Запорізький національний університет
Міністерство освіти і науки України

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ГРЕЧНЄВА МАРИНА ОЛЕКСАНДРІВНА

УДК 514.764

ДИСЕРТАЦІЯ

ГЕОМЕТРІЯ ДВОВИМІРНОЇ ПОВЕРХНІ ПРОСТОРУ МІНКОВСЬКОГО ТА ЇЇ ГРАССМАНОВОГО ОБРАЗУ

01.01.04 – геометрія та топологія
фізико-математичні науки (11- математика та статистика)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
______________М. О. Гречнєва

Науковий керівник: Стєганцева Поліна Георгіївна, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Запоріжжя – 2018

АНОТАЦІЯ

Гречнєва М. А. Геометрія двовимірної поверхні простору Мінковського та її грассманового образу. − Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 «Геометрія та топологія». − Запорізький національний університет; Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркина НАН України, Харків, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню зв’язків між диференціальними геометріями поверхонь простору Мінковського та їх грассманових образів і використанню цих зв’язків для вивчення поверхонь.

На множині l-площин простору Мінковського визначене поняття стаціонарних кутів пари l-площин і досліджене взаємне розташування пари l-площин. В підмножинах просторовоподібних, часоподібних та ізотропних l-площин введена структура гладкого многовиду. В кожному з цих підмноговидів визначена метрика в локальних координат та за допомогою стаціонарних кутів; отримані формули для обчислення символів Кристоффеля другого роду й рівняння геодезичних ліній.

Отримані розклади Гаусса й Вейнгартена для двовимірних просторовоподібних і часоподібних поверхонь простору Мінковського. Показано, що індикатрисою нормальної кривини просторовоподібної поверхні є центральна невироджена крива часоподібної нормальної площини, а для часоподібної поверхні індикатриса нормальної кривини є гіперболою. Отримані аналоги формули Картана для обчислення гауссової кривини поверхні.

Визначена метрика шестивимірного простору зображень грассманового многовиду простору Мінковського. Зображеннями підмноговидів грассманового многовиду в шестивимірному просторі є алгебраїчні поверхні. Показано, що на цих поверхнях індукується псевдоріманова метрика та знайдено її вигляд. Доведені деякі властивості підмноговидів грассманового многовиду та їх точкових образів. Побудований тензор кривини підмноговидів

неізотропних площин, знайдені формули для обчислення секційної кривини підмноговидів уздовж дотичних площин різних типів і показано, що вона може приймати будь-які дійсні значення.

Розглянуто поняття грассманового образу поверхні та його завдання плюккеровими координатами. Отримано зв'язок кривини підмноговидів неізотропних площин уздовж площин, дотичних до грассманового образу двовимірної поверхні простору Мінковського, із внутрішньою геометрією поверхні. Виділені класи поверхонь простору Мінковського, для яких кривина грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу, приймає стаціонарні значення.

Отримані афінна класифікація точок неізотропної поверхні та класифікація точок поверхні залежно від значень секційної кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу поверхні. Знайдено умови еквівалентності цих класифікацій.

Розв’язана задача відновлення поверхні простору Мінковського за її грассмановим образом. Описано процедуру відновлення поверхні, грассманів образ якої співпадає з заданою двовимірною поверхнею на грассмановому многовиді. Доведені теореми існування поверхні з краєм, що має заданий грассманів образ.

Ключові слова: простір Мінковского, двовимірна поверхня, грассманів многовид, грассманів образ поверхні, індикатриса нормальної кривини, секційна кривина.

ABSTRACT

Grechneva M.O. *The geometry of the two-dimensional surface of Minkowski space and its grassman image* - Manuscript.

The thesis for the Candidate of physical and mathematical sciences degree on specialty 01.01.04 – the geometry and the topology (111 – Mathematics). – Zaporizhzhya National University, Ministry of Education and Science of Ukraine,

B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2018.

The dissertation deals with the research of the links between the differential geometries of the surfaces and their Grassman images in Minkowski space and with the use of these links for the investigation of the surfaces.

The concept of the stationary angles of the couple of the *l*-planes has been defined on the set of the *l*-planes in Minkowski space, the relative positions of the *l*-planes have been investigated. The smooth manifold structure has been constructed on the subsets of the timelike, the spacelike and the isotropic *l*-planes. The metric with the local coordinates and with the stationary angles has been defined on each submanifold. The formulas for the calculation of Christoffel symbols of the second kind and the geodesic lines equations have been obtained.

The Gauss and Weingarten derivation formulas for two-dimensional timelike and spacelike surfaces in the Minkowski space have been obtained. It has been proved that the indicatrix of the normal curvature of the spacelike surface is the central non-degenerated curve on the timelike normal plane and the indicatrix of the normal curvature of the timelike surface is the hyperbola. The analogues of Cartan formula for the calculation of Gauss curvature have been obtained.

The metric in the six-dimensional space of the images of Grassman manifold in Minkowski space has been determined. The submanifold of Grassman manifold is mapped by the algebraic surfaces in the six-dimensional space. It has been proved that on these surfaces the pseudo-Riemannian metric is induced and the form of this metric has been obtained. Some properties of the submanifolds of Grassman manifold and of its point images have been proved. The tensor of the curvature of the submanifolds of the non-isotropic planes has been constructed. The formulas for the calculation of the sectional curvature of the submanifolds along the different types of the tangential planes have been obtained and it has been proved that the sectional curvature of this manifold can take on any real values.

The concept of Grassman image of the surface and its determination by Plucker coordinates has been considered. One has found the link between the curvature of the submanifolds of the non-isotropic planes along the domains which are tangential to Grassman image of the two-dimensional surface in Minkowski space and the intrinsic geometry of the surface. The classes of the surfaces in Minkowski space with the stationary values of the curvature of Grassman manifold along the domains which are tangential to Grassman image have been found.

The affine classification of the points of the non-isotropic surface in the four -dimensional Minkowski space and the classification with the help of Glassman image have been made. The conditions of the equivalence of these classifications have been found.

The problem connected with the finding of the surface in Minkowski space with the given Grassman image has been solved. The procedure of the reconstruction of the surface, Grassman image of which coincides with the given two-dimensional surface on Grassman manifold has been presented. The theorems which state the existence of the surface with boundary which has the given Grassman image have been proved.

Key words: Minkowski space, two-dimensional surface, Grassman manifold, Grassman image of the surface, indicatrix of the normal curvature, sectional curvature.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

1. Гургенидзе М. А. О погружении грассманового многообразия псевдоевклидова пространства / М. А. Гургенидзе // Зб. праць інституту математики НАН України. – 2006. – 3. №3. – С. 107-114.

2. Гургенидзе М. А. Внутренняя геометрия грассманового многообразия псевдоевклидова пространства / М. А. Гургенидзе, П. Г. Стеганцева // Вісн. Харк. нац. ун-ту. Математика, прикл. математика і механіка. – 2008. – 826, №58. – С. 141-150.

3. Величко И. Г. Подмногообразия грассманового многообразия плоскостей псевдоевклидова пространства / И. Г. Величко, М. А. Гургенидзе, П. Г. Стеганцева // Зб. праць інституту математики НАН України. – 2009. – 6. №2. – С. 56-76.

4. Гречнева М. А. О существовании поверхности псевдоевклидова пространства с заданным грассмановым образом / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Укр. мат. журнал. – 2016. – т.68, №10. – С. 1320-1329

5. Гречнева М. А. О поверхностях пространства Минковского со стационарными значениями секционной кривизны грассманового образа / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Proceedings of the International Geometry Center. – 2016. – Vol. 9. – №2. – pp. 42-48.

6. Стеганцева П. Г. Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства / П. Г. Стеганцева, М. А. Гречнева // Известия вузов. Математика. – 2017. – №2. – С. 65-75.

7. Стеганцева П. Г. Эквивалентность аффинной и грассмановой классификаций точек поверхности пространства Минковского / П. Г. Стеганцева, М. А. Гречнева // Proceedings of the International Geometry Center. – 2017. – Vol. 10. – №1. – pp. 59-66.

8. Гречнева М. А. Существование в пространстве Минковского поверхности с краем, имеющей заданный грассманов образ / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Proceedings of the International Geometry Center. – 2018. – Vol.11. – № 1. – pp. 27-38.

Публікації, які засвідчують апробацію дисертації

9. Гургенидзе М. А. Гладкая структура на множестве двумерных плоскостей в пространстве ${}^1R_4$ / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Труды участников междунар. школы-семинара по геометри и анализу памяти Н. В. Ефимова, 5-11 сент. 2006г. – Ростов-на-Дону, 2006 – С. 28

10. Гургенидзе М. А. Метрика в грассмановом многообразии псевдоевклидова пространства индекса 1 / М. А. Гургенидзе, П. Г. Стеганцева // Тези доповідей міжнародної конференції «Геометрія в Одесі – 2007». – Одесса, 2007. – С. 47

11. Гургенидзе М. А. Геодезические в грассмановом многообразии псевдоевклидова пространства / М. А. Гургенидзе, П. Г. Стеганцева // Тези доповідей 7-ої міжнародної конференції з геометрії та топології. – Черкаси, 2007. – С. 16-17.

12. Гургєнідзе М. А. Грасманів образ поверхні псевдоевклідового простору / М. А. Гургєнідзе, П. Г. Стєганцева // Геометрия в Астрахани – 2007. Симметрии: теоеретические и геометрические аспекты: междун. семинар 11-14 сентября 2007г.: тез. докл. – Изд. дом «Астраханский университет», 2007. – С. 70.

13. Гургєнідзе М. А. Про секційну кривину грасманова многовиду псевдоевклідового простору / М. А. Гургєнідзе, П. Г. Стєганцева // Тези доповідей міжнародної конференції «Геометрія в Одесі – 2008». – Одесса, 2008. – С. 43-44.

14. Гургєнідзе М. О. Підмноговид ізотропних *l*-площин грассманова многовиду псевдоевклідового простору / М. О. Гургєнидзе, П. Г. Стєганцева // Тези доповідей міжнародної конференції «Геометрия в Астрахани – 2008». Астрахань. – 2008. – С. 69.

15. Гургенидзе М. А. Подмногообразие изотропных плоскостей грассманова многообразия псевдоевклидова пространства / М. А. Гургенидзе, П. Г. Стеганцева, Е. В. Величко // Тези доповідей міжнародної конференції «Геометрія в Одесі – 2009». – Одесса, 2009. – С. 46

16. Гречнева М. А. Индикатриса нормальной кривизны евклидовой поверхности псевдоевклидова пространства / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Тези міжнародної конференції «Геометрія в Одесі – 2015»: 25-31 травня 2015. – Одесса, 2015. – С. 72

17. Гречнева М. А. Стационарные значения секционной кривизны грассманова многообразия псевдоевклидова пространства / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Тезисы международной конференции «Геометрия и топология в Одессе – 2016»: 2-8 июня 2016 г. – Одесса, 2016. – С. 67

18. Stegantseva P. G. On the surfaces in Minkowski spase which correspond to the stationary values of the sectional curvature of the Grassmann manifold / P. G. Stegantseva, M. A. Grechneva // Abstracts of the International Conference "Modern Advances in Geometry and Topology". – Kharkiv, 2016. – P. 48

19. Стеганцева П. Г. Классификация точек поверхности пространства Минковского / П. Г. Стеганцева, М. А. Гречнева // Тези міжнародної конференції «Алгебраїчні та геометричні методи аналізу». – Одеса, 31 травня – 5 червня 2017. – Одесса, 2017. – С. 143

20. Гречнєва М. О. Відновлення поверхні з краєм простору Мінковського за її грассмановим образом / М. О. Гречнєва, П. Г. Стєганцева // Тези міжнародної конференції «Алгебраїчні та геометричні методи аналізу». – Одеса, 30 травня – 4 червня 2018. – Одесса, 2018. – С. 73

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Оскільки математичною моделлю простору-часу в спеціальній теорії відносності служить точковий псевдоевклідів простір індексу 1 (простір Мінковського), то інтерес до вивчення об'єктів цього простору не слабшає вже протягом довгого часу. У класичній диференціальній геометрії важливу роль відіграє гауссове сферичне відображення поверхонь. Найбільш природнім узагальненням цього поняття є грассманове відображення підмноговидів у багатовимірних просторах. При грассмановому відображенні кожній точці x підмноговиду F^p, зануреного в простір R_{l+p}, ставиться у відповідність l-площина із грассманового многовиду $G(l,l+p)$, паралельна нормальній l-площині підмноговиду F^p в точці x. Множина отриманих l-вимірних площин, які розглядаються як точки многовиду Грассмана $G(l,l+p)$, називається грассмановим образом підмноговиду F^p. Вивченню грассманового образу й, у зв'язку з цим, дослідженню геометричних властивостей многовидів Грассмана останнім часом приділяється усе більше уваги. Серед задач, пов'язаних з вивченням грассманового образу, виділяються задачі класифікації точок поверхні; вивчення поверхонь із заданим значенням секційної кривини її грассманового образу, зокрема, з екстремальними значеннями секційної кривини; відновлення поверхні за її грассмановим образом, і інші. Багато із цих задач важливі як для самої геометрії так і для її додатків, серед яких можна вказати теорію диференціальних рівнянь у частинних похідних.

У просторі Мінковського також можна розглядати многовид Грассмана, який являє собою об'єднання множин просторовоподібних, часоподібних і ізотропних площин однієї розмірності. Оскільки в цьому просторі існують поверхні різних типів, то дослідження грассманового образу кожного типу поверхні є окремою змістовною задачею. Крім того, перераховані вище задачі майже не досліджені або недостатньо досліджені в просторі Мінковського на відміну від евклідова простору. Усе це свідчить про актуальність теми дослідження.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційне дослідження виконане відповідно до планів наукових досліджень кафедри загальної математики Запорізького національного університету поза бюджетними й госпдоговірними темами.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є знаходження зв’язків між геометріями неізотропних двовимірних поверхонь простору Мінковського та їх грассманових образів.

Основні задачі роботи:

- вивчення грассманового многовиду l-площин простору Мінковського і його підмноговидів;
- вивчення диференціальної геометрії двовимірної поверхні простору Мінковського;
- дослідження грассманового образу неізотропної поверхні;
- афінна й грассманова класифікації точок неізотропних поверхонь та їх еквівалентність;
- виділення класів неізотропних поверхонь зі стаціонарними значеннями кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу поверхні;
- знаходження необхідних і достатніх умов існування поверхні простору Мінковського із заданим грассмановим образом.

Об'єкт дослідження – грассманів образ двовимірної неізотропної поверхні простору Мінковського.

Предмет дослідження – диференціально-геометричні інваріанти поверхні простору Мінковського та її грассманового образу.

Методи дослідження. У роботі використовуються аналітичні методи дослідження: методи диференціальної геометрії підмноговидів; методи неевклідових геометрій; методи лінійної алгебри; методи диференціальних рівнянь у частинних похідних. Доведення всіх теорем є повними й обґрунтованими.

Наукова новизна отриманих результатів. У роботі вивчалася геометрія поверхні простору Мінковського з використанням властивостей її грассманового образу.

У роботі отриманий ряд нових результатів:

- виведені формули для обчислення відстані між площинами грассманового многовиду псевдоевклідова простору в локальних координатах і за допомогою стаціонарних кутів;
- отримано вид однопараметричних сімей *l*–площин, які є геодезичними лініями в грассмановому многовиді;
- побудована індикатриса нормальної кривини для кожного типу неізотропних поверхонь і за допомогою параметрів індикатриси записані формули для обчислення гауссової кривини поверхні та кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу;
- отримані афінна й грассманова класифікації точок неізотропної поверхні й доведена їх еквівалентність;
- описані класи поверхонь зі стаціонарними значеннями секційної кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до їх грассманового образу;
- розв’язана задача про відновлення поверхні простору Мінковського по заданому її грассмановому образу;
- доведена теорема про існування поверхні простору Мінковського із заданим грассмановим образом і описана процедура її відновлення;
- доведені теореми про існування поверхні з краєм, що має заданий грассманів образ.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертація носить теоретичний характер. У роботі встановлений зв'язок між властивостями поверхонь простору Мінковського й властивостями їх грассманового образу.

Отримані результати можуть бути використані для подальших досліджень у теорії підмноговидів неевклідових просторів і їх додатків.

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати дисертаційної роботи, які виносяться на захист, отримані автором особисто.

Апробація результатів дисертації:

- наукові семінари кафедри алгебри та геометрії Запорізького національного університету 2006-2009, 2015-2017г.г.
- міжнародні конференції «Геометрія в Одесі – 2006, 2007, 2008, 2009, 2015, 2016»
- 7-я міжнародна конференція з геометрії й топології, Черкаси, ЧДТУ, 2007.
- міжнародна школа-семінар з геометрії й аналізу пам'яті Н.В. Єфімова, Абрау-Дюрсо, 2006.
- міжнародний семінар «Геометрія в Астрахані – 2007, 2008» «Симетрії: теоретичні й методичні аспекти». «Астраханський університет», 2007, 2008.
- міжнародна конференція "Modern Advances in Geometry and Topology", Харків, 2016
- міжнародна конференція «Алгебраїчні та геометричні методи аналізу», Одеса, 2017, 2018
- семінар відділу диференціальних рівнянь і геометрії ФТІНТ ім. Б. І. Вєркина (керівник – проф., д.ф.-м.н. Амінов Ю. А.), Харків, 2016
- Харківський міський геометричний семінар (керівник – член-кореспондент НАНУ, проф., д.ф.-м.н. Борисенко О. А.), Харків, 2017

Публікації. Результати, представлені в дисертації, опубліковані в 8 статтях [20, 28, 29, 33, 35, 42, 76, 77] у наукових журналах і збірниках, які входять у перелік спеціалізованих журналів, затверджених МОН України й міжнародних виданнях і в 12 збірниках тез доповідей міжнародних наукових конференцій і семінарів [30, 31, 32, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41,43, 91].

Структура й об'єм дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел, який містить у собі

95 найменувань. Робота представлена на 162 сторінках, список джерел займає 10 сторінок. Основні результати, які виносяться на захист, викладено в розділах 2-4.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Питання, пов'язані з вивченням підмноговидів евклідова простору, давно викликають інтерес у геометрів. Геометрія підмноговидів є частиною сучасної геометрії. Вона вивчає факти, які не мають аналогів у класичній теорії поверхонь. Ряд результатів досліджень у геометрії підмноговидів тісно пов'язані з механікою й фізикою.

Многовидом Грассмана $G(l,l+p)(l,p \geq 1)$ називається множина всіх l-вимірних площин, що проходять через початок координат O в евклідовому просторі R_{l+p}. На $G(l,l+p)$ природно вводиться структура аналітичного многовиду. Його картами є множини l-вимірних площин, які проектуються без виродження на деяку l-вимірну площину π_0.

Основи загальної теорії сімей l-вимірних площин у різних n-вимірних просторах були закладені Вагнером В. В. [19], Гейдельманом Р. М. [22], Розенфельдом Б. А. [69], Аківісом М. А. [1].

Однією з ефективних конструкцій у класичній диференціальній геометрії є гауссове сферичне відображення поверхонь. Особливо успішно гауссове відображення застосовується для вивчення гіперповерхонь евклідова простору, зокрема, двовимірних поверхонь тривимірного евклідова простору.

У багатовимірній диференціальній геометрії знайшло застосування узагальнення гауссова відображення, яке називають грассмановим відображенням. Грассманове відображення плідно використовується як у локальних дослідженнях, так і в геометрії «в цілому». Образ грассманового відображення (грассманів образ підмноговиду) в евклідовому просторі є важливою геометричною характеристикою підмноговиду. Інтерес до вивчення грассманового образу й, у зв'язку із цим, до дослідження геометричних властивостей многовидів Грассмана не слабшає дотепер.

Систематичне вивчення диференціальної геометрії грассманових многовидів l-вимірних підпросторів n-вимірного евклідова та ермітова просторів почали Лейхтвейс К. [86] і Вонг Ю. [94]. Ними були введені локальні координати спеціального виду, знайдені метричні тензори, тензори кривини, секційна кривина, розглянуті геодезичні на многовидах Грассмана. Було встановлено, що грассманові многовиди відносно канонічних метрик є просторами Ейнштейна постійної скалярної кривини у двовимірних напрямках Теорія просторів Ейнштейна викладена в роботах Петрова А. З. [65], Бессе А. [12].

Нехай F^p – регулярний класу C^2 p-вимірний підмноговид в $(l+p)$-вимірному евклідовому просторі R_{l+p}. Побудуємо в кожній точці $x \in F^p$ підмноговиду нормальну l-вимірну площину $N_x F^p$. Кожній такій площині поставимо у відповідність паралельну їй площину грассманового многовиду $G(l, l+p)$. Множина отриманих l-вимірних площин, які розглядаються як точки многовиду Грассмана $G(l, l+p)$, називається грассмановим образом підмноговиду F^p, а описане відображення називається грассмановим. Якщо в точці многовиду грассманове відображення має максимальний ранг, то грассманів образ буде невиродженим регулярним (класу C^1) p–вимірним підмноговидом в $G(l, l+p)$. Невироджений грассманів образ підмноговиду F^p будемо позначати надалі через Γ^p.

Дослідження грассманового образу підмноговидів в евклідовому просторі проводилося в роботах Обата М. [85], Муто Ю. [87,88,89,90], Вонга Ю. [94,95], Амінова Ю. А. [2,3,4,5,6,8,9], Хоффмана Д., Оссермана Р. [83,84], Вайнера Дж. [92,93], Борисенка О. А. [14,17], Ніколаєвського Ю. А. [17,64], Горькавого В. О. [24,25,26,27], Савельєва В. М. [73,74,75] і інших геометрів. Результати, які були отримані до 1989 року, висвітлені в оглядовій статті Борисенка О.А., Ніколаєвського Ю. А. [18].

Геометрія дійсних грассманових многовидів в ріманових просторах постійної кривини викладена алгебраїчним методом у роботах Козлова С.О. [49,51,52,53,54]. У роботах [55,56,57] Козлов С. О. розглядав сферичні відображення поверхонь у довільних ріманових просторах. Обчислена форма метрик сферичних образів.

Одним з важливих питань є дослідження властивостей кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу підмноговидів (секційної кривини). Вонг Ю. [95] встановив, що секційна кривина дійсного грассманового многовиду двовимірних площин чотиривимірного евклідова простору має точні границі $\overline{K}(\sigma)\in[0,2]$ й дав характеристику тих двовимірних напрямків σ, у яких $\overline{K}(\sigma)$ досягає граничних значень.

Муто Ю. в [87] і Борисенко О. А., Ніколаєвський Ю. А. в [17] досліджували підмноговиди з максимальною та мінімальною секційними кривинами уздовж площин, дотичних до їх грассманового образу.

Питання про класифікацію точок многовиду є одним з основних у диференціальній геометрії занурених многовидів. По типу точки на многовиді можна зробити висновок про вид околу цієї точки на многовиді. У диференціальній геометрії гіперповерхонь це питання вирішується декількома способами: за числом асимптотичних напрямків у ній, за знаком і значенням головних кривин гіперповерхні, за допомогою гауссової кривини, за видом дотичного параболоїда. Важливо відзначити, що у випадку гіперповехонь всі ці способи дають той самий результат.

Інша справа, коли розмірність поверхні менша розмірності простору більш ніж на одиницю. У цьому випадку не завжди можна розбити точки поверхні на скінченне число класів. Ті випадки, коли таке розбиття можливе, описані в роботі [15]. Для двовимірної поверхні чотиривимірного евклідова простору в роботі [16] наведена афінна класифікація точок за видом дотичного параболоїда, у роботі [3] тип точки поверхні визначається типом відповідної точки її грассманового образу, також вказується на існування еквівалентності цих двох класифікацій.

Однією із цікавих задач, пов'язаних з вивченням грассманового образу, є задача про відновлення поверхні за її грассмановим образом. Сформулювати її можна в такий спосіб: по заданому регулярному підмноговиду Γ^p, що лежить в $G(l,l+p)$, побудувати регулярний p-вимірний підмноговид V^p в R_{l+p}, що має Γ^p своїм грассмановим образом. Для двовимірних поверхонь ця задача вирішена Аміновим Ю. А. у роботах [3,4,8], де доведені теореми існування та єдиності поверхні довільної корозмірності, що має заданий грассманів образ. Цього питання стосуються також роботи Вайнера Дж.[93] .

Горькавий В. О. також у своїх роботах [25,26] займається проблемою відновлення підмноговиду евклідова простору за його грассмановим образом. Ним знайдені необхідні й достатні умови, при яких регулярний тривимірний підмноговид в многовиді Грассмана $G(l,l+3)$ є грассмановим образом регулярного тривимірного підмноговиду $(l+3)$-мірного евклідова простору при $l \geq 4$. Також у роботах Горькавого В. О. розглядається задача відновлення підмноговиду з виродженим в лінію грассмановим образом [24].

Значне місце в геометричних дослідженнях займають питання вивчення зовнішньої геометрії підмноговидів і їх грассманових образів. Оскільки дотичні вектори до грассманового образу підмноговиду F^p в евклідовому просторі R_{l+p} виражаються через коефіцієнти других квадратичних форм F^p, то кривина $\overline{K}$ грассманового многовиду уздовж площини, дотичної до грассманового образу, надає інформацію про зовнішню геометрію самого підмноговиду F^p. Формула, яка безпосередньо виражає кривину $\overline{K}$ через коефіцієнти L^{σ}_{ij} другої квадратичної форми, наводиться в роботах Амінова Ю. А. [7].

Грассманів образ комплексних підмноговидів і афінна класифікація точок комплексних поверхонь вивчалися в роботах Лейбіної О. В. [60].

Незважаючи на велику кількість публікацій, багато питань теорії поверхонь, пов'язаних із грассмановим образом, залишаються невирішеними. Особливо це стосується теорії поверхонь багатовимірних неевклідових просторів.

У ряді робіт Розенфельда Б. А. [69,70] вивчені геометричні властивості сімей багатовимірних площин неевклідових просторів, у тому числі й псевдоевклідова простору. Математичною моделлю простору-часу в спеціальній теорії відносності служить точковий псевдоевклідів простір індексу 1, який ще називають простором Мінковського. Одним з перших дослідників грассманового многовиду псевдоевклідова простору є Т. Ханган [81]. В 1965 році він визначив ріманову структуру на множині площин псевдоевклідова простору. Також питаннями ріманової геометрії грассманових многовидів неізотропних підпросторів псевдоевклідова простору й конгруенцій 2-площин евклідова простору займався І. Маазікас [61,62,63]. У роботі [61] він довів існування інваріантної метрики грассманового многовиду l-площин індексу k псевдоевклідова n-простору індексу m й показав, що ця метрика перетворює грассманів многовид в простір Ейнштейна постійної скалярної кривини при всіх припустимих значеннях k і m.

Вивченню внутрішньої й зовнішньої геометрії грассманового многовиду напрямків фізичного простору присвячені роботи Козлова С. О. [51] і Іванова Д. В. [46,47]. В цих роботах обчислена друга квадратична форма образу плюккерова вкладення та тензор кривини цього многовиду. Однією із задач був опис усіх двовимірних цілком геодезичних підмноговидів з використанням методів полілінійної алгебри. Знайдено п'ять типів цілком геодезичних зв'язних, геодезично повних двовимірних підмноговидів, серед яких є неоднозв'язні й з виродженою метрикою. Показано, що многовиди одного типу Лоренц-сумісні, тобто ізометричні, а різних типів – не ізометричні. Доведена відсутність тривимірних цілком геодезичних підмноговидів многовиду напрямків.

Теорією поверхонь у псевдоевклідовому просторі займалися Соколов Д. Д., Артикбаєв А. [10] і Горох В. П. [23]. У роботах Гороха В. П. розглядаються мінімальні поверхні псевдоевклідова простору.

У сучасній геометрії важливим напрямком є теорія деформацій поверхонь. Серед нескінченно малих неперервних деформацій найбільш вивченими є деформації, що зберігають довжини кривих на поверхні – ізометрії, зокрема, згинання поверхні. Саме з нескінченно малих згинань бере свій початок теорія деформацій. Нескінченно малі згинання вперше з'явилися наприкінці XIX століття в роботах Г. Дарбу й Л. Біанкі та грунтовно досліджувались в XX столітті. Згинання вивчалися в роботах Бляшке В., Кон-Фоссена С. Є., Лібмана Г., Зауера Р., Александрова О. Д., Погорєлова О. В., Єфімова ІІ. В., Фоменко В. Т., Сабітова І. Х., Климентова С. Б., Маркова П. Е. й багатьох інших геометрів.

Особливий клас деформацій – це деформації, що зберігають грассманів образ поверхні (G-деформації). Цей вид деформацій вивчався Бікчантаєвим І. А. [13], Зубковим А. Н., Фоменко В. Т. [45], Горькавим В. О. [27] та ін. Ними отриманий ряд результатів, що описують властивості G-деформацій двовимірних поверхонь у чотиривимірному евклідовому просторі. У роботах Лейко С.Г. і Федченко Ю. С. [78] вивчалися геодезичні деформації поверхонь, що зберігають грассманів образ поверхні евклідова простору. Горькавий В.О. у своїй роботі [27] розглядав G-деформації поверхонь різних типів простору Мінковського.

Висновки до розділу 1

В **першому розділі** проведено огляд літературних джерел за тематикою дисертації. Зроблено аналіз задач, пов’язаних із теорією грассманового образу поверхні в евклідових просторах. Серед цих задач виділяються задачі класифікації точок поверхні, знаходження поверхонь з екстремальними значеннями кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу, відновлення поверхні за її грассмановим образом та інші.

Описано результати досліджень грассманових многовидів у неевклідових просторах, зокрема у просторі Мінковського. В цьому просторі грассманів многовид є об’єднанням підмноговидів просторовоподібних, часоподібних та ізотропних площин. Зроблено аналіз задач, пов’язаних з дослідженням поверхонь простору Мінковського.

РОЗДІЛ 2
ГРАССМАНІВ МНОГОВИД *l*-ПЛОЩИН ПСЕВДОЕВКЛІДОВА ПРОСТОРУ

2.1 Псевдоевклідів простір індексу 1. Класифікація l-площин

Розглянемо множину елементів двох типів – точок й векторів. Під вектором будемо розуміти впорядкований набір $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ дійсних чисел, під точкою також упорядкований набір $A =< a_1, a_2, ..., a_n >$ дійсних чисел. Додавання векторів, множення вектора на дійсне число λ й скалярний добуток векторів визначаються відповідними формулами:

1. $(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$,
2. $\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$,
3. $(\bar{x}, \bar{y}) = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$.

Крім того кожній парі точок $A =< a_1, a_2, ..., a_n >$ і $B =< b_1, b_2, ..., b_n >$ відповідає вектор $\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n)$. Введені операції задовольняють аксіомам груп I, II, IV і аксіомам $V_1 - V_3$ аксіоматики Вейля, а також аксіомі V_4^*: існує n лінійно незалежних вектора, скалярний квадрат одного з яких від'ємний, а кожного іншого – додатний. Ця аксіома є запереченням аксіоми V_4 системи аксіом Вейля евклідова простору [72]. Тим самим побудована найбільш поширена модель псевдоевклідова простору індексу 1. Будемо позначати цей простір символом ${}^1R_n$. Він є математичною інтерпретацією простору-часу спеціальної теорії відносності. Його також називають *простором Мінковського.* Можна показати, що всі псевдоевклідові простори індексу 1 однакової розмірності n ізоморфні простору ${}^1R_n$.

Як і в евклідовому просторі, два вектори називаємо ортогональними, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю, а довжину вектора визначаємо формулою $|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x}^2}$.

Визначення 2.1. *Вектори* простору ${}^1R_n$, скалярні квадрати яких додатні (від'ємні), називаються *просторовоподібними* (*часоподібними)*. Ненульові вектори, скалярні квадрати яких рівні нулю, називаються *ізотропними*.

Зауважимо, що в просторі ${}^1R_n$ два колінеарних ізотропних вектора ортогональні. У ньому існують вектори з дійсною, уявною та нульовою довжиною. Тому при нормуванні просторовоподібного вектора $\bar{x}$ будемо використовувати формулу $\bar{x}_0 = \dfrac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2}}$, а при нормуванні часоподібного вектора $\bar{x}$ – формулу $\bar{x}_0 = \dfrac{\bar{x}}{\sqrt{-\bar{x}^2}}$. Нормовані просторовоподібні вектори прийнято називати одиничними, а нормовані часоподібні вектори – уявноодиничними. Усі ізотропні вектори будемо вважати нормованими.

Очевидно, що в просторі ${}^1R_n$ завжди існує ортонормований базис, який складається з одного уявноодиничного й $n-1$ одиничних векторів. У якості такого базису можна вибрати вектори $\bar{e}_i = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, де одиниця стоїть на *i*-тому місці. Домовимося уявноодиничний вектор вибирати першим вектором базису. Неважко показати, що всі ортогональні базиси простору ${}^1R_n$ складаються з одного часоподібного й $n-1$ просторовоподібних векторів, тобто має місце закон інерції ортогональних базисів.

Координати векторів в ортонормованому базисі будемо так само, як і в евклідовому просторі, називати *декартовими*. Формулу із означення скалярного добутку можна записати в матричному вигляді наступним чином

$$(\bar{x},\bar{y}) = XE'Y^t = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

де E' – матриця Грамма ортонормованого базису простору ${}^1R_n$, а t – символ транспонування матриці.

Переходимо до питання про класифікацію l-площин простору ${}^1R_n$. Будемо відкладати всі вектори простору ${}^1R_n$ від початку координат. Тоді кінці ізотропних векторів будуть лежати на поверхні $-x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$, яку називають *ізотропним гіперконусом*. Кінці просторовоподібних радіус-векторів лежать у зовнішній області ізотропного гіперконуса, а кінці часоподібних радіус-векторів – у його внутрішній області.

Прямі псевдоевклідова простору ${}^1R_n$ діляться на три типи: *просторовоподібні*, *часоподібні та ізотропні*, якщо довжина напрямного вектора дійсна, уявна та дорівнює нулю відповідно.

Для класифікації двовимірних площин дослідимо властивості ортогональних векторів. У просторі ${}^1R_n$ ортогональними можуть бути пари просторовоподібних векторів, просторовоподібний і часоподібний вектори, просторовоподібний і ізотропний вектори.

Зауважимо, що у просторі ${}^1R_n$ не існує пари ортогональних неколінеарних ізотропних векторів, пари ортогональних часоподібного й ізотропного векторів і пари ортогональних часоподібних векторів. Доведення цих фактів методом від супротивного є простою задачею. Неважко також довести, що для будь-яких двох неколінеарних векторів простору ${}^1R_n$ існує така їх лінійна комбінація, яка є просторовоподібним вектором, звідки випливає, що у будь-якій двовимірній площині простору ${}^1R_n$ існує просторовоподібний вектор.

Розглянемо в просторі ${}^1R_n$ двовимірні площини (далі площини), у яких усі вектори просторовоподібні, й площини, у яких є вектори всіх трьох типів. Будемо називати їх відповідно *просторовоподібними* й *часоподібними* площинами. Просторовоподібні й часоподібні площини ще називають *неізотропними*. У просторі ${}^1R_n$ можливі також площини, у яких є тільки просторовоподібні й ізотропні вектори. Вони називаються *ізотропними* площинами. Розглянемо два неколінеарні вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ в просторі ${}^1R_n$. Вони утворюють напрямний підпростір деякої двовимірної площини. Щоб визначити тип цієї площини, потрібно розглядати всілякі лінійні комбінації векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2$. Але якщо на базі цих векторів побудувати ортогональну систему векторів, то у випадку просторовоподібної площини ця система обов'язково складається із просторовоподібних векторів, у випадку часоподібної площини – із часоподібного й просторовоподібного векторів, у випадку ізотропної площини – з ізотропного й просторовоподібного векторів. Тобто тип площини легко розпізнавати по набору із двох ортогональних напрямних векторів.

Зауважимо, що площина, яка містить вершину ізотропного гіперконуса та не має з ізотропним гіперконусом інших спільних точок, є просторовоподібною. Якщо ж вона перетинає ізотропний гіперконус по двом твірним, то така площина часоподібна. Площина, яка дотикається ізотропного гіперконуса по твірній, є ізотропною.

Розглянемо тривимірні підпростори простору ${}^1R_n$. У ньому існують тривимірний евклідів підпростір R_3 (всі його вектори просторовоподібні), тривимірний псевдоевклідів підпростір індексу 1 ${}^1R_3$ (містить вектори всіх трьох типів), тривимірний ізотропний підпростір R_3^1 (містить просторовоподібні й ізотропні вектори). Тип тривимірного підпростору визначається трійкою попарно ортогональних векторів, серед яких принаймні два просторовоподібних вектора. Класифікувати тривимірні простори будемо по типу третього базисного вектора. Він може бути просторовоподібним, часоподібним або ізотропним. Геометрія цих просторів викладена в роботі [72].

Тип l-площини також будемо визначати по набору з l попарно ортогональних векторів. У просторі ${}^1R_n$ такий набір містить $l-1$ просторовоподібних векторів. Класифікувати l-площини будемо по останньому вектору набору. Таким чином, існують *просторовоподібні* l-площини, *часоподібні* l-площини індексу 1 та *ізотропні* l-площини.

Теорема 2.1. У просторі ${}^1R_n$ ортогональним доповненням до псевдоевклідова підпростору ${}^1R_k$ є евклідів простір R_{n-k}, розмірність суми підпростору і його ортогонального доповнення дорівнює n. Ортогональним доповненням до ізотропного підпростору R_k^1 є ізотропний простір R_{n-k}^1, причому у них спільний ізотропний вектор, а розмірність суми підпростору і його ортогонального доповнення дорівнює $n-1$.

Доведення. У просторі ${}^1R_n$ розглянемо k-вимірний псевдоевклідів простір індексу 1 – ${}^1R_k$ з базисом $(\bar{e}_1,...,\bar{e}_k)$, $\bar{e}_1^2<0,\ \bar{e}_i^2>0,\ i=2,...,k$. Базис ортогонального доповнення до ${}^1R_k$ знаходиться із системи k лінійних алгебраїчних рівнянь $\begin{cases}(\bar{x},\bar{e}_1)=0,\\(\bar{x},\bar{e}_i)=0.\end{cases}$ Фундаментальна система розв'язків цієї системи рівнянь складається із $n-k$ просторовоподібних векторів, тому що, як було зазначено вище, не існує ні часоподібного, ні ізотропного вектора $\bar{x}$, що задовольняє першому рівнянню системи. Таким чином, ортогональне доповнення підпростору ${}^1R_k$ являє собою евклідів $(n-k)$-вимірний простір R_{n-k}. Афінною оболонкою об'єднання підпростору ${}^1R_k$ і його ортогонального доповнення є n–вимірний псевдоевклідів простір індексу 1 – ${}^1R_n$.

Тепер розглянемо k-вимірний ізотропний підпростір R_k^1 з базисом $(\bar{e}_1,...,\bar{e}_k)$, $\bar{e}_1^2=0,\ \bar{e}_i^2>0,\ i=2,...,k$. Фундаментальна система розв'язків системи рівнянь $\begin{cases}(\bar{x},\bar{e}_1)=0,\\(\bar{x},\bar{e}_i)=0\end{cases}$ складається з вектора $\bar{e}_1$, оскільки $\begin{cases}(\bar{e}_1,\bar{e}_1)=0,\\(\bar{e}_1,\bar{e}_i)=0\end{cases}$, й $n-k-1$ просторовоподібних векторів $\bar{f}_1,...,\bar{f}_{n-k-1}$. Ніяка лінійна комбінація векторів $\bar{e}_1, \bar{f}_1,...,\bar{f}_{n-k-1}$ не може бути ні часоподібним вектором, ні неколінеарним вектору $\bar{e}_1$ ізотропним вектором, тому ортогональним доповненням підпростору R_k^1 є $(n-k-1)$-вимірний ізотропний простір R_{n-k-1}^1, причому $\bar{e}_1$ – їх спільний ізотропний вектор. Розмірність афінної оболонки суми просторів R_k^1 і R_{n-k-1}^1 дорівнює $n-1$. Зокрема, у просторі ${}^1R_n$ ортогональним доповненням до ізотропної прямої є ізотропний підпростір R_{n-1}^1, що містить цю ізотропну пряму. Теорема доведена.

