

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна
Національна академія наук України

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Андреев Кирило Миколайович

УДК 517.957

ДИСЕРТАЦІЯ
ХВИЛІ РОЗРІДЖЕННЯ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРІЗА:
АСИМПТОТИКИ ТА ІНТЕГРАЛИ РУХУ

01.01.03 – математична фізика
(Фізико-математичні науки)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ К. М. Андреев

Науковий керівник Єгорова Ірина Євгенівна, доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник

Харків – 2018

Анотація

Андреев К.М. Хвилі розрідження для рівняння Кортевега – де Фріза: асимптотики та інтеграли руху. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика. – Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна Національної академії наук України, Харків, 2018.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню розв'язку задачі Коші для рівняння Кортевега – де Фріза (КдФ) з початковими даними типу сходинки, що відповідають хвилі розрідження. У роботі вивчається асимптотична поведінка цього розв'язку за умови, що змінна часу є позитивною і прямує до нескінченності.

Методом дослідження асимптотик у дисертації є нелінійний метод найшвидшого спуску в застосуванні до векторних осциляційних задач Рімана – Гільберта (РГ). Він є ефективним у режимі, при якому обидві змінні, просторова та часова, прямують до нескінченності, але їхнє відношення змінюється слабо. На відміну від спадних початкових даних, для яких немає відмінностей, яку саме задачу РГ застосовувати при дослідженні асимптотик (за правими даними розсіювання або за лівими), в задачах з початковими умовами типу сходинки вибір постановки задачі РГ має принципове значення. Тому в дисертації поставлено відповідні задачі РГ як за правими, так і за лівими даними розсіювання, і доведено існування та єдиність їхніх розв'язків. За допомогою зсувів контурів стрибка, що становлять так званий механізм лінз, і з використанням методу g -функції, ці за-

дачі зведено до еквівалентних задач РГ, де матриці стрибка мало відрізняються, за винятком малих околів точок екстремумів, від явно розв'язуваних задач РГ зі сталими матрицями стрибків (модельних задач) при великих значеннях часу. У дисертації знайдено точні розв'язки асоційованих матричних і векторних модельних задач та розв'язано додаткові задачі параметрикса, що пов'язані з поведінкою розв'язку в околах точок екстремуму. Також проведено заключний асимптотичний аналіз, що математично строго обґрунтовує асимптотичне розвинення для хвилі розрідження при великих значеннях часу. Такий аналіз для задач із початковими умовами типу сходинки проведено вперше.

У дисертаційній роботі знайдено асимптотики хвилі розрідження для рівняння КдФ у трьох основних областях просторово-часової півплощини: у солітонній області, у середній області між переднім та заднім хвильовими фронтами, та в області позаду заднього хвильового фронту. Також досліджено вплив резонансу на перший та другий члени асимптотичного розвинення на краю неперервного спектра.

У роботі побудовано регуляризовані інтеграли руху у випадку асимптотично періодичних початкових умов задачі Коші для рівняння КдФ. Для початкових умов, що є асимптотично сталими, знайдено зображення цих інтегралів через дані розсіювання відповідного оператора Шрьодінгера.

Ключові слова: Рівняння Кортевега – де Фріза, хвиля розрідження, задача Рімана – Гільберта, інтеграли руху.

Abstract

Andreiev K.M. The rarefaction waves for the Korteweg-de Vries equation: asymptotics and the integrals of motion. – Qualification scientific paper, manuscript.

The thesis is concerned with the Cauchy problem solution for the Korteweg–de Vries equation with steplike initial data associated with the rarefaction waves. The long time asymptotic behavior of this solution is discussed in the regime when the ratio of the spatial and the time variables changes slowly.

By use of the nonlinear steepest descent method, the asymptotics of the solution was investigated in all principal regions of the space-time half-plane: in the soliton region, in the middle region between the leading and rear wave fronts, and in the region behind the rear wave front. The result generalizes previously known results.

The method is applied to studying of the vector Riemann-Hilbert (RH) oscillation problems associated with the right and left scattering data of the initial profile. The unique solvability of these RH problems is proved, in particular, in the presence of the discrete spectrum and possible resonances. Using the so-called lens and g -function mechanisms, as far as standard conjugation and deformation methods, these RH problems amount to the equivalent RH problems, with the jump matrices slightly differing from constant matrices when the time is large, except of small vicinities of finite number of the extrema points. The RH problems with the constant jump matrices (model problems) are solved explicitly. The additional parametrix RH problems are also solved, and the concluding asymptotic analysis is given. It justifies rigorously the asymptotic expansions for the rarefaction wave of the KdV equation.

The regularized integrals of motion are constructed for asymptotically finite gap

steplike solution for the KdV equation. In the case of the asymptotically constant initial data, the representation of the integrals of motion is given via the scattering data of the associated Schrödinger operator.

Keywords: Korteweg-de Vries equation, rarefaction wave, Riemann-Hilbert problem, the integrals of motion.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

[1] Андреев К. Н. Регуляризованные интегралы движения уравнения Кортевега – де Фриза в классе неубывающих функций / К. Н. Андреев, Е. Я. Хруслов // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, № 12. – С. 1587-1601.

[2] Андреев К. Н. Интегралы движения уравнения Кортевега – де Фриза в классе решений типа ступеньки / К. Н. Андреев // Допов. Нац. акад. наук Укр. – 2016. – Т. 9. – С. 7-13.

[3] Andreiev K. Rarefaction waves of the Korteweg–de Vries equation via nonlinear steepest descent / K. Andreiev, I. Egorova, T.-L. Lange, G. Teschl // J. Differential Equations. – 2016. – Vol. 261. – Pp. 5371-5410.

[4] Андреев К. Н. Единственность решения задачи Римана – Гильберта для волны разрежения уравнения Кортевега – де Фриза / К. Н. Андреев, И. Е. Егорова // Допов. Нац. акад. наук Укр. – 2017. – Т. 11. – С. 3-9.

[5] Andreiev K. On the long-time asymptotics for the Korteweg-de Vries equation with steplike initial data associated with rarefaction waves / K. Andreiev, I. Egorova // J. of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2017. – Vol. 4. – Pp. 325-343.

Публікації, які засвідчують апробацію дисертації

[6] Andreiev K. Regularized integrals of motion of the KdV equation in a class of non-decreasing functions / K. Andreiev // II International conference «Analysis and Mathematical Physics». – Kharkiv: book of abstracts. – June 16-20, 2014. – P. 30.

[7] Andreiev K. Regularized integrals of motion for the Korteweg–de Vries equation with steplike initial data / K. Andreiev // III International conference «Analysis and Mathematical Physics». – Kharkiv: book of abstracts. – June 15-19, 2015. – P. 17.

[8] *Andreiev K.* Rarefaction waves of the Korteweg–de Vries equation via nonlinear steepest descent / K. Andreiev, I. Egorova // IV International conference «Analysis and Mathematical Physics». – Kharkiv: book of abstracts. – June 13-17, 2016. – P. 16.

[9] *Andreiev K.* Regularized integrals of motion of the Korteweg–de Vries equation in the class of non-decreasing functions / K. Andreiev // Trilateral German-Russian-Ukrainian Summer School «Spectral Theory, Differential Equations and Probability». – Johannes Gutenberg Universitat Mainz – September 4-15, 2016.

[10] *Andreiev K.* The Korteweg–de Vries equation with steplike initial data as a Hamiltonian system / K. Andreiev // V International conference «Analysis and Mathematical Physics» dedicated to Vladimir A. Marchenko’s 95th birthday and the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine. – Kharkiv: book of abstracts. – June 19-24, 2017. – P. 26.

ЗМІСТ

| | |
|--|-----------|
| Вступ | 10 |
| Розділ 1. Метод оберненої задачі розсіювання (МОЗР) і його застосування | 16 |
| 1.1. МОЗР для рівняння КдФ зі спадними початковими умовами | 16 |
| 1.2. Інтеграл руху для рівняння КдФ в класі спадних розв'язків | 20 |
| 1.3. Задача розсіювання для оператора Шрьодінгера з потенціалом типу сходинки | 23 |
| 1.4. Метод задачі Рімана – Гільберта як модифікація МОЗР | 28 |
| Висновки до розділу 1 | 31 |
| Розділ 2. Асимптотика хвилі розрідження для рівняння КдФ в солітонній і середній областях | 32 |
| 2.1. Постановка задачі Рімана – Гільберта | 33 |
| 2.2. Область солітонів | 43 |
| 2.3. Зона розрідження. Зведення до модельної задачі. | 48 |
| 2.4. Розв'язок модельної задачі | 58 |
| 2.5. Задача параметрикса | 62 |
| 2.6. Завершення асимптотичного аналізу | 69 |
| Висновки до розділу 2 | 75 |
| Розділ 3. Асимптотика хвилі розрідження позаду заднього фронту хвилі | 77 |
| 3.1. Постановка задачі Рімана – Гільберта | 79 |
| 3.2. Зведення до модельної задачі | 85 |

| | |
|---|------------|
| 3.3. Задача параметрикса й заключний асимптотичний аналіз | 90 |
| Висновки до розділу 3 | 98 |
| Розділ 4. Регуляризовані інтеграли руху рівняння КдФ в класі розв’язків типу сходинки | 100 |
| 4.1. Асимптотично скінченнозонні розв’язки рівняння КдФ типу схо- динки | 100 |
| 4.2. Регуляризовані інтеграли руху у випадку лівого скінченнозонного фону | 103 |
| 4.3. Регуляризовані інтеграли руху у випадку сталого лівого фону . . . | 106 |
| 4.4. Рівняння КдФ з початковими умовами типу сходинки як гаміль- тонова динамічна система | 107 |
| 4.5. Зображення регуляризованих інтегралів руху через праві дані роз- сіювання | 109 |
| 4.6. Зображення регуляризованих інтегралів руху через ліві дані роз- сіювання | 112 |
| Висновки до розділу 4 | 114 |
| Висновки | 115 |
| Список використаних джерел | 117 |
| Додаток А. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації | 126 |

Вступ

Обґрунтування вибору теми дослідження.

З часів знаменитого відкриття К. Гарднера, Дж. Гріна, М. Крускала, Р. Міури (1967), які запропонували новий метод розв'язання рівняння Кортевега – де Фріза (КдФ), в сучасних дослідженнях з нелінійних еволюційних рівнянь велика увага приділяється двом взаємопов'язаним аспектам. Перший – метод оберненої задачі розсіювання (МОЗР), в основі якого лежить зображення Лакса для цілком інтегровних нелінійних еволюційних рівнянь та відповідний обернений спектральний аналіз лінійних операторів. Завдяки МОЗР вдалося не тільки побудувати важливі класи точних розв'язків цих рівнянь (солітонні, скінченно-зонні, раціональні), але й довести теореми існування розв'язків задачі Коші для різних класів початкових умов. Сучасною модернізацією цього методу є нелінійний метод найшвидшого спуску, що дозволяє дослідити асимптотичну поведінку розв'язку при великих значеннях часу. Це є «аналітичний» аспект проблеми. Другий, «алгебраїчний», аспект, пов'язаний з вивченням внутрішніх симетрій динамічних систем, розвивався паралельно і був ініційований важливим спостереженням, зробленим Л.Д. Фаддєєвим і В.Є. Захаровим (1971), а саме: всі рівняння, що розв'язні методом оберненої задачі, можна розглядати як нескінченновимірні гамільтонові цілком інтегровні (в сенсі Ліувілля) системи, для яких змінними типу «дія – кут» є деякі спектральні характеристики відповідного L -оператора Лакса. У зв'язку з цим виникла проблема побудови послідовної теорії нескінченновимірних цілком інтегровних динамічних систем. Цим двом аспектам і присвячено дисертаційну роботу, у якій вони вивчаються для рівняння КдФ в класі розв'язків типу сходинок, а саме розв'язків, які швидко спадають

при $x \rightarrow +\infty$ і прямують до ненульової додатної константи при $x \rightarrow -\infty$. Такий розв'язок називається хвилею розрідження.

Розв'язання оберненої задачі розсіювання для одновимірного оператора Шр'юдінгера на всій осі зі спадним потенціалом було проведено І. Кеєм, Г. Мозесом (1955), Л.Д. Фаддєєвим (1964), В.О. Марченко (1977), П. Дейфтом і Е. Трубовіцем (1979). Ці дослідження дозволили проінтегрувати рівняння КдФ у класі швидкоспадаючих розв'язків. Подальший розвиток МОЗР у теорії нелінійних еволюційних рівнянь дозволив вивчити деякі класи неспадаючих розв'язків, а саме: періодичні, скінченнозонні, розв'язки типу сходинки та інші. Дослідження в цьому напрямку використовували результати спектральної теорії та теорії розсіювання для оператора Шр'юдінгера з потенціалами відповідного класу. Зокрема, рівняння КдФ з початковими умовами типу сходинки було проінтегровано в працях В.С. Буслаєва, В.Н. Фоміна (1962), Е. Коен, Т. Каппелера (1984), І.Є. Єгорової, Г. Тешля (2011).

МОЗР дозволяє дослідити асимптотичну поведінку розв'язку рівняння КдФ при великих значеннях часу у так званій солітонній зоні. Цей метод також виявився ефективним при дослідженні асимптотики хвилі стиску рівняння КдФ в області позаду переднього хвильового фронту, де, як показано Є.Я. Хрусловим (1976), з'являються асимптотичні солітони, які не є пов'язаними з дискретним спектром. Найбільш ефективним методом дослідження асимптотичної поведінки розв'язків нелінійних інтегровних рівнянь при великих значеннях часу наразі є нелінійний метод найшвидшого спуску для осциляційної задачі Рімана – Гільберта (РГ), який було запропоновано С.В. Манаковим (1973), а також П. Дейфтом і С. Джоу (1993). Розвитку цього методу присвячено значну кількість праць. Метод застосовується у вивченні асимптотичної поведінки як розв'язків нелінійних інтегровних рівнянь, так і поліномів великого степеня, ортогональних відносно ваги, що залежить від великих значень параметра, також є ефе-

ктивним в теорії матриць великих розмірностей. Зокрема, цим методом вивчено асимптотичну поведінку хвилі стиску. Вперше ці дослідження було проведено В.П. Котляровим і О.О. Мінаковим (2010) для модифікованого рівняння КдФ та надалі узагальнено А. Буте де Монвель, В.П. Котляровим, Д.Г. Шепельським (2010) для нелінійного рівняння Шрьодінгера. Для рівняння КдФ аналогічні результати отримано І.Є. Єгоровою, З.М. Гладкою, Г. Тешлем (2013). Хвиля розриву цим методом раніше не вивчалась, і відповідні дослідження є основним сюжетом даної дисертаційної роботи.

У 1971 р. В.Є. Захаров і Л.Д. Фаддєєв побудували теорію рівняння КдФ як цілком інтегрованої гамільтонової системи. Для спадних початкових умов було введено симплектичну структуру на відповідному многовиді, а також знайдено зображення для локальних щільностей (інтегралів руху) в термінах даних розсіювання й у термінах змінних типу «дія – кут». У випадку розв'язків типу сходінки локальні щільності не спадають, тому відповідні інтеграли розбігаються. У дисертації побудовано локальні щільності, для яких відповідні інтеграли збігаються, а також отримано зображення цих інтегралів через дані розсіювання і побудовано симплектичну форму для відповідної динамічної системи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано у математичному відділенні Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України. Результати дисертації є складовою частиною держбюджетних науково-дослідних робіт за темами: «Геометричні та асимптотичні методи теорії крайових задач математичної фізики» (номер державної реєстрації 0116U005036), «Матричні та диференціальні оператори та їх застосування у квантовій інформатиці, інтегрованих системах та статистичній фізиці» (номер державної реєстрації 0116U005035).

Мета і завдання дослідження. Мета дисертації полягає у дослідженні асимптотичної поведінки при великих значеннях часу розв'язків задачі Коші для рів-

няння КдФ, що відповідають хвилі розрідження, та у побудові регуляризованих інтегралів руху.

Завдання дослідження:

- аналіз асимптотичної поведінки хвилі розрідження для рівняння КдФ в основних областях просторово-часової півплощини для загальних початкових умов, що допускають наявність резонансу;
- виведення точних формул для першого та другого членів асимптотичного розвинення при великих значеннях часу і повне обґрунтування цих асимптотик у всіх принципових областях просторово-часової півплощини;
- отримання регуляризованих інтегралів руху для асимптотично періодичних розв'язків рівняння КдФ типу сходинки і виведення зображення цих інтегралів через дані розсіювання початкових умов у випадку сталих фонів.

Об'єктом дослідження є розв'язок задачі Коші для нелінійного рівняння КдФ на всій осі з початковими умовами типу сходинки.

Предметом дослідження є розв'язок векторної задачі Рімана – Гільберта, що відповідає хвилі розрідження, а також регуляризовані інтеграли руху для відповідної динамічної системи.

Методи дослідження. Для дослідження асимптотичної поведінки розв'язку використано нелінійний метод найшвидшого спуску для осциляційної задачі Рімана – Гільберта у векторній постановці. Для побудови регуляризованих інтегралів руху застосовано метод оберненої задачі розсіювання для одновимірного рівняння Шрьодінгера на всій осі з потенціалом типу сходинки.

Наукова новизна одержаних результатів. Всі результати, отримані в дисертації, є новими і полягають у наступному:

- в рамках застосування нелінійного методу найшвидшого спуску поставлено і досліджено векторні задачі Рімана – Гільберта, які є асоційованими з правими та лівими даними розсіювання. Ці розв'язки використано для

опису асимптотичної поведінки розв'язку задачі Коші для рівняння КдФ з початковими умовами типу сходінки, що відповідають хвилі розрідження;

- в основних областях просторово-часової півплощини отримано перший та другий члени асимптотичного розвинення при великих значеннях параметру часу розв'язку задачі Коші для рівняння КдФ з початковими умовами типу сходінки, що відповідають хвилі розрідження. Це асимптотичне розвинення є математично строго обґрунтованим;
- побудовано регуляризовані інтеграли руху у випадку асимптотично періодичних початкових умов задачі Коші для рівняння КдФ. Для початкових умов на сталих фонах знайдено їх зображення через дані розсіювання (в термінах змінних типу «дія-кут»).

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Одержані результати й розвинені методи можуть бути використані при вивченні поведінки розв'язку рівняння КдФ та інших важливих класів цілком інтегровних рівнянь у різних асимптотичних режимах. Результати, які одержані в дисертації, можуть бути корисними в дослідженнях у галузі математичної фізики, що проводяться в Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України (м. Харків), в Інституті математики НАН України (м. Київ), на факультеті математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна та на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка, на математичному факультеті Віденського університету (Австрія).

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації отримані автором самостійно. У роботах, які виконані у співавторстві, авторство розподілено таким чином: у роботі [2] Є.Я. Хруслову належить постановка задачі; у роботі [7] І.Є. Єгоровій належить постановка задачі та ідея доведення теореми 2.5,

Г. Тешль є автором вступу та рисунків статті, Т.-Л. Лянге – автором леми 4.2. У роботах [9,10] постановка задач належить науковому керівнику І.Є. Єгоровій.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на міжнародних наукових конференціях:

- II International Conference «Analysis and Mathematical Physics» (Харків, 2014);
- III International Conference «Analysis and Mathematical Physics» (Харків, 2015);
- IV International Conference «Analysis and Mathematical Physics» (Харків, 2016);
- A trilateral German-Russian-Ukrainian summer school «Spectral Theory, Differential Equations and Probabilit» (Mainz, Germany, 2016);
- V International Conference «Analysis and Mathematical Physics» dedicated to Vladimir A. Marchenko's 95th birthday and the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine (Харків, 2017).

Результати дисертації доповідалися й обговорювалися на наукових семінарах:

- наукові семінари відділів диференціальних рівнянь і геометрії та математичної фізики Фізико-технічного інституту імені Б.І. Веркіна НАН України;
- науковий семінар математичного відділення Фізико-технічного інституту ім. Б.І. Веркіна НАН України (керівник: академік НАН України, д.ф.-м.н., професор Є.Я. Хруслов).

Публікації. Результати дисертації опубліковано у 10 наукових публікаціях, в тому числі у 5 статтях [1–3, 28, 65] у спеціалізованих виданнях, і у 5 тезах виступів на конференціях [29–33].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел, який містить 71 найменування та складає 9 сторінок. Загальний обсяг роботи становить 128 сторінок. Основні результати, що винесені на захист, викладено в розділах 2-4.

Автор щиро вдячний Євгену Яковичу Хруслову й Ірині Євгенівні Єгоровій за постановку задач і численні обговорення.

РОЗДІЛ 1.

Метод оберненої задачі розсіювання (МОЗР) і його застосування

Цей розділ є оглядовим. У ньому описано основи методу оберненої задачі розсіювання (МОЗР) у застосуванні до рівняння КдФ. Також показано, як цей метод застосовується для отримання інтегралів руху у випадку швидкоспадного розв'язку, і пояснено деякі принципи нелінійного методу найшвидшого спуску для осциляційних задач Рімана – Гільберта, який прийнято вважати модифікацією МОЗР, і який є найбільш ефективним у дослідженні асимптотик розв'язку при великих значеннях часу.

1.1. МОЗР для рівняння КдФ зі спадними початковими умовами

МОЗР бере свій початок зі знаменитої роботи Гарднера, Гріна, Крускала і Міури [61], в якій показано, що рівняння Кортевега – де Фріза (КдФ)

$$q_t(x, t) - 6q(x, t)q_x(x, t) + q_{xxx}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (1.1)$$

можна розв'язувати за допомогою оберненого спектрального аналізу асоційованого оператора Шрьодінгера

$$L(t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x, t). \quad (1.2)$$

Подальший розвиток цього методу почався з робіт, в яких було розкрито алгебраїчний механізм, що лежить в основі МОЗР ([57]), і побудовано теорію рівняння КдФ як гамільтонової системи [12, 48]. У теперішній час література по

МОЗР налічує сотні статей, огляд яких має значний об'єм. Тому ми процитуємо монографії [21, 38, 45], які містять посилання на численні оглядові роботи в цьому напрямку.

У 1968 році П. Лакс ввів поняття пари лінійних операторів, асоційованих з рівнянням КдФ – пари Лакса $\{L, P\}$, в термінах якої це нелінійне рівняння є еквівалентним рівнянню

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [P, L],$$

де в правій частині знаходиться комутатор операторів. Тут $L(t)$ – це оператор Шрьодінгера (1.2) з потенціалом $q(x, t)$, а оператор $P(t)$ має вигляд

$$P(t) = -4\partial_x^3 + 6q(x, t)\partial_x + 3q_x(x, t).$$

Наявність пари Лакса дозволяє проінтегрувати рівняння КдФ як у разі спадних початкових умов, так і для більш складних початкових умов, наприклад, скінченнозонних або умов типу сходинки. Розглянемо механізм методу оберненої задачі розсіювання на класичному прикладі спадних початкових умов $q(x, 0) =: q(x)$. Припустимо, що функція $q(x)$ спадає досить швидко:

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^m) |q(x)| dx < \infty, \quad m \geq 1. \quad (1.3)$$

За такої умови рівняння

$$L(0)y(x) = -\frac{d^2}{dx^2}y(x) + q(x)y(x) = k^2y(x), \quad k \in \mathbb{C}^+, \quad (1.4)$$

має два розв'язки Йоста $\phi(k, x)$, $\phi_1(k, x)$ із асимптотичною поведінкою $\phi(k, x) \sim e^{ikx}$ при $x \rightarrow +\infty$, $\phi_1(k, x) \sim e^{-ikx}$ при $x \rightarrow -\infty$. Їх можна зобразити у вигляді

$$\begin{aligned} \phi(k, x) &= e^{ikx} + \int_x^\infty K(x, y)e^{iky} dy, \\ \phi_1(k, x) &= e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x K_1(x, y)e^{-iky} dy, \end{aligned} \quad (1.5)$$

де $K(x, y)$, $K_1(x, y)$ є ядрами операторів перетворення. Ці ядра є дійсними і спадають зі швидкістю, яка залежить від швидкості спадання потенціалу

$$|K(x, y)| \leq C \int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} |q(s)| ds, \quad |K_1(x, y)| \leq C_1 \int_{-\infty}^{\frac{x+y}{2}} |q(s)| ds,$$

де C , C_1 є деякими додатними константами. Потенціал рівняння (1.4) є пов'язаним з операторами перетворення формулою

$$q(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x) = 2 \frac{d}{dx} K_1(x, x).$$

Спектр оператора $L(0)$ складається з абсолютно неперервної частини, яка знаходиться на правій півосі, та зі скінченної кількості простих від'ємних власних значень $-\kappa_1^2, \dots, -\kappa_N^2$. Відповідні власні функції $\phi(i\kappa_j, x)$ і $\phi_1(i\kappa_j, x)$ в цих точках відрізняються на мультиплікативну сталу. Надалі нам знадобиться права нормувальна константа γ_j :

$$\gamma_j^{-1} = \int_{\mathbb{R}} \phi^2(i\kappa_j, x) dx.$$

Розв'язок Йоста і комплексно спряжені до них функції утворюють дві пари лінійно незалежних розв'язків при дійсних $k \neq 0$. Ці функції пов'язані між собою співвідношеннями розсіювання

$$\begin{aligned} T(k)\phi(k, x) &= R_1(k)\phi_1(k, x) + \overline{\phi_1(k, x)}, \\ T(k)\phi_1(k, x) &= R(k)\phi(k, x) + \overline{\phi(k, x)}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

де $T(k)$ – це коефіцієнт проходження, а $R(k)$ і $R_1(k)$ є правим та лівим коефіцієнтами відбиття відповідно. За правими даними розсіювання

$$\mathcal{S}(0) = \{R(k), k \in \mathbb{R}; -\kappa_j^2; \gamma_j, j = 1, \dots, N\}, \quad (1.7)$$

так само як і за лівими, потенціал відновлюється однозначно. Крім того, існують необхідні і достатні умови на $\mathcal{S}(0)$, що дозволяють відновити єдиним чином потенціал саме класу (1.3).

Ключовим моментом при розв'язанні оберненої задачі розсіювання є рівняння Гельфанда-Левітана-Марченко (ГЛМ), яке пов'язує між собою оператор перетворення і «узагальнене перетворення» Фур'є даних розсіювання

$$K(x, y) + F(x + y) + \int_x^\infty K(x, s)F(s + y)ds = 0,$$

$$\text{де } F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} R(k)e^{ikx} dk + \sum_{j=1}^N \gamma_j e^{-\kappa_j x}.$$

Це рівняння є основою МОЗР, відкритого в [61]. Наведемо основні принципи цього методу. З цією метою розглянемо задачу Коші для рівняння (1.1) із гладкими початковими умовами $q(x) \in C^8(\mathbb{R})$, що задовольняють (1.3) при $m \geq 4$. Якщо припустити, що існує розв'язок цієї задачі, що є швидкоспадає при кожному фіксованому значенні t , то за допомогою перетворення Лакса можна знайти залежність даних розсіювання рівняння $L(t)y = k^2 y$ від часу. Еволюція цих даних за часом виглядає наступним чином:

$$R(k, t) = R(k)e^{8ik^3 t}, \quad R(k) = R(k, 0), \quad \kappa_j(t) = \kappa_j, \quad \gamma_j(t) = \gamma_j e^{8i\kappa_j^3 t}. \quad (1.8)$$

Крім того, у випадку спадаючого потенціалу коефіцієнт проходження $T(k)$ не залежить від часу: $T(k, t) = T(k, 0)$. Визначимо новий набір даних розсіювання $\mathcal{S}(t)$ за формулами (1.8), і за цим набором побудуємо функцію

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} R(k)e^{ikx+8ik^3 t} dk + \sum_{j=1}^N \gamma_j e^{-\kappa_j x+8\kappa_j^3 t}.$$

Розв'яжемо при кожному фіксованому x праве рівняння ГЛМ

$$K(x, y, t) + F(x + y, t) + \int_x^{+\infty} K(x, s, t)F(s + y, t)ds = 0, \quad (1.9)$$

і відновимо розв'язок рівняння КдФ за формулою

$$q(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x, t). \quad (1.10)$$

Отже, схема розв'язку задачі Коші для рівняння КдФ (див. Рис. 1.1) виглядає наступним чином. На першому етапі ми знаходимо дані розсіювання $\mathcal{S}(0)$ вигляду

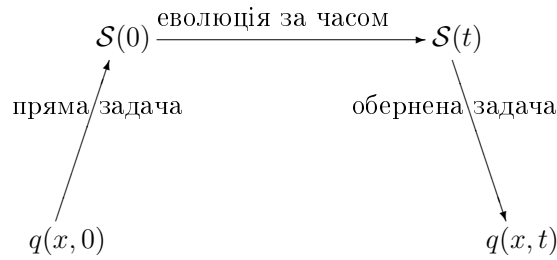


Рис. 1.1. Схематичне зображення етапів МОЗР

(1.7) у нульовий момент часу. Потім використовуємо еволюцію (1.8) і знаходимо деякий набір $\mathcal{S}(t)$ в момент часу t . Достатні умови, що характеризують цей набір як дані розсіювання деякого оператора Шрьодінгера зі спадним потенціалом, залежним від часу, виконуються при моменті $t = 1$ (див. (1.3), [17]). Після цього обернена задача розсіювання розв'язується єдиним чином за допомогою рівняння ГЛМ (1.9). Наприкінці функція $q(x, t)$ відновлюється за допомогою (1.10) і доводиться, що вона дійсно є розв'язком задачі Коші для рівняння КдФ (1.1) з початковими умовами $q(x)$.

Саме за цією схемою в [17] доведено існування і єдиність розв'язків задачі Коші для рівняння КдФ зі спадними початковими умовами і досліджено асимптотичну поведінку розв'язків при великих значеннях часу. Зокрема, доведено, що при $x > 0$ розв'язок розпадається на скінченну кількість солітонів, які відповідають дискретному спектру оператора Шрьодінгера ([21, 26]).

1.2. Інтеграли руху для рівняння КдФ в класі спадних розв'язків

Розглянемо ідею побудови інтегралів руху для рівняння КдФ (див. [12, 16, 49, 54, 57]). Припустимо, що початкова умова $q(x)$ належить класу Шварца V_0 , тобто є нескінченно диференційовною на всій осі і спадає швидше будь-якого степеня на нескінченності. Зобразимо відповідний розв'язок Йоста (1.5) рівняння (1.4)

при великому значенні $|k|$ у вигляді

$$\phi_1(k, x) = \exp \left\{ -ikx + \int_{-\infty}^x \sigma^{[q]}(k, \xi) d\xi \right\} \quad (1.11)$$

(надалі ми будемо використовуємо позначення $\sigma^{[q]}(\cdot)$, що наголошує залежність від потенціалу $q(x)$). Порівняння асимптотичного розвинення (1.11) із розвиненням для формули (1.6), дозволяє встановити, що

$$\log T^{-1}(k) = - \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^{[q]}(k, \xi) d\xi. \quad (1.12)$$

Права частина формули (1.12) є інтегралом руху при всіх k , оскільки коефіцієнт проходження не залежить від часу. Для знаходження явного вигляду динамічних інтегралів руху, підставимо розв'язок, який записано у вигляді (1.11), в рівняння Шрьодінгера (1.4). Тоді функція $\sigma^{[q]}(k, x)$ задовольняє рівнянню Ріккати

$$\sigma_x^{[q]}(k, x) + (\sigma^{[q]}(k, x))^2 - q(x) - 2ik\sigma^{[q]}(k, x) = 0, \quad (1.13)$$

причому $\sigma^{[q]}(x, k)$ можна зобразити у вигляді асимптотичного розвинення при великих значеннях k :

$$\sigma^{[q]}(k, x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^{[q]}(x)}{(2ik)^j}. \quad (1.14)$$

Підставимо (1.14) в рівняння (1.13) і порівняємо коефіцієнти при різних степенях k , тоді отримаємо рекурентні співвідношення:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{[q]}(x) &:= q(x), \\ \sigma_{j+1}^{[q]}(x) &:= -\frac{d}{dx} \sigma_j^{[q]}(x) - \sum_{l=1}^{j-1} \sigma_l^{[q]}(x) \sigma_{j-l}^{[q]}(x), \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.15)$$

Декілька перших коефіцієнтів мають наступний вигляд:

$$\sigma_2^{[q]}(x) = -q_x(x), \quad \sigma_3^{[q]}(x) = -q_{xx}(x) + q^2(x), \quad \sigma_4^{[q]}(x) = -q_{xxx}(x) + 2\frac{d}{dx}q^2(x).$$

Зауважимо, що $\sigma_2^{[q]}(x)$ і $\sigma_4^{[q]}(x)$ є повними похідними за змінною x . Можна перевірити, що таку властивість мають всі $\sigma_{2j}^{[q]}(x)$. Тому для швидкоспадних розв'язків

рівняння КдФ інтеграли з локальними щільностями $\sigma_{2j}^{[q]}(x)$ на всій осі x обертаються в нуль. Отже, в якості нескінченного набору законів збереження можна вибрати наступний набір відмінних від нуля інтегралів:

$$I_j = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{2j-1}^{[q]}(\xi) d\xi, \quad j = 1, 2, \dots$$

Із цього набору тільки три перших інтеграли мають простий фізичний зміст, а саме: в інтегралі руху $-I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi) d\xi$ міститься закон збереження, інтеграл $2I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} q^2(\xi) d\xi$ пов'язано з трансляційною інваріантністю рівняння КдФ, а інтеграл $-\frac{1}{2}I_3 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (q_x^2(\xi) + 2q^3(\xi)) d\xi$ є функцією Гамільтона для рівняння КдФ і має сенс енергії. Інтеграли I_j при $j > 3$ не мають простої механічної інтерпретації. У розділі 4 ми узагальнюємо поняття інтегралів руху для початкових умов Шварцевського типу для сходинки.

Наявність нескінченного набору інтегралів руху забезпечує основу повної інтегровності рівняння КдФ. Однак, реалізація цієї можливості вимагає змінних, із використанням яких можна виконати необхідні обчислення. Потрібні змінні є канонічними змінними типу «дія-кут», для яких можливе повне розділення операцій інтегрування. У роботі [12] рівняння КдФ розглядається як нескінченно-вимірна гамільтонова динамічна система на многовиді функцій класу Шварца V_0 . На цьому многовиді вводиться симплектична форма Ω :

$$\Omega(\delta_1 q, \delta_2 q) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^x dy \left(\delta_1 q(x) \cdot \delta_2 q(y) - \delta_1 q(y) \cdot \delta_2 q(x) \right), \quad (1.16)$$

де $\delta q(x)$ – це варіація потенціалу $q(x)$, причому $\delta q(x) \in V_0$. Гамільтоніан на V_0 визначається як

$$H[q] = \int_{-\infty}^{+\infty} (q^3(x) + \frac{1}{2} q_x^2) dx, \quad (1.17)$$

і рівняння КдФ зображується у вигляді

$$q_t = \frac{d}{dx} \frac{\delta H[q]}{\delta q},$$

де символ $\frac{\delta}{\delta q}$ означає похідну Фреше. Симплектична форма (1.16) і гамільтоніан (1.17) можуть бути виражені в термінах даних розсіювання. Відображення $q \rightarrow \mathcal{S}$ є перетворенням потенціалу $q(x)$ в дані розсіювання:

$$\delta_1 q(x) \rightarrow \delta_1 \mathcal{S}, \quad \delta_2 q(x) \rightarrow \delta_2 \mathcal{S}, \quad \Omega(\delta_1 q, \delta_2 q) = \Omega_{\mathcal{S}}(\delta_1 \mathcal{S}, \delta_2 \mathcal{S}).$$

Симплектична форма Ω в термінах даних розсіювання має вигляд

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathcal{S}}(\delta_1 \mathcal{S}, \delta_2 \mathcal{S}) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\delta_1 P(k) \delta_2 Q(k, t) - \delta_1 Q(k, t) \delta_2 P(k) \right) dk \\ &\quad + \sum_{l=1}^N (\delta_1 p_l \delta_2 r_l - \delta_1 r_l \delta_2 p_l), \text{ де} \\ P(k) &:= -\frac{k}{\pi} \log(1 - |R(k, t)|^2), \quad Q(k, t) := \arg T(k, t) - \arg R(k, t), \\ p_l &:= \kappa_l^2, \quad r_l(t) := 2 \log \left(i \gamma_l(t) \frac{d}{dk} T^{-1}(k, t) \Big|_{k=i\kappa_l} \right), \quad l = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Змінні $P(k), p_l, Q(k, t), r_l(t)$ є канонічними змінними типу «дія-кут». Гамільтоніан може бути виражений в термінах змінних типу «дія» $P(k, t), p_l$:

$$H[q] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k^3 P(k) dk - \frac{32}{5} \sum_{l=1}^N p_l^{3/2}.$$

У канонічних змінних рівняння КдФ має наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt} P(k) = 0, \quad \frac{d}{dt} p_l = 0, \quad \frac{d}{dt} Q(k, t) = 8k^3, \quad \frac{d}{dt} r_l(t) = -8\kappa_l^3.$$

1.3. Задача розсіювання для оператора Шрьодінгера з потенціалом типу сходинок

Основним об'єктом дослідження дисертації є вивчення асимптотик при $x \rightarrow \infty$ розв'язку $q(x, t)$ рівняння КдФ (1.1) з початковими умовами $q(x, 0) = q(x)$ типу сходинок

$$\begin{cases} q(x) \rightarrow 0, & \text{при } x \rightarrow +\infty, \\ q(x) \rightarrow c^2, & \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (1.18)$$

Нам буде потрібна модифікація МОЗР стосовно таких початкових умов. Реалізація цієї схеми ґрунтується на вивченні теорії розсіювання для рівняння Шрьодінґера з потенціалом вигляду (1.18). Цю задачу досить добре вивчено. Початок було покладено в роботі В.С. Буслаєва, В.Н. Фоміна [6], де було розв'язано пряму задачу розсіювання для потенціалу типу сходинки з першим сумовним моментом збурення, тобто для потенціалу, що задовольняє нерівності

$$\int_0^{\infty} (1 + |x|^m)(|q(x)| + |q(-x) - c^2|)dx < \infty, \quad (1.19)$$

при $m = 1$. Пізніше А. Коен і Т. Каппеллер [39] надали строге обґрунтування розв'язанню прямої та оберненої задачі для потенціалу з другим моментом ($m = 2$). Надалі цю задачу було досліджено при різних $m \geq 2$ ([4, 37, 40, 45, 50]). Нарешті, в роботі [52] пряму й обернену задачу розсіювання для потенціалу типу сходинки було повністю розв'язано методом Марченко для всіх моментів, починаючи з першого. Відповідну задачу Коші для рівняння КдФ при $m \geq 3$ було розв'язано в роботах [7, 24, 46, 47, 59].

