehat{w}, & \text{якщо } z \neq 0, \\ 2, & \text{якщо } z = 0. \end{cases}$$

Таким чином w_0 не є мероморфною функцією. Розглянемо наступну інтерполяційну задачу

$$w(0) = 2, \quad w(z_k) = w_0(z_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad w \in \mathcal{S}_1. \tag{7.2.37}$$

Функція w_0 є єдиним стандартним розв'язком задачі (7.2.37). Справді, якщо w деякий стандартний розв'язок задачі (7.2.37), то зокрема $w(0) = 2$. Але тоді

$$w = \mathbf{G}_{\Theta_2}[\mathcal{E}]$$

з деяким $\mathcal{E} \in \mathcal{S}_0$. Далі, оскільки

$$w(z_k) = w_0(z_k) = \mathbf{T}_{\Theta_2}[w_{1/2}](z_k),$$

то функція $\mathcal{E}$ задовольняє умовам

$$\mathcal{E}(z_k) = w_{1/2}(z_k), \quad k = 1, 2, \dots.$$

Отже, з огляду на Твердження 7.22, $\mathcal{E} = w_{1/2}$ і $w = w_0$.

Висновки до розділу 7

У Розділі 7 вивчено розширений клас Крейна-Лангера, який визначається від'ємним індексом інерції матриць Шварца- Піка і який (на відміну від класичного класу Крейна-Лангера) містить не тільки функції з полюсами, але й функції зі стрибками. Зокрема введено та вивчено стандартні функції цього класу та доведено що будь-яка функція класу може бути продовжена до стандартної функції цього ж класу. У підрозділі 7.2 розглянуто задачу Неванлінни-Піка у розширеному класі Крейна-Лангера та отримана параметризація всіх її розв'язків (з полюсами та зі стрибками). Усім параметрам відповідають розв'язки, виключних значень параметрів немає, на відміну від випадку коли дозволяються лише розв'язки з полюсами. Крім того розглянуто вироджений випадок і доведено що тоді задача завжди має єдиний розв'язок, який може мати стрибки, на відміну від класичної постановки коли розв'язків може не бути.

Результати розділу опубліковано в роботах [38, 39, 40, 41, 42, 34].

ВИСНОВКИ

У дисертації запропоновано і розвинуто методи розв'язаня інтерполяційних задач аналізу, основані на використанні унітарних систем розсіювання, які природно пов'язані з даними задачі та її розв'язками. Також вирішуються відповідні зворотні задачі.

У роботі описано множину розв'язків загальної задачі про ліфтинг комутанту, отримано кратний аналог умови Жюліа-Каратеодорі про кутову межову похідну та вивчено пов'язану з нею межову інтерполяційну задачу у класі Шура, вивчено розширений клас Крейна-Лангера та розв'яано задачу Неванлінни-Піка в ньому. Для задачі про ліфтинг комутанту отримано параметризацію усіх символів ліфтингу у самому загальному випадку а також отримано повну характеризацію коефіцієнтів цієї параметризуючої формули. Для аналогу умови Жюліа-Каратеодорі отримано низку еквівалентних умов, зокрема, одна з цих умов формулюється у термінах певної симетрії межових похідних. Як застосування цих методів та результатів, у роботі розв'язані дві проблеми Д. Сарасона про регулярні та сингулярні γ-твірні пари.

Детальніше, в Розділі 2 викладено попередні відомості які використовуються у дисертації. Наведено усі необхідні визначення що стосуються унітарних систем розсіювання. Детально описано пространство мір Хеллінгера, що відповідає заданій операторній мірі, та деякі його властивості. Показано як унітарні системи розсювання реалізуються у просторі Хеллінгера. Викладено конструкцію Шурівських доповнень мір та відповідного ортогонального розкладу простору Хеллінгера. Наведено параметризацію унітарних розширень ізометрій, їх резольвент. Викладено счислення з'єднань зі зворотним зв'язком та обчислено динаміку з'єднаної системи. Обчислено функції розсіювання з'єднаної системи відносно заданого масштабу та масштабу з'єднання.

В Розділі 3 спочатку викладено схему Абстрактної Задачі Інтерполяції, яку було розвинуто раніше і яка добре працює в задачах аналізу де розв'язки є аналітичними функціями (таких як задача Неванлінни-Піка, задача Сарасона, Проблема Моментів). В основу цієї схеми покладено теорію операторних вузлів. Далі показано як унітарний вузол вкладається в унітарну систему розсіювання. Показано як Абстрактна Задача Інтерполяції переформулюється (еквівалентним чином) у термінах систем розсіювання (замість унітарних вузлів). Після цього відкинуто умову ортогональності, яка була присутня в попередній схемі, і сформульовано нову схему Абстрактної Задачі Інтерполяції, розв'язками якоі можуть бути не тільки аналітичні, але й гармонійні функції. Далі цю нову Абстрактну Задачу Інтерполяції розв'язано з використанням унітарних розширень ізометрій та відповідних систем розсіювання. Отримано параметризацію розв'язків задачі.