Наслідок 2.1. Ортогональну систему векторів у просторі ${}^1R_n$, що не містить ізотропного вектора, можна добудувати до ортогонального базису всього простору.

Наслідок 2.2. Ортогональну систему векторів у просторі ${}^1R_n$, що містить ізотропний вектор, не можна добудувати до ортогонального базису всього простору.

2.2 Взаємне розташування $l-$площин. Стаціонарні кути пари l-площин

Розглянемо взаємне розташування $l-$площин у просторі ${}^1R_n$. В евклідовому просторі взаємне розташування пари $l-$площин можна досліджувати за допомогою поняття стаціонарних кутів. Після деяких змін будемо використовувати цей принцип і для псевдоевклідова простору. У роботі [18] описаний алгоритм знаходження стаціонарних кутів пари $l-$площин в евклідовому просторі. Представимо цей алгоритм у вигляді, зручному для використання у випадку простору ${}^1R_n$.

2.2.1 Стаціонарні кути пари *l*-площин евклідова простору. Розглянемо в евклідовому просторі R_{l+p} дві площини однакової розмірності *l*. Для задання l-площини будемо використовувати поняття матричної координати l-площини. Так будемо називати матрицю виду

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_l^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_l^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_l^n \end{pmatrix},$$

стовпцями якої є координати напрямних векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_l$ l-площини.

Визначення 2.2. *Кутами* $0 \le \varphi_1 \le \dots \le \varphi_l \le \dfrac{\pi}{2}$ між *l*-площинами π й τ називаються стаціонарні значення кутів між векторами $\bar{a} \in \pi$ й $\bar{b} \in \tau$.

Нехай *l*-площина π натягнута на вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots \bar{a}_l$, а *l*-площина τ – на вектори $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots \bar{b}_l$. Параметричні рівняння цих *l*-площин можна записати в матричному вигляді

$$X = AT, Y = BK,$$

де A, B – матричні координати даних площин, T, K - $(l \times 1)$-матриці параметрів, X, Y – $((l+p) \times 1)$-матриці координат поточної точки *l*-площин π і τ відповідно.

Розглянемо ортогональне проектування f точок *l*-площини π на *l*-площину τ. Радіус-вектор $\bar{X}$ поточної точки *l*-площини π можна розкласти по базисних векторах l-площини τ та її ортогонального доповнення $\tau^{\perp}$. У матричному записі цей розклад набуде вигляду

$$AT = B\beta + B^{\perp}\tilde{\beta}\,, \tag{2.1}$$

де $\beta, \tilde{\beta}$ – матриці коефіцієнтів лінійної комбінації, $B^{\perp}$ – матрична координата ортогонального доповнення $\tau^{\perp}$.

Помножимо обидві частини рівності (2.1) зліва на матрицю, транспоновану до B, і скористаємося асоціативністю операції множення матриць, одержимо $(B^t A)T = (B^t B)\beta + (B^t B^{\perp})\tilde{\beta}$, t – символ транспонування. З ортогональності площин τ і $\tau^{\perp}$ випливає, що $(B^t B^{\perp}) = \theta$, де θ – нульова $l \times l$-матриця. Тоді одержуємо, що $(B^t A)T = (B^t B)\beta$, звідки

$$\beta = (B^t B)^{-1}(B^t A)T\,. \tag{2.2}$$

Таким чином, матриця β визначає координати образу $Y = f(X)$ точки X l-площини π при її ортогональному проектуванні на l-площину τ, причому матриця цього проектування має вигляд $(B^t B)^{-1}(B^t A)$. Тобто можна записати, що $f(X) = B\beta$. Тепер отримані на l-площині τ образи точок l-площини π будемо ортогонально проектувати на площину π. Аналогічно рівності (2.1) запишемо рівність

$$Y = BK = A\alpha + A^{\perp}\tilde{\alpha}\,, \tag{2.3}$$

де $\alpha, \tilde{\alpha}$ – матриці коефіцієнтів лінійної комбінації, $A^{\perp}$ – матрична координата ортогонального доповнення $\pi^{\perp}$ l-площини π.

Помноживши обидві частини рівності (2.3) зліва на матрицю A^t й враховуючи ортогональність π і $\pi^{\perp}$, одержимо $(A^t B)K = (A^t A)\alpha$, звідки

$$\alpha = (A^t A)^{-1}(A^t B)K, \tag{2.4}$$

тобто матриця ортогонального проектування l-площини τ на l-площину π має вигляд $(A^t A)^{-1}(A^t B)$.

Отже, для образів першого проектування маємо $Y = f(X) = B\beta$ з одного боку, а з іншого боку $Y = BK$. Тому $B\beta = BK$, а значить

$$\beta = K. \tag{2.5}$$

Підставивши в (2.4) замість K вираз для β з формули (2.2), одержимо формулу для знаходження параметрів образу довільної точки l-площини π в результаті композиції зазначених ортогональних проектувань у вигляді $\alpha = (A^t A)^{-1}(A^t B)(B^t B)^{-1}(B^t A)T$. Якщо позначити через P_π і P_τ оператори зазначених ортогональних проектувань, то ми одержимо, що матриця оператора $P_\pi P_\tau : \pi \to \pi$ має вигляд $(A^t A)^{-1}(A^t B)(B^t B)^{-1}(B^t A)$. Тоді, згідно [18], для знаходження стаціонарних кутів l-площин π і τ, досить знайти власні вектори цієї матриці й кути між кожним з них і його проекцією на l-площину τ. Тобто, $(\bar{a}_i, \bar{b}_j) = \delta_{ij}\cos\varphi_i$, $i, j = 1,..., l$, де $\bar{a}_i$ – власні вектори, а $\bar{b}_i = Пр_\tau \bar{a}_i$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Двовимірні площини, в яких реалізуються стаціонарні кути, прийнято називати кутовими площинами. У роботі [71] Розенфельд Б.А. показав, що власні числа матриці оператора $P_\pi P_\tau$, яку він позначає W, дорівнюють квадратам косинусів стаціонарних кутів. Таким чином, немає необхідності шукати власні вектори оператора $P_\pi P_\tau$, їх проекції на l-площину τ, і тільки потім стаціонарні кути. Досить знайти власні значення матриці W й квадратний корінь із них.

2.2.2 Стаціонарні кути пари *l*-площин простору ^1R_n. Перейдемо до знаходження стаціонарних кутів l-площин у просторі ^1R_n. Ми не можемо перенести без зміни визначення стаціонарних кутів з евклідова простору, оскільки в просторі ^1R_n є вектори різних типів і значення кутів між ними не завжди можна порівняти між собою. У просторі ^1R_n кути будемо визначати між l-площинами одного типу – двома просторовоподібними, двома часоподібними або двома ізотропними l-площинами.

Визначення 2.3. Нехай π і τ – дві неізотропні l-площини одного типу простору ^1R_n, що проходять через початок координат. Розглянемо двовимірну площину, що проходить через початок координат і перпендикулярну до кожної з l-площин π і τ. Кут між прямими перетину цієї двовимірної площини з l-площинами π і τ будемо називати *стаціонарним* кутом l-площин π і τ, а саму двовимірну площину – *кутовою* площиною.

Теорема 2.2. Для пари неізотропних l-площин одного типу завжди існує l кутових площин, деякі з яких можуть вироджуватися в прямі; будь-які дві кутові площини цілком ортогональні.

Доведення. Нехай $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_l^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_l^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_l^n \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \dots & b_l^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \dots & b_l^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1^n & b_2^n & \dots & b_l^n \end{pmatrix}$ – матричні координати l-площин π і τ відповідно. Довільна двовимірна площина, що перетинає дані l-площини, має матричну координату $C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \\ \dots & \dots \\ c_1^n & c_2^n \end{pmatrix}$, де $C_1^t = A\Lambda$, $C_2^t = B\mathrm{M}$, $\Lambda^t = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_l)$,

$M^t = (\mu_1 \quad \mu_2 \quad \ldots \quad \mu_l)$. Будемо шукати ту двовимірну площину, яка перпендикулярна кожній із площин π і τ. У такій площині існують вектори $\bar{d} = \alpha_1 \bar{c}_1 + \alpha_2 \bar{c}_2$ та $\bar{f} = \beta_1 \bar{c}_1 + \beta_2 \bar{c}_2$ такі, що

$$\begin{aligned} &DE'A_i^t = 0, \\ &FE'B_i^t = 0, i = 1,2,\ldots,l. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Систему (2.6) можна записати в матричному вигляді

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 A\Lambda + \alpha_2 B\mathrm{M})^t E'A = \theta, \\ &(\beta_1 A\Lambda + \beta_2 B\mathrm{M})^t E'B = \theta. \end{aligned}$$

Розкриємо дужки й отриману відносно Λ^t й M^t систему рівнянь запишемо як систему рівнянь відносно Λ й M у вигляді

$$\begin{aligned} &\alpha_1 (A^t E'A)\Lambda + \alpha_2 (A^t E'B)\mathrm{M} = \theta, \\ &\beta_1 (B^t E'A)\Lambda + \beta_2 (B^t E'B)\mathrm{M} = \theta. \end{aligned}$$

Існування ненульового розв'язку цієї системи забезпечується вимогою рівності нулю її визначника, тобто

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 (A^t E'A) & \alpha_2 (A^t E'B) \\ \beta_1 (B^t E'A) & \beta_2 (B^t E'B) \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

Використовуючи метод обчислення визначника блочної матриці [21], одержимо

$$\left| \alpha_1 \beta_2 (A^t E'A)(B^t E'B) - \alpha_2 \beta_1 (A^t E'B)(B^t E'B)^{-1} (B^t E'A)(B^t E'B) \right| = 0 \cdot$$

Якщо $\alpha_2\beta_1 \neq 0$, то

$$\alpha_2\beta_1 \left| (A^t E'A)^{-1}(A^t E'B)(B^t E'B)^{-1}(B^t E'A) - \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1} E \right| = 0,$$

а це означає, що числа $\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1}$ є власними значеннями матриці $W = (A^t E'A)^{-1}(A^t E'B)(B^t E'B)^{-1}(B^t E'A)$. Якщо $\alpha_2\beta_1 = 0$, то перейдемо від векторів $\bar{c}_1$ і $\bar{c}_2$ до таких їх лінійних комбінацій, щоб $\alpha_2\beta_1 \neq 0$.

Ми можемо спростити останнє рівняння, якщо виберемо в даних l-площинах π і τ ортонормовані базиси. Тоді $A^t E'A = E_{l\times l}$, $B^t E'B = E_{l\times l}$ у випадку просторовоподібних l-площин і $A^t E'A = E'_{l\times l}$, $B^t E'B = E'_{l\times l}$ у випадку часоподібних l-площин, де $E'_{l\times l} = diag(-1,1,\ldots,1)$.

У випадку просторовоподібних l-площин одержимо $\alpha_2\beta_1 \left| (A^t E'B)(B^t E'A) - \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1} E \right| = 0$, а це означає, що числа $\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1}$ є власними значеннями матриці $W = (A^t E'B)(B^t E'A)$.

У будь-якому просторі з матрицею Грамма G матриця самоспряженого оператора задовольняє умові $A^t = GAG^{-1}$. Для евклідова простору матриця Грамма ортонормованого базису є одиничною, отже, $A^t = A$, а в псевдоевклідовому просторі $G = E'$, тобто $A^t = E'AE'$.

Оскільки у випадку просторовоподібних l-площин матриця W має властивість $W^t = W$, то вона є матрицею самоспряженого оператора евклідової l-площини. У випадку часоподібних l-площин матриця $W = E'(A^t E'B)E'(B^t E'A)$ має властивість $W^t = E'WE'$, тобто є матрицею самоспряженого оператора часоподібної l-площини.

В обох випадках існує рівно l дійсних власних значень матриці W, по кожному з яких можна визначити вектори $\bar{d}$ й $\bar{f}$, причому різним власним значенням відповідають ортогональні власні вектори, тобто кутові площини цілком ортогональні. Кут між векторами $\bar{d}$ й $\bar{f}$ дорівнює стаціонарному куту даних площин. Оскільки від вибору базису набір власних значень не залежить, то теорема доведена.

2.2.3 Взаємне розташування пари *l*-площин простору $^{1}R_{l+p}$.

Перейдемо до дослідження залежності між взаємним розташуванням *l*-площин і значеннями величин їх стаціонарних кутів.

Нехай неізотропні *l*-площини π й τ не мають спільних напрямків і розташовані в просторі $^{1}R_{l+p}$, де $l = p$. Оскільки всі кутові площини невироджені й цілком ортогональні, то їх афінною оболонкою є увесь простір $^{1}R_{l+p}$. Виходить, одна з кутових площин обов'язково буде часоподібною, інші $l-1$ кутових площин просторовоподібні й стаціонарні кути l-площин π і τ визначаються з рівностей

$$(\bar{d}_1, \bar{f}_1) = ch\varphi_1, \quad (\bar{d}_i, \bar{f}_j) = \delta_{ij}\cos\varphi_i, \ \ i, j = 2,...,l. \tag{2.7}$$

Якщо ж неізотропні *l*-площини π й τ не мають спільних напрямків і розташовані в просторі $^{1}R_{l+p}$, де $l < p$, то або набір кутових площин такий самий, як у попередньому випадку, або всі кутові площини просторовоподібні й тоді для стаціонарних кутів одержимо

$$(\bar{d}_i, \bar{f}_j) = \delta_{ij}\cos\varphi_i, \ \ i, j = 1,...,l. \tag{2.8}$$

Нехай тепер π і τ – ізотропні *l*-площини з напрямними підпросторами $\begin{pmatrix}\bar{a}_1 & \bar{a}_2 & ... & \bar{a}_l\end{pmatrix}$ й $\begin{pmatrix}\bar{b}_1 & \bar{b}_2 & ... & \bar{b}_l\end{pmatrix}$ відповідно. Вектори $\bar{a}_1$ й $\bar{b}_1$ – ізотропні, $\bar{a}_2,...,\bar{a}_l$ і $\bar{b}_2,...,\bar{b}_l$ – просторовоподібні. Для знаходження стаціонарних кутів між ними вже не можна користуватися матрицею $W=(A^tE'A)^{-1}(A^tE'B)(B^tE'B)^{-1}(B^tE'A)$, тому що матриці $(A^tE'A)$ і $(B^tE'B)$ є виродженими. Визначимо значення стаціонарних кутів між ізотропними l-площинами π і τ як граничні значення стаціонарних кутів між просторовоподібними l-площинами π_1 й τ_1, коли π_1 прямує до π, а τ_1 – до τ.

Виберемо одиничний просторовоподібний вектор $\bar{x}$, ортогональний до векторів $\bar{a}_2,...,\bar{a}_l$ і $\bar{b}_2,...,\bar{b}_l$. Існування такого вектора випливає зі структури ортогонального доповнення до систем векторів $\bar{a}_2,...,\bar{a}_l$ і $\bar{b}_2,...,\bar{b}_l$ (теорема 2.1.). Розглянемо вектори $\bar{a}_1'=\bar{a}_1+\lambda\bar{x}$ й $\bar{b}_1'=\bar{b}_1+\lambda\bar{x}$, де λ – параметр. При $\lambda\to 0$ l-площина π_1, що задається векторами $\bar{a}_1',\bar{a}_2,...,\bar{a}_l$, прямує до l-площині π, а l-площина τ_1, що задається векторами $\bar{b}_1',\bar{b}_2,...,\bar{b}_l$, прямує до l-площини τ. Для площин π_1 і τ_1 знайдемо матрицю W та її власні значення. Перейдемо до границь цих власних значень при $\lambda\to 0$, назвемо їх власними значеннями матриці W ізотропних l-площин π і τ й вони дорівнюють квадратам косинусів стаціонарних кутів.

Будемо досліджувати тип кутових площин ізотропних l-площин, що не мають загальних напрямків. Набір власних векторів матриці W складається з одного ізотропного вектора й $l-1$ просторовоподібних векторів. Тому одна з кутових площин перетинає дані l-площини по ізотропним прямим, а значить може бути тільки часоподібною, інші кутові площини – просторовоподібні. Отже, в часоподібній кутовій площині стаціонарний кут реалізується між ізотропними векторами й тому рівний ∞, а інші стаціонарні кути обчислюються за формулами (2.7) при $i,j=2,...,l$.

Зокрема, для випадку $l=p=2$, ми можемо, користуючись зазначеним способом, вивести явні формули для обчислення стаціонарних кутів через напрямні вектори даних двовимірних площин. Елементи матриці $W=(w_{ij})$ l-площин π_1 і τ_1 в цьому випадку будуть мати вигляд:

$$w_{11}=\frac{((\bar{a}_1,\bar{b}_1)+\lambda((\bar{a}_1,\bar{x})+(\bar{b}_1,\bar{x}))+\lambda^2)^2}{(2\lambda(\bar{a}_1,\bar{x})+\lambda^2)(2\lambda(\bar{b}_1,\bar{x})+\lambda^2)}+\frac{(\bar{a}_1,\bar{b}_2)^2}{2\lambda(\bar{a}_1,\bar{x})+\lambda^2},$$

$$w_{12}=\frac{((\bar{a}_1,\bar{b}_1)+\lambda((\bar{a}_1,\bar{x})+(\bar{b}_1,\bar{x}))+\lambda^2)(\bar{a}_2,\bar{b}_1)}{(2\lambda(\bar{a}_1,\bar{x})+\lambda^2)(2\lambda(\bar{b}_1,\bar{x})+\lambda^2)}+\frac{(\bar{a}_1,\bar{b}_2)(\bar{a}_2,\bar{b}_2)}{2\lambda(\bar{a}_1,\bar{x})+\lambda^2},$$

$$w_{21}=\frac{((\bar{a}_1,\bar{b}_1)+\lambda((\bar{a}_1,\bar{x})+(\bar{b}_1,\bar{x}))+\lambda^2)(\bar{a}_2,\bar{b}_1)}{(2\lambda(\bar{b}_1,\bar{x})+\lambda^2)}+(\bar{a}_1,\bar{b}_2)(\bar{a}_2,\bar{b}_2),$$

$$w_{22}=\frac{(\bar{a}_2,\bar{b}_1)^2}{(2\lambda(\bar{b}_1,\bar{x})+\lambda^2)}+(\bar{a}_2,\bar{b}_2)^2\ .$$

З точністю до перших степенів λ одержимо вирази для власних значень μ_1 і μ_2 матриці W у вигляді $\mu_{1,2}=\dfrac{2((\bar{a}_1,b_1)(\bar{a}_2,b_2)-(\bar{a}_1,b_2)(\bar{a}_2,b_1))^2\lambda+O(\lambda^2)}{((\bar{a}_1,b_1)^2\pm(\bar{a}_1,b_1)^2)\lambda+O(\lambda^2)}$. Переходячи до границі при $\lambda\to 0$, одержимо власні значення матриці W ізотропних *l*-площин π і τ: $\mu_1=\infty$, $\mu_2=\left(\dfrac{(\bar{a}_1,\bar{b}_1)(\bar{a}_2,\bar{b}_2)-(\bar{a}_1,\bar{b}_2)(\bar{a}_2,\bar{b}_1)}{(\bar{a}_1,\bar{b}_1)}\right)^2$. Тоді стаціонарному куту φ_1 можна приписати значення ∞, а другий стаціонарний кут знаходиться зі співвідношення

$$\cos\varphi_2=\frac{(\bar{a}_1,\bar{b}_1)(\bar{a}_2,\bar{b}_2)-(\bar{a}_1,\bar{b}_2)(\bar{a}_2,\bar{b}_1)}{(\bar{a}_1,\bar{b}_1)}. \tag{2.9}$$

Дві ізотропні двовимірні площини π й τ можуть бути розташовані так, що в них є спільний напрямок. Коли площини π й τ мають спільний просторовоподібний напрямок, то ненульовий стаціонарний кут дорівнює нескінченності, а якщо спільний напрямок ізотропний, то той з кутів, що визначається власним значенням μ_2, обчислюється за формулою $\cos\varphi=(\bar{a}_2,\bar{b}_2)$, яка випливає із формули (2.9) при $\bar{a}_1=\bar{b}_1$, а другому куту приписуємо значення 0, як куту між ізотропними векторами, що співпали.

Розглянемо випадок, коли дві ізотропні l-площини π й τ мають спільний евклідів підпростір R_k. Це значить, що k стаціонарних кутів дорівнюють нулю. Розглянемо ортогональні доповнення до R_k в l-площинах π і τ, вони будуть ізотропними просторами $R^1_{l-k}=\pi_1$ й $R^1_{l-k}=\tau_1$. Інші стаціонарні кути l-площин π і τ є стаціонарними кутами між просторами π_1 й τ_1. Простори π_1 і τ_1 є ізотопними просторами без спільних напрямків, а як було з'ясовано вище $l-k-1$ їх стаціонарних кутів реалізуються в просторовоподібних кутових площинах і визначаються з рівностей (2.8), у яких $i,j=1,\dots,l-k-1$ і один стаціонарний кут дорівнює нескінченності.

У випадку, якщо спільний підпростір ізотропних l-площин π і τ є ізотропним простором R^1_k, то його ортогональні доповнення до $\pi_1=R_{l-k}$ і $\tau_1=R_{l-k}$ в даних площинах не мають спільних напрямків і їх афінною оболонкою є простір $R_{2(l-k)}$. Таким чином, дані ізотропні l-площини мають k нульових стаціонарних кутів і $l-k$ ненульових стаціонарних кутів, що реалізуються в просторовоподібних кутових площинах, що й обчислюються за формулами (2.8) при $i,j=1,\dots,l-k$.

Нехай тепер дві часоподібні l-площини π й τ мають спільний k-вимірний підпростір.

Можливі наступні випадки:

1. Спільний підпростір – евклідів.
2. Спільний підпростір – псевдоевклідів індексу 1.
3. Спільний підпростір – ізотропний.

У кожному із цих випадків k стаціонарних кутів l-площини π й τ дорівнюють нулю, а інші стаціонарні кути є стаціонарними кутами ортогональних доповнень до спільного підпростору в l–площинах π і τ. Відзначимо також, що в кожному із цих випадків афінною оболонкою l-площин π і τ є простір ${}^1R_{2l-k}$.

Розглянемо перший випадок. Позначимо ортогональні доповнення до спільного підпростору R_k в l-площинах π і τ символами π_1 й τ_1. Очевидно π_1 і τ_1 є псевдоевклідовими просторами ${}^1R_{l-k}$ без спільних напрямків і розташовані в просторі ${}^1R_{2(l-k)}$. Згідно випадку, розглянутому вище, $l-k$ стаціонарних кутів знаходяться із рівностей (2.7), у яких $i, j = 2,...,l-k$.

У другому випадку l-площини π й τ містять спільний псевдоевклідів підпростір ${}^1R_k$, отже, ортогональні доповнення π_1 й τ_1 без спільних напрямків у просторі $R_{2(l-k)}$. Таким чином, $l-k$ ненульових стаціонарних кутів l-площин π і τ реалізуються в евклідових кутових площинах і знаходяться із рівностей (2.13), у яких $i, j = 1,...,l-k$.

Нарешті розглянемо третій випадок, коли спільним підпростором l-площин π і τ є ізотропний простір R_k^1. Ортогональними доповненнями до R_k^1 в l-площинах π і τ є ізотропні простори $R_{l-k}^1 = \pi_1$ й $R_{l-k}^1 = \tau_1$. Простори π_1 й τ_1 містять спільний ізотропний вектор з підпростором R_k^1. Як показано вище, набір власних векторів ізотропного простору R_{l-k}^1 складається з ізотропного вектора й $l-k-1$ попарно ортогональних просторовоподібних векторів. Таким чином, для l-площин π і τ ми маємо $l-k-1$ невироджених просторовоподібних кутових площин, тобто всього $l-1$ кутових площин. За доведеною вище теоремою 2.2 кутових площин повинно бути l штук. Для опису ще однієї кутової площини розглянемо афінну оболонку l-площин π і τ. Вона є простором ${}^1R_{2l-k}$, а афінною оболонкою отриманих кутових площин (вироджених і невироджених) є ізотропний простір R_{2l-k-2}^1. Оскільки кутові площини цілком ортогональні, то відсутня кутова площина буде належати ортогональному доповненню до R_{2l-k-2}^1 в просторі ${}^1R_n$. Це буде ізотропний простір $R_{n-2l+k+1}^1$. Він перетинає простір ${}^1R_{2l-k}$, що визначається l-площинами π й τ, по прямій. Будемо вважати цю пряму відсутньою кутовою площиною (виродженою) і, відповідно, стаціонарний кут, що реалізується в цій площині, рівним нулю. Таким чином, у розглянутому випадку $k+1$ стаціонарних кутів l -площин π і τ дорівнюють нулю.

Зокрема, розглянемо випадок, коли двовимірні часоподібні площини π і τ зі спільним ізотропним напрямком розташовані в просторі ${}^1R_4$. Нехай вектор $\bar{c}$ – спільний ізотропний вектор. Якщо $\bar{a}_1, \bar{b}_1$ – напрямні часоподібні нормовані вектори площин π і τ відповідно, то ортогональні їм просторовоподібні напрямні вектори цих площин мають вигляд $\vec{a}_2 = \dfrac{1}{(\bar{a}_1, c)}\bar{c} + \bar{a}_1$, $\bar{b}_2 = \dfrac{1}{(\bar{b}_1, c)}\bar{c} + \bar{b}_1$. Квадратне рівняння для знаходження власних значень матриці W має вигляд

$$\lambda^2 - (TrW)\lambda + |W| = 0, \tag{2.10}$$

де $|W| = \det W$.

Безпосередні обчислення дають $|W| = \left|(A^t B)\right|^2$, а $TrW = -2\left|(A^t B)\right|$. Обчислення показують, що визначник матриці $(A^t B)$ дорівнює –1, тобто не залежить від вибору площин, що мають спільну ізотропну пряму. Одержуємо, що рівняння (2.10) має вигляд$(\lambda - 1)^2 = 0$, тобто власні значення $\lambda_{1,2} = 1$. Виходить, обидва стаціонарних кута дорівнюють нулю, що видається дивним, оскільки площини різні. Цей факт можна пояснити в такий спосіб. У просторі ${}^1R_3$, що визначається заданими площинами, немає площини, перпендикулярної кожній із двох площин зі спільною ізотропною прямою, тому що в часоподібній площині не існує вектора, ортогонального ізотропному, крім нього самого. Разом з тим існує просторовоподібна площина простору ${}^1R_4$, ортогональна спільному ізотропному вектору двох часоподібних площин. Вона перетинає простір ${}^1R_3$, що визначається даними площинами, по прямій. Будемо вважати цю пряму другою кутовою площиною (виродженою) і, відповідно, другий стаціонарний кут теж рівним нулю. Очевидно, в евклідовому просторі такий факт не має місця для неспівпадаючих площин.

Тепер розглянемо дві просторовоподібні l-площини π і τ у просторі ${}^1R_{l+p}$, $l \le p$, що мають k спільних напрямків (тобто спільний евклідів підпростір R_k). Це означає, що k стаціонарних кутів дорівнюють нулю. Афінною оболонкою цих l-площин може бути евклідів простір R_{2l-k}, псевдоевклідів простір ${}^1R_{2l-k}$ і ізотропний простір R^1_{2l-k}. Для ортогональних доповнень до спільного підпростору даних l-площин будемо використовувати ті ж символи π_1 й τ_1. Перший випадок не відрізняється від евклідова простору [18]. Другий випадок зводиться до описаного вище випадку чашоподібних l-площин простору ${}^1R_{l+p}$. Зупинимося на третьому випадку. Оскільки просторовоподібні l-площини π і τ належать ізотропному простору R^1_{2l-k}, то афінною оболонкою площин π_1 і τ_1 є ізотропний простір $R^1_{2(l-k)}$. Тому одна з кутових площин є ізотропною й відповідний їй стаціонарний кут знаходиться як кут між просторовоподібними векторами ізотропної площини, а інші кутові площини просторовоподібні, тобто $l-k-1$ стаціонарних кутів знаходяться із формул (2.8), у яких $i, j = k+2,...,l$.

Відзначимо, що в евклідовому просторі R_n набір стаціонарних кутів φ_i, $i = 1,...,l$ при зазначених у визначенні 2.2 обмеженнях цілком визначає взаємне розташування пари l-площин. Тобто пара l-площин α_1 і β_1 може бути переведена в пару α_2 й β_2 рухом простору R_n тоді й тільки тоді, коли всі відповідні стаціонарні кути між площинами цих пар рівні.

Для псевдоевклідова простору ${}^1R_n$ такий висновок зробити можна лише за певних умов. У цьому просторі існують різні пари l-площин, які не можна перевести рухом простору одну в іншу , але при цьому вони мають однаковий набір стаціонарних кутів. Це можна проілюструвати на прикладі.

Розглянемо пару двовимірних часоподібних площин α_1 і β_1 в просторі ${}^1R_4$. Нехай матричними координатами цих площин є матриці $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ й $B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Матриця W має вигляд $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, а її власні значення $\lambda_1 = 1$ й $\lambda_2 = \frac{1}{4}$. Отже, $\varphi_1 = 0$ і $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$. А тепер розглянемо пару просторовоподібних площин α_2 і β_2 з матричними координатами $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ й $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Матриця $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ й, очевидно, набір стаціонарних кутів буде таким самим.

2.3 Гладка структура в множині l-площин псевдоевклідова простору

Многовидом Грассмана $G(l, l+p)$ (грассмановим многовидом) називається множина l-площин $(l+p)$-вимірного евклідова простору R_{l+p}, що проходять через початок координат.

У псевдоевклідовому просторі ${}^1R_{l+p}$ розглянемо множину l-площин, що проходять через фіксовану точку *O*. Будемо, за аналогією з евклідовим простором, називати цю множину грассмановим многовидом і позначати $PG(l, l+p)$. У просторі ${}^1R_{l+p}$ кожна із цих l-площин є l-площиною певного типу: просторовоподібною, часоподібною або ізотропною, тобто грассманів многовид псевдоевклідова простору можна представити у вигляді диз'юнктного об'єднання трьох підмножин. Покажемо як вводиться гладка структура в кожну з цих підмножин.

2.3.1 Випадок неізотропних l-площин. Розглянемо підмножину грассманового многовиду часоподібних l–площин простору ${}^1R_{l+p}$. Задавати їх будемо l лінійно незалежними попарно ортогональними векторами. Зафіксуємо часоподібну l-площину π_0. Ортонормований базис $(\bar{e}_1,...,\bar{e}_l,\bar{e}_{l+1},..\bar{e}_{l+p})$ простору ${}^1R_{l+p}$ виберемо так, щоб ця площина визначалася базисними векторами $\bar{e}_1,...,\bar{e}_l$. Нескінченно близьку до π_0 площину π можна задавати параметричними рівняннями

$$x^i = \alpha^i_j t^j,\ i = 1,...,l+p, j = 1,...,l\ ,$$

у яких коефіцієнти α^i_j задовольняють умовам

$$-\alpha^1_m\alpha^1_n + \sum_{i=2}^{l+p}\alpha^i_m\alpha^i_n = 0,\quad m,n = 1,..l, m \neq n,$$
$$-(\alpha^1_1)^2 + \sum_{i=2}^{l+p}(\alpha^i_1)^2 = -1, -(\alpha^1_2)^2 + \sum_{i=2}^{l+p}(\alpha^i_2)^2 = 1, ..., -(\alpha^1_l)^2 + \sum_{i=2}^{l+p}(\alpha^i_l)^2 = 1.$$

Розглянемо множину M часоподібних l-площин, що проектуються без виродження на дану площину π_0, рівняння якої мають вигляд $x^{l+\mu} = 0, \mu = 1,...,p.$ Тоді l-площина π з M задається системою рівнянь виду

$$\begin{cases} x^{l+1} = \xi^1_1 x^1 + ... + \xi^1_l x^l, \\ .... \\ x^{l+p} = \xi^p_1 x^1 + ... + \xi^p_l x^l. \end{cases} \tag{2.11}$$

Набір чисел $\{\xi_j^\mu\}$ будемо називати *локальними координатами* l-площини π й записувати його $(p \times l)$–матрицею $Z = \{\xi_j^\mu\}$.

Побудуємо відображення $h: M \to R_{l+p}$ за правилом, при якому кожній l-площині із цієї множини ставиться у відповідність набір із $l+p$ чисел $\{\xi_j^\mu\}$. Тоді пара (M, h) є картою на множині часоподібних l-площин. Для тих часоподібних l-площин, які не потрапили в цю карту, у такий же спосіб можна побудувати інші карти, а об'єднання всіх карт дає гладку структуру на цій множині.

На множині просторовоподібних l-площин локальні координати можна ввести аналогічно. Отже, множина неізотропних l-площин простору ${}^1R_{l+p}$, що проходять через точку O, є гладким многовидом, а його підмножини – часоподібних і просторовоподібних l-площин – є гладкими підмноговидами. Будемо їх позначати відповідно ${}^T PG(l, l+p)$ і ${}^S PG(l, l+p)$.

Існує й інший спосіб введення локальних координат на множині l-площин [86].

Спочатку розглянемо евклідів простір R_{l+p}. Зафіксуємо ортонормований базис $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_l, \bar{e}_{l+1}, \ldots, \bar{e}_{l+p})$ так, щоб вектори $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_l$ лежали в l-площині π_0, а вектори $\bar{e}_{l+1}, \ldots, \bar{e}_{l+p}$ були їй ортогональні. У близькій до π_0 l-площині π виберемо ортонормований базис $(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_l, \bar{f}_{l+1}, \ldots, \bar{f}_{l+p})$ такий, щоб вектори $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_l$ лежали в π. Вектори цього базису розкладемо по базису $\left(\bar{e}_i, \bar{e}_\alpha\right)$

$$\begin{cases} \bar{f}_i = \eta_i^j \bar{e}_j + \eta_i^\beta \bar{e}_\beta, \\ \bar{f}_\alpha = \eta_\alpha^j \bar{e}_j + \eta_\alpha^\beta \bar{e}_\beta, \end{cases}$$

де $i, j = 1, \ldots, l, \alpha, \beta = l+1, \ldots, l+p$.

Спеціалізуємо базис $\left(\bar{f}_i, \bar{f}_\alpha\right)$ таким чином, щоб $\left(\bar{f}_i, \bar{e}_j\right) = \left(\bar{f}_j, \bar{e}_i\right)$ і $\left(\bar{f}_\alpha, \bar{e}_\beta\right) = \left(\bar{f}_\beta, \bar{e}_\alpha\right)$. Тоді можна записати

$$\begin{cases} \bar{f}_i = (\delta_i^j + \eta_i^j)\bar{e}_j + \eta_i^\beta \bar{e}_\beta, \\ \bar{f}_\alpha = \eta_\alpha^j \bar{e}_j + (\delta_\alpha^\beta + \eta_\alpha^\beta)\bar{e}_\beta. \end{cases}$$

Набір чисел $\{\eta_i^\beta\}$ утворює в околі *l*-площини π_0 локальні координати, які будемо задавати $(l \times p)$-матрицею *N*.

Тепер розглянемо випадок простору ${}^1R_{l+p}$. Нехай π – часоподібна *l*-площина. Виберемо в цій *l*-площині ортонормований базис $(\bar{g}_1,...,\bar{g}_l)$ такий, що рівняння *l*-площини π мають вигляд (2.11). Тоді матричну координату цієї *l*-площини можна записати у вигляді блочної матриці $G = \begin{pmatrix} E \\ Z \end{pmatrix}$, де *E* – одинична $(l \times l)$-матриця, а *Z* – уведена раніше $(p \times l)$-матриця. Після спеціалізації базису зазначеним вище способом матрична координата *l*-площини π запишеться у вигляді блочної матриці $F = \begin{pmatrix} X \\ N \end{pmatrix}$, де *X* – $(l \times l)$-матриця, а *N* – матриця локальних координат $\{\eta_i^\beta\}$.

Зв'язок між цими двома базисами можна записати наступним чином за допомогою введених блочних матриць $F = G \cdot Q$, де *Q* – матриця переходу від однієї системи локальних координат до іншої. Перепишемо цю рівність у вигляді $\begin{pmatrix} X \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ Z \end{pmatrix} \cdot Q$. Після множення матриць у правій частині рівності, одержимо $X = Q,\ N = ZQ.$

Таким чином, зв'язок між двома наборами локальних координат однієї й тієї ж *l*-площини π має вигляд $N = ZQ$, а матрична координата цієї *l*-площини запишеться у вигляді $F=\begin{pmatrix} Q \\ N \end{pmatrix}$. Тепер визначимо вид матриці Q. Після транспонування матриці F одержимо

$$F^t = Q^t \begin{pmatrix} E & Z^t \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Оскільки базис $\bar{f}_1,...,\bar{f}_{l+p}$ є ортонормованим базисом простору ${}^1R_{l+p}$, то $(\bar{f}_i,\bar{f}_j)=\begin{cases} 0, \text{если } i\neq j \\ -1, \text{если } i=j=1 \\ 1, \text{если } i=j\neq 1 \end{cases}$, або у матричному вигляді $F^t E'_{(l+p)\times(l+p)} F = E'_{l\times l}$.

Таким чином, (2.12) можна записати у вигляді

$$F^t E'_{(l+p)\times(l+p)} F = Q^t \cdot \begin{pmatrix} E_{l\times l} & Z^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E'_{l\times l} & 0 \\ 0 & E_{p\times p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{l\times l} \\ Z \end{pmatrix} \cdot Q .$$

Після перетворення цієї рівності одержимо

$E'_{(l\times l)} = Q^t \cdot \begin{pmatrix} E'_{l\times l} & Z^t E_{p\times p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{l\times l} \\ Z \end{pmatrix} \cdot Q = Q^t (E'_{l\times l} + Z^t Z) Q$. Звідси $QE'_{l\times l} Q^t = (E'_{l\times l} + Z^t Z)^{-1}$. Таким чином, одержали умову, якій задовольняє матриця Q. Для випадку просторовоподібної l-площини базис $(\bar{g}_1,...,\bar{g}_l)$ виберемо таким чином, щоб матрична координата G мала такий вигляд $G=\begin{pmatrix} Z \\ E \end{pmatrix}$. І, відповідно, одержуємо матрицю $F=\begin{pmatrix} N \\ Q \end{pmatrix}$. Як і для часоподібної l-площини, можна одержати наступну матричну рівність $F^t E'_{(l+p)\times(l+p)} F = Q^t \cdot \begin{pmatrix} Z^t & E_{l\times l} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E'_{l\times l} & 0 \\ 0 & E_{p\times p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z \\ E_{l\times l} \end{pmatrix} \cdot Q$. Після перетворень можна записати $E_{(l\times l)} = Q^t \cdot \begin{pmatrix} Z^t E'_{l\times l} & E_{l\times l} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z \\ E_{l\times l} \end{pmatrix} \cdot Q = Q^t (E_{l\times l} + Z^t E'_{l\times l} Z) Q$, а значить умова, якій задовольняє матриця Q, має вигляд $QQ^t = (E_{l\times l} + Z^t E'_{l\times l} Z)^{-1}$.

2.3.2 Випадок ізотропних l-площин. Перейдемо до побудови гладкої структури на множині ${}^{Is}PG(l,l+p)$ ізотропних l-площин простору ${}^1R_{l+p}$. У просторі ${}^1R_{l+p}$ розглянемо ізотропний гіперконус [див. п. 2.1]. Дотичний простір у кожній точці гіперконуса є $(l+p-1)$-вимірним ізотропним простором, ортонормований базис якого складається з одного ізотропного вектора й $(l+p-2)$ евклідових векторів. У дотичному $(l+p-1)$-просторі ізотропні l-площини утворюють пучок, віссю якого є твірна гіперконуса. Таким чином, множина ізотропних l-площин є множиною всіх дотичних l-площин ізотропного гіперконуса й, отже, ${}^{Is}PG(l,l+p)$ можна розглянути як дотичне розшарування. Базою цього розшарування буде ізотропний гіперконус як лінійчатий многовид, а типовим шаром над точкою – пучок дотичних l-площин у точці гіперконуса. Тоді локальні координати l-площини з ${}^{Is}PG(l,l+p)$ можна записати у вигляді $(u_1,u_2,...,u_{l+p-2},\alpha)$, де координати $(u_1,u_2,...,u_{l+p-2})$ визначають твірну гіперконуса, α – параметр пучка. Таким чином, розмірність підмноговиду ${}^{Is}PG(l,l+p)$ дорівнює $l+p-1$.

