Національна академія наук України
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна

Ігнатович Світлана Юріївна

УДК 517.977

МЕТОД РЯДІВ ТА ВІЛЬНИХ АЛГЕБР В АНАЛІЗІ НЕЛІНІЙНИХ КЕРОВАНИХ СИСТЕМ

01.01.01 – математичний аналіз

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Харків – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор
Скляр Григорій Михайлович,
Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна МОН України,
провідний науковий співробітник.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Золотарьов Володимир Олексійович,
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України
(м. Харків),
провідний науковий співробітник;

доктор фізико-математичних наук, професор
Зуєв Олександр Леонідович,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України
(м. Слов'янськ),
завідувач відділу прикладної механіки;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Холькін Олександр Михайлович,
ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет» МОН України
(м. Маріуполь),
завідувач кафедри вищої та прикладної математики.

Захист відбудеться «18» квітня 2018 р. о «15^{30}» годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01 у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки, 47, м. Харків, 61103.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України за адресою: пр. Науки, 47, м. Харків, 61103.

Автореферат розісланий «15» березня 2018 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради В. О. Горькавий

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У математичній теорії керування, з самого її виникнення в середині XX століття, активно залучалися ідеї і методи з найрізноманітніших розділів математики: аналізу, геометрії, алгебри, теорії динамічних систем, варіаційного числення, комбінаторики тощо. Але якщо для лінійних задач стандартними стали методи лінійної алгебри і функціонального аналізу, то в нелінійній теорії загальновживаними виявилися геометричні методи. Ймовірно, це пов'язано з великою роллю механічних задач у теорії керування і, як наслідок, зі впливом геометричних методів механіки. Проте виявляється, що аналітичні і алгебраїчні підходи в багатьох випадках є не менш ефективними і навіть дозволяють отримати точніші результати. Звичайно, маються на увазі методи не лінійної, а загальної алгебри, які дозволяють до лінійних операцій додати суттєво нелінійні.

У 1987 р. В. І. Коробов і Г. М. Скляр запропонували[1] нову постановку – проблему моментів Маркова на мінімально можливому відрізку (min-проблему моментів Маркова), яка еквівалентна лінійній задачі швидкодії. Вони отримали аналітичний розв'язок степеневої min-проблеми моментів Маркова і довели, що за деяких умов степенева min-проблема наближає загальну min-проблему моментів Маркова[2]. У роботах Г. М. Скляра і С. Ю. Ігнатович[3] був описаний клас нелінійних систем, афінних за керуванням, задачі швидкодії для яких наближаються лінійними степеневими min-проблемами моментів. Виявилося, що для вивчення таких систем можна використовувати ряди *нелінійних степеневих моментів*, причому самі нелінійні степеневі моменти утворюють вільну асоціативну алгебру. Виникла гіпотеза, що в загальному випадку систем, афінних за керуванням, наближення (нелінійні) можна досліджувати в термінах цієї алгебри. Окремим питанням було встановлення зв'язку отриманих результатів з відомими результатами щодо однорідної апроксимації для систем, лінійних за керуванням[4].

Використання вільних алгебр для дослідження нелінійних керованих систем веде початок з 1970-80-х років, коли М. Фліс[5] застосував ряди К. Т. Чена[6] для опису

---

[1] Коробов В. И. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов / В. И. Коробов, Г. М. Скляр // Матем. сб. – 1987. – Т. 134(2). – С. 186–206.

[2] Коробов В. И. Min-проблема моментов Маркова и быстродействие / В. И. Коробов, Г. М. Скляр // Сибирский матем. журнал. – 1991. – Т. 32(1). – С. 60–71.

[3] Скляр Г. М. Ряды нелинейных степенных моментов и быстродействие / Г. М. Скляр, С. Ю. Игнатович // Доклады РАН. – 1999. – Т. 365(6). – С. 742–744; Sklyar G. M. Moment approach to nonlinear time optimality/G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich // SIAM J. on Control and Optimiz. – 2000. – V. 38. – P. 1707–1728.

[4] Аграчев А. А. Фильтрации алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем / А. А. Аграчев, А. В. Сарычев // Доклады АН СССР. – 1987. – Т. 295. – С. 777–781; Bellaïche A. The tangent space in sub-Riemannian geometry / A. Bellaïche // In: Sub-Riemannian geometry. Progr. Math. 144. – 1996. – P. 1–78 та ін.

[5] Fliess M. Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives / M. Fliess // Bull. Soc. math. France. – 1981. – V. 109. – P. 3–40.

[6] Chen K. T. Integration of paths a faithful representation of parths by noncommutative formal power series / K. T. Chen // Trans. Am. Math. Soc. – 1958. – V. 89. – P. 395–407.

траєкторій нелінійних систем, лінійних і афінних за керуванням. Коротко опишемо основну ідею. Якщо розвинути відображення «вхід-вихід» для нелінійної керованої системи, лінійної за керуванням, у ряд *ітерованих інтегралів*, отримуємо можливість вивчати перетворення таких рядів замість перетворення систем. М. Фліс показав, що ітеровані інтеграли є лінійно незалежними функціоналами і їх можна розглядати як елементи вільної асоціативної алгебри. Тоді множення інтегралів відповідає тасуючому добутку в цій алгебрі, і це можна використовувати для побудови відображень рядів. Такий підхід дозволяє долучити до аналізу таких систем добре розвинуту алгебраїчну техніку, перш за все, методи вільних алгебр. Алгебри ітерованих інтегралів активно застосовували А. О. Аграчов, Р. В. Гамкрелідзе, П. Кроуч, Ф. Ламнабі-Лагаррік, М. Кавскі, Г. Сусман; останнім часом з'явилися інтерпретації в термінах алгебри Хопфа. На цьому шляху були, зокрема, отримані умови реалізовності рядів у вигляді систем, досліджені задачі керованості і оптимального керування та інші, але можливості такого підходу не були використані повною мірою.

Отже, важливою і цікавою була задача систематично розвинути ідеї і методи рядів і вільних алгебр до вивчення нелінійних керованих систем, лінійних або афінних за керуванням. Виявилося, що такий підхід дозволяє отримати вичерпні відповіді на низку важливих питань теорії керування. Зокрема, вдається отримати повну класифікацію однорідних апроксимацій і дослідити зв'язок однорідних апроксимацій систем і апроксимацій у сенсі швидкодії.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь та керування механіко-математичного факультету і на кафедрі прикладної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна в рамках держбюджетних науково-дослідних робіт «Аналітичні методи в теорії диференціальних рівнянь та теорії керування» (0100U003350), «Аналітичні та алгебраїчні методи в теорії диференціальних рівнянь та теорії керування» (0103U004226), «Асимптотичні та алгебраїчні методи в теорії диференціальних рівнянь та теорії керування» (0106U001561), «Аналітичні методи в якісній теорії диференціальних рівнянь та теорії керування» (0109U001456), «Аналітичні методи розв'язання якісних проблем теорії керування і теорії функціонально-диференціальних рівнянь» (0111U010364), «Дослідження якісної поведінки динамічних систем різної природи» (0116U000823).

Мета і завдання дослідження. Основною метою дослідження є створення єдиного підходу до вивчення нелінійних керованих систем, який є розвитком моментного підходу для лінійних систем. Цей підхід спирається на метод рядів і залучає методи вільних алгебр до аналізу нелінійних керованих систем, зокрема, для розв'язання таких задач як побудова і класифікація однорідних апроксимацій систем, лінійних і афінних за керуванням, встановлення зв'язку однорідної апроксимації і апроксимації у сенсі швидкодії тощо.

Основними завданнями дослідження є: введення і вивчення підкласу рядів в абстрактній асоціативній алгебрі зі сталими векторними коефіцієнтами, які відповідають рядам ітерованих інтегралів і нелінійних степеневих моментів, вивчення перетворень і однорідних апроксимацій таких рядів, отримання відповідних результатів щодо однорідних апроксимацій нелінійних керованих систем, дослідження зв'язку однорідної апроксимації і апроксимації у сенсі швидкодії, а також дослідження суміжних задач реалізовності, класифікації векторів зросту, відображуваності, швидкодії.

Об'єктом дослідження є нелінійні керовані системи, ряди ітерованих інтегралів і нелінійних степеневих моментів, вільні градуйовані алгебри, що їм відповідають, однорідні апроксимації, задача швидкодії.

Предметом дослідження є структури, що індукує в алгебрах ітерованих інтегралів або нелінійних степеневих моментів керована система, класифікація, методи побудови і властивості однорідних апроксимацій, зв'язок однорідної апроксимації і апроксимації у сенсі швидкодії, умови відображуваності систем, опис оптимальних керувань.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи математичного і функціонального аналізу, теорії керування, алгебри.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати:

- запропонований підхід до аналізу локальної поведінки нелінійних систем, лінійних і афінних за керуванням, оснований на вивченні індукованих ними структур в абстрактній вільній асоціативній алгебрі;
- уперше отримано повну класифікацію однорідних апроксимацій систем, лінійних і афінних за керуванням, на основі введених понять ядерної підалгебри Лі і одностороннього ідеалу, що породжені системою; запропоновано методи побудови однорідних апроксимацій;
- уперше отримано повний опис привілейованих координат, запропоновано методи їх побудови;
- вивчений зв'язок між алгеброю ітерованих інтегралів і алгеброю нелінійних степеневих моментів; отримано умови реалізовності ряду нелінійних степеневих моментів у вигляді керованої системи і запропоновано методи побудови відповідних систем;
- уперше встановлено зв'язок однорідної апроксимації і апроксимації у сенсі швидкодії;
- запропоновано метод перерозкладання ряду ітерованих інтегралів в околі для однорідних і регулярних систем;
- уперше отримано повний опис векторів зросту систем, лінійних за керуванням; отримано опис перетворення ядерних підалгебр Лі при заміні керування; введені поняття A-нормальності і A-простоти вектору зросту і отримано повний опис A-нормальних і A-простих векторів зросту для систем з двовимірним керуванням;
- узагальнено критерій лінеаризовності за зворотним зв'язком у класі C^1 на випадок багатовимірного керування; уперше отримано умови відображуваності на системи з прямим зв'язком у класі C^1;
- уперше отримано повний опис оптимальних за швидкодією керувань для класу систем, спряжених до лінійних.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати можуть бути застосовані для опису локальної поведінки керованих систем, зокрема, для побудови оптимальних або близьких до оптимальних за швидкодією керувань для нелінійних систем.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, одержано автором особисто. З результатів праць, виконаних у співавторстві, на захист виносяться лише положення, одержані автором дисертації самостійно.

Ідеї основних підходів і розроблених конструкцій, які опубліковані в сумісних з науковим консультантом статтях, належать співавторам у рівній мірі. Дисертанту належить суттєвий внесок у доведення основних результатів.

Внесок у статті, опубліковані з іншими співавторами: в роботі [4] дисертанту належать теореми 1 і 3, у роботі [6] – теорема 2, у роботі [10] – пункт 2 (крім теореми 2.1) і пункти 3.1, 3.4, 3.5, 3.8. У роботі [9] дисертанту належить суттєвий внесок у доведення теореми 3. У роботі [19] дисертанту належить суттєвий внесок у доведення теорем 1 і 2. У роботі [18] дисертанту належить ідея доведення теореми 2.2 і лем 2.6, 2.8.

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися і обговорювалися на таких наукових конференціях і семінарах:

міжнародна конференція «Theory of functions and Mathematical Physics», присвячена 100-річчю з дня народження Н. І. Ахієзера, Харків, Україна, 13-17 серпня 2001 р.;

міжнародна конференція «Обратные задачи и нелинейные уравнения», Харків, Україна, 12-16 серпня 2002 р.;

наукова конференція «First Karazin Scientific Readings dedicated to the bicentenary of the Karazin Karkiv National University. Mathematical Symposium», Харків, Україна, 14-16 червня 2004 р.;

семінар відділу «Functional Analysis and Applications» (керівник А. О. Аграчов), SISSA, Трієст, Італія, 2005 р. і 2009 р.;

міжнародна конференція «Устойчивость, управление и динамика твердого тела», Донецьк, Україна, 2005 р.;

міжнародний семінар «Geometry of vector distributions, differential equations, and variational problems», SISSA, Трієст, Італія, 2006 р.;

міжнародна конференція «Современный анализ и приложения», присвячена 100-річчю з дня народження М. Г. Крейна, Одеса, Україна, 2007 р.;

міжнародна конференція «Дифференциальные уравнения и топология», присвячена 100-річчю з дня народження Л. С. Понтрягіна, Москва, Росія, 2008 р.;

міжнародний семінар «Analysis and Applications», University of Szczecin, Щецин, Польща, 2009 р.;

семінар міжнародної програми «Research-in-Teams program of the Trimester Control and Combinatorics», Мадрид, Іспанія, 2010 р.;

міжнародна конференція «50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)», Орландо, США, 2011 р.;

міжнародний семінар «Analysis, Operator Theory, and Mathematical Physics», Ікстапа, Мексика, 2012 р.;

семінар відділу диференціальних рівнянь Математичного інституту імені В. А. Стеклова (керівник Ю. С. Ілляшенко), Москва, Росія, 2014 р.;

школа-конференція «Геометрическая теория управления и анализ на метрических структурах», Республіка Алтай, Росія, 2014 р.;

міжнародний семінар «Equivalence, Invariants, and Symmetries of Vector Distributions and Related Structures: from Cartan to Tanaka and beyond», Henri Poincare Institute, Париж, Франція, 2014 р.;

міжнародна конференція «Differential Equations and Control Theory», присвячена 75-річчю професора В. І. Коробова, Харків, Україна, 2016 р.;

міжнародна конференція «25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)», Валлетта, Мальта, 2017 р.;

міжнародна конференція «Differential Equations and Control Theory», University of Szczecin, Щецин, Польща, 2017 р.;

семінар кафедри диференціальних рівнянь та керування і кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна (керівник В. І. Коробов), 2000-2017 р.р.