У Розділі 4 дисертації вивчено загальну проблему про ліфтинг комутанту: показано що вона вкладається в схему Абстрактної Задачі Інтерполяції, досліджену в першому розділі, вивчено специфіку даних задачі про ліфтинг і отримано опис всіх ліфтингів заданого стиснення в термінах їх символів. Поняття символу ліфтингу також введено в цій роботі і узагальнює класичне поняття символу Ганкелева оператора. У цьому більш загальному випадку символами є міри, а не функції.

В цьому ж розділі розв'язано відповідну зворотну задачу, яка полягає в характеризації резольвентних матриць що виникають при розв'язанні прямої задачі. У дисертації отримані необхідні і достатні умови на коефіцієнти параметризуючої формули загальної задачі про ліфтинг комутанту в термінах функціональних моделей. Більш того, у роботі розглянуто загальний (а не тільки цілком невизначений) випадок. І в цьому випадку доведено екстремальні властивості коефіцієнтів, які тут мають вигляд максимальних факторизаційних нерівностей (на відміну від рівностей цілком невизначеного випадку).

У Розділі 5 результати по загальній Задачі про Ліфтинг застосовано до скалярної невизначеної задачі Нехарі. Головним чином застосовано результат по зворотній задачі. Це дозволило доповнити класичні результати

Адамяна, Арова і Крейна новою характеризацією резольвентних матриць задачі Нехарі, еквівалентно: регулярних γ - твірних пар функцій. Далі, використовуючи отриманий критерій, в роботі розв'язано дві проблеми, поставлені Д. Сарасоном: проблему регуляризації довільної γ -твірної пари - відповідь позитивна, регуляризація завжди можлива; і проблему про достатність абсолютної неперервності мір пов'язаних з γ -твірною парою - відповідь негативна: умова не є достатньою. В роботі наведено клас контрприкладів, заснованих на межовій інтерполяційній задачі, що розглянуто у натупному розділі. Больш конкретно, було показано що пари (a, b), що виникають при параметризації розв'язків межової інтерполяційної задачі (що тісно пов'язана з нескінченною проблемою моментів) мають властивість абсолютної неперервності, але є сингулярними, тобто не можуть бути регулярними.

У Розділі 6 отримано узагальнення класичної теореми Жюліа-Каратеодорі про кутову межову похідну на випадок похідних вищого порядку. Виявлено усі еквівалентні умови для її існування у сенсі аналогічному до похідної першого порядку. Теорему сформульовано у термінах властивостей відповідних матриць. Розгляди істотно використовують функціональні моделі Л. де Бранжа- Д. Ровняка і їх відтворюючі ядра, зокрема відтворюючі ядра що відповідають межовій точці. У підрозділі 6.2 досліджено відповідну межову інтерполяційну задачу, яка еквівалентна задачі розлянутій у Розділі 5.2.1. Але на відміну від Розділу 5.2.1, де увагу сконцентровано на множині розв'язків та на властивостях коефіцієнтів параметризуючої формули, у Розділі 6.2 йдеться про конкретно аналітичний зміст межової задачі. Зокрема доведено що кратний аналог умови Жюліа-Карктеодорі є еквівалентним умові симетрії межових похідних, яка виникала в працях І.В. Ковалішиної.

У Розділі 7 вивчено розширений клас Крейна-Лангера, який визначається від'ємним індексом інерції матриць Шварца-Піка і який (на відміну від класичного класу Крейна-Лангера) містить не тільки функції з полюсами, але й функції зі стрибками. Зокрема введено та вивчено стандартні функції цього класу та доведено що будь-яку функцію цього класу може бути поширено до стандартної функції цього ж класу. У підрозділі 7.2 розглянуто задачу Неванлінни-Піка у роширеному класі Крейна-Лангера та отримано параметризацію всіх її розв'язків (з полюсами та зі стрибками). Усім параметрам відповідають розв'язки, виключних значень параметрів немає, на відміну від випадку коли дозволяються лише розв'язки з полюсами. Крім того розглянуто вироджений випадок і доведено що тоді задача завжди має єдиний розв'язок, який може мати стрибки, на відміну від класичної постановки коли розв'язків може не бути.