2.4 Метрика в многовиді *l*-площин

2.4.1 Випадок евклідова простору. У роботі [94] метрика ds^2 на грассмановому многовиді визначається як сума квадратів стаціонарних кутів між двома нескінченно близькими l-площинами простору R_{l+p}, тобто

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^{l} \varphi_i^2 . \tag{2.13}$$

Там же сформульована теорема про те, що в локальних координатах ця метрика має вигляд

$$ds^2 = Tr[(E + ZZ^t)^{-1} dZ(E + Z^t Z)^{-1} dZ^t], \tag{2.14}$$

де Tr – слід матриці.

Наведемо доведення цього факту, яке можна буде використовувати для випадку псевдоевклідова простору.

Нехай стаціонарні кути l-площин, між якими ми шукаємо відстань, рівні φ_i, $i = 1,...l$. Зафіксуємо одну з l-площин і розглянемо однопараметричну сім'ю l-площин, що містить дві дані l-площини й таку, щоб стаціонарні кути між довільною l-площиною сім'ї й фіксованої l-площиною були пропорційні. Опишемо, як будемо вибирати деякі з векторів ортонормованого базису простору. У кожній з кутових площин один з векторів базису виберемо так, щоб він належав фіксованій l–площині сім'ї, а інший був йому ортогональний. Тоді напрямні вектори довільної l-площини сім'ї мають вигляд $\bar{x}_\alpha = \cos(\varphi_\alpha t)\bar{e}_\alpha + \sin(\varphi_\alpha t)\bar{e}_{\alpha+l}$, $\alpha = 1,...,l$, $t \in [0,1]$. Такі сім'ї називають l*-гелікоїдами* [71].

В обраному базисі матрична координата довільної l-площини сім'ї має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_2 t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \cos(\varphi_l t) \\ \sin(\varphi_1 t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sin(\varphi_2 t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sin(\varphi_l t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.15)$$

а матриця локальних координат –

$$Z = \begin{pmatrix} tg(\varphi_1 t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & tg(\varphi_2 t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & tg(\varphi_l t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Після підстановки матриці Z у формулу (2.14) одержуємо $ds^2 = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_l^2)dt^2$, а значить $s = \int_0^1 \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_l^2}\,dt = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_l^2}$.

2.4.2 Випадок неізотропних *l*-площин псевдоевклідова простору. У псевдоевклідовому просторі ${}^1R_{l+p}$ метрику **визначимо** формулою

$$ds^2 = Tr[(E'_{p\times p} + ZZ^t)^{-1} dZ (E_{l\times l} + Z^t E' Z)^{-1} dZ^t] \qquad (2.16)$$

у підмноговиді ${}^{T}PG(l,l+p)$ часоподібних l-площин і формулою

$$ds^2 = Tr[(E + ZE'Z^t)^{-1} dZ(E' + Z^t Z)^{-1} dZ^t] \qquad (2.17)$$

у підмноговиді ${}^{S}PG(l,l+p)$ просторовоподібних l-площин, де Z – матриця локальних координат.

Покажемо, що дані визначення коректні й у цій метриці відстань між досить близькими l–площинами пов'язана з величинами стаціонарних кутів.

Доведення наведемо для випадку часоподібних l-площин, коли одна з кутових площин є часоподібною, а інші просторовоподібними. Тоді напрямні вектори довільної l-площини сім’ї мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\bar{x}_1 = ch(\varphi_1 t)\bar{e}_1 + sh(\varphi_1 t)\bar{e}_{1+l},\\
&\bar{x}_\alpha = \cos(\varphi_\alpha t)\bar{e}_\alpha + \sin(\varphi_\alpha t)\bar{e}_{\alpha+l},\\
&\alpha = 2,\ldots,l,\ t \in [0,1].
\end{aligned}$$

Її матрична координата запишеться у вигляді

$$A = \begin{pmatrix}
ch(\varphi_1 t) & 0 & \ldots & 0\\
0 & \cos(\varphi_2 t) & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & \ldots & \cos(\varphi_l t)\\
sh(\varphi_1 t) & 0 & \ldots & 0\\
0 & \sin(\varphi_2 t) & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & \ldots & \sin(\varphi_l t)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & \ldots & 0
\end{pmatrix}.$$

І, отже, одержимо наступну матрицю локальних координат l-площин *l-гелікоїда*

$$Z=\begin{pmatrix} th(\varphi_1 t) & 0 & ... & 0 \\ 0 & tg(\varphi_2 t) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & tg(\varphi_l t) \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Формула (2.16) при такому вигляді матриці Z набуде вигляду $ds^2=(-\varphi_1^2+\varphi_2^2+...+\varphi_l^2)dt^2$. Звідси, після інтегрування, одержимо $s=\int_0^1\sqrt{-\varphi_1^2+\varphi_2^2+...+\varphi_l^2}\,dt=\sqrt{-\varphi_1^2+\varphi_2^2+...+\varphi_l^2}$. Цю формулу можна вважати аналогом формули (2.18) для випадку псевдоевклідова простору. З формули випливає, що відстань між часоподібними площинами може бути дійсною, уявною і рівною нулю.

Для сім'ї просторовоподібних l-площин базис виберемо так, що напрямні вектори довільної l-площини будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} &\bar{x}_1=ch(\varphi_1 t)\bar{e}_{1+l}+sh(\varphi_1 t)\bar{e}_1, \\ &\bar{x}_\alpha=\cos(\varphi_\alpha t)\bar{e}_{\alpha+l}+\sin(\varphi_\alpha t)\bar{e}_\alpha, \\ &\alpha=2,...,l,\ t\in[0,1] \end{aligned}$$

Аналогічно попередньому зводимо формулу (2.17) до вигляду $ds^2=(-\varphi_1^2+\varphi_2^2+...+\varphi_l^2)dt^2$.

2.4.3 Випадок ізотропних *l*-площин псевдоевклідова простору. У підмноговиді ${}^{Is}G(l,l+p)$ ізотропних l-площин метрику **визначимо** наступною формулою

$$ds^2 = \lim_{k \to 0} Tr[(E''_{l\times l} + ZE''_{p\times p}Z^t)^{-1} dZ(E''_{p\times p} + Z^t E''_{l\times l} Z)^{-1} dZ^t], \quad (2.18)$$

де $E''_{l\times l} = diag(k,1...,1)$, Z – матриця локальних координат.

Покажемо, що цю метрику можна виразити через стаціонарні кути. Розглянемо множину ізотропних l-площин направляючі вектори яких мають вигляд

$$\begin{aligned} &\bar{x}_1 = f(t)\bar{e}_1 + g(t)\bar{e}_{1+l}, \\ &\bar{x}_\alpha = \cos(\varphi_\alpha t)\bar{e}_\alpha + \sin(\varphi_\alpha t)\bar{e}_{\alpha+l}, \\ &\alpha = 2,...,l,\ t \in [0,1] \end{aligned}$$

де умова $-f^2(t) + g^2(t) = 0$ забезпечує ізотропність вектора $\bar{x}_1$, $f(t), g(t)$ – деякі функції, що залежать від параметра t. Це можливо відносно ортонормованого базису $(\bar{e}_1,...,\bar{e}_l, \bar{e}_{l+1},...,\bar{e}_{l+p})$ простору ${}^1R_{l+p}$, перші $2l$ векторів якого розташовані в кутових площинах. Назвемо ці сім'ї ізотропних l-площин також l-гелікоїдами.

Матрична координата l-площини l-гелікоїда буде мати вигляд

$$A = \begin{pmatrix} f(t) & 0 & ... & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_2 t) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \cos(\varphi_l t) \\ g(t) & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sin(\varphi_2 t) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \sin(\varphi_l t) \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

а матриця локальних координат

$$Z = \begin{pmatrix} p(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & tg(\varphi_2 t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & tg(\varphi_l t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $p(t) = \dfrac{g(t)}{f(t)} \equiv \pm 1$. Підставляючи матрицю Z у формулу (2.18), одержимо $ds^2 = (\varphi_2^2 + \ldots + \varphi_l^2)dt^2$ або $s = \int\limits_0^1 \sqrt{\varphi_2^2 + \ldots + \varphi_l^2}\, dt$.

Таким чином, як і у випадку грассманового многовиду евклідова простору, у підмноговидах ${}^{T}PG(l, l+p)$, ${}^{S}PG(l, l+p)$ і ${}^{Is}PG(l, l+p)$ маємо метрику, пов'язану зі стаціонарними кутами.

2.5 Символи Крістоффеля I і II роду, геодезичні лінії

2.5.1 Випадок евклідова простору. Виходячи з вигляду метрики грассманового многовиду евклідова простору, метричний тензор записується в такий спосіб [18]

$$g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} = ((E_p + ZZ^t)^{-1})^{\nu}_{\mu}((E_l + Z^t Z)^{-1})^{j}_{i}, \tag{2.19}$$

Для одержання двічі контраваріантного метричного тензора $g^{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}}$ запишемо розкладання компонентів метричного тензора $g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}}$ в ряд по локальним координатам ξ_i^μ в околі нуля. Оскільки при досить малих ξ_i^μ матриці ZZ^t й Z^tZ мають норму, меншу за одиницю, то (2.19) з точністю до нескінченно малих четвертого порядку можна записати у вигляді

$g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} = (E - ZZ^t + (ZZ^t)^2)_\mu^\nu (E - Z^tZ + (Z^tZ)^2)_i^j$, або у координатах

$$g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} = (\delta_\mu^\nu - \xi_s^\mu \xi_s^\nu)_\mu^\nu (\delta_i^j - \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha)_i^\alpha = \delta_\mu^\nu \delta_i^j - \delta_\mu^\nu \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha - \delta_i^j \xi_s^\mu \xi_s^\nu + \xi_s^\mu \xi_s^\nu \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha. \quad (2.20)$$

Позначимо $\delta_\mu^\nu \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha + \delta_i^j \xi_s^\mu \xi_s^\nu = f$. Знайдемо $g^{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}}$ у вигляді $g^{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} = \delta_\mu^\nu \delta_i^j + F + O(\xi_i^\mu \xi_j^\nu)^2$. Оскільки $g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} g^{\binom{\mu}{i}\binom{\gamma}{k}} = \delta_\mu^\gamma \delta_i^k$, то легко одержати, що $F = -f$. У такий спосіб

$$g^{\binom{\mu\ \ \nu}{i\ \ j}} = (\delta_\mu^\nu + \xi_s^\mu \xi_s^\nu)_\mu^\nu (\delta_i^j + \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha) = \delta_\mu^\nu \delta_i^j + \delta_\mu^\nu \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha + \delta_i^j \xi_s^\mu \xi_s^\nu + \xi_s^\mu \xi_s^\nu \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha \quad (2.21)$$

У рімановому просторі символи Крістоффеля I і II роду є об'єктами внутрішньої геометрії.

Для знаходження символів Крістоффеля I роду в локальних координатах скористаємося формулою

$$\Gamma_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j},\binom{\beta}{l}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}}}{\partial \xi_l^\beta} + \frac{\partial g_{\binom{\nu}{j}\binom{\beta}{l}}}{\partial \xi_i^\mu} + \frac{\partial g_{\binom{\beta}{l}\binom{\mu}{i}}}{\partial \xi_j^\nu}\right). \quad (2.22)$$

Після диференціювання (2.20) по локальним координатам, заміни індексів, підсумовування й зведення подібних доданків прийдемо до наступного вигляду символів Крістоффеля I роду.

$$\Gamma_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j},\binom{\beta}{l}} = \delta_{\nu}^{\beta}\delta_{i}^{l}\xi_{j}^{\mu} + \delta_{j}^{l}\delta_{\beta}^{\mu}\xi_{i}^{\nu} + O(\xi^{3}).$$

Тоді символи Крістоффеля другого роду набудуть вигляду

$$\Gamma^{\binom{\rho}{k}}_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} = \Gamma_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j},\binom{\beta}{l}} g^{\begin{pmatrix}\beta & \rho\\ l & k\end{pmatrix}} = 2\delta_{\mu}^{\rho}\delta_{i}^{k}\xi_{j}^{\gamma}(\delta_{\gamma}^{\mu} - \xi_{s}^{\mu}\xi_{s}^{\gamma}).$$

Як відомо, геодезичні лініїріманова простору визначаються як криві, уздовж яких дотичний вектор переноситься паралельно. Це визначення дає наступний вигляд рівняння геодезичних ліній

$$\ddot{Z} - 2\dot{Z}Z^{t}(E + ZZ^{t})^{-1}\dot{Z} = 0, \tag{2.23}$$

де Z – матриця локальних координат.

2.5.2 Випадок псевдоевклідова простору. Застосуємо попередні дії для одержання символів Крістоффеля й рівняння геодезичних ліній для грассманового многовиду псевдоевклідова простору.

Метричний тензор підмноговиду часоподібних l-площин грассманового многовиду простору ${}^{1}R_{l+p}$ має вигляд

$$g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} = (E + ZE'Z^{t})^{-1}{}_{\mu}^{\nu}(E' + Z^{t}Z)^{-1}{}_{i}^{j}.$$

У координатному вигляді

$$g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} = (\delta_\mu^\nu - \xi_s^\mu(1-2\delta_1^s)\xi_s^\nu + \xi_s^\mu(1-2\delta_1^s)\xi_s^\gamma\xi_m^\gamma(1-2\delta_1^m)\xi_m^\nu)_\mu^\nu \otimes$$

$$\otimes((\delta_i^j - 2\delta_1^i\delta_1^j) - (1-2\delta_1^i)\xi_i^\alpha\xi_j^\alpha(1-2\delta_1^j) + (1-2\delta_1^i)\xi_i^\alpha\xi_n^\alpha(1-2\delta_1^n)\xi_n^\theta\xi_j^\theta(1-2\delta_1^j))_i^j.$$

Метричний тензор підмноговиду просторовоподібних l-площин

$$g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} = (E' + ZZ^t)^{-1}{}_\mu^\nu (E + Z^t E'Z)^{-1}{}_i^j$$

або в координатах

$$g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} = ((\delta_\mu^\nu - 2\delta_1^\mu\delta_1^\nu) - (1-2\delta_1^\mu)\xi_s^\mu\xi_s^\nu(1-2\delta_1^\nu) +$$

$$+(1-2\delta_1^\mu)\xi_s^\mu\xi_s^\gamma(1-2\delta_1^\gamma)\xi_m^\gamma\xi_m^\nu(1-2\delta_1^\nu))_\mu^\nu \otimes$$

$$\otimes(\delta_i^j - \xi_i^\alpha(1-2\delta_1^\alpha)\xi_j^\alpha + \xi_i^\alpha(1-2\delta_1^\alpha)\xi_n^\alpha\xi_n^\theta(1-2\delta_1^\theta)\xi_j^\theta)_i^j.$$

А метричний тензор підмноговиду ізотропних l–площин

$$g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} = (E'' + ZE''Z^t)^{-1}{}_\mu^\nu (E'' + Z^t E''Z)^{-1}{}_i^j$$

або в координатному вигляді

$$g_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} = ((\delta_\mu^\nu + (\frac{1}{k}-1)\delta_1^\mu\delta_1^\nu) - (1+(\frac{1}{k}-1)\delta_1^\mu)\xi_s^\mu(1+(k-1)\delta_1^s)\xi_s^\nu(1+(\frac{1}{k}-1)\delta_1^\nu)+$$

$$+(1+(\frac{1}{k}-1)\delta_1^\mu)\xi_s^\mu(1+(k-1)\delta_1^s)\xi_s^\gamma(1+(\frac{1}{k}-1)\delta_1^\gamma)\xi_m^\gamma(1+(k-1)\delta_1^m)\xi_m^\nu(1+(\frac{1}{k}-1)\delta_1^\nu))_\mu^\nu\otimes$$

$$\otimes((\delta_i^j + (\frac{1}{k}-1)\delta_1^i\delta_1^j) - (1+(\frac{1}{k}-1)\delta_1^i)\xi_i^\alpha(1+(k-1)\delta_1^\alpha)\xi_j^\alpha(1+(\frac{1}{k}-1)\delta_1^j)+$$

$$+(1+(\frac{1}{k}-1)\delta_1^i)\xi_i^\alpha(1+(k-1)\delta_1^\alpha)\xi_n^\alpha(1+(\frac{1}{k}-1)\delta_1^n)\xi_n^\theta(1+(k-1)\delta_1^\theta)\xi_j^\theta(1+(\frac{1}{k}-1)\delta_1^j))_i^j.$$

Для знаходження символів Крістоффеля першого роду також скористаємося формулою (2.22). У результаті одержимо, що для часоподібних l–площин

$$\Gamma_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j},\binom{\beta}{l}} = \delta_\nu^\beta(\delta_i^l - 2\delta_1^l\delta_1^i)\xi_j^\mu(1-2\delta_1^j) + (\delta_j^l - 2\delta_1^l\delta_1^j)\delta_\beta^\mu\xi_i^\nu(1-2\delta_1^i) + O(\xi^3),$$

для просторовоподібних l–площин

$$\Gamma_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j},\binom{\beta}{l}} = (\delta_\nu^\beta - 2\delta_1^\beta\delta_1^\nu)\delta_i^l\xi_j^\mu(1-2\delta_1^\mu) + \delta_j^l(\delta_\beta^\mu - 2\delta_1^\mu\delta_1^\beta)\xi_i^\nu(1-2\delta_1^\nu) + O(\xi^3).$$

Для символів Кристоффеля другого роду отримуємо формули

$$\Gamma_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}}^{\binom{\rho}{k}} = 2\delta_\nu^\rho\delta_k^i\xi_j^\gamma(1-2\delta_1^j)(\delta_\gamma^\mu - \xi_s^\mu(1-2\delta_1^s)\xi_s^\gamma),$$

$$\Gamma_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}}^{\binom{\rho}{k}} = 2\delta_\nu^\rho\delta_k^i\xi_j^\gamma(\delta_\gamma^\mu(1-2\delta_1^\mu) - (1-2\delta_1^\mu)\xi_s^\mu\xi_s^\gamma(1-2\delta_1^\gamma)),$$

$$\Gamma^{\binom{\rho}{k}}_{\binom{\mu}{i}\binom{\nu}{j}} = 2\delta_{\nu}^{\rho}\delta_{k}^{i}\xi_{j}^{\gamma}(1+(k-1)\delta_{1}^{j})((\delta_{\gamma}^{\mu} + (\frac{1}{k}-1)\delta_{1}^{\mu}\delta_{1}^{\gamma}) -$$

$$-(1+(\frac{1}{k}-1)\delta_{1}^{\mu})\xi_{s}^{\mu}(1+(k-1)\delta_{1}^{s})\xi_{s}^{\gamma}(1+(\frac{1}{k}-1)\delta_{1}^{\gamma}))$$

для підмноговидів ${}^{T}PG(l,l+p)$, ${}^{S}PG(l,l+p)$, ${}^{Is}PG(l,l+p)$ відповідно. Тоді рівняння геодезичних ліній у грассмановому многовиді простору ${}^{1}R_{l+p}$ в локальних координатах будуть мати вигляд

$$\ddot{Z} - 2\dot{Z}E'Z^{t}(E + ZE'Z^{t})^{-1}\dot{Z} = 0,$$

$$\ddot{Z} - 2\dot{Z}Z^{t}(E' + ZZ^{t})^{-1}\dot{Z} = 0,$$

$$\ddot{Z} - 2\dot{Z}E''Z^{t}(E'' + ZE''Z^{t})^{-1}\dot{Z} = 0$$

для підмноговидів просторовоподібних, часоподібних та ізотропних *l*-площин відповідно.

Можна показати, що геодезичними лініями є описані в пунктах 2.4.2 і 2.4.3 однопараметричні сім'ї *l*-площин – *l-гелікоїди*.

2.6 Висновки до розділу 2

У другому розділі побудована структура псевдоевклідова простору індекса 1, який називають простором Мінковського. Визначено вигляд скалярного добутку векторів. В залежності від знаку та значення скалярного квадрату вектори поділено на класи просторовоподібних, часоподібних та ізотропних векторів. Наведено класифікацію прямих та *l*-площин цього простору для $l \geq 2$. Розглянуто множину всіх *l*-площин, які проходять через фіксовану точку простору, та за аналогією з евклідовим простором її названо многовидом Грасмана. Визначено поняття стаціонарних кутів пари площин та за їх допомогою досліджено взаємне розташування площин цієї множини. Оскільки в просторі Мінковського існують площини трьох типів, то розглянута множина представляє собою диз'юнктне об'єднання трьох підмножин. В кожній з цих підмножин введено структуру гладкого многовиду, визначено вигляд метрики в локальних координатах та за допомогою стаціонарних кутів.

РОЗДІЛ 3
ГРАССМАНІВ ОБРАЗ ДВОВИМІРНОЇ ПОВЕРХНІ ПРОСТОРУ МІНКОВСЬКОГО

3.1 Диференціальна геометрія двовимірної поверхні простору Мінковського

Диференціальна геометрія поверхонь вивчається методом рухомого реперу. Дериваційні формули рухомого реперу та рівняння Гаусса для поверхонь евклідова простору виведені в роботі [7, с.98].

Будемо розглядати такі двовимірні поверхні простору ${}^1R_4$ або такі області на цих поверхнях, у яких тип дотичної площини зберігається в кожній точці.

Визначення 3.1. Двовимірна поверхня простору ${}^1R_4$ називається *просторовоподібною (часоподібною, ізотропною)*, якщо дотична площина до неї в кожній точці є просторовоподібною (часоподібною, ізотропною).

Нехай V^2 – гладка поверхня класу $C^k, k \geq 1$ в ${}^1R_4$, задана векторним рівнянням $\bar{r} = \bar{r}(u^1, u^2)$. Вектори $\bar{r}_i = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u^i}$ є дотичними до поверхні. Розглянемо в кожній точці $x \in V^2$ нормальну площину N_x. Виберемо в нормальній площині N_x лінійно незалежні вектори $\bar{\xi}_1$ й $\bar{\xi}_2$ так, щоб четвірка векторів $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ була ортонормованою в ${}^1R_4$. Якщо поверхня просторовоподібна, то нормальні площини в кожній точці до цієї поверхні будуть часоподібними, якщо ж поверхня часоподібна, то нормальні площини – просторовоподібні. У випадку ізотропної поверхні нормальні площини у всіх точках ізотропні, причому ізотропний вектор дотичної та нормальної площин буде спільним.

За допомогою кожного базисного вектора нормальної площини визначимо другі квадратичні форми

$$II^k = (\bar{\xi}_k, \bar{r}_{ij}) du^i du^j,\ k = 1{,}2\,,$$

де i, j – індекси підсумовування. Коефіцієнти позначимо $L_{ij}^k = (\bar{\xi}_k, \bar{r}_{ij})$.

Поверхню будемо вивчати за допомогою рухомого репера $(M, \bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$. Частинні похідні від векторів базису цього репера, тобто вектори $\dfrac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^i \partial u^j}, \dfrac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial u^j}$, можна розкласти по векторах цього ж базису. Розклади Гаусса мають вигляд

$$\bar{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \bar{r}_k + A_{ij}^l \bar{\xi}_l.$$

Нехай V^2 – просторовоподібна поверхня. У розкладах Гаусса коефіцієнти Γ_{ij}^k – це символи Крістоффеля другого роду. Коефіцієнти A_{ij}^l знаходимо, помноживши праву й ліву частини рівностей на $\bar{\xi}_k$. Одержимо

$$(\bar{r}_{ij}, \bar{\xi}_k) = -A_{ij}^1 = L_{ij}^1,\ (\bar{r}_{ij}, \bar{\xi}_k) = A_{ij}^2 = L_{ij}^2\,.$$

Таким чином, розклади Гаусса для просторовоподібної поверхні мають вигляд:

$$\bar{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \bar{r}_k - L_{ij}^1 \bar{\xi}_1 + L_{ij}^2 \bar{\xi}_2\,.$$

Розклади Вейнгартена для похідних від нормалей мають такий самий вигляд, як і для поверхні евклідова простору [7, с.96]:

$$\bar{\xi}_{ij} = -L_{ij}^k g^{ik} \bar{r}_k + \alpha_{ij}^l \bar{\xi}_l.$$

Нехай тепер V^2 – часоподібна поверхня. Після аналогічних перетворень можемо записати розклади Гаусса й Вейнгартена у вигляді

$$\bar{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^{k}\bar{r}_k + L_{ij}^{l}\bar{\xi}_l,$$
$$\bar{\xi}_{ij} = -L_{ij}^{k}g^{ik}\bar{r}_k + \alpha_{ij}^{l}\bar{\xi}_l$$

відповідно.

Ці розклади визначають наступний вигляд тензора кривини просторовоподібної поверхні. Використовуючи розклади Гаусса й Вейнгартена, можна вивести рівняння Гаусса у вигляді

$$R_{\beta ijk} = -L_{ik}^{1}L_{j\beta}^{1} + L_{ij}^{1}L_{k\beta}^{1} + L_{ik}^{2}L_{j\beta}^{2} - L_{ij}^{2}L_{k\beta}^{2}. \qquad (3.1)$$

Для часоподібної поверхні одержимо

$$R_{\beta ijk} = L_{ik}^{1}L_{j\beta}^{1} - L_{ij}^{1}L_{k\beta}^{1} + L_{ik}^{2}L_{j\beta}^{2} - L_{ij}^{2}L_{k\beta}^{2}. \qquad (3.2)$$

3.2 Індикатриса нормальної кривини поверхонь різних типів у просторі ${}^{1}R_4$

У просторі ${}^{1}R_4$ розглянемо двовимірну просторовоподібну поверхню V^2. Вибравши на цій поверхні два поля одиничних взаємно ортогональних нормалей $\bar{\xi}_1$ і $\bar{\xi}_2$, одержимо відповідні їм дві другі квадратичні форми

$$II^{k} = L_{11}^{k}(du^1)^2 + 2L_{12}^{k}du^1du^2 + L_{22}^{k}(du^2)^2, k = 1,2.$$

Введемо поняття індикатриси нормальної кривини поверхні.

У точці x просторовоподібної поверхні V^2 (для неї нормаль $\bar{\xi}_1$ – часоподібна, а $\bar{\xi}_2$ – просторовоподібна) кожному напрямку $\bar{\tau} \in T_x V^2$ відповідає вектор нормальної кривини $k(\bar{\tau})$, який розташований у нормальній площині N_x і є лінійною комбінацією проекцій вектора кривини на нормалі $\bar{\xi}_1$ й $\bar{\xi}_2$. Кінець цього вектора задає точку P, що належить N_x. При обертанні напрямку $\bar{\tau}$ в дотичній площині $T_x V^2$ точка P опише деяку криву, яку, за аналогією з евклідовим простором [7, гл.6], будемо називати *індикатрисою нормальної кривини*. Запишемо вектор нормальної кривини для деякого напрямку $\bar{\tau}$, який визначається диференціалами (du^1, du^2), у вигляді

$$k(\bar{\tau}) = \left(\text{Пр}_{\bar{\xi}_1} \bar{r}_{ss}\right)\bar{\xi}_1 + \left(\text{Пр}_{\bar{\xi}_2} \bar{r}_{ss}\right)\bar{\xi}_2 = -(\bar{r}_{ss}, \bar{n}_1)\bar{\xi}_1 + (\bar{r}_{ss}, \bar{n}_2)\bar{\xi}_2 = -\frac{II^1}{ds^2}\bar{\xi}_1 + \frac{II^2}{ds^2}\bar{\xi}_2,$$

де $\bar{r}_{ss}$ – вектор кривини кривої на поверхні V^2 в точці x, що має напрямок $\bar{\tau}$, а скалярні проекції визначено формулами $\text{Пр}_{\bar{\xi}_i} \bar{r}_{ss} = sign(\bar{\xi}_i^{\,2}) \dfrac{(\bar{r}_{ss}, \bar{\xi}_i)}{\sqrt{|\bar{\xi}_i^{\,2}|}}$.

Нехай x^1, x^2 – координати в нормальній площині N_x відносно репера з початком у точці x й базисними ортами $\bar{\xi}_1$ і $\bar{\xi}_2$. Тоді координати точки індикатриси мають вигляд

$$x^1 = -\frac{II^1}{ds^2}, \quad x^2 = \frac{II^2}{ds^2}.$$

Для дослідження рівняння індикатриси перейдемо на поверхні до такої параметризації u^1, u^2, відносно якої метричний тензор має вигляд $g_{ij} = \delta_{ij}$. Тоді з'являється можливість виразити u^1, u^2 через один параметр φ у вигляді

$$\cos\varphi = \frac{du^1}{\sqrt{(du^1)^2 + (du^2)^2}}, \sin\varphi = \frac{du^2}{\sqrt{(du^1)^2 + (du^2)^2}},$$

де кут φ утворений напрямком $\bar{\tau}$ і координатною лінією u^1.

Координати точки індикатриси для просторовоподібної поверхні набудуть вигляду

$$x^1 = -(L^1_{11}\cos^2\varphi + 2L^1_{12}\cos\varphi\sin\varphi + L^1_{22}\sin^2\varphi),$$
$$x^2 = L^2_{11}\cos^2\varphi + 2L^2_{12}\cos\varphi\sin\varphi + L^2_{22}\sin^2\varphi.$$

або

$$x^1 = -(\frac{L^1_{11} + L^1_{22}}{2} + \frac{L^1_{11} - L^1_{22}}{2}\cos 2\varphi + L^1_{12}\sin 2\varphi),$$
$$x^2 = \frac{L^2_{11} + L^2_{22}}{2} + \frac{L^2_{11} - L^2_{22}}{2}\cos 2\varphi + L^2_{12}\sin 2\varphi.$$

Перенесемо початок репера в площині N_x в точку з координатами (α, β), де $-\frac{L^1_{11} + L^1_{22}}{2} = \alpha$, $\frac{L^2_{11} + L^2_{22}}{2} = \beta$. Тоді

$$\bar{x}^1 = -\left(\frac{L^1_{11} - L^1_{22}}{2}\cos 2\varphi + L^1_{12}\sin 2\varphi\right),$$

$$\bar{x}^2 = \frac{L^2_{11} - L^2_{22}}{2}\cos 2\varphi + L^2_{12}\sin 2\varphi.$$

Якщо виключити параметр φ, то стане зрозумілим, що останні рівняння є рівняннями невиродженої центральної кривої із центром у точці (α, β).

Вимагаючи, щоб при $\varphi = 0$ виконувалась умова $\bar{x}^2 = 0$, отримаємо $L_{11}^2 = L_{22}^2$. При цьому функція $\bar{x}^1(\varphi)$ досягає екстремуму, значить $\frac{d\bar{x}^1}{d\varphi}(0) = 0$. Отже, $L_{12}^1 = 0$. Тому

$$\bar{x}^1 = -\left(\frac{L_{11}^1 - L_{22}^1}{2}\cos 2\varphi\right), \quad \bar{x}^2 = L_{12}^2 \sin 2\varphi .$$

Ці рівняння відповідають вибору нормалей $\bar{\xi}_1$ і $\bar{\xi}_2$ паралельно осям індикатриси нормальної кривини. Введемо позначення $\frac{L_{11}^1 - L_{22}^1}{2} = a$, $L_{12}^2 = b$. Знаходимо вирази для коефіцієнтів других квадратичних форм

$$L_{11}^1 = -(\alpha - a),\ L_{12}^1 = 0,\ L_{22}^1 = -(\alpha + a), \qquad L_{11}^2 = \beta,\ L_{12}^2 = b,\ L_{22}^2 = \beta .$$

Запишемо істотне рівняння Гаусса, яке одержимо з (3.1), підставивши в нього $\beta = j = 1, i = k = 2$.

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{-L_{11}^1 L_{22}^1 + (L_{12}^1)^2 + L_{11}^2 L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = -\frac{\det II^1}{\det I} + \frac{\det II^2}{\det I} . \quad (3.3)$$

Будемо кривину поверхні відносно нормалі $\bar{n}$ позначати $K(\bar{n})$. Тоді відносно часоподібної нормалі $\bar{\xi}_1$ визначимо $K(\bar{\xi}_1)$ відповідно до [44, с.97] формулою

$$K(\bar{\xi}_1) = -\frac{\det II}{\det I} . \quad (3.4)$$

Отже, гауссова кривина поверхні V^2 у формулі (3.3) є сумою кривин цієї поверхні відносно кожної з нормалей.

Оскільки $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 1$, то гауссова кривина просторовоподібної поверхні має вигляд $K = -L_{11}^1 L_{22}^1 + (L_{12}^1)^2 + L_{11}^2 L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2$.

Використовуючи отримані залежності між коефіцієнтами других квадратичних форм і параметрами α, β, a, b індикатриси нормальної кривини, можемо одержати аналог формули Картана [7, с.145] для гауссової кривини просторовоподібної поверхні у вигляді $K = -\alpha^2 + \beta^2 + a^2 - b^2$.

У випадку часоподібної поверхні індикатриса нормальної кривини належить нормальній площині поверхні, яка в кожній точці є просторовоподібною. Тоді координати точки індикатриси є проекціями на просторовоподібні вектори $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$ й мають вигляд $x^1 = \dfrac{II^1}{ds^2}$, $x^2 = \dfrac{II^2}{ds^2}$. Відносно ортонормованого базису в дотичному просторі метричний тензор поверхні в точці x має вигляд $g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді в цій точці маємо $ds^2 = -(du^1)^2 + (du^2)^2$. Оскільки $\left(\dfrac{du^2}{\sqrt{-(du^1)^2 + (du^2)^2}} \right)^2 - \left(\dfrac{du^1}{\sqrt{-(du^1)^2 + (du^2)^2}} \right)^2 = 1$, то існує таке φ, що

$$sh\varphi = \frac{du^1}{\sqrt{-(du^1)^2 + (du^2)^2}}, \quad ch\varphi = \frac{du^2}{\sqrt{-(du^1)^2 + (du^2)^2}}.$$

Для координат точки індикатриси можемо записати

$$x^i = L_{11}^i sh^2\varphi + 2L_{12}^i sh\varphi ch\varphi + L_{22}^i ch^2\varphi.$$

У спеціальній системі координат $L_{11}^2 = -L_{22}^2$ і $L_{12}^1 = 0$, а координати точки індикатриси часоподібної поверхні запишуться у вигляді

$$\bar{x}^1 = \frac{L_{22}^1 + L_{11}^1}{2} ch2\varphi, \quad \bar{x}^2 = L_{12}^2 sh2\varphi.$$

Ці рівняння визначають гіперболу із центром у точці (α, β), де $\alpha = \dfrac{L_{22}^1 - L_{11}^1}{2}$, $\beta = \dfrac{L_{22}^2 - L_{11}^2}{2}$ і півосями $a = \dfrac{L_{11}^1 + L_{22}^1}{2}$, $b = L_{12}^2$.

Коефіцієнти других квадратичних форм будуть виражатися через параметри індикатриси в такий спосіб

$$L_{11}^1 = a - \alpha,\ L_{12}^1 = 0,\ L_{22}^1 = a + \alpha,$$
$$L_{11}^2 = -\beta,\ L_{12}^2 = b,\ L_{22}^2 = \beta.$$

Запишемо істотне рівняння Гаусса, яке одержимо з (3.2), підставивши в нього $\beta = j = 1, i = k = 2$. Оскільки $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = -1$, то гауссова кривина часоподібної поверхні має вигляд

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = -L_{11}^1 L_{22}^1 + (L_{12}^1)^2 - L_{11}^2 L_{22}^2 + (L_{12}^2)^2. \tag{3.5}$$

Тоді формула Картана для гауссової кривини часоподібної поверхні має вигляд $K = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 + b^2$.

Розглянемо, **наприклад**, поверхню з радіус-вектором $\bar{r}(u,v) = (achu, ashu, b\cos v, b\sin v)$, яку можна вважати аналогом тора Кліффорда в просторі Мінковського. Дотичні вектори до цієї поверхні мають вигляд $\bar{r}_u' = (ashu, achu, 0, 0)$, $\bar{r}_v' = (0, 0, -b\sin v, b\cos v)$. Ці вектори є просторовоподібними та ортогональними, а значить поверхня буде просторовоподібною. У якості нормалей до поверхні можна обрати вектори $\bar{n}_1 = (chu, shu, 0, 0)$ та $\bar{n}_2 = (0, 0, \cos v, \sin v)$. Обчислимо коефіцієнти других квадратичних форм відносно нормалей $\bar{n}_1$ та $\bar{n}_2$:

$$L_{11}^1 = -a,\ L_{12}^1 = L_{22}^1 = 0,\ L_{11}^2 = L_{12}^2 = 0,\ L_{22}^2 = -b.$$

Для гауссової кривини поверхні за формулою (3.3) отримаємо $K = 0$.

3.3 Лінійчатий і точковий грассманів образ поверхні

Нехай V^2 – двовимірна поверхня класу C^k, $k \geq 1$ в просторі ${}^1R_4$, яка задана векторним рівнянням $\bar{r} = \bar{r}(u^1, u^2)$. Поставимо у відповідність кожній точці x поверхні V^2 площину, паралельну нормальній площини N_x, яка проходить через фіксовану точку O простору ${}^1R_4$. Цим встановлюється відображення поверхні V^2 в грассманів многовид $PG(2,4)$.

Грассмановим образом поверхні V^2 називають образ зазначеного відображення. Будемо позначати грассманів образ символом Γ^2.

Нехай $\bar{\xi}_i, i = 1,2$ – два довільних нормальних вектора до V^2 в точці x, вектори $\bar{r}_i$ – напрямні вектори дотичної площини до V^2 в точці x. Будемо вважати, що поверхня параметризована так, що вектори $\bar{r}_1$ й $\bar{r}_2$ ортогональні. Таким чином, у кожній точці x поверхні V^2 простору ${}^1R_4$ задані дотична й нормальна площини й пов'язані з ними вектори $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$, які в цій точці утворюють локальний базис простору ${}^1R_4$.

Грассманів образ поверхні простору ${}^1R_4$ можна, як і в евклідовому просторі, задавати за допомогою спеціальних координат, які називаються плюккеровими [7]. Для цього розглянемо два одиничні базисні вектори $\bar{\xi}_1 = (\xi_1^1, \xi_1^2, \xi_1^3, \xi_1^4)$, $\bar{\xi}_2 = (\xi_2^1, \xi_2^2, \xi_2^3, \xi_2^4)$ деякої фіксованої площини π, що задані своїми декартовими координатами. Розглянемо мінори другого порядку (2×4) - матриці, складеної із цих координат, і позначимо їх символами p^{ij}:

$$p^{ij} = \begin{vmatrix} \xi_1^i & \xi_1^j \\ \xi_2^i & \xi_2^j \end{vmatrix}, \; i < j, \; i, j = 1,..,4. \tag{3.6}$$

Очевидно, маємо шість мінорів $p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34}$. Ці мінори називаються плюккеровими координатами двовимірної площини. Таким чином, якщо ξ_k^l – декартові координати нормальних векторів у точці x поверхні V^2 простору ${}^1R_4$, то плюккерові координати площини N_x мають вигляд (3.6), де всі координати ξ_k^l залежать від тих же параметрів u^1, u^2, що й сама поверхня. Параметричні рівняння $p^{ij} = p^{ij}(u^1, u^2)$ задають грассманів образ поверхні. Якщо в якості базису нормальної площини вибрати іншу пару векторів, то набір плюккерових координат цієї площини буде відрізнятись від попереднього на множник, який дорівнює визначнику матриці переходу від одного базису до іншого. Далі вектори $\bar{\xi}_i, i = 1,2$ будемо вибирати нормованими й ортогональними.

