Національна академія наук України
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна

Резуненко Олександр Вячеславович

УДК 517.9

ЯКІСНІ ВЛАСТИВОСТІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ, ЩО ПОРОДЖЕНІ НЕЛІНІЙНИМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ З ЗАГАЮВАННЯМ

01.01.03 — математична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Харків — 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Когут Петро Ілліч,
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
завідувач кафедри диференціальних рівнянь;

доктор фізико-математичних наук, професор
Коробов Валерій Іванович,
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
завідувач кафедри прикладної математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Ткаченко Віктор Іванович,
Інститут математики НАН України (м. Київ),
провідний науковий співробітник відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань.

Захист відбудеться «11» грудня 2019 р. о «14-00» годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01 у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки, 47, м. Харків, 61103.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки, 47, м. Харків, 61103.

Автореферат розісланий «_7_» листопада 2019 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради В.О. Горькавий

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У наш час відбувається інтенсивний розвиток якісних методів дослідження нескінченновимірних систем. Велика кількість складних фізичних, хімічних, біологічних процесів, які змінюються з часом, вивчаються за допомогою відповідних математичних моделей. Системи, що описуються за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних та функціонально-диференціальних рівнянь, традиційно є відправною точкою для побудови нескінченновимірних динамічних систем. Слово "динамічна", в широкому розумінні, віддзеркалює присутність відокремленої координати - часу та підкреслює зацікавленість у вивченні процесу якісних змін у системі з плином часу. При цьому, в якості фазового простору (простору станів - простору початкових даних) можуть виступати різноманітні множини, традиційно - банахові, метричні простори, многовиди. Задача вибору зручної множини (простору) в якості фазового простору для кожної конкретної системи, є однією з основних задач, що виникають на самому початку досліджень якісної поведінки систем (О.О. Ладиженська[1], 1991). Це питання нерозривно пов'язано з вибором типу розв'язку, який буде вивчатися та, як наслідок, впливає на вибір методів дослідження. Дослідження рівнянь, в яких одночасно присутні як члени, що відображають ефекти загаювання (пам'ять), так і частинні похідні, нелокальні просторові ефекти, належать до сучасної області математики, яка розвивається на основі методів математичної фізики, теорії диференціальних рівнянь різних типів та сучасного функціонального аналізу.

Про важливість вивчення рівнянь із загаюванням, наприклад, відмічає Я. Куанг у вступі до однієї зі своїх книг[2] "...так багато процесів, природніх та штучних, в біології, медицині, хімії, інженерії, економіці і т.і. включають загаювання, подобається це чи ні, але загаювання зустрічається так часто, майже в кожній ситуації, що ігнорувати його означає ігнорувати реальність."

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконувалась в рамках досліджень кафедри математичного аналізу та кафедри фундаментальної математики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна у відповідності до держбюджетних НДР: "Аналітичні методи в теорії диференціальних рівнянь та теорії керування" (№ держ. реєстрації 0100U003350), "Аналітичні та алгебраїчні методи в теорії диференціальних рівнянь та теорії керування" (№ держ. реєстрації 0103U004226), "Асимптотичні та алгебраїчні методи в теорії диференціальних рівнянь та теорії керування" (№ держ. реєстрації 0106U001561), "Аналітичні методи в якісній теорії диференціальних рівнянь та теорії керування" (№ держ. реєстрації 0109U001456), "Аналітичні методи розв'язання якісних задач теорії керування та теорії функціонально-диференціальних рівнянь" (№ держ. реєстрації 0111U010364), "Дослідження якісної поведінки динамічних систем різної природи" (№ держ. реєстрації 0116U000823), "Оптимальне керування,

---

[1] Ladyzhenskaya O. Attractors for Semigroups and Evolution Equations, Cambridge University Press, Cambridge, 1991. 88 p.

[2] Kuang Y. Delay differential equations with applications in population dynamics. Mathematics in Science and Engineering, 191.Academic Press, Inc., Boston, MA, 1993. xii+398 p.

стійкість і стабілізація динамічних систем складної природи" (№ держ. реєстрації 0119U002530).

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є побудова динамічних систем та дослідження їх асимптотичних властивостей для еволюційних задач математичної фізики та біології, які описуються диференціальними рівняннями із загаюваннями різної природи.

Об'єктом дослідження є нелінійні параболічні та гіперболічні рівняння у частинних похідних, а також звичайні диференціальні рівняння із загаюваннями різних типів.

Предметом дослідження цієї роботи є умови побудови та властивості нескінченновимірних динамічних систем, що виникають за розв'язками (нелінійних) систем диференціальних рівнянь із загаюваннями. Така постановка задачі вже означає нескінченновимірність динамічної системи за часовою змінною. Одночасно з цим, системи можуть бути як скінченновимірними так і нескінченновимірними за просторовою координатою, тобто, бути системами звичайних диференціальних рівнянь або системами рівнянь у частинних похідних.

Основні завдання дослідження:

1. Для широкого класу систем параболічних та гіперболічних рівнянь зі сталим розподіленим загаюванням побудувати Інерційний многовид із загаюванням (ІМЗ) без обмежень на спектр лінійної частини системи та для довільного загаювання (загаювання може бути великим або малим).

2. Знайти співвідношення параметрів системи (величина загаювання, інтервал побудови ІМЗ, вимірність проектора) за якими система має скінченне число істотних мод.

3. Для параболічних рівнянь без загаювання побудувати нові родини наближених інерційних многовидів експоненційного типу. Кожний з многовидів має проходити крізь всі стаціонарні точки динамічної системи.

4. Для параболічних рівнянь зі сталим розподіленим загаюванням для довільно малої товщини притягуючого околу побудувати наближені інерційні многовиди, кожен з яких проходить крізь всі стаціонарні точки динамічної системи.

5. Для систем параболічних рівнянь із загаюванням, що залежить від стану, запропонувати різні фазові простори, пов'язані з властивостями систем, в яких початково-крайові задачі є коректно розв'язними за Ж. Адамаром. Розвинути методи дослідження асимптотичної поведінки побудованих систем.

6. Для класичних розв'язків параболічних рівнянь із загаюванням, що залежить від стану, побудувати та дослідити Многовид розв'язків.

7. Розвинути підхід до вивчення моделей вірусних захворювань із урахуванням ефектів загаювання (пам'яті), що залежить від стану, а також відповідей імунної

системи. Довести коректну розв'язність та узагальнити метод функцій О.М. Ляпунова для таких систем.

8. Сформулювати та дослідити нові моделі вірусних захворювань із урахуванням ефектів загаювання (пам'яті), що залежить від стану, а також неоднорідностей органу, що заражений.

Методи дослідження. В дисертації для розв'язання поставлених задач використані наступні основні теоретичні методи дослідження: 1. Методи інерційних та наближених інерційних многовидів. 2. Методи теорії сильно-неперервних півгруп у банахових просторах. 3. Методи дослідження звичайних диференціальних рівнянь із загаюванням[3]. 4. Теорія стійкості О.М. Ляпунова[4]. 5. Метод компактності[5] для рівнянь у частинних похідних. 6. Метод перетворення часу для диференціальних рівнянь із загаюванням, що залежить від стану. 7. Методи дослідження асимптотичної поведінки нескінченновимірних дисипативних динамічних систем[6].

Наукова новизна отриманих результатів. Всі основні результати є новими. Детальніше, в роботі вперше:

1. Збудовано Інерційний многовид із загаюванням, для параболічних та гіперболічних рівнянь зі сталим загаюванням.

2. Збудована родина наближених інерційних многовидів, які проходять крізь всі стаціонарні точки динамічної системи, що збудована за розв'язками параболічних рівнянь зі сталим загаюванням.

3. Збудовані Інерційний многовид із загаюванням та родина наближених інерційних многовидів, для рівнянь у частинних похідних другого порядку за часом зі сталим загаюванням.

4. Запропонована так звана "ігноруюча умова" на зосереджене загаювання, що залежить від стану, за якої початково-крайова задача для параболічних рівнянь є коректно розв'язною на всьому просторі неперервних функцій. Ця умова є новою навіть для звичайних диференціальних рівнянь із загаюванням, що залежить від стану.

5. Запропонована "узагальнена ігноруюча умова" на зосереджене загаювання, що залежить від стану, за якої початково-крайова задача для параболічних рівнянь є коректно розв'язною на всьому просторі неперервних функцій.

---

[3] Hale J. Theory of functional differential equations. Second edition. Applied Mathematical Sciences, Vol. 3. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. 365 p.

[4] Ляпунов А.М. Общая задача объ устойчивости движенія. Разсужденіе А.Ляпунова. Изданіе Харьковскаго Математическаго Общества. Харьковъ. Типографія Зильберберга. 1892. 251 с.

[5] Lions J.L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod. Paris, 1969. 554 p.

[6] Temam R. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1988. 650 p.

6. Запропоновані та обгрунтовані умови для коректної розв'язності в просторі неперервних вектор-функцій параболічних рівнянь зі змішаними типами загаювання, що залежать від стану.

7. Запропонована та досліджена неавтономна ігноруюча умова для неавтономних нелінійних диференціальних рівнянь.

8. Запропоновані нові постановки задач в метричних нелінійних просторах, в яких коректно розв'язні параболічні рівняння із зосередженими загаюваннями, що залежать від стану.

9. Знайдені умови існування глобальних компактних атракторів для параболічних рівнянь із різними типами загаювань (зосереджені, розподілені, змішані), що залежать від стану.

10. Вперше знайдені умови скінченновимірності глобальних атракторів для рівнянь у частинних похідних із загаюваннями, що залежать від стану.

11. Отримані результати по коректній розв'язності систем, що описують динаміку вірусних захворювань із урахуванням відповідей імунної системи. Системи мають біологічно обумовлені загаювання, що залежать від стану. Досліджена стійкість стаціонарних (хронічних та здорових) станів системи.

12. Отримані результати по коректній розв'язності та стійкості систем, що описують динаміку вірусних захворювань з урахуванням просторових неоднорідностей органів, що інфіковані.

13. Запропоноване поняття еквівалентності часів у методі трансформації часу.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Разроблені в дисертації математичні методи дослідження широких класів диференціальних рівнянь можуть бути використані для аналізу цілої низки задач математичної фізики та біології, перш за все які пов'язані з процесами реакції-дифузії в обмежених областях. Зокрема, при дослідженні динаміки вірусних захворювань, стійкості стаціонарних (хронічних) станів, прогнозування стану хворих. Частина досліджень, що стосується неперервних розв'язків може бути використана при моделюванні реакції організму на прийом ліків.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи, які винесені на захист, одержані здобувачем особисто. З результатів робіт, що виконані у співавторстві, на захист виносяться лише положення, які одержані автором дисертації. В дисертації використані матеріали, що опубліковані у 24 наукових статтях та тезах 15 конференцій. З 24 статтей 19 робіт опубліковані дисертантом без співавторів, а решта виконані в співавторстві з Чуєшовим І.Д., Ву Дж., Загалаком П., Кристином Т. В усіх статтях, що видані здобувачем у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у постановці задач, розробці використаних методів дослідження, виконанні досліджень, аналізі отриманих результатів, а також визначенні наступних етапів роботи. В роботах, що виконані у співавторстві, співавторам належать наступні результати: В роботі [8] Ву Дж. написав огляд для вступу та прийняв участь в обговоренні результатів. Наведені в дисертації результати належать автору. В роботі [17] Загалак П. прийняв участь в написанні огляду для вступу та обговоренні результатів. Наведені в дисертації результати належать автору. В роботі [21] Кристин Т. запропонував доведення леми 1, прийняв участь в обговоренні результатів. Наведені в дисертації результати належать автору. В роботах [19,20] Чуєшову І.Д. належать початкові постановки задач без загаювання та зі сталим загаюванням. Резуненко О.В. належать ідеї вибору фазових просторів для задач із загаюваннями, що залежать від стану та класів таких загаювань. Метод квазістійкості належить Чуєшову І.Д. Наведені в дисертації результати належать автору.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи по темі дисертації доповідались та обговорювались на семінарах кафедри математичної фізики та обчислювальної математики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (керівник чл.-кор. НАН України І.Д. Чуєшов), математичному семінарі ФТІНТ НАН України (керівник акад. НАН України Є.Я. Хруслов), семінарі, що присвячений 60-ти річчю проф. Г.М. Скляра (керівник проф. В.І. Коробов), двічі на семінарі Математичного інституту Університету м.Гісена, Німеччина (керівник проф. Х.-О. Вальтер), математичному семінарі університету Нью Фаундленда, Канада (керівник проф. К. Зоу), семінарі кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники проф. Т.А. Мельник, проф. В.Г. Самойленко), а також на наступних міжнародних конференціях:

– Symposium in honor of Louis Boutet de Monvel "Equations aux derivees partielles et quantification", Institute of Mathematics of Jussieu, Paris, June 23-27, 2003.
– Математичний симпозіум “Перші Каразінські наукові читання”, присвячений двухсотріччю Харківського університету, Харків, червень 14-16, 2004.
– 77th GAMM Annual Meeting 2006, Technical University of Berlin, March 27–31, 2006.
– The 8th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, June 25–28, 2007, Bolyai Institute, University of Szeged, Hungary.
– ICMP09 - XVI International Congress on Mathematical Physics, August 3–8, 2009, Prague, Czech Republic.
– Український математичний конгрес - 2009 (до 100-річчя від дня народження М.М. Боголюбова), м. Київ, Інститут математики НАН України, 27–29 серпня 2009.
– The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, May 25–28, 2010, Dresden, Germany.
– The 9th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, June 28–July 1, 2011, Bolyai Institute, University of Szeged, Hungary.
– Міжнародна конференція "Динамічні системи та їх застосування", м. Київ, Інститут математики НАН України, 16–18 травня 2012.
– XVI Міжнародна конференція "Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем" (DSMSI-2013), м. Київ, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, 29–31 травня 2013.
– The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems Differential Equations and Applications, July 7 – July 11, 2014, Madrid, Spain. Special Session 24: "Qualitative Analysis of Reaction Diffusion Systems".