Публікації. Результати дисертації, винесені на захист, опубліковано у 21 науковій статті і 11 тезах доповідей на наукових конференціях.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел і трьох додатків. Обсяг загального тексту дисертації складає 356 сторінок, з них основного тексту 298 сторінок. Робота ілюстрована 5 рисунками. Список використаних джерел містить 162 найменування.

Подяка. Автор щиро вдячна науковому консультанту професору Григорію Михайловичу Скляру за увагу до роботи, плідні обговорення і постійну підтримку.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету і задачі дослідження і розкрито наукову новизну отриманих результатів.

У *розділі 1* наведений огляд відомих результатів з напряму дослідження: зв'язок лінійної задачі швидкодії і min-проблеми моментів Маркова, зображення нелінійних систем, лінійних та афінних за керуванням, у вигляді рядів ітерованих інтегралів або нелінійних степеневих моментів, означення однорідної апроксимації для систем, лінійних за керуванням, і апроксимації в сенсі швидкодії для систем, афінних за керуванням, а також опис класу систем, які локально еквівалентні лінійним системам у сенсі швидкодії. Також наведені деякі відомості про вільні алгебри і деякі відомі результати з відображуваності керованих систем.

У дисертації запропонований новий підхід, що дозволяє отримати вичерпний розв'язок низки задач з нелінійної теорії керування. Коротко опишемо основну ідею. Замість нелінійної системи, лінійної або афінної за керуванням, будемо розглядати ряд ітерованих інтегралів або нелінійних степеневих моментів, який породжує ця система; замінам змінних відповідають перетворення таких рядів. Ітеровані інтеграли або нелінійні степеневі моменти утворюють вільну асоціативну алгебру, а коефіцієнти ряду породжують певні структури в цій алгебрі – а саме, введену в дисертації ядерну підалгебру Лі і односторонній ідеал. Виявляється, що вони повністю визначають однорідну апроксимацію, тобто однорідну систему, яка локально наближає вихідну систему. На цьому шляху отримано повну класифікацію однорідних апроксимацій, запропоновані методи її побудови і побудови апроксимуючих перетворень, розв'язано низку суміжних задач. У дисертації отримані умови, за яких однорідна апроксимація наближає вихідну систему в сенсі швидкодії; це дозволяє отримувати оптимальні або майже оптимальні керування для нелінійної системи, розв'язуючи значно простішу задачу швидкодії для однорідної апроксимації.

Перейдемо до більш детального викладення основних результатів дисертації.

У *розділі 2* розглянуто два класи дійсно-аналітичних нелінійних систем – системи, які є лінійними або афінними за керуванням. Для них отримані та обговорені зображення операторів у кінець або до початку траєкторії у вигляді ряду функціоналів зі сталими векторними коефіцієнтами.

У *підрозділі 2.1* розглядаються системи, лінійні за керуванням, вигляду

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(x), \quad x \in U(0) \subset \mathbb{R}^n,\ u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де $X_1(x), \dots, X_m(x)$ – дійсно-аналітичні векторні поля в деякому околі нуля $U(0) \subset \mathbb{R}^n$ (точка нуль обрана лише для зручності). Далі ми переважно цікавимось поведінкою траєкторій системи (1), що починаються в нулі,

$$x(0) = 0. \tag{2}$$

Нехай $L_\infty([0,\theta]; \mathbb{R}^m)$ позначає простір вектор-функцій з вимірними, майже всюди обмеженими компонентами $u(t) = \big(u_1(t), \dots, u_m(t)\big)$, $t \in [0,\theta]$, з нормою $\|u\| = \operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,\theta]} \big(\sum_{i=1}^m u_i^2(t)\big)^{1/2}$. Припустимими вважатимемо керування, які належать одиничній кулі $B^\theta = \{u(t) \in L_\infty([0,\theta]; \mathbb{R}^m) \colon \|u\| \le 1\}$.

Означення 2.1. *Нехай $x(t;u)$ позначає розв'язок задачі Коші* (1), (2) *для будь-якого $\theta \in (0, T_0)$ і $u \in B^\theta$, де T_0 досить мале. Відображення $\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}$, яке переводить пару (θ, u) до кінцевої точки траєкторії, тобто*

$$\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}(\theta, u) = x(\theta; u),$$

ми називаємо відображенням у кінець траєкторії для системи (1) *в нулі.*

Відправною точкою нашого аналізу є зображення[7] $\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}(\theta, u)$ у вигляді ряду

$$\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}(\theta, u) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1 \le i_1, \dots, i_k \le m} c_{i_1 \dots i_k} \eta_{i_1 \dots i_k}(\theta, u), \tag{3}$$

[7] Fliess M. Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives / M. Fliess // Bull. Soc. math. France. – 1981. – V. 109. – P. 3–40.

який абсолютно збігається для будь-якого $\theta \in (0,T)$ і будь-якого $u \in B^\theta$ (для деякого $T \in (0,T_0)$), де

$$\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,u) = \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1)u_{i_2}(\tau_2)\cdots u_{i_k}(\tau_k)d\tau_k \cdots d\tau_2 d\tau_1, \qquad (4)$$

а $c_{i_1\dots i_k}$ є сталими векторними коефіцієнтами, що можуть бути знайдені за формулами

$$c_{i_1\dots i_k} = X_{i_k}X_{i_{k-1}}\cdots X_{i_1}E(0), \qquad (5)$$

де $E(x) = x$ є тотожним відображенням.

Означення 2.2. *Нехай задані* $\theta > 0$, *натуральне число* $k \geq 1$ *і натуральні числа* $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m$.*Ітерованим інтегралом називається функціонал* $\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,\cdot) : B^\theta \to \mathbb{R}$, *що задається формулою* (4).

З означення випливає, що для довільних $\theta > 0$ і $u \in B^1$

$$\eta_{i_1\dots i_k}\left(\theta, u^{1/\theta}\right) = \theta^k \eta_{i_1\dots i_k}(1,u),$$

де $u^{1/\theta}(t) = u\left(\frac{t}{\theta}\right)$, $t \in [0,\theta]$, тобто k описує «асимптотичний порядок» функціоналу $\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,\cdot)$ при малих θ.

Означення 2.3. Ми називаємо k порядком ітерованого інтеграла $\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,\cdot)$.

Це означення відповідає порядку, в якому додаються члени ряду (3).

Означення 2.4. *Нехай* $\theta > 0$ *фіксоване. Розглянемо асоціативну алгебру* $\mathcal{F}_\theta$ *функціоналів (над* $\mathbb{R}$*)*

$$\mathcal{F}_\theta = \mathrm{Lin}\left\{\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,\cdot) : k \geq 1, 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m\right\}$$

з операцією конкатенації

$$\eta_{i_1\dots i_k}(\theta,\cdot) \vee \eta_{j_1\dots j_s}(\theta,\cdot) = \eta_{i_1\dots i_k j_1\dots j_s}(\theta,\cdot).$$

Ми називаємо $\mathcal{F}_\theta$ *алгеброю Фліса або алгеброю ітерованих інтегралів.*

Оскільки ітеровані інтеграли є лінійно незалежними[8], алгебра $\mathcal{F}_\theta$ є вільною. Зазначимо, що однократні інтеграли $\eta_i(\theta,\cdot)$, $i = 1, \dots, m$ є генераторами $\mathcal{F}_\theta$.

Отже, алгебра функціоналів $\mathcal{F}_\theta$ є вільною асоціативною алгеброю (для будь-якого $\theta > 0$). Це дає підстави розглядати, разом з алгеброю ітерованих інтегралів, *абстрактну* вільну асоціативну алгебру, що породжується m елементами.

Розглянемо множину m абстрактних вільних елементів (літер)

[8] Fliess M. Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives / M. Fliess // Bull. Soc. math. France. – 1981. – V. 109. – P. 3–40.

$\eta_1, \dots, \eta_m$. Рядки літер (слова) позначимо $\eta_{i_1 \dots i_k} = \eta_{i_1} \cdots \eta_{i_k}$. На множині слів введемо операцію конкатенації $\eta_{i_1 \dots i_k} \eta_{j_1 \dots j_s} = \eta_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_s}$. Усі скінченні лінійні комбінації слів (над $\mathbb{R}$) утворюють вільну асоціативну алгебру з природним градуюванням

$$\mathcal{F} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}^k, \qquad \mathcal{F}^k = \mathrm{Lin}\{\eta_{i_1 \dots i_k} : 1 \le i_1, \dots, i_k \le m\}, \;\; k \ge 1.$$

Доповнюючи алгебру $\mathcal{F}$ одиничним елементом 1 (порожнім словом), отримаємо алгебру з одиницею $\mathcal{F}^e = \mathcal{F} + \mathbb{R}$, де $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для всіх $a \in \mathcal{F}^e$. Далі ми вважатимемо, що $\eta_{i_p \dots i_q} = 1$, якщо $p > q$.

Розглянемо ще операцію тасуючого добутку, що вводиться рекурентно на множині слів за формулами

$$\eta_{i_1 \dots i_p} ш \, \eta_{j_1 \dots j_k} = \eta_{i_1} \left(\eta_{i_2 \dots i_p} ш \, \eta_{j_1 \dots j_k} \right) + \eta_{j_1} \left(\eta_{i_1 \dots i_p} ш \, \eta_{j_2 \dots j_k} \right),$$

де $1 ш \, a = a ш \, 1 = a$, і продовжується на всю алгебру $\mathcal{F}^e$ за лінійністю. Ця операція є комутативною і асоціативною.

Важливу роль у подальшому аналізі відіграє вільна алгебра Лі $\mathcal{L}$, яка породжується тими самими елементами $\eta_1, \dots, \eta_m$, з операцією $[\ell_1, \ell_2] = \ell_1 \ell_2 - \ell_2 \ell_1$. Алгебра Лі $\mathcal{L}$ успадковує градуювання $\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^k$, де $\mathcal{L}^k = \mathcal{L} \cap \mathcal{F}^k$, $k \ge 1$.

Разом із відображенням у кінець траєкторії і його зображенням у вигляді ряду (3) ми можемо розглядати його абстрактний аналог – формальний степеневий ряд елементів $\mathcal{F}$ (з коефіцієнтами з $\mathbb{R}^n$) вигляду

$$\mathcal{E}_{X_1, \dots, X_m} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1 \le i_1, \dots, i_k \le m} c_{i_1 \dots i_k} \eta_{i_1 \dots i_k}.$$

Нехай $y = Q(x)$ – дійсно-аналітична заміна змінних у системі (1), задана в деякому околі нуля, така, що $Q(0) = 0$. Тоді в нових координатах система набуває вигляду

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{m} u_i Y_i(y), \qquad y \in \widetilde{U}(0) \subset \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

де $Y_i(y) = Q'(x) X_i(x)|_{x = Q^{-1}(y)}$, $i = 1, \dots, m$. Для довільного досить малого $\theta > 0$ і довільного $u \in B^\theta$ отримуємо $\mathcal{E}_{Y_1, \dots, Y_m}(\theta, u) = Q(\mathcal{E}_{X_1, \dots, X_m}(\theta, u))$. Зауважимо, що добуток ітерованих інтегралів (як чисел) відповідає тасуючому добутку в абстрактній алгебрі:

$$\eta_{i_1 \dots i_k}(\theta, u) \eta_{s_1 \dots s_r}(\theta, u) = (\eta_{i_1 \dots i_k} ш \, \eta_{s_1 \dots s_r})(\theta, u),$$

де в правій частині мається на увазі, що спочатку знаходиться тасуючий добуток абстрактних елементів $\eta_{i_1 \dots i_k}$ і $\eta_{s_1 \dots s_r}$ в $\mathcal{F}$, а потім отримані абстрактні елементи $\mathcal{F}$ замінюються відповідними елементами $\mathcal{F}_\theta$.

Отже,

$$\mathcal{E}_{Y_1, \dots, Y_m}(\theta, u) = Q(\mathcal{E}_{X_1, \dots, X_m}(\theta, u)) =$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j_1+\cdots+j_n=q} \frac{1}{j_1!\cdots j_n!} \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n} Q(0)}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_n^{j_n}} \left(\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}\right)_1^{ш j_1} ш \cdots ш \left(\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}\right)_n^{ш j_n},$$

де тасуючий добуток рядів підраховується поелементно і $a^{шq} = a ш \cdots ш\, a$ (q разів) для $q \geq 1$, $a^{ш0} = 1$. Тут і далі при застосуванні дійсно-аналітичного перетворення до рядів елементів з $\mathcal{F}$ ми вважаємо, що всі поліноми є поліномами відносно тасуючого добутку.