Розглянемо задачу розсіювання для рівняння Шрьодінґера

$$Ly(x) = -\frac{d^2}{dx^2}y(x) + q(x)y(x) = k^2y(x), \quad k \in \mathbb{C}^+, \quad (1.20)$$

із потенціалом, який задовольняє (1.19) при $m \geq 1$. У цій задачі природним чином виникають два інших спектральних параметра, що пов'язані з фоновими асимптотиками для $q(x)$. У цьому випадку спектральний параметр k є пов'язаним із правим нульовим фоном. На лівому фоні ми вводимо інший спектральний параметр $k_1 = \sqrt{k^2 - c^2}$. Малюнок 1.2 демонструє взаємно однозначну відповідність між стандартним спектральним параметром $\lambda = k^2$ і параметром k_1 в природних областях їх існування. Тим самим спектральні об'єкти, які пов'язані із лівим фоном (розв'язки Йоста, коефіцієнти відбиття і проходження), для зручності ми можемо вважати функціями спектрального параметра k .

Перелічимо основні спектральні властивості оператора L ([52]), які в

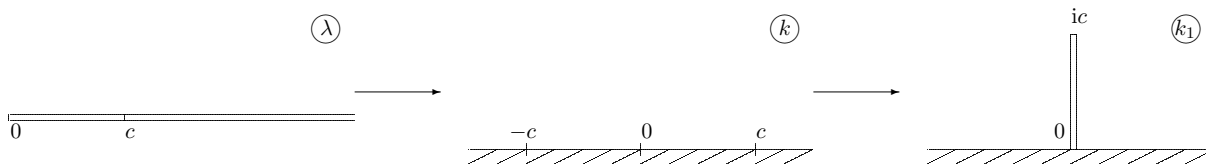


Рис. 1.2. Конформне відображення площин по λ , k , k_1

подальшому нам знадобляться:

- Спектр оператора L складається з абсолютно неперервної частини \mathbb{R}_+ і скінченної кількості від'ємних власних значень $-\kappa_1^2 < \dots < -\kappa_N^2 < 0$. У свою чергу, абсолютно-неперервний спектр складається з однократного спектра на інтервалі $[0, c^2]$ і спектра кратності два на інтервалі $[c^2, \infty)$. У термінах змінних k і k_1 , неперервний спектр відповідає $k \in \mathbb{R}$, а спектр кратності два – змінній $k_1 \in \mathbb{R}$.

- Рівняння (1.20) має два розв'язки Йоста $\phi(k, x)$ і $\phi_1(k, x)$, що задовольняють умови

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ikx} \phi(k, x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{ik_1 x} \phi_1(k, x) = 1, \quad \text{при } k \in \overline{\mathbb{C}^+}.$$

Розв'язки Йоста задовольняють співвідношенням розсіювання

$$T(k)\phi_1(k, x) = \overline{\phi(k, x)} + R(k)\phi(k, x), \quad k \in \mathbb{R},$$

$$T_1(k)\phi(k, x) = \overline{\phi_1(k, x)} + R_1(k)\phi_1(k, x), \quad k \in \mathbb{R} \setminus [-c, c],$$

де $T(k)$ і $R(k)$ (відповідно, $T_1(k)$ і $R_1(k)$) є правими (відповідно, лівими) коефіцієнтами проходження і відбиття. За необхідності ми розглядаємо ліві коефіцієнти як функції змінної k_1 та залишаємо позначення $T_1(k_1)$, $R_1(k_1)$.

- Вронскіан розв'язків Йоста

$$W(k) = \phi_1(k, x)\phi'(k, x) - \phi_1'(k, x)\phi(k, x)$$

має прості нулі в точках ik_j . В області $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ ще один нуль можливий при $k = 0$. Випадок $W(0) = 0$ називається випадком резонансу. При цьому $R(0) = 1$. За відсутності резонансу, тобто, коли $W(0) \neq 0$, ми маємо

$R(0) = -1$, і це є ситуацією загального положення (нерезонансний випадок).

- Розв'язки $\phi(i\kappa_j, x)$ і $\phi_1(i\kappa_j, x)$ – це праві та ліві власні функції оператора L . Введемо відповідні нормувальні константи $\gamma_j, \gamma_{1,j}$:

$$\gamma_j^{-1} = \int_{\mathbb{R}} \phi^2(i\kappa_j, x) dx, \quad \gamma_{1,j}^{-1} = \int_{\mathbb{R}} \phi_1^2(i\kappa_j, x) dx.$$

- Правий і лівий коефіцієнти проходження $T(k), T_1(k)$ продовжуються мероморфно в область \mathbb{C}^+ і мають прості полюси в точках $i\kappa_1, \dots, i\kappa_N$. Єдиним можливим нулем функції $T(k)$ є точка $k = 0$ у нерезонансному випадку. У резонансному випадку $T(k) \neq 0$ при всіх $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$. Лівий коефіцієнт проходження $T_1(k)$ має нулі в точках $k = \pm c$, а також особливість порядку $k^{-1/2}$ при $k = 0$ у резонансному випадку. У нерезонансному випадку ця функція є неперервною поблизу межі області.
- Правий коефіцієнт відбиття $R(k)$ існує тільки при $k \in \mathbb{R}$, а лівий коефіцієнт відбиття $R_1(k)$ тільки при $k \in \mathbb{R} \setminus [-c, c]$. Однак, якщо припустити додаткове спадання потенціалу

$$\int_0^{+\infty} e^{\kappa x} (|q(x)| + |q(-x) - c^2|) dx < \infty, \quad (1.21)$$

тоді коефіцієнт $R(k)$ матиме мероморфне продовження в смугу $0 < \text{Im } k < \kappa$, неперервне аж до межі $\text{Im } k = 0$ з полюсами в точках дискретного спектра, які потрапляють в цю смугу.

Відзначимо, що потенціал $q(x)$ однозначно відновлюється за правими даними розсіювання

$$\{R(k), k \in \mathbb{R}; -\kappa_l^2; \gamma_j, j = 1, \dots, N\}. \quad (1.22)$$

Його також можна відновити за лівими даними розсіювання ([6, 39, 52]), які для потенціалу типу (1.18) мають наступний вигляд (в термінах змінної

$$k_1 = \sqrt{k^2 - c^2}:$$

$$\{R_1(k_1), k_1 \in \mathbb{R}; |T_1(k_1)|, k_1 \in [0, ic]; -\kappa_{1,j}^2, \gamma_{1,j} > 0, j = 1, \dots, N\}. \quad (1.23)$$

Відзначимо, що у дисертації ми використовуємо формальні позначення $R_1(k_1) := R_1(k(k_1))$ та $T_1(k_1) := T_1(k(k_1))$, якщо це не призводить до непорозуміння.

Щодо застосування МОЗР для розв'язання відповідної задачі Коші для рівняння КдФ, то воно є подібним до спадного випадку (див. Рис. 1.1). А саме, спочатку потрібно знайти дані розсіювання вигляду (1.23) у нульовий момент часу. Далі отримується еволюція ([24]):

$$\begin{aligned} R_1(k_1, t) &= R_1(k_1, 0)e^{-8itk_1^3 - 12itk_1c^2}, & k_1 \in \mathbb{R}, \\ T_1(k_1, t) &= T_1(k_1, 0)e^{(-4ik_1^3 + 4ik_1^3 + 6ik_1c^2)t}, & (1.24) \\ \gamma_{1,j}(t) &= \gamma_{1,j}e^{-8\kappa_{1,j}^3t + 12c^2\kappa_{1,j}t}, \end{aligned}$$

і знаходиться набір $\mathcal{S}(t)$ в момент часу t . Ліве рівняння ГЛМ

$$K_1(x, y, t) + F_1(x + y, t) + \int_{-\infty}^x K_1(x, \xi, t)F_1(\xi + y, t)d\xi = 0, \quad y < x,$$

де

$$F_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} R_1(k_1, t)e^{-ik_1x} dk_1 + \sum_{j=1}^N \gamma_{1,j}e^{-\kappa_{1,j}x} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{ic} |T_1(k_1, t)|^2 e^{-ik_1x} \frac{|k|}{k_1} dk_1,$$

має єдиний розв'язок $K_1(x, y, t)$ при фіксованих значеннях x і t . Покладемо

$$q(x, t) = c^2 + 2\frac{d}{dx}K_1(x, x, t).$$

Далі можна довести, що $q(x, t)$ є розв'язком типу сходинки рівняння КдФ з тими ж самими фоновими константами, що й початкові умови. Швидкість спадання збурення розв'язку описується наступним результатом ([47]): припустимо, що початкові умови задачі Коші для рівняння КдФ (1.1) задовольняють нерівностям

$$\int_0^{+\infty} \left(\left| \frac{\partial^i}{\partial x^i} q(x) \right| + \left| \frac{\partial^i}{\partial x^i} (q(-x) - c^2) \right| \right) (1 + |x|^m) dx < \infty, \quad 0 \leq i \leq n,$$

при $m \geq 8$ і $n \geq m + 5$. Тоді при кожному $t > 0$ існує єдиний розв'язок $q(x, t)$ задачі Коші, що задовольняє

$$\int_0^{+\infty} \left(\left| \frac{\partial^i}{\partial x^i} q(x, t) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial t} q(x, t) \right| \right) (1 + |x|^{\frac{m}{2}-2}) dx < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^0 \left(\left| \frac{\partial^i}{\partial x^i} (q(x, t) - c^2) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial t} q(x, t) \right| \right) (1 + |x|^{\frac{m}{2}-2}) dx < \infty,$$

при $0 \leq i \leq n - m - 2$. Зауважимо, що нещодавно цей результат було поліпшено. В роботі [7] доведено, що при $m \geq 3$ і $n \geq m + 3$ існує класичний розв'язок, який є сумовним за змінною x при $m = 3$ і має перший момент при $m = 4$.

Відзначимо, що МОЗР можна застосувати для вивчення асимптотичної поведінки розв'язку рівняння КдФ типу сходінки при великих значеннях часу. Найбільш ефективним він є у солітонній області. У піонерській роботі [24] Є.Я. Хруслов вперше використав МОЗР для дослідження поведінки розв'язку типу ударної хвилі у зоні поблизу переднього фронту та довів існування асимптотичних солітонів, що не залежать від дискретного спектру задачі. Однак більш цікавою є асимптотика розв'язків типу сходінки у зоні між переднім та заднім хвильовими фронтами (середня область). Для вивчення цієї задачі у дисертаційній роботі буде застосовано метод векторної задачі Рімана – Гільберта.

1.4. Метод задачі Рімана – Гільберта як модифікація МОЗР

Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків типу сходінки при великих значеннях часу для нелінійних еволюційних рівнянь привертає велику увагу дослідників з початку 1970-х років [8, 9, 24, 25, 70]. У 1980х-1990х роках було досягнуто значного прогресу в розвитку теорії деформацій Уізема [71], яка пов'язана з розв'язками таких задач (див. [5, 35, 63]). В аналізі асимптотичної поведінки розв'язків при великих значеннях часу, цей підхід дозволив виділити окремі зони просторово-часової півплощини з якісно різними асимптотиками. Однак питання строгого обґрунтування отриманих результатів та повноти

асимптотичного опису залишались відкритими навіть для рівнянь зі спадними початковими умовами.

У 1993 р. П. Дейфт і С. Джоу [44] сформулювали й застосували до аналізу розв'язків модифікованого рівняння Кортевега – де Фріза так званий нелінійний метод найшвидшого спуску, який істотно підсумував результати попередніх досліджень О.Р. Ітса, С.В. Манакова та інших дослідників (див. [13, 60], а також [42], де наведено детальний огляд цих робіт). Основою даного методу є асимптотичний аналіз матричних задач Рімана – Гільберта (РГ), що залежать від великих значень параметра часу. По суті, задача РГ є варіантом реалізації оберненої задачі в рамках МОЗР для інтегрування нелінійних рівнянь, що мають пару Лакса. Як відомо ([20]), наявність пари Лакса є умовою сумісності двох лінійних звичайних диференціальних рівнянь, які додатково залежать від спектрального параметра. Сутність нелінійного методу найшвидшого спуску для задач Коші зі спадними початковими умовами полягає в послідовному деформуванні контуру (у комплексній площині спектрального параметра) і матриці стрибка відповідної задачі РГ таким чином, що відмінність матриці стрибка від одиничної матриці з ростом часу стає малою всюди на контурі, за винятком малих околів скінченної кількості критичних точок. Сумарний внесок цих точок, який після відповідного масштабування веде до точно розв'язуваних локальних задач РГ, дає асимптотичні формули, що детально описують спадання розв'язку з ростом часу. При цьому важливою обставиною є можливість контролю похибки (якщо вона є) при кожному кроці деформації, і, отже, можливості строгого обґрунтування отриманих асимптотик.

Наступним важливим кроком у розвитку нелінійного методу найшвидшого спуску стало використання так званого «механізму g -функції» в ситуаціях експоненціального зростання з часом деяких елементів матриці стрибка початкової задачі РГ на певних частинах початкового контуру. Цей метод полягає в заміні

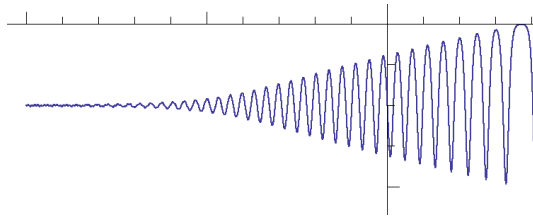


Рис. 1.3. Асимптотична поведінка розв'язку типу ударної хвилі.

фазової функції в експонентах, що входять в елементи матриці стрибка початкової задачі РГ, на деяку аналітичну функцію. Цю функцію обирають таким чином, щоб після застосування відповідної трикутної факторизації, на деяких частинах контуру залишалися би матриці стрибка спеціального виду, які не залежать від спектрального параметра, а на інших частинах контуру отримані матриці стрибка були б близькими до одиничних при великих значеннях часу. Це дозволило б явно розв'язати відповідні межові «модельні» задачі РГ. Відзначимо, що задача РГ формулюється як задача аналітичного спряження функцій спектральної змінної, а x і t (просторова й часова змінні початкового нелінійного рівняння) тут є параметрами, при цьому залежність матриці стрибка від них міститься саме в фазовій функції. Для початкових умов типу сходинки механізм g -функції був розвинений для модифікованого рівняння КдФ ([55]). Для рівняння КдФ метод задачі РГ було застосовано в роботі [59] з метою вивчення асимптотичної поведінки розв'язку задачі Коші з початковими умовами, які відповідають ударній хвилі (хвилі стиснення). Це дослідження було проведено методом векторної задачі РГ. Також було доведено, що в середній області $-6c^2t < x < 4c^2t$ розв'язок зображується у вигляді еліптичної хвилі і асимптотично співпадає з формулою Гуревича-Пітаєвського ([8]), яка отримана на фізичному рівні строгості. Якісний вигляд асимптотики показано на Рис. 1.3.

Метою розділів 2 і 3 дисертаційної роботи є демонстрація основних особливостей застосування нелінійного методу найшвидшого спуску до задач асимптотичного аналізу для рівняння КдФ (1.1) із початковими умовами, що задоволь-

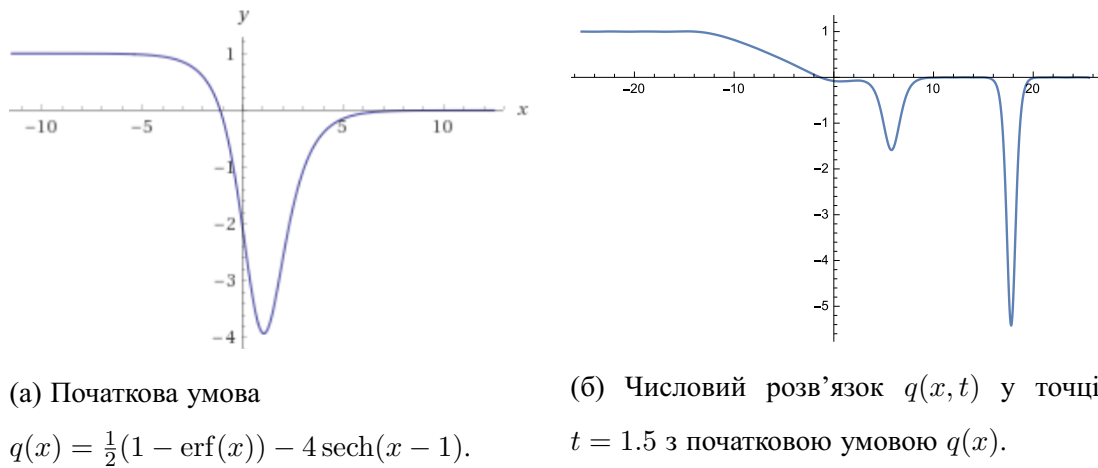


Рис. 1.4.

няють умовам (1.18), тобто відповідають хвилі розрідження.

Числові розрахунки свідчать, що при великих значеннях часу асимптотична поведінка розв'язку має вигляд, як зображено на Рис. 1.4. Отже можна виділити три основні області просторово-часової півплощини $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ з різною поведінкою розв'язку: (1) область $x > 0$ попереду переднього хвильового фронту, де розв'язок є асимптотично близьким до суми солітонів; (2) середня область $-6c^2t < x < 0$, де $q(x, t) \approx -\frac{x}{6t}$; (3) область $x < -6c^2t$, де розв'язок є асимптотично близьким до лівої фонової константи c^2 .

Висновки до розділу 1

У розділі 1 міститься огляд відомих результатів та методів, які мотивують дослідження, що проведено у дисертаційній роботі. Зокрема, у першому розділі описано метод оберненої задачі розсіювання для рівняння Кортевега – де Фріза зі спадними початковими умовами та умовами типу сходінки. Також обговорюються особливості нелінійного методу найшвидшого спуску для задачі Рімана – Гільберта й гамільтонова теорія для рівняння Кортевега – де Фріза та асоційовані інтеграли руху у випадку спадних початкових умов.

РОЗДІЛ 2.

Асимптотика хвилі розрідження для рівняння

КдФ в солітонній і середній областях

У цьому розділі ми вивчаємо асимптотичну поведінку при великих значеннях часу розв'язку задачі Коші для рівняння КдФ (1.1) із початковими умовами типу сходінки, що задовольняють умові (1.21) із деяким $\kappa > 0$, а також додатковій умові для похідних, тобто

$$\int_0^{+\infty} e^{\kappa x} (|q(x)| + |q(-x) - c^2|) dx < \infty, \quad x^3 q^{(i)}(x) \in L_1(\mathbb{R}), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (2.1)$$

Відзначимо, що незважаючи на експоненціально швидке спадання початкових умов до своїх асимптот, метод оберненої задачі розсіювання, який описаний в розділі 1, гарантує існування класичного розв'язку (з трьома неперервними похідними за змінною x і однієї за змінною t) тільки в класі

$$\int_0^{+\infty} (1 + |x|) (|q(x, t)| + |q(-x, t) - c^2|) dx < \infty. \quad (2.2)$$

Ми не вимагаємо значної гладкості початкових умов, і використовуємо лише мінімальну умову (2.1) (див. [7]). Як було зазначено в підрозділі 1.4, розв'язок цієї задачі має різний характер асимптотик в трьох основних областях просторово-часової півплощини $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Даний розділ дисертації присвячено аналізу асимптотик для хвилі розрідження в солітонній області $x > \epsilon_1 t$ і в середній області $(-6c^2 + \epsilon_2)t < x < -\epsilon_2 t$, де $\epsilon_{1,2}$ є довільними малими додатними константами. Ми застосовуємо нелінійний метод найшвидшого спуску для задачі РГ у векторній постановці. При цьому ми отримуємо не тільки асимптотику основного члена, але й формулу другого члена асимптотичного розвинення. Цю асимптотику буде строго обґрунтовано шляхом розв'язання відповідної задачі параметрикса.

2.1. Постановка задачі Рімана – Гільберта

Нехай $q(x, t)$ є розв'язком задачі Коші (1.1), (2.1), тобто задовольняє нерівності (2.2). Розглянемо спектральну задачу для асоційованого оператора Шрьодінгера

$$(L(t)y)(x) := -\frac{d^2}{dx^2}y(x) + q(x, t)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$ є стандартним спектральним параметром.

Ми будемо використовувати наступні позначення. Нехай $\mathcal{D} := \mathbb{C} \setminus \Sigma$, де $\Sigma = \Sigma_U \cup \Sigma_L$, $\Sigma_U = \{\lambda^U = \lambda + i0, \lambda \in [0, \infty)\}$, $\Sigma_L = \{\lambda^L = \lambda - i0, \lambda \in [0, \infty)\}$, причому індекси U і L означають «верхній» і «нижній». Тим самим, межа області \mathcal{D} містить дві сторони розрізу уздовж інтервалу $[0, \infty)$ з різними точками λ^U і λ^L на різних сторонах. У рівнянні (2.3) спектральний параметр λ належить множині $\text{clos}(\mathcal{D})$, де $\text{clos}(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \cup \Sigma_U \cup \Sigma_L$. Поряд з λ ми будемо використовувати вищенаведені спектральні параметри k і k_1 :

$$k = \sqrt{\lambda}, \quad k_1 = \sqrt{\lambda - c^2}, \quad \text{де } k > 0 \text{ і } k_1 > 0, \quad \text{при } \lambda^U > c^2.$$

Функції $k(\lambda)$ і $k_1(\lambda)$ конформно відображають область \mathcal{D} на області $\mathfrak{D} := \mathbb{C}^+ \cup \mathfrak{D}_1$ і $\mathfrak{D}_1 := \mathbb{C}^+ \setminus (0, ic]$ відповідно.

На вертикальних розрізах позначимо буквами l і r ліву та праву сторони розрізів. Оскільки існує взаємно однозначна відповідність між замиканнями областей $\text{clos } \mathcal{D}$, $\text{clos } \mathfrak{D} = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ і $\text{clos } \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_1 \cup \mathbb{R} \cup [0, ic]_r \cup [0, ic]_l$, будемо використовувати формальне позначення $f(k)$ або $f(k_1)$ або $f(\lambda)$ для одного й того ж значення функції $f(\lambda)$ в залежності від зручності використання того чи іншого спектрального параметра. Зокрема, $k > 0$ відповідає параметру $\lambda^U \in \mathbb{R}^+$, а $k < 0$ – параметру λ^L . Для функцій, що визначені на множині Σ , ми будемо іноді використовувати позначення $f(k)$ і $f(-k)$ для опису значень в симетричних точках λ^U і λ^L .

Зауважимо, що потенціал $q(x, t)$, де t розглядається як параметр, задовольняє

умові (2.2), отже для оператора $L(t)$ справедливі ті ж самі спектральні властивості, які вже наведено у підрозділі 1.3 ([52]). Ми перелічимо ці властивості ще раз, акцентуючи увагу на їх залежності від часу:

- Спектр оператора $L(t)$ складається з абсолютно неперервної частини \mathbb{R}_+ і скінченної кількості від'ємних власних значень $-\kappa_1^2 < \dots < -\kappa_N^2 < 0$ та не залежить від t .
- Рівняння (2.3) має два розв'язки Йоста $\phi(\lambda, x, t)$ і $\phi_1(\lambda, x, t)$, які відповідають умовам:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ikx} \phi(\lambda, x, t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{ik_1 x} \phi_1(\lambda, x, t) = 1, \quad \text{при } \lambda \in \text{clos } \mathcal{D}. \quad (2.4)$$

Розв'язки Йоста задовольняють співвідношенням розсіювання

$$T(\lambda, t)\phi_1(\lambda, x, t) = \overline{\phi(\lambda, x, t)} + R(\lambda, t)\phi(\lambda, x, t), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

$$T_1(\lambda, t)\phi(\lambda, x, t) = \overline{\phi_1(\lambda, x, t)} + R_1(\lambda, t)\phi_1(\lambda, x, t), \quad k_1 \in \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

де $T(\lambda, t)$ і $R(\lambda, t)$ (відповідно $T_1(\lambda, t)$ і $R_1(\lambda, t)$) є правими (відповідно лівими) коефіцієнтами проходження і відбиття.

- Розв'язки $\phi(-\kappa_j^2, x, t)$ і $\phi_1(-\kappa_j^2, x, t)$ є відповідними (лінійно залежними) власними функціями оператора $L(t)$. Пов'язаними з ними нормувальними константами є

$$\gamma_j(t) = \left(\int_{\mathbb{R}} \phi^2(-\kappa_j^2, x, t) dx \right)^{-1}, \quad \gamma_{j,1}(t) = \left(\int_{\mathbb{R}} \phi_1^2(-\kappa_j^2, x, t) dx \right)^{-1}.$$

- Вронскіан $W(\lambda, t) = \phi_1(\lambda, x, t)\phi'(\lambda, x, t) - \phi_1'(\lambda, x, t)\phi(\lambda, x, t)$ розв'язків Йоста обертається або не обертається у нуль у точці $\lambda = 0$ одночасно при всіх t . При цьому $R(0, t) = 1$, якщо $W(0, t) = 0$ (випадок резонансу), і $R(0, t) = -1$, якщо $W(0, t) \neq 0$ (нерезонансний випадок).
- Функція $T(\lambda, t)$ має мероморфне продовження в область $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ з простими полюсами в точках $-\kappa_j^2$. Єдиний можливий нуль може бути в

точці $\lambda = 0$ у нерезонансному випадку. У резонансному випадку ми маємо $T(\lambda, t) \neq 0$ при всіх $\lambda \in \text{clos}(\mathcal{D})$, $\forall t \geq 0$.

- Існує симетрія $T(\lambda^U, t) = \overline{T(\lambda^L, t)}$, $T_1(\lambda^U, t) = \overline{T_1(\lambda^L, t)}$, $R(\lambda^U, t) = \overline{R(\lambda^L, t)}$ при $k \in \mathbb{R}$, тобто при $\lambda \in \Sigma$. Аналогічні співвідношення справедливі для $\phi(\lambda, x, t)$ і $\phi_1(\lambda, x, t)$. Більш того, $\phi_1(\lambda, x, t) \in \mathbb{R}$ при $k \in [-c, c]$ і $R_1(\lambda^U, t) = \overline{R_1(\lambda^L, t)}$ при $k_1 \in \mathbb{R}$.

- На неперервному спектрі виконуються такі тотожності:

$$-\frac{T_1(\lambda, t)}{\overline{T_1(\lambda, t)}} = \frac{T(\lambda, t)}{\overline{T(\lambda, t)}} = R(\lambda, t)e^{2i \arg k}, \text{ при } k \in [-c, c]. \quad (2.7)$$

При $k_1 \in \mathbb{R}$:

$$1 - |R(\lambda, t)|^2 = 1 - |R_1(\lambda, t)|^2 = T_1(\lambda, t)\overline{T(\lambda, t)}, \quad (2.8)$$

$$R_1(\lambda, t)\overline{T(\lambda, t)} + \overline{R(\lambda, t)}T(\lambda, t) = 0.$$

Тут $\arg k = \pi$ при $k < 0$.

- Потенціал $q(x, t)$ однозначно визначається правими даними розсіювання

$$\{R(\lambda, t), \lambda \in \Sigma, \quad -\kappa_j^2, \gamma_j > 0, j = 1, \dots, N\}.$$

- Якщо t є параметром часу, який відповідає рівнянню КдФ, то еволюція правих даних розсіювання визначається наступними формулами, ідентичними до спадного випадку ([23, 24, 47]):

$$R(\lambda, t) = R(k)e^{8ik^3t}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \gamma_j(t) = \gamma_j e^{8i\kappa_j^3 t}, \quad (2.9)$$

де $R(k) := R(\lambda(k), 0)$, $\gamma_j := \gamma_j(0)$.

Зауваження 2.1. З цього моменту і до кінця цього розділу нам зручно використовувати в якості спектрального параметра $k \in \text{clos } \mathcal{D} := \overline{\mathbb{C}^+}$. Таким чином, ми будемо використовувати позначення $\phi(k, x, t) = \phi(\lambda(k), x, t)$, $\phi_1(k, x, t) = \phi_1(\lambda(k), x, t)$, $T(k, t) = T(\lambda(k), t)$ та інші.

- У припущенні (1.21) при $0 < \kappa < \kappa_N$ розв'язок $\overline{\phi(k, x, 0)}$ має аналітичне продовження в область $\mathcal{D}_\kappa \subset \mathcal{D}$, де $\mathcal{D}_\kappa = \{k : 0 < \text{Im } k < \kappa\}$. Відповідно, функція $R(k, t)$ має аналітичне продовження у смугу $0 < \text{Im } k < \kappa$, є неперервною аж до межі $\text{Im } k = 0$. Коефіцієнт проходження $T(k, t)$ завжди має аналітичне продовження в \mathbb{C}^+ , і є голоморфним у смугі \mathcal{D}_κ та неперервним аж до межі \mathbb{R} . Тотожність (2.5) залишається справедливою у смугі \mathcal{D}_κ .
- Завдяки МОЗР розв'язок $q(x, t)$ задачі Коші (1.1), (2.1) може бути однозначно відновлено за правими даними розсіювання початкових даних $q(x, 0) = q(x)$:

$$\{R(k), \quad k \in \mathbb{R}; \quad -\kappa_j^2, \quad \gamma_j > 0, \quad j = 1, \dots, N\}. \quad (2.10)$$

Зазначені вище властивості дозволяють сформулювати векторну задачу РГ, яка пов'язана з правими даними розсіювання. Для цього введемо вектор-функцію

$$m(k, x, t) = \left(T(k, t)\phi_1(k, x, t)e^{ikx}, \quad \phi(k, x, t)e^{-ikx} \right) \quad (2.11)$$

в області $\overline{\mathbb{C}^+}$. Функція $m(k, x, t)$ є мероморфною в області \mathbb{C}^+ , має прості полюси в точках $i\kappa_j$ і є неперервною аж до дійсної осі. Ми розглядаємо її як вектор-функцію від змінної k , де x і t є параметрами, та використовуємо позначення $m(k) := m(k, x, t)$. Асимптотична поведінка цієї функції при $k \rightarrow \infty$ в будь-якому напрямку $\overline{\mathbb{C}^+}$ характеризується наступним чином (див. [52] і [59], Лема 4.3):

$$m(k) = \begin{pmatrix} m_1(k) & m_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2ik} \int_x^{+\infty} q(y, t) dy \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (2.12)$$

Отже, якщо ми отримаємо асимптотику $m(k)$ при $k \rightarrow \infty$, яка залежить від параметрів x і t , то отримаємо і асимптотику розв'язку. Параметри x і t є великими, і в подальшому прямуватимуть до ∞ , але їх відношення $\xi := \frac{x}{12t}$ в задачах

РГ, як правило, змінюється слабо. Ми обираємо ξ у якості основного параметра задачі РГ разом із великим параметром часу t . Як буде показано в цьому розділі, при $\xi > -\frac{c^2}{2}$ асимптотична поведінка розв'язку $q(x, t)$ в цілому визначається розподілом знаків дійсної частини так званої фазової функції $\Phi(k) = \Phi(k, x, t)$:

$$\Phi(k) = 4ik^3 + 12ik\xi. \quad (2.13)$$

Визначимо тепер $m(k)$ в \mathbb{C}^- із використанням умови симетрії

$$m(k) = m(-k)\sigma_1, \quad (2.14)$$

де

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

є матрицями Паулі. Після такого продовження функція $m(k)$ має стрибок уздовж дійсної осі. Розглянемо дійсну вісь як контур із природною орієнтацією від мінус до плюс нескінченності і позначимо через $m_+(k)$ (відповідно, $m_-(k)$) граничні значення $m(k)$ з верхньої (відповідно, нижньої) півплощини.

Теорема 2.2. *Нехай (2.10) є правими даними розсіювання для початкових даних $q(x)$, які задовольняють умовам (2.1), і нехай $q(x, t)$ є розв'язком задачі Коші (1.1), (2.1). Тоді вектор-функція $m(k)$, яка визначається формулами (2.11) і (2.14), є єдиним розв'язком наступної векторної задачі Рімана – Гільберта: знайти вектор-функцію $m(k)$, яка є мероморфною поза контуром \mathbb{R} , має неперервні границі з обох сторін контуру й задовольняє наступним умовам:*

I. умові стрибка $m_+(k) = m_-(k)v(k)$, де

$$v(k) := v(\lambda(k), x, t) = \begin{pmatrix} 1 - |R(k)|^2 & -\overline{R(k)}e^{-2t\Phi(k)} \\ R(k)e^{2t\Phi(k)} & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (2.15)$$

а функція $\Phi(k) = \Phi(k, \xi)$ визначена за формулою (2.13);

II. ПОЛЮСНИМ УМОВАМ

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{i\kappa_j} m(k) &= \lim_{k \rightarrow i\kappa_j} m(k) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i\gamma_j e^{2t\Phi(i\kappa_j)} & 0 \end{pmatrix}, \\ \operatorname{Res}_{-i\kappa_j} m(k) &= \lim_{k \rightarrow -i\kappa_j} m(k) \begin{pmatrix} 0 & -i\gamma_j e^{-2t\Phi(i\kappa_j)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (2.16)$$

III. умові симетрії $m(k) = m(-k)\sigma_1$;

IV. нормувальній умові

$$m(k) = \begin{pmatrix} 1, & 1 \end{pmatrix} + O(k^{-1}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

Доведення. Для спрощення запису опустимо x і t у наступних позначеннях всюди, де це можливо. Нехай $m(k)$ задано формулою (2.11). У верхній півплощині вона є мероморфною функцією, її перша компонента $m_1(k)$ має прості полюси в точках $i\kappa_j$, а друга компонента $m_2(k)$ є голоморфною. Обидві компоненти мають неперервні границі аж до межі \mathbb{R} , крім того, при $k \in \mathbb{R}$ ми маємо $m_+(-k) = \overline{m_+(k)}$. Для знаходження умови стрибка зауважимо: якщо $m_+ = (T\phi_1 z, \phi z^{-1})$, де $z = e^{ikx}$, $k \in \mathbb{R}$, тоді з урахуванням умови симетрії в тій же точці $k \in \mathbb{R}$ маємо $m_- = (\bar{\phi} z, \overline{T\phi_1} z^{-1})$. Нехай $\begin{pmatrix} \alpha(k) & \beta(k) \\ \gamma(k) & \delta(k) \end{pmatrix}$ є невідомою матрицею стрибка. Тоді

$$T\phi_1 z = \bar{\phi} z \alpha + \overline{T\phi_1} z^{-1} \gamma, \quad \phi z^{-1} = \bar{\phi} z \beta + \overline{T\phi_1} z^{-1} \delta.$$

Помножимо першу рівність на z^{-1} , а другу на z і спряжемо. Ми отримаємо:

$$\bar{\alpha}\phi = \overline{T\phi_1} - T\bar{\gamma}\phi_1 z^2, \quad T\bar{\delta}\phi_1 = \bar{\phi} - \bar{\beta}\phi z^{-2}. \quad (2.18)$$

Розділимо обидві рівності на \bar{T} і порівняємо їх із (2.6) при $k_1 \in \mathbb{R}$. З формули (2.8) випливає, що при $k_1 \in \mathbb{R}$ маємо $\alpha = T_1 \bar{T} = 1 - |R|^2$ і $\gamma z^{-2} = R$. При $k \in [-c, c]$ розглянемо першу з рівностей (2.18) і використаємо рівність $\bar{\phi}_1 = \phi_1$. Тоді, згідно (2.7) ми маємо $\bar{\alpha}\phi = \phi_1 \bar{T} (1 - \bar{\gamma} z^2 R)$. Отже, $\alpha = 0$ і $\gamma z^{-2} = R$ при $k \in$

$[-c, c]$. Приймаючи до уваги еволюцію (2.9) і формулу $z = e^{ikx}$, ми отримаємо елементи 11 і 21 матриці стрибка (2.15). Порівняємо другу рівність (2.18) з (2.5), тоді $\delta = 1$ і $-\bar{\beta}z^{-2} = R$, що дозволяє отримати елементи з номерами 12 і 22.