– The 10th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, July 1–4, 2015, Bolyai Institute, University of Szeged, Hungary.
– Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та теорія керування" присвячена 75-річчю проф. В.І. Коробова, 26–28 вересня 2016 р. Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, Україна.
– International conference "Biomathematics Day", October 24, 2016, Centre of Excellence in Analysis and Dynamics Research, Department of Mathematics and Statistics, Helsinki University, Finland.
– International conference EQUADIFF 2017, Slovak University of Technology, Bratislava, Slovakia, July 24–28, 2017.
– VI International Conference "Analysis and mathematical physics" dedicated to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory, Kharkiv, Ukraine, June 18-22, 2018.
– The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, July 5 – July 9, 2018, Taipei, Taiwan. Invited talk on the Special Session 64: 'Delay Equations in Population Dynamics'.
– The IFIP TC 7 Conference on System Modelling and Optimization, July 23–27, 2018, Universitat Duisburg-Essen, Essen, Germany. Invited talk on the mini-symposium 06: 'Honoring the work of Igor Chueshov' (Organizers: I. Lasiecka, J. Webster).
– The 3rd international scientific conference "Differential Equations and Control Theory" (DECT-2018), V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine, 25–27 September 2018.
– Міжнародні конференції "Кримська осіння математична школа-симпозіум (КРОМШ)", Крим, Ласпі, Україна (2004, 2005, 2007–2009 роки).

Жоден результат кандидатської дисертації автора, захищеної в Інституті математики НАН України, м.Київ, у 1998 році, за спеціальністю 01.01.03 "Математична фізика", не є включеним в цю дисертаційну роботу.

Публікації. Результати, представлені в дисертації, опубліковані в 39 наукових роботах, з них – 24 наукові статті у фахових наукових виданнях (всі 24 входять до наукометричних баз даних). Серед них 21 статті [1,2,4-9,11-15,17-24] входять до наукометричної бази даних Scopus і опубліковані у фахових виданнях, що мають імпакт-фактор. Три інші статті [3,10,16] присутні у фахових реферативних базах даних Zentralblatt MATH, MathSciNet. Крім того, 15 тез доповідей на міжнародних наукових конференціях (у тому числі одна публікація в матеріалах конференції [35] входить до наукометричної бази даних Web of Science). Всі згадані 21 статті у виданнях, що віднесені до першого і другого квартилів (Q1 і Q2, Scopus). Зокрема, 11 статтей у виданнях, віднесених до першого квартилю (Q1, Scopus), а також 10 статтей у виданнях, віднесених до другого квартилю (Q2, Scopus) відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, 6 розділів, висновків, списку використаних першоджерел, 4 додатків, та супроводжується анотаціями та списком публікацій здобувача за темою дисертації. В роботі є 6 рисунків. Список використаних джерел побудований в алфавітному порядку прізвищ перших авторів і налічує 226 найменувань. При цьому спочатку цитуються роботи кирилицею, а потім латиницею. Повний обсяг дисертаційної роботи – 370 сторінок. Обсяг основної частини дисертації – 309 сторінок.

Подяки. Автор щиро вдячний професору Чуєшову І.Д. за багаторічну підтримку, допомогу та корисні обговорення якісної теорії динамічних систем та методу квазістійких оцінок, професорам Вальтеру Х-О., Кристину Т., Ву Дж., Руесу В. за корисні коментарі та поради.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Одним із основних понять в наших дослідженнях є поняття *динамічної системи*[7 8].

Визначення 1.1. *Під* динамічною системою *ми розуміємо пару* (S_t, H), *яка складається з повного метричного простору* H *та родини неперервних відображень* $(S_t : t \geq 0)$ *простору* H *в себе, яка задовільняє півгруповим властивостям* $S_0 = I$, $S_{t+\tau} = S_t\, S_\tau$ *для всіх* $t, \tau \geq 0$. *Тут* I *позначає тотожній оператор. Також припускаємо, що* $S_t x$ *є неперервна функція змінної* t *для всіх* $x \in H$. *Тут* H *зветься фазовим простором (або простором станів) та* $\{S_\tau\}$ *зветься еволюційною півгрупою.*

Одним із центральних об'єктів теорії є *глобальний атрактор*.

Визначення 1.4. Глобальним атрактором *динамічної системи* (S_t, H), *зветься замкнена обмежена множина* U *в* H, *яка є строго інваріантною (тобто* $S_t\, U = U$ *для всіх* $t \geq 0$) *та така, що для будь-якої обмеженої множини* $B \subset H$, *виконується* $\lim_{t\to+\infty} sup\{dist_H\,(S_t, U), y \in B\} = 0$.

Розглянемо наступне диференціальне рівняння (розділ 2)

$$\frac{du}{dt} + Au = B\,(u_t) \text{ для } t > 0. \tag{2.1}$$

Зазначимо, що тут та далі, нумерація формул та теорем збігається з відповідною нумерацією в основному тексті дисертаціїї.

В перших двох розділах ми будемо використовувати наступне припущення (A1) на лінійний оператор A та різні припущення на нелінійне відображення B.

(A1) *Лінійний оператор* A *є додатнім, з дискретним спектром в сепара-бельному гільбертовому просторі* H *зі щільною областю визначення* $D(A) \subset H$.

---

[7] Чуешов И.Д. Введение в теорию бесконечномерных дисипативних систем. Харьков, Акта, 1999. 433 с.

[8] Hale J.K., Magalhaes L.T., Oliva W.M. Dynamics in infinite dimensions. With an appendix by Krzysztof P. Rybakowski. Second edition. Applied Mathematical Sciences, 47. Springer-Verlag, New York, 2002. viii+280 p.

Отже існує ортонормований базис $\{e_k\}$ простору H такий, що $A\, e_k = \lambda_k e_k$ із $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots$, $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = \infty$.

Позначимо $C(a,b;\ \mathrm{D}(\mathrm{A}^{\alpha}))$ простір сильнонеперервних функцій на $[a,b]$ зі значеннями в області $\mathrm{D}(\mathrm{A}^{\alpha})$, який є банаховим простором з нормою $\sup\{\, ||\,\mathrm{A}^{\alpha} v(\theta)||: \theta \in [a,b]\}, \alpha \in \mathbb{R}$. Тут та далі $||.||$ - норма H, та $(.,.)$ відповідний скалярний добуток. Також будемо використовувати $|.|_{\alpha} = ||\mathrm{A}^{\alpha}.||$ для короткості. Для $r > 0$, ми позначаємо простір $C_{\alpha} = C([-r,0];\ \mathrm{D}(\mathrm{A}^{\alpha}))$.

Зафіксуємо натуральне N та позначимо $P = P_N$ ортопроектор на підпростір, збудований за $\{e_k\}_{k=1}^{N}$ та $Q = I - P$. Також визначимо N-вимірний проектор $\widehat{P} = \widehat{P}_N$ та проектор $\widehat{Q} = \widehat{Q}_N$ в C_{α} наступним чином $\widehat{P}\varphi = (\widehat{P}_N\varphi)(\theta) = \sum_{k=1}^{N} e^{-\lambda_k \theta}(\varphi(0), e_k)e_k$, $\widehat{Q} = I - \widehat{P}$, де $\theta \in [-r,0]$ та $\varphi = \varphi(\theta)$ елемент простору C_{α}.

В цьому розділі ми використовуємо умову на B:

(A2) *Нелінійне відображення* $B: C_{\alpha} \longrightarrow H$ $\left(0 \le \alpha \le \frac{1}{2}\right)$ *має вигляд*

$$B(v) = B_0\big(v(0)\big) + B_1(v),$$

де B_0 *та* B_1*- відображення з* $D(A^{\alpha})$ *(відповідно з* C_{α}*) до H такі, що*

$$||B_0(w_1) - B_0(w_2)\| \le M_0 \| A^{\alpha}(w_1 - w_2)\|, \qquad \text{для } w_1, w_2 \in D(A^{\alpha}),$$

$$||B_1(v_1) - B_1(v_2)|| \le M_1\, |v_1 - v_2|_{C_{\alpha}}, \qquad \text{для } v_1, v_2 \in C_{\alpha}.$$

Традиційно для рівнянь із загаюванням, маючи функцію $u: [a-r,b] \longrightarrow H$, $b > a$ для кожного $t \in [a,b]$ ми позначаємо $u_t = u_t(\theta)$ функцію аргумента $\theta \in [-r,0]$, яка визначається за правилом $u_t(\theta) = u(t+\theta), \theta \in [-r,0]$.

Підрозділ 2.2 присвячений Інерційним многовидам із загаюванням (ІМЗ) для параболічних рівнянь із загаюванням. Доведений наступний результат.

Теорема 2.2. *Існує* T_0 *таке, що для довільного* $T \in (0, T_0]$*, довільних* $p \in P_N H$ *та* $\psi \in \widehat{Q}_N\, C_{\alpha}$ *існує єдиний розв'язок* $u(t)$ *задачі (2.1), що визначений на* $[-T,\infty)$ *такий, що* $P_N u(0) = p$, $\widehat{Q}_N u_{-T} = \psi$. *Більш того, якщо ми положимо* $\Phi(p,\psi) = \widehat{Q}_N u_0$, *то це визначає липшицеве відображення з* $P_N H \times \widehat{Q}_N\, C_{\alpha}$ *до* $\widehat{Q}_N\, C_{\alpha}$ *тобто, для довільних* $(p^i, \psi^i) \in P_N H \times \widehat{Q}_N\, C_{\alpha}, i = 1,2$ *маємо:*

$$|\Phi(p^1,\psi^1) - \Phi(p^2,\psi^2)|_{C_{\alpha}} \le L_1(T)\, |p^1 - p^2|_{\alpha} + L_2(T)\, |\psi^1 - \psi^2|_{C_{\alpha}}. \qquad (2.8)$$

Більш того, існує стала $\hat{c}$ *така, що при* $\lambda_N^{1-\alpha} > \hat{c}$ *можливо знайти* T *та* $r < T$*, такі, що сталі Липшиця* $L_i < 1, i = 1,2$. *Ми кажемо, що* Φ *визначає многовид* M *в* $P_N H \times \widehat{Q}_N\, C_{\alpha} \times \widehat{Q}_N\, C_{\alpha}$. *Цей многовид є інваріантним, тобто якщо* $u(t)$ *є розв'язком (2.1), то* $\widehat{Q}_N u_t = \Phi\big(P_N u(t),\ \widehat{Q}_N u_{t-T}\big)$, $t \ge 0$.

Підрозділ 2.3 присвячений *Наближеним інерційним многовидам* (НІМ) для параболічних рівнянь із загаюванням. Основним результатом є наступна

Теорема 2.21. *Оберемо довільне* $\eta > 0$. *Існують* N *та* r_0 *такі, що для довільного* $r \epsilon [0, r_0]$ *існує N-вимірний наближений інерційний многовид, який включає всі стаціонарні точки задачі (2.1) та товщина його притягуючого околу є* η. *Детальніше, маємо* $| \hat{Q}_N u_t - \Psi^T(P\, u(t))|_{C_\alpha} \le C_R\, exp\left\{-\frac{2}{T}\,(t-t_*)\ln 2\right\} + \eta$ *для всіх* $t \ge t_* + T/2$ *та довільного розв'язку* $u(t)$ *задачі (2.1) такого, що* $| u_t |_{C_\alpha} \le R$ *для* $t_* \le t < \infty$.

У *підрозділі 2.3.2* вивчається залежність НІМ від часу загаювання.

У *підрозділі 2.*4 запропонована побудова експоненційної родини наближених інерційних многовидів для параболічних рівнянь *без загаювання*.

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема, яка стверджує, що поверхня M^T є наближеним інерційним многовидом.