Плюккерові координати задовольняють співвідношенню Плюккера

$$p^{12} p^{34} - p^{13} p^{24} + p^{14} p^{23} = 0. \tag{3.7}$$

Розглянемо бівектор $\bar{q}$, який визначається площиною, ортогональною до N_x. Він називається додатковим до бівектора $\bar{p} = [\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2]$, який визначається площиною N_x. Нехай $\bar{\tau}_1$ і $\bar{\tau}_2$ два одиничні вектори, ортогональні один одному і площині N_x й вектори $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$ утворюють додатно орієнтований базис в ${}^1R_4$, тоді $\bar{q} = [\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2]$, причому бівектори $\bar{p}$ й $\bar{q}$ ортогональні, тому що

$(\bar{p},\bar{q})=([\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2],[\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2])=(\bar{\xi}_1,\bar{\tau}_1)(\bar{\xi}_2,\bar{\tau}_2)-(\bar{\xi}_2,\bar{\tau}_1)(\bar{\xi}_1,\bar{\tau}_2)=0$. Якщо вектори $\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2$ визначають часоподібну площину, тобто $\bar{\xi}_1^{\,2}=-1$, $\bar{\xi}_2^{\,2}=1$, тоді $\bar{p}^{\,2}=([\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2],[\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2])=\bar{\xi}_1^{\,2}\bar{\xi}_2^{\,2}=-1$, а $\bar{q}^{\,2}=([\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2],[\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2])=1$. Якщо ж площина N_x – просторовоподібна, тоді $\bar{p}^{\,2}=1$, а $\bar{q}^{\,2}=-1$.

Знайдемо зв'язок між компонентами бівекторів $\bar{p}$ і $\bar{q}$, коли N_x – часоподібна площина. Розглянемо матрицю, складену з координат векторів $\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2$:

$$A=\begin{pmatrix}\xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 & \xi_1^4\\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 & \xi_2^4\\ \tau_1^1 & \tau_1^2 & \tau_1^3 & \tau_1^4\\ \tau_2^1 & \tau_2^2 & \tau_2^3 & \tau_2^4\end{pmatrix}.$$

Оскільки вектори $\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2,\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2$ утворюють додатно орієнтований ортонормований базис, то $\det A=1$. В рядках цієї матриці стоять координати векторів ортонормованого базису псевдоевклідова простору, тобто має місце наступна матрична рівність $AE'A^t=E'$, де $E'=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. Тоді матриця, обернена до A, має вигляд $A^{-1}=E'A^tE'$ або

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\xi_1^1 & -\xi_2^1 & -\tau_1^1 & -\tau_2^1\\ -\xi_1^2 & \xi_2^2 & \tau_1^2 & \tau_2^2\\ -\xi_1^3 & \xi_2^3 & \tau_1^3 & \tau_2^3\\ -\xi_1^4 & \xi_2^4 & \tau_1^4 & \tau_2^4\end{pmatrix}.$$

Скористаємося формулою для мінорів оберненої матриці [21, с.31]. Враховуючи, що $\det A=1$, можна записати

$$A^{-1}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} = (-1)^{i_1+i_2+k_1+k_2} A\begin{pmatrix} k_3 & k_4 \\ i_3 & i_4 \end{pmatrix}.$$

Покладемо, наприклад, $i_1 = 1, i_2 = 2,\ k_1 = 1, k_1 = 2$. Тоді $i_3 = 3, i_4 = 4,\ k_3 = 3, k_4 = 4$. Маємо

$$\begin{vmatrix} \xi_1^1 & -\xi_2^1 \\ -\xi_1^2 & \xi_2^2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} \tau_1^3 & \tau_1^4 \\ \tau_2^3 & \tau_2^4 \end{vmatrix},$$

або $p^{12} = q^{34}$.

Аналогічно знайдемо зв'язок між іншими компонентами бівекторів $\overline{p}$ і $\overline{q}$. Отже, бівектори $\overline{p}$ й $\overline{q}$ зв'язані співвідношеннями

$$q^{12} = -p^{34}, q^{13} = p^{24}, q^{14} = -p^{23}, q^{23} = p^{14}, q^{24} = -p^{13},\ \ q^{34} = p^{12}.$$

У випадку, коли N_x – просторовоподібна площина, матриця $A = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 & \xi_1^4 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 & \xi_2^4 \\ \tau_1^1 & \tau_1^2 & \tau_1^3 & \tau_1^4 \\ \tau_2^1 & \tau_2^2 & \tau_2^3 & \tau_2^4 \end{pmatrix}$ також є матрицею, складеною з координат векторів додатно орієнтованого ортонормованого базису й задовольняє рівності $AE'A^t = E''$, де $E'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді матриця, обернена до A, має вигляд $A^{-1} = E'A^tE''$ або

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\xi_1^1 & -\xi_2^1 & \tau_1^1 & -\tau_2^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & -\tau_1^2 & \tau_2^2 \\ \xi_1^3 & \xi_2^3 & -\tau_1^3 & \tau_2^3 \\ \xi_1^4 & \xi_2^4 & -\tau_1^4 & \tau_2^4 \end{pmatrix}.$$

Користуючись тією ж формулою для мінорів оберненої матриці, знайдемо зв'язок між бівекторами $\overline{p}$ й $\overline{q}$ у вигляді

$$q^{12} = p^{34}, q^{13} = -p^{24}, q^{14} = p^{23}, q^{23} = -p^{14}, q^{24} = p^{13}, \; q^{34} = -p^{12}.$$

Будемо розглядати p^{ij} як координати точки афінного простору A_6, тоді параметричні рівняння $p^{ij} = p^{ij}(u^1, u^2)$ задають точковий грассманів образ поверхні. З'ясуємо, яка метрика в просторі A_6 породжується метрикою вихідного простору ${}^1R_4$. Для цього розглянемо два ортогональних та нормованих вектора $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ площини N_x, нормальної до двовимірної поверхні V^2.

Нехай площина N_x часоподібна, тобто розглянемо випадок просторовоподібної поверхні, тоді вектори $\overline{x}$ й $\overline{y}$ будуть задовольняти умови:

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -1, \tag{3.8}$$

$$-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 1, \tag{3.9}$$

$$-x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 = 0. \tag{3.10}$$

Знайдемо квадрати плюккерових координат цієї площини й запишемо суму їх квадратів:

$$
\begin{gathered}
(p^{12})^2+(p^{13})^2+(p^{14})^2+(p^{23})^2+(p^{24})^2+(p^{34})^2= \\
=x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+x_1^2y_3^2+x_3^2y_1^2++x_1^2y_4^2+x_2^2y_3^2+x_3^2y_2^2+x_2^2y_4^2+x_4^2y_2^2+ \\
+x_3^2y_4^2+x_4^2y_3^2-2x_1x_2y_1y_2-2x_1x_3y_1y_3-2x_1x_4y_1y_4-2x_2x_3y_2y_3- \\
-2x_2x_4y_2y_4-2x_3x_4y_3y_4.
\end{gathered} \tag{3.11}
$$

Піднесемо обидві частини рівності (3.10) до квадрату і отриману рівність перепишемо у вигляді:

$$
\begin{gathered}
-2x_1x_2y_1y_2-2x_1x_3y_1y_3-2x_1x_4y_1y_4=-x_1^2y_1^2-x_2^2y_2^2-x_3^2y_3^2-x_4^2y_4^2- \\
-2x_2x_3y_2y_3-2x_2x_4y_2y_4-2x_3x_4y_3y_4.
\end{gathered}
$$

Тоді рівність (3.11) набуде вигляду:

$$
\begin{gathered}
(p^{12})^2+(p^{13})^2+(p^{14})^2+(p^{23})^2+(p^{24})^2+(p^{34})^2= \\
=x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+x_1^2y_3^2+x_3^2y_1^2+x_1^2y_4^2+x_2^2y_3^2++x_3^2y_2^2+x_2^2y_4^2+x_4^2y_2^2+x_3^2y_4^2+ \\
+x_4^2y_3^2-x_1^2y_1^2-x_2^2y_2^2-x_3^2y_3^2-x_4^2y_4^2-4x_2x_3y_2y_3-4x_2x_4y_2y_4-4x_3x_4y_3y_4.
\end{gathered}
$$

Після перегрупування та урахування умов (3.8)-(3.10), одержимо:

$$
\begin{gathered}
(p^{12})^2+(p^{13})^2+(p^{14})^2+(p^{23})^2+(p^{24})^2+(p^{34})^2=x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2+ \\
+2(x_2^2y_3^2-2x_2x_3y_2y_3+x_3^2y_2^2)+2(x_2^2y_4^2-2x_2x_4y_2y_4+x_4^2y_2^2)+ \\
+2(x_3^2y_4^2-2x_3x_4y_3y_4+x_4^2y_3^2)=1+2(p^{23})^2+2(p^{24})^2+2(p^{34})^2.
\end{gathered}
$$

Таким чином, плюккерові координати часоподібної площини простору ${}^1R_4$ задовольняють умову

$$
-(p^{12})^2-(p^{13})^2-(p^{14})^2+(p^{23})^2+(p^{24})^2+(p^{34})^2=-1. \tag{3.12}
$$

Аналогічно отримуємо умову на плюккерові координати просторовоподібної площини простору ${}^1R_4$ у вигляді

$$-(p^{12})^2-(p^{13})^2-(p^{14})^2+(p^{23})^2+(p^{24})^2+(p^{34})^2=1. \qquad (3.13)$$

Якщо ж площина ізотропна, то зв'язок між її плюккеровими координатами має вигляд

$$-(p^{12})^2-(p^{13})^2-(p^{14})^2+(p^{23})^2+(p^{24})^2+(p^{34})^2=0. \qquad (3.14)$$

Розглянемо в просторі A_6 радіус-вектори $O\overline{M}=(p^{12},p^{13},p^{14},p^{23},p^{24},p^{34})$, кінці яких зображують у цьому просторі площини простору ${}^1R_4$. Ліва частини рівностей (3.12)-(3.14) є квадратичною формою. Асоційовану з нею білінійну форму будемо розглядати як визначення скалярного добутку векторів $\overline{p}=(p^{12},p^{13},p^{14},p^{23},p^{24},p^{34})$ і $\overline{q}=(q^{12},q^{13},q^{14},q^{23},q^{24},q^{34})$, тобто

$$(\overline{p},\overline{q})=-(p^{12}q^{12}+p^{13}q^{13}+p^{14}q^{14})+p^{23}q^{23}+p^{24}q^{24}+p^{34}q^{34}.$$

Цей крок рівносильний введенню в A_6 структури шестивимірного псевдоевклідова простору індексу 3, який будемо позначати ${}^3R_6$. Числа $p^{12},p^{13},p^{14},p^{23},p^{24},p^{34}$ є координатами в ${}^3R_6$ відносно ортонормованого базису з матрицею Грамма

$$E_6' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тоді ліві частини умов (3.12), (3.13) і (3.14) являють собою квадрати вектора $\overline{OM}$ в метриці простору ${}^3R_6$ [72, с. 116]. Рівності (3.12), (3.13) і (3.14) означають, що вектор $\overline{OM}$ уявноодиничний, одиничний або ізотропний відповідно.

Розглянемо в просторі ${}^3R_6$ сфери. За визначенням, точка $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ простору належить сфері радіуса R із центром у початку координат, якщо виконується умова

$$\left|\overline{OM}\right| = R\,.$$

Оскільки вектор у просторі ${}^3R_6$ може мати уявну, дійсну або нульову довжину, то в цьому просторі можливі три види сфер. Зокрема, при $R = 1$ рівняння сфери дійсного радіуса запишеться у вигляді:

$$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 1, \qquad (3.15)$$

при $R = i$ маємо рівняння сфери уявного радіуса

$$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = -1, \qquad (3.16)$$

при $R = 0$ – рівняння ізотропного гіперконуса (сфери нульового радіуса)

$$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0. \qquad (3.17)$$

Таким чином, точковий грассманів образ часоподібної поверхні лежить на одиничній п'ятивимірній сфері (3.15), точковий грассманів образ просторовоподібної поверхні – на уявноодиничній п'ятивимірній сфері (3.16), точковий грассманів образ ізотропної поверхні – на ізотропному гіперконусі (3.17).

Нормаллю до поверхні, заданої неявно рівнянням $F(x_1,...,x_n)=0$ в евклідовому просторі, є вектор

$$gradF = (\frac{\partial F}{\partial x_1},...,\frac{\partial F}{\partial x_n}).$$

У просторі ${}^3R_6$ нормаллю до поверхні, заданої рівнянням $F(x_1,x_2.x_3,x_4,x_5,x_6)=0$, буде вектор

$$PgradF = (-\frac{\partial F}{\partial x_1},-\frac{\partial F}{\partial x_2},-\frac{\partial F}{\partial x_3},\frac{\partial F}{\partial x_4},\frac{\partial F}{\partial x_5},\frac{\partial F}{\partial x_6}),$$

який будемо називати *псевдоградієнтом*.

Алгебраїчна поверхня простору ${}^3R_6$, що зображує підмноговид ${}^TPG(2,4)$ часоподібних площин простору ${}^1R_4$, задається рівняннями (3.12) і (3.7). Тому нормалями до підмноговиду ${}^TPG(2,4)$ є лінійні комбінації лінійно незалежних векторів

$$\overline{p} = (p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34}),$$
$$\overline{q} = (-p^{34}, p^{24}, -p^{23}, p^{14}, -p^{13}, p^{12}).$$

Безпосередньо перевіряється, що ці нормалі ортогональні й $\bar{p}^2 = -1$, а $\bar{q}^2 = 1$.

Підмноговид ${}^{S}PG(2,4)$ можна занурити в ${}^{3}R_6$ у вигляді алгебраїчної поверхні з рівняннями (3.13) і (3.7). Вектори $\bar{p}$ і $\bar{q}$ є нормалями до цієї поверхні, причому $\bar{p}^2 = 1$, а $\bar{q}^2 = -1$. Так як нормальні площини до алгебраїчних поверхонь, що зображують підмноговиди ${}^{T}PG(2,4)$ й ${}^{S}PG(2,4)$, є часоподібними, то метрика кожної із цих поверхонь має сигнатуру $(--++)$.

Підмноговид ${}^{Is}G(2,4)$ є тривимірним, тому його занурення у вигляді алгебраїчної поверхні в простір ${}^{3}R_6$ задається $6 - 3 = 3$ рівняннями. У якості цих рівнянь можна вибрати

$$F_1 = -(p^{12})^2 - (p^{13})^2 - (p^{14})^2 + (p^{23})^2 + (p^{24})^2 + (p^{34})^2 = 0,$$

$$F_2 = p^{12}p^{34} - p^{34}p^{24} + p^{14}p^{23} = 0,$$

і, наприклад,

$$F_3 = (p^{12})^2 + (p^{13})^2 + (p^{14})^2 + (p^{23})^2 + (p^{24})^2 + (p^{34})^2 - 1 = 0.$$

Останнє рівняння будемо називати умовою нормовності. Псевдоградієнти функцій F_1, F_2, F_3 мають вигляд

$$PgradF_1 = (p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34}),$$

$$PgradF_2 = (-p^{34}, p^{24}, -p^{23}, p^{14}, -p^{13}, p^{12}),$$

$$PgradF_3 = (-p^{12}, -p^{13}, -p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34})$$

і є нормалями до підмноговиду ${}^{Is}G(2,4)$.

Перейдемо до наступної ортогональної системи нормалей підмноговиду ${}^{Is}G(2,4)$

$$\overline{n}_1 = (0,0,0, p^{23}, p^{24}, p^{34}),$$

$$\overline{n}_2 = (p^{12}, p^{13}, p^{14}, 0,0,0),$$

$$\overline{n}_3 = (-p^{34}, p^{24}, -p^{23}, p^{14}, -p^{13}, p^{12}),$$

у якій $\overline{n}_1^2 > 0, \overline{n}_2^2 < 0, \overline{n}_3^2 = 0$. Оскільки ортогональний базис дотичного простору до ізотропного гіперконуса (3.17) складається із двох часоподібних, двох просторовоподібних і ізотропного векторів, то алгебраїчна поверхня, що зображує підмновид ${}^{Is}G(2,4)$, має метрику сигнатури $(- + 0)$.

3.4 Тензор кривини підмноговидів ${}^{T}PG(2,4)$ і ${}^{S}PG(2,4)$

Розглянемо чотиривимірний підмноговид ${}^{T}PG(2,4)$ часоподібних площин. У просторі ${}^{3}R_6$ точковий образ підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$ можна задати вектор-функцією $\overline{p} = \overline{p}(y^1, y^2, y^3, y^4)$, де y^i – локальні координати. Нехай $d\sigma^2 = a_{\alpha\beta} dy^{\alpha} dy^{\beta}$, $\alpha, \beta = 1,...,4$ – метрика на ${}^{T}PG(2,4)$, індукована метрикою охопного простору ${}^{3}R_6$, де $a_{\alpha\beta} = (\frac{\partial \overline{p}}{\partial y^{\alpha}}, \frac{\partial \overline{p}}{\partial y^{\beta}})$ – компоненти цієї метрики. Як було показано вище, метрика підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$ має сигнатуру $(- - + +)$ і нормальний простір до ${}^{T}PG(2,4)$ визначається часоподібним і просторовоподібним векторами. Для підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$ розглянемо другі квадратичні форми $II = \Omega^{\sigma}_{\alpha\beta} dy^{\alpha} dy^{\beta}, \sigma = 1{,}2$ відносно нормалей $\overline{q}_1$ і $\overline{q}_2$. Коефіцієнти $\Omega^{\sigma}_{\alpha\beta}$ будемо визначати, як і в евклідовому просторі, рівностями

$$\Omega^1_{\alpha\beta} = (\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial y^{\alpha} \partial y^{\beta}}, \overline{q}_1),\ \Omega^2_{\alpha\beta} = (\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial y^{\alpha} \partial y^{\beta}}, \overline{q}_2),$$

які можна переписати у вигляді

$$\Omega^1_{\alpha\beta} = -(\frac{\partial \overline{p}}{\partial y^{\alpha}}, \frac{\partial \overline{p}}{\partial y^{\beta}}) = -a_{\alpha\beta},\ \Omega^2_{\alpha\beta} = -(\frac{\partial \overline{p}}{\partial y^{\alpha}}, \frac{\partial \overline{q}}{\partial y^{\beta}}),$$

тому що $\overline{q}_1 = \overline{p}$ й $\overline{q}_2 = \overline{q}$.

У кожній точці $p \in {}^T PG(2,4)$ розглянемо базис простору ${}^3R_6$, що складається з дотичних векторів $\overline{p}_{\alpha} = \dfrac{\partial \overline{p}}{\partial y^{\alpha}}$ і нормалей $\overline{p}$ і $\overline{q}$. Розклад Гаусса для підмноговиду ${}^T PG(2,4)$ запишеться у вигляді

$$\overline{p}_{ij} = \Gamma^k_{ij} \overline{p}_k - \Omega^1_{ij} \overline{p} + \Omega^2_{ij} \overline{q}.$$

Такі самі міркування для підмноговиду ${}^S PG(2,4)$ приводять до розкладу Гаусса у вигляді

$$\overline{p}_{ij} = \Gamma^k_{ij} \overline{p}_k + \Omega^1_{ij} \overline{p} - \Omega^2_{ij} \overline{q}.$$

Запишемо рівняння Гаусса для занурення розглянутих підмноговидів в простір ${}^3R_6$. Для ${}^T PG(2,4)$ одержимо

$$\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\Omega^1_{\alpha\gamma}\Omega^1_{\beta\delta} + \Omega^1_{\alpha\delta}\Omega^1_{\beta\gamma} + \Omega^2_{\alpha\gamma}\Omega^2_{\beta\delta} - \Omega^2_{\alpha\delta}\Omega^2_{\beta\gamma} =$$
$$= -a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} + a_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma} + (\frac{\partial\overline{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial\overline{q}}{\partial y^\gamma})(\frac{\partial\overline{p}}{\partial y^\beta}, \frac{\partial\overline{q}}{\partial y^\delta}) - (\frac{\partial\overline{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial\overline{q}}{\partial y^\delta})(\frac{\partial\overline{p}}{\partial y^\beta}, \frac{\partial\overline{q}}{\partial y^\gamma}), \quad (3.18)$$

а для ${}^S PG(2,4)$ рівняння Гаусса мають вигляд

$$\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Omega^1_{\alpha\gamma}\Omega^1_{\beta\delta} - \Omega^1_{\alpha\delta}\Omega^1_{\beta\gamma} - \Omega^2_{\alpha\gamma}\Omega^2_{\beta\delta} + \Omega^2_{\alpha\delta}\Omega^2_{\beta\gamma} =$$
$$= a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} - a_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma} - (\frac{\partial\overline{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial\overline{q}}{\partial y^\gamma})(\frac{\partial\overline{p}}{\partial y^\beta}, \frac{\partial\overline{q}}{\partial y^\delta}) + (\frac{\partial\overline{p}}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial\overline{q}}{\partial y^\delta})(\frac{\partial\overline{p}}{\partial y^\beta}, \frac{\partial\overline{q}}{\partial y^\gamma}) \quad (3.19)$$

3.5 Секційна кривина підмноговидів ${}^T PG(2,4)$ і ${}^S PG(2,4)$

Вонг Ю. в [95] встановив, що секційна кривина $\overline{K}(\sigma)$ грассманового многовиду $G(2,4)$ евклідова простору R_4 приймає значення з відрізка $[0,2]$. Виникає питання про значення секційної кривини грассманових підмноговидів ${}^T PG(2,4)$ і ${}^S PG(2,4)$ у випадку простору ${}^1R_4$. Відповідь на це питання дає наступна

Теорема 3.1. Секційна кривина $\overline{K}(\sigma)$ грассманових підмноговидів ${}^T PG(2,4)$ і ${}^S PG(2,4)$ простору ${}^1R_4$ може приймати будь-які дійсні значення.

Доведення. Метрика кожного з підмноговидів ${}^T PG(2,4)$ і ${}^S PG(2,4)$ при зануренні в ${}^3R_6$ має сигнатуру $(--++)$, тобто в дотичних просторах до цих підмноговидів можливі три типи неізотропних двовимірних площин із сигнатурами $(-+)$, $(++)$, $(--)$. У дотичному просторі підмноговиду ${}^T PG(2,4)$ виберемо, наприклад, двовимірну площину сигнатури $(-+)$, визначену двома ортогональними векторами $\overline{X} = (X^\alpha)$ й $\overline{Y} = (Y^\alpha)$ такими, що $\overline{X}^2 = -1$ й $\overline{Y}^2 = 1$. Будемо користуватися формулою [80]

$$\overline{K}(\sigma) = \frac{\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} X^{\alpha} Y^{\beta} X^{\gamma} Y^{\delta}}{(a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} - a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma}) X^{\alpha} Y^{\beta} X^{\gamma} Y^{\delta}}$$

для обчислення секційної кривини, в якій у нашому випадку $a_{\alpha\beta} = (\frac{\partial \overline{p}}{\partial y^{\alpha}}, \frac{\partial \overline{p}}{\partial y^{\beta}})$, а тензор кривини підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$ має вигляд

$$\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} + a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma} + (\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial y^{\alpha} \partial y^{\gamma}}, \overline{q})(\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial y^{\beta} \partial y^{\delta}}, \overline{q}) - (\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial y^{\alpha} \partial y^{\delta}}, \overline{q})(\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial y^{\beta} \partial y^{\gamma}}, \overline{q}).$$

Цю формулу можна записати у вигляді

$$\overline{K}(\sigma) = -1 - (\nabla_{\overline{X}} \overline{p}, \nabla_{\overline{X}} \overline{q})(\nabla_{\overline{Y}} \overline{p}, \nabla_{\overline{Y}} \overline{q}) + (\nabla_{\overline{X}} \overline{p}, \nabla_{\overline{Y}} \overline{q})(\nabla_{\overline{Y}} \overline{p}, \nabla_{\overline{X}} \overline{q}),$$

де $\nabla_{\overline{X}} \overline{p} = \frac{\partial \overline{p}}{\partial y^{\alpha}} X^{\alpha}$, причому $(\nabla_{\overline{X}} \overline{p}, \nabla_{\overline{Y}} \overline{q}) = (\nabla_{\overline{Y}} \overline{p}, \nabla_{\overline{X}} \overline{q})$, що випливає з вигляду координат векторів $\overline{p}$ і $\overline{q}$.

Підмноговид ${}^{T}PG(2,4)$ лежить на гіперсфері уявного радіуса простору ${}^{3}R_{6}$ і $\overline{p}$ – нормаль до цієї сфери. Будь-який напрямок у дотичному просторі до гіперсфери є головним і в кожному з головних напрямків нормальна кривина гіперсфери дорівнює –1. Тому, відповідно до теореми Родріга, $\nabla_{\overline{X}} \overline{p} = \overline{X}$, $\nabla_{\overline{Y}} \overline{p} = \overline{Y}$. Тоді формулу секційної кривини підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$ для обраної площини можна записати у вигляді

$$\overline{K}(\sigma) = -1 - (\overline{X}, \nabla_{\overline{X}} \overline{q})(\overline{Y}, \nabla_{\overline{Y}} \overline{q}) + (\overline{X}, \nabla_{\overline{Y}} \overline{q})(\overline{Y}, \nabla_{\overline{X}} \overline{q}). \quad (3.20)$$

Нашою задачею є знаходження границь значень секційної кривини $\overline{K}(\sigma)$. Оскільки $(\nabla_{\overline{X}}\overline{p})^2 = X^{\alpha}\left(\frac{\partial\overline{p}}{\partial y^{\alpha}}, \frac{\partial\overline{p}}{\partial y^{\alpha}}\right)X^{\beta} = -1$, то вектор $\nabla_{\overline{X}}\overline{p}$ є уявноодиничним, а для вектора $\nabla_{\overline{Y}}\overline{p}$ маємо $(\nabla_{\overline{Y}}\overline{p})^2 = 1$. Тоді $(\nabla_{\overline{X}}\overline{q})^2 = 1, (\nabla_{\overline{Y}}\overline{q})^2 = -1$. Вектори $\nabla_{\overline{X}}\overline{q}$ й $\nabla_{\overline{Y}}\overline{q}$ належать дотичному простору до ${}^{T}PG(2,4)$. У якості ортонормованого базису дотичного простору розглянемо систему векторів $\overline{X}, \overline{Z}, \overline{Y}, \overline{W}$, де $\overline{X}^2 = -1, \overline{Z}^2 = -1, \overline{Y}^2 = 1, \overline{W}^2 = 1$. Тоді

$$\begin{aligned} \nabla_{\overline{X}}\overline{q} &= a_1\overline{X} + a_2\overline{Z} + a_3\overline{Y} + a_4\overline{W}, \\ \nabla_{\overline{Y}}\overline{q} &= b_1\overline{X} + b_2\overline{Z} + b_3\overline{Y} + b_4\overline{W}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Підставляючи (3.21) в (3.20), одержимо

$$\overline{K}(\sigma) = -1 + a_1 b_3 - a_3 b_1. \tag{3.22}$$

З умов $(\nabla_{\overline{X}}\overline{q})^2 = 1, (\nabla_{\overline{Y}}\overline{q})^2 = -1, (\nabla_{\overline{X}}\overline{q}, \nabla_{\overline{Y}}\overline{q}) = 0$, $(\overline{X}, \nabla_{\overline{Y}}\overline{q}) = (\overline{Y}, \nabla_{\overline{X}}\overline{q})$ випливає, що

$$\begin{gathered} -a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1, \\ -b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = -1, \\ -a_1 b \; - a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = 0, \\ a_3 = -b_1. \end{gathered} \tag{3.23}$$

Задача оцінки секційної кривини зводиться до питання про те, які значення може досягати вираз (3.22) при виконанні умов (3.23). Розглянемо наступні набори координат: $a_1 = t, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = \sqrt{1+t^2}$ і

$b_1 = 0, b_2 = \sqrt{1+t^2}, b_3 = t, b_4 = 0$. При кожному $t \in R$ умови (3.23) виконуються тотожно, а $\overline{K}(\sigma) = -1 + t^2$. Отже, $\overline{K}(\sigma)$ може приймати всі значення з $[-1, \infty)$.

Нехай тепер $a_1 = t, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = \sqrt{1+t^2}$ і $b_1 = 0, b_2 = \sqrt{1+t^2}, b_3 = -t, b_4 = 0$. Тоді $\overline{K}(\sigma) = -1 - t^2$, а значить, $\overline{K}(\sigma)$ може приймати всі значення з $(-\infty, -1]$.

Поєднуючи отримані результати, робимо висновок, що секційна кривина підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$ для площини сигнатури $(-+)$ може приймати всі дійсні значення. Аналогічним чином доводиться, що секційна кривина необмежена для всіх неізотропних двовимірних площин дотичного простору підмноговидів ${}^{T}PG(2,4)$ і ${}^{S}PG(2,4)$. Теорема доведена.

3.6 Кривина підмноговидів ${}^{T}PG(2,4)$ і ${}^{S}PG(2,4)$ для площини, дотичної до грассманового образу поверхні

Нехай F^2 – регулярна просторовоподібна поверхня, задана в ${}^{1}R_4$. Її грассманів образ Γ^2 лежить на підмноговиді ${}^{T}PG(2,4)$. У дотичному просторі підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$ в точці p виберемо площину σ, що дотикається до поверхні Γ^2. Знайдемо кривину $\overline{K}(\sigma)$.

Теорема 3.2. Кривина підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$ для площини, дотичної до грассманового образу просторовоподібної поверхні $V^2 \in {}^{1}R_4$, обчислюється за формулою

$$\overline{K}(\sigma) = \frac{-K^2 + 4a^2b^2}{K^2 - 4(\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2)}.$$

Доведення. Нехай V^2 – регулярна просторовоподібна поверхня, задана в ${}^1R_4$, Γ^2 – її грассманів образ, який лежить на підмноговиді ${}^T PG(2,4)$. Припустимо, що існують області на V^2, точковий грассманів образ яких має у всіх точках дотичні площини одного типу. Помітимо, що тип грассманового образу може як збігатися з типом поверхні V^2, так і відрізнятися від нього.

Поверхню Γ^2 будемо задавати у вигляді $\bar{p} = \bar{p}(u^1, u^2)$, причому координати u^1, u^2 перенесені із V^2 грассмановим відображенням, тому що $\bar{p} = [\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2]$, а $\bar{\xi}_i = \bar{\xi}_i(u^1, u^2)$. Використовуючи дериваційні формули просторовоподібної поверхні, дотичні вектори до Γ^2 можна записати в такий спосіб

$$\bar{p}_{u_i} = -L^1_{ik} g^{kl} [\bar{r}_l, \bar{\xi}_2] - L^2_{ik} g^{kl} [\bar{\xi}_1, \bar{r}_l]. \tag{3.24}$$

Тоді метрична форма грассманового образу Γ^2 буде мати вигляд

$$dp^2 = (L^1_{ik} L^1_{jl} - L^2_{ik} L^2_{jl}) g^{kl} du^i du^j,$$

тобто її коефіцієнти виражаються через коефіцієнти першої й других квадратичних форм поверхні V^2.

Форма $(d^2\bar{p}, \bar{q})$ також буде пов'язана з геометрією поверхні V^2 й запишеться в такому вигляді

$$(d^2\bar{p}, \bar{q}) = -\frac{2}{\sqrt{g}}((L^{1`}_{12} L^2_{11} - L^1_{12} L^1_{11})(du^1)^2 + (L^2_{11} L^1_{22} - L^1_{11} L^2_{22}) du^1 du^2 + \\ + (L^{1`}_{22} L^2_{21} - L^2_{22} L^1_{21})(du^2)^2). \tag{3.25}$$

При виборі спеціальної системи координат на поверхні V^2, описаної в параграфі 3.2, можемо виразити всі коефіцієнти квадратичної форми (3.25) через параметри індикатриси нормальної кривини

$$(\bar{p}_{u^1u^1}, \bar{q}) = -2(L^{1`}_{12}L^{2}_{11} - L^{1}_{12}L^{1}_{11}) = -2b(\alpha - a)\,, (\bar{p}_{u^1u^2}, \bar{q}) = -2(L^{1`}_{11}L^{1}_{22} - L^{1}_{11}L^{2}_{22}) = 2a\beta,$$

$$(\bar{p}_{u^2u^2}, \bar{q}) = -2(L^{1`}_{22}L^{1}_{21} - L^{2}_{22}L^{1}_{21}) = 2b(\alpha + a)\,.$$

Детермінант метричної форми поверхні Γ^2 через параметри індикатриси нормальної кривини й гауссову кривину K поверхні V^2 можна виразити у вигляді

$$\bar{p}^2_{u^1}\bar{p}^2_{u^2} - (\bar{p}_{u^1}, \bar{p}_{u^2})^2 = K^2 - 4(\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2)\,.$$

Нехай дотичні вектори $\bar{g}_i$ мають координати $g_i^\alpha = \dfrac{dy^\alpha}{du^i}$ й визначають двовимірну площину σ. Тоді секційна кривина $\bar{K}(\sigma)$ знаходиться з формули

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\, g_1{}^\alpha g_2{}^\beta g_1{}^\gamma g_2{}^\delta}{(a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} - a_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma})\, g_1{}^\alpha g_2{}^\beta g_1{}^\gamma g_2{}^\delta}\,,$$

або з урахуванням (3.18)

$$\bar{K}(\sigma) = -1 + \frac{(\bar{p}_{u^1u^1}, \bar{q})(\bar{p}_{u^2u^2}, \bar{q}) - (\bar{p}_{u^1u^2}, \bar{q})^2}{\bar{p}_{u^1}\bar{p}^2_{u^2} - (\bar{p}_{u^1}, \bar{p}_{u^2})^2}\,. \tag{3.26}$$

Формула секційної кривини через параметри індикатриси нормальної кривини має вигляд

$$\overline{K}(\sigma)=\frac{-K^2+4a^2b^2}{K^2-4(\alpha^2b^2+\beta^2a^2)}.$$

Теорема доведена.

У випадку часоподібної поверхні $V^2 \in {}^1R_4$ має місце наступна

Теорема 3.3. Кривина підмноговиду ${}^SPG(2,4)$ для площини, дотичної до грассманового образу часоподібної поверхні $V^2 \in {}^1R_4$, обчислюється за формулою

$$\overline{K}(\sigma)=\frac{K^2-4a^2b^2}{K^2-4(\alpha^2b^2+\beta^2a^2)}.$$

Доведення. Якщо V^2 – регулярна часоподібна поверхня, задана в ${}^1R_4$, то її грассманів образ Γ^2 лежить на підмноговиді ${}^SPG(2,4)$. Використовуючи дериваційні формули часоподібної поверхні, дотичні вектори до Γ^2 можна також записати у вигляді (3.24). Тоді метрична форма грассманового образу Γ^2 буде мати вигляд

$$dp^2=(L^1_{ik}L^1_{jl}+L^2_{ik}L^2_{jl})g^{kl}du^idu^j,$$

тобто її коефіцієнти виражаються через коефіцієнти першої й других квадратичних форм поверхні V^2.

Форма $(d^2\overline{p},\overline{q})$ також буде пов'язана з геометрією поверхні V^2 й запишеться в такому вигляді

$$(d^2\overline{p},\overline{q}) = -\frac{2}{\sqrt{-g}}((L^{1`}_{12}L^2_{11} - L^1_{12}L^1_{11})(du^1)^2 + (L^2_{11}L^1_{22} - L^1_{11}L^2_{22})du^1du^2 +$$

$$+ (L^{1`}_{22}L^2_{21} - L^2_{22}L^1_{21})(du^2)^2)$$

При виборі спеціальної системи координат на поверхні V^2, описаної в параграфі 3.2, можемо виразити всі коефіцієнти останньої формули через параметри індикатриси нормальної кривини

$$(\overline{p}_{u^1u^1},\overline{q}) = -2(L^{1`}_{12}L^2_{11} - L^1_{12}L^1_{11}) = 2b(\alpha - a)\,, (\overline{p}_{u^1u^2},\overline{q}) = -2(L^{1`}_{11}L^1_{22} - L^1_{11}L^2_{22}) = 2a\beta\,,$$

$$(\overline{p}_{u^2u^2},\overline{q}) = -2(L^{1`}_{22}L^1_{21} - L^2_{22}L^1_{21}) = -2b(\alpha + a)\,.$$

Детермінант метричної форми поверхні Γ^2 через параметри індикатриси нормальної кривини й гауссову кривину K поверхні V^2 можна виразити у вигляді

$$\overline{p}^2_{u^1}\overline{p}^2_{u^2} - (\overline{p}_{u^1},\overline{p}_{u^2})^2 = -K^2 + 4(\alpha^2b^2 - \beta^2a^2)\,.$$

Тоді секційна кривина $\overline{K}(\sigma)$ знаходиться за формулою

$$\overline{K}(\sigma) = 1 - \frac{(\overline{p}_{u^1u^1},\overline{q})(\overline{p}_{u^2u^2},\overline{q}) - (\overline{p}_{u^1u^2},\overline{q})^2}{\overline{p}_{u^1}\overline{p}^2_{u^2} - (\overline{p}_{u^1},\overline{p}_{u^2})^2}\,,$$

яка випливає з формули (3.19), або через параметри індикатриси нормальної кривини

$$\overline{K}(\sigma) = \frac{K^2 - 4a^2b^2}{K^2 - 4(\alpha^2b^2 + \beta^2a^2)}$$

Теорема доведена.

Далі знайдемо гауссову кривину грассманового образу $\Gamma^2 \subset {}^3R_6$, яку будемо позначати $\overline{K}_{\Gamma^2}$. Для її знаходження нам потрібні головні кривини Γ^2, які знайдемо з характеристичного рівняння [67]. Для грассманового образу просторовоподібної поверхні $V^2 \subset {}^1R_4$ всі головні кривини відносно нормалі $\overline{p}$ рівні між собою, а відносно нормалі $\overline{q}$ головні кривини є розв'язками рівняння

$$\lambda^2 - 2\lambda \frac{2abK}{K^2 - 4(\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2)} - \frac{4(\alpha^2 b^2 - a^2 b^2 + \beta^2 a^2)}{K^2 - 4(\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2)} = 0 .$$

Останній доданок можна записати в такий спосіб

$$-\frac{4(\alpha^2 b^2 - a^2 b^2 + \beta^2 a^2)}{K^2 - 4(\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2)} = \overline{K}(\sigma) + 1,$$

а, з іншого боку, $\overline{K}_{\Gamma^2} = \lambda_1 \lambda_2$, тому

$$\overline{K}_{\Gamma^2} = \overline{K}(\sigma) + 1 .$$

Знайдемо зв'язок між кривинами для часоподібної поверхні. З урахуванням формули (3.4) маємо $\overline{K}_{\Gamma^2} = -\lambda_1 \lambda_2$. Тоді

$$\overline{K}_{\Gamma^2} = \overline{K}(\sigma) - 1.$$

Зауваження. Якщо головні кривини λ_i грассманового образу просторовоподібної поверхні одного знаку, тобто форма $(d^2 \overline{p}, \overline{q}) = -(d\overline{p}, d\overline{q})$ знаковизначена, то $\overline{K}_{\Gamma^2} = \overline{K}(\sigma) + 1 > 0$ або $\overline{K}(\sigma) > -1$. Якщо λ_i – різних знаків, то $\overline{K}(\sigma) < -1$. Для грассманового образу часоподібної поверхні при $\overline{K}(\sigma) < 1$ форма знаковизначена, а при $\overline{K}(\sigma) > 1$ є знаконевизначеною.

Приклад. Знайдемо кривину підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$ уздовж площини, дотичної до грассманового образу поверхні $\bar{r}(u,v) = (achu; ashu; b\cos v; b\sin v)$ (див.п.3.2). Бівектор, який задає грассманів образ розглянутої поверхні, буде мати вигляд $\bar{p}(u,v) = (0; chu\cos v; chu\sin v; shu\cos v; shu\sin v; 0)$, а $\bar{q} = (0; -shu\sin v; shu\cos v; -chu\sin v; chu\cos v; 0)$. Секційну кривину будемо обчислювати за формулою (3.26). Для скалярних добутків в цій формулі маємо $(\bar{p}_{uu}, \bar{q}) = 0$, $(\bar{p}_{uv}, \bar{q}) = 1$, $(\bar{p}_{vv}, \bar{q}) = 0$. Отже, $\overline{K}(\sigma) = 0$.