Таким чином, за допомогою тасуючого добутку можна знаходити зображення системи у вигляді ряду після заміни змінних прямо з ряду для початкової системи, без знаходження вигляду *системи* у нових змінних.

Розглянемо тепер коефіцієнти (5). Нехай F – асоціативна алгебра диференціальних операторів вигляду $X_{i_k}X_{i_{k-1}}\cdots X_{i_1}$, $k \geq 1$, $1 \leq i_1,\dots,i_k \leq m$, а алгебраїчною операцією є композиція. Розглянемо лінійний оператор $H : \mathcal{F} \to F$, що визначений на базисних елементах як

$$H(\eta_{i_1\dots i_k}) = X_{i_k}\cdots X_{i_1}, \qquad k \geq 1,\ 1 \leq i_1,\dots,i_k \leq m.$$

Тоді $H(a_1a_2) = H(a_2)H(a_1)$ для будь-яких $a_1, a_2 \in \mathcal{F}$, отже, H є анти-гомоморфізмом. Крім того, H відображає алгебру Лі $\mathcal{L}$ на алгебру Лі L векторних полів, що породжена $X_1,\dots,X_m$, і задовольняє рівність $H([\ell_1,\ell_2]) = [H(\ell_2), H(\ell_1)]$ для будь-яких $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}$, тобто обмеження H на $\mathcal{L}$ є анти-гомоморфізмом алгебр Лі $H: \mathcal{L} \to L$.

Визначимо лінійне відображення $c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n$ на базисних елементах формулою

$$c(\eta_{i_1\dots i_k}) = X_{i_k}\cdots X_{i_1}E(0) = c_{i_1\dots i_k}, \tag{7}$$

де $c_{i_1\dots i_k}$ – векторні коефіцієнти $\eta_{i_1\dots i_k}$ у ряді (3), тобто $c(a) = H(a)E(0)$. У дисертації розглядаються лише системи, *повністю неголономні* в точці $x = 0$, тобто такі, що задовольняють умову Рашевського-Чжоу $\dim\{H(Y)(0) : Y \in L\} = n$ або, що те ж саме,

$$c(\mathcal{L}) = \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Лінійне відображення (7) індукує певні структури у вільній алгебрі Лі $\mathcal{L}$. З його означення і властивостей H випливає, що

(a) $\mathrm{Ker}(c) \cap \mathcal{L}$ є підалгеброю Лі в $\mathcal{L}$;

(b) якщо $\ell \in \mathrm{Ker}(c) \cap \mathcal{L}$, то $y\ell \in \mathrm{Ker}(c)$ для будь-якого $y \in \mathcal{F}$.

Ці властивості означають, що $\mathrm{Ker}(c)$ містить *лівий ідеал*, який породжується $\mathrm{Ker}(c) \cap \mathcal{L}$. У розділі 3 ми конструюємо лівий ідеал, що породжується системою і враховує градуювання.

У *підрозділі 2.2* розглядаються системи, афінні за керуванням, вигляду

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u, \quad a(t,0) \equiv 0, \tag{9}$$

де $a(t,x)$ і $b(t,x)$ – дійсно-аналітичні векторні поля в деякому околі нуля $(-t_0,t_0) \times U(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$; умова $a(t,0) \equiv 0$ означає, що нуль є точкою спокою системи (точка нуль обрана лише для зручності). Розглянемо задачу потрапляння до нуля, тобто

$$\dot{x} = a(t,x) + b(t,x)u, \quad a(t,0) \equiv 0, \quad x(0) = x^0, \qquad x(\theta) = 0. \tag{10}$$

Будемо вважати, що керування обирається з простору $L_\infty[0,\theta]$ та задовольняє обмеження $|u(t)| \leq 1$, тобто $u \in B^\theta$, де B^θ – одинична куля простору $L_\infty[0,\theta]$.

Зафіксуємо досить мале $\theta > 0$ і розглянемо точки x^0 з околу $U(0)$, які можна перевести до нуля за час θ за допомогою деякого керування $u \in B^\theta$. Розглянемо множину всіх таких керувань і введемо на ній відображення $S_{a,b}(\theta,\cdot)$, яке переводить керування $u(t)$ до відповідної початкової точки x^0:

$$S_{a,b}(\theta,u) = x^0. \tag{11}$$

Означення 2.7. *Відображення $S_{a,b}$, яке переводить пару (θ,u) до початкової точки траєкторії* (10), *тобто задовольняє рівність* (11), *ми називаємо відображенням до початку траєкторії для системи* (9) *в нулі.*

Відображення $S_{a,b}$ припускає [9] розвинення в ряд:

$$S_{a,b}(\theta,u) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k+k=m \\ k\geq 1,\ m_i\geq 0}} v_{m_1\ldots m_k}\, \xi_{m_1\ldots m_k}(\theta,u), \tag{12}$$

де

$$\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta,u) = \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} \tau_1^{m_1}\tau_2^{m_2}\cdots\tau_k^{m_k} u(\tau_1)u(\tau_2)\cdots u(\tau_k)\,d\tau_k\cdots d\tau_2 d\tau_1, \tag{13}$$

а $v_{m_1\ldots m_k} \in \mathbb{R}^n$ є сталими векторами, які визначаються за формулами

$$v_{m_1\ldots m_k} = \frac{(-1)^k}{m_1!\ldots m_k!} \mathrm{ad}_{R_a}^{m_1} R_b \cdots \mathrm{ad}_{R_a}^{m_k} R_b E(x)|_{t=0,x=0}, \tag{14}$$

де

$$R_a\phi(t,x) = \phi_t(t,x) + \phi_x(t,x)a(t,x), \qquad R_b\phi(t,x) = \phi_x(t,x)b(t,x)$$

для довільної аналітичної вектор-функції $\phi(t,x)$, що задана в деякому околі нуля. Ми використовуємо позначення $\mathrm{ad}_{R_a}^k R_b$ для операторних дужок: $\mathrm{ad}_{R_a}^0 R_b = R_b$, $\mathrm{ad}_{R_a}^{k+1} R_b = \left[R_a, \mathrm{ad}_{R_a}^k R_b\right]$, $k \geq 0$, а $[\cdot,\cdot]$ означає операторний комутатор, $[R_1,R_2] = R_1R_2 - R_2R_1$.

Означення 2.8. *Нехай задані $\theta > 0$, натуральне число $k \geq 1$ і цілі числа $m_1,\ldots,m_k \geq 0$. Нелінійним степеневим моментом $\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta,\cdot)$ називається функціонал $\xi_{m_1\ldots m_k}(\theta,\cdot) : B^\theta \to \mathbb{R}$, що задається формулою* (13).

[9] Sklyar G. M. Moment approach to nonlinear time optimality / G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich // SIAM J. on Control and Optimiz. – 2000. – V. 38. – P. 1707–1728.

Аналогічно ітерованому інтегралу, для довільних $\theta > 0$ і $u \in B^1$ маємо

$$\xi_{m_1\dots m_k}\big(\theta, u^{1/\theta}\big) = \theta^{m_1+\cdots+m_k+k}\xi_{m_1\dots m_k}(1,u),$$

де $u^{1/\theta}(t) = u\left(\frac{t}{\theta}\right)$, $t \in [0,\theta]$, тобто число $m_1 + \cdots + m_k + k$ описує «асимптотичний порядок» функціоналу $\xi_{m_1\dots m_k}(\theta,\cdot)$ при малих θ.

Означення 2.9. *Число $m = m_1 + \cdots + m_k + k$ називається порядком нелінійного степеневого моменту $\xi_{m_1\dots m_k}(\theta,\cdot)$.*

Означення 2.10. *Зафіксуємо довільне $\theta > 0$ і розглянемо асоціативну алгебру $\mathcal{A}_\theta$ функціоналів (над $\mathbb{R}$)*

$$\mathcal{A}_\theta = \mathrm{Lin}\big\{\xi_{m_1\dots m_k}(\theta,\cdot) : k \ge 1, m_1, \dots, m_k \ge 0\big\}$$

з операцією конкатенації

$$\xi_{m_1\dots m_k}(\theta,\cdot) \vee \xi_{j_1\dots j_s}(\theta,\cdot) = \xi_{m_1\dots m_k j_1\dots j_s}(\theta,\cdot).$$

Ми називаємо $\mathcal{A}_\theta$ алгеброю нелінійних степеневих моментів.

Відомо[10], що алгебра $\mathcal{A}_\theta$ є вільною; зауважимо, що лінійні моменти $\xi_m(\theta,\cdot)$, $m \ge 0$, є генераторами $\mathcal{A}_\theta$. Як і для алгебри ітерованих інтегралів, розглянемо відповідну абстрактну алгебру.

А саме, розглянемо множину абстрактних вільних елементів – літер $\{\xi_m\}_{m=0}^\infty$. Слова з цих літер позначимо $\xi_{m_1\dots m_k} = \xi_{m_1} \cdots \xi_{m_k}$ і введемо операцію конкатенації $\xi_{m_1\dots m_k}\xi_{j_1\dots j_s} = \xi_{m_1\dots m_k j_1\dots j_s}$; усі скінченні лінійні комбінації слів (над $\mathbb{R}$) утворюють вільну асоціативну градуйовану алгебру $\mathcal{A} = \sum_{m=1}^\infty \mathcal{A}^m$, де

$$\mathcal{A}^m = \mathrm{Lin}\big\{\xi_{m_1\dots m_k} : m_1 + \cdots + m_k + k = m,\ k \ge 1, m_1, \dots, m_k \ge 0\big\}.$$

Зауважимо, що підпростори $\mathcal{A}^m$ є скінченновимірними.

Доповнимо алгебру $\mathcal{A}$ одиничним елементом: $\mathcal{A}^e = \mathcal{A} + \mathbb{R}$, де $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для будь-якого $a \in \mathcal{A}^e$. Як і для алгебри $\mathcal{F}$, розглянемо вільну алгебру Лі $\mathcal{L}$, що породжена $\{\xi_m\}_{m=0}^\infty$, з операцією $[\ell_1, \ell_2] = \ell_1\ell_2 - \ell_2\ell_1$ і градуюванням $\mathcal{L} = \sum_{m=1}^\infty \mathcal{L}^m$, де $\mathcal{L}^m = \mathcal{L} \cap \mathcal{A}^m$, $m \ge 1$.

Разом із відображенням $S_{a,b}(\theta,u)$ вигляду (12) можна розглядати його абстрактний аналог – формальний степеневий ряд (з коефіцієнтами з $\mathbb{R}^n$) елементів $\mathcal{A}$ вигляду

$$S_{a,b} = \sum_{m=1}^\infty \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k+k=m \\ k\ge1,\ m_i\ge0}} v_{m_1\dots m_k}\,\xi_{m_1\dots m_k}. \qquad (15)$$

Аналогічно рядам ітерованих інтегралів, заміна змінних у системі відповідає перетворенням рядів (15). Ми розглядаємо тільки повністю неголономні системи,

[10] Sklyar G. M. Moment approach to nonlinear time optimality / G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich // SIAM J. on Control and Optimiz. – 2000. – V. 38. – P. 1707–1728.

тобто такі, що задовольняють умову

$$v(\mathcal{L}) = \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

З означення коефіцієнтів (14) випливає, що

(a) $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathcal{L}$ є підалгеброю Лі в $\mathcal{L}$;
(b) якщо $\ell \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathcal{L}$, то $\ell y \in \mathrm{Ker}(v)$ для будь-якого $y \in \mathcal{A}$.

Ці властивості означають, що $\mathrm{Ker}(v)$ містить *правий ідеал*, який породжується $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathcal{L}$.

У *підрозділі 2.3* наведено означення однорідної апроксимації, яка відіграє важливу роль у подальшому, і введене поняття апроксимації у сенсі швидкодії для систем, лінійних за керуванням.

Означення 2.12. *Розглянемо повністю неголономну систему* (1)*. Повністю неголономна система*

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i \hat{X}_i(x), \quad x \in U(0) \subset \mathbb{R}^n, \qquad u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

де векторні поля $\hat{X}_1(x), \dots, \hat{X}_m(x)$ є дійсно-аналітичними в околі $U(0)$, називається однорідною апроксимацією системи (1), *якщо*

(a) *її відображення $\mathcal{E}_{\hat{X}_1,\dots,\hat{X}_m}$ є однорідним, тобто існує $\theta_0 > 0$ і цілі числа $1 \le w_1 \le \dots \le w_n$, для яких*

$$\mathcal{E}_{\hat{X}_1,\dots,\hat{X}_m}\left(\theta, u^{1/\theta}\right) = D_\theta\left(\mathcal{E}_{\hat{X}_1,\dots,\hat{X}_m}(1, u)\right)$$

для будь-яких $\theta \in (0, \theta_0)$ і $u \in B^1$, де $D_\theta(x) = (\theta^{w_1} x_1, \dots, \theta^{w_n} x_n)^{\mathrm{T}}$;

(б) *існує така дійсно-аналітична заміна змінних $y = Q(x)$ у вихідній системі (для якої $Q(0) = 0$, $\det Q'(0) \neq 0$), що $\mathcal{E}_{\hat{X}_1,\dots,\hat{X}_m}$ апроксимує відображення в кінець траєкторії для вихідної системи в нових координатах; а саме, для довільного $u \in B^1$*

$$D_\theta^{-1}\left(Q\left(\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}\left(\theta, u^{1/\theta}\right)\right) - \mathcal{E}_{\hat{X}_1,\dots,\hat{X}_m}\left(\theta, u^{1/\theta}\right)\right) \to 0 \quad \text{при} \quad \theta \to 0.$$

Одною з основних задач дисертації є встановлення зв'язку однорідної апроксимації і апроксимації у сенсі швидкодії. Наведемо точне означення.