Теорема 2.34. *Існують сталі* ρ_1 *та* Λ *(залежні тільки від М,* α *та* λ_1*) такі, що при виконанні*

$$\lambda_{N+1}^{1-\alpha} \ge \Lambda\, \rho^{-1}, \quad T = \rho \lambda_{N+1}^{-\alpha}, \quad 0 < \rho \le \rho_1, \tag{2.72}$$

відображення Ψ^T*, що визначає НІМ, має наступну властивість*

$$\left\| A^\alpha(Qu(t) - \Psi^T Pu(t))) \right\| \le C_R^1\, exp\left\{-\frac{\sigma_0}{\rho}\,\lambda_{N+1}^{\alpha}(t-t_*)\right\} + C_R^2\, exp\left\{-\frac{\rho}{2}\,\lambda_{N+1}^{1-\alpha}\right\}$$

для всіх $t \ge t_* + T/2$ *та довільного розв'язку u(t) задачі (2.1) такого, що* $\left\| A^\alpha u(t) \right\| \le R$ *для* $t_* \le t < \infty$.

Підрозділ 2.5 присвячений дослідженням рівняння *другого порядку за часом* із загаюванням методом ІМЗ. Ми досліджуємо наступне рівняння

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + Au = B(u_t) \ \text{для} \ t > 0, \quad \varepsilon > 0 \tag{2.76}$$

із початковими даними

$$u(\theta) = u^0(\theta) \ \text{для} \ \theta \in [-r, 0], \quad \dot{u}|_{t=0+} = \mathrm{u}^1. \tag{2.77}$$

Подібно до результатів попередніх підрозділів, для цього рівняння побудовані ІМЗ (теорема 2.41), за допомогою яких будуються СНІМ (стаціонарні НІМ).

Теорема 2.49. *Оберемо довільне* $\eta > 0$. *Існують* N *та* r_0 *такі, що для довільного* $r \epsilon [0, r_0]$ *та для всіх* $\varepsilon^2 \in [2\mu_{N+1}, 2\mu_{N+1} + \mu_N]$ *існує N-вимірний наближений інерційний многовид, який включає всі стаціонарні точки задачі (2.76) та товщина його притягуючого околу є* η. *Детальніше, маємо* $| \hat{Q}_N U_t - \Psi^T\big(P\, U(t)\big)|_{C_E} \le C_R\, exp\left\{-\frac{2}{T}\,(t-t_*)\ln 2\right\} + \eta$ *для всіх* $t \ge t_* + T/2$ *та довільного розв'язку* $U(t)$ *системи такого, що* $\left\| U_t \right\|_{C_E} \le R$ *для* $t_* \le t < \infty$.

Розділ 3 присвячений рівнянням у частинних похідних із *загаюваннями, що залежать від стану* (ЗЗС). Цей тип загаювання є основним в дисертації. Слід відмітити, що в дисертації вперше розглядаються рівняння такого типу. Раніше були відомі результати лише для звичайних диференціальних рівнянь із ЗЗС. Розпочинаємо з обговорення прикладів неєдиності розв'язків із неперервними початковими функціями (підрозділ 3.1). Варто нагадати простий приклад[9] наведений в роботі Р. Драйвера (1963), який наочно демонструє відмінність від випадку сталих загаювань. Просте скалярне рівняння

$$\dot{y}(t) = -2y\big(t - y(t)\big) + 5, \qquad t > 0$$

з *неперервною* початковою функцією $y(t) = \varphi(t) = \sqrt{|4+t|} + 2,\ t \le 0$ має *два* неперервних (навіть нескінченно диференційовних) розв'язка $y^1(t) = 4 + t, t \ge 0$ та $y^2(t) = 4 + t - t^2, t \in [0,2]$. Перевірка відбувається простою підстановкою в рівняння.

Перша спроба дослідити РЧП із зосередженим ЗЗС наведена у підрозділі 3.2. Основною ідеєю є наближення члена з зосередженими загаюваннями за допомогою послідовності елементів із розподіленими загаюваннями (всі залежать від стану). Доводимо, що задача з розподіленим загаюванням має глобальний атрактор, а задача з зосередженим загаюванням має траєкторний атрактор.

Розглянемо наступне (нелокальне) РЧП із зосередженим ЗЗС

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + A\,u(t,x) + d\,u(t,x) = \int_{\Omega} b\big(u(t - \eta(u(t),u_t),y)\big)f(x-y)dy$$
$$= \big(F(u_t)\big)(x),\ \ x \in \Omega. \tag{3.11}$$

Оператор A задовільняє умові (A1), гладка область Ω обмежена в R^{n_0}, $f\colon \Omega - \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ обмежена та вимірна функція, $b\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ локально липшицева та обмежена, d додатня стала. Функція $\eta(.,.)\colon L^2(\Omega) \times L^2\big(-r,0;L^2(\Omega)\big) \longrightarrow \mathbb{R}$ представляє зосереджене *загаювання, що залежить від стану*. Для короткості ми позначаємо $H = L^2(\Omega) \times L^2\big(-r,0;L^2(\Omega)\big)$.

Спочатку, розглянемо (нелокальне) РЧП із розподіленим на $[-r,0]$ ЗЗС

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + A\,u(t,x) + d\,u(t,x)$$
$$= \int_{-r}^{0}\left\{\int_{\Omega} b\big(u(t+\theta,y)\big)f(x-y)dy\right\}\xi^n(\theta,u(t),u_t)d\theta$$
$$= \big(F_n(u_t)\big)(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.12}$$

де функція $\xi^n(.,.,.)\colon [-r,0] \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ представляє *розподілене* ЗЗС.

Ми розглядаємо рівняння (3.11) та (3.12) із початковими даними

$$u|_{t=0+} = \mathrm{u}^0 \in L^2(\Omega), \qquad u|_{[-r,0]} = \varphi \in L^2\big(-r,0;L^2(\Omega)\big). \tag{3.13}$$

Визначення 3.2. *Функція* u *зветься слабким розв'язком задачі (3.12), (3.13) на* $[0,T]$, *якщо* $u \in L^\infty\big(0,T;L^2(\Omega)\big) \cap L^2\big(-r,T;L^2(\Omega)\big) \cap L^2(0,T;D(A^{1/2}))$, $u(\theta) = \varphi(\theta)$ *для* $\theta \in [-r,0]$ *та*

[9] Driver R.D. Existence theory for a delay-differential system // Contributions to Differential Equations. 1963. 1. P.317-336.

$$-\int_0^T \langle u, \dot{v}\rangle\, dt + \int_0^T \langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v\rangle\, dt + \int_0^T \langle du - F_n(u_t), v\rangle\, dt = -\langle u^0, v(0)\rangle \quad (3.14)$$

для довільної функції $v \in L^2(0,T; D(A^{1/2}))$, *з* $\dot{v} \in L^2(0,T; D(A^{-1/2}))$, *та* $v(T) = 0$.

Наступне твердження дає існування слабкого розв'язку.

Теорема 3.3. *Припустимо, що*
(i) $b: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *локально липшицева та обмежена;*
(ii) $f: \Omega - \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *обмежена та вимірна;*
(iii) $\xi^n: [-r, 0] \times L^2(\Omega) \times L^2(-r, 0; L^2(\Omega)) \longrightarrow \mathbb{R}$, *задовільняє умови*
a) для всіх $M > 0$ *існує* $L_{\xi,M,n}$ *таке, що для всіх* $(v^i, \psi^i) \in H$, *які задовільняють* $\| v^i \|^2 + \int_{-r}^0 \| \psi^i(s) \|^2\, ds \leq M^2$, $i = 1,2$ *виконується*

$$\int_{-r}^0 |\xi^n(\theta, v^1, \psi^1) - \xi^n(\theta, v^2, \psi^2)|\, d\theta$$

$$\leq L_{\xi,M,n} \left[\| v^1 - v^2 \|^2 + \int_{-r}^0 \| \psi^1(s) - \psi^2(s) \|^2\, ds \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.15)$$

b) існує $C_{\xi,1} > 0$ *таке, що* $||\xi^n(.,v,\psi)||_{L^1(-r,0)} \leq C_{\xi,1}$, *для всіх* $(v,\psi) \in H$.
Тоді для довільного $(u^0, \varphi) \in H$ *задача (3.12), (3.13) має слабкий розв'язок* $u(t)$ *на довільному сегменті* $[0, T]$, *який задовільняє* $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$.

Теорема 3.8. *Нехай функції* b *та* f *такі, як в теоремі 3.3, функція* ξ^n *задовільняє (iii)-a) та* $\xi^n(.,v,\psi) \in L^\infty(-r, 0)$ *для всіх* $(v,\psi) \in H$. *Тоді розв'язок (3.12), (3.13), що збудований в теоремі 3.3 є єдиним.*

Визначимо еволюційний оператор $S_t: H \to H$ за правилом $S_t(u^0, \varphi) \equiv (u(t), u_t)$, де u - єдиний слабкий розв'язок задачі (3.12), (3.13).

Теорема 3.10. *В припущеннях теорем 3.3 та 3.8, динамічна система* (S_t, H) *має компактний глобальний атрактор* U, *який є обмеженою множиною в просторі* $H_1 \equiv D(A^\alpha) \times W$, *де*

$$W = \{\varphi : \varphi \in L^\infty(-r, 0; D(A^\alpha)), \dot{\varphi} \in L^\infty(-r, 0; D(A^{\alpha-1}))\}, \qquad \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

Пункт 3.2.2 присвячений зосередженим ЗЗС. Розглянемо функцію $\eta : H \longrightarrow \mathbb{R}$, яка представляє *зосереджене* загаювання в рівнянні (3.11). Зафіксуємо додатню послідовність $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ таку, що $\varepsilon_n \longrightarrow 0+$ та визначимо послідовність функцій $\xi^n : [-r, 0] \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ наступним чином

$$\xi^n(\theta, a, \varphi) \equiv \left[\begin{array}{ll} \varepsilon_n^{-1}, & \theta \in [-\eta(a,\varphi) - \varepsilon_n, -\eta(a,\varphi)]; \\ 0, & \theta \notin [-\eta(a,\varphi) - \varepsilon_n, -\eta(a,\varphi)], \end{array} \right. \qquad \varepsilon_n > 0. \quad (3.30)$$

Нам знадобиться простір

$$X_T \equiv L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2\left(0, T; \mathrm{D}(\mathrm{A}^{\frac{1}{2}})\right) \times L^2(0, T; \mathrm{D}(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}})).$$

Визначення 3.14. *Функція* u *зветься слабким граничним розв'язком задачі (3.11), (3.13) на* $[0,T]$, *якщо* $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(-r,T;L^2(\Omega))$, $\dot{u} \in L^2(0,T;D(A^{-1/2}))$, $u(\theta)=\varphi(\theta)$ *для* $\theta \in [-r,0]$ *та існує послідовність* $\{(n,m)\}_{n,m\in\mathbb{N}}^{\infty}$ *така, що*

$(u^{n,m};\ \dot{u}^{n,m})$ *-слабко збігається до $(u;\ \dot{u})$ в просторі X_T, при $\min\{n,m\} \to \infty$.

Тут $u^{n,m}$ *−наближені за Галеркіним розв'язки порядка* m *для задачі (3.12), (3.13) (правою частиною (3.12) є* F_n *з функціями* ξ^n, *які визначені в (3.30)).*

Теорема 3.17. *Нехай функції* b *та* f *такі, як в теоремі 3.3, функція* $\eta : H \to [0,r]$ *локально липшицева, тобто для довільного* $M>0$ *існує* $L_{\eta,M}$ *таке, що для всіх* $(v^i,\psi^i) \in H$, *які задовільняють* $\| v^i \|^2 + \int_{-r}^{0} \| \psi^i(s) \|^2\, ds \le M^2$, $i=1,2$, *маємо*

$$|\eta(v^1,\psi^1) - \eta(v^2,\psi^2)| \le L_{\eta,M}\left[\| v^1 - v^2 \|^2 + \int_{-r}^{0} \| \psi^1(s) - \psi^2(s) \|^2\, ds\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді для довільних $(u^0,\varphi) \in H$ *задача (3.11), (3.13) має слабкий граничний розв'язок на кожному* $[0,T]$ *та задовільняє* $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$.

Розглянемо простір Банаха

$$\mathcal{F}_+^b \equiv \left\{ w \mid w \in L_b^2\left(\mathbb{R}_+; \mathrm{D}(\mathrm{A}^{\frac{1}{2}})\right) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega)),\ \dot{w} \in L_b^2\left(\mathbb{R}_+; \mathrm{D}(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}})\right) \right\}.$$

Визначення 3.20. *Траєкторним простором* $\mathcal{K}^+$ *для рівняння (3.11) є простір функцій* $u \in \mathcal{F}_+^b$ *таких, що для всіх* $T>0$, *обмеження* $u|_{[0,T\}}$ *є слабким граничним розв'язком задачі (3.11), (3.13).*

Теорема 3.25. *В припущеннях теореми 3.17 півгрупа зсуву* $\{T(h), h \ge 0\}$ *на* $\mathcal{K}^+$ *має траєкторний атрактор.*

Підрозділ 3.3 присвячений рівнянням із зосередженим ЗЗС та підходу, що спирається на *основну ігноруючу умову*. Для простоти викладення результатів ми розглядаємо початкові умови

$$u|_{[-r,0]} = \varphi \in C \equiv C([-r,0];L^2(\Omega)). \tag{3.41}$$

та рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + A\, u(t,x) + d\, u(t,x) = (F(u_t))(x), \tag{3.42}$$

із $\quad (F(u_t))(x) = \int_\Omega b(u(t-\eta(u_t),y)) f(x-y)dy,\ \ x \in \Omega.$

Нас цікавить наступна властивість[10] загаювання η

(H) $\exists \eta_{ign} > 0$ *таке, що* η *"ігнорує" значення* $\varphi(\theta)$ *для* $\theta \in (-\eta_{ign}, 0]$, *тобто*
$\exists \eta_{ign} > 0 :\ \forall \varphi^1,\varphi^2 \in C :\ \forall \theta \in [-r,-\eta_{ign}],\ \varphi^1(\theta) = \varphi^2(\theta) \quad \Longrightarrow\ \eta(\varphi^1) = \eta(\varphi^2).$

---

[10] Rezounenko A.V. Differential equations with discrete state-dependent delay: uniqueness and well-posedness in the space of continuous functions // Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods and Applications. 2009. Vol.7., Issue 11. P.3978-3986.