Загалом, у дисертації запропонований і систематично розвинутий підхід, який використовує унітарні системи розсіювання для дослідження інтерполяційних задач аналізу. Цей підхід дозволяє отримувати тонкі аналітичні результати виходячи з внутрішньої структури відповідних систем розсіювання, які у свою чергу відображують структуру даних задачі інтерполяції.

Усі основні результати наведено з повними доведеннями. Отримані результати мають теоретичний характер. Запропоновані методи можуть бути використані для дослідження та розв'язаня різноманітних інтерполяційних задач аналізу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] V. M. Adamjan and D. Z. Arov. Unitary couplings of semi-unitary operators. *Mat. Issled.*, 1(2):3–64, 1966.

[2] V. M. Adamjan, D. Z. Arov, and M. G. Krein. Infinite Hankel matrices and generalized problems of Carathéodory-Fejér and I. Schur. *Funkt. Anal. i Prilozhen.*, 2(4):1–17, 1968.

[3] V. M. Adamjan, D. Z. Arov, and M. G. Krein. Bounded operators which commute with a C_{00} class contraction whose rank of nonunitarity is one. *Funkcional Anal i Prilozh*, 3:86–87, 1969.

[4] V. M. Adamjan, D. Z. Arov, and M. G. Krein. Infinite block Hankel matrices and related continuation problems. *Izv. Akad. Nauk. Arm. SSR*, 6(2-3):87–112, 1971.

[5] V. M. Adamjan, D. Z. Arov, and M. G. Krein. Some function theoretic problems connected with the theory of spectral measures of isometric operators. *Lecture Notes in Mathematics*, 1043:160–163, 1984.

[6] V. M. Adamjan, D. Z. Arov, and M. G. Kreĭn. Infinite Hankel matrices and generalized problems of Carathéodory-Fejér and F. Riesz. *Funkcional Anal. Prilozhen.*, 2(1):1–19, 1968.

[7] V. M. Adamyan, D. Z. Arov, and M. G. Kreĭn. Analytic properties of the Schmidt pairs of a Hankel operator and the generalized Schur-Takagi problem. *Mat Sbornik (Novaja Serija)*, 86(128):34–75, 1971.

[8] J. Agler and N. J. Young. Functions that are almost multipliers of Hilbert function spaces. *Proc. of London Math Soc*, 76:453–475, 1998.

[9] N. I. Akhiezer. On a minimum problem in function theory and the number of roots of an algebraic equation inside the unit disc. *Izv Akad. Nauk SSSR Mat. Estestv. Nauki*, 9:1169–1189, 1930.

[10] N. I. Akhiezer. *The classical moment problem and some related questions in analysis.* Moscow, 1961.

[11] D. Alpay, A. Dijksma, J. Rovnyak, and H. de Snoo. *Schur functions, operator colligations and reproducing kernel Pontryagin spaces.* Birkhäuser, 1997.

[12] R. Arocena. Unitary extensions of isometries and contractive intertwining dilations. *Operator Theory: Advances and Applications*, 41:13–23, 1989.

[13] R. Arocena. Unitary colligations and parametrization formulas. *Ukrainian Math Zh*, 46(3):147–154, 1994.

[14] D. Z. Arov. On regular and singular j-inner matrix-functions and related extrapolation problems. *Funktionalnii Analiz i Ego Prilozhenija*, 22:57–59, 1988.

[15] D. Z. Arov. Regular j-inner matrix-functions and related continuation problems. 43:63–87, 1990.

[16] D. Z. Arov and L. Z. Grossman. Scattering matrices in the theory of unitary extensions of isometric operators. *Soviet Math. Dokl*, 270:17–20, 1983.

[17] D. Z. Arov and L. Z. Grossman. Scattering matrices in the theory of unitary extensions of isometric operators. *Math. Nachrichten*, 157:105–123, 1992.

[18] J. A. Ball, I. Gohberg, and L. Rodman. *Interpolation of Rational Matrix Functions.* Birkhäuser Verlag, Basel Boston, 1990.

[19] J. A. Ball and J. W. Helton. Interpolation problems of Pick–Nevanlinna and Loewner type for meromorphic matrix functions: parametrizations of the set of all solutions. *Integral Equations and Operator Theory*, 9:155–203, 1986.

[20] J. A. Ball and A. Kheifets. The inverse Commutant Lifting problem. I: Coordinate free formalism. *Integral equations and Operator Theory*, 70(1):17–62, 2011.

[21] J. A. Ball and A. Kheifets. The inverse Commutant Lifting problem. II: Hellinger functional-model spaces. *Complex Analysis and Operator Theory*, 7(4):873–907, 2013.