Полюсну умову (2.16) отримано в [51] (див. також [59, Appendix A]). Умова симетрії виконується за означенням, а умова нормування випливає з (2.12).

Покажемо тепер, що розв'язок цієї задачі РГ є єдиним. Нехай $m(k)$ і $\tilde{m}(k)$ є двома різними розв'язками. Тоді вектор-функція $\hat{m}(k) = m(k) - \tilde{m}(k)$ задовольняє умови I-III, а умова IV замінюється умовою $\hat{m}(k) = O(k^{-1})$, $k \rightarrow \infty$. Зауважимо, що умова II не гарантує, що \hat{m} є голоморфним розв'язком. Введемо скалярну функцію

$$F(k) := \hat{m}_1(k)\overline{\hat{m}_1(\bar{k})} + \hat{m}_2(k)\overline{\hat{m}_2(\bar{k})}.$$

Ця функція є мероморфною в \mathbb{C}^+ з простими полюсами в точках $i\kappa_j$ і має асимптотичну поведінку $F(k) = O(k^{-2})$ при $k \rightarrow \infty$. Оскільки $-\bar{k} = k$ при $k \in i\mathbb{R}$, то з умови II випливає

$$\text{Res}_{i\kappa_j} F(k) = 2i\gamma_j |\hat{m}_2(i\kappa_j)|^2 e^{2t\Phi(i\kappa_j)} \in i\mathbb{R}_+. \quad (2.19)$$

Крім того, $F(k)$ має неперервні граничні значення $F_+(k)$ на \mathbb{R} , які можуть бути зображені в силу умови III, як $F_+(k) = \hat{m}_{1,+}(k)\overline{\hat{m}_{1,-}(k)} + \hat{m}_{2,+}(k)\overline{\hat{m}_{2,-}(k)}$. З умови I тоді випливає

$$\begin{aligned} F_+(k) &= ((1 - |R|^2)\hat{m}_{1,-} + \mathcal{R}\hat{m}_{2,-})\overline{\hat{m}_{1,-}} + (\hat{m}_{2,-} - \overline{\mathcal{R}\hat{m}_{1,-}})\overline{\hat{m}_{2,-}} \\ &= (1 - |R|^2)|\hat{m}_{1,-}|^2 + |\hat{m}_{2,-}|^2 + 2i \text{Im}(\overline{\mathcal{R}\hat{m}_{1,-}}\hat{m}_{2,-}). \end{aligned}$$

Нехай $\rho > \kappa_1$. Розглянемо півколо

$$\mathcal{C}_\rho = \{k : k \in [-\rho, \rho], \text{ або } k = \rho e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \pi\}$$

як контур, який орієнтований проти годинникової стрілки. З урахуванням (2.19) за теоремою Коші отримаємо

$$\oint_{\mathcal{C}_\rho} F(k)dk = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}_{i\kappa_j} F(k) = -4\pi \sum_{j=1}^N \gamma_j |\hat{m}_2(i\kappa_j)|^2 e^{2t\Phi(i\kappa_j)}.$$

Приймаючи до уваги асимптотику $F(k) = O(k^{-2})$, маємо

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^\pi F(\rho e^{i\theta}) \rho e^{i\theta} d\theta = 0.$$

Тоді

$$\int_{\mathbb{R}} F_+(k) dk + 4\pi \sum_{j=1}^N \gamma_j |\hat{m}_2(i\kappa_j)|^2 e^{2t\Phi(i\kappa_j)} = 0.$$

Розглянемо дійсну частину цієї рівності:

$$\int_{\mathbb{R}} ((1 - |R(k)|^2) |\hat{m}_{1,-}(k)|^2 + |\hat{m}_{2,-}(k)|^2) dk + 4\pi \sum_{j=1}^N \gamma_j |\hat{m}_2(i\kappa_j)|^2 e^{2t\Phi(i\kappa_j)} = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\hat{m}_{2,-}(k) = 0 \text{ при } k \in (\mathbb{R} \cup_j \{i\kappa_j\}), \text{ и } \hat{m}_{1,-}(k) = 0 \text{ при } k_1 \in \mathbb{R}.$$

Таким чином, функція $F(k)$ є цілою. З огляду на її поведінку на нескінченності, ми отримуємо, що $F(k)$ дорівнює нулю. Це доводить єдиність розв'язку даної початкової мероморфної задачі Рімана – Гільберта. \square

Для подальшого аналізу нам зручно замінити полюсні умови Π додатковими стрибками на маленьких колах з центрами в полюсах і тим самим замінити початкову мероморфну задачу на еквівалентну голоморфну. Застосовуючи дослівно аналогічні міркування з [51], оберемо $\delta > 0$ настільки малим, щоб кола $|k - i\kappa_j| < \delta$ лежали у верхній півплощині та не перетиналися ані між собою, ані з будь-якими іншими контурами. Крім того, будемо вважати виконаною нерівність $\kappa_N - \delta > \kappa$, де параметр κ узято з оцінки (2.1). Перевизначимо $m(k)$ в околі точок $i\kappa_j$ (відповідно, $-i\kappa_j$) наступним чином:

$$m(k) = \begin{cases} m(k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{i\gamma_j e^{2t\Phi(i\kappa_j)}}{k - i\kappa_j} & 1 \end{pmatrix}, & |k - i\kappa_j| < \delta, \\ m(k) \begin{pmatrix} 1 & \frac{i\gamma_j e^{2t\Phi(i\kappa_j)}}{k + i\kappa_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & |k + i\kappa_j| < \delta, \end{cases} \quad (2.20)$$

а значення $m(k)$ поза цими кругами залишимо незмінними. Позначимо межу цих маленьких кругів як $\mathbb{T}^{j,U}$ і $\mathbb{T}^{j,L}$ (як зазвичай, індекси U і L відповідають верхній і нижній півплощині), а самі круги будемо позначати через $\mathbb{D}^{j,U}$, $\mathbb{D}^{j,L}$.
Покладемо

$$h^U(k, j) := -\frac{i\gamma_j e^{2t\Phi(i\kappa_j)}}{k - i\kappa_j}, \quad h^L(k, j) := -\frac{i\gamma_j e^{2t\Phi(i\kappa_j)}}{k + i\kappa_j}. \quad (2.21)$$

Використовуючи формулу

$$\operatorname{Res}_{i\kappa} m(k) = \lim_{k \rightarrow i\kappa} (k - i\kappa)m(k),$$

ми отримуємо наступне твердження:

Лема 2.3. [[51]] Нехай $m(k)$ є мероморфним розв'язком задачі РГ I-IV. Перевизначимо її за формулою (2.20). Тоді $m(k)$ є голоморфною функцією в області $\mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{R} \cup \bigcup_{j=1}^N (\mathbb{T}^{j,U} \cup \mathbb{T}^{j,L}) \right)$. Вона задовольняє умовам I, III, IV і має додаткові стрибки

$$m_+(k) = m_-(k) \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h^U(k, j) & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{T}^{j,U}, \\ \begin{pmatrix} 1 & h^L(k, j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{T}^{j,L}, \end{cases} \quad (2.22)$$

на колах $\mathbb{T}^{j,U}$ з центрами в точках $i\kappa_j$, які орієнтовані проти годинникової стрілки, і на колах $\mathbb{T}^{j,L}$ з центрами $-i\kappa_j$, які орієнтовані за годинниковою стрілкою.

Таким чином, полюсні умови II замінюються додатковими стрибками, при цьому розв'язок стає голоморфним поза контурами. Така «голоморфна» задача РГ є еквівалентною початковій, що визначається умовами I-IV. Таким чином, вона теж має єдиний розв'язок. Нам буде зручно використовувати її скрізь, за винятком малих областей просторово-часової півплощини в околі променів $x = 4\kappa_j^2 t$, які відповідають солітонам. Надалі ми будемо позначати цю задачу

РГ як задачу $РГ_k$, щоб підкреслити, що вона є пов'язаною з правими даними розсіювання. Ця задача є зручною для досліджень в області $x > -6c^2t$. В іншій області виявляється зручним використовувати задачу $РГ_{k_1}$, пов'язану з лівими даними розсіювання (див. розділ 3).

Нашою наступною метою є здійснення взаємно-однозначних (еквівалентних) перетворень задачі РГ, які призведуть до задачі РГ, матриці стрибків якої мало відрізняються від матриць стрибків модельної задачі при великих значеннях t . Модельна задача має матриці стрибків, що не залежать від спектрального параметру, і вона може бути розв'язаною єдиним чином у явному вигляді. Саме з розв'язку модельної задачі ми й отримаємо потрібні нам асимптотики хвилі розрідження. Одним з таких еквівалентних перетворень є множення розв'язку на діагональну матрицю-функцію. Оскільки всі еквівалентні задачі РГ зберігають асимптотику на нескінченності і умову симетрії, то відповідна діагональна матриця повинна задовольняти деяким умовам. Вони сформульовані в наступній лемі.

Лема 2.4. ([51]) Нехай $v(k)$ є неперервною матрицею на контурі $\hat{\Sigma}$, де $\hat{\Sigma}$ є контуром, симетричним відносно перетворення $k \mapsto -k$. Нехай $m(k)$, $k \in \mathbb{C} \setminus \hat{\Sigma}$, є голоморфним розв'язком задачі РГ: $m_+(k) = m_-(k)v(k)$, $k \in \hat{\Sigma}$, який має неперервні граничні значення з обох сторін контуру і задовольняє умові симетрії та нормування. Нехай $\tilde{\Sigma} \subset \hat{\Sigma}$ є контуром із тією ж орієнтацією, що й $\hat{\Sigma}$. Припустимо, що $\tilde{\Sigma}$ також є симетричним контуром, тобто містить разом з кожною точкою k і точку $-k$. Нехай D є матрицею вигляду

$$D(k) = \begin{pmatrix} d(k)^{-1} & 0 \\ 0 & d(k) \end{pmatrix} = (d(k))^{-\sigma_3}, \quad (2.23)$$

де $d : \hat{\mathbb{C}} \setminus \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ є кусково-аналітичною функцією, що не обертається в нуль всюди, за винятком скінченної кількості точок на $\tilde{\Sigma}$. Покладемо

$$\tilde{m}(k) = m(k)D(k), \quad (2.24)$$

тоді матриця стрибка задачі $\tilde{m}_+ = \tilde{m}_- \tilde{v}$ має вигляд

$$\tilde{v} = \begin{cases} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12}d^2 \\ v_{21}d^{-2} & v_{22} \end{pmatrix}, & k \in \hat{\Sigma} \setminus \tilde{\Sigma}, \\ \begin{pmatrix} v_{11}d_+^{-1}d_- & v_{12}d_+d_- \\ v_{21}d_+^{-1}d_-^{-1} & v_{22}d_-^{-1}d_+ \end{pmatrix}, & k \in \tilde{\Sigma}. \end{cases}$$

Якщо функція d має властивість $d(-k) = d(k)^{-1}$ при $k \in \mathbb{C} \setminus \tilde{\Sigma}$, то перетворення (2.24) зберігає умову симетрії (2.14). Якщо додатково $d(k) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, то (2.24) зберігає умову нормування (2.17).

Відзначимо, що в загальному випадку для орієнтованого контуру $\hat{\Sigma}$ значення $f_+(k_0)$ (відповідно $f_-(k_0)$) означає недотичну границю вектор-функції $f(k)$ при $k \rightarrow k_0 \in \hat{\Sigma}$ з додатної (відповідно від'ємної) сторони $\hat{\Sigma}$, де додатною стороною є та, що знаходиться зліва при русі по контуру в додатному напрямку.

2.2. Область солітонів

В цьому підрозділі ми вивчаємо розв'язок голоморфної задачі $\text{P}\Gamma_k$, яку описано в попередньому підрозділі, в області $x > 0$. При цьому $\xi = \frac{x}{12t} > 0$. Як вже було згадано, поведінка розв'язку визначається розподілом знаків дійсної частини фазової функції $\Phi(k) = 4ik^3 + 12i\xi k$. Зауважимо, що $\text{Re} \Phi(k) = 0$, при $\text{Im} k = 0$, або при $(\text{Im} k)^2 - 3(\text{Re} k)^2 = 3\xi$. Друга крива складається з двох гіпербол, які перетинають уявну частину в точках $\pm i\sqrt{3\xi}$. Покладемо

$$\kappa_0 := \kappa_0(\xi) = \sqrt{\frac{x}{4t}} > 0.$$

Таблицю розподілу знаків дійсної частини фазової функції $\Phi(k)$ показано на Рис. 2.1.

Таким чином, $\text{Re}(\Phi(i\kappa_j)) > 0$ при всіх $\kappa_j > \kappa_0$ і $\text{Re}(\Phi(i\kappa_j)) < 0$ при всіх $\kappa_j < \kappa_0$. У першому випадку недиагональні елементи матриці стрибка (2.21),

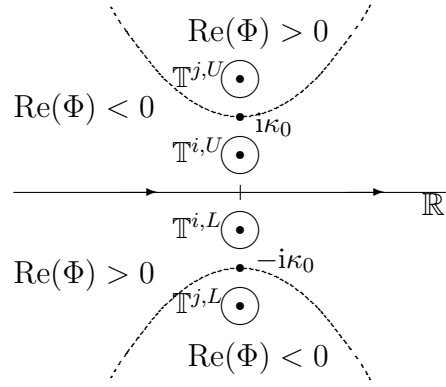


Рис. 2.1. Таблиця знаків для $\text{Re } \Phi(k)$ в солітонній області.

(2.22) експоненціально зростають за змінною t . Перетворимо ці елементи в експоненціально спадні, використовуюючи техніку, яку розвинено в [51]. А саме, покладемо

$$\Lambda(k, \xi) := \Lambda(k) = \prod_{\kappa_j > \kappa_0} \frac{k + i\kappa_j}{k - i\kappa_j},$$

і введемо матрицю

$$D(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & h^U(k, j)^{-1} \\ -h^U(k, j) & 0 \end{pmatrix} D_0(k), & k \in \mathbb{D}^{j,U}, \quad j = 1, \dots, N, \\ \begin{pmatrix} 0 & h^L(k, j) \\ -h^L(k, j)^{-1} & 1 \end{pmatrix} D_0(k), & k \in \mathbb{D}^{j,L}, \quad j = 1, \dots, N, \\ D_0(k), & k \in \mathbb{C} \setminus \cup_{j=1}^N (\mathbb{D}^{j,U} \cup \mathbb{D}^{j,L}), \quad j = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (2.25)$$

де

$$D_0(k) = \begin{pmatrix} \Lambda(k)^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda(k) \end{pmatrix}.$$

В силу симетрії $\Lambda(-k) = \Lambda^{-1}(k)$, ми маємо

$$D(-k) = \sigma_1 D(k) \sigma_1. \quad (2.26)$$

Покладемо $\tilde{m}(k) = m(k)D(k)$, $k \in \mathbb{C}$. В силу (2.26) вектор-функція $\tilde{m}(k)$ має властивості III і IV. Крім того, як описано в Лемі 4.2 роботи [51], ця вектор-

функція має наступні стрибки на колах $\mathbb{T}^{j,U}$ і $\mathbb{T}^{j,L}$ при $\kappa_j > \kappa_0$:

$$\begin{aligned}\tilde{v}(k) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\Lambda^2(k)}{h^U(k,j)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{T}^{j,U}, \\ \tilde{v}(k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{h^L(k,j)\Lambda^2(k)} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{T}^{j,L}.\end{aligned}\tag{2.27}$$

При $\kappa_j < \kappa_0$ (якщо такі є) матриця стрибка визначається наступним чином:

$$\begin{aligned}\tilde{v}(k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h^U(k,j)\Lambda^{-2}(k) & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{T}^{j,U}, \\ \tilde{v}(k) &= \begin{pmatrix} 1 & h^L(k,j)\Lambda^2(k) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{T}^{j,L}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Можливі два різних випадки: 1) існує l , при якому полюс потрапляє в точку $i\kappa_0$, тобто $\kappa_l = \kappa_0$; 2) $\kappa_j \neq \kappa_0, \forall j = 1, \dots, N$. У другому випадку усі стрибки на колах $\mathbb{T}^{j,U}, \mathbb{T}^{j,L}$ є експоненціально близькими до одиниці, і вони не дають вкладу в асимптотику розв'язку.

У першому випадку ми залишаємо полюсну умову для функції $\tilde{m}(k)$ при $\kappa_l = \kappa_0$ без заміни цієї умови на стрибок на колі. В силу (2.16) і (2.25) ця полюсна умова матиме наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\text{Res}_{i\kappa_j} \tilde{m}(k) &= \lim_{k \rightarrow i\kappa_j} \tilde{m}(k) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i\gamma_j e^{2t\Phi(i\kappa_j)} \Lambda(i\kappa_j)^{-2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{Res}_{-i\kappa_j} \tilde{m}(k) &= \lim_{k \rightarrow -i\kappa_j} \tilde{m}(k) \begin{pmatrix} 0 & -i\gamma_j e^{2t\Phi(i\kappa_j)} \Lambda(i\kappa_j)^{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.29}$$

При $j \neq l$ матриці стрибків на малих колах $\mathbb{T}^{j,U}, \mathbb{T}^{j,L}$ є експоненціально близькими до одиничної матриці при $t \rightarrow \infty$. Для вектора $\tilde{m}(k)$ відповідна матриця стрибка вздовж дійсної осі має вигляд:

$$\tilde{v}(k) = \begin{pmatrix} 1 - |R(k)|^2 & -\Lambda^2(k) \overline{R(k)} e^{-2t\Phi(k)} \\ \Lambda^{-2}(k) R(k) e^{2t\Phi(k)} & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.\tag{2.30}$$

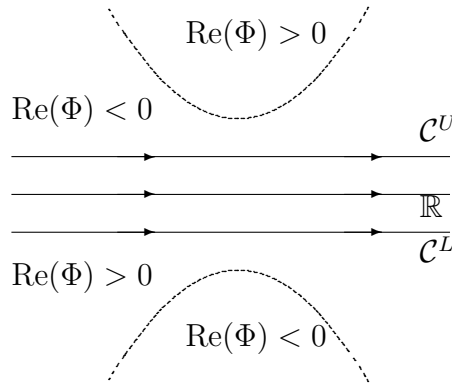


Рис. 2.2. Контур деформації в області солітонів.

Отже, задача РГ для вектора \tilde{m} має наступне формулювання: знайти мероморфну в області $\mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{R} \cup \bigcup_{j \neq l} (\mathbb{T}^{j,U} \cup \mathbb{T}^{j,L}) \right)$ вектор-функцію $\tilde{m}(k)$, яка має полюси в точках $i\kappa_l$ і $-i\kappa_l$ з лишками (2.29) та задовольняє умові стрибка $\tilde{m}_+(k) = \tilde{m}_-(k)\tilde{v}(k)$, де матриця $\tilde{v}(k)$ визначена формулами (2.28) і (2.30). Ця функція задовольняє умові симетрії (2.14) і має асимптотику (2.17).

Нашою наступною метою є така деформація контуру, яка збігається з дійсною віссю, що дозволить зробити стрибки на деформованому контурі близькими до одиничної матриці. Виберемо два контури $\mathcal{C}^U = \mathbb{R} + i\epsilon/2$ і $\mathcal{C}^L = \mathbb{R} - i\epsilon/2$, де $\epsilon = \min\{\kappa, \kappa_N - \delta\}$, а κ визначається з нерівності (2.1). Такий вибір числа ϵ гарантує, що коефіцієнт відбиття може бути аналітично продовженим в смугу $0 < \text{Im } k < \epsilon$: при цьому контур $\mathbb{T}^{N,U}$ лежить вище, ніж \mathcal{C}^U . За означенням $\overline{R(k)} = R(-k)$, тому функція \overline{R} може бути аналітично продовжена в смугу $-\epsilon < \text{Im } k < 0$, включаючи \mathcal{C}^L .

Факторизуємо матрицю стрибка $\tilde{v}(k)$ на контурі \mathbb{R} наступним чином

$$\tilde{v}(k) = b_L^{-1}(k)b_U(k) = \begin{pmatrix} 1 & -\Lambda^2(k)R(-k)e^{-2t\Phi(k)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Lambda^{-2}(k)R(k)e^{2t\Phi(k)} & 1 \end{pmatrix}$$

і покладемо

$$\check{m}(k) = \begin{cases} \tilde{m}(k)b_U^{-1}(k), & 0 < \text{Im } k < \epsilon/2, \\ \tilde{m}(k)b_L^{-1}(k), & -\epsilon/2 < \text{Im } k < 0, \\ \tilde{m}(k), & |\text{Im } k| > \frac{\epsilon}{2}. \end{cases}$$

Таким чином, вектор-функція $\check{m}(k)$ не має стрибка на дійсній осі, але має стрибки на контурах $\mathcal{C}^U \cup \mathcal{C}^L$:

$$\check{v}(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Lambda^{-2}(k)R(k)e^{2t\Phi(k)} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathcal{C}^U, \\ \begin{pmatrix} 1 & -\Lambda^2(k)R(-k)e^{-2t\Phi(k)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathcal{C}^L. \end{cases}$$

Ці матриці стрибків є експоненціально близькими до одиничних матриць при $t \rightarrow \infty$, тому можна застосувати Теорему А.6 з [56] для отримання наступного результату ([51, Теорема 4.4]):

Теорема 2.5. Нехай при деякому малому κ виконано умову (2.1) і нехай $-\kappa_1^2, \dots, -\kappa_N^2 \in$ точками дискретного спектру. Покладемо $c_j = 4\kappa_j^2$. Нехай малий параметр $\delta_0 > 0$ є таким, що інтервали $[c_j - \delta_0, c_j + \delta_0]$, $1 \leq j \leq N$ не перетинаються і виконано нерівність $c_N - \delta_0 > 0$.

Тоді при деякому малому $\varepsilon > 0$ в області $x/t \geq \varepsilon$ асимптотика розв'язку має вигляд:

- Якщо при деякому j виконується нерівність $|\frac{x}{t} - c_j| < \delta_0$, то

$$q(x, t) = \frac{-4\kappa_j\gamma_j(x, t)}{(1 + (2\kappa_j)^{-1}\gamma_j(x, t))^2} + O(e^{-\varepsilon_1 t}), \quad (2.31)$$

де $\min\{\kappa, \kappa_N - \delta\} > \varepsilon_1 > \varepsilon/2$ і

$$\gamma_j(x, t) = \gamma_j e^{-2\kappa_j x + 8\kappa_j^3 t} \prod_{i=j+1}^N \left(\frac{\kappa_i - \kappa_j}{\kappa_i + \kappa_j} \right)^2. \quad (2.32)$$

- Якщо при всіх j виконується нерівність $|\frac{x}{t} - c_j| \geq \delta_0$, то $q(x, t) = O(e^{-\varepsilon_1 t})$.

Стандартним чином ([26, 51]) зведемо тепер формули (2.31), (2.32) до традиційного вигляду солітонного розв'язку. Ми отримуємо основний результат цього розділу.

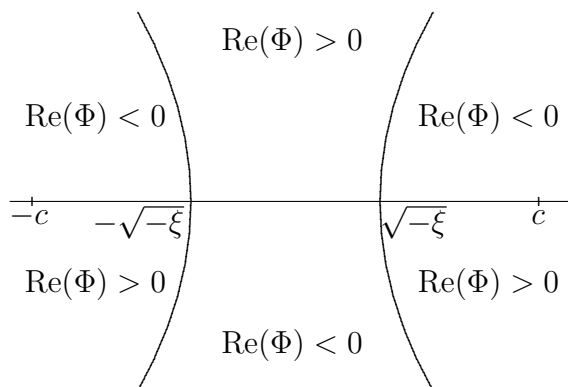


Рис. 2.3. Таблиця розподілу знаків для $\text{Re}(\Phi) = 0$ при $-\frac{c^2}{2} < \xi < 0$.

Теорема 2.6. Нехай $q(x, t)$ є розв'язком задачі Коші (1.1), (2.1). Тоді при довільному малому $\epsilon_1 > 0$ в області $x > \epsilon_1 t$ при $t \rightarrow +\infty$ має місце асимптотика:

$$q(x, t) = - \sum_{j=1}^N \frac{2\kappa_j^2}{\cosh^2 \left(\kappa_j x - 4\kappa_j^3 t - \frac{1}{2} \log \frac{\gamma_j}{2\kappa_j} - \sum_{i=j+1}^N \log \frac{\kappa_i - \kappa_j}{\kappa_i + \kappa_j} \right)} + O(e^{-\epsilon_1 t/2}).$$

Тут $-\kappa_j^2$ є точками дискретного спектру і γ_j є відповідними нормувальними константами початкових умов.

2.3. Зона розрідження. Зведення до модельної задачі.

У цій частині розділу 2 ми обговорюємо найбільш цікаву асимптотику хвилі розрідження, що виникає в середній області просторово-часової півплощині, пов'язаної з діапазоном $-\frac{c^2}{2} < \xi < 0$, $\xi = \frac{x}{12t}$. Розподіл знаків фазової функції показано на Рис. 2.3. Гіперболи $\text{Re} \Phi(k) = 0$ у цьому випадку перетинають дійсну вісь в точках $k = \pm\sqrt{-\xi}$.

Цей розподіл знаків показує, що в голоморфній задачі $\text{P}\Gamma_k$ в матриці стрибка $\tilde{v}(k)$, яку задано формулами (2.21), (2.27), $j = 1, \dots, N$, усі стрибки є експоненціально близькими до одиничної матриці при великих значеннях t . Основний стрибок для $\tilde{m}(k)$ при цьому задається формулою (2.30), де

$$\Lambda(k, \xi) := \Lambda(k) = \prod_{j=1}^N \frac{k + i\kappa_j}{k - i\kappa_j}. \quad (2.33)$$

Покладемо

$$\mathcal{R}(k) := R(k)\Lambda^{-2}(k). \quad (2.34)$$

Ця функція є неперервною на дійсній осі, причому $|\mathcal{R}(k)| \neq 0$ при $k \in \mathbb{R}$ в силу (2.7). Оскільки $\overline{\Lambda(k)} = \Lambda^{-1}(k)$ при $k \in \mathbb{R}$, і, крім цього, $\overline{\mathcal{R}(k)} = \mathcal{R}^{-1}(k)$ при $k \in [-c, c]$, то матриця $\tilde{v}(k)$ може бути зображена у вигляді

$$\tilde{v}(k) = \begin{pmatrix} 1 - |\mathcal{R}(k)|^2 & -\overline{\mathcal{R}(k)}e^{-2t\Phi(k)} \\ \mathcal{R}(k)e^{2t\Phi(k)} & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Таким чином, ми встановили наступне твердження:

Лема 2.7. Нехай $\xi \in (-\frac{c^2}{2}, 0)$. Тоді вектор-функція $\tilde{m}(k)$ є єдиним розв'язком наступної векторної задачі Рімана – Гільберта: знайти вектор-функцію $\tilde{m}(k)$, яка є голоморфною поза контуром $\mathbb{R} \cup_{j=1}^N (\mathbb{T}^{j,U} \cup \mathbb{T}^{j,L})$, має неперервні границі з обох сторін контуру і задовольняє:

I. умові стрибка $\tilde{m}_+(k) = \tilde{m}_-(k)\tilde{v}(k)$,

$$\tilde{v}(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 - |\mathcal{R}(k)|^2 & -\overline{\mathcal{R}(k)}e^{-2t\Phi(k)} \\ \mathcal{R}(k)e^{2t\Phi(k)} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} 1 & \Lambda^2(k)(h^U(k, j))^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{T}^{j,U}, j = 1, \dots, N \\ \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ -\Lambda^{-2}(k)(h^L(k, j))^{-1} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{T}^{j,L}, j = 1, \dots, N \end{cases}$$

де функції h^U, h^L визначено формулою (2.21), а функцію $\Lambda(k)$ – згідно (2.33);

II. умові симетрії $\tilde{m}(k) = \tilde{m}(-k)\sigma_1$;

III. умові нормування $\tilde{m}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} + O(k^{-1})$, $k \rightarrow \infty$.

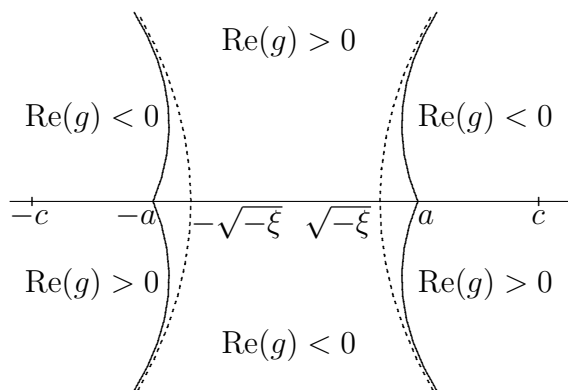


Рис. 2.4. Таблиця знаків для $\text{Re}(g)$ разом з лінією рівня $\text{Re}(\Phi) = 0$ (пунктир).

Метою підрозділу 2.3 є зведення даної задачі РГ до еквівалентної задачі РГ із «майже сталими» за змінною k стрибками, яка матиме розв'язок в явному вигляді. Для цього ми зробимо кілька кроків деформації й спряження. Перший з них пов'язаний із так званою g -функцією [43], яка замінює фазову функцію на більш «зручну» з точки зору аналізу асимптотичної структури розв'язку функцію.

Нехай $a = a(\xi) = \sqrt{-2\xi}$. Цей параметр є додатною і монотонною функцією змінної ξ при $\xi < 0$. Він пробігає інтервал $(0, c)$ при $\xi \in (-\frac{c^2}{2}, 0)$. В силу взаємної однозначності між ξ і a , ми будемо параметризувати дані в цьому підрозділі із використанням параметра $a \in (0, c)$.

Введемо наступну функцію:

$$g(k) := g(k, \xi) = 4i(k^2 - a^2)\sqrt{k^2 - a^2}, \quad a = \sqrt{-2\xi}, \quad (2.35)$$

яка є однозначно визначеною в області $\mathcal{D}(\xi) = \text{clos}(\mathbb{C} \setminus [-a, a])$. Тут припускається, що $\sqrt{k^2 - a^2}$ набуває додатних значень при $k > a$. За означенням (2.35), функція $g(k)$ має наступні властивості: $g(-k) = -g(k)$ при $k \in \mathcal{D}(\xi)$; g має стрибок: $g_+(k) = -g_-(k) > 0$ на контурі $[-a, a]$, який обрано з орієнтацією від $-a$ до a . Таблицю знаків $\text{Re } g$ показано на Рис. 2.4.

Оскільки

$$\begin{aligned}\Phi(k) - g(k) &= 4i \left(k^3 + 3\xi k - (k^3 + 2\xi k) \sqrt{1 + \frac{2\xi}{k^2}} \right) \\ &= \frac{12\xi^2}{2ik} (1 + O(k^{-1})), \quad k \rightarrow \infty,\end{aligned}\tag{2.36}$$

то функція

$$\tilde{d}(k) := e^{t(\Phi(k)-g(k))}, \quad k \in \mathbb{C},$$

задовольняє всім умовам Лема 2.4. Тепер ми можемо зробити потрібні трансформації-кроки.

КРОК 1. Нехай $D(k)$ є матрицею вигляду (2.23), де покладено $d(k) = \tilde{d}(k)$. Розглянемо вектор-функцію $m^{(1)}(k) = \tilde{m}(k)D(k)$, $k \in \mathbb{C}$. Ця функція є голоморфним розв'язком задачі РГ зі стрибком $m_+^{(1)}(k) = m_-^{(1)}(k)v^{(1)}(k)$, де

$$v^{(1)}(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -\overline{\mathcal{R}(k)} \\ \mathcal{R}(k) & e^{-2tg_+(k)} \end{pmatrix}, & k \in [-a, a], \\ \begin{pmatrix} 1 - |\mathcal{R}(k)|^2 & -\overline{\mathcal{R}(k)}e^{-2tg(k)} \\ \mathcal{R}(k)e^{2tg(k)} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{R} \setminus [-a, a], \\ \begin{pmatrix} 1 & \tilde{h}^U(k, j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{T}^{j,U}, \quad j = 1, \dots, N, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tilde{h}^L(k, j) & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{T}^{j,L}, \quad j = 1, \dots, N.\end{cases}\tag{2.37}$$

Тут

$$\tilde{h}^U(k, j) := \frac{\Lambda^2(k)}{h^U(k, j)} e^{2t(\Phi(k)-g(k))}, \quad \tilde{h}^L(k, j) := \frac{1}{\Lambda^2(k)h^L(k, j)} e^{-2t(\Phi(k)-g(k))},$$

а $h^U(k, j)$, $h^L(k, j)$ визначені формулами (2.21).

Лема 2.8. Нехай радіуси δ окружностей $\mathbb{T}^{j,L}$ и $\mathbb{T}^{j,U}$ задовольняють нерівностям

$$(\kappa_1 - \delta)^3 > 3\delta \left((\kappa_N + \delta)^2 + \frac{c^2}{2} \right),\tag{2.38}$$

і $\delta < \kappa_N - \kappa$, де κ – це константа з нерівності (1.21). Тоді виконується оцінка

$$|\tilde{h}^U(k, j)| + |\tilde{h}^L(-k, j)| < C_1(\delta)e^{-C(\delta)t}, \quad k \in \mathbb{T}^{j,U}; \quad C(\delta) > 0, \quad C_1(\delta) > 0,$$

рівномірно за змінною $\xi \in [0, -\frac{c^2}{2}]$.

Доведення. Достатньо перевірити, що при достатньо малих $\delta > 0$ ми маємо $\operatorname{Re}(\Phi(k) - g(k) - \Phi(i\kappa_j)) < 0$ при $|k - i\kappa_j| = \delta$. Прості оцінки, що є справедливими при $\xi \in (0, c^2/2]$, показують, що

$$|\Phi(k) - \Phi(i\kappa_j)| \leq 12((\kappa_N + \delta)^2 + |\xi|)\delta \leq 12\delta \left((\kappa_N + \delta)^2 + \frac{c^2}{2} \right),$$

і $\operatorname{Re} g(k) \geq 4(\kappa_1 - \delta)^3$. Отже, достатньо вибрати δ , що задовольняє (2.38). \square

Покладемо тепер

$$\mathbb{T}_\delta = \cup_{j=1}^N (\mathbb{T}^{j,U} \cup \mathbb{T}^{j,L}),$$

і нехай \mathbb{I} – це одинична матриця. Зауважимо, що матриця (2.37) на множині \mathbb{T}_δ припускає таке зображення:

$$v^{(1)}(k, x, t) = \mathbb{I} + A(k, \xi, t), \quad \|A(k, \xi, t)\| \leq C_1(\delta)e^{-C(\delta)t}, \quad C(\delta), C_1(\delta) > 0, \quad (2.39)$$

де $\|A\| = \max_{i,j=1,2} |A_{ij}|$ позначає норму матриці. Оцінка для A є рівномірною за змінною $k \in \mathbb{T}_\delta$ і $\xi \in [0, -\frac{c^2}{2}]$.

Для виконання наступного кроку розглянемо спочатку додаткову скалярну задачу РГ: знайти голоморфну в $\mathbb{C} \setminus [-a, a]$ функцію $d(k)$, яка має наступний стрибок:

$$d_+(k)d_-(k) = \mathcal{R}^{-1}(0)\mathcal{R}(k), \quad k \in [-a, a], \quad (2.40)$$

і задовольняє умовам симетрії і нормування

$$d(-k) = d^{-1}(k), \quad k \in \operatorname{clos}(\mathbb{C} \setminus [-a, a]); \quad d(k) \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.41)$$

Тут \mathcal{R} визначається за формулами (2.33) і (2.34).

Лема 2.9. Функція $\arg(\mathcal{R}(k)\mathcal{R}^{-1}(0))$ є непарною гладкою функцією на \mathbb{R} . Крім того, $\mathcal{R}(0) = -1$ у нерезонансному випадку і $\mathcal{R}(0) = 1$ у резонансному випадку.