Теорема 3.32. *Нехай функція* $b: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *липшицева та задовільняє* $|b(w)| \leq C_1 |w| + C_b$ *, з* $C_i \geq 0$, *загаювання* $\eta : C \longrightarrow [0, r]$ *неперервне та задовільняє умові (H),* $f: \Omega - \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *обмежена та вимірна. Тоді пара* (S_t, C) *складає динамічну систему.*

Підрозділ 3.3.2 присвячений вивченню асимптотичної поведінки динамічної системи (S_t, C), що збудована в теоремі 3.32. Основним результатом є

Теорема 3.35. *Нехай функція* $b: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *є липшицевою та обмеженою та загаювання* $\eta : C \longrightarrow [0, r]$ *неперервне та задовільняє умові (H),* $f: \Omega - \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *обмежена та вимірна. Тоді динамічна система* (S_t, C)*, має компактний глобальний атрактор, який є компактною множиною в усіх просторах* $\mathrm{C}_\delta \equiv \mathrm{C}\big([-r, 0]; D(A^\delta)\big), \forall \delta \in [0, \frac{1}{2})$.

У *підрозділі 3.4* введена *узагальнена ігноруюча умова*. Ми розглядаємо рівняння (3.42) із нелінійним загаюваним елементом $F: C([-r, 0]; L^2(\Omega)) \to L^2(\Omega)$, який має вигляд

$$F(\varphi) = B\left(\varphi\big(-\eta(\varphi)\big)\right), \qquad (3.69)$$

де нелінійне відображення $B: L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ є липшицевим.
Виконані припущення (A1) на оператор A (з $H = L^2(\Omega)$).
В умові (H) (див. вище) напівінтервал $(-\eta_{ign}, 0]$ є фіксований. Нашою метою є узагальнення підходу, заснованого на умові (H), для більш широкого класу загаюваних функцій, де величина η_{ign} вже не є сталою, а є функцією стану. Більш того, як додаткове узагальнення, ми дозволяємо і іншій межі загаюваного сегмента бути залежною від стану. Детальніше, ми розглядаємо дві функції $\Theta^\ell(\varphi)$, $\Theta^u(\varphi): C \to [0, r]$, що задовільняють

$$\forall \varphi \in \mathrm{C} \implies 0 \leq \Theta^\ell(\varphi) \leq \Theta^u(\varphi) \leq r.$$

Ми вводимо[11] наступну *узагальнену ігноруючу умову*[12], що залежить від *стану* для загаювання $\eta : C \to [0, r]$, (порівняйте з (H)):

η *"ігнорує " значення* $\varphi(\theta)$ *для* $\theta \notin [-\Theta^u(\varphi), -\Theta^\ell(\varphi)]$, *тобто*

$$\forall \psi \in C: \forall \theta \in \big[-\Theta^u(\varphi), -\Theta^\ell(\varphi)\big], \psi(\theta) = \varphi(\theta) \quad \implies \eta(\psi) = \eta(\varphi). \qquad (3.72)$$

Теорема 3.46. *Нехай обидві функції* $\Theta^\ell(\varphi)$, $\Theta^u(\varphi): C \to [0, r]$ *неперервні та* $\Theta^\ell(\varphi) > 0$ *для всіх* $\varphi \in C$*. Припустимо, що загаювання* $\eta : C \to [0, r]$ *неперервне та задовільняє (3.72); відображення B липшицеве. Тоді для довільної початкової функції* $\varphi \in C$*, задача (3.42), (3.69) має єдиний слабкий розв'язок* $u: [-r, \infty) \to L^2(\Omega)$.

---

[11] Резуненко А.В., Начальные сведения о дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом, зависящим от состояния. Харьков: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2010. 44 с.
[12] Rezounenko A.V. A condition on delay for differential equations with discrete state-dependent delay // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2012. Vol.385. No.1. P.506-516.

Якщо ми визначимо еволюційний оператор $S_t: C \to C$ за правилом $S_t\, \varphi \equiv u_t$, де u - єдиний слабкий розв'язок задачі з початковою функцією φ, тоді (S_t, C) є динамічною системою.

Нашим наступним кроком у вивченні *залежної від стану* ігноруючої умови (3.72) буде спроба уникнути умови $\Theta^\ell(\varphi) > 0, \forall \varphi \in C$. Ми вивчаємо загальний випадок $\Theta^\ell(\varphi) \geq 0, \forall \varphi \in C$ з *непустою множиною* $Z \equiv \left\{\varphi \in C \ : \ \Theta^\ell(\varphi) = 0\right\} \neq \emptyset$.

Теорема 3.48. *Нехай відображення B липшицеве. Більш того, нехай наступні умови виконані:*
1) обидві ігноруючі функції $\Theta^\ell(\varphi),\ \Theta^u(\varphi) : C \to [0, r]$ *неперервні;*
2) існує $L > 0$ *таке, що*
$Z \equiv \left\{\varphi \in C : \ \Theta^\ell(\varphi) = 0\right\} \subset CL_L \equiv \left\{\varphi \in C : \ sup_{s \neq t} \frac{||\varphi(s) - \varphi(t)||}{|s-t|} \leq L\right\}$*;*
3) загаювання $\eta : C \to [0, r]$ *неперервне та задовільняє (3.72);*
4) для всіх $\varphi \in Z$ *маємо* $\eta(\varphi) > 0$*;*
5) існують $\omega > 0$ *та* $L_\eta > 0$ *такі, що для всіх* $\varphi, \psi \in U_\omega(Z) \equiv \{\chi \in C \mid \exists v \in Z : ||\chi - v||_C \leq \omega\}$ *маємо* $|\eta(\psi) - \eta(\varphi)| \ \leq \ L_\eta ||\psi - \varphi||_C$.

Тоді для довільної початкової функції $\varphi \in C$*, задача (3.42), (3.69) має єдиний слабкий розв'язок* $u(t), t \geq 0$*. Більш того, пара* (S_t, C) *є динамічною системою.*

В *пункті 3.4.3* ми досліджуємо асимптотичну поведінку динамічної системи (S_t, C), яка збудована в теоремах 3.46 та 3.48.

Теорема 3.51. *Нехай всі припущення теореми 3.46 або 3.48 виконані та додатково відображення B обмежене. Тоді динамічна система* (S_t, C) *має компактний глобальний атрактор, який є компактною множиною в усіх просторах* $C_\delta \equiv C\left([-r, 0]; D(A^\delta)\right), \forall \delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

Підрозділ 3.5 присвячений рівнянням у частинних похідних зі змішаним ЗЗС. Розглядаємо (3.42) із

$$\left(F(u_t)\right)(x) = \int_{-r}^{0} \left\{\int_{\Omega} b\left(u(t+\theta, y)\right) f(x-y) dy\right\} dg(\theta, u_t)\,, \ \ x \in \Omega, \qquad (3.93)$$

Загаюваний елемент представлений інтегралом Стілт'єса, який одночасно включає як розподілені так і зосереджені загаювання, залежні від стану. Це дозволяє вивчати моделі, в яких деякі підмножини фазового простору зображені рівняннями з чисто зосередженими ЗЗС, а інші підмножини зображені рівняннями з чисто розподіленими ЗЗС і, також існують підмножини, які зображені рівняннями з комбінованими ЗЗС. Ми досліджуємо існування слабких розв'язків (теорема 3.62) та їх асимптотичні властивості.

Наведемо основні умови теореми 3.66 в якій доведено *існування компактного глобального атрактора*.

AM1) *Для кожного* $\varphi \in C$, *функція* $g : [-r, 0] \times C([-r, 0]; L^2(\Omega)) \to \mathbb{R}$ *має обмежену варіацію на* $[-r, 0]$. *Варіація* $V_{-r}^{0} g$ *функції* g *є* рівномірно обмеженою, *тобто* $\exists\, M_{V_g} > 0 \; : \; \forall\, \varphi \in V \;\Rightarrow\; V_{-r}^{0} g(\varphi) \leq M_{V_g}$.

Відомо[13], що міра Лебега-Стілт'єса (див. g) може бути розкладена на суму мір: дискретну, абсолютно неперервну та сингулярну. Ми будемо позначати відповідне розбиття g наступним чином

$$g(\theta, \varphi) = g_{\mathrm{d}}(\theta, \varphi) + g_{\mathrm{ac}}(\theta, \varphi) + g_{\mathrm{s}}(\theta, \varphi),$$

де $g_{\mathrm{d}}(\theta, \varphi)$ відповідає дискретній мірі (функція стрибків див. [12] с.322, 336), $g_{\mathrm{ac}}(\theta, \varphi)$ - абсолютно неперервна та $g_{\mathrm{s}}(\theta, \varphi)$ сингулярна (неперервна) (див. с.347 для деталей). Ми також будемо позначати неперервну частину $g_{\mathrm{c}} \equiv g_{\mathrm{ac}} + g_{\mathrm{s}}$.

Припускаємо далі:

AM2) *Для кожного* $\theta \in [-r, 0]$, *функції* g_{ac} *та* g_s *є неперервними за своїми другими координатами, тобто* $\forall \theta \in [-r, 0]\ \forall \varphi^n, \varphi \in C : \left\| \varphi^n - \varphi \right\|_C \to 0\ (n \to +\infty) \Rightarrow g_{ac}(\theta, \varphi^n) \to g_{ac}(\theta, \varphi)$ *та* $g_s(\theta, \varphi^n) \to g_s(\theta, \varphi)$.

AM3) *Функція стрибків* $g_d(\theta, \varphi)$ *є неперервною за своєю другою координатою в наступному сенсі - розриви функції* $g_d(\theta, \varphi)$ *в точках* $\{\theta_k\} \subset [-r, 0]$ *задовільняють властивості: існують* неперервні *функції* $\eta_k : C \to [0, r]$ *та* $h_k : C \to \mathbb{R}$ *такі, що* $\theta_k = -\eta_k(\varphi)$ *та* $h_k(\varphi)$ *є стрибками* g_d *в точках* $\theta_k = -\eta_k(\varphi)$, *тобто* $h_k(\varphi) \equiv g_d(\theta_k + 0, \varphi) - g_d(\theta_k - 0, \varphi)$.

Враховуючи, що g_d *може, в загальному випадку, мати нескінченну (злічену) кількість точок розриву* $\{\theta_k\}$, *ми припускаємо, що ряд* $\sum_k h_k(\varphi)$ *збігається* абсолютно *та* рівномірно на довільній обмеженій підмножині C.

Для отримання єдиності розв'язків ми спираємось на наступні додаткові припущення.

AM4) *Повна варіація функції* $g_c \equiv g_{ac} + g_s$ *задовільняє умові*

$$V_{-r}^{0}[\, g_c(.,\varphi) - g_c(.,\psi)\,] \leq M_{V_g} \left\| \varphi - \psi \right\|_C.$$

AM5) *Дискретна породжуюча функція* g_d *задовільняє* рівномірній ігноруючій умові. *Детальніше,*

$\exists \eta_{ign} > 0$ *таке, що всі* η_k *та* h_k "ігнорують" *значення* $\varphi(\theta)$ *для* $\theta \in (-\eta_{ign}, 0]$, *тобто*

$$\exists \eta_{ign} > 0 : \forall \varphi^1, \varphi^2 \in C : \forall \theta \in \left[-r, -\eta_{ign}\right], \quad \varphi^1(\theta) = \varphi^2(\theta) \quad \Rightarrow \quad \eta_k(\varphi^1) = \eta_k(\varphi^2),\ \ h_k(\varphi^1) = h_k(\varphi^2)\,.$$

Неавтономні рівняння у частинних похідних із ЗЗС досліджені у *підрозділі 3.6.* Знайдені умови існування та єдиності розв'язків (теорема 3.73), а також отримано

---

13 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 6-е изд. Москва, 1989. 496 с.

узагальнення фундаментального принципа інваріантності на випадок РЧП із загаюваннями, залежними від стану (теорема 3.78). Результати спираються на узагальнення основної ігноруючої умови на неавтономний випадок.