3.7 Класи поверхонь простору Мінковського зі стаціонарними значеннями кривини підмноговидів ${}^{T}PG(2,4)$ і ${}^{S}PG(2,4)$ уздовж площин, дотичних до їх грассманового образу

У роботах [17,87] досліджуються поверхні евклідова простору, для яких кривина грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу поверхні, приймають мінімальне й максимальне значення. Оскільки секційна кривина підмноговидів ${}^{T}PG(2,4)$ і ${}^{S}PG(2,4)$ може приймати будь-які дійсні значення (див. п.3.5), то будемо розглядати значення секційної кривини в точках локальних екстремумів. Опишемо ті класи поверхонь V^2 простору ${}^{1}R_4$, для яких кривина підмноговидів ${}^{T}PG(2,4)$ і ${}^{S}PG(2,4)$ уздовж площин, дотичних до їх грассманового образу Γ^2, приймає стаціонарні значення.

Двовимірні дотичні площини σ до кожного з підмноговидів будемо задавати бівектором $\bar{\sigma}$ з координатами $\sigma^{ab} = x^{[a} y^{b]}$, де $\overline{X} = (x^a)$ й $\overline{Y} = (y^b)$,

$a,b=1,..,4$ – дотичні вектори. Тоді секційна кривина в напрямку даної площини визначається формулою [65]

$$\overline{K}(\sigma)=\frac{\overline{R}_{abcd}\sigma^{ab}\sigma^{cd}}{(a_{ac}a_{bd}-a_{ab}a_{cd})\sigma^{ab}\sigma^{cd}},$$

де $\overline{R}_{abcd}$ – тензор кривини підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$ або ${}^{S}PG(2,4)$.

Знайдемо дотичні вектори до грассманового образу часоподібної поверхні $V^2\subset{}^1R_4$. Базисні одиничні вектори $\overline{e}_1,\overline{e}_2$ оберемо так, що $\overline{r}_1=\sqrt{g_{11}}\overline{e}_1$, $\overline{r}_2=\sqrt{g_{22}}\overline{e}_2$ та $\overline{e}_3=\overline{\xi}_1,\overline{e}_4=\overline{\xi}_2$, де $\overline{r}_1,\overline{r}_2$ – взаємно ортогональні дотичні вектори поверхні V^2, а $\overline{\xi}_1,\overline{\xi}_2$ – її нормалі. Тоді, згідно з (3.24), дотичні вектори до грассманового образу можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\overline{X}&=\frac{\partial\overline{p}}{\partial u^1}=\left(\frac{L_{11}^2}{\sqrt{g_{11}}},-\frac{L_{11}^1}{\sqrt{g_{11}}},\frac{L_{12}^2}{\sqrt{g_{22}}},-\frac{L_{12}^1}{\sqrt{g_{22}}}\right),\\ \overline{Y}&=\frac{\partial\overline{p}}{\partial u^2}=\left(\frac{L_{12}^2}{\sqrt{g_{11}}},-\frac{L_{12}^1}{\sqrt{g_{11}}},\frac{L_{22}^2}{\sqrt{g_{22}}},-\frac{L_{22}^1}{\sqrt{g_{22}}}\right),\end{aligned}\tag{3.27}$$

де L_{ij}^k – коефіцієнти других квадратичних форм поверхні V^2. Бівектор $\overline{\sigma}$ буде мати координати:

$$\sigma^{12}=\frac{L_{11}^1L_{12}^2-L_{12}^1L_{11}^2}{g_{11}},\sigma^{13}=\frac{L_{11}^2L_{22}^2-(L_{12}^2)^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},\sigma^{14}=\frac{L_{12}^1L_{12}^2-L_{22}^1L_{11}^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},$$

$$\sigma^{23}=\frac{L_{12}^1L_{12}^2-L_{11}^1L_{22}^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},\sigma^{24}=\frac{L_{11}^1L_{22}^1-(L_{12}^1)^2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},\ \sigma^{34}=\frac{L_{12}^1L_{22}^2-L_{22}^1L_{12}^2}{g_{22}}.\tag{3.28}$$

У випадку просторовоподібної поверхні базисні одиничні вектори $\bar{e}_3, \bar{e}_4$ оберемо так, що $\bar{r}_1 = \sqrt{g_{11}}\bar{e}_3$, $\bar{r}_2 = \sqrt{g_{22}}\bar{e}_4$ та $\bar{e}_1 = \bar{\xi}_1, \bar{e}_2 = \bar{\xi}_2$, де $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ – взаємно ортогональні дотичні вектори поверхні V^2, а $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ – її нормалі. Тоді дотичні вектори до грассманового образу будуть мати вигляд

$$\begin{gathered}\bar{X} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial u^1} = \left(-\frac{L_{11}^2}{\sqrt{g_{11}}}, -\frac{L_{12}^2}{\sqrt{g_{22}}}, \frac{L_{11}^1}{\sqrt{g_{11}}}, \frac{L_{12}^1}{\sqrt{g_{22}}} \right), \\ \bar{Y} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial u^2} = \left(-\frac{L_{12}^2}{\sqrt{g_{11}}}, -\frac{L_{22}^2}{\sqrt{g_{22}}}, \frac{L_{21}^1}{\sqrt{g_{11}}}, \frac{L_{22}^1}{\sqrt{g_{22}}} \right),\end{gathered} \tag{3.29}$$

а бівектор $\bar{\sigma}$ буде мати координати

$$\sigma^{12} = \frac{L_{11}^2 L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2}{\sqrt{g_{11} g_{22}}},\ \sigma^{13} = \frac{L_{11}^1 L_{12}^2 - L_{12}^1 L_{11}^2}{g_{11}},\ \sigma^{14} = \frac{L_{12}^1 L_{12}^2 - L_{22}^1 L_{11}^2}{\sqrt{g_{11} g_{22}}},$$

$$\sigma^{23} = \frac{L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{12}^1 L_{12}^2}{\sqrt{g_{11} g_{22}}},\ \sigma^{24} = \frac{L_{12}^1 L_{22}^2 - L_{22}^1 L_{12}^2}{g_{22}},\ \sigma^{34} = \frac{L_{11}^1 L_{22}^1 - (L_{12}^1)^2}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}. \tag{3.30}$$

Використовуючи вирази (3.19) та (3.18) для тензорів кривини підмноговидів ${}^{S}PG(2,4)$ та ${}^{T}PG(2,4)$ відповідно та формули (3.27)-(3.30), отримаємо формули секційної кривини для підмноговиду ${}^{S}PG(2,4)$ у вигляді

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{(-\sigma^{12} + \sigma^{34})^2 - (\sigma^{13} + \sigma^{24})^2}{(\sigma^{12})^2 - (\sigma^{13})^2 - (\sigma^{14})^2 - (\sigma^{23})^2 - (\sigma^{24})^2 + (\sigma^{34})^2} \tag{3.31}$$

та для підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$ у вигляді

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{-(-\sigma^{12} + \sigma^{34})^2 + (\sigma^{13} + \sigma^{24})^2}{(\sigma^{12})^2 - (\sigma^{13})^2 - (\sigma^{14})^2 - (\sigma^{23})^2 - (\sigma^{24})^2 + (\sigma^{34})^2}. \tag{3.32}$$

Підмноговиди ${}^{S}PG(2,4)$ та ${}^{T}PG(2,4)$ є алгебраїчними поверхнями з метрикою сигнатури $(--++)$ (див. п.3.3). Бівектор $\overline{\sigma}$ можна розглядати як точку шестивимірного простору. Псевдоріманова метрика грассманових підмноговидів породжує в цьому шестивимірному просторі метрику сигнатури $(+----+)$. Тоді вираз у знаменниках останніх двох формул є скалярним квадратом бівектора $\overline{\sigma}$, що визначає дотичну площину до грассманового образу.

Формула (3.31) співпадає з формулою секційної кривини з роботи [61], а формула (3.32) має інший вигляд, що обумовлено відмінним від запропонованого в роботі [61] вибором базису. В цій же роботі розглядалися грассманові підмноговиди неізотропних підпросторів псевдоевклідова простору довільного індексу, знайдені стаціонарні значення їх секційної кривини. Точки локальних екстремумів знаходяться з системи рівнянь

$$\frac{\partial \overline{K}(\sigma)}{\partial \sigma^{ij}} = 0\,.$$

У випадку простору ${}^{1}R_4$ та з урахуванням вибору базису стаціонарні точки і відповідні значення секційної кривини для підмноговиду ${}^{S}PG(2,4)$ мають вигляд

1. $\sigma^{12} = \sigma^{34}$, $\sigma^{24} = -\sigma^{13}$ і $\overline{K}(\sigma) = 0$;
2. $\sigma^{12} = \sigma^{34} = 0$, $\sigma^{23} = \sigma^{14}$ і $\overline{K}(\sigma) = 1$;
3. $\sigma^{13} = \sigma^{24} = 0$, $\sigma^{23} = -\sigma^{14}$ і $\overline{K}(\sigma) = 1$,

а для підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$

1. $\sigma^{12} = \sigma^{34}$, $\sigma^{24} = -\sigma^{13}$ і $\overline{K}(\sigma) = 0$;
2. $\sigma^{12} = \sigma^{34} = 0$, $\sigma^{23} = \sigma^{14}$ і $\overline{K}(\sigma) = -1$;
3. $\sigma^{13} = \sigma^{24} = 0$, $\sigma^{23} = -\sigma^{14}$ і $\overline{K}(\sigma) = -1$.

Опишемо ті класи часоподібних і просторовоподібних поверхонь V^2 простору ${}^1R_4$, для яких кривина підмноговидів ${}^S PG(2,4)$ і ${}^T PG(2,4)$ уздовж площин, дотичних до грассманового образу Γ^2 поверхні, приймає стаціонарні значення.

Розглянемо випадок, коли секційна кривина приймає стаціонарне значення, що дорівнює нулю. Має місце

Теорема 3.4. Нехай $V^2 \subset {}^1R_4$ – регулярна часоподібна (або просторовоподібна) поверхня з невиродженим грассмановим образом Γ^2. Стаціонарне значення секційної кривини підмноговиду ${}^S PG(2,4)$ (або ${}^T PG(2,4)$) уздовж будь-якої неізотропної площини, дотичної до Γ^2, дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли виконуються умови:

1. Поверхня V^2 є плоским многовидом у просторі ${}^1R_4$,

2. Поверхня V^2 має плоску нормальну зв'язність, тобто її перша та друга квадратичні форми одночасно зводяться до діагонального вигляду.

Доведення. Розглянемо випадок часоподібної поверхні V^2. За умовою теореми грассманів образ Γ^2 невироджений, тобто в кожній його точці простір дотичних векторів двовимірний. Тоді у кожній точці підмноговиду ${}^S PG(2,4)$ існує двовимірна площина, у напрямку якої кривина приймає стаціонарне значення $\overline{K}(\sigma) = 0$. Ця площина задається умовами $\sigma^{24} = -\sigma^{13}$ й $\sigma^{12} = \sigma^{34}$. За формулами (3.28) перша умова запишеться у вигляді

$$\frac{L_{11}^1 L_{22}^1 - (L_{12}^1)^2}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} = -\frac{L_{11}^2 L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2}{\sqrt{g_{11} g_{22}}},$$

або $L_{11}^1 L_{22}^1 - (L_{12}^1)^2 + L_{11}^2 L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2 = 0$. З цього випливає, що гауссова кривина поверхні V^2 дорівнює нулю, оскільки гауссова кривина часоподібної поверхні обчислюється за формулою (3.5). Друга умова має вигляд

$$\frac{L_{11}^1 L_{12}^2 - L_{12}^1 L_{11}^2}{g_{11}} = \frac{L_{12}^1 L_{22}^2 - L_{22}^1 L_{12}^2}{g_{22}}.$$

Для часоподібної поверхні можна вибрати параметризацію таким чином, щоб $g_{11} = -g_{22}$. Тоді рівність $L_{11}^1 L_{12}^2 - L_{12}^1 L_{11}^2 = L_{22}^1 L_{12}^2 - L_{12}^1 L_{22}^2$ означає виконання умови $AB = BA$, де A, B – матриці других квадратичних форм поверхні. А ця умова виділяє поверхні з плоскою нормальною зв'язністю.

Обернено, якщо часоподібна поверхня з плоскою нормальною зв'язністю має нульову гауссову кривину, то секційна кривина її грассманового образу дорівнює нулю й це значення є стаціонарним. Дійсно, оскільки поверхня має плоску нормальну зв'язність, то другі квадратичні форми можна одночасно звести до діагонального виду, тобто $L_{12}^1 = L_{12}^2 = 0$. Тоді за формулами (3.28) координати бівектора $\overline{\sigma}$ запишуться у вигляді

$$\sigma^{12} = \sigma^{34} = 0, \quad \sigma^{13} = \frac{L_{11}^2 L_{22}^2}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}, \quad \sigma^{24} = \frac{L_{11}^1 L_{22}^1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}.$$

З рівності нулю гауссової кривини випливає, що $L_{11}^2 L_{22}^2 = -L_{11}^1 L_{22}^1$. Тоді секційна кривина дорівнює нулю й досягається при умовах $\sigma^{24} = -\sigma^{13}$ і $\sigma^{12} = \sigma^{34}$, тобто це значення є стаціонарним.

При доведенні теореми для просторовоподібної поверхні використовуються формули (3.30) і формула (3.3) для гауссової кривини та проводяться аналогічні дії.

Теорема доведена.

Далі розглянемо випадок, коли секційна кривина приймає стаціонарне значення, яке дорівнює 1 (або –1). Має місце

Теорема 3.5. Нехай $V^2 \subset {}^1R_4$ – регулярна часоподібна (або просторовоподібна) поверхня з невиродженим грассмановим образом Γ^2. Стаціонарне значення секційної кривини підмноговиду ${}^S PG(2,4)$ (або ${}^T PG(2,4)$) уздовж будь-якої неізотропної площини, дотичної до Γ^2, дорівнює 1 (або –1) тоді й тільки тоді, коли поверхня V^2 є гіперповерхнею деякого тривимірного підпростору простору ${}^1R_4$.

Доведення. Грассманів образ часоподібної поверхні лежить на підмноговиді ${}^S PG(2,4)$. В кожній точці підмноговиду ${}^S PG(2,4)$ існують дві двовимірні дотичні площини, у напрямку кожної з яких кривина приймає стаціонарне значення $\overline{K}(\sigma)=1$. Перша площина задається умовами $\sigma^{12}=\sigma^{34}=0$ й $\sigma^{23}=\sigma^{14}$, які можна подати у вигляді

$$L_{11}^1 L_{12}^2 - L_{11}^2 L_{12}^1 = L_{12}^1 L_{22}^2 - L_{12}^2 L_{22}^1 = 0,$$
$$L_{12}^1 L_{12}^2 - L_{22}^1 L_{11}^2 = L_{12}^1 L_{12}^2 - L_{11}^1 L_{22}^2.$$

Ці умови рівносильні рівностям $\dfrac{L_{11}^1}{L_{11}^2}=\dfrac{L_{12}^1}{L_{12}^2}=\dfrac{L_{22}^1}{L_{22}^2}$, з яких випливає, що точкова корозмірність поверхні дорівнює 1, тобто поверхня є гіперповерхнею деякого тривимірного простору.

Друга площина задається умовами $\sigma^{13}=\sigma^{24}=0$, $\sigma^{23}=-\sigma^{14}$ або

$$L_{11}^1 L_{22}^1 - (L_{12}^1)^2 = L_{11}^2 L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2 = 0,$$
$$L_{11}^1 L_{22}^2 + L_{11}^2 L_{22}^1 = 2L_{12}^1 L_{12}^2.$$

Ці умови можуть бути записані інакше, оскільки одну із других квадратичних форм завжди можна звести до діагонального виду. Нехай, наприклад, $L_{12}^1=0$. Тоді, або одна із других квадратичних форм тотожно дорівнює нулю, або вони мають вигляд $II^k = L_{ii}^k du_i^2$. У кожному із цих випадків коефіцієнти других квадратичних форм знову пропорційні, тобто поверхня V^2 є гіперповерхнею.

Обернено, якщо поверхня V^2 вкладається в тривимірний простір, то $\frac{L_{11}^1}{L_{11}^2} = \frac{L_{12}^1}{L_{12}^2} = \frac{L_{22}^1}{L_{22}^2} = k$, де k – коефіцієнт пропорційності. Тоді з формул (3.28) отримаємо $\sigma^{12} = \sigma^{34} = 0$, $\sigma^{23} = \sigma^{14}$ та $\sigma^{13} = \sigma^{24} = 0$, $\sigma^{23} = -\sigma^{14}$ і з формули (3.31) випливає $\overline{K}(\sigma) = 1$.

Для просторовоподібної поверхні доведення аналогічне. Теорема доведена.

3.8 Афінна та грассманова класифікації точок неізотропних поверхонь простору ${}^1R_4$

Дві точки регулярної поверхні називаються *афінно еквівалентними*, якщо дотичні параболоїди в цих точках можна відобразити один на інший невиродженим афінним перетворенням в охопному просторі [15].

Нехай Q – точка часоподібної поверхні $V^2 \subset {}^1R_4$. Виберемо систему координат у просторі ${}^1R_4$ так, щоб точка Q була початком координат, а дотичний простір $T_Q V^2$ був підпростором $\{x^1, x^2\}$. Тоді рівняння дотичного параболоїда з вершиною в точці Q будуть мати вигляд

$$x^{k+2} = L_{ij}^k x^j x^j,$$

де L_{ij}^k – коефіцієнти других квадратичних форм поверхні $V^2 \subset {}^1R_4$.

Розглянемо пучок $A^1 - \lambda A^2$ других квадратичних форм поверхні $V^2 \subset {}^1R_4$. Тоді в кожній точці $x \in V^2$ рівняння дотичного параболоїда невиродженим афінним перетворенням простору ${}^1R_4$ зводиться до одного з наступних канонічних видів (залежно від виду елементарних дільників):

1) $x^3 = (x^1)^2,\ \ x^4 = (x^2)^2$ для випадку лінійних елементарних дільників $\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2,\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \in R$;

2) $x^3 = 2x^1x^2,\ \ x^4 = (x^2)^2$, якщо маємо один лінійний елементарний дільник кратності 2, тобто $(\lambda - \lambda_1)^2,\ \lambda_1 \in R$;

3) $x^3 = 2x^1x^2,\ \ x^4 = (x^1)^2 - (x^2)^2$ для квадратичного елементарного дільника $\lambda^2 - 2\alpha\lambda_1 + (\alpha^2 + \beta^2),\ \beta \neq 0$.

У випадку просторовоподібної поверхні систему координат в просторі ${}^1R_4$ будемо обирати так, щоб дотичний простір T_QV^2 співпадав з підпростором $\{x^3, x^4\}$. Тоді рівняння дотичного параболоїда з вершиною в точці Q буде мати вигляд

$$x^k = L^k_{ij} x^{i+2} x^{j+2}. \tag{3.33}$$

В кожній точці $x \in V^2$ рівняння дотичного параболоїда невиродженим афінним перетворенням простору ${}^1R_4$ зводиться до одного з наступних канонічних видів:

1) $x^1 = (x^3)^2,\ \ x^2 = (x^4)^2$ для випадку лінійних елементарних дільників $\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2,\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \in R$;

2) $x^1 = 2x^3x^4,\ \ x^2 = (x^4)^2$, якщо маємо один лінійний елементарний дільник кратності 2, тобто $(\lambda - \lambda_1)^2,\ \lambda_1 \in R$;

3) $x^1 = 2x^3x^4$, $x^2 = (x^3)^2 - (x^4)^2$ для квадратичного елементарного дільника $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2 + \beta^2)$, $\beta \neq 0$.

Таким чином, точки поверхні можна розбити на три класи. Така класифікація точок називається *афінною*. Зауважимо, що цей результат нічим не відрізняється від випадку евклідова простору [16], оскільки евклідів простір та простір Мінковського мають однакові афінні властивості.

Далі розглянемо ще одну класифікацію точок поверхні, яку будемо називати *грассмановою*. Цей термін пояснюється тим, що тип точок поверхні визначається типом точок грассманового образу цієї поверхні.

Припустимо, що існують області на V^2, точковий грассманів образ яких має в усіх точках дотичні площини одного типу. Зауважимо, що тип грассманового образу може як співпадати з типом поверхні V^2, так і відрізнятися від нього.

Визначення 3.1. Точка x поверхні $V^2 \subset {}^1R_4$ називається *еліптичною* (*параболічною, гіперболічною*), якщо точка грассманового образу поверхні, що відповідає точці x, є еліптичною (параболічною, гіперболічною).

Визначення 3.2. Точка грассманового образу Γ^2 часоподібної поверхні V^2 називається *еліптичною* (*параболічною, гіперболічною*), якщо для площини, дотичної до Γ^2 в цій точці, секційна кривина грассманового підмноговиду ${}^S PG(2,4)$ задовольняє умові $\overline{K}(\sigma) < 1$ ($\overline{K}(\sigma) = 1$, $\overline{K}(\sigma) > 1$).

Визначення 3.3. Точка грассманового образу Γ^2 просторовоподібної поверхні V^2 називається *еліптичною* (*параболічною, гіперболічною*), якщо для площини, дотичної до Γ^2 в цій точці, секційна кривина грассманового підмноговиду ${}^T PG(2,4)$ задовольняє умові $\overline{K}(\sigma) > -1$ ($\overline{K}(\sigma) = -1$, $\overline{K}(\sigma) < -1$).

Розглянемо умови, при яких першому (другому, третьому) класу точок в афінній класифікації відповідають еліптичні (параболічні, гіперболічні) точки в грассмановій класифікації. В цьому випадку будемо говорити про еквівалентність афінної та грассманової класифікацій.

Теорема 3.6. Для часоподібної поверхні із просторовоподібним грассмановим образом афінна та грассманова класифікації еквівалентні.

Доведення. Афінна класифікація дає три класи точок поверхні $V^2 \subset {}^1R_4$, кожен з яких визначається видом дотичного параболоїда. Оскільки дотичний параболоїд з вершиною в точці поверхні і сама поверхня мають в цій точці спільну дотичну площину, а значить і спільну нормальну площину, то для визначення типу точки x поверхні в грассмановій класифікації треба знайти значення секційної кривини грассманового многовиду уздовж площини, дотичної до грассманового образу дотичного параболоїда в точці, що відповідає точці $x \in V^2$.

Зауважимо, що не завжди є можливість користуватися канонічними рівняннями дотичного параболоїда. Це пояснюється тим, що система координат, відносно якої рівняння параболоїда має канонічний вигляд, може індукувати таку систему координат на грассмановому многовиді , відносно якої дотична площина до грассманового образу має вироджену метрику.

Розглянемо часоподібну поверхню $V^2 \subset {}^1R_4$ з пучком $A^1 - \lambda A^2$ других квадратичних форм. У випадку різних лінійних елементарних дільників $\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2$ цього пучка матриці $A^1,\ A^2$ можна звести до вигляду [65]

$$A^1 = \begin{pmatrix} l_1\lambda_1 & 0 \\ 0 & l_2\lambda_2 \end{pmatrix},\ \ A^2 = \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix},\ \ l_i = \pm 1.$$

Тоді векторне рівняння дотичного параболоїда набуде вигляду

$$\bar{r}(u^1,u^2) = (u^1, u^2, l_1\lambda_1(u^1)^2 + l_2\lambda_2(u^2)^2, l_1(u^1)^2 + l_2(u^2)^2).$$

Для обчислення секційної кривини грассманового підмноговиду ${}^{S}PG(2,4)$ уздовж площини, дотичної до грассманового образу параболоїда, скористаємося формулою (3.31).

Згідно з (3.29) дотичні вектори до грассманового образу дотичного параболоїда запишуться у вигляді $\overline{X} = \left(\dfrac{2l_1}{\sqrt{g_{11}}}, -\dfrac{2l_1\lambda_1}{\sqrt{g_{11}}}, 0, 0 \right)$ й $\overline{Y} = \left(0, 0, \dfrac{2l_2}{\sqrt{g_{22}}}, -\dfrac{2l_1\lambda_2}{\sqrt{g_{22}}} \right)$. Тоді бівектор $\overline{\sigma}$ має координати:

$$\sigma^{12} = 0,\ \sigma^{13} = \frac{4l_1 l_2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},\ \sigma^{14} = -\frac{4l_1 l_2 \lambda_2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},$$

$$\sigma^{23} = -\frac{4l_1 l_2 \lambda_1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},\ \sigma^{24} = \frac{4l_1 l_2 \lambda_1 \lambda_2}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},\ \sigma^{34} = 0.$$

Секційна кривина уздовж площини, визначеної векторами $\overline{X}$ і $\overline{Y}$, у відповідності до формули (3.31), буде дорівнювати $\overline{K}(\sigma) = \dfrac{(1+\lambda_1\lambda_2)^2}{(1+\lambda_1^2)(1+\lambda_2^2)}$.

Очевидно, що $\overline{K}(\sigma) < 1$ при будь-яких $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Таким чином, першому класу точок в афінній класифікації відповідають еліптичні точки в грассмановій класифікації.

Нехай тепер секційна кривина підмноговиду ${}^{S}PG(2,4)$ уздовж площини, дотичної до грассманового образу поверхні, задовольняє нерівність $\overline{K}(\sigma) < 1$, або

$$\frac{(-\sigma^{12} + \sigma^{34})^2 - (\sigma^{13} + \sigma^{24})^2}{(\sigma^{12})^2 - (\sigma^{13})^2 - (\sigma^{14})^2 - (\sigma^{23})^2 - (\sigma^{24})^2 + (\sigma^{34})^2} < 1.$$

За умовою теореми грассманів образ просторовоподібний, а значить і дотична площина σ також просторовоподібна, тобто вираз в знаменнику додатний. Тому останню нерівність, з урахування умови Плюккера, можна звести до вигляду $(\sigma^{14}+\sigma^{23})^2 < 4\sigma^{13}\sigma^{24}$. За допомогою формул (3.30) для координат бівектора $\overline{\sigma}$ останню нерівність можна записати у вигляді

$$(2L_{12}^1L_{12}^2 - L_{11}^2L_{22}^1 - L_{11}^1L_{22}^2)^2 > 4(L_{11}^1L_{22}^1 - (L_{12}^1)^2)(L_{11}^2L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2). \qquad (3.34)$$

Знак нерівності змінився на протилежний, оскільки для часоподібної поверхні $g_{11}g_{22} < 0$. Запишемо детермінант пучка других квадратичних форм

$$\left|A^1 - \lambda A^2\right| = \begin{vmatrix} L_{11}^1 - \lambda L_{11}^2 & L_{12}^1 - \lambda L_{12}^2 \\ L_{12}^1 - \lambda L_{12}^2 & L_{22}^1 - \lambda L_{22}^2 \end{vmatrix} =$$
$$= \lambda^2(L_{11}^2L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2) + \lambda(2L_{12}^1L_{12}^2 - L_{11}^2L_{22}^1 - L_{11}^1L_{22}^2) + (L_{11}^1L_{22}^1 - (L_{12}^1)^2)$$

Він представляє собою квадратний тричлен відносно λ. Тоді умова (3.34) буде означати, що дискримінант цього квадратного тричлена більше нуля, тобто пучок других квадратичних форм має два різні лінійні елементарні дільники.

Розглянемо другий клас точок в афінній класифікації. Йому будуть відповідати параболічні точки в грассмановій класифікації. Дійсно, в цьому випадку матриці других квадратичних форм можна звести до вигляду

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & l_1\lambda_1 \\ l_1\lambda_1 & l_1 \end{pmatrix}, \; A^2 = \begin{pmatrix} 0 & l_1 \\ l_1 & 0 \end{pmatrix}, \; l_i = \pm 1,$$

тоді рівняння дотичного параболоїда має вигляд

$$\bar{r}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, 2l_1\lambda_1u^1u^2 + l_1(u^2)^2, 2l_1u^1u^2).$$

Після обчислення за формулою (3.31) секційної кривини уздовж площини, дотичної до грассманового образу параболоїда, отримаємо одиницю. Це значення досягається тоді й тільки тоді, коли дискримінант детермінанта пучка других квадратичних форм дорівнює нулю.

Точки третього класу в афінній класифікації відповідають гіперболічним точкам у грассмановій класифікації. Оскільки у випадку квадратичного елементарного дільника матриці других квадратичних форм зводяться до вигляду

$$A^1 = \begin{pmatrix} \alpha - \beta & \alpha + \beta \\ \alpha + \beta & -\alpha + \beta \end{pmatrix}, \ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \beta \neq 0,$$

то рівняння дотичного параболоїда запишеться у вигляді

$$\bar{r}(u^1,u^2) = (u^1, u^2, (\alpha-\beta)(u^1)^2 + 2(\alpha+\beta)u^1u^2 + (-\alpha+\beta)(u^2)^2, (u^1)^2 + 2u^1u^2 - (u^2)^2)$$

Формула для обчислення секційної кривини уздовж площини, дотичної до грассманового образу цього параболоїда, набуде вигляду $\overline{K}(\sigma) = 1 + \dfrac{4\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2+1)^2}$. Очевидно, що $\overline{K}(\sigma) > 1$.

Обернено, з того, що точка гіперболічна, випливає, що дискримінант детермінанта пучка других квадратичних форм менше нуля, тобто пучок має квадратичний елементарний дільник. Еквівалентність доведена.

Теорема 3.7. Для просторовоподібної поверхні з часоподібним грассмановим образом афінна та грассманова класифікації еквівалентні.

Доведення даної теореми аналогічне доведенню теореми 3.6. Відмінності полягають у тому, що рівняння дотичного параболоїда будемо записувати у вигляді (3.33), а для знаходження координат бівектора $\bar{\sigma}$ будемо використовувати формули (3.30).

3. 9 Висновки до розділу 3

В третьому розділі для неізотропних поверхонь простору Мінковського отримано дериваційні формули рухомого репера та формули для тензора кривини. Розглянуто поняття індикатриси нормальної кривини просторовоподібної та часоподібної поверхонь, отримані рівняння індикатриси й визначено її вид для кожного типу поверхні. Отримані аналоги формули Картана для гауссової кривини неізотропної поверхні. Вивчені властивості грассманового образу неізотропної двовимірної поверхні простору Мінковського. Доведена теорема про необмеженість секційної кривини грассманового многовиду простору Мінковського. Виділені класи неізотропних поверхонь зі стаціонарними значеннями кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу поверхні. Отримані афінна класифікація точок неізотропної поверхні та класифікація точок поверхні залежно від значень секційної кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу поверхні. Знайдено умови еквівалентності цих класифікацій.

РОЗДІЛ 4
ВІДНОВЛЕННЯ НЕІЗОТРОПНОЇ ПОВЕРХНІ ПРОСТОРУ МІНКОВСЬКОГО ЗА ЗАДАНИМ ГРАССМАНОВИМ ОБРАЗОМ

Розглянемо наступну задачу: знайти регулярну поверхню V^2 простору Мінковського, грассмановим образом якої є задана регулярна поверхня $\Gamma^2 \subset PG(2,4)$.

4.1 Диференціальні рівняння для координат радіус-вектора поверхні із заданим грассмановим образом

Будемо розглядати в якості грассманового образу ті двовимірні області грассманового многовиду, в яких усі точки належать одному типу (еліптичні, гіперболічні, параболічні) й тип точок області називати типом грассманового образу. Покажемо, що зв'язок між типом точки грассманового образу поверхні V^2 і секційною кривиною визначений коректно. Має місце

Теорема 4.1. Якщо існує часоподібна поверхня V^2 простору ${}^1R_4$, грассманів образ якої є заданою поверхнею Γ^2 підмноговиду ${}^S PG(2,4)$ простору ${}^3R_6$, то кожна компонента радіус-вектора поверхні V^2 задовольняє одному диференціальному рівнянню другого порядку в частинних похідних, тип якого збігається з типом грассманового образу (еліптичний, гіперболічний, параболічний).

Доведення. Розглянемо поверхню $\Gamma^2 \in {}^S PG(2,4)$ простору ${}^3R_6$, задану параметричними рівняннями $p^{ij} = p^{ij}(u^1, u^2), i, j = 1,\ldots,4, i < j$. Параметричні рівняння шуканої поверхні V^2 простору ${}^1R_4$ мають вигляд $x_i = x_i(u^1, u^2)$. Тоді умова ортогональності дотичних векторів і нормальних векторів $\bar{n}_\sigma = (n_\sigma^1, n_\sigma^2, n_\sigma^3, n_\sigma^4)$, $\sigma = 1{,}2$ шуканої поверхні V^2 запишеться у вигляді

$$-x_{1u^\alpha} n_\sigma^1 + \sum_{k=2}^{4} x_{ku^\alpha} n_\sigma^k = 0, \ \alpha = 1{,}2. \tag{4.1}$$

Покладемо $\lambda^{ij} = \dfrac{p^{ij}}{p^{34}}$ й будемо вважати, що в точці $P_0 \in \Gamma^2$ координата $p^{34} = 1$ і у деякому її околі не дорівнює нулю.

Систему рівнянь (4.1) перетворимо таким чином, щоб виразити похідні функцій x_3 і x_4 у вигляді $\begin{matrix} x_{3u^\alpha} = x_{1u^\alpha}\lambda^{14} - x_{2u^\alpha}\lambda^{24}, \\ x_{4u^\alpha} = x_{1u^\alpha}\lambda^{31} - x_{2u^\alpha}\lambda^{32}. \end{matrix}$ Умови рівності мішаних похідних для кожної з функцій x_3 і x_4 дають рівняння, що зв'язують перші похідні функцій x_1 і x_2

$$\begin{aligned} x_{1u^1}\lambda^{14}_{u^2} - x_{1u^2}\lambda^{14}_{u^1} - x_{2u^1}\lambda^{24}_{u^2} + x_{2u^2}\lambda^{24}_{u^1} = 0, \\ x_{1u^1}\lambda^{31}_{u^2} - x_{1u^2}\lambda^{31}_{u^1} - x_{2u^1}\lambda^{32}_{u^2} + x_{2u^2}\lambda^{32}_{u^1} = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Позначимо через c и d стовпці $\begin{pmatrix} \lambda^{24} \\ \lambda^{32} \end{pmatrix}$ й $\begin{pmatrix} \lambda^{14} \\ \lambda^{31} \end{pmatrix}$ відповідно. Систему рівнянь (4.2) можна розв’язати відносно похідних функції x_1 у вигляді

$$\begin{aligned} x_{1u^1} &= Ax_{2u^1} - Bx_{2u^2}, \\ x_{1u^2} &= -Cx_{2u^1} + Dx_{2u^2}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

де $A=\dfrac{\begin{vmatrix} d_{u^1} & c_{u^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_{u^1} & d_{u^2} \end{vmatrix}}, B=\dfrac{\begin{vmatrix} d_{u^1} & c_{u^1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_{u^1} & d_{u^2} \end{vmatrix}}, C=-\dfrac{\begin{vmatrix} d_{u^2} & c_{u^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_{u^1} & d_{u^2} \end{vmatrix}}, D=-\dfrac{\begin{vmatrix} d_{u^2} & c_{u^1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_{u^1} & d_{u^2} \end{vmatrix}}$, а $\begin{vmatrix} d_{u^i} & c_{u^j} \end{vmatrix}$ – мінори, складені з похідних від елементів стовпців *c* і *d*.

Від системи (4.3) можна перейти до одного рівняння на функцію x_2. Якщо позначити цю функцію через Ψ, то рівняння буде мати вигляд

$$C\Psi_{u^1u^1}+(A-D)\Psi_{u^1u^2}-B\Psi_{u^2u^1}+\Psi_{u_1}(C_{u^1}+A_{u^2})-\Psi_{u^2}(D_{u^1}+B_{u^2})=0. \quad (4.4)$$

Помітимо, що має місце наступний факт: виведене рівняння (4.4), з якого може бути знайдена поверхня простору Мінковського за її грассмановим образом, збігається (з точністю до знаків у формулах для обчислення його коефіцієнтів) з рівнянням для знаходження поверхні евклідова простору за її грассмановим образом [7]. Далі покажемо, як тип рівняння (4.4) залежить від типу грассманового образу.

Перейдемо в просторі ${}^3R_6$ від стандартного базису до базису $(\bar{e}_1,\bar{e}_3,\bar{e}_2,\bar{e}_4,\bar{e}_5,\bar{e}_6)$. Розглянемо тривимірний підпростір $T^3={}^2R_3$ простору ${}^3R_6$, який задається рівняннями $p^{12}=p^{23}=p^{24}=0$. Тоді $\bar{\tau}=(p^{14},p^{13},p^{34})$ – проекція радіус-вектора $\bar{p}$ поверхні Γ^2 на простір T^3 і $\bar{\nu}=(q^{14},q^{13},q^{34})=(-p^{23},p^{24},p^{12})$ – проекція нормалі $\bar{q}$ до ${}^S PG(2,4)$ на T^3. За допомогою векторів $\bar{\tau}$ і $\bar{\nu}$ можна перетворити визначники $\begin{vmatrix} d_{u^1} & d_{u^2} \end{vmatrix}$ й $\begin{vmatrix} d_{u^i} & c_{u^i} \end{vmatrix}$ до вигляду

$$\begin{vmatrix} d_{u^1} & d_{u^2} \end{vmatrix} = -\frac{(\bar{\tau}, \bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2})}{(p^{34})^3},$$

$$\begin{vmatrix} d_{u^i} & c_{u^i} \end{vmatrix} = \frac{-(\bar{\tau}_{u^i}, \bar{\nu}_{u^j})p^{34} + p^{23}\begin{vmatrix} p^{34}_{u^j} & p^{34}_{u^i} \\ p^{14}_{u^j} & p^{14}_{u^i} \end{vmatrix} + p^{24}\begin{vmatrix} p^{34}_{u^j} & p^{34}_{u^i} \\ p^{31}_{u^j} & p^{31}_{u^i} \end{vmatrix}}{(p^{34})^3} = \tag{4.5}$$

$$= -\frac{(\bar{\tau}_{u^i}, \bar{\nu}_{u^j})p^{34} + [\bar{\nu}, [\bar{\tau}_{u^i}, \bar{\tau}_{u^j}]]^3}{(p^{34})^3},$$

де $(\bar{\tau}, \bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2})$ – мішаний добуток векторів $\bar{\tau}, \bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2}$. Якщо позначити $\rho = \dfrac{1}{(\bar{\tau}, \bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2})}$, то вирази для коефіцієнтів запишуться у вигляді

$$A = \rho\Big((\bar{\tau}_{u^1}, \bar{\nu}_{u^2})p^{34} + [\bar{\nu}, [\bar{\tau}_{u^i}, \bar{\tau}_{u^j}]]^3\Big), B = \rho(\bar{\tau}_{u^1}, \bar{\nu}_{u^1})p^{34},$$

$$C = -\rho(\bar{\tau}_{u^2}, \bar{\nu}_{u^2})p^{34}, \quad D = -\rho\Big((\bar{\tau}_{u^2}, \bar{\nu}_{u^1})p^{34} + [\bar{\nu}, [\bar{\tau}_{u^i}, \bar{\tau}_{u^j}]]^3\Big).$$

Зв'язок між похідними пар векторів $\bar{p}, \bar{q}$ і $\bar{\tau}, \bar{\nu}$ має вигляд

$$(\bar{p}_{u^i}, q_{u^j}) + (\bar{p}_{u^j}, q_{u^i}) = 2\Big((\bar{\tau}_{u^i}, \bar{\nu}_{u^j}) + (\bar{\tau}_{u^j}, \bar{\nu}_{u^i})\Big). \tag{4.6}$$

Визначення типу рівняння (4.4) зводиться до дослідження наступної квадратичної форми

$$-Bdu_1^2 + (D - A)du_1du_2 + Cdu_2^1. \tag{4.7}$$

Використовуючи рівності (4.5) і (4.6), одержимо

$$B=\frac{1}{2}\rho p^{34}(\overline{p}_{u^1},\overline{q}_{u^1}),\, C=\frac{1}{2}\rho p^{34}(\overline{p}_{u^2},\overline{q}_{u^2}),$$

$$D-A=-\frac{1}{2}\rho p^{34}\left\{(\overline{p}_{u^1},\overline{q}_{u^2})+(\overline{p}_{u^2},\overline{q}_{u^1})\right\}.$$

Для форми (4.7) можна записати наступну рівність

$$-Bdu_1^2+(D-A)du_1du_2+Cdu_2^1=-\frac{1}{2}p^{34}\rho(d\overline{p},d\overline{q}). \qquad (4.8)$$

З урахуванням зауваження з п.3.7 розділу 3, якщо виконується умова $\overline{K}(\sigma)<1$, то рівняння (4.4) еліптичного типу. Якщо $\overline{K}(\sigma)>1$, то рівняння (4.4) гіперболічного типу, а якщо $\overline{K}(\sigma)=1$ – параболічного типу. Теорема доведена.