Означення 2.13. *Розглянемо дві задачі швидкодії*

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t) \hat{X}_i(x), \quad x(0) = 0, \ \ x(\theta) = s, \quad \sum_{i=1}^{m} u_i^2(t) \le 1, \quad \theta \to \min, \tag{18}$$

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t) X_i(x), \quad x(0) = 0, \ \ x(\theta) = s, \quad \sum_{i=1}^{m} u_i^2(t) \le 1, \quad \theta \to \min, \tag{19}$$

де векторні поля $\hat{X}_1(x), \dots, \hat{X}_m(x)$ *і* $X_1(x), \dots, X_m(x)$ *дійсно-аналітичні в околі нуля. Припустимо, що існує така відкрита область* $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $0 \in \overline{\Omega}$, *що задача* (18) *має єдиний розв'язок* $(\hat{\theta}_s^*, \hat{u}_s^*)$ *для довільного* $s \in \Omega$ *(тобто* $\hat{\theta}_s^*$ *є оптимальним часом і* $\hat{u}_s^*(t)$, $t \in [0, \hat{\theta}_s^*]$ *є оптимальним керуванням для задачі* (18)*). Нехай* $\{(\theta_s^*, u_s^*) : u_s^* \in U_s^*\}$ *позначає множину розв'язків* (19) *(тобто* U_s^* *– множина всіх оптимальних керувань для задачі* (19)*).*

Ми кажемо, що задача швидкодії (18) *апроксимує задачу швидкодії* (19) *(в області* Ω*), якщо існує таке невироджене перетворення* Q *околу нуля в* $\mathbb{R}^n$, $Q(0) = 0$, *що*

$$\frac{\theta_{Q(s)}^*}{\hat{\theta}_s^*} \to 1 \quad \text{при} \quad s \to 0, \ s \in \Omega,$$

$$\frac{1}{\theta}\int_0^\theta \left|u_{Q(s)i}^*(t) - \hat{u}_{si}^*(t)\right| dt \to 0, \qquad i = 1, \dots, m, \qquad \text{при} \quad s \to 0, \ s \in \Omega,$$

для всіх $u_{Q(s)}^* \in U_{Q(s)}^*$, *де* $\theta = \min\{\hat{\theta}_s^*, \theta_{Q(s)}^*\}$.

Іншими словами, після певної заміни змінних у системі (19) при малих $s \in \Omega$ оптимальний час і оптимальні керування в задачах (18) і (19) стають асимптотично еквівалентними як функції кінцевої точки.

Для систем, афінних за керуванням, можна ввести означення однорідної апроксимації, аналогічне означенню 2.12.

Означення 2.14. *Розглянемо повністю неголономну систему* (9). *Повністю неголономна система*

$$\dot{x} = \hat{a}(t, x) + \hat{b}(t, x)u, \quad \hat{a}(t, 0) \equiv 0, \tag{20}$$

де векторні поля $\hat{a}(t, x)$, $\hat{b}(t, x)$ *є дійсно-аналітичними в околі нуля, називається однорідною апроксимацією системи* (9)*, якщо*

(а) *її відображення* $S_{\hat{a},\hat{b}}$ *є однорідним, тобто існує* $\theta_0 > 0$ *і цілі числа* $1 \le w_1 \le \dots \le w_n$, *для яких*

$$S_{\hat{a},\hat{b}}\left(\theta, u^{1/\theta}\right) = D_\theta\left(S_{\hat{a},\hat{b}}(1, u)\right)$$

для будь-яких $\theta \in (0, \theta_0)$ *і* $u \in B^1$, *де* $D_\theta(x) = (\theta^{w_1}x_1, \dots, \theta^{w_n}x_n)^{\mathrm{T}}$;

(б) *існує така дійсно-аналітична заміна змінних* $y = Q(x)$ *у вихідній системі (для якої* $Q(0) = 0$, $\det Q'(0) \ne 0$*), що* $S_{\hat{a},\hat{b}}$ *апроксимує відображення до початку траєкторії для вихідної системи в нових координатах; а саме, для довільного* $u \in B^1$

$$D_\theta^{-1}\left(Q\left(S_{a,b}\left(\theta, u^{1/\theta}\right)\right) - S_{\hat{a},\hat{b}}\left(\theta, u^{1/\theta}\right)\right) \to 0 \quad \text{при} \quad \theta \to 0.$$

Як випливає з результатів розділу 2, локальний аналіз нелінійних систем, лінійних або афінних за керуванням, можна звести до дослідження рядів у вільній асоціативній алгебрі. У *розділі 3* розглядаються абстрактні аналоги таких рядів.

Вивчаються базиси вільної алгебри, при побудові яких використовуються властивості коефіцієнтів ряду. Вводиться поняття однорідної апроксимації ряду і отримується опис усіх однорідних апроксимацій і всіх відповідних перетворень.

У *підрозділі 3.1* введені поняття ядерної алгебри і лівого ідеалу, що породжуються рядом, досліджені їх властивості, введене поняття однорідної апроксимації формального ряду.

Розглянемо множину літер $\{\zeta_i : i \in I\}$, де I – скінченна або злічення множина; нехай $\zeta_{i_1\dots i_k} = \zeta_{i_1} \cdots \zeta_{i_k}$ позначають слова (рядки літер). Розглянемо вільну алгебру $\mathfrak{A}$ – лінійну оболонку (над $\mathbb{R}$) множини слів з операцією конкатенації. Нехай градуювання в $\mathfrak{A}$ задається порядком літер $\mathrm{ord}(\zeta_i) \in \mathbb{N}$, тоді $\mathrm{ord}\big(\zeta_{i_1\dots i_k}\big) = \mathrm{ord}\big(\zeta_{i_1}\big) + \cdots + \mathrm{ord}\big(\zeta_{i_k}\big) \in \mathbb{N}$.

Ми розглядаємо лише такі градуювання, які задовольняють наступну умову.

Припущення 3.1. *Усі однорідні підпростори*

$$\mathfrak{A}^m = \mathrm{Lin}\big\{\zeta_{i_1\dots i_k} :\ \mathrm{ord}\big(\zeta_{i_1}\big) + \cdots + \mathrm{ord}\big(\zeta_{i_k}\big) = m\big\},\ \ m \geq 1,$$

є скінченновимірними.

Зауважимо, що ця умова автоматично виконується для алгебр і градуювань, які відповідають системам, лінійним і афінним за керуванням.

Розглянемо вільну алгебру Лі $\mathfrak{L}$, яка породжена тими самими елементами $\{\zeta_i : i \in I\}$, з операцією $[\ell_1, \ell_2] = \ell_1\ell_2 - \ell_2\ell_1$; вона успадковує градуювання від алгебри $\mathfrak{A}$, отже, $\mathfrak{L} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathfrak{L}^m$, де $\mathfrak{L}^m = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{A}^m$, $m \geq 1$.

Аналогічно алгебрам $\mathcal{F}$ і $\mathcal{A}$ розглянемо $\mathfrak{A}^e = \mathfrak{A} + \mathbb{R}$ і введемо тасуючий добуток. Введемо скалярний добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $\mathfrak{A}$, вважаючи базис $\big\{\zeta_{i_1\dots i_k} : k \geq 1,$ $i_1, \dots, i_k \in I\big\}$ ортонормованим.

Ми будемо розглядати формальні ряди в алгебрі $\mathfrak{A}$ вигляду

$$\mathcal{Z}_g = \sum_{k\geq 1, i_1,\dots,i_k \in I} g_{i_1\dots i_k}\, \zeta_{i_1\dots i_k}, \tag{21}$$

де $g_{i_1\dots i_k} \in \mathbb{R}^n$ – сталі вектори. Для опису формального ряду зручно ввести лінійне відображення $g: \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^n$, яке задається на словах формулою

$$g\big(\zeta_{i_1\dots i_k}\big) = g_{i_1\dots i_k},\ \ k \geq 1,\ \ i_1, \dots, i_k \in I. \tag{22}$$

(Можна поширити це відображення на $\mathfrak{A}^e$, вважаючи $g(1) = 0$.)

Оскільки нас будуть цікавити лише ряди, які відповідають керованим системам, ми будемо розглядати відображення g, що задовольняють певні умови.

Припущення 3.2. *Лінійне відображення* $g: \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^n$ *задовольняє такі умови:*

1) $g(\mathfrak{L}) = \mathbb{R}^n$;
2) *якщо* $g(\ell) = 0$ *для деякого* $\ell \in \mathfrak{L}$, *то* $g(z\ell) = 0$ *для всіх* $z \in \mathfrak{A}$.

Вимога 1 виражає умову Рашевського-Чжоу, а вимога 2 – умову реалізовності ряду у вигляді системи. Зазначимо, що у випадку афінних за керуванням систем замість добутку $z\ell$ треба розглядати добуток ℓz.

Наступне поняття є одним з центральних понять дисертації.

Розглянемо підпростори $\mathfrak{L}$ вигляду

$$\mathcal{P}^k = \{\ell \in \mathfrak{L}^k : g(\ell) \in g(\mathfrak{L}^1 + \cdots + \mathfrak{L}^{k-1})\},\ k \geq 1,$$

де при $k = 1$ мається на увазі $\mathcal{P}^1 = \{\ell \in \mathfrak{L}^1 : g(\ell) = 0\}$, і нехай

$$\mathfrak{L}_g = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}^k.$$

Лема 3.3. $\mathfrak{L}_g \subset \mathfrak{L}$ *є градуйованою підалгеброю Лі.*

Означення 3.2. *Ми називаємо* $\mathfrak{L}_g$ *ядерною підалгеброю Лі, що відповідає ряду* (21) *або, що те ж саме, відображенню* g *вигляду* (22).

Лема 3.4. *Підпростір* $\mathfrak{L}_g$ *має ковимірність* n *у просторі* $\mathfrak{L}$.

Означення 3.3. *Підпростір*

$$\mathfrak{J}_g = \mathrm{Lin}\{\mathfrak{A}^e \mathfrak{L}_g\} = \mathrm{Lin}\{y\ell : y \in \mathfrak{A}^e, \ell \in \mathfrak{L}_g\}$$

називається лівим ідеалом, що відповідає ряду (21) *або, що те ж саме, відображенню* g *вигляду* (22).

Лема 3.5. *Якщо* $a \in \mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{A}^k$, *то* $g(a) \in g(\mathfrak{A}^1 + \cdots + \mathfrak{A}^{k-1})$.

Виявляється, що ядерна підалгебра Лі і лівий ідеал визначають одне одного.

Наслідок 3.3. *Для будь-якого* $k \geq 1$ маємо $\mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{L}^k = \mathcal{P}^k$, а отже,

$$\mathfrak{J}_g \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_g.$$

Нарешті, введемо абстрактний аналог поняття однорідної апроксимації.

Означення 3.4. *Нехай заданий ряд* $\mathcal{Z}_g$ *вигляду* (21), *який задовольняє припущення 3.2. Ми кажемо, що ряд* $\mathcal{Z}_{\hat{g}}$ *(такого ж вигляду) є однорідною апроксимацією ряду* $\mathcal{Z}_g$ *(а відповідне відображення* $\hat{g}$ *є однорідною апроксимацією відображення* g*), якщо:*

1) $\left(\mathcal{Z}_{\hat{g}}\right)_i \in \mathfrak{A}^{w_i}$, *де* $w_1 \leq \cdots \leq w_n$;

2) *існує перетворення* $y = Q(x)$, $\det Q'(0) \neq 0$, *вигляду*

$$Q(\mathcal{Z}) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j_1+\cdots+j_n=q} \frac{1}{j_1! \cdots j_n!} \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n} Q(0)}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}} \mathcal{Z}_1^{ш j_1} ш \cdots ш\, \mathcal{Z}_n^{ш j_n},$$

для якого

$$\left(Q(\mathcal{Z}_g)\right)_i = \left(\mathcal{Z}_{\hat{g}}\right)_i + \rho_i, \quad де \quad \rho_i \in \sum_{k=w_i+1}^{\infty} \mathfrak{A}^k, \qquad i = 1, \ldots, n;$$

3) $\hat{g}(\mathfrak{L}) = \mathbb{R}^n$.

Ми називаємо перетворення $y = Q(x)$ *апроксимуючим перетворенням ряду* $\mathcal{Z}_g$.