У *підрозділі 3.7* запропонований підхід до вивчення РЧП із загаюванням, що залежить від стану, в метричному просторі. Ми розпочинаємо з підпростору липшицевих за часом функцій та продовжуємо, будуючи динамічну систему в метричному просторі, який *не є лінійним* простором. В теоремі 3.91 доведено існування глобального атрактора.

Підрозділ 3.8 присвячений нелокальному рівнянню у частинних похідних із загаюванням, *розподіленим у просторі та часі* та *залежним від стану*. Досліджується рівняння (3.42) із

$$\big(F(u_t)\big)(x) = \int_{-r}^{0} \left\{ \int_{\Omega} b\big(u(t+\theta, y)\big) f(x-y)dy \right\} \xi(\theta, x, u(t), u_t), \quad x \in \Omega. \qquad (3.182)$$

Функція $\xi : [-r, 0] \times \Omega \times L^2(\Omega) \times L^2\big(-r, 0; L^2(\Omega)\big) \to \mathbb{R}$ представляє розподілене загаювання, що залежить від стану.

Коректна розв'язність в просторі $H = L^2(\Omega) \times L^2\big(-r, 0; L^2(\Omega)\big)$ отримана в теоремах 3.98 та 3.100. Існування глобального атрактора доведено в теоремі 3.101. Принцип лінеарізованої стійкості доведений в теоремі 3.105 *пункта 3.8.3*.

Основним результатом *підрозділу 3.9* є доведення існування *скінченновимірного* глобального атрактора (теорема 3.117) для параболічних рівнянь із зосередженим загаюванням, що залежить від стану. Скінченновимірність атрактора вдається довести спираючись на нещодавно розвинутий І.Д.Чуєшовим та І.Лашецькою метод квазістійких оцінок[14] [15].

Розглядаємо

$$\dot{u}(t) + A\, u(t) + F(u_t) + G\big(u(t)\big) = h, \quad t > 0, \qquad (3.228)$$

в деякому гільбертовому просторі H. В наших дослідженнях ми припускаємо виконаними наступні *Припущення 3.108*:

***(A)** Оператор А задовільняє (А1).*

***(F)** Загаюваний елемент $F(u_t)$ має вигляд $F(u_t) \equiv F_0(u(t - \eta(u_t)))$, де*

***(a)** $F_0 \colon H_\alpha \to H_\alpha$ глобально липшицева для $\alpha = 0$ та $\alpha = -1/2$, тобто, існує $L_F > 0$ таке, що*

$$\big\| F_0(u) - F_0(v) \big\|_\alpha \le L_F \, \big\| u - v \big\|_\alpha, \qquad u, v \in H_\alpha, \alpha = 0, -1/2; \qquad (3.229)$$

*та **(b)** $\eta \colon C \equiv C([-r, 0]; H) \to [0, r]$ глобально липшицева:*

$$|\eta(\varphi) - \eta(\psi)| \le L_\eta |\varphi - \psi|_C, \qquad \varphi, \psi \in C([-r, 0]; H). \qquad (3.230)$$

Умови на локально липшицеву $G : H_{1/2} \to H$ є громіздкими, тож ми їх не приводимо тут.

---

[14] Chueshov I., Lasiecka I. Attractors for second-order evolution equations with a nonlinear damping // J. of Dyn. Diff. Equations. 2004. 16. P.469-512.

[15] Chueshov I., Lasiecka I. Von Karman evolution equations. Well-posedness and long-time dynamics. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2010. 766 pp.

Ми споряджуємо рівняння (3.228) початковими умовами

$$u(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-r, 0], \tag{3.234}$$

та для початкової функції φ розглядаємо простір

$$CL \equiv \left\{\varphi \in C([-r,0]; H) : \ Lip_{[-r,0]}\left(A^{-\frac{1}{2}}\varphi\right) < +\infty; \ \varphi(0) \in D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)\right\}. \tag{3.235}$$

Коректна розв'язність доведена в пункті 3.9.2, зокрема див. теорему 3.111 та твердження 3.112. Головним результатом є наступне твердження.

Теорема 3.117. *Нехай умови (3.108) та (3.116) виконані. Припустимо, що S_t є еволюційною півгрупою, що породжена у CL задачею (3.228) та (3.234). Тоді існує $\ell_0 > 0$ таке, що ця півгрупа має компактний зв'язний глобальний атрактор $\mathfrak{U}$ за умови $m_F\, r < \ell_0$, де r є найбільше загаювання та m_F є стала лінійного зростання для F_0 у H, яка визначається таким чином*

$$m_F = lim_{||u|| \to \infty} \frac{||F_0(u)||}{||u||}. \tag{3.263}$$

Більш того, для кожних $0 < \beta \le 1$ та $\alpha < min\{\beta, 1/2\}$ цей атрактор належить множині

$$D^R_{\alpha,\beta} = \left\{ \ \varphi \in X \mid \ \left|A^{1-\beta}\varphi\right|_C + \ \left|A^{-\beta}\dot{\varphi}\right|_C + Hold_\alpha\left(A^{1-\beta}\varphi\right) + Hold_\alpha\left(A^{-\beta}\dot{\varphi}\right) \right.$$

$$\left. + \left[\int_{-r}^{0} (\| A\varphi(\theta) \|^2 + \| \dot{\varphi}(\theta) \|^2) d\theta\right]^{\frac{1}{2}} \le R \ \right\} \tag{3.264}$$

для деякого $R = R(\alpha, \beta)$, де півнорма Гьольдера $Hold_\alpha(\psi)$ задана як

$$Hold_\alpha(\psi) = sup\left\{\frac{||\psi(t) - \psi(s)||}{|t-s|^\alpha} : t \ne s; \ \ t, s \in [-r, 0]\right\}.$$

Нехай додатково існують $\gamma, \delta \in (0,1/2]$ такі, що

(a) *відображення F_0 є глобально липшицевим з $H_{-\gamma}$ до $H_{-\frac{1}{2}+\delta}$, тобто*

$$\left\| F_0(u) - F_0(v) \right\|_{-\frac{1}{2}+\delta} \ \le c \left\| u - v \right\|_{-\gamma}; \tag{3.265}$$

*та **(b)** відображення G є майже локально липшицевим з $H_{1/2-\gamma}$ до $H_{-\frac{1}{2}+\delta}$ у наступному сенсі*

$$\left\| G(u) - G(v) \right\|_{-\frac{1}{2}+\delta} \le c(R) \left\| u - v \right\|_{\frac{1}{2}-\gamma}, \ \ u, v \in H_{\frac{1}{2}}, \ \ \left\| u \right\|_{\frac{1}{2}}, \left\| v \right\|_{\frac{1}{2}} \le R. \tag{3.266}$$

Тоді: (A) глобальний атрактор $\mathfrak{U}$ має скінченну фрактальну вимірність.

(B) Існує фрактальний експоненційний атрактор $\mathfrak{U}_{exp}$.

Динаміка еволюційних рівнянь другого порядку за часом із ЗЗС досліджена в *підрозділі 3.10*. Досліджується рівняння

$$\ddot{u}(t) + \ k\dot{u}(t) + Au(t) + F\big(u(t)\big) + M(\, u_t\,) = 0, \qquad \text{для} \quad t > 0, \tag{3.275}$$

у деякому гільбертовому просторі H. В наших дослідженнях ми припускаємо:

(A1) *Оператор A задовільняє умові (A1).*

(F1) *Нелінійне відображення (без загаювання)* $F: D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) \to H$ *є локально липшицевим.*

Ми використовуємо наступний вибір фазового простору

$$W \equiv C\left([-h,0]; D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)\right) \cap C^1([-h,0];H), \qquad (3.277)$$

та додаткову умову

(M1) *Нелінійний загаюваний елемент* $M: W \to H$ *є локально липшицевим.*

Ми розглядаємо рівняння (3.275) з наступними початковими даними

$$u_0 = u_0(\theta) = \varphi(\theta), \qquad \theta \in [-h,0], \qquad \varphi \in W. \qquad (3.279)$$

Теорема 3.124. *Нехай (A1), (F1) та (M1) виконані. Тоді для всіх* $\varphi \in W$ *існують* $T_\varphi > 0$ *та єдиний слабкий розв'язок* $U(t) \equiv (u(t); \dot{u}(t))$ *для (3.275), (3.279) на півінтервалі* $[0, T_\varphi)$. *Розв'язок неперервно залежить від початкової функції* $\varphi \in W$.

Далі ми припускаємо наступне.

(F2) *Нелінійне відображення (без загаювання)* $F: D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) \to H$ *має форму* $F(u) = \Pi'(u) + F^*(u)$, *де* $\Pi'(u)$ *позначає похідну Фреше (це озачає, що* $\Pi'(u)$ *є елементом* $D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)'$ *таким, що* $|\Pi(u+v) - \Pi(u) - \langle \Pi'(u)\ , v\rangle| = o\left(\left\|A^{\frac{1}{2}}v\right\|\right)$ *для всіх* $v \in D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$ *для* C^1*-функціоналу* $\Pi(u): D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) \to \mathbb{R}$*) та відображення* F^* : $D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) \to H$ *є глобально липшицевим, тобто*

$$\| F^*(u^1) - F^*(u^2) \| \le c_0 \| A^{\frac{1}{2}}(u^1 - u^2) \|, \qquad u^1, u^2 \in D\left(A^{\frac{1}{2}}\right).$$

Більш того, ми припускаємо, що $\Pi(u) = \Pi_0(u) + \Pi_1(u)$, *з* $\Pi_0(u) \ge 0$, $\Pi_0(u)$ *є обмеженим на обмежених множинах у* $D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$ *та* $\Pi_1(u)$ *задовільняє властивості*

$$\forall \eta > 0 \ \ \exists C_\eta > 0: \ |\Pi_1(u)| \le \eta \left(\left\| A^{\frac{1}{2}}u \right\|^2 + \Pi_0(u) \right) + C_\eta, \qquad u \in D\left(A^{\frac{1}{2}}\right).$$

(M2) *Нелінійний загаюваний елемент* $M: W \to H$ *задовільняє умові лінійного зростання*

$$\|M(\varphi)\| \le M_0 + M_1 \left\{ \max_{\theta\in[-h,0]} \left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi(0)\right\| + \max_{\theta\in[-h,0]} \|\dot{\varphi}(\theta)\| \right\}, \ \forall \varphi \in W, \qquad (3.285)$$

для деяких $M_j \ge 0, j = 0{,}1.$

Теорема 3.125. *Нехай (A1), (F1), (F2), (M1), та (M2) виконані. Тоді для кожного* $\varphi \in W$ *існує єдиний глобальний слабкий розв'язок* $U(t) \equiv (u(t); \dot{u}(t))$ *для (3.275), (3.279) на* $[0, +\infty)$. *Розв'язки задовільняють енергетичній рівності*

$$\mathcal{E}\big(u(t); \dot{u}(t)\big) + k \int_0^t \| \dot{u}(s) \|^2 \, ds = \mathcal{E}\left(u(0); \dot{u}(0)\right) - \int_0^t (F^*(u(s)), \dot{u}(s)) ds$$

$$- \int_0^t (M(u_s), \dot{u}(s)) ds.$$

Тут ми позначаємо

$$\mathcal{E}(u, v) \equiv E(u, v) + \Pi_1(u), \qquad E(u, v) \equiv \frac{1}{2}\Big(\|v\|^2 + \|Au\|^2 \Big) + \Pi_0(u).$$

Більш того, для кожних $\rho > 0$ *та* $T > 0$ *існує* $C_{\rho,T}$ *таке, що*

$$\|A^{\frac{1}{2}}(u^1(t) - u^2(t)\| + \|\dot{u}^1(t) - \dot{u}^2(t)\| \leq C_{\rho,T} |\varphi^1 - \varphi^2|_W, \quad t \in [0, T]$$

для кожної пари $u^1(t)$ *та* $u^2(t)$ *слабких розв'язків з початковими функціями* φ^1 *та* φ^2 *такими, що* $|\varphi^j|_W \leq \rho,\ j = 1,2$.

Наслідок 3.126 (за додаткових умов на φ) дає додаткову гладкість розв'язку. Асимптотичні властивості доведені в пункті 3.10.3. Тут ми припускаємо

(M3) *Нелінійний загаюваний елемент* $M: W \to H$ *має форму* $M(u_t) = G(u(t - \tau(u_t)))$, *де* τ *відображає* W *в інтервал* $[0, h]$ *та* G *є глобально липшицевим відображенням з* H *в себе.*

Твердження 3.128 дає дисипативність динамічної системи $(S_t; W)$.

Класичні розв'язки параболічних рівнянь із зосередженим ЗЗС вивчаються у *підрозділі 3.11*. Починаємо з коректної розв'язності (теорема 3.131), будуємо та досліджуємо многовид розв'язків (теорема 3.151).