Зауваження. У випадку, коли поверхня V^2 просторовоподібна і її грассманів образ є заданою поверхнею Γ^2 підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$ простору ${}^{3}R_6$, то кожна компонента її радіус-вектора також задовольняє одному диференціальному рівнянню другого порядку в частинних похідних, тип якого збігається з типом грассманового образу (еліптичний, гіперболічний, параболічний).

Доведення цього факту проводиться аналогічно доведенню теореми 4.1. Отримуємо у результаті диференціальне рівняння, що має вигляд (4.4). Тип цього рівняння еліптичний, якщо $\overline{K}(\sigma)>-1$, гіперболічний, якщо $\overline{K}(\sigma)<-1$ й параболічний, якщо $\overline{K}(\sigma)=-1$.

4.2 Векторна система рівнянь поверхні простору Мінковського із заданим грассмановим образом

У пункті 4.1 отримана система рівнянь (4.3) для похідних координати x_1 радіус-вектора поверхні V^2, що має заданий грассманів образ. Аналогічні системи можна одержати й для похідних від координат x_3 і x_4 радіус-вектора цієї поверхні:

$$\begin{aligned} x_{3u^1} &= A^3 x_{2u^1} - B^3 x_{2u^2}, \\ x_{3u^2} &= -C^3 x_{2u^1} + D^3 x_{2u^2} \end{aligned} \quad \text{і} \quad \begin{aligned} x_{4u^1} &= A^4 x_{2u^1} - B^4 x_{2u^2}, \\ x_{1u^2} &= -C^4 x_{2u^1} + D^4 x_{2u^2}, \end{aligned}$$

де

$$A^3 = \rho\Big((\bar\tau_{u^1}, \bar\nu_{u^2})\, p^{14} + [\bar\nu, [\bar\tau_{u^i}, \bar\tau_{u^j}]]^1\Big), B^3 = \rho(\bar\tau_{u^1}, \bar\nu_{u^1})\, p^{14},$$

$$C^3 = -\rho(\bar\tau_{u^2}, \bar\nu_{u^2})\, p^{14}, \;\; D^3 = -\rho\Big((\bar\tau_{u^2}, \bar\nu_{u^1})\, p^{14} + [\bar\nu, [\bar\tau_{u^i}, \bar\tau_{u^j}]]^1\Big),$$

і

$$A^4 = -\rho\Big((\bar\tau_{u^1}, \bar\nu_{u^2})\, p^{13} + [\bar\nu, [\bar\tau_{u^i}, \bar\tau_{u^j}]]^2\Big), B^4 = -\rho(\bar\tau_{u^1}, \bar\nu_{u^1})\, p^{13},$$

$$C^4 = \rho(\bar\tau_{u^2}, \bar\nu_{u^2})\, p^{14}, \;\; D^4 = \rho\Big((\bar\tau_{u^2}, \bar\nu_{u^1})\, p^{13} + [\bar\nu, [\bar\tau_{u^i}, \bar\tau_{u^j}]]^2\Big).$$

Розглянемо простір ${}^1R_3$, ортогональний орту $\bar e_2$. Виберемо в цьому просторі базис $\{-\bar e_3, \bar e_4, -\bar e_1\}$, тобто будемо розглядати в ньому метрику сигнатури (+ + –). Радіус-вектор проекції поверхні V^2 на цей підпростір щодо такого базису має вигляд $\tilde x = (-x_3, x_4, -x_1)$. Між розглянутим раніше простором $T^3 = {}^2R_3$ і простором ${}^1R_3$, ортогональним орту $\bar e_2$, встановимо відповідність так, щоб координата p^{14} відповідала $-x_3$, p^{13} відповідала x_4, а p^{34} відповідала $-x_1$.

Тоді можна записати

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_{u^1} &= -x_{3u^1}(-\bar{e}_3) + x_{4u^1}\bar{e}_4 - x_{1u^1}(-\bar{e}_1) = \\
&= (A^3 x_{2u^1} - B^3 x_{2u^2})\bar{e}_3 + (A^4 x_{2u^1} - B^4 x_{2u^2})\bar{e}_4 + (A^1 x_{2u^1} - B^1 x_{2u^2})\bar{e}_1 = \\
&= x_{2u^1}(A^3\bar{e}_3 + A^4\bar{e}_4 + A^1\bar{e}_1) - x_{2u^2}(B^3\bar{e}_3 + B^4\bar{e}_4 + B^1\bar{e}_1) = \\
&= x_{2u^1}[\rho\Big((\bar{\tau}_{u^1}, \bar{v}_{u^2})p^{14} + [\bar{v}, [\bar{\tau}_{u^i}, \bar{\tau}_{u^j}]]^1\Big)\bar{e}_3 - \rho\Big((\bar{\tau}_{u^1}, \bar{v}_{u^2})p^{13} + [\bar{v}, [\bar{\tau}_{u^i}, \bar{\tau}_{u^j}]]^2\Big)\bar{e}_4 + \\
&+ \rho\Big((\bar{\tau}_{u^1}, \bar{v}_{u^2})p^{34} + [\bar{v}, [\bar{\tau}_{u^i}, \bar{\tau}_{u^j}]]^3\Big)\bar{e}_1] - x_{2u^2}[\rho(\bar{\tau}_{u^1}, \bar{v}_{u^1})p^{14}\bar{e}_3 - \rho(\bar{\tau}_{u^1}, \bar{v}_{u^1})p^{13}\bar{e}_4 + \\
&+ \rho(\bar{\tau}_{u^1}, \bar{v}_{u^1})p^{34}\bar{e}_1] = -x_{2u^1}\rho\{\bar{\tau}(\bar{\tau}_{u^1}, \bar{v}_{u^2}) + [\bar{v}, [\bar{\tau}_{u^1}\bar{\tau}_{u^2}]]\} + x_{2u^2}\rho\bar{\tau}(\bar{\tau}_{u^1}, \bar{v}_{u^1}).
\end{aligned}
$$

Зробимо аналогічні обчислення для $\tilde{x}_{u^2}$. Введемо позначення $x_2 = \Psi$, тоді координати похідних радіус-вектора $\tilde{x}$ будуть задовольняти векторній системі

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_{u^1} &= -\Psi_{u^1}\rho\{\bar{\tau}(\bar{\tau}_{u^1}, \bar{v}_{u^2}) + [\bar{v}, [\bar{\tau}_{u^1}\bar{\tau}_{u^2}]]\} + \Psi_{u^2}\rho\bar{\tau}(\bar{\tau}_{u^1}, \bar{v}_{u^1}), \\
\tilde{x}_{u^2} &= -\Psi_{u^1}\rho\bar{\tau}(\bar{\tau}_{u^2}, \bar{v}_{u^2}) + \Psi_{u^2}\rho\{\bar{\tau}(\bar{\tau}_{u^2}, \bar{v}_{u^1}) + [\bar{v}, [\bar{\tau}_{u^2}\bar{\tau}_{u^1}]]\}.
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

4.3 Деякі властивості підмноговидів ${}^{T}PG(2,4)$ і ${}^{S}PG(2,4)$ та їх точкових образів

Доведемо деякі властивості підмноговидів грассманового многовиду $PG(2,4)$.

Позначимо $S^2(e)$ – підмноговид в $PG(2,4)$, який складається із двовимірних площин в ${}^1R_4$, що проходять через точку O й ортогональні зафіксованому вектору $\bar{e} \in {}^1R_4$.

Лема 4.1. Підмноговид $S^2(\bar{e})$ двовимірних площин простору ${}^1R_4$, ортогональних фіксованому вектору $\bar{e}$, є двовимірним.

Доведення. У просторі ${}^1R_4$ ортогональним доповненням до фіксованого вектора $\bar{e}$ є тривимірний простір (евклідів R_3, якщо $\bar{e}$ – часоподібний вектор і псевдоевклідів ${}^1R_3$, якщо $\bar{e}$ – просторовоподібний вектор). Очевидно, що всі двовимірні площини, ортогональні вектору $\bar{e}$, належать цьому тривимірному простору. Таким чином, маємо грассманів многовид двовимірних площин тривимірного простору, розмірність якого дорівнює двом, що й було потрібно довести.

Наслідок 4.1. При стандартному плюккеровому вкладенні f грассманового многовиду в простір ${}^3R_6$ образ його підмноговиду $S^2(\bar{e})$ є підмноговидом деякого тривимірного простору $T^3(\bar{e})$.

Дійсно, нехай $\bar{e}$ – часоподібний вектор, тоді $S^2(\bar{e})$ – підмноговид в ${}^S PG(2,4)$. Виберемо в ${}^1R_4$ базис $\{\bar{e}_1 = \bar{e}, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$. Тоді плюккерові координати $\left(p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34}\right)$ кожної точки із $f\left(S^2(\bar{e})\right)$ задовольняють системі рівнянь $p^{12} = p^{13} = p^{14} = 0$, тобто $f\left(S^2(\bar{e})\right)$ є підмноговидом тривимірного простору $T^3(\bar{e}) = R_3 \subset {}^3R_6$. Якщо ж $\bar{e}$ – просторовоподібний вектор, то виберемо в ${}^1R_4$ базис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2 = \bar{e}, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$. Тоді плюккерові координати кожної точки із $f\left(S^2(\bar{e})\right)$ задовольняють систему рівнянь $p^{12} = p^{23} = p^{24} = 0$, тобто $f\left(S^2(\bar{e})\right)$ належить тривимірному простору $T^3(\bar{e}) = {}^2R_3 \subset {}^3R_6$.

Лема 4.2. Сім’я тривимірних підпросторів простору ${}^1R_4$, що містять фіксовану двовимірну площину π, є однопараметричною.

Доведення. Якщо маємо сім’ю евклідових тривимірних підпросторів, що містять фіксовану двовимірну площину π (очевидно, просторовоподібну), то всі вектори, кожний з яких ортогональний деякому підпростору із сім’ї, є часоподібними. Розглянемо двовимірну площину $\pi^{\perp}$, ортогональну до площини π, вона буде часоподібною. Виберемо часоподібний вектор $\bar{e}_0 \in \pi^{\perp}$. Позначимо через φ кут між часоподібними векторами $\bar{e}_0$ й $\bar{e}$ у площині $\pi^{\perp}$. Тоді кожне значення $\varphi \in (-\infty, +\infty)$ однозначно визначає тривимірний підпростір $T^3(\bar{e})$ сім’ї. Таким чином, сім’я тривимірних евклідових підпросторів простору

${}^{1}R_4$, що містять фіксовану просторовоподібну площину, залежить від одного параметра φ.

Якщо ж маємо сім'ю псевдоевклідових тривимірних просторів, що проходять через фіксовану просторовоподібну (або часоподібну) площину π, то кожен із цих просторів визначає ортогональний до нього вектор, що є просторовоподібним. Розглянемо двовимірну площину $\pi^{\perp}$, ортогональну до площини π, вона буде часоподібною (або відповідно просторовоподібною). У кожному із цих випадків виберемо просторовоподібний вектор $\bar{e}_0 \in \pi^{\perp}$. Позначимо через φ кут між просторовоподібними векторами $\bar{e}_0$ й $\bar{e}$ у площині $\pi^{\perp}$. Тоді кожне значення $\varphi \in (-\infty, +\infty)$ (у другому випадку $\varphi \in [0, 2\pi]$) однозначно визначає тривимірний підпростір сім'ї. Таким чином, сім'я тривимірних псевдоевклідових підпросторів простору ${}^{1}R_4$, що містять фіксовану неізотропну площину, залежить від одного параметра φ.

Наслідок 4.2. При стандартному плюккеровому вкладенні грассманового многовиду в простір ${}^{3}R_6$ сім'я тривимірних просторів $T^3(\bar{e})$, що проходять через фіксовану точку P_0 – образ площини π, – є однопараметричною.

Доведення. Кожний із просторів $T^3(\bar{e})$ визначається підмноговидом $S^2(\bar{e})$, який, у свою чергу, визначається вектором $\bar{e}$. У лемі 4.2 показано, що вектор $\bar{e}$ визначається параметром φ, геометричний зміст якого – кут між $\bar{e}$ і фіксованим вектором $\bar{e}_0$, тобто розглянута сім'я просторів $T^3(\bar{e})$ залежить від одного параметра φ.

Лема 4.3. Нехай T^2 – двовимірна площина, дотична до ${}^{S}PG(2,4) \subset {}^{3}R_6$ в точці P_0, і секційна кривина задовольняє умові $\bar{K}(T^2) \neq 1$. Тоді знайдеться такий тривимірний підпростір $T^3 \subset {}^{3}R_6$, що проходить через точку P_0, що проекція T^2 на T^3 є двовимірною площиною (інакше кажучи, знайдеться T^3, на яке T^2 проектується регулярно).

Доведення. Скористаємося методом від супротивного. Позначимо через T^4 дотичний простір до ${}^S PG(2,4)$ в точці P_0. Припустимо, що існують площини $T^2(P_0) \subset T^4$, які не можна регулярно спроектувати на жодний простір T^3, що проходить через точку P_0. Тобто, припустимо, що існують площини, в яких для будь-якого простору T^3 знайдеться вектор, ортогональний цьому простору. Розглянемо образ $f\left(S^2(\bar{e})\right)$ підмноговиду $S^2(\bar{e})$ многовиду ${}^S PG(2,4)$, його точки є образами двовимірних просторовоподібних площин в ${}^1R_4$, що проходять через точку O і ортогональних фіксованому часоподібному вектору $\bar{e} \in {}^1R_4$. З леми 4.1 випливає, що він двовимірний. Знайдемо параметричні рівняння підмноговиду $S^2(\bar{e})$. У просторі ${}^1R_4$ від стандартного базису $\{\bar{e}_i\}$ перейдемо до базису $\{\bar{e}_i'\}$ за формулами: $\bar{e}_1' = ch\varphi\,\bar{e}_1 + sh\varphi\,\bar{e}_2$, $\bar{e}_2' = sh\varphi\,\bar{e}_1 + ch\varphi\,\bar{e}_2$, $\bar{e}_3' = \bar{e}_3$, $\bar{e}_4' = \bar{e}_4$ за допомогою повороту на кут φ у площині векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2$. У якості вектора $\bar{e}$ виберемо вектор $\bar{e}_1'$. Тоді довільна двовимірна просторовоподібна площина, яка ортогональна $\bar{e}$ та проходить через початок координат, визначається двома взаємно ортогональними векторами

$$\bar{X} = \sum_{i=2}^{4} \alpha^i \bar{e}_i' \quad \text{і} \quad \bar{Y} = \sum_{i=2}^{4} \beta^i \bar{e}_i'.$$

Щодо базису $\{\bar{e}_i\}$ плюккерові координати цієї площини мають вигляд

$$\bar{p} = (0, \alpha^{[2}\beta^{3]} sh\varphi, \alpha^{[2}\beta^{4]} sh\varphi, \alpha^{[2}\beta^{3]} ch\varphi, \alpha^{[2}\beta^{4]} ch\varphi, \alpha^{[3}\beta^{4]}).$$

У просторі з базисом $\bar{e}_2', \bar{e}_3', \bar{e}_4'$ обчислимо векторний добуток векторів $\bar{X}$ і $\bar{Y}$, отримаємо

$$[\bar{X},\bar{Y}]=(\alpha^{[3}\beta^{4]},\alpha^{[4}\beta^{2]},\alpha^{[2}\beta^{3]}).$$

Будемо вважати, що α^i й β^i обрані так, що $[\bar{X},\bar{Y}]$ є одиничним вектором, тоді його координати можна записати у вигляді:

$$[\bar{X},\bar{Y}]=(\sin\theta,\cos\theta\cos\gamma,\cos\theta\sin\gamma).$$

У параметризації (θ,γ) параметричні рівняння $f\left(S^2(\bar{e})\right)$ мають вигляд

$$\bar{p}=(0,\cos\theta\sin\gamma\, sh\varphi,-\cos\theta\cos\gamma\, sh\varphi,\cos\theta\sin\gamma\, ch\varphi,-\cos\theta\cos\gamma\, ch\varphi,\sin\theta).$$

Нехай точці P_0, через яку проходять $f\left(S^2(\bar{e})\right)$ і $T^3(\bar{e})$, відповідає площина R_2, визначена векторами $\bar{e}_3,\bar{e}_4$. Тоді плюккерові координати $(0,0,0,0,0,1)$ цієї площини відповідають значенню $\theta=\frac{\pi}{2}$. Дотичний вектор $\frac{\partial\bar{p}}{\partial\gamma}$ до $f\left(S^2(\bar{e})\right)$ в цій точці буде нульовим, а множина векторів $\frac{\partial\bar{p}}{\partial\theta}$ визначає двовимірну площину, дотичну до $f\left(S^2(\bar{e})\right)$ в точці P_0. У якості базису цієї площини виберемо вектори

$$\bar{f}_1=\frac{\partial\bar{p}}{\partial\theta}(\frac{\pi}{2},0)=(0,-sh\varphi,0,-ch\varphi,0,0),$$

$$\bar{f}_2=\frac{\partial\bar{p}}{\partial\theta}(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})=(0,0,sh\varphi,0,-ch\varphi,0).$$

Площина векторів $\bar{f}_1$ і $\bar{f}_2$ визначається кутом φ. Оскільки $T^3(\bar{e})$ визначається параметром φ і площина, натягнута на вектори $\bar{f}_1,\bar{f}_2$, також визначається цим параметром і належить $T^3(\bar{e})$, то з регулярності проектування площини T^2 на площину векторів $\bar{f}_1,\bar{f}_2$ буде випливати регулярність її проектування на $T^3(\bar{e})$. Тому ті площини, які проектуються з виродженням на

$T^3(\bar{e})$, будуть проектуватися з виродженням і на площину векторів $\bar{f}_1, \bar{f}_2$. Ми припустили, що такі площини існують. Нехай $\bar{k}$ і $\bar{l}$ – напрямні вектори однієї з таких площин і нехай вектори $\bar{k}$ й $\bar{l}$ мають у T^4 такі координати:

$$\bar{k} = (0, k_1, k_2, k_3, k_4, 0), \quad \bar{l} = (0, l_1, l_2, l_3, l_4, 0).$$

У площині векторів $\bar{k}$ і $\bar{l}$ існує ненульовий вектор $C_1\bar{k} + C_2\bar{l}$, ортогональний $\bar{f}_1$ і $\bar{f}_2$. Отже, система рівнянь

$$C_1(k_1 sh\varphi - k_3 ch\varphi) + C_2(l_1 sh\varphi - l_3 ch\varphi) = 0,$$
$$C_1(-k_2 sh\varphi + k_4 ch\varphi) + C_2(-l_2 sh\varphi + l_4 ch\varphi) = 0$$

відносно C_1 й C_2 має нетривіальний розв'язок, а тому її визначник дорівнює нулю. При будь-якому φ ця вимога дає три рівняння

$$\begin{vmatrix} k_1 & l_1 \\ -k_2 & -l_2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} -k_3 & -l_3 \\ k_4 & l_4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} k_1 & -l_3 \\ -k_2 & l_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -k_3 & l_1 \\ k_4 & -l_2 \end{vmatrix} = 0.$$

З перших двох рівнянь випливає, що знайдуться такі два числа λ й μ, що

$$k_1 = \lambda l_1, k_2 = \lambda l_2, k_3 = \mu l_3, \ k_4 = \mu l_4.$$

Оскільки $\bar{k}$ й $\bar{l}$ лінійно незалежні, то числа λ й μ різні. Третє рівняння дає

$$l_1 l_4 - l_2 l_3 = 0.$$

Знайдемо тепер секційну кривину $\overline{K}$ многовиду ${}^{S}PG(2,4)$ для площини векторів $\bar{k}$ і $\bar{l}$. Для цього спочатку визначимо зовнішню кривину $\overline{K}_e$ точкового підмноговиду ${}^{S}PG(2,4)$ як гіперповерхні, що належить п'ятивимірній сфері одиничного радіусу. Використовуючи рівняння Гаусса (3.19) для підмноговиду ${}^{S}PG(2,4)$, запишемо формулу зовнішньої кривини у вигляді

$$\overline{K}_e = -\frac{(\bar{p}_{u^1u^1},\bar{q})(\bar{p}_{u^2u^2},\bar{q}) - (\bar{p}_{u^1u^2},\bar{q})}{\bar{p}^2_{u^1}\bar{p}^2_{u^2} - (\bar{p}_{u^1},\bar{p}_{u^2})}.$$

Перетворимо цю формулу до вигляду

$$\overline{K}_e = -\frac{(\bar{p}_{u^1},\bar{q}_{u^1})(\bar{p}_{u_2},\bar{q}_{u_2}) - \frac{1}{4}[(\bar{p}_{u^1},\bar{q}_{u^2}) + (\bar{p}_{u^2},\bar{q}_{u^1})]^2}{\bar{p}^2_{u^1}\bar{p}^2_{u^2} - (\bar{p}_{u^1},\bar{p}_{u^2})}.$$

Нехай у точці P_0 виконується умова $p^{34} = 1$, тоді $p^{34}_{u^i} = 0$, тоді формулу кривини можна записати у вигляді

$$\overline{K}_e = -\left\{\begin{vmatrix} p^{13}_{u_1} & p^{13}_{u_2} \\ p^{42}_{u_1} & p^{42}_{u_2}\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p^{14}_{u_1} & p^{14}_{u_2} \\ p^{23}_{u_1} & p^{23}_{u_2}\end{vmatrix}^2 - 2\begin{vmatrix} p^{23}_{u_1} & p^{23}_{u_2} \\ p^{13}_{u_1} & p^{13}_{u_2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} p^{14}_{u_1} & p^{14}_{u_2} \\ p^{42}_{u_1} & p^{42}_{u_2}\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} p^{14}_{u_1} & p^{14}_{u_2} \\ p^{13}_{u_1} & p^{13}_{u_2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} p^{23}_{u_1} & p^{23}_{u_2} \\ p^{42}_{u_1} & p^{42}_{u_2}\end{vmatrix}\right\}/$$
$$/(p^2_{u_1}p^2_{u_2} - (p_{u_1}p_{u_2})^2).$$

Зробимо в цій формулі заміни

$$\begin{matrix} p^{13}_{u_1} = k_1, & p^{14}_{u_1} = k_2, & p^{23}_{u_1} = k_3, & p^{24}_{u_1} = k_4 \\ p^{13}_{u_2} = l_1, & p^{14}_{u_2} = l_2, & p^{23}_{u_2} = l_3, & p^{24}_{u_2} = l_4 \end{matrix}.$$

Тоді в чисельнику одержимо вирази

$$\begin{vmatrix} k_1 & l_1 \\ -k_4 & -l_4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} k_2 & l_2 \\ k_3 & l_3 \end{vmatrix}^2 - 2\begin{vmatrix} k_3 & l_3 \\ k_1 & l_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} k_2 & l_2 \\ -k_4 & -l_4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} k_2 & l_2 \\ k_1 & l_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} k_3 & l_3 \\ -k_4 & -l_4 \end{vmatrix}.$$

Скористаємося отриманими співвідношеннями для координат векторів $\bar{k}$ і $\bar{l}$ та зведемо цей вираз до вигляду

$$(\mu-\lambda)^2 l_1^2 l_4^2 + (\mu-\lambda)^2 l_2^2 l_3^2 - 2(\mu-\lambda)^2 l_1 l_4 l_2 l_3 = (\mu-\lambda)^2 (l_1 l_4 - l_2 l_3)^2.$$

Таким чином, $\overline{K}_e = 0$. Отже, секційна кривина $\overline{K}(\sigma) = 1 - \overline{K}_e$ грассманового підмноговиду ${}^S PG(2,4)$ дорівнює 1. А за умовою леми вона відмінна від 1. Одержали протиріччя. Лема доведена.

Лема 4.4. Нехай T^2 – двовимірна площина, дотична до ${}^T PG(2,4) \subset {}^3R_6$ в точці P_0, і секційна кривина задовольняє умові $\overline{K}(T^2) \neq -1$. Тоді знайдеться такий тривимірний підпростір $T^3 \subset {}^3R_6$, який проходить через точку P_0, що проекція T^2 на T^3 є двовимірною площиною (інакше кажучи, знайдеться T^3, на який T^2 проектується регулярно).

Доведення. При доведенні цієї леми також скористаємося методом від супротивного. Нехай у дотичному просторі T^4 до ${}^T PG(2,4)$ існують площини $T^2(P_0) \subset T^4$, які не можна регулярно спроектувати на жодний простір T^3, що проходить через точку P_0. Розглянемо образ $f\left(S^2(\bar{e})\right)$ підмноговиду $S^2(\bar{e})$ многовиду ${}^T PG(2,4)$, його точки є образами двовимірних часоподібних площин в ${}^1R_4$, що проходять через точку O та ортогональних фіксованому просторовоподібному вектору $\bar{e} \in {}^1R_4$. Знайдемо параметричні рівняння підмноговиду $f(S^2(\bar{e}))$. У просторі ${}^1R_4$ від стандартного базису $\{\bar{e}_i\}$

перейдемо до базису $\{\bar{e}'_i\}$ за формулами: $\bar{e}'_1 = \bar{e}_1, \bar{e}'_2 = \bar{e}_2, \bar{e}'_3 = cos\,\varphi\,\bar{e}_1 - \sin\varphi\,\bar{e}_2$, $\bar{e}'_4 = \sin\varphi\,\bar{e}_3 + \cos\varphi\,\bar{e}_4$ за допомогою повороту на кут φ у площині векторів $\bar{e}_3, \bar{e}_4$. У якості вектора $\bar{e}$ виберемо вектор $\bar{e}'_3$. Тоді довільна двовимірна часоподібна площина, яка ортогональна $\bar{e}$ і проходить через початок координат, визначається двома взаємно ортогональними векторами

$$\bar{X} = \alpha^1\bar{e}'_1 + \alpha^2\bar{e}'_2 + \alpha^4\bar{e}'_4 \quad \text{і} \quad \bar{Y} = \beta^1\bar{e}'_1 + \beta^2\bar{e}'_2 + \beta^4\bar{e}'_4$$

Щодо базису $\{\bar{e}_i\}$ плюккерові координати цієї площини мають вигляд

$$\bar{p} = (\alpha^{[1}\beta^{2]}, \alpha^{[1}\beta^{4]}\sin\varphi, \alpha^{[1}\beta^{4]}\cos\varphi, \alpha^{[2}\beta^{4]}\sin\varphi, \alpha^{[2}\beta^{4]}\cos\varphi, 0).$$

У просторі з базисом $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_4$ обчислимо векторний добуток векторів $\bar{X}$ і $\bar{Y}$:

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = (-\alpha^{[2}\beta^{4]}, -\alpha^{[1}\beta^{4]}, \alpha^{[1}\beta^{2]}).$$

Будемо вважати, що α^i й β^i вибрані так, що $[\bar{X}, \bar{Y}]$ є одиничним вектором, тоді його координати можна записати у вигляді:

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = (\cos\theta\, sh\gamma, \cos\theta\, ch\gamma, \sin\theta).$$

У параметризації (θ, γ) параметричні рівняння $f\left(S^2(\bar{e})\right)$ мають вигляд

$$\bar{p} = (\sin\theta, -\cos\theta\, ch\gamma\sin\varphi, -\cos\theta\, ch\gamma\cos\varphi, -\cos\theta\, sh\gamma\sin\varphi, -\cos\theta\, sh\gamma\cos\varphi, 0).$$

Нехай точці P_0, через яку проходять $f\left(S^2(\bar{e})\right)$ і $T^3(\bar{e})$, відповідає площина ${}^1R_2$, визначена векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2$. Тоді плюккерові координати $(1,0,0,0,0,0)$ цієї площини відповідають значенню $\theta = \frac{\pi}{2}$. Дотичний вектор $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \gamma}$ до $f\left(S^2(\bar{e})\right)$ в цій точці буде нульовим, а множина векторів $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta}$ визначає двовимірну площину, дотичну до $f\left(S^2(\bar{e})\right)$ в точці P_0. У якості базису цієї площини виберемо вектори

$$\bar{f}_1 = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = (0, \sin\varphi, \cos\varphi, 0, 0, 0),$$

$$\bar{f}_2 = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta}\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = (0, ch1\sin\varphi, ch1\cos\varphi, sh1\sin\varphi, sh1\cos\varphi, 0).$$

Площина векторів $\bar{f}_1$ і $\bar{f}_2$ визначається кутом φ. Оскільки $T^3(\bar{e})$ визначається параметром φ і площина, натягнута на вектори $\bar{f}_1, \bar{f}_2$, також визначається цим параметром і належить $T^3(\bar{e})$, то з регулярності проектування площини T^2 на площину векторів $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ буде випливати регулярність її проектування на $T^3(\bar{e})$. Тому ті площини, які проектуються з виродженням на $T^3(\bar{e})$, будуть проектуватися з виродженням і на площину векторів $\bar{f}_1, \bar{f}_2$. Ми допустили, що такі площини існують. Нехай $\bar{k}$ і $\bar{l}$ – напрямні вектори однієї з таких площин і нехай вектори $\bar{k}$ й $\bar{l}$ мають у T^4 такі координати:

$$\bar{k} = (0, k_1, k_2, k_3, k_4, 0), \quad \bar{l} = (0, l_1, l_2, l_3, l_4, 0).$$

У площині векторів $\bar{k}$ і $\bar{l}$ існує ненульовий вектор $C_1\bar{k}+C_2\bar{l}=(0,C_1k_1+C_2l_1,C_1k_2+C_2l_2,C_1k_3+C_2l_3,C_1k_4+C_2l_4,0)$, ортогональний до $\bar{f}_1$ і $\bar{f}_2$. Отже, система рівнянь

$$
\begin{gathered}
C_1(-k_1\sin\varphi-k_2\cos\varphi)+C_2(-l_1\sin\varphi-l_2\cos\varphi)=0,\\
C_1(-k_1\sin\varphi ch1-k_2\sin\varphi sh1+k_3\sin\varphi ch1+k_4\cos\varphi sh1)+\\
C_2(-l_1\sin\varphi ch1-l_2\sin\varphi sh1+l_3\sin\varphi ch1+l_4\cos\varphi sh1)=0
\end{gathered}
$$

відносно C_1 й C_2 має нетривіальний розв'язок, тому її визначник дорівнює нулю. При будь-якому φ ця вимога дає три рівняння

$$
\begin{vmatrix}-k_1 & l_1\\ -k_3 & l_3\end{vmatrix}=0,\quad
\begin{vmatrix}-k_2 & l_2\\ -k_4 & l_4\end{vmatrix}=0,\quad
\begin{vmatrix}-k_1 & l_1\\ -k_4 & l_4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-k_2 & l_2\\ -k_3 & l_3\end{vmatrix}=0.
$$

З перших двох рівнянь випливає, що знайдуться такі два числа λ й μ, що

$$k_1=\lambda l_1,\ k_3=\lambda l_3,\ k_2=\mu l_2,\ k_4=\mu l_4.$$

Оскільки $\bar{k}$ й $\bar{l}$ лінійно незалежні, то числа λ й μ різні. Третє рівняння дає

$$l_1l_4-l_2l_3=0.$$

Знайдемо тепер секційну кривину $\bar{K}$ многовиду ${}^{T}PG(2,4)$ для площини векторів $\bar{k}$ і $\bar{l}$. Для цього спочатку визначимо зовнішню кривину $\bar{K}_e$ точкового підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$ як гіперповерхні, що належить п'ятивимірній сфері уявноодиничного радіусу. Використовуючи рівняння Гаусса (3.18) для підмноговиду ${}^{T}PG(2,4)$, запишемо формулу зовнішньої кривини у вигляді

$$\overline{K}_e = \frac{(\overline{p}_{u^1u^1}, \overline{q})(\overline{p}_{u^2u^2}, \overline{q}) - (\overline{p}_{u^1u^2}, \overline{q})}{\overline{p}^2_{u^1}\overline{p}^2_{u^2} - (\overline{p}_{u^1}, \overline{p}_{u^2})}.$$

Перетворимо цю формулу до вигляду

$$\overline{K}_e = \frac{(\overline{p}_{u^1}, \overline{q}_{u^1})(\overline{p}_{u_2}, \overline{q}_{u_2}) - \frac{1}{4}[(\overline{p}_{u^1}, \overline{q}_{u^2}) + (\overline{p}_{u^2}, \overline{q}_{u^1})]^2}{\overline{p}^2_{u^1}\overline{p}^2_{u^2} - (\overline{p}_{u^1}, \overline{p}_{u^2})}.$$

Нехай у точці P_0 виконується умова $p^{34} = 1$. Тоді $p^{34}_{u_i} = 0$ і формулу кривини можна записати у вигляді

$$\overline{K}_e = \left\{ \begin{vmatrix} p^{13}_{u_1} & p^{13}_{u_2} \\ p^{42}_{u_1} & p^{42}_{u_2} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p^{14}_{u_1} & p^{14}_{u_2} \\ p^{23}_{u_1} & p^{23}_{u_2} \end{vmatrix}^2 - 2\begin{vmatrix} p^{23}_{u_1} & p^{23}_{u_2} \\ p^{13}_{u_1} & p^{13}_{u_2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} p^{14}_{u_1} & p^{14}_{u_2} \\ p^{42}_{u_1} & p^{42}_{u_2} \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} p^{14}_{u_1} & p^{14}_{u_2} \\ p^{13}_{u_1} & p^{13}_{u_2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} p^{23}_{u_1} & p^{23}_{u_2} \\ p^{42}_{u_1} & p^{42}_{u_2} \end{vmatrix} \right\} /$$

$$/(p^2_{u_1} p^2_{u_2} - (p_{u_1} p_{u_2})^2).$$

Зробимо в цій формулі заміни

$$p^{13}_{u_1} = k_1, \quad p^{14}_{u_1} = k_2, \quad p^{23}_{u_1} = k_3, \quad p^{24}_{u_1} = k_4$$
$$p^{13}_{u_2} = l_1, \quad p^{14}_{u_2} = l_2, \quad p^{23}_{u_2} = l_3, \quad p^{24}_{u_2} = l_4.$$

Тоді в чисельнику одержимо вирази

$$\begin{vmatrix} k_1 & l_1 \\ -k_4 & -l_4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} k_2 & l_2 \\ k_3 & l_3 \end{vmatrix}^2 - 2\begin{vmatrix} k_3 & l_3 \\ k_1 & l_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} k_2 & l_2 \\ -k_4 & -l_4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} k_2 & l_2 \\ k_1 & l_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} k_3 & l_3 \\ -k_4 & -l_4 \end{vmatrix}.$$

Скористаємося отриманими співвідношеннями для координат векторів $\overline{k}$ і $\overline{l}$ й перетворимо цей вираз до вигляду

$$(\mu-\lambda)^2 l_1^2 l_4^2 + (\mu-\lambda)^2 l_2^2 l_3^2 - 2(\mu-\lambda)^2 l_1 l_4 l_2 l_3 = (\mu-\lambda)^2 (l_1 l_4 - l_2 l_3)^2.$$

Таким чином, $\overline{K}_e = 0$. Отже, секційна кривина $\overline{K}(\sigma) = \overline{K}_e - 1$ грассманового підмноговиду ${}^T PG(2,4)$ дорівнює -1. А за умовою леми вона відмінна від -1. Одержали протиріччя. Лема доведена.

4.4 Теореми існування регулярної поверхні простору ${}^1R_4$, що має заданий грассманів образ

У теоремі 4.1 було показано, що коли існує поверхня простору ${}^1R_4$, грассманів образ якої є заданою поверхнею грассманового многовиду, то координати радіус-вектора цієї поверхні задовольняють рівняння (4.4). У разі гіперболічного типу цього рівняння справедлива локальна теорема про існування околу точки на Γ^2, який є грассмановим образом деякої поверхні простору ${}^1R_4$. У випадку еліптичного типу можна довести існування області на поверхні, що задовольняє теоремі Лаврентьєва [59].

Теорема 4.2. Нехай Γ^2 – двовимірна регулярна класу C^4 поверхня в ${}^S PG(2,4)$ (або ${}^T PG(2,4)$). Якщо кривина $\overline{K}(\sigma)$ грассманового підмноговиду ${}^S PG(2,4)$ (або ${}^T PG(2,4)$) для площини, дотичної до Γ^2 в точці P_0, задовольняє умові $\overline{K}(\sigma) > 1$ (або $\overline{K}(\sigma) < -1$), то існує окіл точки P_0, що є грассмановим образом регулярної класу C^2 поверхні V^2 простору ${}^1R_4$.

Доведення. Для існування розв'язку рівняння (4.4) необхідно, щоб коефіцієнти в ньому були гладкими функціями. Оскільки поверхня Γ^2 регулярна, то похідні d_{u^i} і c_{u^j} є гладкими функціями. Отже, для того, щоб коефіцієнти рівняння були гладкими функціями, необхідно, щоб визначник

$\begin{vmatrix} d_{u^1} & d_{u^2} \end{vmatrix}$ був відмінний від нуля. Щоб це довести, знайдемо явний вигляд цього визначника.

Нехай σ – дотична площина до Γ^2 в точці P_0. Згідно з лемою 4.3, якщо $\overline{K}(\sigma) \neq 1$ (або $\overline{K}(\sigma) \neq -1$), то існує тривимірний підпростір T^3, на який σ (а значить і Γ^2) проектується без виродження.

Розглянемо тривимірний простір $T^3 = {}^2R_3$, описаний в пункті 4.1. Проекція $\tilde{\Gamma}^2$ поверхні Γ^2 на T^3 описується вектор-функцією $\bar{\tau}(u^1, u^2)$. Оскільки Γ^2 регулярна, то й $\tilde{\Gamma}^2$ теж регулярна, тобто дотична площина до $\tilde{\Gamma}^2$ – проекція дотичної площини до Γ^2 – є двовимірною. Отже, у якості тривимірного простору, на який Γ^2 проектується без виродження, можна вибрати простір $T^3 = {}^2R_3$.

Оскільки проекція $\tilde{\Gamma}^2 \subset T^3$ є частиною сфери дійсного (якщо $\Gamma^2 \subset {}^S PG(2,4)$) або уявного (якщо $\Gamma^2 \subset {}^T PG(2,4)$) радіуса, то $\begin{vmatrix} d_{u^1} & d_{u^2} \end{vmatrix} = -\dfrac{(\bar{\tau}, \bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2})}{(p^{34})^3} = -\dfrac{|[\bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2}]|}{(p^{34})^3}$ (або $\begin{vmatrix} d_{u^1} & d_{u^2} \end{vmatrix} = \dfrac{|[\bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2}]|}{(p^{34})^3}$). А оскільки $\tilde{\Gamma}^2$ регулярна й, за домовленістю, знаменник останнього дробу не дорівнює нулю, то визначник завжди існує й відмінний від нуля, що й треба було довести. Отже, коефіцієнти A, B, C, D є гладкими функціями. Таким чином, відповідно до теорії рівнянь у частинних похідних [58], у деякому околі початкової точки існує розв'язок рівняння (4.4).