Властивість 1 означає однорідність, а властивість 2 – апроксимацію. Властивість 3 означає невиродженість апроксимації (для керованих систем ця вимога перетворюється на умову Рашевського-Чжоу). Зокрема, апроксимація $\mathcal{Z}_{\hat{g}}$ задовольняє умову 1 припущення 3.2. У дисертації показано, що вона також задовольняє умову 2 припущення 3.2 (наслідок 3.7).

У *підрозділі 3.2* отримане узагальнення теореми Р. Рі[11], за допомогою якого будується базис ортогонального доповнення до лівого ідеалу. За теоремою Р. Рі, елемент $\ell \in \mathfrak{A}$ належить алгебрі Лі $\mathfrak{L}$ тоді і тільки тоді, коли він є ортогональним тасуючому добутку будь-яких двох елементів з $\mathfrak{A}$, тобто $\langle \ell, a_1 ш\, a_2 \rangle = 0$ для будь-яких $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}$. Іншими словами, $\mathfrak{L} = (\mathfrak{A}\, ш\, \mathfrak{A})^{\perp}$, де позначка $^{\perp}$ означає ортогональне доповнення, звідки випливає ортогональний розклад $\mathfrak{A} = \mathfrak{L} \oplus \mathrm{Lin}\{\mathfrak{A}\, ш\, \mathfrak{A}\}$. Звідси отримуємо

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{L}^{sh}, \tag{23}$$

де $\mathfrak{L}^{sh} = \mathrm{Lin}\{z_1\, ш \cdots ш\, z_q : q \geq 2,\ z_1, \dots, z_q \in \mathfrak{L}\}$. Зафіксуємо *довільну* множину $\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$ однорідних елементів $\mathfrak{L}$, що задовольняє умову

$$\mathfrak{L} = \mathrm{Lin}\{\ell_1, \dots, \ell_n\} + \mathfrak{L}_g. \tag{24}$$

Не обмежуючи загальності, припустимо

$$\mathrm{ord}(\ell_i) \leq \mathrm{ord}(\ell_j) \quad \text{при} \quad 1 \leq i < j \leq n. \tag{25}$$

Нехай $\{\ell_i\}_{i=n+1}^{\infty}$ – однорідний базис $\mathfrak{L}_g$. Далі ми використовуємо теорему Пуанкаре-Біркгофа-Вітта[12], за якою множина

$$\{\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_r} : 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_r,\ r \geq 1\} \tag{26}$$

утворює базис $\mathfrak{A}$.

Розглянемо ортогональне доповнення до лівого ідеалу $\mathfrak{J}_g$

$$\mathfrak{J}_g^{\perp} = \{x \in \mathfrak{A} : \langle x, a \rangle = 0 \ \text{ для всіх } \ a \in \mathfrak{J}_g\}.$$

Лема 3.8. *Нехай* $a, b \in \mathfrak{J}_g^{\perp}$; *тоді* $a\, ш\, b \in \mathfrak{J}_g^{\perp}$.

Далі для будь-якого $a \in \mathfrak{A}$ символом $\tilde{a}$ будемо позначати ортопроекцію a на підпростір $\mathfrak{J}_g^{\perp}$. Аналогічно, для будь-якого підпростору $M \subset \mathfrak{A}$ символом $\widetilde{M}$ будемо позначати ортопроекцію M на $\mathfrak{J}_g^{\perp}$.

Наступна теорема узагальнює теорему Р. Рі.

Теорема 3.1. *Нехай елементи* $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathfrak{L}$ *є однорідними і задовольняють рівність* (24). *Тоді множина*

$$\{\tilde{\ell}_{i_1}\, ш \cdots ш\, \tilde{\ell}_{i_s} : s \geq 1,\ 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_s \leq n\}$$

утворює базис $\mathfrak{J}_g^{\perp}$.

---

[11] Ree R. Lie elements and an algebra assotiated with shuffles / Ree R. // Annals of Math. – 1958. – V. 68 (2). – P. 210–220.

[12] Картье П. Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта / П. Картье // В кн.: Семинар «Софус Ли». Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. – М., Изд. иностр. лит., 1962.

Наслідок 3.4. *Має місце ортогональний розклад*

$$\mathfrak{J}_g^{\perp} = \widetilde{\mathfrak{L}} \oplus \big(\widetilde{\mathfrak{L}}\big)^{sh},$$

а отже,

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{J}_g \oplus \widetilde{\mathfrak{L}} \oplus \big(\widetilde{\mathfrak{L}}\big)^{sh},$$

що узагальнює розклад (23).

Нехай елементи $\ell_1, \dots, \ell_n$ задовольняють умови (24), (25) і $\{\ell_i\}_{i=n+1}^{\infty}$ є однорідним базисом $\mathfrak{L}_g$. Запишемо базис (26) у такому вигляді:

$$\left\{\ell_{j_1}^{p_1} \cdots \ell_{j_s}^{p_s} : s \geq 1,\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_s,\ \ p_1, \dots, p_s \geq 1\right\}, \tag{27}$$

де $\ell^p = \ell \cdots \ell$ (p разів), $p \geq 1$. Оскільки елементи $\ell_i, i \geq 1$, є однорідними, усі базисні елементи теж є однорідними. Оскільки $\dim \mathfrak{A}^k < \infty$ (за припущенням 3.1), існує спряжений базис $\mathfrak{A}^k$. Оскільки підпростори $\mathfrak{A}^k$ з різними k ортогональні один одному, існує й спряжений базис $\mathfrak{A}$. Позначимо його

$$\left\{d_{i_1 \dots i_r}^{q_1 \dots q_r} : r \geq 1,\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_r,\ \ q_1, \dots, q_r \geq 1\right\}, \tag{28}$$

де

$$\langle \ell_{j_1}^{p_1} \cdots \ell_{j_s}^{p_s}, d_{i_1 \dots i_r}^{q_1 \dots q_r} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s = r \text{ і } j_t = i_t,\ p_t = q_t, t = 1, \dots, s, \\ 0 & \text{у супротивному випадку.} \end{cases}$$

За теоремою Меленсона-Рейтенауера[13], елементи спряженого базису (28) задаються формулами

$$d_{i_1 \dots i_r}^{q_1 \dots q_r} = \frac{1}{q_1! \cdots q_r!} d_{i_1}^{ш q_1} ш \cdots ш\, d_{i_r}^{ш q_r}, \tag{29}$$

де використовується позначення $d_q = d_q^1,\ q \geq 1$.

Лема 3.10. *Нехай елементи* $\ell_1, \dots, \ell_n$ *задовольняють умови* (24), (25) *і* $\{\ell_i\}_{i=n+1}^{\infty}$ *є однорідним базисом* $\mathfrak{L}_g$. *Тоді множина*

$$\left\{d_1^{ш q_1}\ ш \cdots ш\, d_n^{ш q_n} :\ q_1, \dots, q_n \geq 0,\ q_1 + \cdots + q_n \geq 1\right\}$$

утворює базис $\mathfrak{J}_g^{\perp}$.

Наслідок 3.5. *Для будь-якого* $i = 1, \dots, n$ *елемент* $\tilde{\ell}_i$ *дорівнює однорідному поліному відносно тасуючого добутку від* $d_1, \dots, d_n$. *Навпаки, для будь-якого* $i = 1, \dots, n$ *елемент* d_i *дорівнює однорідному поліному відносно тасуючого добутку від* $\tilde{\ell}_1, \dots, \tilde{\ell}_n$. *Крім того,* $\operatorname{ord}(d_i) = \operatorname{ord}(\tilde{\ell}_i) = \operatorname{ord}(\ell_i),\ i = 1, \dots, n$.

Лема 3.11. *Нехай множина* $\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$ *однорідних елементів з* $\mathfrak{L}$ *задовольняє умову* (24) *і* $\{\ell_i\}_{i=n+1}^{\infty}$ *є однорідним базисом* $\mathfrak{L}_g$. *Тоді ряд у правій частині* (21) *можна подати в наступному вигляді:*

---

[13] Melançon G. Lyndon words, free algebras and shuffles / G. Melançon, C. Reutenauer // Canad. J. Math. XLI. – 1989. – P. 577–591.

$$\mathcal{Z}_g = \sum_{\substack{1 \le i_1 < \dots < i_r \\ q_1, \dots, q_r \ge 1}} \frac{1}{q_1! \dots q_r!} g\left(\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_r}^{q_r}\right) d_{i_1}^{ш q_1} \text{ ш} \cdots \text{ш } d_{i_r}^{ш q_r}, \tag{30}$$

де $d_j = d_j^1$ *є елементами спряженого базису* (29).

Наслідок 3.6. *Нехай лінійне відображення* $g : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^n$ *задовольняє припущення 3.2. Нехай* $\mathcal{Z}_{\tilde{g}} = Q(\mathcal{Z}_g)$. *Тоді відображення* $\tilde{g} : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^n$ *задовольняє умову 2 припущення 3.2. Якщо* $\det(Q'(0)) \neq 0$, *то відображення* $\tilde{g} : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^n$ *задовольняє умову 1 припущення 3.2. У цьому випадку* $\mathfrak{L}_{\tilde{g}} = \mathfrak{L}_g$ *і* $\mathfrak{J}_{\tilde{g}} = \mathfrak{J}_g$.

Для керованих систем цей наслідок означає, що ядерна підалгебра Лі і лівий ідеал інваріантні відносно невироджених замін змінних.

У *підрозділі 3.3* отриманий повний опис усіх можливих однорідних апроксимацій і апроксимуючих перетворень. Зокрема, показано, що два ряди мають одну й ту саму однорідну апроксимацію тоді і тільки тоді, коли їх ядерні підалгебри Лі збігаються. З іншого боку, показано, що ядерною підалгеброю Лі є будь-яка градуйована підалгебра Лі ковимірності n.

Розглянемо розклад (30) і відділимо доданки, які містять тільки $d_1, \dots, d_n$:

$$\mathcal{Z}_g = \mathcal{S} + \mathcal{T},$$

де

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n \ge 0 \\ q_1 + \dots + q_n \ge 1}} \frac{1}{q_1! \dots q_n!} g\left(\ell_1^{q_1} \cdots \ell_n^{q_n}\right) d_1^{ш q_1} \text{ ш} \cdots \text{ш } d_n^{ш q_n},$$

$$\mathcal{T} = \sum_{\substack{1 \le i_1 < \dots < i_r,\ i_r \ge n+1 \\ q_1, \dots, q_r \ge 1}} \frac{1}{q_1! \dots q_r!} g\left(\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_r}^{q_r}\right) d_{i_1}^{ш q_1} \text{ ш} \cdots \text{ш } d_{i_r}^{ш q_r}.$$

Якщо $i_r \ge n + 1$, то $\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_r}^{q_r} \in \mathfrak{J}_g$, що означає, що всі коефіцієнти ряду $\mathcal{T}$ належать $g(\mathfrak{J}_g)$.

Лема 3.12. *Зафіксуємо* $1 \le i \le n$ *і припустимо, що* $\mathcal{S}_i$ *містить тільки члени порядку не менше* k, *тобто* $\mathcal{S}_i \in \sum_{j=k}^{\infty} \mathfrak{A}^j$. *Тоді* $\mathcal{T}_i$ *містить тільки члени порядку більше* k, *тобто* $\mathcal{T}_i \in \sum_{j=k+1}^{\infty} \mathfrak{A}^j$.

З леми 3.12 випливає, що для того, щоб побудувати однорідну апроксимацію, достатньо розглядати лише перетворення ряду $\mathcal{S}$.

Теорема 3.2. *Розглянемо довільний ряд* $\mathcal{Z}_g$ *вигляду* (21), *що задовольняє припущення 3.2. Будь-яка його однорідна апроксимація має вигляд*

$$\mathcal{Z}_{\hat{g}} = P(d_1, \dots, d_n),$$

де P *– довільна поліноміальна вектор-функція з невиродженою лінійною частиною і однорідними компонентами,* $d_1, \dots, d_n$ *– елементи спряженого базису* (29) *до* *базису* (27), *елементи* $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathfrak{L}$ *задовольняють умови* (24), (25), *а* $\{\ell_i\}_{i=n+1}^{\infty}$ *є однорідним базисом* $\mathfrak{L}_g$.

При цьому апроксимуюче перетворення $y = Q(x)$ *з означення 3.4 може бути вибране поліноміальним.*

Отже, однорідна апроксимація ряду є *єдиною* в такому сенсі: будь-яка однорідна апроксимація може бути зведена до будь-якої іншої за допомогою однорідного поліноміального перетворення.

Отриманий також повний опис апроксимуючих перетворень.