У *розділі 4* досліджені моделі вірусної динаміки. Моделі мають п'ять змінних: сприйнятливі (неінфіковані) клітини організму T, інфіковані клітини T^*, вільні вірусні частинки V, CTL-відповідь (клітини) Y, та антитіла A. Досліджується система ЗДР із ЗЗС:

$$\begin{cases} \dot{T}(t) = \lambda - dT(t) - f\big(T(t), V(t)\big), \\ \dot{T}^*(t) = e^{-\omega h} f\Big(T\big(t - \eta(u_t)\big), V\big(t - \eta(u_t)\big)\Big) - \delta T^*(t) - pY(t)T^*(t), \\ \dot{V}(t) = N\delta T^*(t) - c\, V(t) - qA(t)V(t), \\ \dot{Y}(t) = \beta T^*(t)Y(t) - \gamma Y(t), \\ \dot{A} = gA(t)V(t) - b\, A(t). \end{cases} \tag{4.3}$$

Загаювання η відповідає проміжку часу між контактом віруса і клітини та моментом, коли клітина стає активно інфікованою (починає продукувати нові віріони). У *підрозділі 4.2* нелінійність f є класу д'Анжеліса-Беддінгтона.

Визначаємо множину $\Omega_C \subset C \equiv C([-h, 0]; \mathbb{R}^5_+)$, яка є інваріантною для системи. Використовуємо наступну умову на ЗЗС (тут $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5)$).

$(\boldsymbol{H1_\eta})\ \ \forall\, \varphi \in Z^{2,3} \equiv \{\, \varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5) \colon\ \varphi^2(0) = \varphi^3(0) = 0 \,\} \implies \eta(\varphi) > 0.$

Ми використовуємо наступні репродукційні числа для системи: $R_0 \equiv \frac{N\lambda k\, e^{-\omega h}}{c(d+\lambda k_1)}$, CTL репродукційне число $R_1 \equiv \frac{N\lambda k\, \beta\, e^{-\omega h}}{\gamma\delta(Nk+Ndk_2-k_1 c e^{\omega h})}\left(1-\frac{1}{R_0}\right)$, репродукційне число антитіл $R_2 \equiv \frac{N^2\lambda k\, g\, e^{-\omega h}}{bc(Nk+Ndk_2-k_1 c e^{\omega h})}\left(1-\frac{1}{R_0}\right)$, конкурентне CTL репродукційне число $R_{CTL} \equiv \frac{\lambda\beta^2 kb\, e^{-\omega h}+k_1 g\delta^2\gamma^2 e^{\omega h}}{\beta\gamma\delta(gd+kb+k_2 bd+\lambda k_1 g)}$, конкурентне репродукційне число антитіл $R_A \equiv \frac{Ng\gamma\delta}{\beta bc}$.

Ми починаємо з внутрішнього стаціонарного розв'язку ψ. Ми позначаємо $u(t) = (T(t), T^*(t), V(t), Y(t), A(t))$.

Теорема 4.7. *Припустимо* $R_{CTL} > 1$ *та* $R_A > 1$. *Нехай загаювання (ЗЗС)* η *має форму*

$$\eta(\varphi) = F\big(\varphi^1(0), \varphi^3(0)\big) \tag{4.17}$$

з неперервним відображенням $F\colon \mathbb{R}_+^2 \to [0,h]$, *що задовільняє* $(H1_\eta)$ *та*

$$|\eta(\varphi)-\eta(\psi)| = |\, F\big(\varphi^1(0), \varphi^3(0)\big) - F(\mathcal{T}, \mathcal{V})\,| \le c_\eta((\varphi^1(0)-\mathcal{T})^2 + (\varphi^3(0)-\mathcal{V})^2).$$

Тоді стаціонарний розв'язок $\psi = (\mathcal{T}, \mathcal{T}^*, \mathcal{V}, \mathcal{Y}, \mathcal{A})$ *є локально асимптотично стійким. Для достатньо малих значень* c_η, *стаціонарний розв'язок є глобально асимптотично стійким.*

Загальний випадок ЗЗС досліджений в *пункті 4.2.5.*

Теорема 4.8. *Нехай* $R_{CTL} > 1$ *та* $R_A > 1$. *Нехай загаювання, що залежить від стану* $\eta : C \to [0,h]$ *є неперервно диференційовним у деякому околі стаціонарного розв'язку* $\phi = (\mathcal{T}, \mathcal{T}^*, \mathcal{V}, \mathcal{Y}, \mathcal{A})$ *та задовільняє* $(H1_\eta)$.
Тоді стаціонарний розв'язок ϕ *задачі (4.3) є локально асимптотично стійким.*

Пункт 4.2.6 присвячений дослідженню точки рівноваги за відсутності віруса. Випадок, коли розв'язок прямує до цієї точки рівноваги, відображає повне одужання від інфекційної хвороби.

Теорема 4.11. *Нехай* $R_0 \le 1$. *Нехай ЗЗС* η *має форму* (4.17) *з неперервною функцією* $F\colon \mathbb{R}_+^2 \to [0,h]$, *що задовільняє* $(H1_\eta)$ *та*

$$|\eta(\varphi)-\eta(\varphi^0)| = |\, F\big(\varphi^1(0), \varphi^3(0)\big) - F(T^0, 0)\,| \le c_\eta^0\, ((\varphi^1(0)-T^0)^2 + (\varphi^3(0))^2).$$

Тоді стаціонарний розв'язок $\varphi^0 = E^0 = \left(\frac{\lambda}{d}, 0,0,0,0\right)$ *є локально асимптотично стійким. Для достатньо малих значень сталої* c_η^0, *стаціонарний розв'язок є глобально асимптотично стійким.*

В *пункті 4.2.7* ми показуємо, як техніка, що була розвинута у попередніх пунктах, може бути застосована до іншого важливого випадку - рівноваги виснаженого імунітету. Ця рівновага може також описувати випадок зриву або неактивації імунної відповіді.

Теорема 4.12. *Нехай $R_1 \leq 1 < R_0$ та $R_2 \leq 1$. Припустимо, що ЗЗС $\eta: C \to [0, h]$ є неперервно диференційовним у деякому околі стаціонарного розв'язку виснаженого імунітету $\varphi^1 \equiv E^1 = (T_1, T^*{}_1, V_1, 0,0)$ та задовільняє $(H1_\eta)$. Тоді стаціонарний розв'язок φ^1 системи (4.3) є локально асимптотично стійким.*

В *підрозділі 4.3* досліджена система (4.3) із загальною функцією реакції f та неперервні розв'язки за ігноруючої умови. Знайдені умови локальної асимптотичної стійкості (теорема 4.19). Оскільки тепер дослідження стосуються більш загального класу систем і типу розв’язків (лише неперервні), ми спираємось на додаткову умову щодо ЗЗС η. Вона базується на властивості (H). Розглянемо довільну $\varphi \in$ C та її *довільне* продовження $\varphi^{ext}(s), s \in [-h, \eta_{ign}]$ зі сталою $\eta_{ign} > 0$, що визначена у (H). Завдяки властивості (H), ми можемо визначити допоміжну функцію $\eta^\varphi(t) \equiv \eta(\varphi_t^{ext})$ для $t \in [0, \eta_{ign}]$. Оскільки обидві η та φ є неперервними, ми бачимо, що $\eta^\varphi \in C[0, \eta_{ign}]$. Нас цікавить (права) похідна η^φ в нулі та її властивості. Запропонована[16] наступна локальна умова (властивість) загаювання η.

$(\boldsymbol{H2_\eta})$ *Існує μ −окіл стаціонарної точки $\hat{\varphi}$ такий, що (для будь-якої $\varphi \in$ C, яка задовільняє $\left\| \varphi - \hat{\varphi} \right\|_C < \mu$) виконуються наступні дві властивості*

a) $\exists\, \eta'_+(\varphi) \equiv \lim\limits_{\tau \to 0+} \frac{1}{\tau}\left(\eta(\varphi_\tau^{ext}) - \eta(\varphi)\right) = \lim\limits_{\tau \to 0+} \frac{1}{\tau}\left(\eta^\varphi(\tau) - \eta(\varphi)\right) \in \mathbb{R}$;

b) $\eta'_+(\,.\,)$ *є неперервне у $\hat{\varphi}$.*

Ця властивість є важливою в доведенні основної теореми 4.19 про стійкість стаціонарної точки $\widehat{\varphi}$.

У *розділі 5* ми пропонуємо та досліджуємо модель реакції-дифузії для динаміки вірусних захворювань із урахуванням *загаювання, що залежить від стану* та широкого класу нелінійностей, що моделюють передачу вірусу. Нас цікавлять класичні розв'язки з липшицевими за часом початковими функціями, які адекватно описують можливі розривні зміни параметрів системи, наприклад, у випадках лікування хвороби. Теорія стійкості О.М.Ляпунова використовується для дослідження внутришньої інфекційної рівноваги, що відповідає хронічному перебігу хвороби.

Розглянемо зв'язну обмежену область Ω в $\mathbb{R}^n$ із гладкою межею $\partial\Omega$ та систему РЧП

[16] Rezounenko A. Continuous solutions to a viral infection model with general incidence rate, discrete state-dependent delay, CTL and antibody immune responses // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2016. No. 79. P.1–15.

$$\begin{cases}\dot{T}(t,x) = \lambda - d\,T(t,x) - f\big(T(t,x),V(t,x)\big) + d^1\Delta T(t,x),\\ \dot{T}^*(t,x) = e^{-\omega h} f\big(T(t-\eta(u_t),x),V(t-\eta(u_t),x)\big) - \ \delta T^*(t,x) + d^2\Delta T^*(t,x),\\ \dot{V}(t,x) = N\delta T^*(t,x) - c\,V(t,x) + d^3\Delta V(t,x).\end{cases} \quad (5.2)$$

Тепер $T(t,x), T^*(t,x), V(t,x)$ представляють щільності здорових клітин, інфікованих клітин та вільних вірусних частинок в просторовій точці $x \in \Omega$ в час t. Умови на межі є типу Неймана для відповідних невідомих якщо $d^i \neq 0$, тобто $\frac{\partial T(t,x)}{\partial n}|_{\partial\,\Omega}$=0, якщо $d^1 \neq 0$ та подібно для $T^*(t,x), V(t,x)$. У випадку $d^i = 0$, умови на межі не потрібні для відповідної невідомої.

Позначимо $X \equiv [C(cl.\Omega)]^3 \equiv C(cl.\Omega;\mathbb{R}^3)$ та $C \equiv C([-h,0];X)$, тут $cl.\Omega$ позначає замкнення Ω. Оператор $-\mathcal{A}$ відповідає дифузійній частині (5.2) - є замкненням (у X) оператора $-\mathcal{A}^0 \equiv diag\,(d^1\Delta, d^2\Delta, d^3\Delta)$ у просторі X із $D(\mathcal{A}^0) \equiv D(d^1\Delta) \times D(d^2\Delta) \times D(d^3\Delta)$. Тут, для $d^i \neq 0$ ми покладаємо $D\big(d^i\Delta\big) \equiv \Big\{v \in C^2(cl.\Omega) : \frac{\partial v(x)}{\partial n}|_{\partial\,\Omega} = 0\Big\}$ та $D\big(d^j\Delta\big) \equiv C(cl.\Omega)$ для $d^j = 0$. Нам потрібні початкові дані для задачі (5.2)

$$\varphi \in Lip\,([-h,0];X) \equiv \left\{\psi \in C : sup_{s\neq t}\ \frac{||\psi(s)-\psi(t)||_X}{|s-t|} < \infty\right\}, \varphi(0) \in D(\mathcal{A}). \quad (5.5)$$

Вводимо множину (всі нерівності виконуються поточково відносно $x \in (cl.\Omega)$)

$$\Omega_{Lip} \equiv \{\, \varphi = (\varphi^1\,\varphi^2,\varphi^3) \in Lip\,([-h,0];X) \subset C, \varphi(0) \in D(\mathcal{A}) \colon 0 \leq \varphi^1(\theta) \leq \frac{\lambda}{d},$$
$$0 \leq \varphi^2(\theta) \leq \frac{\lambda\mu}{d\delta}e^{-\omega h}, 0 \leq \varphi^3(\theta) \leq \frac{N\lambda\mu}{dc}e^{-\omega h}, \qquad \theta \in [-h,0]\,\}.$$

Нам знадобляться подальші умови на липшицеву функцію f:

$$(\mathbf{Hf_1}+)\ \begin{cases} f(T,0) = f(0,V) = 0, \text{та } f(T,V) > 0 \text{ для всіх } T > 0, V > 0;\\ f \text{ є строго зростаюча за обома координатами для всіх } \ T > 0, V > 0;\\ \text{існує } \mu > 0 \text{ таке, що } |f(T,V)| \leq \mu\,|T| \text{ для всіх } T, V \in \mathbb{R}.\end{cases}$$

Маємо наступний результат.

Твердження 5.3. *Нехай нелінійна функція* f *задовільняє* $(\boldsymbol{Hf_1}+)$, *ЗЗС* $\eta\colon C \to [0,h]$ *є локально липшицевим. Тоді множина* Ω_{Lip} *є інваріантною, тобто для кожного* $\varphi \in \Omega_{Lip}$, *існує єдиний розв'язок задачі (5.2), (5.5), який задовільняє* $u_t \in \Omega_{Lip}$ *для всіх* $t \geq 0$.