Доведення. Перш за все, нагадаємо, що $\mathcal{R}(k)\mathcal{R}^{-1}(0)$ є неперервною і відмінною від нуля при $k \in \mathbb{R}$. Тоді її аргумент також є неперервною функцією. Зауважимо, що

$$\arg \Lambda(k) = \arg \Lambda(0) + G(k) = \pi N + G(k),$$

де $G(-k) = -G(k)$, $G \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Крім того, з теореми Левінсона (див. [27, формула (4.3)]) випливає, що

$$\pi N = \frac{\pm \pi Y}{2} + \arg T(0 \pm 0),$$

де $Y = 1$ у нерезонансному випадку, і $Y = 0$ у резонансному випадку. В силу (2.7):

$$\lim_{k \rightarrow 0} \arg \mathcal{R}(k) = \lim_{k \rightarrow 0} (2 \arg T(k) - 2 \arg k - 2 \arg \Lambda(k)) = -\pi Y.$$

Таким чином, функція $\arg(\mathcal{R}(k)\mathcal{R}^{-1}(0))$ є гладкою непарною функцією. Оскільки $\Lambda^2(0) = 1$, то значення $\mathcal{R}(0)$ збігається з величиною коефіцієнта відбиття, тобто $\mathcal{R}(0) = -1$ у нерезонансному випадку, і $\mathcal{R}(0) = 1$ у резонансному випадку. \square

Для спрощення позначень у подальших міркуваннях цього підрозділу введемо функції:

$$\mathcal{S}(k) := \mathcal{R}(k)\mathcal{R}^{-1}(0), \quad P(k) := \frac{1}{\sqrt{k^2 - a^2 + i0}}, \quad k \in [-a, a]. \quad (2.42)$$

Щоб знайти розв'язок даної скалярної задачі РГ трансформуємо стрибок (2.40) в адитивний:

$$f_+(k) = f_-(k) + P(k) \log \mathcal{S}(k); \quad f(k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

де функція $f(k)$ має вигляд:

$$f(k) = (k^2 - a^2)^{-1/2} \log d(k).$$

З формули Сохоцького-Племеля і властивості $|\mathcal{S}| = |\mathcal{R}| = 1$ випливає, що

$$f(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{P(s) \log \mathcal{S}(s)}{s - k} ds,$$

де значення $\log \mathcal{S}(s) = i \arg(\mathcal{S}(s))$ можна вибрати неперервними згідно Лема 2.9.

Оскільки функція $\log \mathcal{S}(s)$ є непарною, а $P(s)$ – парною, то $f(-k) = f(k)$. Крім того, з непарності $\log \mathcal{S}(s)$ випливає, що

$$f(k) = \frac{-1}{2\pi i k} \left(\int_{-a}^a P(s) \log \mathcal{S}(s) ds + O\left(\frac{1}{k}\right) \right) = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty.$$

Таким чином, $\sqrt{k^2 - a^2} f(k) = O(k^{-1})$ і функція

$$d(k) := e^{\sqrt{k^2 - a^2} f(k)} = \exp \left(\frac{\sqrt{k^2 - a^2}}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\log(\mathcal{R}(s)\mathcal{R}^{-1}(0))}{\sqrt{s^2 - a^2 + i0} (s - k)} ds \right) \quad (2.43)$$

задовольняє формулам (2.40) і (2.41). Оскільки функція $f(k)$ є парною, а $\sqrt{k^2 - a^2}$ – непарною, то умови симетрії (2.41) виконано. Як буде показано в Лемі 2.12, функція $d(k)$ є обмеженою в околі точок $\pm a$.

КРОК 2. Покладемо $D(k) = (d(k))^{-\sigma_3}$, де $d(k)$ задано формулою (2.43). Далі, покладемо $m^{(2)}(k) = m^{(1)}(k)D(k)$, $k \in \mathbb{C}$ і застосуємо Лему 2.4. Ми отримаємо наступну задачу РГ: знайти голоморфну вектор-функцію $m^{(2)}(k)$ в області $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup \mathbb{T}_\delta)$, яка задовольняє умовам III, IV Теорема 2.2 і умові стрибка $m_+^{(2)}(k) = m_-^{(2)}(k)v^{(2)}(k)$, де

$$v^{(2)}(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{R}(0) \\ \mathcal{R}(0) & \frac{d_+(k)}{d_-(k)} e^{-2tg_+(k)} \end{pmatrix}, & k \in [-a, a], \\ \begin{pmatrix} 1 - |\mathcal{R}(k)|^2 & -d(k)^2 \overline{\mathcal{R}(k)} e^{-2tg(k)} \\ d(k)^{-2} \mathcal{R}(k) e^{2tg(k)} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{R} \setminus [-a, a], \\ \mathbb{I} + D^{-1}(k)A(k, \xi, t)D(k), & k \in \mathbb{T}_\delta, \end{cases}$$

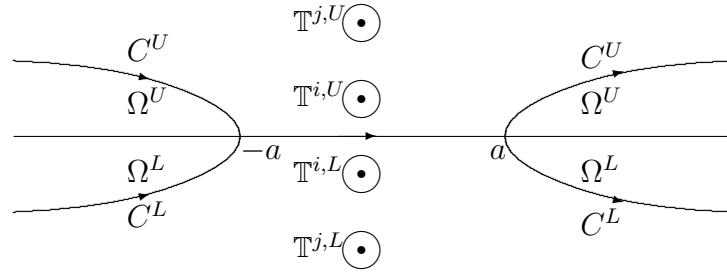


Рис. 2.5. Контур деформації для кроку 3.

де $A(k, \xi, t) = v^{(1)}(k, x, t) - \mathbb{I}$ (див. (2.39)).

КРОК 3. Нижченаведена факторизація є стандартною (див. [44, 51]). Покладемо

$$v^{(2)}(k) = B^L(k)(B^U(k))^{-1}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus [-a, a],$$

де

$$B^L(k) = \begin{pmatrix} 1 & -d(k)^2 \mathcal{R}(-k) e^{-2tg(k)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^U(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d(k)^{-2} \mathcal{R}(k) e^{2tg(k)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Нагадаємо, що $\overline{\mathcal{R}(k)} = \mathcal{R}(-k)$ при $k \in \mathbb{R}$. Це дозволяє продовжити матриці $B^L(k)$ і $B^U(k)$ в окіл дійсної осі. Розглянемо області Ω^U і Ω^L , які обмежені контурами C^U і C^L , що знаходяться в смузі $|\operatorname{Im} k| < \kappa/2$, та є асимптотично близькими до межі цієї смуги при $k \rightarrow \infty$, як показано на Рис. 2.5. Перевизначимо $m^{(2)}$ в Ω^U і Ω^L згідно

$$m^{(3)}(k) = \begin{cases} m^{(2)}(k)B^U(k), & k \in \Omega^U, \\ m^{(2)}(k)B^L(k), & k \in \Omega^L, \\ m^{(2)}(k), & k \in \mathbb{C} \setminus (\Omega^U \cup \Omega^L). \end{cases}$$

Тоді вектор-функція $m^{(3)}(k)$ не має стрибків уздовж інтервалів $(-\infty, -a]$ і $[a, \infty)$, але має стрибки уздовж контурів C^U і C^L . Ці стрибки є асимптотично близькими при $t \rightarrow \infty$ до одиничної матриці поза малих околів точок $\pm a$.

Покладемо тепер $A^{(3)}(k) = D^{-1}(k)A(k, \xi, t)D(k)$, $k \in \mathbb{T}_\delta$, де $D(k) = (d(k))^{-\sigma_3}$ – діагональна матриця, яка визначається з (2.43), а матриця A визначається з (2.39). Тоді з формули (2.39) та обмеженості $d(k)$ і $d^{-1}(k)$ рівномірно на \mathbb{T}_δ і рівномірно при $\xi \in [-c^2/2, 0]$ випливає оцінка

$$\|A^{(3)}(k)\| \leq Ce^{-Ct}, \quad C > 0, \quad k \in \mathbb{T}_\delta. \quad (2.44)$$

Крім того, зауважимо, що недіагональні елементи матриць $B^L(k)$ і $B^U(k)$ є неперервними функціями на контурах \mathcal{C}^L і \mathcal{C}^U відповідно. Дійсно, в силу Лема 2.12 і означення (2.35) ми отримаємо, що $B_{21}^U(k) \rightarrow -\mathcal{R}(0)$ при $k \rightarrow \pm a$ і $k \in \mathcal{C}^U$; $B_{21}^L(k) \rightarrow -\mathcal{R}(0)$ при $k \rightarrow \pm a$ і $k \in \mathcal{C}^L$; крім того, $v_{22}^{(2)}(k) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow a - 0$ і $k \rightarrow a + 0$, де $k \in \mathbb{R}$. Більш того, оскільки контури \mathcal{C}^U і \mathcal{C}^L вибираються всередині смуги $|\operatorname{Im} k| < \kappa$, то з урахуванням початкової умови $q(x) \in C^8(\mathbb{R})$, функція $\mathcal{R}(k) = R(k)\Lambda(k)$ поводитья як $\mathcal{R}(k) = O(k^{-9})$ при $k \rightarrow \infty$, $k \in \mathcal{C}^U \cup \mathcal{C}^L$ (див. [52]). З іншого боку, справедлива оцінка:

$$\exp\{tg(k)\} = O(\exp\{-2t|\operatorname{Re} k|^{3/2}\kappa\}), \quad k \rightarrow \infty, \quad k \in \mathcal{C}^U. \quad (2.45)$$

В силу симетрії отримуємо, що недіагональні елементи B^U і B^L експоненціально спадають при кожному t при $k \rightarrow \infty$. Таким чином, ми довели наступну теорему

Теорема 2.10. Нехай $\xi \in [-c^2/2, 0]$. Тоді задача РГ I-IV з Теорема 2.2 еквівалентна наступній задачі РГ: в області $\mathbb{C} \setminus (\mathcal{C}^U \cup \mathcal{C}^L \cup \mathbb{T}_\delta \cup [-a, a])$ знайти голоморфну вектор-функцію $m^{(3)}(k)$, що є неперервною аж до межі області і задовольняє

1. умові стрибка $m_+^{(3)}(k) = m_-^{(3)}(k)v^{(3)}(k)$, де

$$v^{(3)}(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{R}(0) \\ \mathcal{R}(0) & \frac{d_+(k)}{d_-(k)}e^{-2tg_+(k)} \end{pmatrix}, & k \in [-a, a], \end{cases}$$

$$v^{(3)}(k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d(k)^{-2}\mathcal{R}(k)e^{2tg(k)} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \mathcal{C}^U, \\ \begin{pmatrix} 1 & -d(k)^2\mathcal{R}(-k)e^{-2tg(k)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & k \in \mathcal{C}^L, \\ \mathbb{I} + A^{(3)}(k), & k \in \mathbb{T}_\delta, \end{cases} \quad (2.46)$$

2. умові симетрії $m^{(3)}(k) = m^{(3)}(-k)\sigma_1$;

3. умові нормування $m^{(3)}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} + O(k^{-1})$, $k \rightarrow \infty$.

Тут $d(k)$ визначається за формулою (2.43), функція $g(k)$ – за формулою (2.35), $\mathcal{R}(k)$ – за формулами (2.34) і (2.33), а матриця $A^{(3)}(k)$ допускає оцінку (2.44).

При $|\operatorname{Im} k| > \kappa_1 + 1$ розв'язок $m(k)$ початкової задачі I-IV і розв'язок даної задачі 1.-3. пов'язані між собою формулою

$$m^{(3)}(k) = m(k) \begin{pmatrix} H^{-1}(k) & 0 \\ 0 & H(k) \end{pmatrix}, \quad \text{де } H(k) = d(k)\Lambda(k)e^{t(\Phi(k)-g(k))}. \quad (2.47)$$

Зауважимо, що матриця $v^{(3)}(k)$ має наступну структуру:

$$v^{(3)}(k) = \begin{cases} -i\mathcal{R}(0)\sigma_2 + A^{(4)}(k), & k \in [-a, a], \\ \mathbb{I} + A^{(5)}(k), & k \in \mathcal{C}^U \cup \mathcal{C}^L, \\ \mathbb{I} + A^{(3)}(k), & k \in \mathbb{T}_\delta, \end{cases} \quad (2.48)$$

де σ_2 – це друга матриця Паулі, а матриці $A^{(j)}(k)$ задовольняють оцінкам

$$\|A^{(j)}(k)\| \leq Ce^{-\nu(|k^2-a^2|)}, \quad j = 4, 5. \quad (2.49)$$

Тут $\nu(k)$, $k \in \mathbb{R}_+$ є зростаючою додатною функцією при $k \neq 0$, причому $\nu(0) = 0$ і $\nu(+\infty) = +\infty$. Така структура матриці стрибка демонструє структуру матриці стрибка модельної задачі РГ, яку можна розв'язати у явному вигляді. Розв'язок

цієї модельної задачі визначає головний член асимптотичного розвинення задачі РГ 1-3 з Теореми 2.10 при $t \rightarrow \infty$.

2.4. Розв'язок модельної задачі

Згідно з результатами попереднього підрозділу, ми формулюємо модельну задачу РГ наступним чином: знайти голоморфну вектор-функцію $m^{\text{mod}}(k)$ в області $\mathbb{C} \setminus [-a, a]$, яка є неперервною аж до межі області (за винятком точок $\pm a$, де можливі особливості порядку $O((k \pm a)^{-1/4})$), та задовольняє:

умові стрибка

$$m_+^{\text{mod}}(k) = m_-^{\text{mod}}(k) \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{R}(0) \\ \mathcal{R}(0) & 0 \end{pmatrix}, \quad k \in [-a, a]; \quad (2.50)$$

умові симетрії

$$m^{\text{mod}}(k) = m^{\text{mod}}(-k)\sigma_1; \quad (2.51)$$

умові нормування

$$m^{\text{mod}}(k) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + O(k^{-1}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.52)$$

Ця задача має єдиний розв'язок. Це можна довести аналогічно доведенню Теореми 2.2. Однак ми отримуємо цей факт безпосередньо з існування і єдиності побудованого далі розв'язку відповідної матричної задачі.

Будемо шукати розв'язок $M^{\text{mod}}(k) = M^{\text{mod}}(k, \xi, t)$ наступної матричної задачі РГ: знайти голоморфну матричну функцію M^{mod} в $\mathbb{C} \setminus [-a, a]$, яка має неперервні границі аж до межі області, за винятком точок $\pm a$, де для елементів даної матриці виконується оцінка $O((k \pm a)^{-1/4})$. Ця матриця задовольняє умові стрибка

$$M_+^{\text{mod}}(k) = -i\mathcal{R}(0)M_-^{\text{mod}}(k)\sigma_2, \quad k \in [-a, a],$$

і умові нормування $M^{\text{mod}}(k) = \mathbb{I} + O(k^{-1})$ при $k \rightarrow \infty$.

Відзначимо, що оскільки $\det(-i\mathcal{R}(0)\sigma_2) = 1$, то розв'язок даної матричної задачі є єдиним в силу стандартних міркувань, які використовують теорему Ліувілля (див. [41, Розділ 7.1]). При цьому розв'язок векторної модельної задачі (2.50), (2.51), (2.52) визначається як

$$m^{\text{mod}}(k) = \begin{pmatrix} 1, & 1 \end{pmatrix} M^{\text{mod}}(k).$$

Дійсно, в силу тотожності $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = -\sigma_2$ маємо співвідношення $M^{\text{mod}}(-k) = \sigma_1 M^{\text{mod}}(k) \sigma_1$ і, отже, m^{mod} задовольняє умові симетрії.

Розв'язок матричної задачі ми знаходимо аналогічно роботі [53]. Розглянемо спочатку резонансний випадок. Оскільки

$$\sigma_2 = S_0\sigma_3S_0^{-1}, \quad S_0 = \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad S_0^{-1} = \frac{1-i}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

то можна спершу знайти голоморфний розв'язок M^∞ наступної задачі:

$$M_+^\infty = -iM_-^\infty\sigma_3, \quad M^\infty(\infty) = \mathbb{I},$$

де σ_3 є третя матриця Паулі. Очевидно, що

$$M^\infty(k) = \begin{pmatrix} \beta(k) & 0 \\ 0 & \beta(k)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \beta(k) = \sqrt[4]{\frac{k+a}{k-a}}.$$

Тут функція $\beta(k)$ визначена на множині $\text{clos}(\mathbb{C} \setminus [-a, a])$, а її вітка визначається умовою $\beta(\infty) = 1$. Відзначимо, що ця функція має симетрію $\beta(-k) = \beta(k)^{-1}$.

Тоді для початкової матричної функції $M^{\text{mod}}(k)$ має місце формула

$$M^{\text{mod}}(k) = S_0 M^\infty(k) S_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta(k)+\beta(k)^{-1}}{2} & \frac{\beta(k)-\beta(k)^{-1}}{2i} \\ -\frac{\beta(k)-\beta(k)^{-1}}{2i} & \frac{\beta(k)+\beta(k)^{-1}}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

що є справедливою у резонансному випадку. У нерезонансному випадку необхідно замінити $\beta(k)$ на $\beta(-k)$. Розв'язком векторної модельної задачі є функція

$$m^{\text{mod}}(k) = \frac{1}{2i} (\beta(k)(i-1) + \beta(k)^{-1}(i+1), \beta(k)(i+1) + \beta(k)^{-1}(i-1)). \quad (2.55)$$

Таким чином, ми довели наступне твердження:

Лема 2.11. Розв'язок векторної (відповідно, матричної) модельної задачі РГ, $m^{\text{mod}}(k)$ (відповідно $M^{\text{mod}}(k)$) задається формулою (2.55) (відповідно, (2.54)), де $\beta(k) = \sqrt[4]{\frac{k-a}{k+a}}$ у нерезонансному випадку, і $\beta(k) = \sqrt[4]{\frac{k+a}{k-a}}$ у резонансному випадку.

Перш ніж обґрунтувати асимптотичну еквівалентність $m^{(3)}(k) \sim m^{\text{mod}}(k)$ при $t \rightarrow \infty$ поза малими околами точок $\pm a$, покажемо, як із цієї еквівалентності можна знайти головний член асимптотики розв'язку рівняння КдФ. Дійсно, в силу (2.47) при досить великих k і t :

$$m_1(k) = m_1^{(3)}(k)d(k)\Lambda(k)e^{t(\Phi(k)-g(k))} \sim m_1^{\text{mod}}(k)d(k)\Lambda(k)e^{t(\Phi(k)-g(k))}. \quad (2.56)$$

Приймемо до уваги формулу (2.12), тоді

$$q(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \lim_{k \rightarrow \infty} 2ik (m_1(k, \xi, t) - 1).$$

Визначимо $h(\xi)$ як

$$\Lambda(k)d(k, \xi)m_1^{\text{mod}}(k, \xi) = 1 - \frac{h(\xi)}{2ik} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.57)$$

Тоді, в силу (2.36):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 2ik (m_1(k, \xi, t) - 1) \sim 12t\xi^2 - h(\xi). \quad (2.58)$$

Продиференціювавши праву частину (2.58) за змінною x , ми отримаємо

$$q(x, t) \sim -t \frac{\partial}{\partial x} (12\xi^2) + h'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{x}{6t} + \frac{h'(\xi)}{12t}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.59)$$

Далі буде доведено, що функція $h'(\xi)$ є рівномірно обмеженою за змінною ξ на інтервалі $[-\frac{c^2}{2} + \epsilon, -\epsilon]$, $\epsilon > 0$. Отже, другий доданок в формулі (2.59) має порядок $O(1/t)$. Головний член $-\frac{x}{6t}$ ми отримаємо з фазової функції, і він не буде залежати від даних розсіювання.

Наступні два підрозділи присвячені доведенню цього твердження. В підрозділі 2.6 ми також обґрунтуємо вигляд другого члена $Q(\xi)$ в асимптотичному розвиненні $q(x, t) \sim -\frac{x}{6t} + \frac{Q(\xi)}{6t} + o(t^{-1})$ і покажемо, що функція $Q(\xi)$ впливає зображення (2.56). Оскільки $\Lambda(k)$ не залежить від ξ , то ця величина не впливає на $Q(\xi)$. Таким чином, $h'(\xi)$ залежить тільки від відповідних членів розвинення функцій $d(k)$ і $m_1^{\text{mod}}(k)$. В силу (2.55), у резонансному випадку

$$\begin{aligned} m_1^{\text{mod}}(k) &= \frac{1}{2i} \left(\sqrt[4]{\frac{k+a}{k-a}}(i-1) + \sqrt[4]{\frac{k-a}{k+a}}(i+1) \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\left(1 + \frac{a}{2k}\right)(i-1) + \left(1 - \frac{a}{2k}\right)(i+1) \right) + O(k^{-2}) = 1 - \frac{a}{2ik} + O(k^{-2}). \end{aligned}$$

Отже, у резонансному випадку

$$m_1^{\text{mod}}(k) = 1 + \frac{a}{2ik} + O(k^{-2}).$$

Далі, нагадаємо, що $P(s) \log \mathcal{S}(s)$ є непарною функцією на інтервалі $[-a, a]$, де P і \mathcal{S} визначені формулою (2.42). Використовуючи формули (2.43) та $\frac{d}{ds}P^{-1}(s) = sP(s)$, ми отримуємо

$$\begin{aligned} d(k) &= 1 - \frac{1}{2\pi ik} \int_{-a}^a sP(s) \log \mathcal{S}(s) ds + O(k^{-2}) \\ &= 1 + \frac{1}{2\pi ik} \int_{-a}^a P^{-1}(s) \frac{d}{ds} \log \mathcal{R}(s) ds + O(k^{-2}). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$h(\xi) = 4 \sum_{j=1}^N \kappa_j \pm a - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \sqrt{s^2 - a^2 + i0} \frac{d}{ds} \log \mathcal{R}(s) ds,$$

де знаки \pm відповідають резонансному/нерезонансному випадкам відповідно.

Оскільки

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{da}{d\xi} \frac{1}{12t} = -\frac{1}{12at},$$

то

$$h'(\xi) = -\frac{1}{a} \left(\pm 1 + \frac{a}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\frac{d}{ds} \log \mathcal{R}(s)}{\sqrt{s^2 - a^2 + i0}} ds \right).$$

Таким чином, як тільки (2.59) буде обґрунтовано, ми отримаємо другий член розвинення $Q(\xi)$.

2.5. Задача параметрикса

Для обґрунтування асимптотики розв'язку $q(x, t)$, дослідимо спочатку так звану задачу параметрикса, яка виникає в околах вузлових точок $\pm a = \pm a(\xi)$. Це додаткова матрична задача РГ, яка бере до уваги той факт, що в околах $\pm a$ матриці стрибка $A_4(k)$ і $A_5(k)$ (див. (2.46), (2.48), (2.49)) насправді не є близькими до одиничної матриці. При розв'язанні модельної задачі ми вважали ці матриці одиничними. Задача параметрикса враховує їх вплив.

Розглянемо, наприклад, точку $-a(\xi)$. Нехай \mathcal{B}_- є малим оточенням цієї точки. Введемо позначення

$$\Sigma_1 = [-a, a] \cap \mathcal{B}_-, \quad \Sigma_2 = \mathcal{C}^U \cap \mathcal{B}_-, \quad \Sigma_3 = \mathcal{C}^L \cap \mathcal{B}_-. \quad (2.60)$$

Ми обираємо орієнтацію цих контурів в напрямку від точки $-a$, тобто, орієнтація на Σ_2 і Σ_3 є протилежною орієнтації на \mathcal{C}^U і \mathcal{C}^L . У середині області \mathcal{B}_- розв'язок $m^{(3)}$ має стрибки тільки на цих контурах.

Спочатку дослідимо більш детально поведінку функції $d(k)$, що визначено формулою (2.43) при $k \rightarrow -a$.

Лема 2.12. *При $k \rightarrow -a$ мають місце наступні асимптотичні формули:*

$$\begin{aligned} d(k)^{-2} \mathcal{R}(k) &= \mathcal{R}(0) + O(\sqrt{k+a}), \quad k \notin \Sigma_1; \\ \frac{d_+(k)}{d_-(k)} &= 1 + O(\sqrt{k+a}), \quad k \in \Sigma_1. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Доведення. Для доведення асимптотики (2.61) використаємо формулу (2.42) і зобразимо інтеграл (2.43) у вигляді

$$\int_{-a}^a \frac{P(s) \log \mathcal{S}(s)}{(s-k)} ds = I_1(k) + i \arg \mathcal{S}(-a) I_2(k), \quad (2.62)$$

де

$$I_1(k) = \int_{-a}^a \frac{P(s)(\log \mathcal{S}(s) - \log \mathcal{S}(-a))}{s-k} ds, \quad I_2(k) = \int_{-a}^a \frac{P(s) ds}{s-k}.$$

Оскільки при $a \in (0, c)$ коефіцієнт відбиття $R(k)$ і добуток Бляшке $\Lambda(k)$ є гладкими функціями, то $\mathcal{S}(s) - \mathcal{S}(-a) = O(s + a)$. Таким чином, в околі точки $-a$ має місце асимптотика:

$$(\log \mathcal{S}(s) - \log \mathcal{S}(-a))(s^2 - a^2)^{-1/2} = O((s + a)^{1/2}).$$

Можна показати (див. [18], формули (22.4) і (22.7)), що функція $I_1(k)$ є гельдерівською в околі точки $-a$, зі скінченним граничним значенням

$$I_1(-a) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \frac{\arg \mathcal{S}(s) - \arg \mathcal{S}(-a)}{\sqrt{|a^2 - s^2|}(s - a)} ds$$

у будь-якому напрямку. Другий інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i} I_2(k) = \frac{1}{2\sqrt{k^2 - a^2}},$$

є розв'язком наступної адитивної задачі РГ: $F_+(k) = F_-(k) + P(k)$, $k \in [-a, a]$; $F(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Підставимо цей вираз в формулу (2.43) і використаємо формулу (2.62), тоді

$$\begin{aligned} \log d(k) &= -\frac{1}{2}i \arg \mathcal{S}(-a) + \frac{I_1(-a)}{\pi i} \sqrt{k^2 - a^2} + O(k + a) \\ &= -\frac{1}{2} \log \mathcal{S}(-a) + \tilde{I}(-a) \sqrt{k + a} + O(k + a), \end{aligned} \quad (2.63)$$

де

$$\tilde{I}(-a) = \frac{\sqrt{2a}}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\arg \mathcal{S}(s) - \arg \mathcal{S}(-a)}{\sqrt{a^2 - s^2}(s + a)} ds. \quad (2.64)$$

Відзначимо, що головні члени в зображенні $\log d_+(k)$ і $\log d_-(k)$ в околі точки $-a$ є однаковими. З формул (2.63), (2.64) тоді випливають асимптотики (2.61). \square

Ця лема дозволяє замінити матрицю стрибка (2.46) всередині області \mathcal{B}_- матрицею

$$v^{\text{par}}(k) := e^{-tg_-(k)\sigma_3} S e^{tg_+(k)\sigma_3}, \quad (2.65)$$

де

$$S := \begin{cases} S_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{R}(0) \\ \mathcal{R}(0) & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Sigma_1, \\ S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{R}(0) & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Sigma_2, \\ S_3 = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{R}(0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \Sigma_3. \end{cases} \quad (2.66)$$

Оскільки $\mathcal{R}(0)^2 = 1$, то $S_1 S_2 S_3 = \mathbb{I}$, і, крім того, $\det(S_j) = 1$.

Ми шукаємо матричний розв'язок задачі стрибка в області $\mathcal{B}_- \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3)$ у вигляді

$$M_+^{\text{par}}(k) = M_-^{\text{par}}(k) v^{\text{par}}(k), \quad (2.67)$$

причому вважаємо, що ця матриця є асимптотично близькою до матриці $M^{\text{mod}}(k)$ на межі області $\partial\mathcal{B}_-$ при $t \rightarrow \infty$ (див. також [53]). Якщо M^{par} є розв'язком задачі стрибка (2.67), то матрична функція

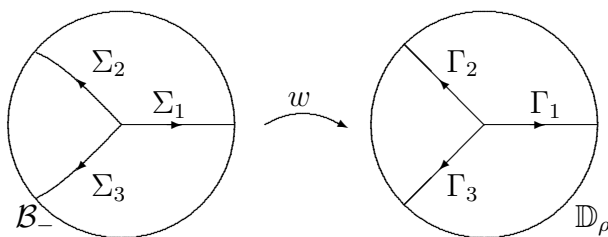
$$M(k) = M^{\text{par}}(k) e^{-tg(k)\sigma_3}$$

є розв'язком задачі РГ зі сталою матрицею стрибка $M_+(k) = M_-(k)S$, із нормуванням $M \sim M^{\text{mod}} e^{-tg\sigma_3}$ на $\partial\mathcal{B}_-$.

Нашою найближчою метою є розв'язок цієї задачі. Для спрощення міркувань зробимо заміну координат, яка дозволяє привести g -функцію до деякого нормованого вигляду, і в той же час масштабує змінні. Для цього зауважимо, що в малому околі точки $-a$ функція g може бути зображена у вигляді

$$g(k) = 8\sqrt{2}a^{3/2}(k+a)^{3/2}(1 + O(k+a)), \quad \text{при } k \rightarrow -a,$$

де корінь має розріз уздовж променя $[-a, +\infty)$, а вітка розрізу фіксується умовою $(\epsilon + i0)^{3/2} > 0$, $\epsilon > 0$. Другий член цього розвинення залежить лише від a і є рівномірним на будь-якому компактi.

Рис. 2.6. Локальна заміна координат $w(k)$.

Введемо наступну локальну змінну

$$w(k) := \left(\frac{3tg(k)}{2} \right)^{2/3}.$$

Тоді

$$w(k) = t^{2/3} C_1 (k + a) (1 + O(k + a)), \quad C_1 = 2 \cdot 6^{2/3} a > 0. \quad (2.68)$$

Таким чином, функція $w(k)$ є голоморфною заміною координат.

До цього моменту ми не уточнювали, яким чином обираємо окіл \mathcal{B}_- . Цей окіл зручно вибрати як прообраз при відображенні $k \mapsto w$ кола \mathbb{D}_ρ з радіусом $t^{2/3} C_1 \rho$, с $\rho < a/4$, з центром $w = 0$. Також без обмеження загальності можна вибрати контури \mathcal{C}^U и \mathcal{C}^L таким чином, щоб відрізки $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ відображались у прямі $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3) \cap \mathbb{D}_\rho$ (див. Рис. 2.6), де

$$\Gamma_2 = \{w \in \mathbb{C} : \arg w = \frac{2\pi i}{3}\}, \quad \Gamma_3 = \{w \in \mathbb{C} : \arg w = \frac{4\pi i}{3}\}, \quad \Gamma_1 = [0, +\infty).$$

Тоді матричну задачу (2.65)-(2.67) можна розглянути як задачу, що залежить від змінної $w \in \mathbb{D}_\rho$. Ця задача має різні розв'язки для резонансного й нерезонансного випадків.

Розглянемо спочатку нерезонансний випадок. Позначимо

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У нерезонансному випадку функція $\beta(k)$ (див. Лему 2.11) може бути зображена наступним чином:

$$\beta(k) = w^{-1/4} \gamma(w), \quad w \in \mathbb{D}_\rho,$$

де функція $\gamma(w)$ є голоморфною і задовольняє асимптотиці

$$\gamma(w) = 2^{2/3} 3^{1/6} \sqrt{a} e^{\frac{i\pi}{4}} t^{1/6} \left(1 + O\left(\frac{w}{t^{2/3}}\right)\right), \quad \text{при } w \rightarrow 0,$$

причому залишковий член залежить тільки від a і є рівномірним на компактній множині, яка не містить точку $a = 0$. Матриця (2.54) може бути зображена як (див. (2.53)):

$$M^{\text{mod}}(k) = S_0 \gamma(w)^{\sigma_3} w^{-\frac{\sigma_3}{4}} S_0^{-1}.$$

Припустимо тепер, що ми знайшли матрицю $\mathcal{A}(w)$, яка задовольняє умові стрибка

$$\mathcal{A}_+ = S_j \mathcal{A}_-, \quad \text{на } \Gamma_j, \quad (2.69)$$

і умові нормування

$$\mathcal{A}(w) = w^{-\frac{\sigma_3}{4}} (S_0^{-1} + O(w^{-3/2})) e^{-\frac{2}{3} w^{3/2} \sigma_3}, \quad \text{при } w \rightarrow \infty, \quad (2.70)$$

в будь-якому напрямку за змінною w .

Область \mathbb{D}_ρ збільшується при $t \rightarrow \infty$, отже

$$\begin{aligned} M^{\text{par}}(k) &= S_0 \gamma(w)^{\sigma_3} \mathcal{A}(w) e^{\frac{2}{3} w^{3/2} \sigma_3} \\ &= M^{\text{mod}}(k) S_0 \left(\frac{3tg(k)}{2}\right)^{\sigma_3/6} \mathcal{A}\left(\left(\frac{3tg(k)}{2}\right)^{2/3}\right) e^{tg(k)\sigma_3}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Зауважимо, що

$$M^{\text{par}}(k) = M^{\text{mod}}(k) (\mathbb{I} + O(|k|^{-3/2} t^{-1})), \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (2.72)$$

із залишковим членом, який залежить тільки від a і є рівномірним при $a \in [\varepsilon_1, c - \varepsilon_2]$ при достатньо малих $\varepsilon_j > 0$. Розв'язок задачі РГ (2.69), (2.70) може бути виражений через функції Ейрі (див. [64, розділ 5]). А саме, покладемо

$$y_1(w) = \text{Ai}(w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp\left(\frac{1}{3} z^3 - wz\right) dz,$$

і нехай

$$y_2(w) = e^{-\frac{2\pi i}{3}} \text{Ai}\left(e^{-\frac{2\pi i}{3}} w\right), \quad \text{і } y_3(w) = e^{\frac{2\pi i}{3}} \text{Ai}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}} w\right).$$

Ці функції є цілими функціями, і вони пов'язані добре відомою тотожністю (див. [62, (9.2.12)]):

$$y_1(w) + y_2(w) + y_3(w) = 0. \quad (2.73)$$

Крім того, покладемо

$$\Omega_1 = \{w : \arg w \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)\}, \quad \Omega_2 = \{\arg w \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)\}, \quad \Omega_3 = \mathbb{C} \setminus \overline{\{\Omega_1 \cup \Omega_2\}}.$$

Ми обираємо розрізи для всіх коренів w уздовж контуру Γ_1 і вважаємо, що $\arg w \in [0, 2\pi)$. Використовуючи відомі асимптотики функцій Ейрі (див. [62, (9.7.5),(9.7.6)]), ми отримуємо:

$$y_1(w) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}w^{1/4}}e^{-\frac{2}{3}w^{3/2}}(1 + O(w^{-3/2})), & w \in \Omega_1, \\ \frac{i}{2\sqrt{\pi}w^{1/4}}e^{\frac{2}{3}w^{3/2}}(1 + O(w^{-3/2})), & w \in \Omega_3, \end{cases} \quad (2.74)$$

$$y_2(w) = -\frac{i}{2\sqrt{\pi}w^{1/4}}e^{\frac{2}{3}w^{3/2}}(1 + O(w^{-3/2})), \quad w \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (2.75)$$

$$y_3(w) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}w^{1/4}}e^{-\frac{2}{3}w^{3/2}}(1 + O(w^{-3/2})), \quad w \in \Omega_2 \cup \Omega_3. \quad (2.76)$$

Зауважимо, що вони є диференційовними за змінною w . Покладемо

$$(1 - i)\sqrt{\pi} \begin{pmatrix} y_1(w) & y_2(w) \\ -y_1'(w) & -y_2'(w) \end{pmatrix} =: \mathcal{A}_1(w), \quad w \in \Omega_1.$$

Тоді $\det \mathcal{A}_1(w) = 1$ (див. [62, (9.2.8)]), і в силу (2.74), (2.75) ми маємо правильне нормування (2.70) в Ω_1 . Далі, в силу тотожності (2.73):

$$\mathcal{A}_1(w)S_2 = (1 - i)\sqrt{\pi} \begin{pmatrix} -y_3(w) & y_2(w) \\ y_3'(w) & -y_2'(w) \end{pmatrix} =: \mathcal{A}_2(w),$$

і ми будемо використовувати це означення в області Ω_2 . Тоді $\det \mathcal{A}_2(w) = 1$, отже, в силу асимптотик (2.75), (2.76) матриця $\mathcal{A}_2(w)$ задовольняє умовам нормування (2.70) в Ω_2 . Таким же чином ми перевіряємо, що матриця

$$\mathcal{A}_2S_3 = \mathcal{A}_1(w)S_1^{-1} = (1 - i)\sqrt{\pi} \begin{pmatrix} -y_3(w) & -y_1(w) \\ y_3'(w) & y_1'(w) \end{pmatrix} =: \mathcal{A}_3(w),$$

має необхідні властивості в області Ω_3 . Отже, $\mathcal{A}(w) = \mathcal{A}_j(w)$ при $w \in \Omega_j$ є шуканим розв'язком.

Висновок 2.13. Матриця $M^{\text{par}}(w)$, яка визначена формулою (2.71), задовольняє рівності $\det M^{\text{par}}(w) = 1$ і є обмеженою в області $\overline{\mathbb{C}}$.