Теорема 3.3. *Невироджене перетворення* $y = Q(x)$ *є апроксимуючим для ряду* (21) *тоді і тільки тоді, коли воно зводить вектор-функцію*

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{q_1,\dots,q_n \ge 0 \\ q_1+\cdots+q_n \ge 1}} \frac{1}{q_1! \dots q_n!} g\left(\ell_1^{q_1} \cdots \ell_n^{q_n}\right) z_1^{q_1} \cdots z_n^{q_n}, \qquad z \in \mathbb{R}^n,$$

до трикутної форми

$$(Q(\Phi(z)))_i = \sum_{w_1 r_1+\cdots+w_n r_n \ge w_i} \alpha_i^{r_1 \dots r_n} z_1^{r_1} \cdots z_n^{r_n}, \qquad i = 1, \dots, n,$$

де $\alpha_i^{r_1 \dots r_n} \in \mathbb{R}$. *Еквівалентно, невироджене перетворення* $y = Q(x)$ *є апроксимуючим тоді і тільки тоді, коли воно зводить поліноміальну вектор-функцію*

$$\Psi(z) = \sum_{w_1 q_1+\cdots+w_n q_n \le w_n} \frac{1}{q_1! \dots q_n!} g\left(\ell_1^{q_1} \cdots \ell_n^{q_n}\right) z_1^{q_1} \cdots z_n^{q_n}, \qquad z \in \mathbb{R}^n,$$

до трикутної форми.

Використовуючи наслідок 3.5, отримуємо іншу зручну форму для однорідної апроксимації.

Теорема 3.4. *Розглянемо довільний ряд* $\mathcal{Z}_g$ *вигляду* (21), *що задовольняє припущення 3.2. Будь-яка його однорідна апроксимація має вигляд*

$$\mathcal{Z}_{\hat{g}} = P\left(\tilde{\ell}_1, \dots, \tilde{\ell}_n\right),$$

де P *– довільна поліноміальна вектор-функція з невиродженою лінійною частиною і однорідними компонентами, однорідні елементи* $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathfrak{L}$ *задовольняють умови* (24), (25), *а* $\tilde{\ell}_i$ *позначає ортопроекцію* ℓ_i *на підпростір* $\mathfrak{J}_g^{\perp}$.

При цьому апроксимуюче перетворення $y = Q(x)$ *з означення 3.4 може бути вибране поліноміальним.*

Наслідок 3.7. *Нехай ряд* $\mathcal{Z}_g$ *задовольняє припущення 3.2, а ряд* $\mathcal{Z}_{\hat{g}}$ *є його однорідною апроксимацією. Тоді* $\mathcal{Z}_{\hat{g}}$ *теж задовольняє припущення 3.2.*

Отримані результати дозволяють запропонувати безкоординатне означення однорідної апроксимації, еквівалентне означенню 3.4, яке не пов'язане з вимогою існування апроксимуючого перетворення.

Означення 3.5. *Нехай заданий ряд $\mathcal{Z}_g$ вигляду* (21), *який задовольняє припущення 3.2. Ми кажемо, що ряд $\mathcal{Z}_{\hat{g}}$ є однорідною апроксимацією ряду $\mathcal{Z}_g$ (а відображення $\hat{g}$ є однорідною апроксимацією відображення g), якщо:*

$$\text{(а) } \hat{g}\big(\mathfrak{L}_{\hat{g}}\big) = 0; \qquad \text{(б) } \mathfrak{L}_g = \mathfrak{L}_{\hat{g}}.$$

Зазначимо, що умова (а) означає однорідність, а умова (б) – апроксимацію.

Умови (а) і (б) означення 3.5 можна замінити еквівалентними умовами:

$$\text{(а') } \hat{g}\big(\mathfrak{J}_{\hat{g}}\big) = 0; \qquad \text{(б') } \mathfrak{J}_g = \mathfrak{J}_{\hat{g}}.$$

У наступних розділах одержані результати застосовуються до дослідження апроксимацій нелінійних керованих систем.

У *розділі 4* ми повертаємося до дослідження нелінійних керованих систем, лінійних за керуванням. У *підрозділі 4.1* застосовуються результати розділу 3 до побудови однорідної апроксимації: пропонується безкоординатне алгебраїчне означення однорідної апроксимації і описується метод її побудови.

Як наслідок означень розділу 3, отримуємо такі означення.

Означення 4.1. *Ми називаємо*

$$\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}^k, \;\; \text{де} \;\; \mathcal{P}^k = \{\ell \in \mathcal{L}^k : c(\ell) \in c(\mathcal{L}^1 + \cdots + \mathcal{L}^{k-1})\},\; k \geq 1,$$

ядерною підалгеброю Лі, що відповідає системі (1).

Означення 4.2. *Підпростір*

$$\mathcal{J}_{X_1,\ldots,X_m} = \mathrm{Lin}\{\mathcal{F}^e \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}\} = \mathrm{Lin}\{y\ell : y \in \mathcal{F}^e,\; \ell \in \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}\}$$

називається лівим ідеалом, що відповідає системі (1).

За наслідком 3.3, $\mathcal{J}_{X_1,\ldots,X_m} \cap \mathcal{L} = \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}$. За лемами 3.3 і 3.4, $\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}$ є градуйованою підалгеброю Лі ковимірності n. За наслідком 3.6 ядерна підалгебра Лі і лівий ідеал інваріантні відносно невироджених замін змінних у системі.

Теорема 4.1. *Для кожної дійсно-аналітичної повністю неголономної системи вигляду* (1) *існує така невироджена поліноміальна заміна змінних $y = Q(x)$, що відображення в кінець траєкторії системи в нових координатах* (6) *зображається як ряд вигляду*

$$\big(\mathcal{E}_{Y_1,\ldots,Y_m}\big)_i = \big(Q(\mathcal{E}_{X_1,\ldots,X_m})\big)_i = d_i + \rho_i, \quad \text{де} \quad \rho_i \in \sum_{j=w_i+1}^{\infty} \mathcal{F}^j,\;\; i = 1,\ldots,n,$$

а $w_i = \mathrm{ord}(d_i)$, $i = 1,\ldots,n$. Тут $d_1,\ldots,d_n$ – елементи спряженого базису (29) *до базису* (27), *де елементи $\ell_1,\ldots,\ell_n \in \mathcal{L}$ задовольняють умови*

$$\mathcal{L} = \mathrm{Lin}\{\ell_1,\ldots,\ell_n\} + \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}, \quad \mathrm{ord}(\ell_i) \leq \mathrm{ord}\big(\ell_j\big) \;\; \text{при} \;\; 1 \leq i < j \leq n, \quad (31)$$

а $\{\ell_i\}_{i=n+1}^{\infty}$ *є однорідним базисом* $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$.

Теорема 4.2. *Для кожної дійсно-аналітичної повністю неголономної системи вигляду* (1) *існує така невироджена поліноміальна заміна змінних* $y = Q(x)$, *що відображення в кінець траєкторії системи в нових координатах* (6) *зображається як ряд вигляду*

$$\left(\mathcal{E}_{Y_1,\dots,Y_m}\right)_i = \left(Q(\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m})\right)_i = \tilde{\ell}_i + \hat{\rho}_i, \quad де \quad \hat{\rho}_i \in \sum_{j=w_i+1}^{\infty} \mathcal{F}^j, \; i = 1,\dots,n,$$

а $w_i = \mathrm{ord}(\ell_i)$, $i = 1,\dots,n$. *Тут однорідні елементи* $\ell_i \in \mathcal{L}$ *задовольняють умови* (31) *а* $\tilde{\ell}_i$ *позначає ортопроекцію* ℓ_i *на підпростір* $\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}^{\perp}$.

Наслідок 4.1. *Система* (17) *є однорідною апроксимацією системи* (1) *у сенсі означення 2.12 тоді і тільки тоді, коли її ряд має вигляд* $\left(\mathcal{E}_{\hat{X}_1,\dots,\hat{X}_m}\right)_i = P_i(d_1,\dots,d_n)$, $i = 1,\dots,n$, *де* $P = (P_1,\dots,P_n)^{\mathrm{T}}$ *– поліноміальна вектор-функція з невиродженою лінійною частиною і* $P_i(d_1,\dots,d_n) \in \mathcal{F}^{w_i}$ *(де* $w_i = \mathrm{ord}(d_i)$*).*

Наслідок 4.2. *Система* (17) *є однорідною апроксимацією системи* (1) *у сенсі означення 2.12 тоді і тільки тоді, коли її ряд має вигляд* $\left(\mathcal{E}_{\hat{X}_1,\dots,\hat{X}_m}\right)_i = P_i\left(\tilde{\ell}_1,\dots,\tilde{\ell}_n\right)$, $i = 1,\dots,n$, *де* $P = (P_1,\dots,P_n)^{\mathrm{T}}$ *– поліноміальна вектор-функція з невиродженою лінійною частиною і* $P_i\left(\tilde{\ell}_1,\dots,\tilde{\ell}_n\right) \in \mathcal{F}^{w_i}$ *(де* $w_i = \mathrm{ord}(\ell_i)$*).*

Таким чином, однорідну апроксимацію системи можна побудувати суто алгебраїчним шляхом, за допомогою «стандартної» процедури знаходження ортопроекцій елементів $\ell_1,\dots,\ell_n$, які задовольняють умови (31), на підпростір $\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}^{\perp}$.

Як випливає з наслідків 4.1 і 4.2, якщо система (17) є однорідною апроксимацією системи (1), то $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m} = \mathcal{L}_{\hat{X}_1,\dots,\hat{X}_m}$. Крім того, ряд системи, яка є однорідною апроксимацією, визначається єдиним чином з точністю до однорідної поліноміальної заміни змінних, причому апроксимуюча система теж визначається однозначно.

Отже, отримуємо наступні наслідки, які дають повну класифікацію всіх можливих однорідних апроксимацій нелінійних систем, лінійних за керуванням.

Наслідок 4.3. *Дві повністю неголономні системи вигляду* (1) *мають одну й ту саму однорідну апроксимацію тоді і тільки тоді, коли їх ядерні підалгебри Лі збігаються.*

Наслідок 4.4. *Для системи вигляду* (1) *однорідна апроксимація існує і є єдиною з точністю до однорідної поліноміальної заміни змінних.*

Наслідок 4.5. *Множина однорідних апроксимацій повністю неголономних систем вигляду* (1) *знаходиться у взаємно однозначній відповідності з множиною всіх градуйованих підалгебр Лі* $\mathcal{L}$ *ковимірності* n.

Означення 2.12 однорідної апроксимації є координатно залежним. Ми переформулюємо це означення у координатно незалежний спосіб.

Означення 4.3. *Розглянемо повністю неголономну систему* (1). *Нехай система* (17) *є повністю неголономною; нехай* $c_{\hat{X}_1,\dots,\hat{X}_m} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n$ *позначає лінійне відображення, що відповідає системі* (17). *Система* (17) *називається однорідною апроксимацією системи* (1), *якщо*

$$\text{(а) } c_{\hat{X}_1,\dots,\hat{X}_m}\left(\mathcal{L}_{\hat{X}_1,\dots,\hat{X}_m}\right) = 0, \qquad \text{(б) } \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m} = \mathcal{L}_{\hat{X}_1,\dots,\hat{X}_m}.$$

Умови (а) і (б) означення 4.3 можна замінити еквівалентними умовами:

$$\text{(а')} \ c_{\hat{X}_1,\dots,\hat{X}_m}\left(\mathcal{J}_{\hat{X}_1,\dots,\hat{X}_m}\right) = 0, \qquad \text{(б')} \ \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m} = \mathcal{J}_{\hat{X}_1,\dots,\hat{X}_m}.$$

Як наслідок з теореми 3.3, отримуємо повний опис усіх апроксимуючих замін змінних (привілейованих координат). Крім того, у пункті 4.1.4 пропонується метод побудови апроксимуючої системи.

У *підрозділі 4.2* досліджується задача швидкодії для систем, лінійних за керуванням, і з'ясовується зв'язок між однорідною апроксимацією і апроксимацією в сенсі швидкодії.

Розглянемо задачу швидкодії для системи (1) вигляду

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t) X_i(x), \quad x(0) = s^1, \ x(\theta) = s^2, \quad \sum_{i=1}^{m} u_i^2(t) \le 1, \quad \theta \to \min, \tag{32}$$

де $s^1 \ne s^2$. Ми вважаємо, що виконується умова Рашевського-Чжоу (8) а отже, з кожної точки s^1 деякого околу нуля $U(0)$ можна дістатися будь-якої іншої точки s^2 цього околу в силу системи (1) з припустимим керуванням. Тоді з теореми Філіппова[14] випливає, що оптимальне за швидкодією керування існує (але не обов'язково є єдиним).

Перше зауваження стосується характеру оптимального керування.

Теорема 4.5. *Нехай* θ^* *є оптимальним часом, а* $u^* \in B^{\theta^*}$ *є оптимальним керуванням для задачі* (32). *Тоді*

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^{*2}(t) = 1 \quad \text{м.в.}, \quad t \in [0, \theta^*].$$

Наступна теорема є одним з основних результатів дисертації. Вона встановлює зв'язок однорідної апроксимації і апроксимації у сенсі швидкодії.

Теорема 4.6. *Нехай система* (17) *є однорідною апроксимацією системи* (1). *Нехай існує така відкрита область* $\Omega \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $0 \in \overline{\Omega}$, *що для довільного* $s \in \Omega$ *розв'язок* $\left(\hat{\theta}_s^*, \hat{u}_s^*\right)$ *задачі швидкодії* (18) *є єдиним. Тоді існує сімейство вкладених областей* $\Omega(\delta)$, $\delta > 0$, *таких, що* $\Omega(\delta_1) \subset \Omega(\delta_2)$ *при* $\delta_1 > \delta_2 > 0$ *і* $\Omega =$

[14] Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования / А. Ф. Филиппов // Вестник МГУ, Матем. и мех. – 1959. – Т. 2. – С. 25–32.