Перейдемо до доведення регулярності шуканої поверхні, тобто знайдемо умови, при яких визначник її метричного тензора відмінний від нуля. Позначимо $g_{ij} = (\bar{x}_{u^i}, \bar{x}_{u^j})$ – метричний тензор поверхні V^2, а $g = \det(g_{ij})$. Нехай $\tilde{V}^2$ – проекція поверхні V^2 на ${}^1R_3$, а $\tilde{g}_{ij} = (\tilde{x}_{u^i}, \tilde{x}_{u^j})$ – її метричний тензор. Тоді зв'язок між g_{ij} і $\tilde{g}_{ij}$ має вигляд

$$g_{ij} = \tilde{g}_{ij} + x_{2u^i} x_{2u^j} .$$

Знайдемо визначник матриці $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{2u^1} x_{2u^1} & x_{2u^1} x_{2u^2} \\ x_{2u^2} x_{2u^1} & x_{2u^2} x_{2u^2} \end{pmatrix}$. Він запишеться у вигляді

$$g = \tilde{g} - (\tilde{g}_{11} x^2_{1u^2} - 2\tilde{g}_{12} x_{1u^1} x_{1u^2} + \tilde{g}_{22} x^2_{1u^1}) = -\left|\left[\tilde{x}_{u^1}, \tilde{x}_{u^2}\right]\right|^2 + (\tilde{x}_{u^1} x_{2u^2} - \tilde{x}_{u^2} x_{2u^1})^2 .$$

За допомогою системи (4.9) і умови $(\bar{\tau}, \bar{v}) = 0$ одержимо

$$\left[\tilde{x}_{u^1}, \tilde{x}_{u^2}\right] = -v\rho I , \tilde{x}_{u^1} x_{2u^2} - \tilde{x}_{u^2} x_{2u^1} = -\tau\rho I ,$$

де

$$I = x^2_{2u_1} (\bar{\tau}_{u^2}, \bar{v}_{u^2}) - x_{2u^1} x_{2u^2} ((\bar{\tau}_{u^2}, \bar{v}_{u^1}) + (\bar{\tau}_{u^1}, \bar{v}_{u^2})) + x^2_{2u^2} (\bar{\tau}_{u^1}, \bar{v}_{u^1}) .$$

Враховуючи $|\bar{v}|^2 - |\bar{\tau}|^2 = -1$ (або $|\bar{v}|^2 - |\bar{\tau}|^2 = 1$), одержимо

$$g = -\rho^2 I^2 \text{ (або } g = \rho^2 I^2\text{)}. \tag{4.10}$$

Знайдемо умови, при яких $I \neq 0$.

Оскільки, за умовою теореми, $\overline{K}(\sigma) > 1$ (або $\overline{K}(\sigma) < -1$), тобто рівняння (4.4) для функції x_2 – гіперболічного типу, то можна скористатися методом характеристик. За умовою (4.8) характеристики $\xi(u^1, u^2) = c$, $\eta(u^1, u^2) = c$ рівняння (4.4) є характеристиками форми $(d\bar{p}, d\bar{q})$. З цього випливає, що

$(\bar{\tau}_{\xi},\bar{\nu}_{\xi})=(\bar{\tau}_{\eta},\bar{\nu}_{\eta})=0$, тобто у виразі для I залишиться тільки другий доданок. Тому, значення функції x_2 на характеристиках потрібно задати так, щоб виконувалась умова $x_{2\xi}x_{2\eta}\neq 0$, що дає $I\neq 0$.

Нарешті, доведемо, що грассманів образ знайденої поверхні співпадає із заданою поверхнею Γ^2. Для цього необхідно й достатньо показати, що для будь-якого вектора $\bar{n}=(n^1,n^2,n^3,n^4)$ із площини $N_x\subset{}^1R_4$, яка відповідає точці поверхні Γ^2, виконується умова

$$-x_{1u^i}n^1+x_{2u^i}n^2+x_{3u^i}n^3+x_{4u^i}n^4=0. \tag{4.11}$$

Покажемо, що ця рівність виконується при $i=1$.

За допомогою системи (4.9) можна записати

$$-x_{1u^1}n^1+x_{2u^1}n^2+x_{3u^1}n^3+x_{4u^1}n^4=-x_{2u^1}\rho\{(\bar{\tau}_{u^1},\bar{\nu}_{u^2})(n^1p^{34}-n^3p^{14}+n^4p^{13})-$$
$$+n^1[\bar{\nu},[\bar{\tau}_{u^1},\bar{\tau}_{u^2}]]^3-n^3[\bar{\nu},[\bar{\tau}_{u^1},\bar{\tau}_{u^2}]]^1+n^4[\bar{\nu},[\bar{\tau}_{u^1},\bar{\tau}_{u^2}]]^2+\frac{n^2}{\rho}\}+$$
$$+x_{2u^2}\rho(\bar{\tau}_{u^1},\bar{\nu}_{u^1})(n^1p^{34}-n^3p^{14}+n^4p^{13})$$

Оскільки вектор $\bar{n}$ належить площині бівектора $\bar{p}$, то можна переконатись, що $n^{[i}p^{jk]}=0$. Нехай вектор $[\bar{\tau}_{u^1},\bar{\tau}_{u^2}]$ має координати (a_1,a_2,a_3), тоді

$$-x_{1u^i}n^1+x_{2u^i}n^2+x_{3u^i}n^3+x_{4u^i}n^4=x_{2u^1}\rho\{a_1(-n^1p^{24}-n^4p^{14}+n^2p^{14})+$$
$$+a_2(-n^1p^{23}-n^3p^{12}+n^2p^{13})+a_1(n^3p^{24}-n^4p^{23}+n^2p^{34})\}=0,$$

що й було потрібно довести.

Аналогічно можна показати, що рівність (4.11) виконується й при $i=2$. Таким чином, знайдена поверхня дійсно має заданий грассманів образ. Теорема доведена.

При доведенні теореми існування поверхні, що має заданий грассманів образ, у випадку, коли рівняння (4.4), а значить і система (4.3), еліптичного типу, будемо користуватись теорією квазіконформних відображень Лаврентьєва М.А. та теоремою Положего Г.Н. про збереження однолистого околу.

Визначення 4.1. Гомеоморфне відображення області D на область Δ, яке задається функціями $u=u(x,y), v=v(x,y)$, називається квазіконформним відображенням, що відповідає системі рівнянь $\begin{cases} \Phi_1\left(x,y,u,v,\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=0, \\ \Phi_2\left(x,y,u,v,\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=0, \end{cases}$

якщо функції $u=u(x,y)$ та $v=v(x,y)$ задовольняють цій системі.

В теоремі Лаврентьєва [59] стверджується, що якими б не були дві області D й Δ, обмежені кусково-гладкими кривими, і дві додатно занумеровані трійки точок z_1,z_2,z_3 і w_1,w_2,w_3 границь D і Δ відповідно та якою б не була сильно еліптична система диференціальних рівнянь в частинних похідних, завжди існує квазіконформне відображення, що відповідає цій системі, яке переводить D в Δ з відповідністю трійки z_1,z_2,z_3 трійці w_1,w_2,w_3.

Теорема [Положий, 66]. Для того, щоб функції $u=u(x,y), v=v(x,y)$, які є неперервно диференційовними розв'язками еліптичної системи рівнянь $\begin{cases} au_x+bu_y-v_y=0, \\ du_x+cu_y-v_x=0 \end{cases}$ з коефіцієнтами a,b,c,d, що задовольняють в точці $z_0=x_0+iy_0$ умові Гельдера, перетворювали однолистий окіл точки z_0 площини $z=x+iy$ в однолистий окіл точки $w_0=f(z_0)$ площини $w=f(z)=u+iv$, необхідно (і достатньо), щоб в даній точці z_0 якобіан $u_xv_y-u_yv_x$ не дорівнював нулю.

Оскільки коефіцієнти системи з теореми Положего повинні задовольняти умові Гельдера, то в формулюванні теореми про існування поверхні в еліптичному випадку будемо вимагати, щоб Γ^2 задавалась функціями класу $C^{2,\alpha}$.

Теорема 4.3. Нехай D – область на регулярній класу $C^{2,\alpha}$ поверхні Γ^2 в ${}^{S}PG(2,4)$ (або ${}^{T}PG(2,4)$), в кожній точці якої $\overline{K}(\sigma)<1$ (або $\overline{K}(\sigma)>-1$). Нехай на границі області D задано три точки P_1, P_2, P_3, уся область D однозначно й регулярно проектується на деякий простір $T^3(\bar{e})$ ($\bar{e}$ – фіксований вектор в ${}^{1}R_4$) і опорна функція проекції не дорівнює нулю. Якщо Δ – однозв'язна область у двовимірній площині π простору ${}^{1}R_4$, яка проходить через $\bar{e}$, і Q_1, Q_2, Q_3 – точки на границі області Δ, то в просторі ${}^{1}R_4$ існує регулярна класу $C^{2,\alpha}$ поверхня, яка проектується на площину π в область Δ та має D своїм грассмановим образом і така, що точки, які проектуються в Q_i, мають своїми грассмановими образами точки P_i.

Доведення. Нехай задана область D однозначно і регулярно проектується на деякий простір T^3. Оскільки опорна функція проекції з точністю до множника співпадає з визначником $\begin{vmatrix} d_{u^1} & d_{u^2} \end{vmatrix} = -\dfrac{(\bar{\tau}, \bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2})}{(p^{34})^3}$ (або $\begin{vmatrix} d_{u^1} & d_{u^2} \end{vmatrix} = \dfrac{(\bar{\tau}, \bar{\tau}_{u^1}, \bar{\tau}_{u^2})}{(p^{34})^3}$) і, за умовою теореми, не дорівнює нулю, то з цього випливає регулярність коефіцієнтів системи (4.3). Система (4.3) має еліптичний тип, оскільки секційна кривина задовольняє умові $\overline{K}(\sigma)<1$ (або $\overline{K}(\sigma)>-1$).

В просторі ${}^{1}R_4$ неізотропну площину π проведемо через вектори $\bar{e}=\bar{e}_1$ і $\bar{e}_3$ та виберемо в ній область Δ. За теоремою Лаврентьєва М.А. існує єдине квазіконформне відображення, що відповідає системі (4.3) та переводить область D в область Δ з відповідністю точок P_i і Q_i. Це відображення задається системою функцій $x_1(u^1,u^2)$ і $x_2(u^1,u^2)$, які визначають перші дві координати радіус-вектора шуканої поверхні V^2, з їх допомогою знаходяться координати $x_3(u^1,u^2)$ і $x_4(u^1,u^2)$.

Доведемо регулярність поверхні V^2. Використовуючи систему (4.3), якобіан відображення можна записати у вигляді $-Cx^2_{2u^1}+(D-A)x_{2u^1}x_{2u^2}+Bx^2_{2u^2}$. Можна показати, що вираз для I в формулі (4.10) дорівнює добутку відмінного від нуля множника $\frac{1}{\rho p^{34}}$ та виразу $-Cx^2_{2u^1}+(D-A)x_{2u^1}x_{2u^2}+Bx^2_{2u^2}$. Оскільки система (4.3) має розв'язок, то, згідно з теоремою про збереження області, цей якобіан не повинен дорівнювати нулю. Отже, $I\neq 0$, тобто поверхня V^2 регулярна.

Зауважимо, що з належності Γ^2 класу регулярності $C^{2,\alpha}$ випливає, що і V^2 також належить класу регулярності $C^{2,\alpha}$.

Теорема доведена.

4.5 Теорема існування в просторі ${}^1R_4$ регулярної поверхні з краєм, що має заданий грассманів образ

У роботі [48] Кізбікенова К.О. розглядається в глобальному аспекті задача про відновлення двовимірних поверхонь чотиривимірного евклідова простору за заданим грассмановим образом. Ним сформульовані й доведені теореми про існування й єдиність поверхні із заданим грассмановим образом. Тип диференціального рівняння для відновлення поверхні залежить від знака кривини грассманового образу уздовж однієї з нормалей. Перед формулюванням теорем автор будує спеціальний рухомий репер та з його допомогою виводить основне рівняння. Аналогічну задачу можна розглядати для двовимірних неізотропних поверхонь простору Мінковського.

Нехай задана поверхня Γ^2 в ${}^3R_6$ і регулярна крива l в ${}^1R_4$ Потрібно знайти таку поверхню V^2 в ${}^1R_4$, щоб її краєм була задана крива l, а її грассманів образ збігався з поверхнею Γ^2.

4.5.1 Випадок часоподібної поверхні. Запишемо основні рівняння часоподібної поверхні простору ${}^1R_4$ в довільному ортонормованому рухомому репері. Нехай V^2 – двовимірна часоподібна регулярна поверхня класу C^2 в ${}^1R_4$, $P \in V^2$ і $(P, \bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3, \bar{e}^4)$ – такий ортонормований рухомий репер поверхні, що $\left(\bar{e}^1\right)^2 = -1, \left(\bar{e}^i\right)^2 = 1, i = 2,3,4$. Вектори $\bar{e}^1, \bar{e}^2$ лежать у дотичній площині, а $\bar{e}^3, \bar{e}^4$ – у нормальній площині до поверхні V^2 в точці P. Будемо розглядати тільки поверхні з відмінною від нуля кривиною уздовж нормалі $\bar{e}^3$. Нехай $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ – векторне рівняння поверхні. Перші похідні вектор-функції $\bar{r}$ в репері $(P, \bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3, \bar{e}^4)$ можна записати у вигляді

$$\bar{r}_u(u,v) = x^1(u,v)\bar{e}^1 + x^2(u,v)\bar{e}^2, \tag{4.12}$$

$$\bar{r}_v(u,v) = y^1(u,v)\bar{e}^1 + y^2(u,v)\bar{e}^2. \tag{4.13}$$

Дериваційні формули рухомого репера мають вигляд

$$\bar{e}_u^i = \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} \bar{e}^j, \tag{4.14}$$

$$\bar{e}_v^i = \sum_{i \neq j} \beta_{ij} \bar{e}^j,\ i, j = 1,..,4. \tag{4.15}$$

Зазначимо, що в просторі ${}^1R_4$ коефіцієнти α_{ij} задовольняють рівностям $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, якщо $i = 1$ й $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$, якщо $i = 2,3,4$. Аналогічно для β_{ij}.

Будемо диференціювати (4.12) по v, а (4.13) по u. Використовуючи розклади (4.14)-(4.15) і враховуючи лінійну незалежність векторів $\bar{e}^i$, одержимо для x^1, x^2, y^1, y^2 систему рівнянь

$$\begin{cases} x^1_v - y^1_u + \beta_{21}x^2 - \alpha_{21}y^2 = 0, \\ x^2_v - y^2_u + \beta_{12}x^1 - \alpha_{12}y^1 = 0, \\ \beta_{13}x^1 + \beta_{23}x^2 - \alpha_{13}y^1 - \alpha_{23}y^2 = 0, \\ \beta_{14}x^1 + \beta_{24}x^2 - \alpha_{14}y^1 - \alpha_{24}y^2 = 0. \end{cases} \qquad (4.16)$$

Крім того, будемо вимагати, щоб коефіцієнти α_{ij} й β_{ij} задовольняли умовам інтегровності. Для цього зробимо із системою рівностей (4.14)-(4.15) такі самі операції, що і для рівностей (4.12)-(4.13). Одержимо

$$\begin{cases} \alpha_{12v} - \beta_{12u} + \alpha_{13}\beta_{32} - \alpha_{32}\beta_{13} + \alpha_{14}\beta_{42} - \alpha_{42}\beta_{14} = 0, \\ \alpha_{13v} - \beta_{13u} + \alpha_{12}\beta_{23} - \alpha_{23}\beta_{12} + \alpha_{14}\beta_{43} - \alpha_{43}\beta_{14} = 0, \\ \alpha_{14v} - \beta_{14u} + \alpha_{12}\beta_{24} - \alpha_{24}\beta_{12} + \alpha_{13}\beta_{34} - \alpha_{34}\beta_{13} = 0, \\ \alpha_{23v} - \beta_{23u} + \alpha_{21}\beta_{13} - \alpha_{13}\beta_{21} + \alpha_{24}\beta_{43} - \alpha_{43}\beta_{24} = 0, \\ \alpha_{24v} - \beta_{24u} + \alpha_{21}\beta_{14} - \alpha_{14}\beta_{21} + \alpha_{23}\beta_{34} - \alpha_{34}\beta_{23} = 0, \\ \alpha_{34v} - \beta_{34u} + \alpha_{31}\beta_{14} - \alpha_{14}\beta_{31} + \alpha_{32}\beta_{24} - \alpha_{24}\beta_{32} = 0. \end{cases} \qquad (4.17)$$

Система (4.16), коефіцієнти α_{ij} і β_{ij} якої задовольняють (4.17), є умовою сумісності для системи (4.12)-(4.13), розв'язок якої $r(u,v)$ задає поверхню V^2. Покажемо, що від двох останніх рівнянь системи (4.16) можна перейти до одного рівняння. Знайдемо коефіцієнти другої квадратичної форми V^2 щодо нормалі $\bar{e}^3$. Вони мають вигляд

$$L = \alpha_{13}x^1 + \alpha_{23}x^2, M = \beta_{13}x^1 + \beta_{23}x^2, M = \alpha_{13}y^1 + \alpha_{23}y^2, \ \ N = \beta_{13}y^1 + \beta_{23}y^2.$$

Із цих формул можна виразити x^1, x^2, y^1, y^2 через коефіцієнти другої квадратичної форми в такий спосіб

$$x^1 = \frac{\beta_{23}L - \alpha_{23}M}{\alpha_{13}\beta_{23} - \alpha_{23}\beta_{13}}, x^2 = \frac{-\beta_{13}L + \alpha_{13}M}{\alpha_{13}\beta_{23} - \alpha_{23}\beta_{13}},$$

$$y^1 = \frac{\beta_{23}M - \alpha_{23}N}{\alpha_{13}\beta_{23} - \alpha_{23}\beta_{13}}, \qquad y^2 = \frac{-\beta_{13}M + \alpha_{13}N}{\alpha_{13}\beta_{23} - \alpha_{23}\beta_{13}}.$$

Відзначимо, що знаменник отриманих дробів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли кривина поверхні V^2 уздовж нормалі $\bar{e}^3$ дорівнює нулю. Дійсно, з рівності нулю знаменника випливає $\alpha_{13} = k\beta_{13}, \alpha_{23} = k\beta_{23}$, k – коефіцієнт пропорційності. Тоді $LN - M^2 = 0$. Обернено, якщо кривина дорівнює нулю, то $\dfrac{L}{M} = \dfrac{M}{N} = k$. Звідси, $L = \alpha_{13}x^1 + \alpha_{23}x^2 = k\beta_{13}x^1 + k\beta_{23}x^2$. З останньої рівності випливає, що $\alpha_{13}\beta_{23} - \alpha_{23}\beta_{13} = 0$.

При знайдених значеннях x^1, x^2, y^1, y^2 третє рівняння системи (4.16) виконується тотожно, а четверте можна перетворити до вигляду:

$$L(\beta_{23}\beta_{14} - \beta_{24}\beta_{13}) + M(-\alpha_{23}\beta_{14} + \alpha_{13}\beta_{24} - \alpha_{14}\beta_{23} + \alpha_{24}\beta_{13}) + N(\alpha_{23}\alpha_{14} - \alpha_{24}\alpha_{13}) = 0. \quad (4.18)$$

Далі знайдемо вирази для кривини грассманового образу Γ^2 заданої поверхні уздовж однієї з нормалей. Оскільки поверхня часоподібна, то $\Gamma^2 \subset {}^S PG(2,4)$ і її радіус-вектором у ${}^3R_6$ є бівектор $\bar{p} = [\bar{e}^3, \bar{e}^4]$. Тоді дотичні вектори до грассманового образу мають вигляд

$$\bar{p}_u = [\bar{e}^3_u, \bar{e}^4] + [\bar{e}^3, \bar{e}^4_u], \quad \bar{p}_v = [\bar{e}^3_v, \bar{e}^4] + [\bar{e}^3, \bar{e}^4_v].$$

У рухомому репері $\bar{e}^i$ вектори $\bar{e}^3_u, \bar{e}^4_v, \bar{e}^3_u, \bar{e}^4_v$ мають координати

$$\bar{e}_u^3 = (\alpha_{31}, \alpha_{32}, 0, \alpha_{34}), \bar{e}_u^4 = (\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}, 0),$$
$$\bar{e}_v^3 = (\beta_{31}, \beta_{32}, 0, \beta_{34}), \bar{e}_v^4 (\beta_{41}, \beta_{42}, \beta_{43}, 0).$$

Тоді

$$\bar{p}_u = (0, -\alpha_{14}, \alpha_{31}, -\alpha_{42}, \alpha_{32}, 0),$$
$$\bar{p}_v = (0, -\beta_{14}, \beta_{31}, -\beta_{42}, \beta_{32}, 0).$$

Додатковий до $\bar{p}$ бівектор $\bar{q} = [\bar{e}^1, \bar{e}^2]$ є часоподібною нормаллю до грассманового образу (див. п.3.3). Частинні похідні вектора $\bar{q}$ мають координати

$$\bar{q}_u = (0, \alpha_{23}, \alpha_{24}, -\alpha_{13}, -\alpha_{14}, 0),$$
$$\bar{q}_v = (0, \beta_{23}, \beta_{24}, -\beta_{13}, -\beta_{14}, 0).$$

Знайдемо коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні Γ^2 щодо нормалі $\bar{q}$:

$$l = -(\bar{p}_u, \bar{q}_u) = -2(\alpha_{14}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{24}),$$
$$m = -(\bar{p}_u, \bar{q}_v) = -\alpha_{23}\beta_{14} + \alpha_{13}\beta_{24} - \alpha_{14}\beta_{23} + \alpha_{24}\beta_{13},$$
$$n = -(\bar{p}_v, \bar{q}_v) = -2(\beta_{14}\beta_{23} - \beta_{13}\beta_{24}).$$

Тоді кривина грассманового образу Γ^2 уздовж часоподібного вектора $\bar{q}$ виразиться в такий спосіб

$$K=-\frac{ln-m^2}{\det g}=$$
$$=-\frac{4(\alpha_{14}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{24})(\beta_{14}\beta_{23}-\beta_{13}\beta_{24})-(-\alpha_{23}\beta_{14}+\alpha_{13}\beta_{24}-\alpha_{14}\beta_{23}+\alpha_{24}\beta_{13})^2}{\det g} \tag{4.19}$$

Спеціалізуємо репер простору ${}^1R_4$ за допомогою методу, описаного в роботі [48] Кізбікенова К.О., враховуючи метричні властивості простору Мінковського.

У просторі ${}^1R_4$ з декартовими координатами z^1,z^2,z^3,z^4 гіперплощину ${}^1R_3$ задамо рівнянням $z^4=0$. У ній розглянемо двовимірну сферу S^2 одиничного радіусу, рівняння якої має вигляд

$$-(z^1)^2+(z^2)^2+(z^3)^2=1.$$

Введемо на S^2 координати x,y в такий спосіб. Нехай *O* – центр сфери, *A* – точка на сфері з координатами $(0,0,1)$. Проведемо дотичну площину до S^2 в точці *A,* вона буде часоподібною. Нехай x,y – координати в цій площині відносно ортонормованого репера із центром у точці *A.* Тоді довільна точка $M(z^1,z^2,z^3)$ сфери, для якої $z^3>0$, центральним проектуванням із точки *O* перейде в деяку точку $M_1(x,y,1)$ дотичної площини. При цьому $z^1=\frac{x}{k},z^2=\frac{y}{k},z^3=\frac{1}{k}$, де $k=\sqrt{1-x^2+y^2}$. Оскільки вектор $\overline{OM}$ просторовоподібний (його кінець лежить на сфері дійсного радіуса), то вектор $\overline{OM_1}$ також буде просторовоподібним, причому $k>0$. Таким чином, точки розглянутої півсфери будуть проектуватись в точки дотичної площини, координати яких задовольняють умові $x^2-y^2<1$. Приймемо за вектор $\bar{f}^3$ рухомого репера $\bar{f}^1,\bar{f}^2,\bar{f}^3,\bar{f}^4$ вектор $\bar{\xi}=O\overline{M}$. Побудуємо інші вектори репера в такий спосіб. Розглянемо вектор $\bar{\xi}^{1} = \left(0, \frac{1}{n}, -\frac{y}{n}\right), n = \sqrt{1+y^{2}}$, ортогональний до $\bar{\xi}$. Знайдемо в просторі ${}^{1}R_{3}$ векторний добуток векторів $\bar{\xi}$ і $\bar{\xi}^{1}$

$$\bar{\xi}^{2} = \bar{\xi} \times \bar{\xi}^{1} = \begin{vmatrix} -\bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{x}{k} & \frac{y}{k} & \frac{1}{k} \\ 0 & \frac{1}{n} & -\frac{y}{n} \end{vmatrix} = \left(\frac{n}{k}, \frac{xy}{nk}, \frac{x}{nk}\right).$$

Відзначимо, що площина векторів $\bar{\xi}^{1}$ й $\bar{\xi}^{2}$ є часоподібною. Тому довільний одиничний вектор $\bar{\xi}^{3}$ в ${}^{1}R_{3}$, ортогональний до $\bar{\xi}$, має вигляд

$$\bar{\xi}^{3} = ch\alpha\bar{\xi}^{1} + sh\alpha\bar{\xi}^{2}.$$

Нехай $\bar{t}^{4}$ – одиничний вектор, ортогональний гіперплощині ${}^{1}R_{3}$, тоді довільний одиничний вектор $\bar{\eta}$, ортогональний до $\bar{\xi}$ в ${}^{1}R_{4}$, можна представити у вигляді

$$\bar{\eta} = ch\alpha\cos\beta\bar{\xi}^{1} + sh\alpha\cos\beta\bar{\xi}^{2} + \sin\beta\bar{t}^{4} = \cos\beta\bar{\xi}^{3} + \sin\beta\bar{t}^{4}.$$

Виберемо за вектор $\bar{f}^{4}$ вектор $\bar{\eta}$. Покладемо

$$\bar{f}^{1} = sh\alpha\bar{\xi}^{1} + ch\alpha\bar{\xi}^{2},$$

$$\bar{f}^{2} = -ch\alpha\sin\beta\bar{\xi}^{1} - sh\alpha\sin\beta\bar{\xi}^{2} + \cos\beta\bar{t}^{4}.$$

Введемо позначення

$$\lambda = ctg\beta sh\alpha\,,\ \mu = ctg\beta ch\alpha\,, a = \sqrt{1+\mu^2-\lambda^2}\,,\ b = \sqrt{\mu^2-\lambda^2}\,.$$

Таким чином, вектори побудованого рухомого ортонормованого репера мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\bar{f}^{\,1} = \frac{\lambda}{b}\bar{\xi}^{1} + \frac{\mu}{b}\bar{\xi}^{2},\\
&\bar{f}^{\,2} = -\frac{\mu}{ab}\bar{\xi}^{1} - \frac{\lambda}{ab}\bar{\xi}^{2} + \frac{b}{a}\bar{t}^{\,4},\\
&\bar{f}^{\,3} = \bar{\xi},\\
&\bar{f}^{\,4} = \bar{\eta} = \frac{\mu}{a}\bar{\xi}^{1} + \frac{\lambda}{a}\bar{\xi}^{2} + \frac{1}{a}\bar{t}^{\,4}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Коефіцієнти дериваційних формул отриманого репера знаходимо за формулами

$$\alpha_{ij} = (\bar{f}^{\,i}_{x}, \bar{f}^{\,j}),\ \ \beta_{ij} = (\bar{f}^{\,i}_{y}, \bar{f}^{\,j})\,.$$

Одержимо

$$\begin{aligned}
&\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{\lambda\mu_x - \mu\lambda_x}{ab^2}\,, \alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{\mu n}{bk^2}\,, \alpha_{14} = \alpha_{41} = \frac{\lambda_x\mu - \lambda\mu_x}{ab}\,,\\
&\alpha_{23} = -\alpha_{32} = -\frac{\lambda n}{abk^2}\,, \alpha_{24} = -\alpha_{42} = \frac{\mu\mu_x - \lambda\lambda_x}{a^2 b}\,,\ \alpha_{34} = -\alpha_{43} = -\frac{\lambda n}{ak^2}\,.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

і

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \frac{\lambda\mu_y - \mu\lambda_y}{ab^2} - \frac{x}{an^2k}\,, \beta_{13} = \beta_{31} = -\frac{\lambda}{bnk} - \frac{\mu xy}{bnk^2}\,,$$

$$\beta_{14} = \beta_{41} = \frac{\lambda_y\mu - \lambda\mu_y}{ab} + \frac{bx}{an^2k}\,, \beta_{23} = -\beta_{32} = -\frac{\mu}{abnk} + \frac{\lambda xy}{abnk^2}\,,$$

$$\beta_{24} = -\beta_{42} = \frac{\mu\mu_y - \lambda\lambda_y}{a^2 b}, \qquad \beta_{34} = -\beta_{43} = \frac{\mu}{ank} + \frac{\lambda xy}{ank^2}. \qquad (4.22)$$

Покажемо, що набір x, y, λ, μ є набором локальних координат у чотиривимірному підмноговиді двовимірних просторовоподібних площин простору Мінковського. Дійсно, за заданим набором x, y, λ, μ можна однозначно визначити вектори побудованого базису, а за векторами $\bar{f}^3$, $\bar{f}^4$ цього базису визначити просторовоподібну площину, тобто точку підмноговиду $^S PG(2,4)$. З іншого боку, будь-яка площина, натягнута на вектори $\bar{f}^3$ й $\bar{f}^4$, може бути записана параметричними рівняннями

$$\begin{aligned}
x^1 &= \frac{x}{k} t_1 - \frac{\lambda n}{ak} t_2, \\
x^2 &= \frac{y}{k} t_1 + \frac{\mu k + xy\lambda}{ank} t_2, \\
x^3 &= \frac{1}{k} t_1 - \frac{yk\mu - x\lambda}{ank} t_2, \\
x^4 &= \frac{1}{a} t_2.
\end{aligned}$$

Виключаючи з цієї системи параметри t_1, t_2, одержимо систему виду

$$\begin{aligned}
x^1 &= \xi_1^1 x^3 + \xi_1^2 x^4, \\
x^2 &= \xi_2^1 x^3 + \xi_2^2 x^4,
\end{aligned}$$

де $\xi_1^1 = x, \xi_2^1 = y$, а для визначення λ й μ маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} \lambda \dfrac{k}{n} + \mu \dfrac{xy}{n} = \xi_2^1, \\ \mu n = \xi_2^2. \end{cases}$$

Оскільки визначник цієї системи дорівнює k, а значить відмінний від нуля (в області $x^2 - y^2 < 1$), то система має єдиний розв'язок. Таким чином, набір x, y, λ, μ визначається однозначно заданою просторовоподібною площиною.

Припустимо, що λ, μ є диференційовними функціями $\lambda = \lambda(x, y), \mu = \mu(x, y)$ від x, y. Тоді остання система задає регулярний двовимірний підмноговид Γ^2, що є грассмановим образом заданої поверхні V^2.

Повернемося до задачі про відновлення часоподібної поверхні з краєм у просторі ${}^1R_4$ за її грассмановим образом.

Нехай x, y – координати на часоподібній площині відносно ортонормованого репера й Δ – область на площині, що визначається умовою $x^2 - y^2 < 1$. Будемо розглядати таку часоподібну поверхню V^2 класу C^2 в ${}^1R_4$ із внутрішніми координатами x, y, гомеоморфну області Δ, яка бієктивно проектується на часоподібну поверхню $\tilde{V}^2$ тривимірного простору ${}^1R_3$. Крім того, будемо вимагати, щоб $\tilde{V}^2$ мала бієктивний сферичний образ. Поверхню V^2 будемо задавати радіус-вектором $\bar{r}(x, y) = (z^1(x, y), z^2(x, y), z^3(x, y), z^4(x, y))$, а тривимірний простір ${}^1R_3$ рівнянням $z^4 = 0$. Тоді поверхня $\tilde{V}^2$ задається векторним рівнянням $\bar{r}_1(x, y) = (z^1(x, y), z^2(x, y), z^3(x, y), 0)$. У якості рухомого репера поверхні V^2 виберемо репер (4.20), причому вектори $\bar{f}^1$, $\bar{f}^2$ лежать у дотичній площині, а вектори $\bar{f}^3$, $\bar{f}^4$ – у нормальній. Відзначимо, що вектор $\bar{f}^3$ є нормаллю до поверхні $\tilde{V}^2$.

У роботі [11, с.278] стверджується, що опорна функція повністю визначає поверхню, яка має бієктивний сферичний образ. Там же показано, як у випадку евклідова простору координати поверхні виражаються через опорну функцію h цієї поверхні. Можна показати, що для часоподібної поверхні $\tilde{V}^2$ ці вирази набудуть вигляду

$$z^1 = -h_x, z^2 = h_y, z^3 = h - xh_x - yh_y, \tag{4.23}$$

де $Pgrad\, h = (-h_x, h_y)$ - псевдоградієнт опорної функції.

Тоді

$$\bar{r}_{1x} = (-h_{xx}, h_{yx}, -xh_{xx} - yh_{xy}),$$
$$\bar{r}_{1y} = (-h_{xy}, h_{yy}, -xh_{xy} - yh_{yy}).$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні $\tilde{V}^2$ виражаються в такий спосіб:

$$L = -\frac{h_{xx}}{k}, M = -\frac{h_{xy}}{k},\ N = -\frac{h_{yy}}{k}.$$

Оскільки другі квадратичні форми поверхонь V^2 і $\tilde{V}^2$ відносно нормалі $\bar{f}^3$ збігаються, то можна підставити знайдені вирази для L, M, N та α_{ij}, β_{ij} в (4.18). Одержимо

$$h_{xx}\left(\frac{k}{n^2}\lambda_y + \frac{xy}{n^2}\mu_y + \frac{x}{n^4}\mu + \frac{x^2 y}{n^3 k}\lambda\right) + h_{xy}\left(-\frac{xy}{n^2}\mu_x + \mu_y - \frac{k}{n^2}\lambda_x + \frac{x}{n^2 k}\lambda\right) - h_{yy}\mu_x = 0.$$

Перетворимо останнє рівняння до вигляду

$$h_{xx}\left(\frac{k\lambda}{n}+\frac{xy}{n}\mu\right)_y-h_{xy}\left(\left(\frac{k}{n}\lambda+\frac{xy}{n}\mu\right)_x-(n\mu)_y\right)-h_{yy}(n\mu)_x=0. \quad (4.24)$$

Позначимо

$$A=\frac{k\lambda}{n}+\frac{xy}{n}\mu\,, B=-n\mu\,,$$

тоді рівняння (4.24) набуде вигляду

$$A_y h_{xx}-\left(A_x+B_y\right)h_{xy}+B_x h_{yy}=0. \quad (4.25)$$

Аналогічне рівняння у випадку евклідова простору в роботі [48] називається основним рівнянням.

Тип рівняння визначається знаком дискримінанта

$$D=4A_yB_x-\left(A_x+B_y\right)^2,$$

який збігається зі знаком кривини грассманового образу в тому випадку, коли Γ^2 є часоподібною поверхнею й має протилежний знак, якщо Γ^2 просторовоподібний. У цьому можна переконатись, порівнюючи формули (4.18) і (4.19).

У випадку, коли рівняння (4.25) має гіперболічний тип, має місце наступна

Теорема 4.4. Нехай $\Gamma^2\subset {}^S PG(2,4)$ – двовимірна поверхня в ${}^3R_6$, задана радіус-вектором

$$\sigma(x,y)=\left(\frac{yA+xB}{ak},\frac{A}{ak},\frac{x}{ak},-\frac{B}{ak},\frac{y}{ak},\frac{1}{ak}\right),$$

де x,y – координати на півсфері S^2 одиничного радіуса, уведені вище. Нехай Ω – область на S^2, обмежена двома кривими, які є перетинами півсфери площинами, що проходять через її діаметр; Ω' – проекція області Ω на дотичну площину до S^2 в точці M. Функції $A(x,y)$, $B(x,y)$ є функціями класу C^2 в області Ω' й разом зі своїми похідними до другого порядку включно обмежені в Ω'. Нехай виконуються умови

$$4A_yB_x - \left(A_x + B_y\right)^2 < 0,$$

$$\min_{\Omega'}\{|\,4A_yB_x - \left(A_x + B_y\right)^2\,|, |\,A_y\,|, |\,B_x\,|\} \geq n_0 = const > 0$$

і нехай на одній із кривих l, що обмежують область Ω, задана неперервна функція $\overline{R}(s) = (R^1(s), R^2(s), R^3(s), R^4(s))$, $R_s^3 = -a_0R_s^1 - sR_s^2$, $R_s^4 = -A|_l\ R_s^1 + B|_l\ R_s^2$, $a_0 = const$. Тоді існує єдина двовимірна регулярна часоподібна поверхня V^2 класу C^1 в ${}^1R_4$ така, що її грассманів образ збігається з поверхнею Γ^2 та край поверхні V^2 збігається із кривою $\overline{R} = \overline{R}(s)$.

Ця теорема є аналогом сформульованої та доведеної в роботі [48] Кізбікенова К.О. теореми для двовимірної поверхні чотиривимірного евклідова простору. Доведення цієї теореми розбивається на два етапи. Спочатку доводиться існування розв'язку основного рівняння при зазначених початкових умовах, а потім за знайденою опорною функцією h й за функціями A і B відновлюється поверхня V^2. При доведенні існування розв'язку основного рівняння автор використовує метод Шикіна Є.В. і для цього від основного рівняння переходить до системи п'яти лінійних диференціальних рівнянь із п'ятьма невідомими функціями x, y, p, q, h, що залежать від параметрів u, v

$$\begin{cases} y_u - \rho_1 x_u = 0, \\ y_v - \rho_2 x_v = 0, \\ p_u + \rho_2 q_u = 0, \\ p_v + \rho_1 q_v = 0, \\ h_u - p x_u - q y_u = 0, \end{cases} \tag{4.26}$$

де ρ_1, ρ_2 – корені характеристичного рівняння $A_y\rho^2 - \left(A_x + B_y\right)\rho + B_x = 0$, а $p = h_x$, $q = h_y$.

Систему перших двох рівнянь можна перетворити до рівносильної системи, до якої застосовується лема про існування єдиного розв'язку (x, y) у деякій смузі зміни параметрів u,v [48]. Застосовуючи цю лему необхідну кількість раз, одержуємо висновок про існування розв'язку системи в смузі, що покриває Ω'. Функції p,q знаходяться таким самим чином із третього й четвертого рівнянь системи (4.24). З урахуванням останнього рівняння цієї системи знаходимо h. Поверхня відновлюється за функціями A, B і h, оскільки мають місце рівності (4.23).

У випадку простору Мінковського коефіцієнти основного рівняння мають інший вигляд, що пояснюється метричними властивостями цього простору. Разом з тим, якщо вони задовольняють тим же вимогам, що й у випадку евклідова простору, то запропоноване в роботі [48] доведення теореми про відновлення поверхні евклідова простору по суті є доведенням теореми про відновлення поверхні простору Мінковського.

4.5.2 Випадок просторовоподібної поверхні. Нехай V^2 – двовимірна просторовоподібна регулярна поверхня класу C^2 в ${}^1R_4$. На відміну від випадку часоподібної поверхні вектори $\bar{e}^1, \bar{e}^2$ рухомого репера $(P, \bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3, \bar{e}^4)$ будуть лежати в нормальній площині, а $\bar{e}^3, \bar{e}^4$ – у дотичній площині до поверхні V^2 в точці P. Будемо розглядати ті поверхні, для яких кривина уздовж нормалі $\bar{e}^2$ відмінна від нуля Тоді перші похідні вектор-функції $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ запишуться у вигляді

$$\bar{r}_u(u,v) = x^3(u,v)\bar{e}^3 + x^4(u,v)\bar{e}^4,$$

$$\bar{r}_v(u,v) = y^3(u,v)\bar{e}^3 + y^4(u,v)\bar{e}^4.$$

Дериваційні формули рухомого репера мають той же вигляд (4.14)-(4.15). Система рівнянь для x^3, x^4, y^3, y^4 має вигляд

$$\begin{cases} x_v^3 - y_u^3 + \beta_{43} x^4 - \alpha_{43} y^4 = 0, \\ x_v^4 - y_u^4 + \beta_{34} x^3 - \alpha_{34} y^3 = 0, \\ \beta_{31} x^3 + \beta_{41} x^4 - \alpha_{31} y^3 - \alpha_{41} y^4 = 0, \\ \beta_{32} x^3 + \beta_{42} x^4 - \alpha_{32} y^3 - \alpha_{42} y^4 = 0. \end{cases} \tag{4.27}$$

а коефіцієнти α_{ij} й β_{ij} задовольняють умовам інтегровності (4.17).