Розглянемо тепер другий член асимптотичного розвинення для функцій Ейрі (см. [62, (9.7.5, 9.7.6)]). Комбінуючи його з асимптотикою (2.72), ми маємо

$$(M^{\text{mod}}(k))^{-1} M^{\text{par}}(k) = \mathbb{I} + \frac{1}{72tg(k)} \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} + O(t^{-2}), \quad (2.77)$$

причому ця асимптотика є рівномірною на межі $\partial\mathcal{B}_-$.

Покажемо тепер, як умова симетрії дозволяє безпосередньо знайти розв'язок задачі параметрикса в околі точки a . Нехай \mathcal{B}_+ є околом точки a , який є симетричним околу \mathcal{B}_- при відображенні $k \mapsto -k$. Використаємо властивість симетрії матриць стрибків в околах \mathcal{B}_{\pm} , а також симетрію розв'язку модельної задачі $M(-k) = \sigma_1 M(k) \sigma_1$. Тоді

$$M^{\text{par}}(k) = \sigma_1 M^{\text{par}}(-k) \sigma_1, \quad k \in \mathcal{B}_+.$$

Далі тривіальною перевіркою ми встановлюємо, що ця матриця дійсно є розв'язком відповідної задачі параметрикса в області \mathcal{B}_+ . Оскільки $\det M^{\text{par}}(k) = 1$, то матриця $M^{\text{par}}(k)$ є оборотною і $M^{\text{par}}(k)$, $(M^{\text{par}})^{-1}(k)$ є обмеженими при всіх $k \in \text{clos}(\mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_-)$ та всіх $t > 0$.

Розглянемо тепер розв'язок задачі параметрикса у резонансному випадку. Матриця S , яка задається формулою (2.66), має вигляд

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а головний член функції $\beta(k)$ має вигляд $\beta(k) = (2a)^{-1/4} e^{-i\pi/4} (k+a)^{1/4} (1+o(1))$

при $k \rightarrow -a$. Зобразимо матрицю (2.54) у вигляді

$$M^{\text{mod}}(k) = S_0 \begin{pmatrix} \beta(k)^{-1} & 0 \\ 0 & \beta(k) \end{pmatrix} S_0^{-1}.$$

В силу Лема 2.11:

$$M^{\text{mod}}(k) = \tilde{S}_0 \gamma(w)^{\sigma_3} w^{-\frac{\sigma_3}{4}} \tilde{S}_0^{-1}, \quad \gamma(k) = \beta(k(w))^{-1} w^{1/4},$$

де

$$\tilde{S}_0 = \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -i & -i \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_0^{-1} = \frac{1-i}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Нормування (2.70) має вигляд

$$\mathcal{A}(w) := w^{-\frac{\sigma_3}{4}} (\tilde{S}_0^{-1} + O(w^{-3/2})) e^{-\frac{2}{3} w^{3/2} \sigma_3},$$

і тоді

$$\mathcal{A}_1(w) = (1-i) \sqrt{\pi} \begin{pmatrix} y_1(w) & -y_2(w) \\ y_1'(w) & -y_2'(w) \end{pmatrix}, \quad w \in \Omega_1.$$

Подальші міркування аналогічні і призводять до тієї ж самої формули (2.77).

2.6. Завершення асимптотичного аналізу

Метою цього підрозділу є встановлення такого факту: розв'язок $m^{(3)}(k)$ задачі РГ з Теорема 2.10, добре апроксимується вектор-функціями: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} M^{\text{par}}(k)$ в області $\mathcal{B} = \mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_-$ і $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} M^{\text{mod}}(k)$ в області $\mathbb{C} \setminus \mathcal{B}$, відповідно. Ми будемо застосовувати добре відомі методи з теорії сингулярних інтегральних рівнянь (див., наприклад, [44, 51, 53, 58]). Для спрощення, введемо додаткові позначення:

$$\tilde{\Sigma} = [-a, a] \cup \mathcal{C}^U \cup \mathcal{C}^L \cup \mathbb{T}_\delta \cup \partial \mathcal{B}, \quad \Sigma_\pm = \tilde{\Sigma} \cap \mathcal{B}_\pm, \quad \Sigma_{\mathcal{B}} = \tilde{\Sigma} \cap \mathcal{B},$$

тобто $\Sigma_- = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, де Σ_i визначені формулою (2.60). Будемо позначати три частини кожного контуру Σ_+ і Σ_- , з орієнтацією як на $[-a, a] \cup \mathcal{C}^U \cup \mathcal{C}^L$, через

Σ_j^+ і Σ_j^- , $j = 1, 2, 3$. Покладемо

$$\hat{m}(k) = m^{(3)}(k)(M^{\text{as}}(k))^{-1}, \quad \text{де} \quad M^{\text{as}}(k) := \begin{cases} M^{\text{par}}(k), & k \in \mathcal{B}, \\ M^{\text{mod}}(k), & k \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{B}. \end{cases} \quad (2.78)$$

Тоді функція $\hat{m}(k)$ є розв'язком наступної задачі

$$\hat{m}_+(k) = \hat{m}_-(k)\hat{v}(k),$$

де

$$\hat{v}(k) = \begin{cases} M_-^{\text{par}}(k)v^{(3)}(k)(M_+^{\text{par}}(k))^{-1}, & k \in \Sigma_{\mathcal{B}}, \\ (M^{\text{mod}}(k))^{-1}M^{\text{par}}(k), & k \in \partial\mathcal{B}, \\ M_-^{\text{mod}}(k)v^{(3)}(k)(M_+^{\text{mod}}(k))^{-1}, & k \in \tilde{\Sigma} \setminus (\Sigma_{\mathcal{B}} \cup \partial\mathcal{B}), \end{cases} \quad (2.79)$$

а також задовольняє умовам симетрії та нормування:

$$\hat{m}(k) = \hat{m}(-k)\sigma_1, \quad \hat{m} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.80)$$

Позначимо через $W(k) = \hat{v}(k) - \mathbb{I}$. Тоді

$$W(k) = \begin{cases} M_-^{\text{par}}(k)(v^{(3)}(k) - v^{\text{par}}(k))(M_+^{\text{par}}(k))^{-1}, & k \in \Sigma_{\mathcal{B}}, \\ (M^{\text{mod}}(k))^{-1}M^{\text{par}}(k) - \mathbb{I}, & k \in \partial\mathcal{B}, \\ M_-^{\text{mod}}(k)(v^{(3)}(k) + i\mathcal{R}(0)\sigma_2)(M_+^{\text{mod}}(k))^{-1}, & k \in [-a, a] \setminus \Sigma_{\mathcal{B}}, \\ M_-^{\text{mod}}(k)(v^{(3)}(k) - \mathbb{I})(M_+^{\text{mod}}(k))^{-1}, & k \in \tilde{\Sigma} \setminus (\Sigma_{\mathcal{B}} \cup \partial\mathcal{B} \cup [-a, a]). \end{cases} \quad (2.81)$$

За побудовою, функція $W(k)$ є гладкою функцією від параметра ξ при $\xi \in \mathcal{I} = [-\frac{\epsilon^2}{2} + \epsilon, -\epsilon]$, де $\epsilon \in$ довільно малою фіксованою додатною величиною. Оскільки $a(\xi) > \sqrt{2\epsilon}$, то ми можемо завжди вважати, що мінімальний радіус ρ множин \mathcal{B}_{\pm} задовольняє оцінці $\rho \geq \frac{1}{4}\sqrt{2\epsilon}$.

Розглянемо спочатку функцію $W(k)$ на контурі $\Sigma_{\mathcal{B}}$. Матриці $M_-^{\text{par}}(k)$ і $(M_+^{\text{par}}(k))^{-1}$ є гладкими обмеженими функціями за змінними $k \in \Sigma_{\mathcal{B}}$, $t \in [1, \infty)$

і $\xi \in \mathcal{I}$. Матриця $v^{(3)}(k) - v^{\text{par}}(k)$ має єдиний ненульовий елемент на кожній частині контуру Σ_B . Позначимо цей елемент через $u_{\pm}(k)$:

$$u_{\pm}(k) = \begin{cases} (\mathcal{R}(0) - d(k)^2 \mathcal{R}(-k))e^{-2tg(k)}, & k \in \Sigma_3^{\pm}, \\ (d(k)^{-2} \mathcal{R}(k) - \mathcal{R}(0))e^{2tg(k)}, & k \in \Sigma_2^{\pm}, \\ \left(\frac{d_+(k)}{d_-(k)} - 1\right)e^{-2tg_+(k)}, & k \in \Sigma_1^{\pm}. \end{cases}$$

Оскільки на контурі Σ_{\pm} виконується рівність $g(k) = \text{Re } g(k)$, то в силу асимптотик (2.61), (2.63) і вигляду інтеграла (2.64), має місце зображення

$$u_{\pm}(k) = \left(C_j^{\pm} \tilde{I}(\pm a) \sqrt{|k \mp a|}\right) e^{-2(2a)^{3/2}t|k \mp a|^{3/2}} + O(k \mp a) e^{-2tg(k)}, \quad k \in \Sigma_j^{\pm}, \quad (2.82)$$

де $(C_j^{\pm})^6 = 1$. Зауважимо, що

$$u_{\pm}(k) = O(t^{-1/3}), \quad k \in \Sigma_{\pm},$$

де похибка $O(t^{-1/3})$ є рівномірно обмеженою відносно $\rho = \rho(\xi)$ і $a = a(\xi)$ при $\xi \in \mathcal{I}$. В цьому підрозділі позначення $O(t^{-l})$ є функцію, що залежить від змінних a , ρ , і t з наведеними вище властивостями. Ми використовуємо це позначення при $t \in [T_0, \infty)$, де $T_0 = T_0(\epsilon)$ є великим додатним значенням часу.

Вочевидь точки $(\pm a + (C_j^{\pm})^2 \delta_j^{\pm})$ є крайніми точками контурів Σ_j^{\pm} . Нагадаємо, що $\delta_j^{\pm} \geq \rho \geq \frac{\sqrt{2\epsilon}}{4}$. Тоді

$$\int_{\Sigma_j^{\pm}} u_{\pm}(k) dk = C_j^{\pm} \tilde{I}(\pm a) \int_0^{\delta_j^{\pm}} y^{1/2} e^{-8ta\sqrt{2a}y^{3/2}} dy + O(t^{-4/3}) = \frac{F_{\pm}(a, j)}{t} + O(t^{-4/3}),$$

де $F_{\pm}(a, j) = C_j^{\pm} \tilde{I}(\pm a) (12a\sqrt{2a})^{-1}$, і

$$\|u_{\pm}\|_{L_1(\Sigma_{\pm})} = O(t^{-1}).$$

Оскільки елементи матриці $[M_-^{\text{par}}]_{rs}(k) [(M_+^{\text{par}})^{-1}]_{pq}(k)$, $r, s, p, q \in \{1, 2\}$ є рівномірно обмеженими при $k \in \Sigma_B$ відносно $\xi \in \mathcal{I}$, то, використовуючи формули (2.68), (2.82) і наслідок 2.13, ми отримуємо при $\ell = 0, 1$:

$$\sum_{\pm} \int_{\Sigma_{\pm}} k^{\ell} u_{\pm}(k) [M_-^{\text{par}}]_{rs}(k) [(M_+^{\text{par}})^{-1}]_{pq}(k) dk = \frac{h_{p,q,r,s,\ell}(a)}{t} + O(t^{-4/3}). \quad (2.83)$$

Тут функції $h_{p,q,r,s,\ell}(a)$ є обмеженими за змінною $\xi \in \mathcal{I}$, а оцінка (2.83) припускає, що

$$\int_{\Sigma_B} k^\ell W(k) dk = \frac{F_{2,\ell}(a)}{t} + O(t^{-4/3}), \quad \ell = 0, 1,$$

де матриці $F_{2,\ell}(a)$ є обмеженими при $\xi \in \mathcal{I}$. З цього випливають наступні оцінки

$$\|k^\ell W(k)\|_{L^1(\Sigma_B)} = O(t^{-1}), \quad \|k^\ell W(k)\|_{L^\infty(\Sigma_B)} = O(t^{-1/3}).$$

Крім того, з (2.81) і (2.77) випливає, що

$$\int_{\partial B} k^\ell W(k) dk = \frac{F_{3,\ell}(a)}{t \rho^{1/2}} + O(t^{-4/3}),$$

де матриці $F_{3,\ell}(a)$ мають ті ж самі властивості, як і $F_{2,\ell}(a)$. Матриця $M^{\text{mod}}(k)$ і обернена до неї матриця є обмеженими із оцінкою $O(\rho^{-1/4})$ на частині контуру $\tilde{\Sigma}$, що залишилася. Використовуючи формули (2.45), (2.81), (2.48), (2.49), і (2.44), ми отримуємо, що при $\ell = 0, 1$:

$$\int_{\tilde{\Sigma} \setminus (\Sigma_B \cup \partial B)} k^\ell W(k) dk = \tilde{F}_\ell(a, \rho, t), \quad \|\tilde{F}_\ell(a, \rho, t)\| \leq C(\ell) \rho^{-1/4} e^{-\frac{\rho t}{2}},$$

де норми матриць $F_\ell(a, \rho, t)$ є рівномірно обмеженими відносно змінних a і ρ при $t \in [T_0, \infty)$ та $\xi \in \mathcal{I}$. Зауважимо, що з формул (2.81), (2.48), (2.49) і (2.44) випливає також, що

$$\|k^\ell W(k)\|_{L^1(\tilde{\Sigma} \setminus (\Sigma_B \cup \partial B))} \leq O(e^{-ct}), \quad \|k^\ell W(k)\|_{L^\infty(\tilde{\Sigma} \setminus (\Sigma_B \cup \partial B))} \leq O(e^{-ct}).$$

Як наслідок, ми отримуємо наступну лему:

Лема 2.14. *Має місце оцінка, яка є рівномірною за змінною $\xi \in \mathcal{I}$:*

$$\|W\|_{L^p(\tilde{\Sigma})} = O\left(t^{-\frac{1}{3} - \frac{2}{3p}}\right), \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (2.84)$$

Крім того, має місце зображення

$$\frac{1}{\pi i^\ell} \begin{pmatrix} 1, & 1 \end{pmatrix} \int_{\tilde{\Sigma}} k^\ell W(k) dk = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^\ell \end{pmatrix} \frac{f_\ell(a, \rho)}{t} + O\left(t^{-4/3}\right), \quad j = 0, 1, \quad (2.85)$$

де функції $f_\ell(a, \rho)$ є обмеженими за змінними a і ρ при $\xi \in \mathcal{I}$.

Використаємо тепер основи нелінійного методу найшвидшого спуску (див. [44, 51, 58]) стосовно техніки сингулярних інтегральних рівнянь. Перелічімо спочатку відомі поняття і оцінки.

Нехай \mathfrak{C} є оператором Коші на контурі $\tilde{\Sigma}$:

$$(\mathfrak{C}h)(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Sigma}} h(s) \frac{ds}{s-k}, \quad k \in \mathbb{C} \setminus \tilde{\Sigma},$$

де $h = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix}$ є вектор-функцією, $h \in L^2(\tilde{\Sigma}) \cup L^\infty(\tilde{\Sigma})$. Нехай $\mathfrak{C}_+ f$ і $\mathfrak{C}_- f$ є його недотичними граничними значеннями для лівої і правої сторін $\tilde{\Sigma}$ відповідно. Ці оператори є рівномірно обмеженими за змінною $a \in \mathcal{I}$.

Розглянемо оператор $\mathfrak{C}_W : L^2(\tilde{\Sigma}) \cup L^\infty(\tilde{\Sigma}) \rightarrow L^2(\tilde{\Sigma})$, який визначено за формулою $\mathfrak{C}_W f = \mathfrak{C}_-(fW)$, де W є матрицею похибки (2.81). Тоді

$$\|\mathfrak{C}_W\|_{L^2(\tilde{\Sigma}) \rightarrow L^2(\tilde{\Sigma})} \leq C \|W\|_{L^\infty(\tilde{\Sigma})} \leq O(t^{-1/3})$$

і, відповідно,

$$\|(\mathbb{I} - \mathfrak{C}_W)^{-1}\|_{L^2(\tilde{\Sigma}) \rightarrow L^2(\tilde{\Sigma})} \leq \frac{1}{1 - O(t^{-1/3})} \quad (2.86)$$

при достатньо великому значенні t . Тим самим, при $t \gg 1$, ми можемо визначити вектор-функцію

$$\mu(k) = \begin{pmatrix} 1, & 1 \end{pmatrix} + (\mathbb{I} - \mathfrak{C}_W)^{-1} \mathfrak{C}_W \left(\begin{pmatrix} 1, & 1 \end{pmatrix} \right) (k).$$

Тоді в силу оцінок (2.84) і (2.86):

$$\begin{aligned} \|\mu(k) - \begin{pmatrix} 1, & 1 \end{pmatrix}\|_{L^2(\tilde{\Sigma})} &\leq \|(\mathbb{I} - \mathfrak{C}_W)^{-1}\|_{L^2(\tilde{\Sigma}) \rightarrow L^2(\tilde{\Sigma})} \|\mathfrak{C}_-\|_{L^2(\tilde{\Sigma}) \rightarrow L^2(\tilde{\Sigma})} \|W\|_{L^2(\tilde{\Sigma})} \\ &= O(t^{-2/3}). \end{aligned} \quad (2.87)$$

За допомогою μ розв'язок задачі РГ (2.79)-(2.80) можна зобразити у вигляді

$$\hat{m}(k) = \begin{pmatrix} 1, & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Sigma}} \frac{\mu(s)W(s)ds}{s-k}$$

і в силу оцінки (2.87) та Лема 2.14 отримаємо при $k \rightarrow +i\infty$:

$$\hat{m}(k) = \begin{pmatrix} 1, & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Sigma}} \frac{\begin{pmatrix} 1, & 1 \end{pmatrix} W(s)}{k-s} ds + H(k), \quad (2.88)$$

де

$$|H(k)| \leq \frac{1}{\operatorname{Im} k} \|W\|_{L^2(\tilde{\Sigma})} \|\mu(k) - \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\|_{L^2(\tilde{\Sigma})} \leq \frac{O(t^{-4/3})}{\operatorname{Im} k},$$

причому оцінка $O(t^{-4/3})$ є рівномірно обмеженою відносно змінних a і ρ при $\xi \in \mathcal{I}$. У випадку $\operatorname{Re} k = 0, \operatorname{Im} k \rightarrow +\infty$ ми маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Sigma}} \frac{\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} W(s)}{k-s} ds &= \frac{f_0(a, \rho)}{2ikt} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} + \frac{f_1(a, \rho)}{2k^2 t} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \\ &+ O(t^{-1})O(k^{-3}) + O(t^{-4/3})O(k^{-1}), \end{aligned}$$

де $O(k^{-s})$ є вектор-функціями, що залежать тільки від k , а скаляри $O(t^{-s})$ є рівномірно обмеженими за k та ξ , як визначено вище. Тоді можемо обрати $\rho = \sqrt{\frac{\epsilon}{8}}$ і позначити $f_\ell(a, \rho) := f_\ell(\xi)$. Ці функції є обмеженими при $\xi \in \mathcal{I}$ і диференційовними за змінною ξ . Використаємо означення (2.78) і асимптотики (2.56) при великому значенні $k \rightarrow +i\infty$, тоді

$$m(k) = \hat{m}(k) M^{\operatorname{mod}}(k) \left(d(k) \Lambda(k) e^{t(\Phi(k) - g(k))} \right)^{\sigma_3}.$$

З формул (2.12), (2.54), (2.57), (2.58), (2.85), (2.88) випливає, що:

$$\begin{aligned} \int_x^\infty q(y, t) dy &= 12t\xi^2 - h(\xi) + \frac{f_0(\xi)}{t} + O(t^{-4/3}), \\ q(x, t) &= -2\xi - \frac{f_1(\xi) \mp 2af_0(\xi)}{t} + O(t^{-4/3}). \end{aligned}$$

Зокрема, ці рівності доводять такий факт: першу асимптотичну формулу можна продиференціювати за змінною x , причому

$$q(x, t) = -2\xi + \frac{1}{12t} h'(\xi) + O(t^{-4/3}).$$

Це встановлює асимптотичну формулу (2.59) і завершує доведення наступного основного результату розділу.

Теорема 2.15. Нехай $q(x, t)$ є розв'язком задачі Коші (1.1), (2.1). Тоді при довільному малому $\epsilon_2 > 0$ в області $(-6c^2 + \epsilon_2)t < x < -\epsilon_2 t$ при $t \rightarrow \infty$ рівномірно відносно $\xi = \frac{x}{12t}$ має місце така асимптотика:

$$q(x, t) = -\frac{x + Q(\xi)}{6t}(1 + O(t^{-1/3})), \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

де

$$Q(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_{-\sqrt{-2\xi}}^{\sqrt{-2\xi}} \left(\frac{d}{ds} \log R(s) - 4i \sum_{j=1}^N \frac{\kappa_j}{s^2 + \kappa_j^2} \right) \frac{ds}{\sqrt{s^2 + 2\xi}} \mp \frac{1}{2\sqrt{-2\xi}},$$

причому знаки \pm відповідають резонансному/нерезонансному випадкам відповідно.

Слід зазначити, що отримані результати не охоплюють дві перехідні області: $x \approx 0$ біля головного фронту хвилі і $x \approx -6c^2t$ біля заднього фронту хвилі.

Висновки до розділу 2

- Нелінійним методом найшвидшого спуску досліджено асимптотичну поведінку в солітонній зоні при великих значеннях часу розв'язку задачі Коші для рівняння Кортевега – де Фріза з початковими умовами типу сходинки, які відповідають хвилі розрідження. При цьому сформульовано асоційовану мероморфну векторну задачу Рімана – Гільберта і доведено існування та єдиність її розв'язку. Взаємно однозначними перетвореннями задачу зведено до голоморфної із додатковими стрибками на колах навколо точок дискретного спектру. Методом лінз цю голоморфну задачу зведено до задачі зі стрибками, що є близькими до одиничної матриці при великих значеннях часу. Показано і математично строго обґрунтовано, що основний вклад в солітонній області дають ті значення параметру $\xi = \frac{x}{12t}$, при яких нульова лінія рівня дійсної частини фазової функції співпадає з однією з точок дискретного спектру. Обчислено і строго обґрунтовано відповідну солітонну асимптотику хвилі розрідження.
- Досліджено асимптотичну поведінку при великих значеннях часу хвилі розрідження у середній області просторово-часової півплощини. Встановлено

низку перетворень початкової мероморфної векторної задачі Рімана – Гільберта за правими даними розсіювання, що призводять до еквівалентної голоморфної векторної задачі із деформованими відносно початкових контурами і матрицями стрибків, що є близькими до матриць зі сталими коефіцієнтами, за виключенням малих околів двох точок параметрикса. Розв’язано відповідну модельну задачу, як у випадку резонансу, так і у загальному нерезонансному випадку. Строго розв’язано асоційовані локальні задачі параметрикса та доведено, що розв’язок модельної задачі добре апроксимує розв’язок початкової задачі Рімана – Гільберта на нескінченності. Обчислено й строго обґрунтовано перший та другий члени асимптотичного розв’язку при великих значеннях часу розв’язку задачі Коші для рівняння Кортевега – де Фріза з початковими умовами типу сходінки, які відповідають хвилі розрідження. Досліджено вплив резонансу на цю асимптотику.

Основні результати розділу опубліковані в роботі [65].

РОЗДІЛ 3.

Асимптотика хвилі розрідження позаду заднього фронту хвилі

В цьому розділі ми обґрунтуємо асимптотичне розвинення для розв'язку задачі Коші при великих значеннях t в області $x < (-6c^2 - \epsilon_3)t$ (в тому числі й для другого члена розвинення) та перевіримо можливий вплив резонансу на асимптотичне розвинення.

Розглянемо задачу Коші для рівняння КдФ (1.1) з початковими умовами типу сходинок $q(x)$ наступного вигляду:

$$\int_0^{+\infty} e^{(c+\kappa)x} (|q(x)| + |q(-x) - c^2|) dx < \infty, \quad x^3 q^{(i)}(x) \in L_1(\mathbb{R}), \quad i = 1, \dots, 6, \quad (3.1)$$

де $\kappa > 0$ є малою величиною. В цьому розділі ми використовуємо більш сильне експоненціальне спадання початкових даних в порівнянні з попереднім розділом. Це обумовлюється рамками застосовності нелінійного методу найшвидшого спуску для початкових умов типу сходинок у резонансному випадку. Якщо резонансу не має, то результати цього розділу залишаються вірними за умови (2.1).

Вочевидь, розв'язок задачі Коші (1.1), (3.1) існує в класичному сенсі та є єдиним в області $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ при будь-якому $T > 0$, і крім того, цей розв'язок задовольняє (2.2).

Зауважимо, що дослідження асимптотики $q(x, t)$ в цій області в постановці задачі РГ за правими даними розсіювання є громіздким. Тому набагато простіше виводити асимптотики для постановки за лівими даними. Переформулюємо необхідні відомості з теорії розсіювання в термінах «лівої» спектральної змінної

$k_1 = \sqrt{k^2 - c^2}$. Розв'язки Йоста $\phi(k_1, x, t)$ і $\phi_1(k_1, x, t)$ оператора Шр'юдінгера L

$$Ly(x) = -\frac{d^2}{dx^2}y(x) + q(x)y(x) = (k_1^2 + c^2)y(x), \quad k_1 \in \mathfrak{D}_1,$$

пов'язані між собою співвідношенням розсіювання (2.6).

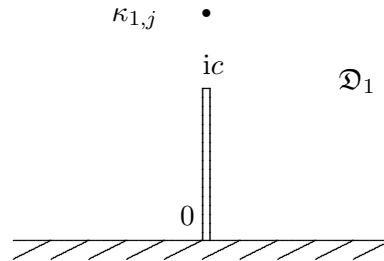


Рис. 3.1. Область \mathfrak{D}_1

Дискретний спектр оператора L у комплексній площині за змінною k_1 знаходиться вище точки ic і має зв'язок із дискретним спектром у термінах змінної k у вигляді $\kappa_{1,j} = i\sqrt{\kappa_j^2 + c^2}$ (див. Рис. 3.1). Кінець неперервного спектра відповідає точці ic , а кінець двократного спектра – точці 0 .

Покладемо

$$\chi(k_1, t) := -\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\sqrt{(k_1 + \epsilon)^2 + c^2}}{k_1} |T_1(k_1 + \epsilon, t)|^2, \quad k_1 \in [0, ic].$$

Ця функція є чисто уявною, крім того,

$$\chi(k_1, t) = i |\chi(k_1, t)|, \quad k_1 \in [0, ic], \quad (3.2)$$

і вона є неперервною на півінтервалі $[0, ic)$. Якщо точка ic є нулем функції $\chi(k_1, t)$ (нерезонансний випадок), то

$$\chi(k_1, t) = C(t) \sqrt{k_1 - ic} (1 + o(1)), \quad k_1 \rightarrow ic. \quad (3.3)$$

Якщо в точці ic функція $\chi(k_1, t)$ має особливість (резонансний випадок), то

$$\chi(k_1, t) = \frac{C(t)}{\sqrt{k_1 - ic}} (1 + o(1)), \quad k_1 \rightarrow ic. \quad (3.4)$$

В силу рівняння КдФ еволюція має вигляд ([24]):

$$\chi(k_1, t) = \chi(k_1) e^{-8itk_1^3 - 12itk_1c^2}, \quad \chi(k_1) := \chi(k_1, 0),$$

$$R_1(k_1, t) = R_1(k_1)e^{-8itk_1^2 - 12itk_1c^2},$$

$$\gamma_{1,j}(t) = \gamma_{1,j}e^{-8\kappa_{1,j}^3t + 12c^2\kappa_{1,j}t}.$$

Тоді методом оберненої задачі розсіювання розв'язок $q(x, t)$ задачі (1.1), (3.1) може бути однозначно відновлено за лівими початковими даними розсіювання (1.23) у термінах змінної k_1 :

$$\{R_1(k_1), k_1 \in \mathbb{R}; \chi(k_1), k_1 \in [0, ic]; \kappa_{1,j}, \gamma_{1,j} > 0, j = 1, \dots, N\}. \quad (3.5)$$

3.1. Постановка задачі Рімана – Гільберта

Покажемо тепер, як за лівими даними розсіювання формулюється векторна задача РГ. В області \mathfrak{D}_1 введемо мероморфну вектор-функцію $\check{m}(k_1) = \check{m}(k_1, x, t)$ (змінні x і t розглядаються як параметри):

$$\check{m}(k_1) := (\check{m}_1(k_1), \check{m}_2(k_1)) = (T_1(k_1, t)\phi(k_1, x, t)e^{-ik_1x}, \phi_1(k_1, x, t)e^{ik_1x}), \quad (3.6)$$

яка має полюси першої компоненти вектора в точках $i\kappa_{1,j}$. В іншому випадку ця функція є неперервною аж до межі області \mathfrak{D}_1 за виключенням, можливо, точки ic (у резонансному випадку). Граничні значення цієї функції на границях розрізу $(0, ic]$ в загальному випадку є різними. Ця функція має наступне розвинення при $k_1 \rightarrow \infty$ (див. [65]):

$$\check{m}(k_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2ik_1} \left(\int_{-\infty}^x (q(y, t) - c^2) dy \right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{k_1^2}\right), \quad (3.7)$$

і тому вектор-функція $\check{m}(k_1)$ є обмеженою на нескінченності.

Формула (3.7) дозволяє відновити розв'язок задачі (1.1), (3.1) за асимптотичним розвиненням вектор-функції $\check{m}(k_1)$ в нескінченно віддаленій точці. Продовжимо тепер $\check{m}(k_1)$ в область $\mathfrak{D}_1^* = \{k_1 : -k_1 \in \mathfrak{D}_1\}$ за формулою $\check{m}(-k_1) = \check{m}(k_1)\sigma_1$. Після такого продовження функція $\check{m}(k_1)$ має полюси у точках $-i\kappa_{1,j}$, стрибки вздовж дійсної осі і вздовж відрізка $[-ic, ic]$. Введемо хрестоподібний контур $\mathbb{R} \cup [ic, -ic]$ із природною орієнтацією зліва направо на \mathbb{R} ,

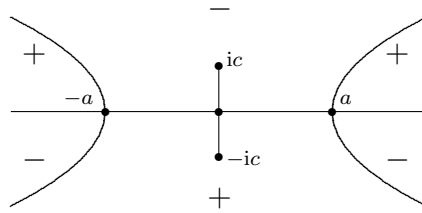


Рис. 3.2. Таблиця знаків функції $\text{Re}(\Phi_1(k_1))$

та з орієнтацією зверху вниз на $[ic, -ic]$. Позначимо через $\check{m}_+(k_1)$ (відповідно $\check{m}_-(k_1)$) граничні нетангенціальні значення $\check{m}(k_1)$ справа (відповідно зліва) за напрямком контуру.

Введемо також фазову функцію $\Phi_1(k_1) = \Phi_1(k_1, x, t)$:

$$\Phi_1(k_1) = -4ik_1^3 - 6ic^2k_1 - 12i\xi k_1, \quad \xi = \frac{x}{12t}.$$

Ця функція є непарною в області \mathbb{C} . Її стаціонарними точками є точки $\pm a$, де $a := \sqrt{-\frac{c^2}{2} - \xi}$. Таблицю знаків для функції $\text{Re} \Phi_1(k_1)$ при $\xi < -\frac{c^2}{2}$ показано на Рис. 3.2. Має місце наступна теорема:

Теорема 3.1. Нехай (3.5) є лівими даними розсіювання для початкових умов $q(x)$, які задовольняють умовам (3.1), і нехай $q(x, t)$ є розв'язком задачі Коші (1.1), (3.1). Тоді вектор-функція $\check{m}(k_1) = \check{m}(k_1, x, t)$, яка визначена за формулою (3.6), є єдиним розв'язком наступної векторної задачі $R\Gamma_{k_1}$: знайти вектор-функцію $m(k_1)$, яка є мероморфною в області $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup [ic, -ic])$, з полюсами в точках $ik_{1,j}$, $j = 1, \dots, N$, має неперервні граничні значення на обох сторонах контуру, за виключенням, можливо, точок $\pm ic$, і задовольняє наступним умовам:

I. умові стрибка $m_+(k_1) = m_-(k_1)v(k_1)$, де

$$v(k_1) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 - |R_1(k_1)|^2 & -\overline{R_1(k_1)}e^{-2t\Phi_1(k_1)} \\ R_1(k_1)e^{2t\Phi_1(k_1)} & 1 \end{pmatrix}, & k_1 \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \chi(k_1)e^{2t\Phi_1(k_1)} & 1 \end{pmatrix}, & k_1 \in [ic, 0], \\ \sigma_1 v^{-1}(-k_1) \sigma_1, & k_1 \in [0, -ic]. \end{cases} \quad (3.8)$$

II. полюсній умові

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{i\kappa_{1,j}} m(k) &= \lim_{k_1 \rightarrow i\kappa_{1,j}} m(k_1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i\gamma_j e^{2t\Phi_1(i\kappa_{1,j})} & 0 \end{pmatrix}, \\ \operatorname{Res}_{-i\kappa_{1,j}} m(k) &= \lim_{k_1 \rightarrow -i\kappa_{1,j}} m(k_1) \begin{pmatrix} 0 & -i\gamma_j e^{-2t\Phi_1(i\kappa_{1,j})} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (3.9)$$

III. умові симетрії

$$m(-k_1) = m(k_1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.10)$$

IV. умові нормування

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(k) = (1, \quad 1);$$

V. при $k_1 \rightarrow \pm ic$ функція $m(k_1)$ має наступну поведінку: (a) у нерезонансному випадку, тобто якщо $\chi(k_1)$ задовольняє умові (3.3), вектор-функція $m(k_1)$ неперервна в $\pm ic$; (b) у резонансному випадку, тобто при умові (3.4),

$$m(k_1) = \left(\frac{C_1}{\sqrt{k_1 - ic}}, \quad C_2 \right) (1 + o(1)), \quad k_1 \rightarrow ic, \quad C_1 \neq 0. \quad (3.11)$$

В точці $-ic$ аналогічна умова формулюється з урахуванням симетрії (3.10).