[22] J. A. Ball, W. S. Li, D. Timotin, and T. T. Trent. A commutant lifting theorem on the polydisc. *Indiana University Math. J*, 48(2):653–675, 1999.

[23] J. A. Ball and S. ter Horst. Multivariable operator-valued nevanlinna-pick interpolation: a survey. In *Operator algebras, operator theory and applications. Operator Theory: Advances and Applications.*, volume 195, pages 1–72. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.

[24] J. A. Ball, T. T. Trent, and V. Vinnikov. In H. Bart, I. Gohberg, and A.C.M. Ran, editors, *Interpolation and commutant lifting for multipliers on reproducing kernel Hilbert spaces*, volume 122, pages 83–138. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, 2001.

[25] J. A. Ball and V. Vinnikov. Formal reproducing kernel Hilbert spaces: the commutative and noncommutative settings. In D. Alpay, editor, *Reproducing Kernel Spaces and Applications. Operator Theory: Advances and Applications.*, volume 143, pages 77–134. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, 2003.

[26] S. S. Boiko, V. K. Dubovoy, and A. Ya. Kheifets. On some extremal problem for harmonic operator functions on the unit disk. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki*, 9:37–41, 1999.

[27] S. S. Boiko, V. K. Dubovoy, and A. Ya. Kheifets. Measure Schur complements and Spectral Functions of Unitary Operators with Respect to Different Scales. *Operator Theory: Advances and Applications*, 123:89–138, 2001.

[28] S. S. Boiko, V. K. Dubovoy, and A. Ya. Kheifets. Defect functions of holomorphic contractive operator-functions and the scattering suboperator through the internal channels of a system. II. *Complex Analysis and Operator Theory*, 8(5):991–1036, 2014.

[29] S. S. Boiko, V. K. Dubovoy, and A. Ya. Kheifets. On some special cases of Radon – Nikodym theorem for vector- and operator-valued measures. *Operator Theory: Advances and Applications*, 244:131–147, 2015.

[30] V. Bolotnikov. On the Carathéodory–Fejér interpolation for generalized Schur functions. *Integral Equations Operator Theory*, 50(1):9–41, 2004.

[31] V. Bolotnikov and H. Dym. *On boundary interpolation for matrix Schur functions*, volume 181. Mem. Amer. Math. Soc., 2006.

[32] V. Bolotnikov and A. Kheifets. Boundary Nevanlinna-Pick interpolation problems for generalized Schur functions. In *Interpolation, Schur functions and moment problems. Oper. Theory Adv. Appl.*, volume 165, pages 67–119. Birkhäuser, Basel, 2006.

[33] V. Bolotnikov and A. Kheifets. A higher order analogue of the Carathéodory – Julia theorem. *J. Funct. Anal*, 273(1):350–371, 2006.

[34] V. Bolotnikov and A. Kheifets. On negative inertia of Pick matrices associated with generalized Schur functions. *Integral Equations Operator Theory*, 56(3):323–355, 2006.

[35] V. Bolotnikov and A. Kheifets. Carathéodory–Julia type theorems for operator valued Schur functions. *J. Anal. Math*, 106:237–270, 2008.

[36] V. Bolotnikov and A. Kheifets. The higher order Caratheodory-Julia theorem and related boundary interpolation problems. In *Recent advances in matrix and operator theory. Oper. Theory Adv. Appl.*, volume 179, pages 63–102. Birkhäuser, Basel, 2008.

[37] V. Bolotnikov and A. Kheifets. Caratheodory-Julia type conditions and symmetries of boundary asymptotics for analytic functions on the unit disk. *Mathematische Nachrichten*, 282(11):1513–1536, 2009.

[38] V. Bolotnikov, A. Kheifets, and L. Rodman. Functions with Pick matrices having bounded number of negative eigenvalues. *Contemporary Mathematics*, 323:393–417, 2003.

[39] V. Bolotnikov, A. Kheifets, and L. Rodman. Pairs of functions with indefinite Pick matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 367:271—290, 2003.

[40] V. Bolotnikov, A. Kheifets, and L. Rodman. Jet functions having indefinite Caratheodory-Pick matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 385(3):215–286, 2004.

[41] V. Bolotnikov, A. Kheifets, and L. Rodman. Nevanlinna – Pick interpolation: Pick matrices have bounded number of negative eigenvalues. *Proceedings of Amer. Math. Soc.*, 132(3):769–780, 2004.

[42] V. Bolotnikov, A. Kheifets, and L. Rodman. Operator valued jet functions with positive Caratheodory-Pick matrices. *Integral Equations and Operator Theory*, 50(3):291—304, 2004.