Коефіцієнти другої квадратичної форми V^2 будемо шукати відносно нормалі $\bar{e}^2$. Вони мають вигляд

$$L = \alpha_{32} x^3 + \alpha_{42} x^4,\ M = \beta_{32} x^3 + \beta_{42} x^4,\ M = \alpha_{32} y^3 + \alpha_{42} y^4,$$
$$N = \beta_{32} y^3 + \beta_{42} y^4.$$

Із цих формул можна виразити x^3, x^4, y^3, y^4 через коефіцієнти другої квадратичної форми в такий спосіб

$$x^3 = \frac{\beta_{42} L - \alpha_{42} M}{\alpha_{23}\beta_{24} - \alpha_{24}\beta_{23}}, \quad x^4 = \frac{\beta_{23} L - \alpha_{23} M}{\alpha_{23}\beta_{24} - \alpha_{24}\beta_{23}},$$
$$y^3 = \frac{\beta_{42} M - \alpha_{42} N}{\alpha_{23}\beta_{24} - \alpha_{24}\beta_{23}}, \quad y^4 = \frac{\beta_{23} M - \alpha_{23} N}{\alpha_{23}\beta_{24} - \alpha_{24}\beta_{23}}.$$

Знаменник отриманих дробів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли кривина поверхні V^2 уздовж нормалі $\bar{e}^2$ дорівнює нулю.

Четверте рівняння системи (4.27) можна перетворити до того ж вигляду (4.18).

Для спеціалізації репера в просторі ${}^1R_4$ з декартовими координатами z^1, z^2, z^3, z^4 задамо евклідову гіперплощину R_3 рівнянням $z^1 = 0$ і в ній двовимірну сферу S^2 рівнянням

$$(z^2)^2 + (z^3)^2 + (z^4)^2 = 1.$$

Введемо на сфері S^2 координати x, y, запозичені із просторовоподібної дотичної площини до сфери в точці $A(1,0,0)$. Тоді довільна точка $M(z^2, z^3, z^4)$ півсфери, для якої $z^2 > 0$, центральним проектуванням із точки O перейде в деяку точку $M_1(1, x, y)$ дотичної площини. При цьому $z^2 = \frac{1}{k}, z^3 = \frac{x}{k}, z^4 = \frac{y}{k}$, де $k = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$. Зауважимо, що зазначене центральне проектування є гомеоморфізмом між півсферою й дотичною площиною. Приймемо за вектор $\bar{f}^2$ рухомого репера $\bar{f}^1, \bar{f}^2, \bar{f}^3, \bar{f}^4$ вектор $\bar{\xi} = \overline{OM}$. Побудуємо інші вектори репера в такий спосіб. Розглянемо вектор $\bar{\xi}^1 = \left(-\frac{y}{n}, 0, \frac{1}{n}\right)$, $n = \sqrt{1 + y^2}$, ортогональний до $\bar{\xi}$. Знайдемо в просторі R_3 векторний добуток векторів $\bar{\xi}$ і $\bar{\xi}^1$

$$\bar{\xi}^2 = \bar{\xi} \times \bar{\xi}^1 = \left(\frac{x}{nk}, -\frac{n}{k}, \frac{xy}{nk}\right).$$

У просторі R_3 довільний ортогональний до $\bar{\xi}$ одиничний вектор $\bar{\xi}^3$ із просторовоподібної площини, що визначається векторами $\bar{\xi}^1$ та $\bar{\xi}^2$, має вигляд

$$\bar{\xi}^3 = \cos\alpha \bar{\xi}^1 + \sin\alpha \bar{\xi}^2.$$

У просторі ${}^1R_4$ довільний одиничний вектор $\overline{\eta}$, ортогональний до $\bar{\xi}$, можна представити у вигляді

$$\overline{\eta} = \cos\alpha\, sh\beta\bar{\xi}^1 + \sin\alpha\, sh\beta\bar{\xi}^2 + ch\beta\bar{t}^4 = sh\beta\bar{\xi}^3 + ch\beta\bar{t}^4,$$

де $\bar{t}^4$ – уявноодиничний часоподібний вектор, ортогональний гіперплощині R_3. Виберемо за вектор $\bar{f}^1$ вектор $\overline{\eta}$. Покладемо

$$\bar{f}^3 = \sin\alpha\bar{\xi}^1 - \cos\alpha\bar{\xi}^2,$$
$$\bar{f}^4 = \cos\alpha ch\beta\bar{\xi}^1 + \sin\alpha ch\beta\bar{\xi}^2 + sh\beta\bar{t}^4.$$

Введемо позначення

$$\lambda = th\beta\sin\alpha,\ \mu = th\beta\cos\alpha,\ a = \sqrt{1-\mu^2-\lambda^2},\ b = \sqrt{\mu^2+\lambda^2}.$$

Вектори спеціалізованого рухомого ортонормованого репера мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\bar{f}^1 = \frac{\mu}{a}\bar{\xi}^1 + \frac{\lambda}{a}\bar{\xi}^2 + \frac{1}{a}\bar{t}^4,\\
&\bar{f}^2 = \bar{\xi},\\
&\bar{f}^3 = \frac{\lambda}{b}\bar{\xi}^1 - \frac{\mu}{b}\bar{\xi}^2,\\
&\bar{f}^4 = \frac{\mu}{ab}\bar{\xi}^1 + \frac{\lambda}{ab}\bar{\xi}^2 + \frac{b}{a}\bar{t}^4,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

а коефіцієнти дериваційних формул отриманого репера виразяться наступним чином:

$$\alpha_{12}=\alpha_{21}=\frac{\lambda n}{ak^2},\alpha_{13}=\alpha_{31}=\frac{\lambda\mu_x-\lambda_x\mu}{ab},\alpha_{14}=\alpha_{41}=\frac{\mu\mu_x+\lambda\lambda_x}{a^2b},$$

$$\alpha_{23}=-\alpha_{32}=\frac{\mu n}{bk^2},\alpha_{24}=-\alpha_{42}=-\frac{\lambda n}{abk^2},\ \alpha_{34}=-\alpha_{43}=-\frac{\lambda\mu_x-\mu\lambda_x}{ab^2}.$$

і

$$\beta_{12}=\beta_{21}=-\frac{\mu}{ank}+\frac{\lambda xy}{ank^2},\beta_{13}=\beta_{31}=\frac{\lambda\mu_y-\lambda_y\mu}{ab}+\frac{bx}{an^2k},$$

$$\beta_{14}=\beta_{41}=\frac{\mu\mu_y+\lambda\lambda_y}{a^2b},\beta_{23}=-\beta_{32}=\frac{\lambda}{bnk}-\frac{\mu xy}{bnk^2},$$

$$\beta_{24}=-\beta_{42}=\frac{\mu}{abnk}+\frac{\lambda xy}{abnk^2},\ \beta_{34}=-\beta_{43}=\frac{\mu\lambda_y-\lambda\mu_y}{ab^2}-\frac{x}{an^2k}.$$

Набір x, y, λ, μ є набором локальних координат у чотиривимірному підмноговиді двовимірних часоподібних площин простору Мінковського. Доведення цього факту проводиться аналогічно доведенню для підмноговиду просторовоподібних площин (див. п. 4.5.1).

Повертаючись до задачі про відновлення просторовоподібної поверхні з краєм простору ${}^1R_4$ за її грассмановим образом, наведемо наступні міркування.

Нехай координати x, y на просторовоподібній площини відносно її ортонормованого реперу є внутрішніми координатами просторовоподібної поверхні V^2 класу C^2 в ${}^1R_4$ з векторним рівнянням $\bar r(x,y)=(z^1(x,y),z^2(x,y),z^3(x,y),z^4(x,y))$. Нехай ця поверхня взаємно однозначно проектується на просторовоподібну поверхню $\tilde V^2$ тривимірного простору R_3 з рівнянням $z^1=0$. Тоді поверхня $\tilde V^2$ має рівняння $\bar r_1(x,y)=(0,z^2(x,y),z^3(x,y),z^4(x,y))$. Будемо вважати, що поверхня $\tilde V^2$ має взаємно однозначний сферичний образ. У якості рухомого репера поверхні V^2 оберемо репер (4.28) так, що вектори $\bar f^1$, $\bar f^2$ лежать у нормальній площині, а вектори $\bar f^3$, $\bar f^4$ – у дотичній, причому $\bar f^2$ є також нормаллю до $\tilde V^2$.

Можна показати, що координати просторовоподібної поверхні $\widetilde{V}^2$ можуть бути виражені через опорну функцію $h(x,y)$ в такий спосіб

$$z^2 = h - xh_x - yh_y, z^3 = h_x, \quad z^4 = h_y.$$

Після підстановки коефіцієнтів другої квадратичної форми $L = -\frac{h_{xx}}{k}$, $M = -\frac{h_{xy}}{k}$, $N = -\frac{h_{yy}}{k}$ і коефіцієнтів α_{ij}, β_{ij} дериваційних формул репера просторовоподібної поверхні в (4.28), одержимо основне рівняння у вигляді

$$A_y h_{xx} - (A_x + B_y)h_{xy} + B_x h_{yy} = 0,$$

де $A = \frac{k\lambda}{n} - \frac{xy}{n}\mu$, $B = n\mu$.

Зауважимо, що знак дискримінанта останнього рівняння збігається з кривиною грассманового образу просторовоподібної поверхні уздовж просторовоподібної нормалі $\bar{q}$ в тому випадку, коли грассманів образ просторовоподібний і буде протилежним, якщо грассманів образ часоподібний.

Для відновлення просторовопоібної поверхні у випадку гіперболічного типу основного рівняння має місце

Теорема 4.5. Нехай $\Gamma^2 \subset {}^T G(2,4)$ – двовимірна поверхня в ${}^3R_6$, задана радіус-вектором

$$\sigma(x,y) = \left(\frac{1}{ak}, \frac{x}{ak}, \frac{y}{ak}, \frac{A}{ak}, -\frac{B}{ak}, -\frac{yA + xB}{ak} \right),$$

де x, y – координати на півсфері сфери S^2 одиничного радіуса, введені вище. Нехай Ω – сферичний двокутник з вершинами на екваторі, що цілком лежить на півсфері, а Ω' – проекція Ω на дотичну площину до S^2 Функції $A(x,y)$,

$B(x,y)$ є функціями класу C^2 в області Ω' й разом зі своїми похідними до другого порядку включно обмежені в Ω'. Нехай виконуються умови

$$4A_yB_x - \left(A_x + B_y\right)^2 < 0,$$

$$\min_{\Omega'}\{|\,4A_yB_x - \left(A_x + B_y\right)^2\,|,|\,A_y\,|,|\,B_x\,|\} \geq n_0 = const > 0$$

і нехай на одній з кривих l, що обмежують область Ω, задана неперервна функція $\overline{R}(s) = (R^1(s), R^2(s), R^3(s), R^4(s))$, $R^3_s = -a_0R^1_s - sR^2_s$, $R^4_s = -A|_l\, R^1_s + B|_l\, R^2_s$, $a_0 = const$. Тоді існує єдина двовимірна регулярна просторовоподібна поверхня V^2 класу C^1 в ${}^1R_4$ така, що її грассманів образ збігається з поверхнею Γ^2 та край поверхні V^2 збігається з кривою $\overline{R} = \overline{R}(s)$.

Оскільки знову основне рівняння для відновлення просторовоподібної поверхні має такий самий вигляд, що й для поверхні евклідова простору, то за умови, що коефіцієнти рівняння задовольняють тим же вимогам, можемо говорити про те, що запропоноване в роботі [48] доведення теореми про відновлення поверхні евклідова простору є доведенням і останньої теореми.

4. 6. Висновки до розділу 4.

У четвертому розділі розглядається задача відновлення поверхні простору Мінковського за її грассмановим образом. Доведені деякі властивості підмноговидів грассманового многовиду та їх точкових образів. Сформульована і доведена теорема про вигляд диференціального рівняння другого порядку в частинних похідних, коефіцієнти якого визначаються заданим рівнянням грассманового образу Γ^2, і невідомою функцією якого є координата вектор-функції шуканої поверхні. Доведено локальні теореми існування поверхні з заданим грассмановим образом, описано процедуру відновлення. Доведені теореми існування у просторі Мінковського просторовоподібної та часоподібної поверхонь з краєм, що мають заданий грассманів образ.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вивчалась геометрія поверхонь простору Мінковського та їх грассманових образів. Відповідно до задач дисертаційного дослідження отримані такі основні наукові результати:

1. В підмножинах часоподібних, просторовоподібних і ізотропних площин грассманового многовиду простору Мінковського введена структура гладкого многовиду й визначено вигляд метрики на кожному з підмноговидів.

2. Для неізотропних поверхонь простору Мінковського отримано дериваційні формули рухомого репера і формули для тензора кривини.

3. Розглянуто поняття індикатриси нормальної кривини просторовоподібної та часоподібної поверхонь; отримані рівняння індикатриси й визначено вид індикатриси для кожного типу поверхні.

4. Отримані аналоги формули Картана для гауссової кривини неізотропної поверхні.

5. Вивчені властивості грассманового образу неізотропної двовимірної поверхні простору Мінковського.

6. Доведена теорема про необмеженість секційної кривини грассманового многовиду площин простору Мінковського. Виділені класи неізотропних поверхонь зі стаціонарними значеннями кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу поверхні.

7. Отримані афінна класифікація точок неізотропної поверхні та класифікація точок поверхні в залежності від значень секційної кривини грассманового многовиду уздовж площин, дотичних до грассманового образу поверхні. Знайдено умови еквівалентності цих класифікацій.

8. Сформульовані й доведені теореми про необхідні й достатні умови існування околу точки на Γ^2, який є грассмановим образом деякої поверхні простору ${}^1R_4$. Доведені теореми існування поверхні з краєм, що має заданий грассманів образ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акивис М. А. К дифференциальной геометрии грассманова многообразия / М. А. Акивис // Tensor. – 1982. – V.38, №2. – P.273-282.
2. Аминов Ю. А. О грассмановом образе двумерной поверхности в четырёхмерном евклидовом пространстве / Ю. А. Аминов // Укр. геом. сб. – 1980. – Вып.23. – С.3-16.
3. Аминов Ю. А. Определение поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу/ Ю. А. Аминов // Мат. сборник – 1982. – Т.117, №2. – С.147-160.
4. Аминов Ю. А. Определение поверхности в E^4 по вырожденному грассманову образу / Ю. А. Аминов, Т. С. Тарасова // Укр. геом. сб. – 1983. – Вып.26. – С.6-13.
5. Аминов Ю.А. Восстановление двумерной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу / Ю.А. Аминов // Мат. заметки. – 1984. – Т.36. – №2. – С.223-228.
6. Аминов Ю. А. О поверхностях в E^4 со знакопостоянным гауссовым кручением / Ю. А. Аминов // Укр. геом. сб. – 1988. – Вып.31. – С.3-14.
7. Аминов Ю. А. Геометрия подмногообразий / Ю. А. Аминов. – К.: Наукова думка, 2002.– 467 с.
8. Аминов Ю. А. О восстановлении двумерной замкнутой поверхности в E^4 по заданному замкнутому грассманову образу / Ю. А. Аминов, В. А. Горькавый, А. В. Святовец // Матем.физика, анализ, геометрия. – 2004. – №11. – С.3-24.
9. Аминов Ю. А. Решение проблемы построения подмногообразия по заданному грассманову образу / Ю. А. Аминов // Доповіді НАН України. – 2010. –т.5. – С.7-10.

10. Артыкбаев А. Геометрия в целом в плоском пространстве-времени / А. Артыкбаев, Д. Д. Соколов. – 1991. – Ташкент, изд-во ФАН, 180с.

11. Бакельман И. Я., Введение в дифференциальную геометрию в целом / И. Я. Бакельман, А. Л. Вернер, Б. Е. Кантор – М.: Наука, 1973. – 440 с.

12. Бессе А. Многообразия Эйнштейна / А. Бессе – М.: Мир, 1990. – 318 с.

13. Бикчантаев И. А. О деформациях двумерных поверхностей в E^4 с заданным изменением грассманова образа / И. А. Бикчантаев // Докл. расш. засед. семин. ин-та прикл. матем. им. И.Н. Векуа. – 1988. – т.3, №1. – С. 40-43.

14. Борисенко А. А. Об однозначной определенности многомерных подмногообразий в евклидовом пространстве по грассманову образу / А.А. Борисенко // Мат. заметки. – 1991. – т.51, № 1. – С. 8-15.

15. Борисенко А. А. Аффинная классификация точек многомерных поверхностей / А. А. Борисенко // Сиб. мат. журнал . – 1990. – Т.31, № 3. – С. 17-29.

16. Борисенко А. А. Классификация точек трехмерных поверхностей по грассманову образу / А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевский // Укр. геом. сб. – 1989. – Вып.32. – С. 11-27.

17. Борисенко А. А. О поверхностях с максимальной кривизной грассманова образа / А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевский // Мат. заметки. – 1990. – Т.48, № 3.

18. Борисенко А. А., Николаевский Ю. А. Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий / А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевский // УМН – 1991. – Т.46. Вып.2(278). – С. 41-80.

19. Вагнер В. В. Дифференциальная геометрия семейства R_k в R_n и семейства вполне геодзических S_{k-1} в S_{n-1} положительной кривизны / В.В. Вагнер // Мат. сборник. – 1942. – Т. 10(42), № 3. – С. 162-212.

20. Величко И. Г. Подмногообразия грассманова многообразия плоскостей псевдоевклидова пространства / И. Г. Величко, М. А. Гургенидзе,

П. Г. Стеганцева // Зб. праць інституту математики НАН України. – 2009. – 6. № 2. – С. 56-76.

21. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер – М.: Наука, 1967. – 576 с.

22. Гейдельман Р. М. Дифференциальная геометрия семейств подпространств в многомерных однородных пространствах / Р. М. Гейдельман // Итоги науки. Ин-т. науч. инф. АН СССР. Алгебра. Топология. Геометрия. – М., 1967 – т.13. – С. 273-340.

23. Горох В. П. О двумерных минимальных поверхностях псевдоевклидова пространства / В. П. Горох // Укр. геометрич. сборник. – 1988. – №31. – С. 36-47.

24. Горькавый В. А. Восстановлении подмногообразия в евклидовом пространстве по вырожденному в линию грассманову образу / В. А. Горькавый // Матем. заметки. – 1996. – № 5. – С. 681-691.

25. Горькавый В. А. Теорема редукции в проблеме восстановления подмногообразия в евклидовом пространстве по заданному грассманову образу / В. А. Горькавый // Мат.физика. Анализ. Геометрия. – 1996. – №4. – С. 309-333.

26. Горькавый В. А. Восстановление специальных подмногообразий евклидова пространства по заданному грассманову образу/ В. А. Горькавый // Мат.физика. Анализ. Геометрия. – 2000. - № 7. – С. 131-152.

27. Горькавый В. А. О конформных преобразованиях поверхностей в пространстве Минковского с сохранением грассманова образа / В. А. Горькавый // Изв. вузов. Математика. – 2006. – №7. – С. 11-21.

28. Гречнева М. А. О существовании поверхности псевдоевклидова пространства с заданным грассмановым образом / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Укр. мат. журнал. – 2016. – т.68. – №10. – С.1320-1329.

29. Гречнева М. А. О поверхностях со стационарными значениями стационарной кривизны грассманова образа / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Proceedings of the International Geometry Center. – 2016. – Vol. 9. – № 2. –pp. 42-48.

30. Гречнева М. А. Индикатриса нормальной кривизны евклидовой поверхности псевдоевклидова пространства / М. А.Гречнева, П. Г. Стеганцева // Тези міжнародної конференції «Геометрія в Одесі – 2015»: 25-31 травня 2015. – Одесса, 2015. – С. 72.

31. Гречнева М. А. Стационарные значения секционной кривизны грассманова многообразия псевдоевклидова пространства / М. А. Гречнева, П.Г.Стеганцева // Тезисы международной конференции «Геометрия и топология в Одессе – 2016»: 2-8 июня 2016 г. – Одесса, 2016. – С. 67.

32. Гречнева М. А. Классификация точек поверхности пространства Минковского / М.А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Тези міжнародної конференції «Алгебраїчні та геометричні методи аналізу». – Одеса, 31 травня – 5 червня 2017. – Одесса, 2017. – С. 143

33. Гречнева М. А. Существование в пространстве Минковского поверхности с краем, имеющей заданный грассманов образ / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Proceedings of the International Geometry Center. – 2018. – Vol.11. – № 1 . – pp. 27-38

34. Гречнева М. О. Відновлення поверхні з краєм простору Мінковського за її грассмановим образом / М. О. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Тези міжнародної конференції «Алгебраїчні та геометричні методи аналізу». – Одеса, 30 травня – 4 червня 2018. – Одесса, 2018. – С. 73

35. Гургенидзе М. А. О погружении грассманова многообразия псевдоевклидова пространства / М. А. Гургенидзе // Зб. праць інституту математики НАН України. – 2006. – 3. № 3. – С. 107-114.

36. Гургенидзе М. А. Гладкая структура на множестве думерных плоскостей в пространстве ${}^1R_4$ / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Труды участников междунар. школы-семинара по геометри и анализу памяти Н.В. Ефимова, 5-11 сент. 2006г. – Ростов-на-Дону, 2006 – С. 28

37. Гургенидзе М. А. Метрика в грассмановом многообразии псевдоевклидова пространства индекса 1 / М. А. Гургенидзе, П. Г. Стеганцева //

Тези доповідей міжнародної конференції «Геометрія в Одесі – 2007». – Одесса, 2007. – С. 47

38. Гургенидзе М. А. Геодезические в грассмановом многообразии псевдоевклидова пространства / М. А. Гургенидзе, П. Г. Стеганцева // Тези доповідей 7-ої міжнародної конференції з геометрії та топології. – Черкаси, 2007. – С. 16-17.

39. Гургєнідзе М. А. Про секційну кривину грасманова многовиду псевдоевклідового простору / М. А. Гургєнідзе, П. Г. Стєганцева // Тези доповідей міжнародної конференції «Геометрія в Одесі – 2008». – Одесса, 2008. – С. 43-44.

40. Гургєнідзе М. А. Грасманів образ поверхні псевдоевклідового простору / М. А. Гургєнідзе, П. Г. Стєганцева // Геометрия в Астрахани – 2007. Симметрии: теоеретические и геометрические аспекты: междун. семинар 11-14 сентября 2007г.: тез. докл. – Изд. дом «Астраханский университет», 2007. – С. 70.

41. Гургєнідзе М. О. Підмноговид ізотропних *l*-площин грассманова многовиду псевдоевклідового простору / М. О. Гургєнидзе, П. Г. Стєганцева // Тези доповідей міжнародної конференції «Геометрия в Астрахани – 2008». Астрахань. – 2008. – С. 69.

42. Гургенидзе М. А. Внутренняя геометрия грассманова многообразия псевдоевклидова пространства / М. А. Гургенидзе, П. Г. Стеганцева // Вісн. Харк. нац. ун-ту. Математика, прикл. математика і механіка. – 2008. – 826, №58. – С. 141-150.

43. Гургенидзе М. А. Подмногообразие изотропных плоскостей грассманова многообразия псевдоевклидова пространства/ М. А. Гургенидзе, П.Г. Стеганцева, Е.В. Величко // Тези доповідей міжнародної конференції «Геометрія в Одесі – 2009». – Одесса, 2009. – С. 46

44. Дубровин Б. А. Современная геометрия: методы и приложения / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко – М.: Наука, 1986, – 760 с.

45. Зубков А. Н. О преобразованиях R-поверхностей евклидова пространства с сохранением их грассманова образа / А. Н. Зубков, В. Т. Фоменко // Мат. заметки. – 1989. – Т.45, №1.- С. 20-27.

46. Иванов Д. В. Вполне геодезические подмножества многообразия направлений физического пространства / Д. В. Иванов // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2001. – т.279. – С. 141-153.

47. Иванов Д. В. Классификация вполне геодезический подмногообразий в многообразии направлений физического пространства/ Д. В. Иванов, С. Е. Козлов // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2001. – т.280. – С. 163-172.

48. Кизбикенов К. О. Двумерные поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве с данным грассмановым образом / К. О. Кизбикенов // ЛГПИ, Л.1983. 25 с. Рук. деп. В ВИНИТИ 5.12.83. №6568-83 ДЕП.

49. Козлов С. Е. Геометрия вещественных грассмановых многообразий / С.Е. Козлов // Части I, II Зап. научн. семин. ПОМИ. – 1997– т.246. – С. 84-107.

50. Козлов С. Е. Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Часть III. Зап. научн. семин. ПОМИ. – 1997. – т.246. – С. 108-129.

51. Козлов С. Е. Топология и Лоренц-инвариантная псевдориманова метрика многообразия направлений в физическом пространстве / С. Е. Козлов // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 1997. – т.246. – С.141-151.

52. Козлов С. Е. Геометрия вещественных грассмановых многообразий / С.Е. Козлов // Часть IV. Зап. научн. семин. ПОМИ. – 1998. – т.252. – С. 78-103.

53. Козлов С. Е. Геометрия вещественных грассмановых многообразий / С.Е. Козлов // ЧастьV. Зап. научн. семин. ПОМИ. – 1998. – т.252. – С. 104-120.

54. Козлов С. Е. Геометрия вещественных грассмановых многообразий / С.Е. Козлов // ЧастьVI. Зап. научн. семин. ПОМИ. – 1998. – т.252. – С. 121-133.

55. Козлов С. Е. Формы площади сферических изображений и аналоги теорем Гаусса и Гаусса-Бонне для двумерных поверхностей в четырехмерных римановых многообразиях / С. Е. Козлов // Вестн. ЛГУ. Мат., мех., астр. – Л. – 1985. – 18с.

56. Козлов С. Е. О сферических отображениях поверхностей в римановых многообразиях / С. Е. Козлов // Исследования по теории поверхностей в римановых многообразиях. – Л., 1984. – С. 85-97.

57. Козлов С. Е. Точки конформности сферических отображений погруженных двумерных поверхностей / С. Е. Козлов // Геометр. вопр. теории функций и множеств. – Калинин, 1985. – С. 106-119.

58. Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М.: Мир, 1964

59. Лаврентьев М. А. Основная теорема теории квазиконформных отображений плоских областей / Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1948. – Том 12. – №6. – с. 513-554.

60. Лейбина О. В. Аффинная классификация точек многомерных комплексних поверхностей / О. В. Лейбина // Вісн. Харк. нац. ун-ту. Математика, прикл. математика і механіка. – 2001. – №514. – С. 129-141.

61. Маазикас И. К римановой геометрии грассмановых многообразий неизотропных подпространств псевдоевкидова пространства / И. Маазикас // Уч. записки Тартуского ун-та. – 1974. – Вып.342. – С. 76-82.

62. Маазикас И. Конгруэнции 2-плоскостей с вполне геодезическими грассмановыми образами / И. Маазикас // Уч. записки Тартуского ун-та, - 1975. – Вып.355. – С. 57-75

63. Маазикас И. Грассманово отображение конгруэнций 2-плоскостей в евклидовых пространствах / И. Маазикас // Уч. записки Тартуского ун-та, - 1975. – Вып.355. – С. 76-85.

64. Николаевский Ю. А. О поверхностях, кривизна грассманова образа которых не меньше 1 / Ю. А. Николаевский // Укр. геом. сб. – 1990. – Вып.33. – С. 77-91.

65. Петров А. З. Пространства Эйнштейна / А. З. Петров. – М.: Физматгиз, 1961. – 463 с.

66. Положий Г. Н. Теорема о сохранении области для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений и ее применение / Г. Н. Положий // Мат. сборник. – 1953. – 32(74). – С.485-492

67. Постников М. М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. Лекции по геометрии. Семестр 2 / М. М. Постников. – М.: Наука. – 1979

68. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М.: Наука, 1967. – 664с.

69. Розенфельд Б. А. Дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей / Б. А. Розенфельд // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1947. – т. 11. – С. 283–308.

70. Розенфельд Б. А. Гиперкомплексы прямых в евклидовом и неевклидовых пространствах / Б. А. Розенфельд, О. В. Зацепина, П. Г. Стеганцева // Известия вузов. – 1990. –№3. – С. 57–66.

71. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства/ Б. А. Розенфельд. – М.: Наука, 1966. – 590с.

72. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства / Б. А. Розенфельд. – М.: Наука, 1969. – 547с.

73. Савельев В. М. О грассмановом образе четырёхмерного подмногообразия в E^6 / В. М. Савельев // Укр. геом. сб. – 1992. – Вып.35. – С.125-132.

74. Савельев В. М. О теории кривизны грассманова образа поверхности в евклидовом пространстве / В. М. Савельев // Мат.физика. Анализ. Геометрия. – 1994. - №1. – С. 520-528.

75. Савельев В. М. О грассмановом образе подмногообразий, коразмерность которых не превосходит размерности / В.М. Савельев // Мат.физика. Анализ. Геометрия. – 1998. - №5,1/2. – С. 125-133.

76. Стеганцева П. Г. Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства / П. Г. Стеганцева, М. А.Гречнева // Известия вузов. Математика. 2017, №2, С. 65-75.

77. Стеганцева П. Г. Эквивалентность аффинной и грассмановой классификаций точек поверхности пространства Минковского / П. Г. Стеганцева, М. А. Гречнева // Proceedings of the International Geometry Center – 2017. – Vol. 10. – №1. – pp. 59-66.

78. Федченко Ю. С. Геодезичні деформації поверхонь, що зберігають грасманів образ / Ю. С. Федченко // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2008. – Вип.6. – С. 66-71.

79. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. Ч.1 / Шилов Г. Е. – М.: Наука, 1972. – 624с.

80. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия / Л. П. Эйзенхарт. – М.: Государственное изд-во иностр. лит. – 1948. – 316 с.

81. Hangan Th. Structures pseudoriemanniennes sur l'ensemble des p-plans d'un espace pseudoeuclidien / Th. Hangan // Bull. Math. Soc. Sci. math. RSR. – 1965. – Vol.9. –1. – P. 265-278.

82. Hangan Th. On the Riemannian structure of the real and complex Grassmann manifolds / Th. Hangan // Tensor. – 1967. – Vol.18. – P. 26-31.

83. Hoffman D. The geometry of the generalilized Gauss map / D.Hoffman, R.Osserman // Memories AMS. – 1980. – 28. № 236 (1). – P. 1-105

84. Hoffman D. The Gauss map of surfaces in R^n / D. Hoffman, R. Osserman //J.Diff. geom. – 1983. – 18. № 1. – P. 733-754

85. Obata M. the Gauss map immersions of Riem, manifolds in space of const. Curvature / M. Obata // J. Diff. Geom. – 1968. – 2, №2. –P. 217-223.

86. Leichtweiss K. Zur Riemannschen Geometrie in Grassmanschen Mannigfultigkeiten / K. Leichtweiss // Math. Zeit. – 1961. - 76, № 4, – S.334-366.

87. Muto Y. The Gauss map of submanifold in a Euclidean space / Y. Muto // J. Math. Soc. Japan. – 1978. – 30, №1. – P. 85-100.

88. Muto Y. Submanifolds of a Euclidean space with homothetic Gauss map / Y. Muto // Ibid. – 1980. – 32, №3. – P. 531-555.

89. Muto Y. Deformation of a submanifold in Euclidean space with fixed Gauss image / Y. Muto // Geom. Dedic. – 1981. – 11, №1. - P. 1-18.

90. Muto Y. Deformability of a submanifolds in Euclidean space whose image by the Gauss map fixed / Y. Muto // proc. AMS. – 1979. – 76, № 1. - P. 140-144.

91. Stegantseva P.G. On the surfaces in Minkowski spase which correspond to the stationary values of the sectional curvature of the Grassmann manifold / P.G. Stegantseva, M. A. Grechneva // Abstracts of the International Conference “Modern Advances in Geometry and Topology”. – Kharkiv, 2016. – P. 48

92. Weiner J. L. The Gauss map for surfaces in 4-spase / J. L. Weiner // Math. Ann. – 1984. – V. 269, N4. – P. 541-560.

93. Weiner J. L. The Gauss map for surfaces Part I. Affine case / J. L. Weiner // Trans. AMS. – 1986. – V. 293, N.2. – P.341-446, Part II. Euclidean case / J. L. Weiner // Trans. AMS. – 1986. – V. 293, N.2. – P. 447-466.

94. Wong Y. C. Differential geometry of Grassman manifolds / Y. C. Wong // Proc. Math. Acad. Sci. USA. – 1967. – 57. – P. 589-594.

95. Wong Y. C. Sectional curvatures of Grassman manifolds / Y. C. Wong // Ibid. – 1960. – 60. – P. 75-79.

ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

1. Гургенидзе М. А. О погружении грассманового многообразия псевдоевклидова пространства / М. А. Гургенидзе // Зб. праць інституту математики НАН України. – 2006. – 3. №3. – С.107-114.

2. Гургенидзе М. А. Внутренняя геометрия грассманового многообразия псевдоевклидова пространства / М. А. Гургенидзе, П. Г. Стеганцева, // Вісн. Харк. нац. ун-ту. Математика, прикл. математика і механіка. – 2008. – 826, №58. – С.141-150.

3. Величко И.Г. Подмногообразия грассманового многообразия плоскостей псевдоевклидова пространства / И. Г. Величко, М. А. Гургенидзе, П. Г. Стеганцева // Зб. праць інституту математики НАН України. – 2009. – 6. №2. – С.56-76.

4. Гречнева М. А. О существовании поверхности псевдоевклидова пространства с заданным грассмановым образом / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Укр. мат. журнал. – 2016. – т.68, №10. – С.1320-1329

5. Гречнева М. А. О поверхностях со стационарными значениями стационарной кривизны грассманового образу / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Proceedings of the International Geometry Center. – 2016. – Vol. 9. – №2. – pp. 42-48.

6. Стеганцева П. Г. Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства / П. Г. Стеганцева, М. А. Гречнева // Известия вузов. Математика. – 2017. – №2. – С.65-75.

7. Стеганцева П. Г. Эквивалентность аффинной и грассмановой классификаций точек поверхности пространства Минковского. / П. Г. Стеганцева, М. А. Гречнева // Proceedings of the International Geometry Center. – 2017. – Vol. 10. – №1. – pp. 59-66.

8. Гречнева М. А. Существование в пространстве Минковского поверхности с краем, имеющей заданный грассманов образ / М. А. Гречнева, П.Г. Стеганцева // Proceedings of the International Geometry Center. – 2018. – Vol. 11 . – № 1. – pp. 27-38

Публікації, які засвідчують апробацію дисертації

9. Гургенидзе М. А. Гладкая структура на множестве двумерных плоскостей в пространстве ${}^1R_4$ / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Труды участников междунар. школы-семинара по геометри и анализу памяти Н.В. Ефимова, 5-11 сент. 2006г. – Ростов-на-Дону, 2006 – С.28

10. Гургенидзе М. А. Метрика в грассмановом многообразии псевдоевклидова пространства индекса 1 / М. А. Гургенидзе, П. Г. Стеганцева // Тези доповідей міжнародної конференції «Геометрія в Одесі – 2007». – Одесса, 2007. – С. 47

11. Гургенидзе М. А. Геодезические в грассмановом многообразии псевдоевклидова пространства / М. А. Гургенидзе, П. Г. Стеганцева // Тези доповідей 7-ої міжнародної конференції з геометрії та топології. – Черкаси, 2007. – С.16-17.

12. Гургєнідзе М. А. Грасманів образ поверхні псевдоевклідового простору / М. А. Гургєнідзе, П. Г. Стєганцева // Геометрия в Астрахани – 2007. Симметрии: теоеретические и геометрические аспекты: междун. семинар 11-14 сентября 2007г.: тез. докл. – Изд. дом «Астраханский университет», 2007. – С.70.

13. Гургєнідзе М. А. Про секційну кривину грасманова многовиду псевдоевклідового простору / М. А. Гургєнідзе, П. Г. Стєганцева // Тези доповідей міжнародної конференції «Геометрія в Одесі – 2008». – Одесса, 2008. – С.43-44.

14. Гургєнідзе М. О. Підмноговид ізотропних *l*-площин грассманова многовиду псевдоевклідового простору / М. О. Гургєнидзе, П.Г. Стєганцева //

Тези доповідей міжнародної конференції «Геометрия в Астрахани – 2008». Астрахань. – 2008. – С. 69.

15. Гургенидзе М. А. Подмногообразие изотропных плоскостей грассманова многообразия псевдоевклидова пространства/ М. А. Гургенидзе, П.Г. Стеганцева, Е. В. Величко // Тези доповідей міжнародної конференції «Геометрія в Одесі – 2009». – Одесса, 2009. – С. 46

16. Гречнева М. А. Индикатриса нормальной кривизны евклидовой поверхности псевдоевклидова пространства / М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева // Тези міжнародної конференції «Геометрія в Одесі – 2015»: 25-31 травня 2015. – Одесса, 2015. – С. 72

17. Гречнева М. А. Стационарные значения секционной кривизны грассманова многообразия псевдоевклидова пространства / М.А. Гречнева, П.Г. Стеганцева // Тезисы международной конференции «Геометрия и топология в Одессе – 2016»: 2-8 июня 2016 г. – Одесса, 2016. – С. 67

18. Stegantseva P. G. On the surfaces in Minkowski spase which correspond to the stationary values of the sectional curvature of the Grassmann manifold / P.G. Stegantseva, M.A. Grechneva // Abstracts of the International Conference "Modern Advances in Geometry and Topology". – Kharkiv, 2016. – P. 48

19. Стеганцева П. Г., Классификация точек поверхности пространства Минковского / П. Г. Стеганцева, М. А. Гречнева // Тези міжнародної конференції «Алгебраїчні та геометричні методи аналізу». – Одеса, 31 травня – 5 червня 2017. – Одесса, 2017. – С.143

20. Гречнева М. О. Відновлення поверхні з краєм простору Мінковського за її грассмановим образом / М. О. Гречнєва, П. Г. Стєганцева // Тези міжнародної конференції «Алгебраїчні та геометричні методи аналізу». – Одеса, 30 травня – 4 червня 2018. – Одесса, 2018. – С.73

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на наступних наукових конференціях та семінарах:

− міжнародній школі-семінарі з геометрії та аналізу пам’яті М.В.Єфімова (Абрау-Дюрсо, 2006);

− міжнародних конференціях «Геометрія в Одесі» (м. Одеса, 2007 − 2009, 2015-2016);

− міжнародній конференції з геометрії та топології (м. Черкаси, 2007);

− міжнародному семінарі «Геометрия в Астрахани – 2007, 2008» «Симметрии: теоретические и методические аспекты». (Астрахань, 2007, 2008);

− наукових семінарах кафедри алгебри та геометрії Запорізького національного університету (м. Запоріжжя − 2005-2009, 2015-2017);

− семінарі відділу диференціальних рівняннь та геометрії ФТІНТ ім. Б.І.Вєркіна (керівник – професор, д.ф.-м.н. Амінов Ю. А.), Харків, 2016;

− міжнародній конференції “Modern Advances in Geometry and Topology”, (Харків, 2016);

− міжнародній конференції «Алгебраїчні та геометричні методи аналізу» (м. Одеса, 2017-2018);

− Харківському міському геометричному семінарі (керівник – член-кореспондент НАН України, професор, д.ф.-м.н. О. А. Борисенко), Харків, 2017.