Доведення. Доведення існування розв'язку задачі $\operatorname{P}\Gamma_{k_1}$ **I-V** здійснюється так само як і в Теоремі 2.2. Доведемо єдиність розв'язку задачі $\operatorname{P}\Gamma_{k_1}$ (див. [28]). Нехай $\tilde{m}(k_1)$ і $\hat{m}(k_1)$ є двома різними розв'язками. Тоді різниця $m(k_1) := \tilde{m}(k_1) - \hat{m}(k_1)$ задовольняє умовам **I-III** і **V**, а умова **IV** перетворюється з урахуванням мероморфності в наступне твердження:

$$m(k_1) = O(k_1^{-1}), \quad k_1 \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

В області \mathfrak{D}_1 введемо мероморфну функцію

$$F(k_1) := m_1(k_1) \overline{m_1(\overline{k_1})} + m_2(k_1) \overline{m_2(\overline{k_1})},$$

яка має прості полюси в точках $i\kappa_{1,j}$ і асимптотичну поведінку $F(k_1) = O(k_1^{-2})$ при $k_1 \rightarrow \infty$ в силу оцінки (3.12). Оскільки $-\bar{k}_1 = k_1$ при $k_1 \in i\mathbb{R}$, то з умови (3.9) випливає

$$\operatorname{Res}_{i\kappa_{1,j}} F(k_1) = 2i\gamma_{1,j} |m_2(i\kappa_{1,j})|^2 e^{2t\Phi_1(i\kappa_{1,j})} \in i\mathbb{R}_+. \quad (3.13)$$

Відзначимо, що точне значення константи C_1 в умові (3.11) не визначене, тобто $m_2(-k_1) = m_1(k_1) = \tilde{m}_1(k_1) - \hat{m}_1(k_1) = O((k_1 - ic)^{-1/2})$, $m_2(\bar{k}_1) = m_1(k_1) = O(1)$ при $k_1 \rightarrow ic$. Але тоді в силу симетрії $m_1(\bar{k}_1) = O(1)$, $k_1 \rightarrow ic$, тобто $F(k_1) = O((k_1 - ic)^{-1/2})$ при $k_1 \rightarrow ic$ у резонансному випадку. У нерезонансному функція $F(k_1)$ є обмеженою в околі цієї точки. В інших точках $\partial\mathcal{D}_1$ функція $F(k_1)$ має неперервні граничні значення. Позначимо значення функції через $F(k_1)$ на відрізку $[0, ic]$ зліва і справа через $F_l(k_1)$ і $F_r(k_1)$ відповідно та збережемо позначення $F_+(k_1)$ на дійсній осі. Ці функції є неперервними на своїх областях означення, за виключенням точки ic у резонансному випадку. Згідно умови (3.10):

$$\begin{aligned} F_+(k_1) &= m_{1,+}(k_1) \overline{m_{1,-}(k_1)} + m_{2,+}(k_1) \overline{m_{2,-}(k_1)}, \\ F_r(k_1) &= m_{1,r}(k_1) \overline{m_{2,l}(k_1)} + m_{2,r}(k_1) \overline{m_{1,l}(k_1)}, \\ F_l(k_1) &= m_{1,l}(k_1) \overline{m_{2,r}(k_1)} + m_{2,l}(k_1) \overline{m_{1,r}(k_1)}. \end{aligned}$$

З умови стрибка (3.8) отримуємо

$$\begin{aligned} F_+(k_1) &= (1 - |R_1(k_1)|^2) |m_{1,-}(k_1)|^2 + |m_{2,-}(k_1)|^2 + \\ &\quad + 2i \operatorname{Im} (R_1(k_1) e^{2t\Phi_1(k_1)} \overline{m_{1,-}(k_1)} m_{2,-}(k_1)), \\ F_l(k_1) &= m_{1,l}(k_1) \overline{m_{2,l}(k_1)} + m_{2,l}(k_1) \overline{m_{1,l}(k_1)} + |m_{2,l}(k_1)|^2 \overline{\chi(k_1)} e^{2t\Phi_1(k_1)}, \\ F_r(k_1) &= m_{1,l}(k_1) \overline{m_{2,l}(k_1)} + m_{2,l}(k_1) \overline{m_{1,l}(k_1)} + |m_{2,l}(k_1)|^2 \chi(k_1) e^{2t\Phi_1(k_1)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Відзначимо, що $\Phi_1(k_1) \in \mathbb{R}$ при $k \in [0, ic]$, а згідно формули (3.2) ми маємо

$\chi(k_1) \in i\mathbb{R}_+$, тобто в силу (3.14):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F_l(k_1) &= \operatorname{Re} F_r(k_1) = m_{1,l}(k_1)\overline{m_{2,l}(k_1)} + m_{2,l}(k_1)\overline{m_{1,l}(k_1)}, \\ \operatorname{Im} F_l(k_1) &= -\operatorname{Im} F_r(k_1) \in i\mathbb{R}_-. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Нехай тепер $\rho > \kappa_l$ є великим додатнім числом і нехай C_ρ є межею множини $\mathfrak{D}_1 \cap \{k_1 : |k_1| < \rho\}$. Розглянемо C_ρ як замкнутий контуром, який орієнтовано проти годинникової стрілки. Оскільки особливості $F(k_1)$ на цьому контурі є інтегровними, то за теоремою Коші і формулою для лишку (3.13), ми маємо:

$$\oint_{C_\rho} F(k_1) dk_1 = 2\pi i \sum_{j=1}^N \operatorname{Res}_{i\kappa_{1,j}} F(k_1) = -4\pi \sum_{j=1}^N \gamma_{1,j} |m_2(i\kappa_{1,j})|^2 e^{2t\Phi_1(i\kappa_{1,j})}. \quad (3.16)$$

Але $F(k_1) = O(k_1^{-2})$ при $k_1 \rightarrow \infty$, тобто $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^\pi F(\rho e^{i\theta}) \rho e^{i\theta} d\theta = 0$. Тоді при $\rho \rightarrow \infty$ формулу (3.16) можна записати у вигляді:

$$\int_{\mathbb{R}} F_+(k_1) dk_1 + \int_0^{ic} F_l(k_1) dk_1 + \int_{ic}^0 F_r(k_1) dk_1 + 4\pi \sum_{j=1}^N \gamma_{1,j} |m_2(i\kappa_{1,j})|^2 e^{2t\Phi_1(i\kappa_{1,j})} = 0.$$

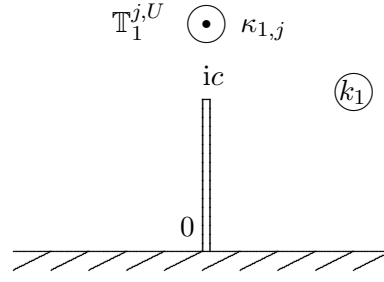
Візьмемо дійсну частину цього виразу, використаємо співвідношення (3.15), врахуємо, що інтервал $[0, ic]$ потрібно обходити у протилежних напрямках, тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} ((1 - |R_1(k_1)|^2) |m_{1,-}(k_1)|^2 + |m_{2,-}(k_1)|^2) dk_1 \\ &+ 2 \int_0^c |m_{2,l}(is)|^2 |\chi(is)| e^{t\Phi_1(is)} ds + 4\pi \sum_{j=1}^N \gamma_{1,j} |m_2(i\kappa_{1,j})|^2 e^{2t\Phi_1(i\kappa_{1,j})}. \end{aligned}$$

Усі доданки справа є невід'ємними, оскільки $|R_1| < 1$ при $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, тобто

$$m_{2,-}(k_1) = 0 \text{ при } k \in (\mathbb{R} \cup [0, ic] \cup_j \{i\kappa_{1,j}\}), \text{ і } m_{1,-}(k_1) = 0 \text{ при } k_1 \in \mathbb{R}. \quad (3.17)$$

З цих рівностей випливає, що вектор-функція $m(k_1) = \tilde{m}(k_1) - \hat{m}(k_1)$ не має полюсів. Крім того, з умови стрибка (3.8) випливає, що $m_2(k_1) = 0$ при $k_1 \in \partial\mathfrak{D}_1$. Продовжимо її аналітично в нижню півплощину. Оскільки ця функція є голоморфною в \mathbb{C} і прямує до нуля при $k_1 \rightarrow \infty$, то в силу теореми Ліувілля $m_2(k_1) \equiv 0$ при $k_1 \in \overline{\mathfrak{D}_1}$. Звідси і з останньої з рівностей (3.17) випливає, що $m_{1,+}(k_1) = 0$

Рис. 3.3. Область \mathfrak{D}_1

при $k_1 \in \mathbb{R}$. Крім того, з рівності $m_2(k_1) = 0$ при $[0, ic]$ і з умови (3.8) випливає, що $m_1(k_1)$ не має стрибка $[0, ic]$. Продовжимо функцію $m_1(k_1)$ в нижню півплощину і знову застосуємо теорему Ліувілля, тоді отримаємо необхідну рівність $\tilde{m}(k_1) - \hat{m}(k_1) \equiv 0$ при $k_1 \in \mathbb{C}$. Отже, єдність розв'язку доведено. \square

Для спрощення позначень будемо використовувати наступні дві матриці

$$\mathbb{J} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}^\dagger := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1 \mathbb{J} \sigma_1.$$

Виконуючи перетворення аналогічні перетворенням з розділу 2, замінимо полюсну умову $\mathbf{\Pi}$ на умову стрибка. Нехай $\mathbb{T}_1^{j,U}$ (відповідно $\mathbb{T}_1^{j,L}$) є колами з центрами в точках $i\kappa_{1,j}$ (відповідно $-i\kappa_{1,j}$) із радіусами $0 < \delta < \frac{1}{4} \min_{j=1}^N |\kappa_{1,j} - \kappa_{1,j-1}|$, $\kappa_0 = 0$, а самі круги позначимо через $\mathbb{D}_1^{j,U}$ (відповідно, $\mathbb{D}_1^{j,L}$). Оберемо $\delta > 0$ настільки малим, щоб круги $\mathbb{D}_1^{j,U}$ не перетиналися між собою і жодним іншим контуром, крім того ми будемо вважати що $\kappa_{1,1} - \delta > \kappa + c$, де κ є константою з оцінки (3.1). Маленькі кола $\mathbb{T}_1^{j,U}$ навколо $i\kappa_{1,j}$ орієнтовані проти годинникової стрілки, і кола $\mathbb{T}_1^{j,L}$ навколо $-i\kappa_{1,j}$ орієнтовані за годинниковою стрілкою. Перевизначимо функцію $\check{m}(k_1)$ в околі точок $\pm i\kappa_{1,j}$ наступним чином:

$$m(k_1) = \begin{cases} \check{m}(k_1) A_j(k_1), & k_1 \in \mathbb{D}_1^{j,U}, \\ \check{m}(k_1) \sigma_1 A_j^{-1}(-k_1) \sigma_1, & k_1 \in \mathbb{D}_1^{j,L}, \\ \check{m}(k_1), & k_1 \in \mathfrak{D}_1 \setminus \cup_{j=1}^N (\mathbb{D}_1^{j,U} \cup \mathbb{D}_1^{j,L}), \end{cases} \quad (3.18)$$

де

$$A_j(k_1) = \mathbb{I} - \frac{i\gamma_{1,j} e^{2t\Phi_1(i\kappa_{1,j})}}{k_1 - i\kappa_{1,j}} \mathbb{J}.$$

Тим самим, справедлива наступна лема:

Лема 3.2. Нехай $\check{m}(k_1)$ є мероморфним розв'язком задачі $РГ_{k_1}$ **I-V** з теореми **3.1**. Перевизначимо його за формулою (3.18). Тоді $m(k_1)$ є голоморфною функцією в області $k_1 \in \mathfrak{D}_1 \setminus \cup_{j=1}^N (\mathbb{D}_1^{j,U} \cup \mathbb{D}_1^{j,L})$ і задовольняє наступним умовам:

1. умові стрибка $m_+(k_1) = m_-(k_1)v(k_1)$, де

$$v(k_1) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 - |R_1(k_1)|^2 & -\overline{R_1(k_1)}e^{-2t\Phi_1(k_1)} \\ R_1(k_1)e^{2t\Phi_1(k_1)} & 1 \end{pmatrix}, & k_1 \in \mathbb{R}, \\ \mathbb{I} + \chi(k_1)e^{2t\Phi_1(k_1)}\mathbb{J}, & k_1 \in [ic, 0], \\ \sigma_1 v^{-1}(-k_1)\sigma_1, & k_1 \in [0, -ic], \\ A_j(k_1), & k_1 \in \mathbb{T}_1^{j,U}, \\ \sigma_1 A_j^{-1}(-k_1)\sigma_1, & k_1 \in \mathbb{T}_1^{j,L}; \end{cases}$$

2. умові симетрії

$$m(-k_1) = m(k_1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. умові нормування

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(k) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix};$$

4. при $k_1 \rightarrow \pm ic$ функція $m(k_1)$ має наступну поведінку: (a) у нерезонансному випадку, тобто якщо $\chi(k_1)$ задовольняє умові (3.3), вектор-функція $m(k_1)$ є неперервною в точках $\pm ic$; (b) у резонансному випадку, за умови (3.4),

$$m(k_1) = \left(\frac{C_1}{\sqrt{k_1 - ic}}, C_2 \right) (1 + o(1)), \quad k_1 \rightarrow ic, \quad C_1 \neq 0.$$

В точці $-ic$ аналогічна умова формулюється з урахуванням симетрії (3.10).

3.2. Зведення до модельної задачі

В цьому розділі $\xi < -c^2/2$. В даному підрозділі ми опишемо деякі кроки спряження і деформації при таких ξ для задачі $РГ_{k_1}$ 1.-4. з Лема 3.2, що приво-

дять до еквівалентної задачі $\text{P}\Gamma_{k_1}$ з матрицею стрибка, яка є близькою до одиничної матриці \mathbb{I} при великих значеннях часу, за винятком невеликих околів точок $\pm a = \pm \sqrt{-\frac{c^2}{2} - \xi}$. Короткий опис цих кроків було запропоновано в [65, Розділ 8]. Детальні перетворення було проведено в роботі [2].

Згідно таблиці знаків фазової функції (див. Рис. 3.2) матриця $v(k_1)$ вже є експоненціально близькою при великих значеннях t до одиничної матриці \mathbb{I} на відрізках $[-ic, 0) \cup (0, ic]$ і на колах $\cup_{j=1}^N (\mathbb{T}_1^{j,U} \cup \mathbb{T}_1^{j,L})$, але вона осцилює за змінною t на дійсній осі. Крім того, функція $v(k_1)$ може мати особливості в точках $\pm ic$. В якості першого кроку ми застосуємо стандартну верхню-нижню й нижню-верхню факторизацію ([44, 51]) до матриці $v(k_1)$ при $k_1 \in \mathbb{R}$. Для цього побудуємо аналітичну в області $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -a) \cup (a, \infty))$ функцію $d(k_1)$, яка задовольняє умові стрибка

$$d_+(k_1) = d_-(k_1)(1 - |R_1(k_1)|^2) \text{ при } k_1 \in \mathbb{R} \setminus [-a, a],$$

і є такою, що $d(-k_1) = d^{-1}(k_1)$ та $d(k_1) \rightarrow 1$ при $k_1 \rightarrow \infty$. За формулою Сохоцького-Племеля ця функція явно задається як

$$d(k_1) = \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R} \setminus [-a, a]} \frac{\log(1 - |R_1(s)|^2)}{s - k_1} ds \right). \quad (3.19)$$

Оскільки область інтегрування є парною, і функція $\log(1 - |R_1(s)|^2)$ також є парною, то $d(-k_1) = d^{-1}(k_1)$. При $k_1 \rightarrow \infty$ маємо

$$d(k_1) = 1 - \frac{1}{2\pi i k_1} \int_{\mathbb{R} \setminus [-a, a]} \log(1 - |R_1(s)|^2) ds + O\left(\frac{1}{k_1^2}\right). \quad (3.20)$$

Покладемо $m^{(1)}(k_1) = m(k_1)d(k_1)^{-\sigma_3}$. Очевидно, $m^{(1)}(-k_1) = m^{(1)}(k_1)\sigma_1$. Можна перевірити (див., наприклад, [51]), що функція $m^{(1)}(k_1)$ задовольняє умові стрибка $m_+^{(1)}(k_1) = m_-^{(1)}(k_1)v^{(1)}(k_1)$, де

$$v^{(1)}(k_1) = \begin{pmatrix} 1 - |R_1(k_1)|^2 & -\overline{R(k_1)}d^2(k_1)e^{-2t\Phi_1(k_1)} \\ R_1(k_1)d^{-2}(k_1)e^{2t\Phi_1(k_1)} & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in [-a, a],$$

$$v^{(1)}(k_1) = \begin{pmatrix} (1 - |R_1(k_1)|^2)d_+^{-1}(k_1)d_-(k_1) & -\overline{R_1(k_1)}d_+(k_1)d_-(k_1)e^{-2t\Phi_1(k_1)} \\ R_1(k_1)d_+^{-1}(k_1)d_-^{-1}(k_1) & d_-^{-1}(k_1)d_+(k_1) \end{pmatrix},$$

$$k_1 \in \mathbb{R} \setminus [-a, a],$$

$$v^{(1)}(k_1) = d(k_1)^{\sigma_3} v(k_1) d(k_1)^{-\sigma_3}, \quad k_1 \in \cup_{j=1}^N (\mathbb{T}_j^U \cup \mathbb{T}_j^L) \cup [ic, -ic].$$

Нагадаємо, що $\overline{R_1(k_1)} = R_1(-k_1)$ при $k_1 \in \mathbb{R}$. За умови (3.1) можна продовжити функцію $R_1(k_1)$ в окіл контуру Σ . Введемо області Ω_l^* , Ω_l , Ω_r^* , Ω_r , Ω^* , і Ω разом з їх межами \mathcal{C}_l^* , \mathcal{C}_l , \mathcal{C}_r^* , \mathcal{C}_r , \mathcal{C}^* , і \mathcal{C} , які містяться в смужці $\{k_1 : |\text{Im } k_1| < c + \epsilon, \epsilon < \frac{\kappa}{2}\}$, як показано на Рис. 3.4. Введемо наступні матриці

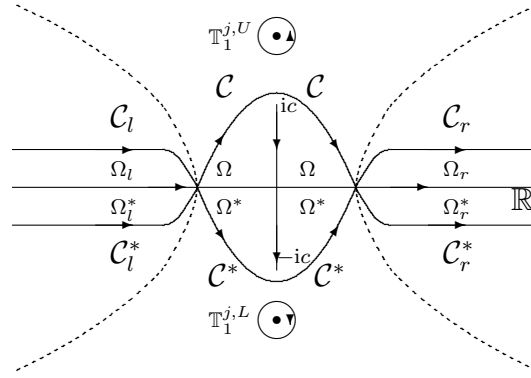


Рис. 3.4. Контур деформації в області $x < -6c^2t$

$$\begin{aligned} B(k_1) &:= \mathbb{I} + R_1(k_1)d^{-2}(k_1)e^{2t\Phi_1(k_1)}\mathbb{J}, & k_1 \in \Omega, \\ B^*(k_1) &:= \mathbb{I} - \overline{R_1(k_1)}d^2(k_1)e^{-2t\Phi_1(k_1)}\mathbb{J}^\dagger, & k_1 \in \Omega^*, \\ A(k_1) &:= \mathbb{I} + \frac{\overline{R_1(k_1)}d^2(k)}{1 - |R_1(k_1)|^2}e^{-2t\Phi_1(k_1)}\mathbb{J}^\dagger, & k_1 \in \Omega_r \cup \Omega_l, \\ A^*(k_1) &:= \mathbb{I} - \frac{R_1(k_1)d^{-2}(k_1)}{1 - |R_1(k_1)|^2}e^{2t\Phi_1(k_1)}\mathbb{J}, & k_1 \in \Omega_r^* \cup \Omega_l^*. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Тоді

$$v^{(1)}(k_1) = \begin{cases} B_-^*(k_1)B_+(k_1), & k_1 \in [-a, a], \\ A_-^*(k_1)A_+(k_1), & k_1 \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]. \end{cases}$$

Перевизначимо $m^{(1)}(k_1)$ відповідно до

$$m^{(2)}(k_1) = m^{(1)}(k_1) \begin{cases} B(k_1), & k_1 \in \Omega, \\ B^*(k_1), & k_1 \in \Omega^*, \\ A(k_1), & k_1 \in \Omega_l \cup \Omega_r, \\ A^*(k_1), & k_1 \in \Omega_l^* \cup \Omega_r^*, \\ \mathbb{I}, & \mathbb{C} \setminus (\overline{\Omega \cup \Omega^* \cup \Omega_l \cup \Omega_r \cup \Omega_l^* \cup \Omega_r^*}). \end{cases} \quad (3.22)$$

Лема 3.3. *Справедливі наступні формули:*

$$\begin{aligned} B_-(k_1) v^{(1)}(k_1) (B_+(k_1))^{-1} &= \mathbb{I}, \quad k_1 \in [ic, 0]; \\ (B_-^*(k_1))^{-1} v^{(1)}(k_1) B_+^*(k_1) &= \mathbb{I}, \quad k_1 \in [0, -ic]. \end{aligned}$$

Доведення. Зауважимо, що при $k_1 \in [ic, 0]$:

$$B_-(k_1) v^{(1)}(k_1) B_+(k_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d(k_1)^{-2} (R_-(k_1) - R_+(k_1) + \chi(k_1)) e^{2t\Phi_1(k_1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Як відомо, за умовою (3.1) комплексне спряження розв'язку Йоста $\bar{\phi}(k_1, x, t)$ може бути аналітично продовжено у смугу. Позначимо це продовження через $\check{\phi}(k_1)$. Воно не має стрибка вздовж інтервалу $[ic, 0]$. Тоді продовження $R_1(k_1)$ може бути зображено через вронскіани звичайним способом ([52]). Обчислюючи значення цього продовження на берегах розрізу вздовж інтервалу $[ic, 0]$, ми маємо тоді

$$R_{1,-}(k_1) = -\frac{\langle \bar{\phi}_1, \check{\phi} \rangle}{\langle \bar{\phi}_1, \phi \rangle}, \quad R_{1,+}(k_1) = -\frac{\langle \phi_1, \check{\phi} \rangle}{\langle \phi_1, \phi \rangle}, \quad \chi(k_1) = -\frac{\langle \phi, \check{\phi} \rangle \langle \phi_1, \bar{\phi}_1 \rangle}{\langle \bar{\phi}_1, \check{\phi} \rangle \langle \phi_1, \phi \rangle},$$

де $\langle f, g \rangle$ є звичайним вронскіаном двох розв'язків рівняння (2.3) і $\phi_1(k_1) := \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \phi_1(k_1 + \epsilon, x, t)$. Застосуємо тепер тотожність Плюккера (див. [69]):

$$\langle f_1, f_2 \rangle \cdot \langle f_3, f_4 \rangle + \langle f_1, f_3 \rangle \cdot \langle f_4, f_2 \rangle + \langle f_1, f_4 \rangle \cdot \langle f_2, f_3 \rangle \equiv 0$$

до функцій $f_1 = \phi_1, f_2 = \phi, f_3 = \bar{\phi}_1, f_4 = \check{\phi}$. Ми отримаємо наступну важливу тотожність

$$R_{1,-}(k_1) - R_{1,+}(k_1) + \chi(k_1) \equiv 0. \quad (3.23)$$

Це доводить першу з рівностей Лема. Доведення другої проводиться аналогічно.

□

Зауваження 3.4. Рівність (3.23) показує, що як для резонансного, так і для нерезонансного випадку, стрибок вектор-функції $m^{(2)}(k)$ вздовж інтервалу $[ic, -ic]$ зникає при еквівалентних перетвореннях, і тому кінцева асимптотика не залежатиме від наявності резонансу.

Застосовуючи Лему 3.3, ми приходимо до висновку, що вектор-функція $m^{(2)}(k_1)$ задовольняє умові стрибка $m_+^{(2)}(k_1) = m_-^{(2)}(k_1)v^{(2)}(k_1)$ з

$$v^{(2)}(k_1) = \begin{cases} B(k_1), & k_1 \in \mathcal{C}, \\ B^*(k_1), & k_1 \in \mathcal{C}^*, \\ A(k_1), & k_1 \in \mathcal{C}_l \cup \mathcal{C}_r, \\ A^*(k_1), & k_1 \in \mathcal{C}_l^* \cup \mathcal{C}_r^*, \\ v^{(1)}(k_1), & k_1 \in \cup_{j=1}^N (\mathbb{T}_1^{j,U} \cup \mathbb{T}_1^{j,L}). \end{cases} \quad (3.24)$$

Ми помічаємо, що матриця $v^{(2)}(k_1)$ має наступну структуру:

$$v^{(2)}(k_1) = \mathbb{I} + \begin{cases} F_1(k_1), & k_1 \in \cup_{j=1}^N (\mathbb{T}_1^{j,U} \cup \mathbb{T}_1^{j,L}), \\ F_2(k_1), & k_1 \in \mathcal{C}_l \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_r \cup \mathcal{C}_l^* \cup \mathcal{C}^* \cup \mathcal{C}_r^*, \end{cases}$$

причому матриці $F_{1,2}(k_1)$ задовольняють оцінкам

$$\|F_1(k_1)\| \leq Ce^{-Ct}, \quad \|F_2(k_1)\| \leq C(a)e^{-t\mu(|k_1^2 - a^2|)}, \quad (3.25)$$

де $\|\cdot\|$ є нормою матриці 2×2 , $C > 0$, $C(a) > 0$ і $\mu(s)$, $s \in \mathbb{R}_+$, є строго зростаючою неперервною функцією з $\mu(0) = 0$ і $\mu(s) = O(s^{3/4})$ при $s \rightarrow \infty$.

Зауважимо ще раз, що вектор-функція $m^{(2)}(k_1)$ не має стрибка вздовж контуру Σ і, отже, ефект резонансу не помітний при $\xi < -c^2/2$. Згідно перетворенню

(3.22) ми бачимо, що $m^{(2)}(k_1) = (1, 1) + o(1)$ при $k_1 \rightarrow i\infty$. Як буде показано

в наступному підрозділі, нев'язка має таку структуру: $(1, -1)O(k_1^{-1})O(t^{-1/2})$.

Нагадаємо, що при великому уявному значенні k_1 з $|k_1| > \kappa_{1,N} + 1$ ми маємо

$\tilde{m}(k_1) = m^{(2)}(k_1)d(k_1)^{\sigma_3}$ з функцією $d(k_1)$, що визначена формулою (3.19). З (3.20), тоді випливає, що при $k_1 \rightarrow \infty$:

$$\tilde{m}_1(k_1) = m_1(k_1) \sim d(k_1) = 1 - \frac{\int_{\mathbb{R} \setminus [-a, a]} \log(1 - |R_1(s)|^2) ds}{2\pi i k_1} + \frac{g(x, t)}{k_1} + O\left(\frac{1}{k_1^2}\right),$$

де мають місце оцінки $g(x, t) = o(1)$, $g_x(x, t) = o(1)$ при $t \rightarrow \infty$ рівномірно відносно x . Функція $g(x, t)$ з'являється з ефекту параметрикса в малих околах точок $\pm a$. Формулу для цієї функції ми отримуємо в наступному підрозділі 3.3.

Далі, в силу (3.7):

$$q(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{k_1 \rightarrow \infty} 2i k_1 (\tilde{m}_1(k_1) - 1). \quad (3.26)$$

Оскільки $\frac{\partial}{\partial x} a(\xi) = O(t^{-1})$, то з (3.2) випливає, що після диференціювання правої частини інтеграл матиме порядок $O(t^{-1})$. Відповідно,

$$q(x, t) = c^2 + o(1), \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

тому головний член дорівнює c^2 , як і припускалося. В наступному підрозділі ми доведемо, що ефект точок параметрикса дає член асимптотичного розвинення порядку $O(t^{-1/2})$.

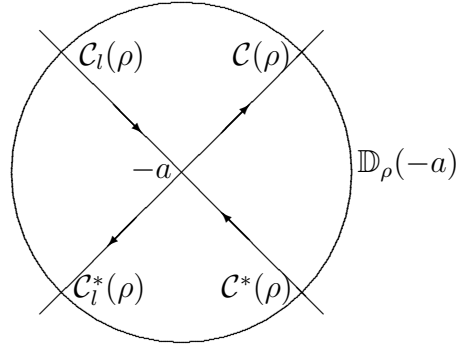
3.3. Задача параметрикса й заключний асимптотичний аналіз

Ми використовуємо той самий підхід, що в [44] і [58], але для векторної задачі $\text{P}\Gamma_{k_1}$ як в [51]. Для цього ми починаємо з детального дослідження поведінки матриці стрибка $v^{(2)}(k_1)$ поблизу точки $-a$. Зобразимо (3.19) як

$$\begin{aligned} \log d(k_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R} \setminus [-a, a]} \log \frac{1 - |R_1(s)|^2}{1 - |R_1(-a)|^2} \frac{ds}{s - k_1} \\ &\quad + \frac{\log(1 - |R_1(-a)|^2)}{2\pi i} \int_{\mathbb{R} \setminus [-a, a]} \frac{ds}{s - k_1}. \end{aligned}$$

Оскільки $\int_{\mathbb{R} \setminus [-a, a]} \frac{ds}{s - k_1} = \log \frac{k_1 + a}{a - k_1}$, тоді

$$d(k_1) = \left(\frac{k_1 + a}{a - k_1} \right)^{i\nu} \cdot e^{\eta(k_1)},$$

Рис. 3.5. Контур поблизу точки $-a$

де

$$\nu := \nu(a) = -\frac{1}{2\pi} \log(1 - |R_1(-a)|^2),$$

$$\eta(k_1) := \eta(k_1, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R} \setminus [-a, a]} \log \frac{1 - |R_1(s)|^2}{1 - |R_1(-a)|^2} \frac{ds}{s - k_1}. \quad (3.27)$$

Нехай $\mathbb{D}_\rho(-a)$ є колом радіуса $0 < \rho < \inf\{\frac{1}{4}, \frac{a}{4}\}$ з центром в точці $-a$. Без обмеження загальності припустимо, що в області $\mathbb{D}_\rho(-a)$ контури $\mathcal{C}(\rho) := \mathcal{C} \cap \mathbb{D}_\rho(-a)$, $\mathcal{C}^*(\rho) := \mathcal{C}^* \cap \mathbb{D}_\rho(-a)$, $\mathcal{C}_l(\rho) := \mathcal{C}_l \cap \mathbb{D}_\rho(-a)$, $\mathcal{C}_l^*(\rho) := \mathcal{C}_l^* \cap \mathbb{D}_\rho(-a)$ є частинами променів $\{-a + se^{i(2n+1)\pi/4}, s \in \mathbb{R}_+\}$ і мають напрямки, як показано на Рис. 3.5. Позначимо

$$\Gamma_\rho(-a) := \mathcal{C}(\rho) \cup \mathcal{C}^*(\rho) \cup \mathcal{C}_l(\rho) \cup \mathcal{C}_l^*(\rho).$$

Лема 3.5. Наступні нерівності виконуються при всіх $k_1 \in \Gamma_\rho(-a)$, $\xi < -\frac{c^2}{2} - \epsilon$, де $\epsilon \in$ довільною малою величиною:

$$\left| e^{-2\eta(k_1)} - e^{-2\eta(-a)} \right| \leq C|k_1 + a|(1 + |\log |k_1 + a||), \quad (3.28)$$

$$\left| 1 - e^{-2i\nu \log \frac{k_1 - a}{2a}} \right| \leq Ca^{-1}|k_1 + a|, \quad (3.29)$$

причому константа $C = C(\epsilon)$ не залежить від ξ і k_1 .

Доведення. Наведемо доведення при $k_1 \in \mathcal{C}(\rho)$. Інші випадки є аналогічними. Спочатку покажемо, що

$$|\eta(k_1) - \eta(-a)| \leq C|k_1 + a|(1 + |\log |k_1 + a||), \quad a \in I, \quad k_1 \in \mathcal{C}(\rho). \quad (3.30)$$

Розділимо границі інтегрування у (3.27) на три частини $[-\infty, -2a]$, $[-2a, -a]$, $[a, \infty]$ і позначимо через $I_1(k_1)$, $I_2(k_1)$, $I_3(k_1)$ відповідні інтеграли. Для $k_1 \in \mathcal{C}(\rho)$ можна отримати наступні оцінки

$$|I_1(k_1) - I_1(-a)| \leq C|k_1 + a|, \quad |I_3(k_1) - I_3(-a)| \leq C|k_1 + a|. \quad (3.31)$$

Інтегруємо $2\pi i I_2(\xi, k_1)$ за частинами

$$\begin{aligned} & \int_{-2a}^a \log \frac{1 - |R_1(s)|^2}{1 - |R_1(-a)|^2} \frac{ds}{s - k_1} = \\ & - \log \frac{1 - |R_1(-2a)|^2}{1 - |R_1(-a)|^2} \log(-2a - k_1) - \int_{-2a}^a \log(s - k_1) d \log(1 - |R_1(s)|^2), \end{aligned}$$

тоді отримуємо

$$\begin{aligned} |I_2(k_1) - I_2(-a)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \log \frac{k_1 + 2a}{a} \log \frac{1 - |R_1(-2a)|^2}{1 - |R_1(-a)|^2} \right. \\ & \quad \left. + \int_{-2a}^{-a} \log \frac{s - k_1}{s + a} d \log(1 - |R_1(s)|^2) \right|. \end{aligned}$$

Оскільки $|R_1(s)| \leq C(\epsilon) < 1$ при $|s| > \epsilon$, то

$$|I_2(k_1) - I_2(-a)| \leq C(\epsilon) \left(\left| \int_{-2a}^{-a} \log \frac{s - k_1}{s + a} ds \right| + |k_1 + a| \right).$$

Використаємо заміну змінних $v = -|k_1 + a|/(s + a)$ та отримаємо

$$\left| \int_{-2a}^{-a} \log \left| \frac{s - k_1}{s + a} \right| ds \right| = |k_1 + a| \left| \int_{\frac{|k_1 + a|}{a}}^{\infty} \log(1 + v e^{i\frac{\pi}{4}}) \frac{dv}{v^2} \right|,$$

де ми врахували, що $k_1 \in \mathcal{C}(\rho)$. Об'єднаємо цю оцінку з оцінкою

$$|\log |1 + v e^{i\frac{\pi}{4}}|| \leq C \begin{cases} v, & 0 \leq v \leq 2, \\ \log v, & 2 \leq v \leq \infty, \end{cases}$$

і з (3.31), тоді отримаємо (3.30). Далі, за Лемою 23.2 у [34]:

$$\sup_{\xi < (-c^2/2 - \epsilon)} \sup_{k_1 \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{R}} |\eta(k_1)| < \infty.$$

Використаємо цей факт, нерівність (3.30) і $|e^w - 1| \leq |w| \max(1, e^{\operatorname{Re} w})$, $w \in \mathbb{C}$,

тоді отримаємо (3.28), крім того

$$\left| 1 - e^{-2\nu \log \frac{k_1 + a}{2a}} \right| \leq \left| 2\nu \log \frac{k_1 + a}{2a} \right| e^{|\operatorname{Re}(2i\nu \log \frac{k_1 + a}{2a})|}$$

$$\leq C \left| \log \left(1 + \frac{k_1 - a}{2a} \right) \right| \leq Ca^{-1} |k_1 + a|.$$

Це доводить (3.29). \square

Введемо локальний параметр $z = \sqrt{48a}(k_1 + a)$. Тоді $z \in \mathbb{D}_{\rho_1}$, де \mathbb{D}_{ρ_1} є колом радіуса $\rho_1 = \sqrt{48a}\rho$ з центром в 0. Контур $\Gamma_{\rho}(-a)$ у термінах змінної z позначимо через Γ_{ρ_1} , а для компонент цього контуру залишимо позначення \mathcal{C} і так далі. Візьмемо до уваги (3.44), тоді покладемо $\varphi(z) := -8ia^3 + \frac{i}{4}z^2$:

$$\begin{aligned} r_1(z) &:= \tilde{R}_1(z) e^{-2\tilde{\eta}(z)} e^{2i\nu \log(2a\sqrt{48a-z})}, \\ r_2(z) &:= \frac{\overline{\tilde{R}_1(z)}}{1 - |\tilde{R}_1(z)|^2} e^{2\tilde{\eta}(z)} e^{-2i\nu \log(2a\sqrt{48a-z})}, \\ r_3(z) &:= \frac{\tilde{R}_1(z)}{1 - |\tilde{R}_1(z)|^2} e^{-2\tilde{\eta}(z)} e^{2i\nu \log(2a\sqrt{48a-z})}, \\ r_4(z) &:= \overline{\tilde{R}_1(z)} e^{2\tilde{\eta}(z)} e^{-2i\nu \log(2a\sqrt{48a-z})}, \end{aligned}$$

де $\tilde{R}_1(z) := R_1(k_1(z))$, $\tilde{\eta}(z) := \eta(k_1(z))$. Фазова функція зображується як

$$\tilde{\Phi}_1(z) := \Phi_1(k_1(z)) = \varphi(z) - \frac{iz^3}{12a\sqrt{48a}}.$$

З визначень (3.21) і (3.24) випливає, що матриця стрибка $v^{(2)}(k_1)$ як функція змінної $z \in \Gamma_{\rho_1}$ має вигляд:

$$\tilde{v}^{(2)}(z) = \mathbb{I} + \begin{cases} r_1(z) z^{-2i\nu} e^{2t\tilde{\Phi}_1(z)} \mathbb{J}, & z \in \mathcal{C}, \\ -r_2(z) z^{2i\nu} e^{-2t\tilde{\Phi}_1(z)} \mathbb{J}^\dagger, & z \in \mathcal{C}_l, \\ -r_3(z) z^{-2i\nu} e^{2t\tilde{\Phi}_1(z)} \mathbb{J}, & z \in \mathcal{C}_l^*, \\ r_4(z) z^{2i\nu} e^{-2t\tilde{\Phi}_1(z)} \mathbb{J}^\dagger, & z \in \mathcal{C}^*. \end{cases} \quad (3.32)$$

Покладемо

$$f := f(a) = R_1(-a) e^{-2\eta(-a)} e^{2i\nu(a) \log(2a\sqrt{48a})}. \quad (3.33)$$

Оскільки $\nu \in \mathbb{R}$ і $\eta(-a) \in i\mathbb{R}$, тоді $|f| = |R_1(-a)|$. З Лемми 3.5 випливає, що при

$z \in \mathbb{D}_{\rho_1}$ функції $\{r_j(z)\}_1^4$ задовольняють нерівностям

$$\begin{aligned} |r_1(z) - f| &\leq C(\epsilon)|z|^\alpha, \quad z \in \mathcal{C}, \\ \left| r_2(z) - \frac{\bar{f}}{1 - |f|^2} \right| &\leq C(\epsilon)|z|^\alpha, \quad z \in \mathcal{C}_l, \\ \left| r_3(z) - \frac{f}{1 - |f|^2} \right| &\leq C(\epsilon)|z|^\alpha, \quad z \in \mathcal{C}_l^*, \\ |r_4(z) - \bar{f}| &\leq C(\epsilon)|z|^\alpha, \quad z \in \mathcal{C}^*, \end{aligned} \quad (3.34)$$

де $\alpha < 1$ може бути обраним довільно близьким до 1. Тепер ми можемо сформулювати допоміжну задачу РГ $_{k_1}$ в області \mathbb{D}_{ρ_1} , яка називається задачею параметрика. Ми шукаємо голоморфну в області $\mathbb{D}_{\rho_1} \setminus \Gamma_{\rho_1}$ матричну функцію $M^{par}(z)$, яка задовольняє умові стрибка

$$M_+^{par}(z) = M_-^{par}(z)v^{par}(z), \quad z \in \Gamma_{\rho_1}, \quad (3.35)$$

з матрицею стрибка

$$v^{par}(z) := \mathbb{I} + \begin{cases} f z^{-2i\nu} e^{2t\varphi(z)} \mathbb{J}, & z \in \mathcal{C}, \\ \bar{f} z^{2i\nu} e^{-2t\varphi(z)} \mathbb{J}^\dagger, & z \in \mathcal{C}^*, \\ -\frac{\bar{f}}{1 - |f|^2} z^{2i\nu} e^{-2t\varphi(z)} \mathbb{J}^\dagger, & z \in \mathcal{C}_l, \\ -\frac{f}{1 - |f|^2} z^{-2i\nu} e^{2t\varphi(z)} \mathbb{J}, & z \in \mathcal{C}_l^*. \end{cases} \quad (3.36)$$

і межовій умові $M^{par}(z) \sim \mathbb{I}$ при $z \in \partial\mathbb{D}_{\rho_1}$.