[43] C. Carathéodory. Über die winkelderivierten von beschränkten analytischen funktionen. *Sitz. Preuss. Akad. Phys.-Math*, 4:1–18, 1929.

[44] T. Constantinescu and A. Gheondea. The Schur algorithm and coefficient characterizations for generalized Schur functions. *Proc. Amer Math. Soc*, 128(9):2705–2713, 2000.

[45] M. Cotlar and C. Sadosky. Integral representations of bounded Hankel forms defined in scattering systems with a multiparametric evolution group. In I. Gohberg, J.W. Helton, and L. Rodman, editors, *Contributions to Operator Theory and its Applications. Operator Theory: Advances and Applications.*, volume 35. 1988.

[46] V. Derkach. On indefinite abstract interpolation problem. *Methods Funct. Anal. Topology*, 7(4):87–100, 2001.

[47] A. Dijksma and H. Langer. Notes on a Nevanlinna-Pick interpolation problem for generalized Nevanlinna functions. *Topics in interpolation theory. Oper Theory Adv. Appl*, 95:69–91, 1997.

[48] A. Dijksma, H. Langer, and H. S. de Snoo. Characteristic functions of unitary operator colligations in π_κ spaces. *Operator Theory: Advances and Applications*, 19:125–194, 1986.

[49] W. F. Donoghue. Springer Verlag, New York–Heidelberg, 1974.

[50] A. E. Frazho, S. ter Horst, and M. Kaashoek. Coupling and relaxed commutant lifting problem. *Integral Equations and Operator Theory*, 54:33–67, 2006.

[51] J. B. Garnett. *Bounded analytic functions.* Academic Press, New York, 1981.

[52] L. B. Golinskii. A generalization of the matrix Nevanlinna–Pick problem. *Izv. Akad Nauk Armyan. SSR Ser. Mat.*, 18:187–205, 1983.

[53] U. Grenander and G. Szegö. *Töplitz forms and their applications.* University of California Press, Berkeley-Los Angeles, 1958.

[54] H. Hamburger. Über eine erweiterung des stieltjesschen momentenproblems. *Math Ann*, 82(3-4):168–187, 1921.

[55] A. Hindmarsh. Pick conditions and analyticity. *Pacific J Math.*, 27:527–531, 1968.

[56] K. Hoffman. *Banach Spaces of Analytic Functions.* Prentice-Hall, New York, 1962.

[57] R. Horn and C. Johnson. *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, 2nd edition, New York, 2013.

[58] G. Julia. Extension d'un lemma de Schwartz. *Acta Math*, 42:349–355, 1920.

[59] V. E. Katsnelson. Left and right Blaschke - Potapov products and Arov-singular matrix-valued functions. *Int. Equat. and Oper. Th*, 13:236–248, 1990.

[60] V. E. Katsnelson. Weighted spaces of pseudocontinuable functions and approximations by rational functions with prescribed poles. *Zetschr. fur Analysis und ihre Anwend*, 12:27–47, 1993.

[61] V.E. Katsnelson, A.Ya. Kheifets, and P.M. Yuditskii. Abstract interpolation problem and isometric operators extension theory. In *Operators in Functional Spaces and Questions of Function Theory*, pages 83–96. Kiev, 1987.

[62] A. Kheifets. Parseval equality in abstract interpolation problem and coupling of open systems I. *Teor. Funktsii Funktsional. Anal. i Prilozhen*, 49:112–120, 1988.

[63] A. Kheifets. Parseval equality in abstract interpolation problem and coupling of open systems II. *Teor. Funktsii Funktsional. Anal. i Prilozhen*, 50:98–103, 1988.

[64] A. Kheifets. *Scattering matrices and Parseval equality in Abstract Interpolation Problem, PhD Thesis.* Kharkov State University, 1990.

[65] A. Kheifets. On a necessary but not sufficient condition for a γ-generating pair to be a Nehari pair. *Integral Equations and Operator Theory*, 21:334–341, 1995.

[66] A. Kheifets. On regularization of γ-generating pairs. *J. Funct. Anal*, 130(2):310–333, 1995.

[67] A. Kheifets. Hamburger moment problem: Parseval equality and Arov-singularity. *J. Funct. Anal*, 141(2):374–420, 1996.

[68] A. Kheifets. Nehari's interpolation problem and exposed points of the unit ball in the Hardy space H^1. In *Proceedings of the Ashkelon Workshop on Complex Function Theory (1996)*, volume 11, pages 145–151, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, Israel, 1997. Israel Math. Conf. Proc.