В *пункті 5.2.1* нас цікавлять стаціонарні розв'язки задачі (5.2). Під такими розв'язками ми розуміємо розв'язки, що не залежать від часу, але, у загальному випадку, можуть залежати від просторових координат $x \in cl.\Omega$. Легко бачити, що тривіальний стаціонарний розв'язок $(\lambda\,d^{-1}, 0,0)$ завжди існує. Нас цікавлять нетривіальні стаціонарні розв'язки для (5.2). Позначимо

$$h_f(s) \equiv f\left(\frac{\lambda}{d} - \frac{\delta}{d}e^{\omega h}\,s, \frac{N\delta}{c}\,s\right) - \delta\,e^{\omega h}\,s. \quad (5.12)$$

Припустимо, що f задовільняє

($\mathbf{Hf_2}$) $h_f(s) = 0$ *має принаймі один але не більше ніж скінченну кількість коренів (розв'язків) на* $(0, \lambda\delta^{-1}e^{\omega h}]$.

Ми позначаємо довільний корінь рівняння $\mathrm{h_f(s)} = 0$ через $\mathcal{T}^*$ та визначаємо відповідні $\mathcal{T} = \left(\lambda - \delta\mathcal{T}^*\mathrm{e}^{\omega\mathrm{h}}\right)\delta^{-1}$ та $\mathcal{V} = \frac{N\delta}{c}\mathcal{T}^*$. Точка $(\mathcal{T}, \mathcal{T}^*, \mathcal{V})$ є стаціонарним розв'язком для (5.2).

Відмітемо, що умова скінченності коренів $\mathrm{h_f(s)} = 0$ виключає існування стаціонарних розв'язків, що не є сталими за просторовою координатою $x \in \Omega$. Зазначимо, що для часткового випадку нелінійностей f типу д'Анжеліса-Беддінгтона та Кроулі-Мартіна маємо лише один корінь рівняння $\mathrm{h_f(s)} = 0$.

Ми використовуємо наступну *локальну* умову на функцію f у малому околі стаціонарного розв'язку

($\mathbf{Hf_3}$) $$\left(\frac{V}{\mathcal{V}} - \frac{f(T,V)}{f(\mathcal{T},\mathcal{V})}\right)\left(\frac{f(T,V)}{f(\mathcal{T},\mathcal{V})} - 1\right) > 0.$$

Ми також використовуємо наступну умову

($\mathbf{Hf_4}$) *Функція f є або диференційовною за першою координатою або задовільняє* $[f(T,\mathcal{V})]^{-1} \geq C_f^1 + C_f^2 T^{-1}$, $\quad T > 0, C_f^j = C_f^j(\mathcal{V}), j = 1{,}2.$

Ми починаємо з аналізу стійкості для гладких початкових функцій, які належать до так званого *многовиду розв'язків*

$$M_F \equiv \{\varphi \in C^1([-h,0];X),\quad \varphi(0) \in D(\mathcal{A}),\quad \dot{\varphi}(0) + \mathcal{A}\varphi(0) = F(\varphi)\}. \qquad (5.15)$$

Теорема 5.7. *Нехай нелінійна функція f задовільняє* $(\boldsymbol{Hf_1}+), (\boldsymbol{Hf_2}), (\boldsymbol{Hf_3})$, $(\boldsymbol{Hf_4})$ *та ЗЗС $\eta: C \to [0,h]$ є локально липшицевим у просторі C та неперервно диференційовним у деякому околі стаціонарного розв'язку $\psi \equiv (\mathcal{T}, \mathcal{T}^*, \mathcal{V})$. Тоді стаціонарний розв'язок ψ є локально асимптотично стійким (у просторі M_F).*

Цікаво відмітити, що умова $\varphi \in M_F$ не є необхідною для нашого підходу. Ми можемо розглянути більш широку множину Ω_{Lip}. Розглянемо частковий клас загаювання

$$\eta(\varphi) = \rho\left(\int_{-h}^{0} \xi\left(\varphi(\theta)\right)k(\theta)d\theta\right), \quad \varphi \in C,\ \ k \in C([-h,0];\ \mathbb{R}) \qquad (5.26)$$

з диференційовною $\rho: \mathbb{R} \to [0,h]$. Маємо наступний результат у Ω_{Lip}.

Теорема 5.11. *Нехай нелінійна функція f задовільняє* $(Hf_1+), (Hf_2), (Hf_3)$, (Hf_4) *та ЗЗС $\eta: C \to [0,h]$ є з класу (5.26). Тоді стаціонарний розв'язок ψ є локально асимптотично стійким.*

У *розділі 6* ми розглядаємо метод трансформації часу. Ми розглядаємо диференціальні рівняння з ЗЗС, яке динамічно залежить від стану, тобто підпорядковується додатковому диференціальному рівнянню. Застосовуючи метод трансформації часу, ми приходимо до систем зі сталим загаюванням та порівнюємо асимптотичні властивості початкової та трансформованої систем.

Ми вивчаємо наступну неавтономну систему з ЗЗС

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t), y(t - \eta(t))), & t > t^0, \quad (6.1) \\ \dot{\eta}(t) = -\mu\,(\eta(t) - \tilde{\eta}) + G(y(t)), & t > t^0, \quad (6.2) \end{cases}$$

із початковими даними

$$y(t) = g(t), \quad t \in [t^0 - h, t^0], \tag{6.3}$$

$$\eta(t^0) = \eta^0. \tag{6.4}$$

Тут $y \in \mathbb{R}^m, \eta \in \mathbb{R}, \eta^0, \mu > 0,\ \tilde{\eta} > 0$, функції f та G неперервні. Функція η є ЗЗС оскільки вона є розв'язком рівняння (6.2), де є залежність від y.

Для будь-якого розв'язку $(y; \eta)$ системи (6.1)-(6.4) ми називаємо *відхиленим аргументом* для $(y; \eta)$ - функцію σ, що визначається

$$\sigma(t) = t - \eta(t), \quad t \geq t^0.$$

Ми використовуємо функцію $t = \alpha(s)$, що називається *перетворення (трансформація) часу* для зведення обраного розв'язку $(y; \eta)$ системи (6.1)-(6.4) до розв'язку $(z; \chi; \alpha)$ системи зі *сталим* загаюванням

$$\begin{cases} \dot{z} = f(\alpha(s), z(s), z(s-h))\dot{\alpha}\,(s), & s \geq s^0, \\ z(s) = \psi(s) \equiv g(\omega(s)), & s \in [s^0 - h, s^0], \\ \dot{\chi}(s) = -\mu(\chi(s) - \tilde{\eta})\dot{\alpha}\,(s) + G(z(s))\dot{\alpha}\,(s), \\ \chi(s^0) = \eta^0, \end{cases} \tag{6.8}$$

де α задовільняє алгебраїчному рівнянню

$$\begin{cases} \alpha(s) - \chi(s) = \alpha(s-h), & s \geq s^0, \\ \alpha(s) = \omega(s), & s \in [s^0 - h, s^0]. \end{cases} \tag{6.9}$$

Тут $\omega: [s^0 - h, s^0] \to \mathbb{R}$ є довільна C^1-функція з додатньою похідною та така, що $\omega(s^0 - h) = \omega(s^0) - \eta^0 < t^0,\ \omega(s^0) = t^0$.

Отримано результат про неперервну залежність перетворення часу від початкових даних (Теорема 6.5). Запропоновано поняття еквівалентності часів у методі трансформації часу для порівняння асимптотичних властивостей початкової та трансформованої систем (*підрозділ 6.2*).

ВИСНОВКИ

В дисертації систематично розроблені якісні методи дослідження диференціальних рівнянь із загаюваннями різної природи. Основні зусилля зосереджені на методах, що дозволяють вивчати як рівняння у частинних похідних так і звичайні диференціальні рівняння. Основними є наступні результати:

1. Збудовано Інерційний многовид із загаюванням для параболічних та гіперболічних рівнянь зі сталим загаюванням.

2. Збудована нова родина Наближених інерційних многовидів (НІМ), які проходять крізь всі стаціонарні точки динамічної системи, що збудована за розв'язками параболічних рівнянь зі сталим загаюванням. Розглянута залежність НІМ від величини загаювання. Ми доводимо близкість стаціонарного НІМ задачі з загаюванням та задачі без загаювання. У частковому випадку параболічних рівнянь без загаювання, наші стаціонарні НІМ формують послідовність наближених інерційних многовидів експоненційного порядку. Це означає наступне - околи поверхонь (що експоненційно притягують всі траєкторії системи), мають товщину порядка, яка спадає експоненційно зі зростом вимірності поверхонь.

3. Збудовані Інерційний многовид із загаюванням та родина наближених інерційних многовидів для рівнянь у частинних похідних другого порядку за часом зі сталим загаюванням.

4. Запропонована так звана "ігноруюча умова" на зосереджене загаювання, що залежить від стану, за якої початково-крайова задача для параболічних рівнянь є коректно розв'язною на всьому класичному просторі неперервних функцій. Ця умова є новою навіть для звичайних диференціальних рівнянь із загаюванням, що залежить від стану (ЗЗС). Оскільки часовий проміжок ігнорування може бути обраний довільно малим, ця умова є достатньо природньою для багатьох прикладних задач, зокрема для динамічних задач біології.

5. Запропонована "узагальнена ігноруюча умова" на зосереджене загаювання, що залежить від стану, за якої початково-крайова задача для параболічних рівнянь є коректно розв'язною на всьому просторі неперервних функцій.

6. Запропоновані та обгрунтовані умови для коректної розв'язності на просторі неперервних вектор-функцій параболічних рівнянь зі змішаними типами загаювання, що залежать від стану.

7. Запропонована та досліджена неавтономна ігноруюча умова для неавтономних нелінійних диференціальних рівнянь.

8. Запропоновані нові постановки задач в метричних нелінійних просторах, в яких коректно розв'язні параболічні рівняння зі зосередженими загаюваннями, що залежать від стану.

9. Знайдені умови існування глобальних компактних атракторів для параболічних рівнянь із різними типами загаювань (зосереджені, розподілені, змішані), що залежать від стану.

10. Вперше знайдені умови скінченновимірності глобальних атракторів для рівнянь у частинних похідних із загаюваннями, що залежать від стану.

11. Отримані результати по коректній розв'язності систем, що описують динаміку вірусних захворювань з урахуванням відповідей імунної системи. Системи мають біологічно обгрунтовані загаювання, що залежать від стану. Досліджена стійкість за О.М.Ляпуновим стаціонарних (хронічних та здорових) станів системи.

12. Отримані результати по коректній розв'язності та стійкості систем, що описують динаміку вірусних захворювань з урахуванням просторових неоднорідностей органів, що інфіковані. Рівняння є класу реакції-дифузії з ЗЗС.

13. Запропоновано поняття еквівалентності часів у методі трансформації часу для систем із динамічним загаюванням, що залежить від стану. Застосовуючи метод трансформації часу, ми приходимо до систем зі сталим загаюванням та порівнюємо асимптотичні властивості початкової та трансформованої систем.

Важливо, що у випадку диференціальних рівнянь у частинних похідних із загаюванням, відповідна динамічна система є нескінченновимірною як за часовою (як система із загаюванням), так і за просторовою (як РЧП) координатами. Враховуючи цю складність, основна увага приділена детальному дослідженню загаювань, їх типів, властивостей. Це залишає широкий простір для узагальнень отриманих результатів на більш складні системи рівнянь у частинних похідних. Підходи мають перспективи бути перенесені на системи з локально обмеженими загаюваннями.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

Публікації у виданнях, які входять до міжнародних наукометричних баз

1. Rezounenko A.V. Inertial manifolds with delay for retarded semilinear parabolic equations // Discrete Continuous Dynamical Systems. 2000. Vol.6. P.829-840.

2. Rezounenko A.V. On boundary value problem for a class of retarded nonlinear partial differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2001. Vol. 254. N.2, P.515-523.

3. Rezounenko A.V. Steady approximate inertial manifolds of exponential order for semilinear parabolic equations // Differential and Integral Equations. 2002. Vol. 15, No.11. P.1345-1356.

4. Rezounenko A.V. A sufficient condition for the existence of approximate inertial manifolds containing the global attractor // C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I. 2002. 334. P.1015-1020.

5. Rezounenko A.V. Inertial manifolds for retarded second order in time evolution equations // Nonlinear Analysis. 2002. Vol.51, No.6. P. 1045-1054.

6. Rezounenko A.V. Approximate inertial manifolds for retarded semilinear parabolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. 282, No.2, P. 614-628.

7. Rezounenko A.V. Investigations of retarded PDEs of second order in time using the method of Inertial manifolds with delay // Annales de l'Institut Fourier. 2004. Vol.54. No.5. P.1547-1564.

8. Rezounenko A.V., Wu J. A non-local PDE model for population dynamics with state-selective delay: local theory and global attractors //Journal of Computational and Applied Mathematics. 2006. Vol.190(1-2). P.99-113.

9. Rezounenko A.V. Partial differential equations with discrete and distributed state-dependent delays // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. Vol.326, No.2. P.1031-1045.

10. Rezounenko A.V. Stability of positive solutions of local partial differential equations with a nonlinear integral delay term // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. Proc. 8'th Coll. Qualitative Theory of Differential Equations. 2008. No.17. P.1-7.