Цю задачу розв'язано в [51] і [58]. Нагадаємо коротко основні кроки побудови її розв'язку. Позначимо через $\zeta = \sqrt{t} z$. Ми вивчаємо розв'язок задачі параметрика при великих значеннях t . Спочатку розглянемо іншу допоміжну матричну задачу РГ $_{k_1}$ в області $\mathbb{C} \setminus Y$, де $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup Y_4$ і $Y_i = \{s e^{i(2n+1)\pi/4}, s \in \mathbb{R}_+\}$ є контурами як показано на Рис. 3.6.

Нехай $M^Y(\zeta)$ розв'язує наступну задачу

$$\begin{aligned} M^Y(\zeta) &\rightarrow \mathbb{I}, \quad \zeta \rightarrow \infty, \\ M_+^Y(\zeta) &= M_-^Y(\zeta)v^Y(\zeta), \quad \zeta \in Y, \end{aligned} \quad (3.37)$$

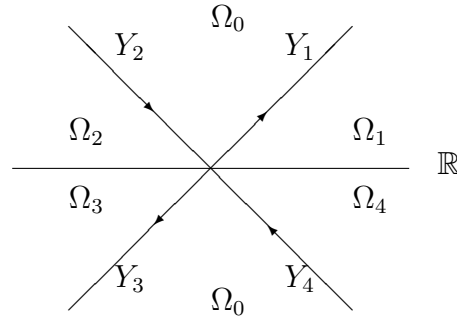


Рис. 3.6. Множини Ω_j і промені Y_i , $j = 1, \dots, 4$.

де матриця стрибка $v^Y(\zeta)$ визначена як

$$v^Y(\zeta) := \mathbb{I} + \begin{cases} f\zeta^{-2i\nu} e^{\frac{i\zeta^2}{2}} \mathbb{J}, & \zeta \in Y_1, \\ -\frac{\bar{f}}{1-|f|^2} \zeta^{2i\nu} e^{-\frac{i\zeta^2}{2}} \mathbb{J}^\dagger, & \zeta \in Y_2, \\ -\frac{f}{1-|f|^2} \zeta^{-2i\nu} e^{\frac{i\zeta^2}{2}} \mathbb{J}, & \zeta \in Y_3, \\ \bar{f}\zeta^{2i\nu} e^{-\frac{i\zeta^2}{2}} \mathbb{J}^\dagger, & \zeta \in Y_4. \end{cases} \quad (3.38)$$

Використаємо ([58]) і визначимо кусково-аналітичну функцію $\tilde{M}^Y(\zeta)$ як

$$\tilde{M}^Y(\zeta) := \begin{pmatrix} \psi_{11}(\zeta) & \frac{(\frac{d}{d\zeta} - \frac{i\zeta}{2})\psi_{22}(\zeta)}{\beta} \\ \frac{(\frac{d}{d\zeta} + \frac{i\zeta}{2})\psi_{11}(\zeta)}{\beta} & \psi_{22}(\zeta) \end{pmatrix}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

де функцію $\beta = \beta(a)$ задано як

$$\beta := \sqrt{\nu(a)} e^{i(\frac{\pi}{4} - \arg f(a) + \arg \Gamma(i\nu(a)))}, \quad (3.39)$$

а функції ψ_{11}, ψ_{22} визначені як

$$\psi_{11}(\zeta) = \begin{cases} e^{-\frac{3\pi\nu}{4}} D_{i\nu}(e^{-\frac{3i\pi}{4}} \zeta), & \text{Im } \zeta > 0, \\ e^{\frac{\pi\nu}{4}} D_{i\nu}(e^{\frac{i\pi}{4}} \zeta), & \text{Im } \zeta < 0, \end{cases}$$

$$\psi_{22}(\zeta) = \begin{cases} e^{\frac{\pi\nu}{4}} D_{-i\nu}(e^{-\frac{i\pi}{4}} \zeta), & \text{Im } \zeta > 0, \\ e^{-\frac{3\pi\nu}{4}} D_{-i\nu}(e^{\frac{3i\pi}{4}} \zeta), & \text{Im } \zeta < 0. \end{cases}$$

Тут $D_s(z)$ позначає функцію параболічного циліндра. Тоді ([58]) розв'язок $M^Y(\zeta)$ матричної задачі $\text{P}\Gamma_{k_1}$ (3.37)-(3.38) має вигляд

$$M^Y(\zeta) = \tilde{M}^Y(\zeta) D_j(\zeta), \quad \zeta \in \Omega_j \quad j = 0, \dots, 4,$$

де $D_0(\zeta) = \zeta^{-i\nu\sigma_3} e^{\frac{i\zeta^2}{4}\sigma_3} \mathbf{i}$

$$\begin{aligned} D_1(\zeta) &= (\mathbb{I} - f\mathbb{J})D_0(\zeta), & D_2(\zeta) &= \left(\mathbb{I} + \frac{\bar{f}}{1-|f|^2}\mathbb{J}^\dagger\right)D_0(\zeta), \\ D_3(\zeta) &= \left(\mathbb{I} + \frac{f}{1-|f|^2}\mathbb{J}\right)D_0(\zeta), & D_4(\zeta) &= (\mathbb{I} - \bar{f}\mathbb{J}^\dagger)D_0(\zeta). \end{aligned}$$

Матриця $M^Y(\zeta)$ є аналітичною при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus Y$ і задовольняє умові стрибка $M_+^Y(\zeta) = M_-^Y(\zeta)v^Y(\zeta)$, де $v^Y(\zeta)$ визначено як (3.38). Також $M^Y(\zeta)$ задовольняє асимптотичній формулі

$$M^Y(\zeta) = \mathbb{I} + \frac{\mathbf{i}}{\zeta} \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \bar{\beta} & 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right), \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (3.40)$$

де $\beta = \beta(a)$ визначено як (3.39). Покладемо $D(t) := e^{8ia^3t\sigma_3} t^{-i\nu\sigma_3/2}$ і введемо матрицю $M^{par}(z)$ за формулою

$$M^{par}(z) := D(t)M^Y(\sqrt{t}z)D(t).$$

Неважко перевірити, що $M^{par}(z)$ задовольняє (3.35)-(3.36). Згідно (3.40) розв'язок є близьким при $t \rightarrow \infty$ до одиничної матриці на межі $\partial\mathbb{D}_{\rho_1}$.

Покладемо $M_{-a}(k_1) = M^{par}(\sqrt{48a}(k_1 + a))$. Ця функція є голоморфною в області $\mathbb{D}_\rho(-a) \setminus (\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^* \cup \mathcal{C}_l \cup \mathcal{C}_l^*)$ і має стрибок з матрицею $v^{par}(\sqrt{48a}(k + a))$. Зауважимо, що матриця $M_a(k_1) := \sigma_1 M_{-a}(k_1) \sigma_1$ розв'язує відповідну задачу параметрика в області $\mathbb{D}_\rho(a) \setminus (\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^* \cup \mathcal{C}_r \cup \mathcal{C}_r^*)$. Крім того, згідно (3.40):

$$M_{-a}(k_1) = \mathbb{I} + \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{48at}(k_1 + a)} \begin{pmatrix} 0 & -\beta e^{16ia^3t} t^{-i\nu} \\ \bar{\beta} e^{-16ia^3t} t^{i\nu} & 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad k_1 \in \partial\mathbb{D}_\rho(-a), \quad (3.41)$$

$$M_a(k_1) = \mathbb{I} - \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{48at}(k_1 - a)} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\beta} e^{-16ia^3t} t^{i\nu} \\ -\beta e^{16ia^3t} t^{-i\nu} & 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad k_1 \in \partial\mathbb{D}_\rho(a).$$

Завершення асимптотичного аналізу майже повторює ті ж міркування, що і в [58, Теорема 2.1]. Позначимо через

$$\tilde{\Gamma} := \mathcal{C}_l \cup \mathcal{C}_l^* \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{C}^* \cup \mathcal{C}_r \cup \mathcal{C}_r^* \cup \partial\mathbb{D}_\rho(-a) \cup \partial\mathbb{D}_\rho(a).$$

Для вектора $m^{(2)}(k_1)$, який відповідає матриці стрибка (3.32), покладемо

$$\hat{m}(k_1) = \begin{cases} m^{(2)}(k_1)(M_{\mp a}(k_1))^{-1}, & |k_1 \pm a| < \rho, \\ m^{(2)}(k_1), & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді вектор-функція $\hat{m}(k_1)$ є голоморфною в області $\mathbb{C} \setminus \tilde{\Gamma}$, задовольняє стандартній симетрії і умові нормування, тобто $\hat{m}(k_1) \rightarrow (1 \quad 1)$ при $k_1 \rightarrow \infty$ і $\hat{m}(-k_1) = \hat{m}(k_1)\sigma_1$. Крім того, ця функція має стрибок на $\tilde{\Gamma}$ із матрицею стрибка

$$\hat{v}(k_1) = \begin{cases} (M_{\mp a}(k_1))_- v^{(2)}(k_1)(M_{\mp a}(k_1))_+^{-1}, & k_1 \in \Gamma_\rho(\mp a), \\ (M_{\mp a}(k_1))^{-1}, & |k_1 \pm a| = \rho, \\ v^{(2)}(k_1), & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

З Теорема 2.1 [58], оцінки (3.34), (3.41) і тривіальної рівності

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|k_1 \pm a| = \rho} \frac{dk_1}{k_1 \pm a} = 1,$$

(інтегрування проти часової стрілки) впливає, що

$$\begin{aligned} \lim_{k_1 \rightarrow i\infty} 2ik_1 \left(\hat{m}(k_1) - \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \right) &= -\frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \left(\int_{|k_1+a|=\rho} (M_{-a}(k_1) - \mathbb{I}) dk_1 \right. \\ &+ \left. \int_{|k_1-a|=\rho} (M_a(k_1) - \mathbb{I}) dk_1 \right) + O(t^{-\frac{1+\alpha}{2}}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{48at}} (1, -1) \left(\beta e^{16ia^3t - i\nu \log t} + \bar{\beta} e^{-16ia^3t + i\nu \log t} \right) + O(t^{-\frac{1+\alpha}{2}}) \\ &= \frac{\sqrt{\nu(a)}}{\sqrt{3at}} \cos \left(16a^3t - \nu(a) \log t - i \log \frac{\beta(a)}{\sqrt{\nu(a)}} \right) + O(t^{-\frac{1+\alpha}{2}}), \end{aligned} \tag{3.42}$$

де член $O(t^{-\frac{1+\alpha}{2}})$ можна продиференціювати за змінною x , і похідна має такий самий порядок $O(t^{-\frac{1+\alpha}{2}})$ при $t \rightarrow \infty$ рівномірно за ξ в області $\xi < -\frac{c^2}{2} - \epsilon$ (див. [58, Теорема 2.1]). Далі, використаємо (3.44), тоді маємо $\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{1}{24at}$. Об'єднаємо це з формулами (3.26), (3.33), (3.39) і (3.42), тоді отримаємо

$$q(x, t) = c^2 + \sqrt{\frac{4\nu(a)a}{3t}} \sin \left(16ta^3 - \nu(a) \log t + \frac{\pi}{4} - \arg f(a) + \arg \Gamma(i\nu) \right),$$

де

$$\arg f(a) = \nu(a) \log(192a^3) + \arg R_1(-a) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-a, a]} \log \left(\frac{1 - |R_1(s)|^2}{1 - |R_1(a)|^2} \right) \frac{ds}{s + a}.$$

Результат наступної теореми тепер безпосередньо впливає з рівності $\arg R_1(-a) = -\arg R_1(a)$ та непарності останнього інтеграла за змінною a .

Теорема 3.6. Нехай $q(x, t)$ є розв'язком задачі Коші (1.1), (3.1). Тоді при достатньо малому $\epsilon_3 > 0$ в області $x < (-6c^2 - \epsilon_3)t$ є справедливою наступна асимптотика при $t \rightarrow \infty$:

$$q(x, t) = c^2 + \sqrt{\frac{4\nu(a)a}{3t}} \sin(16ta^3 - \nu(a) \log(192ta^3) + \Delta(a)) + o(t^{-\gamma}) \quad (3.43)$$

при будь-якому $1/2 < \gamma < 1$. Тут

$$a = \sqrt{-\frac{c^2}{2} - \frac{x}{12t}}, \quad \nu(a) = -\frac{1}{2\pi} \log(1 - |R_1(a)|^2), \quad (3.44)$$

$$\Delta(a) = \frac{\pi}{4} + \arg(R_1(a)) + \arg(\Gamma(i\nu(a))) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-a, a]} \log \left(\frac{1 - |R_1(s)|^2}{1 - |R_1(a)|^2} \right) \frac{ds}{s - a},$$

$\Gamma(z)$ є гамма-функцією, а $R_1(k_1)$ є лівим коефіцієнтом відбиття, який відповідає початковій умові $q(x)$.

Зауваження 3.7. Другий член асимптотичного розвинення (3.43), що побудовано за лівими даними розсіювання, є схожим до формули у спадному випадку ([51]), і відрізняється двома знаками: перед $\arg(R_1(a))$ та перед інтегралом в $\Delta(a)$. Проте методи дослідження задач РГ, які пов'язані з початковими умовами типу сходинки, мають відмінності порівняно зі спадним випадком, особливо у випадку резонансу.

Висновки до розділу 3

- Нелінійним методом найшвидшого спуску досліджено асимптотичну поведінку при великих значеннях часу в зоні позаду заднього фронту хвилі

розв'язку задачі Коші для рівняння Кортевега – де Фріза з початковими умовами типу сходинки, які відповідають хвилі розрідження. При цьому сформульовано асоційовану мероморфну векторну задачу Рімана – Гільберта в термінах спектрального параметра, що відповідає лівій півосі, та доведено існування і єдиність її розв'язку. Взаємно однозначними перетвореннями задачу зведено до голоморфної із додатковими стрибками на колах навколо точок дискретного спектру. Методом лінз цю голоморфну задачу зведено до задачі зі стрибками, що є близькими до одиничної матриці при великих значеннях часу. Обчислено і математично строго обґрунтовано перший та другий члени асимптотичного розвинення, досліджено вплив резонансу на цю асимптотику. Показано, що основний вклад в цій зоні на другий член дає асимптотична поведінка розв'язку в околі так званих точок параметрикса.

Основні результати розділу опубліковані в роботах [2, 28, 65].

РОЗДІЛ 4.

Регуляризовані інтеграли руху рівняння КдФ в класі розв'язків типу сходинок

4.1. Асимптотично скінченнозонні розв'язки рівняння КдФ типу сходинок

Як зазначено в підрозділі 1.3, обернену задачу розсіювання добре вивчено для потенціалів типу сходинок на сталих фонах. Теорію розсіювання на більш складних фонах, а саме скінченнозонних, також добре розвинено (див. [11, 19, 22, 37, 66–68]). Рівняння КдФ з такими початковими умовами, проінтегровано в роботах [46, 47]. Перелічимо деякі властивості методу оберненої задачі розсіювання для рівняння КдФ у випадку, коли початкові умови є спадними на правій півосі, а на лівій півосі – асимптотично скінченнозонними. Розглянемо спектральну задачу

$$-\frac{d^2}{dx^2}y(x) + v(x, t)y(x) = k^2y(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

для оператора Шрьодінгера із скінченнозонним потенціалом $v(x, t)$, що є розв'язком рівняння КдФ із початковими умовами $v(x) = v(x, 0)$ (див. [15]). Як відомо ([14]), скінченнозонний потенціал є нескінченно гладким, тобто $v(\cdot, t) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Для рівняння (4.1) введемо розв'язки типу синуса $s(k, x, t)$ і косинуса $c(k, x, t)$, що задовольняють наступним початковим умовам: $c(k, 0, t) = s_x(k, 0, t) = 1$ і $c_x(k, 0, t) = s(k, 0, t) = 0$. Позначимо через

$$\psi(k, x, t) = c(k, x, t) + m(k, t)s(k, x, t) \quad (4.2)$$

розв'язок Вейля рівняння (4.1), який є нормованим умовою $\psi(k, 0, t) = 1$ і задовольняє $\psi(k, \cdot, t) \in L_2(-\infty, 0)$, $\text{Im } k > 0$. Функція $m(k, t)$ називається функцією Вейля.

Спектр оператора $L_0(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x, t)$ не залежить від часу і складається зі скінченної кількості неперетинних відрізків (зон) $\cup_{i=0}^N (E_i, E_{i+1})$, крім того, остання зона є напівнескінченною, тобто $E_{N+1} = +\infty$.

Розв'язок Вейля (4.2) може бути зображено у вигляді:

$$\psi(k, x, t) = \exp \left(-ikx + \int_0^x \sigma^{[v]}(-k, \xi, t) d\xi \right), \quad (4.3)$$

де для функції $\sigma^{[v]}(k, x, t)$ при великому значенні параметра k є справедливим наступне асимптотичне розвинення ([17, 46]):

$$\sigma^{[v]}(k, x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^{[v]}(x, t)}{(2ik)^j}, \quad (4.4)$$

причому функції $\sigma_j^{[v]}(x, t)$, $j = 1, 2, 3, \dots$ визначаються рекурентними співвідношеннями (при $f(x, t) = v(x, t)$):

$$\begin{aligned} \sigma_1^{[f]}(x, t) &:= f(x, t), \\ \sigma_{j+1}^{[f]}(x, t) &:= -\frac{d}{dx} \sigma_j^{[f]}(x, t) - \sum_{l=1}^{j-1} \sigma_l^{[f]}(x, t) \sigma_{j-l}^{[f]}(x, t), \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

При цьому для функції Вейля $m(k, t)$ має місце асимптотична формула ([46]):

$$m(k, t) = -ik + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma^{[v]}(0, t)}{(-2ik)^j}. \quad (4.6)$$

Припустимо тепер, що гладка дійсна функція $q(x)$ задовольняє умові

$$\int_{\mathbb{R}_+} |x|^m \left(|q^{(j)}(-x) - v^{(j)}(-x)| + |q^{(j)}(x)| \right) dx < \infty, \quad j, m = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (4.7)$$

де $v(x)$ є скінченнозонним потенціалом, що розглянуто вище у цьому підрозділі. Ми будемо називати таку функцію функцією шварцевського типу. Розглянемо цю функцію як початкову умову задачі Коші для рівняння КдФ. Як доведено у [46],

існує єдиний розв'язок $q(x, t)$ цієї задачі Коші, який при кожному t задовольняє умові

$$\int_{-\infty}^0 (1 + |x|^m) |q^{(j)}(x, t) - v^{(j)}(x, t)| dx < \infty, \quad (4.8)$$

$$\int_0^{+\infty} (1 + x^m) |q^{(j)}(x, t)| dx < \infty, \quad j, m = 0, 1, 2, \dots, \quad \forall t \geq 0,$$

рівномірно за змінною $t \in [0, T]$. Тут $v(x, t)$ є дійсним скінченнозонним розв'язком рівняння (1.1) із початковими умовами $v(x)$. Такий клас розв'язків будемо називати розв'язками шварцевського типу й позначати через V .

Нехай тепер $q(x, t) \in V$ і відповідає початковому скінченнозонному потенціалу $v(x)$. Розглянемо цю функцію як потенціал рівняння (2.3). В роботі [22] доведено, що таке рівняння має лівий розв'язок Йоста, що є асимптотично близьким до розв'язку Вейля (4.2):

$$\phi_1(k, x, t) = \psi(x, k, t) + \int_{-\infty}^x K_1(x, y, t) \psi(y, k, t) dy. \quad (4.9)$$

При цьому для ядра лівого оператора перетворення $K_1(x, y, t)$ має місце оцінка ([22, 37]):

$$|K_1(x, y, t)| \leq C_1(x, t) \int_{-\infty}^{\frac{x+y}{2}} |q(\xi, t) - v(\xi, t)| d\xi,$$

де функція $C_1(x, t)$ є неперервною за x і t , додатною та монотонно-спадною за x , такою, що $C_1(x, t) \downarrow C(t) > 0$ при $x \rightarrow -\infty$ рівномірно за $t \in [0, T]$.

Правий розв'язок Йоста $\phi(k, x, t)$ рівняння (2.3) з $q(x, t) \in V$, що нормується умовою (2.4), може бути зображений у вигляді ([17]):

$$\phi(k, x, t) = \exp \left(ikx - \int_x^{+\infty} \sigma^{[q]}(k, \xi, t) d\xi \right), \quad (4.10)$$

де функція $\sigma^{[q]}(k, x, t)$ має розвинення (4.4) (див. також (1.14)), а коефіцієнти $\sigma_j^{[q]}(x, t)$, $j = 1, 2, 3, \dots$ визначаються рекурентними співвідношеннями (4.5) (див. також (1.15)). Аналогічна формула справедлива для розв'язку Йоста (4.9) ([46]):

$$\phi_1(k, x, t) = \psi(k, x, t) \exp \left(\int_{-\infty}^x Q(k, \xi, t) d\xi \right), \quad (4.11)$$

де функція $Q(k, x, t)$ задовольняє рівнянню Ріккати

$$Q'(k, x, t) - 2ikQ(k, x, t) - 2\sigma^{[v]}(-k, x, t)Q(k, x, t) + Q^2(k, x, t) = q(x, t) - v(x, t),$$

і має асимптотичне розвинення

$$Q(k, x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Q_j(x, t)}{(-2ik)^j}.$$

При цьому коефіцієнти визначаються з рекурентних співвідношень

$$\begin{aligned} Q_1(x, t) &= q(x, t) - v(x, t), \\ Q_{j+1}(x, t) &= -Q'_j(x, t) - 2 \sum_{l=1}^{j-1} \sigma_l^{[v]}(x, t) Q_{j-l}(x, t) - \sum_{l=1}^{j-1} Q_{j-l}(x, t) Q_l(x, t). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Наступний підрозділ буде присвячено доведенню наступної теореми:

Теорема 4.1. Нехай $q(x, t)$ є розв'язком задачі Коші (1.1), (4.7). Тоді існує нескінченна серія регуляризованих інтегралів руху \tilde{I}_j :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_j &= \int_{-\infty}^0 Q_j(\xi, t) d\xi + \int_0^{+\infty} \sigma_j^{[q]}(\xi, t) d\xi + \\ &\quad + \int_0^t (2v(0, \tau) \sigma_j^{[v]}(0, \tau) - \sigma_{j+2}^{[v]}(0, \tau)) d\tau, \quad \frac{d}{dt} \tilde{I}_j = 0, \end{aligned}$$

де $\sigma_j^{[q]}(x, t)$, $\sigma_j^{[v]}(x, t)$ та $Q_j(x, t)$ знаходяться з рекурентних співвідношень (4.5), (4.12) при $j = 1, 2, 3, \dots$

4.2. Регуляризовані інтеграли руху у випадку лівого скінченнозонного фону

У цьому підрозділі ми доводимо теорему 4.1. З цією метою зобразимо формулу (4.11) у вигляді:

$$\phi_1(k, x, t) = \exp \left(-ikx + \int_0^x \sigma^{[v]}(-k, \xi, t) d\xi + \int_{-\infty}^x Q(k, \xi, t) d\xi \right), \quad (4.13)$$

а також розглянемо формулу (4.10). Функції $\sigma^{[v]}(k, x, t)$, $\sigma^{[q]}(k, x, t)$, що входять до цих формул, при $k \rightarrow +\infty$ мають асимптотичні розвинення

$$\sigma^{[v]}(k, x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^{[v]}(x, t)}{(2ik)^j}, \quad \sigma^{[q]}(k, x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^{[q]}(x, t)}{(2ik)^j}.$$

де $\sigma_j^{[v]}$ задовольняють рекурентним формулам (4.5).

Розглянемо співвідношення розсіювання

$$T(k, t)\phi_1(k, x, t) = \overline{\phi(k, x, t)} + R(k, t)\phi(k, x, t), \quad k \in \mathbb{R}. \quad (4.14)$$

Якщо $q(x, t) \in V$, то правий коефіцієнт відбиття $R(k, t)$ прямує до нуля швидше будь-якого степеня $\frac{1}{k}$ при $k \rightarrow +\infty$ при будь-якому t ([46]). Тоді з (4.14) випливає асимптотична рівність

$$T(k, t)\phi_1(k, x, t) = \overline{\phi(k, x, t)} + O(k^{-n}), \quad \text{при } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Як показано в роботах [10, 11, 46], еволюція правого коефіцієнта проходження за часом є наступною:

$$T(k, t) = T(k, 0) \exp \left(4ik^3 t + \int_0^t \left(2(v(0, \tau) + 2k^2) m(k, \tau) - \frac{\partial v(0, \tau)}{\partial x} \right) d\tau \right).$$

З асимптотичних формул (4.6), (4.10) та (4.13), випливає

$$\begin{aligned} T(k, 0) \exp \left(-ikx + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\sigma_j^{[v]}(\xi, t) d\xi}{(-2ik)^j} + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^x \frac{Q_j(\xi, t)}{(-2ik)^j} d\xi \right) = \\ = \exp \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \frac{-2v(0, \tau) \sigma_j^{[v]}(0, \tau) + \sigma_{j+2}^{[v]}(0, \tau)}{(-2ik)^j} d\tau - \sum_{j=1}^{\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sigma_j^{[q]}(\xi, t)}{(-2ik)^j} d\xi - ikx \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Розкладемо $\log T^{-1}(k, 0)$ в ряд за степенями $-2ik$:

$$\log T^{-1}(k, 0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\tilde{I}_j}{(-2ik)^j}.$$

Покладемо в рівності (4.15) $x = 0$, тоді

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{Q_j(\xi, t)}{(-2ik)^j} d\xi + \int_0^{+\infty} \frac{\sigma_j^{[q]}(\xi, t)}{(-2ik)^j} d\xi + \right.$$

$$+ \int_0^t \frac{2v(0, \tau) \sigma_j^{[v]}(0, \tau) - \sigma_{j+2}^{[v]}(0, \tau)}{(-2ik)^j} d\tau \Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\tilde{I}_j}{(-2ik)^j}.$$

Порівняємо ліву і праву частину цієї рівності при однакових степенях $(-2ik)^{-1}$ і отримаємо

$$\begin{aligned} \tilde{I}_j &= \int_{-\infty}^0 Q_j(\xi, t) d\xi + \int_0^{+\infty} \sigma_j^{[q]}(\xi, t) d\xi + \\ &+ \int_0^t (2v(0, \tau) \sigma_j^{[v]}(0, \tau) - \sigma_{j+2}^{[v]}(0, \tau)) d\tau, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.16)$$

Оскільки $T(k, 0)$ не залежить від часу, то коефіцієнти \tilde{I}_j також не залежать від часу ($\frac{d\tilde{I}_j}{dt} = 0$), тобто \tilde{I}_j – це інтеграли руху. З іншого боку, формули (4.16) містять параметр часу в явному вигляді. З урахуванням рекурентних співвідношень (4.5) і (4.12), можна переконатися, що при парних j сума перших двох доданків у правій частині (4.16) обертається в нуль, а третій доданок є поліномом від функцій $v(0, 0), v_x(0, 0), \dots$. Запишемо перші шість інтегралів руху $\tilde{I}_j, j = 1, \dots, 6$ у явному вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \int_{-\infty}^0 (q(\xi, t) - v(\xi, t)) d\xi + \int_0^{+\infty} q(\xi, t) d\xi + \int_0^t (3v^2(0, \tau) - v_{\xi\xi}(0, \tau)) d\tau, \\ \tilde{I}_2 &= v(0, 0), \\ \tilde{I}_3 &= \int_{-\infty}^0 (-q^2(\xi, t) + v^2(\xi, t) + q_{\xi\xi}(\xi, t) - v_{\xi\xi}(\xi, t)) d\xi \\ &+ \int_0^{+\infty} (-q^2(\xi, t) + q_{\xi\xi}(\xi, t)) d\xi \\ &+ \int_0^t \left(-4v^3(0, \tau) + 8v(0, \tau)v_{\xi\xi}(0, \tau) + 5v_{\xi}^2(0, \tau) - v^{(4)}(0, \tau) \right) d\tau, \\ \tilde{I}_4 &= -2v^2(0, 0) + v_{xx}(0, 0), \\ \tilde{I}_5 &= \int_{-\infty}^0 \left(2q^3(\xi, t) - 2v^3(\xi, t) + q_{\xi}^2(\xi, t) - v_{\xi}^2(\xi, t) + q^{(4)}(\xi, t) - v^{(4)}(\xi, t) \right) d\xi \\ &+ \int_0^{+\infty} \left(2q^3(\xi, t) + q_{\xi}^2(\xi, t) + q^{(4)}(\xi, t) \right) d\xi \\ &+ \int_0^t \left(9v^4(0, \tau) - 42v^2(0, \tau)v_{\xi\xi}(0, \tau) - 60v(0, \tau)v_{\xi}^2(0, \tau) + 12v(0, \tau)v^{(4)}(0, \tau) \right) \end{aligned}$$

$$+ 28v_{\xi}(0, \tau)v^{(3)}(0, \tau) + 19v_{\xi\xi}^2(0, \tau) - v^{(6)}(0, \tau) \Big) d\tau,$$

$$\tilde{I}_6 = \frac{16}{3}v^3(0, 0) - 8v(0, 0)v_{xx}(0, 0) - 5v_x^2(0, 0) + v^{(4)}(0, 0).$$

4.3. Регуляризовані інтеграли руху у випадку сталого лівого фону

Розглянемо окремий випадок скінченнозонного фону, що є сталим, тобто $v(x, t) = c^2$. Тоді $q(x, t) \rightarrow c^2$ при $x \rightarrow -\infty$, і, крім того, явна залежність непарних інтегралів руху \tilde{I}_j від часу з урахуванням формул (4.5) та (4.16) є лінійною. Перші шість інтегралів мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \int_{-\infty}^0 (q(\xi, t) - c^2) d\xi + \int_0^{+\infty} q(\xi, t) d\xi + 3c^4 t, \\ \tilde{I}_2 &= c^2, \\ \tilde{I}_3 &= \int_{-\infty}^0 (-q^2(\xi, t) + c^4) d\xi + \int_0^{+\infty} (-q^2(\xi, t)) d\xi - 4c^6 t, \\ \tilde{I}_4 &= -2c^4, \\ \tilde{I}_5 &= \int_{-\infty}^0 (2q^3(\xi, t) + q_{\xi}^2(\xi, t) - 2c^6) d\xi \\ &\quad + \int_0^{+\infty} (2q^3(\xi, t) + q_{\xi}^2(\xi, t)) d\xi + 9c^8 t, \\ \tilde{I}_6 &= \frac{16}{3}c^6. \end{aligned}$$

Тоді можна побудувати послідовність інтегралів, які не мають явної залежності від часу. Перші два з них мають вигляд:

$$\begin{aligned} I_2 &= \tilde{I}_3 + \frac{4}{3}c^2 \cdot \tilde{I}_1 = \int_{-\infty}^0 \left(-q^2(\xi, t) + \frac{4}{3}c^2 q(\xi, t) - \frac{1}{3}c^4 \right) d\xi \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \left(-q^2(\xi, t) + \frac{4}{3}c^2 q(\xi, t) \right) d\xi, \\ I_3 &= \tilde{I}_5 - 3c^4 \cdot \tilde{I}_1 = \int_{-\infty}^0 \left(2q^3(\xi, t) - 3c^4 q(\xi, t) + q_{\xi}^2(\xi, t) + c^6 \right) d\xi \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \left(2q^3(\xi, t) - 3c^4 q(\xi, t) + q_{\xi}^2(\xi, t) \right) d\xi. \end{aligned}$$

4.4. Рівняння КдФ з початковими умовами типу сходинок як гамільтонова динамічна система

Нехай M – нескінченновимірний фазовий многовид

$$M = \{q(x) \in C^\infty(-\infty, \infty) : q(x) \rightarrow c^2, x \rightarrow -\infty; \\ q(x) \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty; \frac{\partial^k}{\partial x^k} q(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \pm\infty, \quad k \geq 1\}.$$

Введемо дотичний простір (дотичне розшарування):

$$TM := \{f(x) : f(x) \in C_0^\infty(-\infty, \infty)\}.$$

Вектори цього простору позначимо через $\delta q(x)$ (варіація). Розглянемо білінійну кососиметричну симплектичну форму на многовиді M :

$$\Omega(\delta_1 q, \delta_2 q) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^x dy (\delta_1 q(x) \delta_2 q(y) - \delta_1 q(y) \delta_2 q(x)), \quad (4.17)$$

де $\delta_1 q, \delta_2 q \in TM$. Покажемо, що ця форма може бути записана у вигляді

$$\Omega(\delta_1 q, \delta_2 q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_1 q(x) \left(\frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^x \delta_2 q(y) dy - \int_x^{+\infty} \delta_2 q(y) dy \right) \right) dx.$$

Дійсно, інтеграл в правій частині рівності (4.17) можна перетворити як

$$\Omega(\delta_1 q, \delta_2 q) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\delta_1 q(x) \int_{-\infty}^x \delta_2 q(y) dy - \delta_2 q(x) \int_{-\infty}^x \delta_1 q(y) dy \right). \quad (4.18)$$

Крім того, можна змінити порядок інтегрування:

$$\Omega(\delta_1 q, \delta_2 q) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} dx (\delta_1 q(x) \delta_2 q(y) - \delta_1 q(y) \delta_2 q(x)) \\ = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(\delta_2 q(y) \int_y^{+\infty} \delta_1 q(x) dx - \delta_1 q(y) \int_y^{+\infty} \delta_2 q(x) dx \right). \quad (4.19)$$

Поміняємо в рівності (4.19) змінні x і y місцями, тоді отримаємо

$$\Omega(\delta_1 q, \delta_2 q) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\delta_2 q(x) \int_x^{+\infty} \delta_1 q(y) dy - \delta_1 q(x) \int_x^{+\infty} \delta_2 q(y) dy \right). \quad (4.20)$$

Додамо формули (4.18), (4.20) і перегрупуємо доданки:

$$\begin{aligned} \Omega(\delta_1 q, \delta_2 q) = & \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta_1 q(x) \left(\int_{-\infty}^x \delta_2 q(y) dy - \int_x^{+\infty} \delta_2 q(y) dy \right) \\ & - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta_2 q(x) \left(\int_{-\infty}^x \delta_1 q(y) dy - \int_x^{+\infty} \delta_1 q(y) dy \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Визначимо оператор $J : TM \rightarrow T^*M$, який діє наступним чином

$$Jf = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^x \delta_2 f(y) dy - \int_x^{+\infty} \delta_2 f(y) dy \right) \in M_0 \subset T^*M, \quad (4.22)$$

де T^*M – це кодотичне розшарування над M (простір функціоналів над дотичним розшаруванням), і

$$\begin{aligned} M_0 = \{h(x) \in C^\infty(-\infty, \infty) : h(x) \rightarrow \pm C(h) = \text{const}, x \rightarrow \pm\infty; \\ \frac{\partial^k}{\partial x^k} h(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \pm\infty, k \geq 1\} \subset M. \end{aligned}$$

Тоді в силу (4.21), отримуємо

$$\Omega(\delta_1 q, \delta_2 q) = \frac{1}{2} (\langle \delta_1 q, J\delta_2 q \rangle - \langle \delta_2 q, J\delta_1 q \rangle), \quad (4.23)$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначено операцію подвійності елементів $u \in TM, v \in T^*M$:

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \in \mathbb{R}.$$

З урахуванням (4.22) отримуємо, що оператор J є кососиметричним

$$\langle J\phi, \psi \rangle = - \langle \phi, J\psi \rangle, \quad \forall \phi, \psi \in TM,$$

Тому з (4.23) випливає, що

$$\Omega(\delta_1 q, \delta_2 q) = \langle \delta_1 q, J\delta_2 q \rangle.$$

Визначимо імплектичний оператор ([36]):

$$I = J^{-1} = \frac{d}{dx} : M_0 \rightarrow TM.$$

Нехай H – функція на многовиді M (гамільтоніан). Вона породжує на M нескінченновимірну динамічну систему $\dot{q} = IdH$, де dH – 1-форма на M , I – імплектичний оператор. Якщо гамільтоніан H має вигляд

$$H = \int_{-\infty}^0 \Phi_1(c, q, q_x, \dots) dx + \int_0^{+\infty} \Phi_2(q, q_x, \dots) dx,$$

($\Phi_{1,2}$ – поліноміальні функції), і $\frac{\delta}{\delta q}H \in M_0$, то динамічна система на нескінченновимірному многовиді M може бути записана у формі $\dot{q} = J^{-1}\frac{\delta H}{\delta q}$, тобто

$$\dot{q} = \frac{d}{dx} \frac{\delta H}{\delta q}, \quad q \in M. \quad (4.24)$$

Перевіримо, що рівняння КдФ може бути зображено в гамільтоновій формі (4.24), де $H = \frac{1}{2}I_3$. Дійсно,

$$\begin{aligned} 2\delta H = \delta I_3 &= I_3[q + \delta q] - I_3[q] \\ &= \int_{-\infty}^0 \left(2(q(\xi) + \delta q(\xi))^3 - 3c^4(q(\xi) + \delta q(\xi)) + (q(\xi) + \delta q(\xi))_\xi^2 + c^6 \right) d\xi \\ &+ \int_0^{+\infty} \left(2(q(\xi) + \delta q(\xi))^3 - 3c^4(q(\xi) + \delta q(\xi)) + (q(\xi) + \delta q(\xi))_\xi^2 \right) d\xi \\ &- \int_{-\infty}^0 \left(2q(\xi)^3 - 3c^4q(\xi) + q_\xi^2(\xi) + c^6 \right) d\xi \\ &- \int_0^{+\infty} \left(2q(\xi)^3 - 3c^4q(\xi) + q_\xi^2(\xi) \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(6q^2(\xi) - 2q_{\xi\xi}(\xi) - 3c^4 \right) \delta q(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо, що

$$\frac{\delta H}{\delta q} = 3q^2(x) - q_{xx}(x) - \frac{3}{2}c^4, \quad (4.25)$$

причому $\frac{\delta H}{\delta q} \rightarrow \mp \frac{3c^4}{2}$ при $x \rightarrow \pm\infty$, тобто $\frac{\delta H}{\delta q} \in M_0$. Продиференціюємо (4.25) за змінною x і остаточно отримуємо рівняння КдФ (1.1).