[69] A. Kheifets. The abstract interpolation problem and applications. In *Holomorphic Spaces (MSRI, Berkeley, CA, 1995)*, volume 33, pages 351–379. Math. Sci. Res. Inst. Publ, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[70] A. Kheifets. Parametrization of solutions of the Nehari problem and nonorthogonal dynamics. In H. Bercovici and C. Foias, editors, *Operator*

Theory and Interpolation. Operator Theory: Advances and Applications, volume 115, pages 213–233. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, 2000.

[71] A. Kheifets. Abstract interpolation scheme for harmonic functions. In D. Alpay, I. Gohberg, and V. Vinnikov, editors, *Interpolation Theory, Systems Theory and Related Topics. Operator Theory: Advances and Applications.*, volume 134, pages 287–317. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, 2002.

[72] A. Ya. Kheifets and P. M. Yuditskii. An analysis and extension of V. P. Potapov's approach to interpolation problems with applications to the generalized bi-tangential Schur-Nevanlinna-Pick problem and J-inner-outer factorization. *Operator Theory: Advances and Applications*, 72:133–161, 1994.

[73] I. V. Kovalishina. A multiple boundary interpolation problem for contractive matrix–valued functions in the unit circle. *Teoriya Funktsii, Funktsianal'nyi Analiz i Ikh Prilozheniya*, 51:38–55, 1989.

[74] M. G. Kreĭn and H. Langer. Über die verallgemeinerten Resolventen und die charakteristische Funktion eines isometrischen Operators im Raume π_κ. *Colloq Math. Soc. János Bolyai*, 5:353–399, 1972.

[75] M. G. Kreĭn and H. Langer. Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume π_κ zusammenhängen. I. Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen. *Math Nachr*, 77:187–236, 1977.

[76] P. D. Lax. *Functional Analysis.* Wiley-Interscience, New York, 2002.

[77] W. S. Li and D. Timotin. The relaxed intertwining lifting in the coupling approach. *Integral Equations and Operator Theory*, 54:97–111, 2006.

[78] J. E. Marsden and M. J. Hoffman. *Basic complex analysis.* W. H. Freeman and Company, New York, 1987.

[79] M. D. Moran. On intertwining dilations. *J. Math. Anal. Appl*, 141:219–234, 1989.

[80] R. Nevanlinna. Über beschränkte analytische funktionen. *Ann. Acad Sci. Fenn. Ser A*, 32(7), 1929.

[81] N. K. Nikolskii. *Treatise on the shift operator.* Springer Verlag, Heidelberg, 1986.

[82] A. A. Nudelman. A generalization of classical interpolation problems. *Dokl Akad. Nauk. SSSR*, 4:790–793, 1981.

[83] J. A. Reneke, R. E. Fennell, and R. B. Minton. *Structured Hereditary Systems.* Marcel Dekker, New York-Basel, 1987.

[84] D. Sarason. Angular derivatives via Hilbert space. *Complex Variables Theory Appl*, 10(1):1–10, 1988.

[85] D. Sarason. Exposed points in H^1. *Operator theory: Advances and applications*, 41:485–496, 1989.

[86] D. Sarason. *Sub–Hardy Hilbert Spaces in the Unit Disk.* Wiley, New York, 1994.

[87] Yu. L. Schmulian. Operator Hellinger integral. *Mat. Sbornik*, 49(91):381–430, 1959.

[88] Yu. L. Schmulian. Topics on theory of operators with finite nonhermitian rank. *Mat. Sbornik*, 57(99):105–136, 1962.

[89] Yu. L. Schmulian. On reduction of operator Hellinger integral to Lebesgue integral. *Izv. Vussh. Uchebn. Zaved. (Matem.)*, 2(33):164–175, 1963.

[90] J. H. Shapiro. *Composition operators and classical function theory.* Springer-Verlag, New York, 1993.

[91] B. Sz.-Nagy and C. Foias. *Harmonic analysis of operators in Hilbert space.* North-Holland, Amsterdam, 1970.

[92] A. Volberg and P. Yuditskii. Remarks on Nehari's problem, matrix A^2 condition, and weighted bounded mean oscillation. *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 226:239–254, 2009.

[93] J. L. Walsh. *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain.* Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965.