11. Rezounenko A.V. On a class of P.D.E.s with nonlinear distributed in space and time state-dependent delay terms // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2008. Vol. 31, No.13.

12. Rezounenko A.V. Differential equations with discrete state-dependent delay: uniqueness and well-posedness in the space of continuous functions // Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods and Applications. 2009. Vol.70, No.11. P.3978-3986.

13. Rezounenko A.V. Non-linear partial differential equations with discrete state-dependent delays in a metric space // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2010. Vol.73, No.6. P.1707-1714.

14. Rezounenko A.V. Non-local PDEs with a state-dependent delay term presented by Stieltjes integral // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (Comptes Rendus Mathematique). 2011. Vol.349. No.3-4. P.179-183.

15. Rezounenko A.V. A condition on delay for differential equations with discrete state-dependent delay // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2012. Vol.385. No.1. P.506-516.

16. Rezounenko A.V. Local Properties of Solutions to Non-Autonomous Parabolic PDEs with State-Dependent Delays // Journal of Abstract Differential Equations and Applications. 2012. Vol. 2, No. 2. P.56-71.

17. Rezounenko A.V., Zagalak P. Non-local PDEs with discrete state-dependent delays: well-posedness in a metric space // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A. 2013. Vol.33, No.2. P.819-835.

18. Rezounenko A.V. On time transformations for differential equations with state-dependent delay // Central European Journal of Mathematics. (Open Mathematics). 2014. Vol.12, No.2. P.298-307.

19. Chueshov I., Rezounenko A. Dynamics of second order in time evolution equations with state-dependent delay // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2015. Vol.123–124. P.126-149.

20. Chueshov I., Rezounenko A. Finite-dimensional global attractors for parabolic nonlinear equations with state-dependent delay // Commun. Pure Appl. Anal. 2015. Vol.14, No.5. P.1685–1704.

21. Krisztin T., Rezounenko A. Parabolic partial differential equations with discrete state-dependent delay: Classical solutions and solution manifold // Journal of Differential Equations. 2016. Vol.260, No.5. P.4454–4472.

22. Rezounenko A. Continuous solutions to a viral infection model with general incidence rate, discrete state-dependent delay, CTL and antibody immune responses // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2016. No. 79. P.1–15.

23. Rezounenko A. Stability of a viral infection model with state-dependent delay, CTL and antibody immune responses // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B. 2017. Vol.22, No.4. P.1547-1563.

24. Rezounenko A. Viral infection model with diffusion and state-dependent delay: Stability of classical solutions // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B. 2018. Vol.23, No.3. P.1091-1105.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

25. Rezunenko A.V. Study of partial differential equations with state-dependent delay// 77th GAMM Annual Meeting 2006: Proceedings of conference, Technical University of Berlin, March 27-31. 2006: Book of Abstracts. P. 90.

26. Rezounenko A. Investigations of partial differential equations with discrete and distributed state-dependent delays // ICMP09 - XVI International Congress on Mathematical Physics: Proceedings of congress, August 3–8, 2009: Abstracts. Prague, Czech Republic. P. 62.

27. Rezounenko A.V. Some approaches to investigations of partial differential equations with state-dependent delays // Ukrainian mathematical congress - 2009, Dedicated to the Centennial of N.N. Bogoliubov, August 27-29, 2009: Abstracts. Kyiv, Ukraine. http://www.imath.kiev.ua/~congress2009.

28. Rezounenko A.V. Study of well-posedness and qualitative properties of solutions to parabolic partial differential equations with state-dependent delays // The 8th AIMS

Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications: Proceedings of conference, May 25-28, 2010: Book of Abstracts. Dresden, Germany. P.51.

29. Rezounenko A.V. Some properties of solutions to parabolic partial differential equations with state-dependent delays // The 9th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations: Proceedings of conference, Szeged, Hungary, June 28-July 1, 2011. P.44.

30. Резуненко О.В. Властивості розв'язків параболічних рівнянь із запізненням, що залежить від стану // Динамічні системи та їх застосування: матеріали конференції, 16-18 травня 2012 р., м. Київ. Тези доповідей, С. 36.

31. Rezounenko A.V. Well-posedness of parabolic partial differential equations with state-dependent delays in different spaces // Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем (DSMSI-2013): матеріали XVI Міжнародної конференції, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, 29-31 травня 2013, Київ, С.71.

32. Rezounenko A. Reaction diffusion systems with different types of delays // The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems Differential Equations and Applications, July 7 - July 11, 2014, Madrid, Spain; Special Session 24: "Qualitative Analysis of Reaction Diffusion Systems": Proceedings of conference. P. 111.

33. Rezounenko A. Local and asymptotic properties of solutions to parabolic partial differential equations with state-dependent delays // The 10th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations: Proceedings of conference, July 1-4, 2015, Bolyai Institute, University of Szeged, Hungary: Abstracts. P. 54.

34. Rezounenko A. Some qualitative properties of solutions to parabolic partial differential equations with state-dependent delays // Differential equations and control theory, dedicated to the 75th anniversary of Professor V.I. Korobov: Proceedings of conference, September 26-28, 2016, Kharkiv, Ukraine: Book of abstracts. P. 11.

35. Rezounenko A. Viral infection model with diffusion and state-dependent delay: a case of logistic growth // Equadiff 2017: Proceedings of conference, July 24-28, 2017. Bratislava, Slovakia. P. 53-60. (Web of Science).

36. Rezounenko A. Partial differential equations with state-dependent delays: different types of solutions // VI International Conference "Analysis and mathematical physics" dedicated to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory: Proceedings of conference, Kharkiv, Ukraine, June 18-22, 2018. P. 28-29.

37. Rezounenko A. Stability Properties of Solutions to Nonlinear PDEs and ODEs with State-Dependent Delays // The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications: Proceedings of conference, July 5 – July 9, 2018, Taipei, Taiwan. P. 185.

38. Rezounenko A. Well-posedness and asymptotic properties of solutions to nonlinear PDEs and ODEs in the presence of state-dependent delay // The IFIP TC 7 Conference on System Modelling and Optimization: Proceedings of conference, July 23–27, 2018, Universitat Duisburg-Essen, Essen. Invited talk on the mini-symposium 06: 'Honoring the work of Igor Chueshov'. P. 28.

39. Rezounenko A. Solutions to nonlinear systems of reaction-diffusion equations /ODEs with delay // The 3rd international scientific conference "Differential Equations and Control Theory" (DECT-2018): Proceedings of conference, V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine, 25-27 September 2018. P.41.

АНОТАЦІЯ

Резуненко О.В. Якісні властивості динамічних систем, що породжені нелінійними диференціальними рівняннями у частинних похідних з загаюванням. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика. Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І.Вєркіна Національної академії наук України, Харків, 2019.

У дисертаційній роботі розробляються методи дослідження моделей із загаюваннями різних типів: постійні та залежні від стану, дискретні та розподілені, локальні та нелокальні за просторовими координатами. Досліджується якісна поведінка систем - стійкість за О.М.Ляпуновим, існування наближених інерційних многовидів, інерційних многовидів із загаюванням та глобальних атракторів. Центральна частина наших досліджень присвячена загаюванням, що залежать від стану (ЗЗС). Вперше запропоновані методи доведення коректної розв'язності в сенсі Ж.Адамара для рівнянь у частинних похідних із ЗЗС. Результати отримані у різних напрямках: підхід у метричних просторах та підхід із многовидом розв'язків. Пропонується і альтернативний підхід, який ґрунтується на новій ідеї, яка пов'язана з так званою "ігноруючою умовою" на загаювання, що залежить від стану. Запропоновані декілька узагальнень ігноруючої умови. Результати застосовані зокрема до такої біологічної задачі, як вірусна динаміка всередині організму.

Ключові слова: атрактор, загаювання, що залежить від стану, ігноруюча умова, наближений інерційний многовид, система реакції-дифузії, вірусна модель.

ABSTRACT

Rezunenko O.V. Qualitative properties of dynamical systems generated by nonlinear delay partial differential equations. – Manuscript.

Thesis for a Doctoral Degree in Physics and Mathematics: Speciality 01.01.03 – Mathematical Physics. B.I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2019.

In this thesis, we develop methods to study models of mathematical physics which are described by nonlinear delay differential equations and systems. We develop methods which are applied to differential equations with bounded delays of different types: constant and state-dependent, discrete and distributed, local and nonlocal in space coordinates. Main interest is in the qualitative behaviour of systems. We usually split our study on two main parts. The first one deals with the proof of the well-posedness in the sense of J. Hadamard of the corresponding initial boundary-value problem. Next we construct a dynamical system governed by the solutions. The second part is devoted to the long-time asymptotic behaviour of the dynamical system. We mention that in case of delay partial differential equations, the corresponding dynamical system is infinite-dimensional in both time (as delay system) and space (as PDEs) coordinates.

We develop methods to deep the study of Lyapunov stability, existence of Approximate inertial manifolds (AIM), Inertial manifolds with delay (IMD) and global attractors. Investigations belong to the qualitative theory of differential equations, developed by A. Poincare, O.M. Lyapunov, G.D. Birkhoff, O.O. Ladyzhenskaya, C. Foias, R. Temam, M.I. Vishik, J. Hale, I.D. Chueshov and others. We start with the constant delay case (chapter 2) and propose an approach to construct Inertial manifolds with delay for delay PDEs. These infinite-dimensional sets are used to built new families of Approximate inertial manifolds (AIM) which are finite-dimensional manifolds with attracting neighbourhoods. The speed of attraction is exponential for all trajectories of the system. An important feature of our approach is that we could construct AIMs which contain all the stationary solutions. We call them Stationary AIMs.

The central part of our investigations is devoted to *state-dependent delay* (SDD) differential equations (chapters 3-6). Discrete SDDs bring essential difficulties in the study since the corresponding delay terms are not even locally Lipschitz on the classical space of continuous in time functions. This fact gave birth to fruitful discussion in the literature and attracts much attention for many years. Naturally, first attempts to overcome this obstacle were done for ordinary delay equations. We notice works by R. Driver, J. Mallet-Paret, R. Nussbaum, H.-O. Walther, T. Krisztin, F. Hartung, J. Wu and others. As far as we know, equations with SDD appeared in 1806 in an article by S.D. Poisson. We pay attention to develop approaches to generalise the attempts and adopt them for PDE case. The results are obtained in different directions: metric space approach (Lipschitz in time functions) and solution manifolds approach (C^1-functions).

An alternative approach is based on a new idea which is connected to the so-called 'ignoring condition' on the state-dependent delay. In case this condition holds, the corresponding initial-value problem becomes well-posed on the whole space of continuous in time functions. The 'ignoring condition' was proposed in the author's article in 2009, in 2012 the 'generalised ignoring condition' appeared.

The variety of used approaches allows to study different types of solutions for delay PDEs with SDDs: mild, weak, classical. Both well-posedness and long-time asymptotic behaviour, including the existence of global attractors, are investigated. In some cases we prove that attractors are finite-dimensional. The last result is obtained by applying the recently developed by I. Chueshov and I. Lasiecka method of quasi-stable estimates.

We are interested in such a biological problem as viral in-host dynamics one. First we test the proposed approach on systems of ordinary differential equations (chapter 4) and after apply it to the diffusion viral models with SDDs (chapter 5). We find conditions for local Lyapunov stability of stationary solutions (healthy and chronic regimes). Our approach is general enough and allows the system to have multiple stationary solutions. Connecting the study to the results of chapter 3, we use both the metric space approach and the one based on the ignoring condition.

Key words: approximate inertial manifold, attractor, ignoring condition, reaction-diffusion system, state-dependent delay, viral in-host model.

АННОТАЦИЯ

Резуненко А.В. Качественные свойства динамических систем, порождаемых нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных с запаздыванием. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 - математическая физика. Физико-технический институт низких температур им. Б.И.Веркина Национальной академии наук Украины, Харьков, 2019.

В диссертационной работе разрабатываются методы исследования моделей с запаздываниями различных типов: постоянные и зависящие от состояния, дискретные и распределенные, локальные и нелокальные по пространственным координатам. Исследуется качественное поведение систем - устойчивость по А.М.Ляпунову, существование приближенных инерциальных многообразий, инерциальных многообразий с запаздыванием и глобальных аттракторов. Центральная часть наших исследований посвящена запаздываниям, зависящим от состояния (ЗЗС). Впервые предложены методы доказательства корректной разрешимости по Ж.Адамару для уравнений в частных производных с ЗЗС. Результаты получены в разных направлениях: подход в метрических пространствах и подход с многообразием решений. Предлагается и альтернативный подход, основанный на новой идее, которая связана с так называемым "игнорирующим условием" на запаздывание, зависящее от состояния. Предложены несколько обобщений игнорирующего условия. Результаты применены, в частности, к такой биологической задаче, как вирусная динамика внутри организма.

Ключевые слова: аттрактор, запаздывание, зависящее от состояния, игнорирующее условие, приближенное инерциальное многообразие, система реакции-диффузии, вирусная модель.