$\bigcup_{\delta>0}\Omega(\delta)$, *у кожній з яких задача швидкодії* (18) *апроксимує задачу швидкодії* (19).

У *підрозділі 4.3* ядерна підалгебра Лі вивчається як функція початкової точки в околі початку координат. Зокрема, досліджено зв'язок властивостей регулярності і однорідності систем із властивостями їх ядерних підалгебр Лі[15].

Найпростіша характеристика поведінки системи в околі – це поведінка її вектора зросту. Нехай $v^z = \left(v_1^z, \dots, v_{p^z}^z\right)$ – вектор зросту системи в точці z, тобто

$$v_k^z = \dim c^z(\mathcal{L}^1 + \dots + \mathcal{L}^k),\ \ k = 1, \dots, p^z,\ \ v_{p^z}^z = n > v_{p^z-1}^z,$$

де $c^z\left(\eta_{i_1\dots i_k}\right) = X_{i_k}\cdots X_{i_1}E(z)$. Нехай $v = \left(v_1, \dots, v_p\right)$ – вектор зросту в нулі (при $z = 0$).

Означення 4.4. *Система* (1) *називається регулярною в нулі, якщо її вектор зросту є сталим у деякому околі* $U(0)$, *тобто* $p^z = p$ *та* $v_k^z = v_k, k = 1, \dots, p$, *для довільного* $x \in U(0)$.

Лема 4.7. *Припустимо, що система* (1) *є регулярною в нулі. Тоді її ядерна підалгебра Лі* $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ *є ідеалом Лі в* $\mathcal{L}$, *тобто для довільних* $a \in \mathcal{L}$ *та* $\ell \in \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ *виконується* $[a, \ell] \in \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$.

Властивість $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ бути ідеалом Лі може бути виражена в термінах лівого ідеалу $\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$.

Лема 4.8. *Ядерна підалгебра Лі* $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ *системи* (1) *є ідеалом Лі в* $\mathcal{L}$ *тоді і тільки тоді, коли лівий ідеал* $\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$ *є двостороннім, тобто* $ba \in \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$ *для довільного* $a \in \mathcal{F}$ *і довільного* $b \in \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$.

Далі ми розглядаємо однорідні системи з точки зору властивостей їх ядерних підалгебр Лі та рядів $\mathcal{E}_{X_1,\dots,X_m}$. Ураховуючи означення 3.5, введемо таке означення однорідної системи.

Означення 4.5. *Повністю неголономна система* (1) *називається однорідною в нулі, якщо* $c\left(\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}\right) = 0$.

Теорема 4.7. *Нехай система* (1) *є однорідною в нулі. Ця система регулярна тоді і тільки тоді, коли* $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ *є ідеалом Лі. Більш того, в цьому випадку ядерна підалгебра Лі є сталою, тобто* $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}^z = \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ *для довільного* $z \in \mathbb{R}^n$ *(отже, система має одну й ту саму однорідну апроксимацію в будь-якій точці). Крім того, для довільного* $z \in \mathbb{R}^n$ *існує поліноміальна заміна змінних (яка залежить від* z*), що переводить систему до однорідного вигляду в точці* z.

У пункті 4.3.3 вказаний вигляд такої заміни змінних, а також явна формула, яка виражає коефіцієнти ряду однорідної системи в точці $z \in U(0)$ через коефіцієнти такого ряду в нулі.

У *розділі 5* ми досліджуємо нелінійні керовані системи, афінні за керуванням. У *підрозділі 5.1* ми застосовуємо результати розділу 3 і описуємо перетворення

[15] Ідея лем 4.7 і 4.8 і пов'язаної з ними теореми 4.7 була запропонована І. Зеленко.

ряду нелінійних степеневих моментів – виділення головної частини, що відповідає за однорідну апроксимацію ряду нелінійних степеневих моментів. Як і для лінійних за керуванням систем, запропоноване безкоординатне алгебраїчне означення однорідної апроксимації і описаний метод її побудови.

Як наслідок означень розділу 3, отримуємо такі означення.

Означення 5.1. *Ми називаємо*

$$\mathcal{L}_{a,b} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}^k, \text{ де } \mathcal{P}^k = \{\ell \in \mathcal{L}^k : v(\ell) \in v(\mathcal{L}^1 + \cdots + \mathcal{L}^{k-1})\},\ k \geq 1,$$

ядерною підалгеброю Лі, що відповідає системі (9).

На відміну від відображення c в алгебрі $\mathcal{F}$, відображення v породжує в алгебрі $\mathcal{A}$ не лівий, а правий ідеал; це треба врахувати при застосуванні результатів розділу 3 до алгебри $\mathcal{A}$.

Означення 5.2. *Підпростір*

$$\mathcal{J}_{a,b} = \operatorname{Lin}\{\mathcal{L}_{a,b}\mathcal{A}^e\} = \operatorname{Lin}\{\ell y : y \in \mathcal{A}^e,\ \ell \in \mathcal{L}_{a,b}\}$$

називається правим ідеалом, що відповідає системі (9).

За наслідком 3.3, $\mathcal{J}_{a,b} \cap \mathcal{L} = \mathcal{L}_{a,b}$. За лемами 3.4 і 3.5, $\mathcal{L}_{a,b}$ є градуйованою підалгеброю Лі ковимірності n. За наслідком 3.6 ядерна підалгебра Лі і правий ідеал інваріантні відносно невироджених замін змінних у системі.

Теорема 5.1. *Для кожної дійсно-аналітичної повністю неголономної системи вигляду* (9) *існує така невироджена поліноміальна заміна змінних $y = Q(x)$, що відображення до початку траєкторії для системи в нових координатах*

$$\dot{y} = \overline{a}(t,y) + \overline{b}(t,y)u \tag{33}$$

зображається як ряд вигляду

$$\left(S_{\overline{a},\overline{b}}\right)_i = \left(Q(S_{a,b})\right)_i = d_i + \rho_i, \quad \text{де} \quad \rho_i \in \sum_{j=w_i+1}^{\infty} \mathcal{A}^j,\ \ i = 1, \dots, n,$$

а $w_i = \operatorname{ord}(\ell_i) = \operatorname{ord}(d_i),\ i = 1, \dots, n$. Тут $d_1, \dots, d_n$ – елементи спряженого базису, однорідні елементи $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathcal{L}$ задовольняють умови

$$\mathcal{L} = \operatorname{Lin}\{\ell_1, \dots, \ell_n\} + \mathcal{L}_{a,b}, \quad \operatorname{ord}(\ell_i) \leq \operatorname{ord}(\ell_j) \ \text{ при } \ 1 \leq i < j \leq n, \tag{34}$$

а $\{\ell_i\}_{i=n+1}^{\infty}$ є однорідним базисом $\mathcal{L}_{a,b}$.

Оскільки ряд в нових змінних має вигляд

$$\left(S_{\overline{a},\overline{b}}\right)_i = d_i + \text{"елементи порядку} > \operatorname{ord}(d_i)\text{"},$$

множину елементів $d_1, \dots, d_n$ можна розглядати як *головну частину ряду* для відображення $S_{\overline{a},\overline{b}}$. З теореми 3.4 отримуємо іншу форму головної частини ряду.

Теорема 5.2. *Для кожної дійсно-аналітичної повністю неголономної системи вигляду* (9) *існує така невироджена поліноміальна заміна змінних* $y = Q(x)$, *що відображення до початку траєкторії системи в нових координатах* (33) *зображається як ряд вигляду*

$$\left(S_{\overline{a},\overline{b}}\right)_i = \left(Q(S_{a,b})\right)_i = \tilde{\ell}_i + \rho_i, \quad \text{де} \quad \rho_i \in \sum_{j=w_i+1}^{\infty} \mathcal{A}^j, \ i = 1, \dots, n,$$

а $w_i = \mathrm{ord}(\ell_i)$, $i = 1, \dots, n$. *Тут однорідні елементи* $\ell_i \in \mathcal{L}$ *задовольняють умови* (34), *а* $\tilde{\ell}_i$ *позначає ортопроекцію* ℓ_i *на підпростір* $\mathcal{J}_{a,b}^{\perp}$.

З теореми 3.3 отримуємо повний опис апроксимуючих замін змінних $y = Q(x)$. У пункті 5.1.2 наводиться метод побудови апроксимуючої системи.

Аналогічно наслідкам 4.1 і 4.2 отримуємо такі наслідки.

Наслідок 5.1. *Система* (20) *є однорідною апроксимацією системи* (9) *у сенсі означення 2.14 тоді і тільки тоді, коли її ряд має вигляд* $\left(S_{\hat{a},\hat{b}}\right)_i = P_i(d_1, \dots, d_n)$, $i = 1, \dots, n$, *де* $P = (P_1, \dots, P_n)^{\mathrm{T}}$ – *поліноміальна вектор-функція з невиродженою лінійною частиною і* $P_i(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{A}^{w_i}$ *(де* $w_i = \mathrm{ord}(d_i)$*).*

Наслідок 5.2. *Система* (20) *є однорідною апроксимацією системи* (9) *у сенсі означення 2.14 тоді і тільки тоді, коли її ряд має вигляд* $\left(S_{\hat{a},\hat{b}}\right)_i = P_i\left(\tilde{\ell}_1, \dots, \tilde{\ell}_n\right)$, $i = 1, \dots, n$, *де* $P = (P_1, \dots, P_n)^{\mathrm{T}}$ – *поліноміальна вектор-функція з невиродженою лінійною частиною і* $P_i(\tilde{\ell}_1, \dots, \tilde{\ell}_n) \in \mathcal{A}^{w_i}$ *(де* $w_i = \mathrm{ord}(\ell_i)$*).*

Щодо класифікації однорідних апроксимацій, отримуємо такі наслідки.

Наслідок 5.3. *Дві повністю неголономні системи вигляду* (9) *мають одну й ту саму однорідну апроксимацію тоді і тільки тоді, коли їх ядерні підалгебри Лі збігаються.*

Наслідок 5.4. *Множина ядерних підалгебр Лі повністю неголономних систем вигляду* (9) *знаходиться у взаємно однозначній відповідності з множиною всіх градуйованих підалгебр Лі* $\mathcal{L}$ *ковимірності* n.

Нарешті, вкажемо безкоординатне означення однорідної апроксимації, аналогічне означенню 4.3.

Означення 5.3. *Розглянемо повністю неголономну систему* (9). *Нехай система* (20) *є повністю неголономною; нехай* $v_{\hat{a},\hat{b}} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ *позначає лінійне відображення, що відповідає системі* (20). *Система* (20) *називається однорідною апроксимацією для* (9), *якщо*

$$\text{(а) } v_{\hat{a},\hat{b}}\left(\mathcal{L}_{\hat{a},\hat{b}}\right) = 0, \qquad \text{(б) } \mathcal{L}_{a,b} = \mathcal{L}_{\hat{a},\hat{b}}.$$

Умови (а) і (б) означення 5.3 можна замінити еквівалентними умовами:

$$\text{(а') } v_{\hat{a},\hat{b}}\left(\mathcal{J}_{\hat{a},\hat{b}}\right) = 0, \qquad \text{(б') } \mathcal{J}_{a,b} = \mathcal{J}_{\hat{a},\hat{b}}.$$

Зазначимо, що з умови (б) означення 5.3 випливає, що множина досяжності апроксимуючої системи $S_{\hat{a},\hat{b}}(\theta, B^{\theta})$ апроксимує множину досяжності вихідної системи після заміни змінних $Q(S_{a,b}(\theta,B^\theta))$:

$$\operatorname{dist}\left(D_\theta^{-1}\left(Q\left(S_{a,b}(\theta,B^\theta)\right)\right),D_\theta^{-1}\left(S_{\hat a,\hat b}(\theta,B^\theta)\right)\right)\to 0\quad \text{при } \theta\to 0,$$

де dist – відстань Хаусдорфа між множинами.

У пункті 5.1.3 обговорюється узагальнення отриманих результатів на системи з багатовимірним керуванням, а також на інші обмеження на керування.

У *підрозділі 5.2* ми досліджуємо задачу швидкодії для систем, афінних за керуванням, і з'ясовуємо зв'язок між однорідною апроксимацією і апроксимацією у сенсі швидкодії.

Повернемось до задачі потрапляння з точки $x(0)=x^0=s$ до початку координат (10) з обмеженням на керування вигляду $|u(t)|\le 1,\ t\in[0,\theta]$. При фіксованому $\theta>0$ така задача еквівалентна наступній задачі: знайти керування, яке задовольняє вказане обмеження і рівності

$$s=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k+k=m\\ k\ge 1,\ m_i\ge 0}} v_{m_1\dots m_k}\,\xi_{m_1\dots m_k}(\theta,u). \tag{35}$$

Рівності (35) можна інтерпретувати як *моментні рівності*, а сформульовану задачу – як *нелінійну проблему моментів Маркова*. Тоді задачі оптимальної швидкодії відповідає *нелінійна тіп-проблема моментів Маркова*.