ДОДАТОК А

Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

Публікації у математичних реферованих виданнях

1. Kheifets A. Ya. , On necessary but not sufficient condition for gamma-generating pair to be a Nehari pair, Integral Equations and Operator Theory 21, 3 (1995) 334-341.
2. Kheifets A. Ya. , Regularization of gamma-generating pairs and exposed points in, Journal of Functional Analysis, 130, 2 (1995) 310–333.
3. Kheifets A. Ya., Hamburger moment problem: Parseval equality and Arov-singularity, Journal of Functional Analysis, 141, 2 (1996) 374-420.
4. Kheifets A., Nehari problem and exposed points of the unit ball in the Hardy space, Israel Mathematical Conference Proceedings, 11 (1997) 145-151.
5. Boiko S., Dubovoy V., Kheifets A., On some extremal problem for harmonic operator functions on the unit disk, Dopov. Akad. Nauk Ukr. (Prirodozn. Tekh. Nauki), 9 (1999) 37-41.
6. Kheifets A., Parameterization of solutions of the Nehari Problem and nonorthogonal dynamics, Operator Theory: Advances and Applications, 115 (2000) 213-233.
7. Boiko S., Dubovoy V., Kheifets A., Measure Schur complements and spectral functions of unitary operators with respect to different scales, Operator Theory: Advances and Applications, 123 (2001) 89-138.
8. Kheifets A., Abstract Interpolation Scheme for Harmonic Functions, Operator Theory: Advances and Applications, 134 (2002) 287-317.

9. Bolotnikov V., Kheifets A., Rodman L., Functions with Pick matrices having bounded number of negative eigenvalues, Contemporary Mathematics, 323 (2003) 393-417.

10. Bolotnikov V., Kheifets A., Rodman L., Pairs of functions with indefinite Pick matrices, Linear Algebra and its Applications, 367 (2003), 271—290.

11. Bolotnikov V., Kheifets A., Rodman L., Nevanlinna – Pick interpolation: Pick matrices have bounded number of negative eigenvalues, Proceedings of Amer. Math. Soc., 132 (2004) no. 3 769-780.

12. Bolotnikov V., Kheifets A., Rodman L., Operator valued jet functions with positive Carathéodory-Pick matrices, Integral Equations and Operator Theory 50 (2004), no. 3, 291—304.

13. Bolotnikov V., Kheifets A., Rodman L., Jet functions having indefinite Carathéodory-Pick matrices, Linear Algebra and its Applications, 385 (2004) 215-286.

14. Bolotnikov V., Kheifets A., On negative inertia of Pick matrices associated with generalized Schur functions, Integral Equations and Operator Theory, 56 (2006) no. 3, 323–355.

15. Bolotnikov V., Kheifets A., Boundary Nevanlinna-Pick interpolation problems for generalized Schur functions, Operator Theory: Advances and Applications, 165 (2006) 67—119.

16. Bolotnikov V., Kheifets A., A higher order analogue of the Carathéodory-Julia theorem, Journal of Functional Analysis, 237 (2006) no. 1, 350-371

17. Bolotnikov V., Kheifets A., The higher order Carathéodory-Julia theorem and related boundary interpolation problems, Operator Theory: Advances and Applications, 179 (2008) 63-102.

18. Bolotnikov V., Kheifets A., Carathéodory-Julia type theorems for operator valued Schur functions, Journal d'Analyse Mathematique, 106 (2008) no. 1, 237-270.

19. Bolotnikov V., Kheifets A., Carathéodory-Julia type conditions and symmetries of boundary asymptotics for analytic functions on the unit disk, Mathematische Nachrichten, 282 (2009) no. 11, 1513-1536.
20. Ball J., Kheifets A., The inverse commutant lifting problem. I: coordinate free formalism, Integral equations and Operator Theory, 70 (2011) no. 1, 17-62.
21. Ball J., Kheifets A., The inverse commutant lifting problem. II: Hellinger functional-model spaces, Complex Analysis and Operator Theory, 7 (2013) no. 4, 873-907.
22. Boiko S., Dubovoy V., Kheifets A., Defect functions of holomorphic contractive operator-functions and the scattering sub-operator through the internal channels of a system. II, Complex Analysis and Operator Theory, 8 (2014) no. 5, 991-1036.
23. Boiko S., Dubovoy V., Kheifets A., On some special cases of Radon – Nikodym theorem for vector- and operator-valued measures, Operator Theory: Advances and Applications, 244 (2015) 131 – 147.

Публікації у матеріалах міжнародних наукових конференцій

24. Kheifets A., Abstract Interpolation Problem and Commutant Lifting Problem, Book of abstracts of the IX-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Bloomington, USA (1996), p. 25.
25. Kheifets A., Solutions of an Indeterminate Nehari Problem, Book of abstracts of the international conference Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), Saint Louis, USA (1996), p. 57.
26. Kheifets A., Abstract Interpolation Problem for Harmonic Functions, Book of abstracts of the Conference in Honor of H. Dym 60's Anniversary, the Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel (1999), p. 17.