4.5. Зображення регуляризованих інтегралів руху через праві дані розсіювання

Метою цього підрозділу є зображення інтегралів руху через дані розсіювання задачі Коші для рівняння (1.1) з початковими умовами (1.18) шварцевського типу. Розглянемо правий коефіцієнт проходження $T(k, t)$, що є мероморфною

функцією в \mathbb{C}^+ з полюсами в точках $i\kappa_l, l = \overline{1, N}$. Визначимо функцію:

$$A(k, t) = \frac{i}{k_1} \log \left[\prod_{l=1}^N \frac{k - i\kappa_l}{k + i\kappa_l} T(k, t) \sqrt{\frac{k_1}{k}} \right],$$

яка є аналітичною при $\text{Im } k > 0$ і не має нулів в $\overline{\mathbb{C}^+}$. При $\text{Im } k > 0$ за теоремою Коші

$$A(k, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } A(s, t)}{s - k} ds, \quad (4.26)$$

де з урахуванням формул ([47]):

$$\begin{aligned} 1 - |R(k, t)|^2 &= \frac{k_1}{k} |T(k, t)|^2, \quad |k| > c, \\ \arg T(k, t) &= \frac{1}{2} \arg R(k, t), \quad |k| < c, \end{aligned}$$

підінтегральна функція $\text{Im } A(k, t)$ зображується у вигляді

$$\text{Im } A(k, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt[4]{k^2 - c^2}} \log(1 - |R(k, t)|^2), & k \in \mathbb{R} \setminus [-c; c], \\ \frac{1}{\sqrt[4]{c^2 - k^2}} B(k, t), & k \in [-c; c]. \end{cases} \quad (4.27)$$

В останній рівності символом $\sqrt[4]{}$ позначено арифметичний квадратний корінь, а функція $B(k, t)$ має вигляд

$$B(k, t) = \frac{1}{2} \arg R(k, t) + \frac{1}{2} \arg \frac{\sqrt{k^2 - c^2}}{k} + \sum_{l=1}^N \arg \frac{k - i\kappa_l}{k + i\kappa_l}. \quad (4.28)$$

При $\text{Im } k = 0$ визначимо функцію $A(k, t)$ як границю

$$A(k, t) \Big|_{\text{Im } k=0} = \lim_{\text{Im } k \rightarrow +0} A(k, t) \Big|_{\text{Im } k > 0}.$$

Тоді

$$T(k, t) = \sqrt{\frac{k}{k_1}} \prod_{l=1}^N \frac{k + i\kappa_l}{k - i\kappa_l} \exp \left\{ -ik_1 A(k, t) \right\}. \quad (4.29)$$

Підставимо (4.26) в (4.29) і використаємо (4.27), тоді отримаємо наступне інтегральне зображення

$$\log T^{-1}(k, t) = -\frac{i\sqrt{1 - \frac{c^2}{k^2}}}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-c; c]} \frac{\log(1 - |R(s, t)|^2)}{\sqrt{s^2 - c^2}} \frac{ds}{1 - \frac{s}{k}}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{i\sqrt{1 - \frac{c^2}{k^2}}}{\pi} \int_{-c}^c B(s, t) \frac{1}{\sqrt{c^2 - s^2}} \frac{ds}{1 - \frac{s}{k}} \\
& + \sum_{l=1}^N \left(\log \left(1 - \frac{i\kappa_l}{k} \right) - \log \left(1 + \frac{i\kappa_l}{k} \right) \right) + \log \sqrt{\frac{k_1}{k}}.
\end{aligned}$$

Розглянемо розвинення функції $\log T^{-1}(k, t)$ в ряд за степенями k^{-n} :

$$\log T^{-1}(k, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{I}_n(t)}{(-2ik)^n}.$$

Для того щоб знайти коефіцієнти $\hat{I}_n(t)$, використаємо розвинення Тейлора для функцій $\sqrt{1 - \frac{c^2}{k^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{s}{k}}$ та $\log(1 \pm \frac{i\kappa_l}{k})$ за степенями $(-2ik)^{-n}$. Приймаючи до уваги, що функція $\text{Im } A(k)$ є непарною при $k \in [-c; c]$, ми отримуємо наступну теорему:

Теорема 4.2. Нехай $q(x, t)$ є розв'язком задачі Коші (1.1), (4.7), де $v(x, t) \equiv c^2$. Тоді коефіцієнти $\hat{I}_{2j-1}(t)$, $j = 1, 2, \dots$ мають зображення в термінах правих даних розсіювання (1.22):

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{2j-1}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-c; c]} \log \left(1 - |R(s, t)|^2 \right) \frac{(-1)^{j-1} \cdot 2^{2j-2} \cdot d_{2j-1}(s)}{\sqrt{s^2 - c^2}} ds \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c B(s, t) \frac{(-1)^{j-1} \cdot 2^{2j-1} \cdot d_{2j-1}(s)}{\sqrt{c^2 - s^2}} ds - \frac{2^{2j}}{2j-1} \sum_{l=1}^N \kappa_l^{2j-1}, \\
\hat{I}_{2j}(t) &= \frac{(-1)^{j-1} \cdot (2c)^{2j}}{4j},
\end{aligned}$$

де коефіцієнти $d_{2j-1}(s)$ можна знайти із співвідношень:

$$d_{2j-1}(s) = s \cdot b_j + \dots + s^{2j-1} \cdot b_1, \quad b_p = \frac{(2p-2)! c^{2(p-1)}}{(3-2p)(p-1)! 2^{4p-1}}, \quad p = \overline{1, j}.$$

Зауваження 4.3. Перші три коефіцієнти $d_{2j-1}(k)$ мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^1} : \quad & d_1(s) = s, \\
\frac{1}{k^3} : \quad & d_3(s) = s^3 - \frac{c^2}{2}s, \\
\frac{1}{k^5} : \quad & d_5(s) = s^5 - \frac{c^2}{2}s^3 - \frac{c^4}{8}s.
\end{aligned}$$

Як можна бачити, перші два регуляризовані інтеграли руху зображуються через дані розсіювання наступним чином:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \hat{I}_3(t) + \frac{4}{3}c^2 \cdot \hat{I}_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-c; c]} \log \left(1 - |R(s, t)|^2 \right) \frac{-4s^3 + \frac{10}{3}c^2 s}{\sqrt{s^2 - c^2}} ds \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c B(s, t) \frac{-8s^3 + \frac{20}{3}c^2 s}{\sqrt{c^2 - s^2}} ds + \sum_{l=1}^N \left(-\frac{16}{3}\kappa_l^3 + \frac{16}{3}c^2 \kappa_l \right), \\
I_3 &= \hat{I}_5(t) - 3c^4 \cdot \hat{I}_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-c; c]} \log \left(1 - |R(s, t)|^2 \right) \frac{16s^5 - 8c^2 s^3 - 5c^4 s}{\sqrt{s^2 - c^2}} ds \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c B(s, t) \frac{32s^5 - 16c^2 s^3 - 10c^4 s}{\sqrt{c^2 - s^2}} ds + \sum_{l=1}^N \left(-\frac{64}{5}\kappa_l^5 + 9c^4 \kappa_l \right),
\end{aligned}$$

де функція $B(k, t)$ визначається за формулою (4.28). Таким чином, регуляризовані інтеграли руху зображено через праві дані розсіювання (1.22). При $c = 0$, цей результат співпадає з результатами роботи [12].

4.6. Зображення регуляризованих інтегралів руху через ліві дані розсіювання

Метою даного підрозділу є зображення інтегралів руху через ліві дані розсіювання задачі Коші для рівняння (1.1) з початковими умовами (1.18) шварцевського типу. Розглянемо лівий коефіцієнт проходження $T_1(k, t)$, що є мероморфною функцією в \mathbb{C}^+ з полюсами в точках $i\kappa_l, l = \overline{1, N}$. Визначимо функцію:

$$A_1(k, t) = i \log \left[\prod_{l=1}^N \frac{k - i\kappa_l}{k + i\kappa_l} T_1(k, t) \sqrt{\frac{k}{k_1}} \right].$$

яка є аналітичною при $\text{Im } k > 0$ і не має нулів в $\overline{\mathbb{C}^+}$. При $\text{Im } k > 0$ за теоремою Коші є справедливим інтегральне зображення через уявну частину

$$A_1(k, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } A_1(s, t)}{s - k} ds, \quad (4.30)$$

де з урахуванням зв'язку коефіцієнтів проходження $T_1(k, t)$ і відбиття $R_1(k, t)$ ([47]):

$$1 - |R_1(k, t)|^2 = \frac{k}{k_1} |T_1(k, t)|^2, \quad |k| > c,$$

підінтегральна функція $\text{Im } A_1(k, t)$ зображується у вигляді

$$\text{Im } A_1(k, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \log(1 - |R_1(k, t)|^2), & k \in \mathbb{R} \setminus [-c; c], \\ \log \left| T_1(k, t) \sqrt{\frac{k}{k_1}} \right|, & k \in [-c; c]. \end{cases} \quad (4.31)$$

При $\text{Im } k = 0$ визначимо функцію $A_1(k, t)$ як границю

$$A_1(k, t) \Big|_{\text{Im } k=0} = \lim_{\text{Im } k \rightarrow +0} A_1(k, t) \Big|_{\text{Im } k > 0}.$$

Тоді

$$T_1(k, t) = \sqrt{\frac{k_1}{k}} \prod_{l=1}^N \frac{k + i\kappa_l}{k - i\kappa_l} \exp \left\{ -i A_1(k, t) \right\}. \quad (4.32)$$

Підставимо (4.30) в (4.32) і використаємо (4.31), тоді отримаємо інтегральне зображення

$$\begin{aligned} \log T_1^{-1}(k, t) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-c; c]} \frac{\log(1 - |R_1(s, t)|^2)}{s - k} ds \\ &\quad - \frac{i}{\pi} \int_{-c}^c \log \left| T_1(s, t) \sqrt{\frac{s}{\sqrt{s^2 - c^2}}} \right| \frac{ds}{s - k} - \sum_{l=1}^N \log \frac{k + i\kappa_l}{k - i\kappa_l} - \log \sqrt{\frac{k_1}{k}}. \end{aligned}$$

Розглянемо розвинення функції $\log T_1^{-1}(k, t)$ в ряд за степенями k^{-n} :

$$\log T_1^{-1}(k, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\check{I}_{1,n}(t)}{(-2ik)^n}.$$

Для того щоб знайти коефіцієнти $\check{I}_{1,n}(t)$, використаємо розвинення Тейлора для $\frac{1}{1-\frac{s}{k}}$ і для $\log(1 \pm \frac{i\kappa_l}{k})$ за степенями $(-2ik)^{-n}$ та врахуємо, що функція $\text{Im } A_1(k)$ є парною. Тоді отримаємо при $j = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \check{I}_{1,2j-1}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-c; c]} \log \left(1 - |R_1(s, t)|^2 \right) 2^{2j-1} (-1)^{j-1} s^{2j-2} ds \\ &\quad + \frac{i}{\pi} \int_{-c}^c \log \left| T_1(s, t) \sqrt{\frac{s}{\sqrt{s^2 - c^2}}} \right| 2^{2j-1} (-1)^{j-1} s^{2j-2} ds - \frac{2^{2j}}{2j-1} \sum_{l=1}^N \kappa_l^{2j-1}, \\ \check{I}_{1,2j} &= \frac{(-1)^{j-1} \cdot (2c)^{2j}}{4j}. \end{aligned}$$

Врахуємо еволюцію коефіцієнта проходження (1.24), тоді отримаємо зображення регуляризованих інтегралів руху для сталого фону через ліві дані розсіювання.

Перші два з них мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 I_{1,2} &= \check{I}_{1,3}(t) + \frac{4}{3}c^2 \cdot \check{I}_{1,1}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-c;c]} \log \left(1 - |R_1(s, t)|^2 \right) \left(4s^2 - \frac{4}{3}c^2 \right) ds \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \log \left| T_1(s, t) \sqrt{\frac{s}{\sqrt{s^2 - c^2}}} \right| \left(8s^2 + \frac{8}{3}c^2 \right) ds + \sum_{l=1}^N \left(-\frac{16}{3}\kappa_l^3 + \frac{16}{3}c^2\kappa_l \right), \\
 I_{1,3} &= \check{I}_{1,5}(t) - 3c^4 \cdot \check{I}_{1,1}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-c;c]} \log \left(1 - |R_1(s, t)|^2 \right) (16s^4 - 8c^2s^2 - 5c^4) ds \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \log \left| T_1(s, t) \sqrt{\frac{s}{\sqrt{s^2 - c^2}}} \right| (32s^4 - 16c^2s^2 - 10c^4) ds + \sum_{l=1}^N \left(-\frac{64}{5}\kappa_l^5 + 9c^4\kappa_l \right).
 \end{aligned}$$

Таким чином, регуляризовані інтеграли руху зображено через ліві дані розсіювання (1.23).

Висновки до розділу 4

У розділі 4 розглянуто рівняння КдФ, як нескінченновимірну гамільтонову цілком інтегровну систему.

- Отримано регуляризовані інтеграли руху для рівняння КдФ з неспадними початковими умовами, які є асимптотично скінченнозонними на лівій півосі і швидко спадними на правій півосі. Щільність цих інтегралів залежить явно від часу.
- У випадку початкових умов типу сходинки, які відповідають хвилі розриву (ліва асимптотика є сталою), отримано інтеграли руху, що не залежать явно від часу.
- Отримано зображення цих інтегралів через дані розсіювання рівняння Шрьодінгера з потенціалом типу сходинки.

Основні результати розділу опубліковані в роботах [1, 3].

Висновки

Дисертаційну роботу присвячено асимптотичному аналізу розв'язків рівняння КдФ типу сходинок, що відповідають хвилі розрідження, а також побудові регуляризованих інтегралів руху для цих розв'язків, які необхідні для опису рівняння КдФ як нескінченновимірної гамільтонової динамічної системи. Основні результати можна сформулювати таким чином:

- Досліджено і обґрунтовано асимптотичну поведінку хвилі розрідження для рівняння КдФ нелінійним методом найшвидшого спуску, який є модифікацією методу оберненої задачі розсіювання. Отримано і обґрунтовано перший та другий члени асимптотичного розвинення цього розв'язку при великих значеннях часу у головних регіонах просторово-часової півплощини.
- Доведено, що в області $x > \epsilon t$, де $\epsilon > 0$ є довільною малою величиною, хвиля розрідження асимптотично являє собою суму солітонів і експоненційно малого за змінною t залишкового члена.
- Доведено, що в середній області $(-6c^2 + \epsilon)t < x < -\epsilon t$ головний член асимптотичного розвинення є точним розв'язком $\tilde{q}(x, t) = -\frac{x}{6t}$ рівняння КдФ. Також обчислено другий член асимптотичного розвинення і проаналізовано вплив резонансу на цей член. Обчислено порядок залишкового члена цього асимптотичного розвинення.
- Доведено, що в області $x < (-6c^2 - \epsilon)t$ розв'язок є асимптотично близьким до лівої фонові константи c^2 . Виведено строгу формулу для другого члена асимптотичного розвинення в цій області і показано, що резонанс не впливає на цей член.

- Побудовано послідовність регуляризованих інтегралів руху для нескінченно гладкого асимптотично скінченнозонного розв'язку рівняння КдФ типу сходинок. Знайдено зображення цих інтегралів через дані розсіювання початкових умов, що є асимптотично близькими до різних сталих на кожній з півосей.

Список використаних джерел

- [1] Андреев, К. Н. Интегралы движения уравнения Кортевега–де Фриза в классе решений типа ступеньки / К. Н. Андреев // *Допов. Нац. акад. наук Укр.* — 2016. — Т. 9. — С. 7–13.
- [2] Андреев, К. Н. Единственность решения задачи Римана–Гильберта для волны разрежения уравнения Кортевега–де Фриза / К. Н. Андреев, И. Е. Егорова // *Допов. Нац. акад. наук Укр.* — 2017. — Т. 11. — С. 3–9.
- [3] Андреев, К. Н. Регуляризованные интегралы движения уравнения Кортевега–де Фриза в классе неубывающих функций / К. Н. Андреев, Е. Я. Хруслов // *Укр. мат. журн.* — 2015. — Т. 67, № 12. — С. 1587–1601.
- [4] Базарган, Дж. Прямая и обратная задачи рассеяния на всей оси для одномерного оператора Шредингера с потенциалом типа ступеньки / Дж. Базарган // *Допов. Нац. акад. наук Укр.* — 2008. — Т. 4. — С. 7–11.
- [5] Бикбаев, Р. Ф. Комплексные деформации Уизема в задачах с “интегрируемой неустойчивостью” / Р. Ф. Бикбаев // *ТМФ.* — 1995. — Т. 85, № 1. — С. 1596–1604.
- [6] Буслаев, В. С. Обратная задача рассеяния для одномерного уравнения Шредингера на всей оси / В. С. Буслаев, В. Н. Фомин // *Вестник Ленинградского ун-та.* — 1962. — Т. 17, № 1. — С. 56–64.
- [7] Гладкая, З. Н. О решениях уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки / З. Н. Гладкая // *Допов. Нац. акад. наук Укр.* — 2015. — № 2. — С. 7–14.

- [8] Гуревич, А. В. Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны / А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский // *Письма в ЖЭТФ*. — 1973. — Т. 65, № 2. — С. 590–604.
- [9] Гуревич, А. В. Распад начального разрыва в уравнении Кортевега–де Фриза / А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский // *Письма в ЖЭТФ*. — 1973. — Т. 17, № 5. — С. 268–271.
- [10] Ермакова, В. Д. Асимптотика решения задачи Коши для уравнения КдФ с неубывающими начальными данными специального типа / В. Д. Ермакова // *Докл. АН УССР сер. мат.* — 1982. — Vol. 7. — Pp. 3–6.
- [11] Ермакова, В. Д. Дис. Обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера с неубывающим потенциалом и ее применение к интегрированию уравнения Кортевега–де Фриза // канд. физ.-мат. наук: Ph.D. thesis / Харьков. — 1983.
- [12] Захаров, В. Е. Уравнение Кортевега–де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система / В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев // *Функц. анализ и его прилож.* — 1971. — Т. 5, № 4. — С. 18–27.
- [13] Итс, А. Р. Асимптотика решения нелинейного уравнения Шредингера и изомонодромные деформации систем линейных дифференциальных уравнений / А. Р. Итс // *ДАН СССР*. — 1981. — Т. 261, № 1. — С. 14–18.
- [14] Итс, А. Р. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N -солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза / А. Р. Итс, В. Б. Матвеев // *Теоретическая и математическая физика*. — 1975. — Т. 7. — С. 39–46.
- [15] Итс, А. Р. Об одном классе решения уравнения КдФ / А. Р. Итс, В. Б. Матвеев // *Пробл. мат. физики*. — 1976. — Т. 8. — С. 70–92.

- [16] *Косевич, А. М.* Введение в нелинейную физическую механику / А. М. Косевич, А. С. Ковалев. — Киев: Наукова думка, 1989.
- [17] *Марченко, В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. — Киев: Наукова думка, 1977. — С. 331.
- [18] *Мухелишвили, Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике / Н. И. Мухелишвили. — М.: Физматгиз, 1962. — С. 599.
- [19] *Новиков, С. П.* Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза / С. П. Новиков // *Функц. анализ и его прилож.* — 1974. — Т. 8, № 3. — С. 54–66.
- [20] *Тахтаджян, Л. А.* Гамильтонов подход в теории солитонов / Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. — М.: Наука, 1986. — С. 528.
- [21] Теория солитонов. Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. — М.: Наука, 1980. — С. 325.
- [22] *Фирсова, Н. Е.* Обратная задача рассеяния для возмущенного оператора Хилла / Н. Е. Фирсова // *Мат. заметки.* — 1975. — Т. 18, № 6. — С. 831–843.
- [23] *Хруслов, Е. Я.* Распад начального возмущения типа ступеньки в уравнении Кортевега–де Фриза / Е. Я. Хруслов // *Письма в ЖЭТФ.* — 1975. — Т. 21, № 8. — С. 469.
- [24] *Хруслов, Е. Я.* Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки / Е. Я. Хруслов // *Мат. сборник.* — 1976. — Т. 99, № 2. — С. 261–281.

- [25] Хруслов, Е. Я. О солитонах нелинейного уравнения Шредингера, порожденных непрерывным спектром / Е. Я. Хруслов, В. П. Котляров // *ТМФ*. — 1986. — Т. 68, № 2. — С. 172–186.
- [26] Ablowitz, M. J. Solutions and the inverse scattering transform / M. J. Ablowitz, H. Segur. — SIAM Studies in Applied Mathematics, 4. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa, 1981. — P. 425.
- [27] Aktosun, T. On the Schrödinger equation with steplike potentials / T. Aktosun // *J. Math. Phys.* — 1999. — Vol. 40, no. 11. — Pp. 5289–5305.
- [28] Andreiev, K. On the long-time asymptotics for the Korteweg–de Vries equation with steplike initial data associated with rarefaction waves / K. Andreiev, I. Egorova // *J. of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*. — 2017. — Vol. 4. — Pp. 325–343.
- [29] Andreiev, K. Rarefaction waves of the Korteweg–de Vries equation via nonlinear steepest descent / K. Andreiev, I. Egorova // IV International conference “Analysis and Mathematical Physics”. — Kharkiv: book of abstracts., June 13–17, 2016. — P. 16.
- [30] Andreiev, K. Regularized integrals of motion for the Korteweg–de Vries equation with steplike initial data / K. Andreiev // III International conference “Analysis and Mathematical Physics”. — Kharkiv: book of abstracts., June 15–19, 2015. — P. 17.
- [31] Andreiev, K. Regularized integrals of motion of the KdV equation in a class of non-decreasing functions / K. Andreiev // II International conference “Analysis and Mathematical Physics”. — Kharkiv: book of abstracts., June 16–20, 2014. — С. 30.

- [32] *Andreiev, K.* The Korteweg–de Vries equation with steplike initial data as a Hamiltonian system / K. Andreiev // V International conference “Analysis and Mathematical Physics” dedicated to Vladimir A. Marchenko’s 95th birthday and the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine. — Kharkiv: book of abstracts., June 19–24, 2017. — P. 26.
- [33] *Andreiev, K.* Regularized Integrals of Motion for the Korteweg–de Vries Equation with Steplike Initial Data / K. Andreiev // Trilateral German–Russian–Ukrainian Summer School “Spectral Theory, Differential Equations and Probability”. — Johannes Gutenberg Universitat Mainz, September 4th–15th, 2016.
- [34] *Beals, R.* Direct and inverse scattering on the line / R. Beals, P. Deift, C. Tomei. — Mathematical Surveys and Monographs 28, Providence, R.I., 1988.
- [35] *Bikbaev, R. F.* Saturation of modulational instability via complex Whitham deformations: Schrödinger equation / R. F. Bikbaev // *J. Math. Sciences.* — 1997. — Vol. 104, no. 3. — Pp. 393–419.
- [36] *Blackmore, D.* Nonlinear Dynamical Systems of Mathematical Physics / D. Blackmore, A. Prykarpatsky, V. Samoylenko. — World Scientific, 2011.
- [37] *Boutet, de Monvel A.* Inverse scattering theory for one–dimensional Schrödinger operators with steplike finite gap potential / de Monvel A. Boutet, I. Egorova, G. Teschl // *J. d’Analyse Math.* — 2008. — Vol. 106. — Pp. 271–316.
- [38] *Chadan, K.* Inverse problem in quantum scattering theory / K. Chadan, P. C. Sabatier. — New York: Spring–Verlag, 1989. — P. 499.
- [39] *Cohen, A.* Scattering and inverse scattering for steplike potentials in the Schrödinger equation / A. Cohen, T. Kappeler // *SIAM J. Math. Anal.* — 1987. — Vol. 34, no. 1. — Pp. 127–180.

- [40] *Davies, E. B.* Scattering theory for systems with different spatial asymptotics on the left and right / E. B. Davies, B. Simon // *Comm. Pure Appl. Math.* — 1978. — Vol. 63. — Pp. 277–301.
- [41] *Deift, P.* Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann–Hilbert Approach / P. Deift // *Amer. Math. Soc., Rhode Island.* — 1998. — no. 3.
- [42] *Deift, P.* Long–time asymptotics for integrable nonlinear wave equations, in: Important developments in soliton theory / P. Deift, A. Its, X. Zhou // *Springer Ser. Nonlinear Dynam.* — 1993. — Pp. 181–204.
- [43] *Deift, P.* New results in small dispersion KdV by an extension of the steepest–descent method for Riemann–Hilbert problems / P. Deift, S. Venakides, X. Zhou // *Int. Math. Res. Notices.* — 1997. — Vol. 6. — Pp. 285–299.
- [44] *Deift, P.* A steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problems / P. Deift, X. Zhou // *Ann. of Math.* — 1993. — no. 137. — Pp. 295–368.
- [45] *Eckhaus, E.* The Inverse Scattering Transformation and Solutions: An Introduction / E. Eckhaus, A. Van Harten. — Math. Studies 50, North–Holland, Amsterdam, 1984. — P. 231.
- [46] *Egorova, I.* On the Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation with steplike finite–gap initial data. I. Schwartz–type perturbations / I. Egorova, K. Grunert, G. Teschl // *Nonlinearity.* — 2009. — Vol. 22. — Pp. 1431–1457.
- [47] *Egorova, I.* On the Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation with steplike finite–gap initial data II. Perturbations with finite moments / I. Egorova, G. Teschl // *J. d’Analyse Math.* — 2011. — Vol. 115. — Pp. 71–101.
- [48] *Gardner, C. S.* Korteweg–de Vries equation and generalizations. IV. The Korteweg–de Vries equation as a Hamiltonian system / C. S. Gardner // *J. Math. Phys.* — 1971. — Vol. 12. — Pp. 1548–1551.

- [49] Gardner, C. S. Korteweg–de Vries equation and generalizations, II. Existence of conservation laws and constants of motion / C. S. Gardner, M. D. Kruskal, R. M. Miura // *J. Math. Phys.* — 1968. — Vol. 9, no. 8. — Pp. 1204–1209.
- [50] Gesztesy, F. One-dimensional scattering theory for quantum systems with nontrivial spatial asymptotics / F. Gesztesy, R. Nowell, W. Pötz // *Differential Integral Equations*. — 1997. — Vol. 10. — Pp. 521–546.
- [51] Grunert, K. Long-time asymptotics for the Korteweg–de Vries equation via nonlinear steepest descent / K. Grunert, G. Teschl // *Math. Phys. Anal. Geom.* — 2009. — Vol. 12. — Pp. 287–324.
- [52] Inverse scattering theory for Schrödinger operators with steplike potentials / I. Egorova, Z. Gladka, T.-L. Lange, G. Teschl // *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.* — 2015. — Vol. 11. — Pp. 123–158.
- [53] Its, A. R. Large N -asymptotics in random matrices / A. R. Its // in “*Random Matrices, Random Processes and Integrable Systems*”, *CRM Series in Mathematical Physics*, Springer, New York. — 2011.
- [54] Korteweg–de Vries equation and generalizations, V. Uniqueness and nonexistence of polynomial conservation laws / C. S. Gardner, M. D. Kruskal, R. M. Miura, N. J. Zabusky // *J. Math. Phys.* — 1970. — Vol. 11, no. 3. — Pp. 952–960.
- [55] Kotlyarov, V. Riemann–Hilbert problem to the modified Korteweg–de Vries equation: Long-time dynamics of the steplike initial data / V. Kotlyarov, A. Minakov // *J. Math. Phys.* — 2010. — Vol. 51, no. 9. — P. 3506.
- [56] Krüger, H. Long-time asymptotics for the Toda lattice in the soliton region / H. Krüger, G. Teschl // *Math. Z.* — 2009. — Vol. 262. — Pp. 585–602.

- [57] *Lax, P. D.* Integrals of nonlinear equations and solitary waves / P. D. Lax // *Comm. Pure and Appl. Math.* — 1968. — Vol. 21, no. 2. — Pp. 467–490.
- [58] *Lenells, J.* The nonlinear steepest descent method for Riemann–Hilbert problems of low regularity / J. Lenells // *Indiana Univ. Math.* — 2017. — Vol. 66. — Pp. 1287–1332.
- [59] Long–time asymptotics for the Korteweg–de Vries equation with steplike initial data / I. Egorova, Z. Gladka, V. Kotlyarov, G. Teschl // *Nonlinearity.* — 2013. — Vol. 26. — Pp. 1839–1864.
- [60] *Manakov, S. V.* Nonlinear Fraunhofer diffraction / S. V. Manakov // *Sov. Phys. JETP.* — 1974. — Vol. 38. — Pp. 693–696.
- [61] Method for solving the Korteweg–de Vries equation / C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura // *Phys. Rev. Lett.* — 1967. — Vol. 19. — Pp. 1095–1097.
- [62] NIST Handbook of Mathematical Functions / F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark; Ed. by NY New York. — Cambridge University Press, 2010.
- [63] *Novokshenov, V. Y.* Time asymptotics for soliton equations in problems with step initial conditions / V. Y. Novokshenov // *J. Math. Sci.* — 2005. — Vol. 125, no. 5. — Pp. 717–749.
- [64] Random Matrices, Random Processes and Integrable Systems / Ed. by J. Harnard. — Springer, 2011.
- [65] Rarefaction waves of the Korteweg–de Vries equation via nonlinear steepest descent / K. Andreiev, I. Egorova, T.-L. Lange, G. Teschl // *J. Differential Equations.* — 2016. — Vol. 261. — Pp. 5371–5410.

- [66] *Roberts, T. M.* Inverse scattering for step-periodic potential in one dimension / T. M. Roberts // *Inverse Problems*. — 1990. — Vol. 31. — Pp. 2181–2191.
- [67] *Roberts, T. M.* Scattering for step-periodic potential in one dimension / T. M. Roberts // *J. Math. Phys.* — 1990. — Vol. 6. — Pp. 797–808.
- [68] *Stephan, H.* Inverse problems for non-decreasing potentials / H. Stephan // *Teor. Funk., Funk. An., Pril.* — 1986. — Vol. 45. — Pp. 123–132.
- [69] *Teschl, G.* *Mathematical Methods in Quantum Mechanics. With Applications to Schrödinger Operators.* 2nd ed. / G. Teschl. — American Mathematical Soc., RI, 2014. — P. 356.
- [70] *Venakides, S.* Long time asymptotics of the Korteweg–de Vries equation / S. Venakides // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1986. — Vol. 293, no. 1. — Pp. 411–419.
- [71] *Whitham, G. B.* *Linear and nonlinear waves* / G. B. Whitham. — Wiley–Interscience [John Wiley & Sons], New York–London–Sydney, 1974. — P. 660.

Додаток А. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

Публікації у фахових виданнях України:

1. Андреев К. Н. Регуляризованные интегралы движения уравнения Кортевега – де Фриза в классе неубывающих функций / К. Н. Андреев, Е. Я. Хруслов // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, № 12. – С. 1587-1601 (Scopus, Web of Science).

2. Андреев К. Н. Интегралы движения уравнения Кортевега – де Фриза в классе решений типа ступеньки / К. Н. Андреев // Допов. Нац. акад. наук Укр. – 2016. – Т. 9. – С. 7-13.

3. Andreiev K. Rarefaction waves of the Korteweg-de Vries equation via nonlinear steepest descent / K. Andreiev, I. Egorova, T.-L. Lange, G. Teschl // J. Differential Equations. – 2016. – Vol. 261. – Pp. 5371-5410 (Scopus, Web of Science).

4. Андреев К. Н. Единственность решения задачи Римана – Гильберта для волны разрежения уравнения Кортевега – де Фриза / К. Н. Андреев, И. Е. Егорова // Допов. Нац. акад. наук Укр. – 2017. – Т. 11. – С. 3-9.

5. Andreiev K. On the long-time asymptotics for the Korteweg-de Vries equation with steplike initial data associated with rarefaction waves / K. Andreiev, I. Egorova // J. of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2017. – Vol. 4. – Pp. 325-343 (Scopus, Web of Science).

Публікації, які засвідчують апробацію дисертації

Публікації у матеріалах міжнародних наукових конференціях:

6. Andreiev K. Regularized integrals of motion of the KdV equation in a class of

non-decreasing functions / K. Andreiev // II International conference «Analysis and Mathematical Physics». – Kharkiv: book of abstracts. – June 16-20, 2014. – P. 30.

7. *Andreiev K.* Regularized integrals of motion for the Korteweg de Vries equation with steplike initial data / K. Andreiev // III International conference «Analysis and Mathematical Physics». – Kharkiv: book of abstracts. – June 15-19, 2015. – P. 17.

8. *Andreiev K.* Rarefaction waves of the Korteweg-de Vries equation via nonlinear steepest descent / K. Andreiev, I. Egorova // IV International conference «Analysis and Mathematical Physics». – Kharkiv: book of abstracts. – June 13-17, 2016. – P. 16.

9. *Andreiev K.* Regularized integrals of motion of the Korteweg-de Vries equation in the class of non-decreasing functions / K. Andreiev // Trilateral German-Russian-Ukrainian Summer School «Spectral Theory, Differential Equations and Probability». – Johannes Gutenberg Universitat Mainz – September 4-15, 2016.

10. *Andreiev K.* The Korteweg-de Vries equation with steplike initial data as a Hamiltonian system / K. Andreiev // V International conference «Analysis and Mathematical Physics» dedicated to Vladimir A. Marchenko's 95th birthday and the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine. – Kharkiv: book of abstracts. – June 19-24, 2017. – P. 26.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на наступних наукових конференціях та семінарах:

1. II International conference «Analysis and Mathematical Physics», Kharkiv, June 16-20, 2014 (форма участі: доповідь).

2. III International conference «Analysis and Mathematical Physics», Kharkiv, June 15-19, 2015 (форма участі: доповідь).

3. IV International conference «Analysis and Mathematical Physics», Kharkiv, June 13-17, 2016 (форма участі: доповідь).

4. Trilateral German-Russian-Ukrainian Summer School «Spectral Theory, Differential Equations and Probability», Mainz, Germany, September 4-15, 2016 (форма участі: доповідь).

5. V International conference «Analysis and Mathematical Physics» dedicated to Vladimir A. Marchenko's 95th birthday and the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, June 16-20, 2014 (форма участі: стендова доповідь).

6. Науковий семінар відділу диференціальних рівнянь і геометрії Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України (керівник: академік НАН України, д.ф.-м.н., професор Є.Я. Хруслов), Харків, Україна, 2013-2016 рр. (форма участі: доповіді).

7. Науковий семінар відділу математичної фізики Фізико-технічного інституту ім. Б.І. Веркіна НАН України (керівник: д.ф.-м.н., г.н.с. В.П. Котляров), 2016-2018 рр. (форма участі: доповіді).

8. Науковий семінар математичного відділення Фізико-технічного інституту ім. Б.І. Веркіна НАН України (керівник: академік НАН України, д.ф.-м.н., професор Є.Я. Хруслов) 8 листопада 2017 р. (форма участі: доповідь).