27. Kheifets A., Couplings, Scales and Wave Operators in Interpolation Problems, Book of abstracts of the XIII-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Bordeaux, France (2000), p. 54.

28. Kheifets A., Computing the Scattering Function of the Feedback Loading, Book of abstracts of the meting of the Israel Mathematical Union (IMU), Haifa, Israel (2000), p. 42.

29. Kheifets A., The Abstract Interpolation Problem in the Scattering Setting, Book of abstracts of the International Akhiezer Centenary Conference, Theory of Functions and Mathematical Physics, Kharksv, Ukraine (2001), p. 45.

30. Kheifets A., Defect and Equality in Boundary Interpolation Problem, Book of abstracts of the XIV-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Blacksburg, USA (2002), p. 33.

31. Kheifets A., Abstract Interpolation in Scattering Setting, Book of abstracts of the International Conference Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), South Bend, USA (2002), p. 21.

32. Kheifets A., Multiple Analogue of Julia – Caratheodory Theorem on Angular Derivative, Book of abstracts of the Southeastern Analysis Meeting (SEAM), Knoxville, USA (2003), p. 26.

33. Kheifets A., On the Commutant Lifting Problem, Book of abstracts of the XV-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Newcastle, UK (2004), p. 43.

34. Kheifets A., On Boundary Interpolation, Book of abstracts of the XVI-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Storrs, USA (2005), p. 37.

35. Kheifets A., Direct and Inverse Lifting Type Interpolation Problems, Book of abstracts of the B. Ya. Levin Centennial Conference, Entire and

Subharmonic Functions and Related Topics, Kharkiv, Ukraine (2006), p. 22.

36. Kheifets A., Direct and Inverse Lifting Problem, Book of abstracts of the XVI-th Summer St.-Petersburg Meeting in Mathematical Analysis, St.-Petersburg, Russia (2007), p. 24.
37. Kheifets A., Abstract Interpolation Problem. Direct and Inverse Lifting Problem, Book of abstracts of the International Conference Analysis and Mathematical Physics, Kharkiv, Ukraine (2013), p. 9-10.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на наступних семінарах та міжнародних наукових конференціях:

Семінар відділу Теорії Функцій, ФТІНТ, Харків 1993

Operator Theory seminar, The Weizmann Institute of Science, Rehovot, Ізраїль, 1993-1995

9-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Bloomington, США, 1996

Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), Saint Louis, США, 1996

International Conference in Honor of M. Livsits 80's Anniversary, Beer-Sheva, Ізраїль, 1997

International Conference in Memory of M. G. Krein, Одеса 1997

Семінар з Теорії Операторів, Харківський Національний університет, Харків 1997

Analysis seminar, Simon Bolivar University, Caracas, Венесуела, 1998

10-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Groningen, Голандія, 1998

Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), Padova, Італія, 1998

Семінар з Аналізу, Харківський Національний університет, Харків 1998

Conference in Honor of H. Dym 60's Anniversary, the Weizmann Institute of Science, Rehovot, Ізраїль, 1999

13-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Bordeaux, Франція, 2000

Israel Mathematical Union (IMU), Haifa, Ізраїль, 2000

Seminar Department of Mathematics, Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Ізраїль, 2000

Theory of Functions and Mathematical Physics, International Akhiezer Centenary Conference, Харків 2001

13-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Blacksburg, США, 2002

Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), South Bend, США, 2002

International Linear Algebra Society (ILAS), Auburn, США, 2002

Great Plains Operator Theory Symposium (GPOTS), Charlotte, США, 2002

Department of Mathematics colloquium, University of Massachusetts Lowell, Lowell, США, 2003

Analysis Seminar, Brown University, Providence, США, 2003

Southeastern Analysis Meeting (SEAM), Knoxville, США, 2003

15-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Newcastle, Англія, 2004

Operator Theory Seminar, University of Connecticut, Storrs, США, 2004

16-th International Workshop on Operator Theory and Applications (IWOTA), Storrs, США, 2005

Entire and Subharmonic Functions and Related Topics (B. Ya. Levin Centennial Conference), Харків, 2006

16-th Summer St.-Petersburg Meeting in Mathematical Analysis, St.-Petersburg, Росія, 2007

Characteristic Functions and Transfer Functions in Operator Theory and System Theory, Conference in Memory of M.S. Livsits, Beer-Sheva, Ізраїль, 2007

International Conference Analysis and Mathematical Physics, Харків, 2013

Семінар з Аналізу, Донецький Національний університет, Донецьк 2013