Розглянемо системи (9) і (20) і дві відповідні задачі швидкодії

$$\begin{gathered}\dot x=a(t,x)+b(t,x)u(t),\ \ a(t,0)\equiv 0,\ \ x(0)=s,\ \ x(\theta)=0\\ |u(t)|\le 1,\ t\in[0,\theta],\quad \theta\to\min,\end{gathered}\tag{36}$$

$$\begin{gathered}\dot x=\hat a(t,x)+\hat b(t,x)u(t),\ \ \hat a(t,0)\equiv 0,\ \ x(0)=s,\ \ x(\theta)=0\\ |u(t)|\le 1,\ t\in[0,\theta],\quad \theta\to\min,\end{gathered}\tag{37}$$

Як випливає з теореми Філіпова, для будь-якої точки s, з якої можна потрапити до нуля в силу системи (9) або (20), існує й оптимальне керування, тобто розв'язна задача (36) або (37) відповідно.

Означення 5.4. *Припустимо, що* Ω – *така відкрита область,* $\Omega\subset\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $0\in\overline{\Omega}$, *що для будь-якого* $s\in\Omega$ *існує єдиний розв'язок* $(\hat\theta_s^*,\hat u_s^*)$ *задачі* (37). *Нехай* $U_s(\theta)$ *– множина керувань, які переводять точку* s *до нуля за час* θ *в силу системи* (9) *і задовольняють обмеження* $|u(t)|\le 1, t\in[0,\theta]$; *нехай* θ_s^* *– оптимальний час в задачі* (36), *тобто* $\theta_s^*=\min\{\theta : U_s(\theta)\ne\emptyset\}$.

Ми кажемо, що задача швидкодії (37) *апроксимує задачу швидкодії* (36) *(в області* Ω*), якщо існує невироджене дійсно-аналітичне відображення* Q *околу нуля* $\mathbb{R}^n$, $Q(0)=0$, *і множина пар* $(\tilde\theta_s,\tilde u_s)$, $s\in\Omega$, *таких, що* $\tilde u_s\in U_{Q(s)}(\tilde\theta_s)$ *і*

$$\frac{\theta_{Q(s)}^*}{\hat\theta_s^*}\to 1,\quad \frac{\tilde\theta_s}{\hat\theta_s^*}\to 1\quad \textit{при}\quad s\to 0,\ \ s\in\Omega, \tag{38}$$

$$\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}|\hat{u}_s^*(t)-\tilde{u}_s(t)|dt \to 0 \quad \textit{при} \quad s \to 0, \ s \in \Omega, \tag{39}$$

де $\theta = \min\{\tilde{\theta}_s, \hat{\theta}_s^*\}$.

За таких умов ми кажемо, що система (20) *наближає систему* (9) *у сенсі швидкодії (в області* Ω*).*

Іншими словами, після певної заміни змінних в системі (9) при малих $s \in \Omega$ розв'язок задачі (36) існує, причому $\theta_{Q(s)}^*$ і $\hat{\theta}_s^*$ асимптотично еквівалентні при $s \to 0, \ s \in \Omega$, а функція $\hat{u}_s^*(t)$ є близькою до «майже оптимального» керування $\tilde{u}_s(t)$. Замість задач швидкодії в означенні 5.4 можна розглядати відповідні min-проблеми моментів.

Наступна теорема є одним з основних результатів дисертації. Вона описує умови, за яких однорідна апроксимація наближає вихідну систему в сенсі швидкодії.

Теорема 5.3. *Припустимо, що система* (9) *є повністю неголономною, а система* (20) *є її однорідною апроксимацією.*

Припустимо, що $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *є відкритою областю,* $0 \in \overline{\Omega}$, *в якій задовольняються такі умови:*

(i) *задача швидкодії* (37) *має єдиний розв'язок* $(\hat{\theta}_s^*, \hat{u}_s^*)$ *для всіх* $s \in \Omega$;

(ii) *функція* $\hat{\theta}_s^*$ *є неперервною в усіх точках* $s \in \Omega$;

(iii) *для множини* $K = \{\hat{u}_s^*\left(t\hat{\theta}_s^*\right), t \in [0,1] : s \in \Omega\} \subset L_2[0,1]$ *зі слабкої збіжності послідовності елементів* K *випливає її сильна збіжність.*

Тоді існує сімейство вкладених областей $\Omega(\delta)$, $\delta > 0$, *таких, що* $\Omega(\delta_1) \subset \Omega(\delta_2)$ *при* $\delta_1 > \delta_2 > 0$ *і* $\Omega = \bigcup_{\delta>0}\Omega(\delta)$, *у кожній з яких задача швидкодії* (37) *апроксимує задачу швидкодії* (36).

Наслідок 5.5. *Нехай на додаток до умов теореми 5.3 для множини* $K_1 = \{u_{Q(s)}^*\left(t\theta_{Q(s)}^*\right), \ t \in [0,1] : s \in \Omega\} \subset L_2[0,1]$ *зі слабкої збіжності послідовності елементів* K_1 *випливає її сильна збіжність. Тоді виконуються співвідношення* (38), (39) *означення 5.4, де* $\tilde{u}_s(t) = u_{Q(s)}^*(t)$, $\tilde{\theta}_s = \theta_{Q(s)}^*$.

Іншими словами, замість властивості (39) маємо:

$$\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\left|\hat{u}_s^*(t)-u_{Q(s)}^*(t)\right|dt \to 0 \quad \text{при} \quad s \to 0, \ s \in \Omega, \tag{40}$$

де $\theta = \min\{\theta_{Q(s)}^*, \hat{\theta}_s^*\}$ (для $\Omega = \Omega(\delta)$).

У пункті 5.2.2 досліджується зворотна задача: чи випливає з апроксимації у сенсі швидкодії еквівалентність у сенсі однорідної апроксимації. Наведемо результат для автономних систем.

Теорема 5.4. *Припустимо, що задача швидкодії для однорідної системи*

$$\dot{x} = \hat{a}(x) + \hat{b}(x)u, \quad \hat{a}(0) = 0, \tag{41}$$

апроксимує задачу швидкодії для системи

$$\dot{x} = a(x) + b(x)u, \quad a(0) = 0, \tag{42}$$

в кожній відкритій області $\Omega_\gamma, \gamma \in \Gamma,$ *яка задовольняє умову* $\widehat{D}_\varepsilon(\Omega_\gamma) = \Omega_\gamma$ *для всіх* $\varepsilon > 0,$ *з одним і тим самим відображенням* $Q(x)$ *(де* Γ *може бути скінченною або нескінченною непорожньою множиною індексів,* $\widehat{D}_\varepsilon(y) = (\varepsilon^{\widehat{w}_1} y_1, \dots, \varepsilon^{\widehat{w}_n} y_n)^{\mathrm{T}}$ *). Припустимо, що для всіх* $s \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \Omega_\gamma$ *задача швидкодії для системи* (41) *має єдиний розв'язок* $(\hat{\theta}_s^*, \hat{u}_s^*)$, *причому* $\hat{u}_s^*(t)$ *неперервна справа при* $t = 0,$ *тобто існує* $\hat{u}_s^*(0) = \lim_{t\to+0} \hat{u}_s^*(t)$. *Припустимо, що існує непорожня відкрита підмножина* $\Omega' \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \Omega_\gamma$, *що задовольняє наступну умову: якщо* $L = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1, \dots, x_{n-1}$ *фіксовані,* $x_n \in \mathbb{R}\}$ *і* $M = \Omega' \cap L \neq \emptyset$, *то функція* $f(x) = \hat{u}_x^*(0), \ x \in M,$ *не є сталою.*

Тоді система (41) *є однорідною апроксимацією системи* (42).

У *підрозділі 5.3* вивчається зв'язок між алгеброю ітерованих інтегралів і алгеброю нелінійних степеневих моментів і отримуються умови реалізовності ряду нелінійних степеневих моментів як ряду, що відповідає керованій системі (як наслідок відомих умов реалізовності для рядів ітерованих інтегралів[16]).

Розглянемо такі задачі реалізовності. Нехай задана множина

$$\{v_{m_1\dots m_k} \in \mathbb{R}^n : m_1, \dots, m_k \geq 0, \ k \geq 1\}, \tag{43}$$

яка визначає відображення $v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ за формулою $v(\xi_{m_1\dots m_k}) = v_{m_1\dots m_k}$. Будемо вважати, що відображення v задовольняє умову (16).

Автономна задача: для заданої множини (43), яка задовольняє умову (16), знайти (якщо існують) дійсно-аналітичні в околі нуля векторні поля $a(x), b(x)$ $(a(0) = 0)$, що задовольняють рівності (14).

Неавтономна задача: для заданої множини (43), яка задовольняє умову (16), знайти (якщо існують) дійсно-аналітичні в околі нуля векторні поля $a(t, x), b(t, x)$ $(a(t, 0) \equiv 0)$, що задовольняють рівності (14).

Теорема 5.7. *Нехай множина* (43) *задовольняє умову* (16). *Неавтономна задача розв'язна тоді і тільки тоді, коли*

(a) *існують додатні константи* C_1 *і* C_2, *для яких*

$$\left\| v_{m_1\dots m_k} \right\| \leq k! \, C_1 C_2^{m_1+\dots+m_k+k} \tag{44}$$

для всіх $k \geq 1$ *і всіх* $m_1, \dots, m_k \geq 0$;

[16] Fliess M. Realizations of nonlinear systems and abstract transitive Lie algebras / M. Fliess // Bull. Amer. Math. Soc. – 1980. – V. 2(3). – P. 444–446; Jakubczyk B. Local realizations of nonlinear causal operators / B. Jakubczyk // SIAM J. Control Optim. – 1986. – V. 24. – P. 230–242.

(b) *для будь-якого* $\ell \in \mathcal{L}$, *що задовольняє рівність* $v(\ell) = 0$, *виконується умова* $v(\ell y) = 0$ *для всіх* $y \in \mathcal{A}$.

Теорема 5.8. *Нехай множина* (43) *задовольняє умову* (16). *Автономна задача розв'язна тоді і тільки тоді, коли*

(a) *існують додатні константи* C_1 *і* C_2, *для яких виконується умова* (44) *для всіх* $k \geq 1$ *і всіх* $m_1, \dots, m_k \geq 0$;

(b) *для будь-якого* $\ell \in \mathcal{L}$, *що задовольняє рівність* $v(\ell) = 0$, *виконуються умови* $v\big(\varphi(\ell)\big) = 0$ *і* $v(\ell y) = 0$ *для всіх* $y \in \mathcal{A}$, *де* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ – *диференціювання алгебри* $\mathcal{A}$, *що на літерах визначається як* $\varphi(\xi_m) = (m+1)\xi_{m+1}$, $m \geq 0$.

Векторні поля, які розв'язують автономні задачі, є єдиними, а неавтономні – ні. Методи побудови таких полів наведено в пункті 5.3.3.

У *розділі 6* розглянута задача класифікації векторів зросту нелінійних систем, лінійних за керуванням.

У *підрозділі 6.1* отриманий критерій реалізовності вектора як вектора зросту деякої повністю неголономної системи вигляду (1); дослідження спирається на отриманий опис ядерної підалгебри Лі як вільної алгебри Лі.

Розглянемо наступне питання: для заданої неспадної послідовності цілих додатних чисел

$$v = \big(v_1, \dots, v_p\big), \ \ 1 \leq v_1 \leq \dots \leq v_{p-1} < v_p = n, \tag{45}$$

визначити, чи є вона вектором зросту деякої системи, лінійної за керуванням. Виявляється, що ця задача тісно пов'язана з властивостями ядерних підалгебр Лі. У підрозділі 6.1.2 отриманий опис ядерної підалгебри Лі як вільної алгебри Лі, тобто отриманий опис вільного породжувального базису $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ і, як наслідок, отримані умови реалізовності послідовності (45) як вектора зросту. У пункті 6.1.4 отримані умови реалізовності в термінах твірної функції.

Наслідок 6.3. *Послідовність* (45) *реалізовна як вектор зросту тоді і тільки тоді, коли всі коефіцієнти ряду Тейлора функції*

$$f_n(z) = \frac{mz - 1}{\prod_{k=1}^{p}(1 - z^k)^{v_k - v_{k-1}}} + 1$$

в точці $z = 0$ *невід'ємні (тут* $v_0 = 0$*). Більш того, ця умова виконується тоді і тільки тоді, коли тільки коефіцієнти* $z^1, \dots, z^p$ *невід'ємні.*

У пункті 6.1.5 отриманий опис усіх ядерних підалгебр Лі з заданим вектором зросту.

Теорема 6.3. *Множина всіх ядерних підалгебр Лі, які відповідають системам вигляду* (1) *з фіксованим вектором зросту* (45), *знаходиться у взаємно однозначній відповідності з* $\sum_{k=1}^{p} d_k(m_k - d_k)$*-вимірним многовидом* $\mathrm{Gr}_{m_1-d_1}^{m_1} \times \dots \times \mathrm{Gr}_{m_p-d_p}^{m_p}$, *де* $d_k = v_k - v_{k-1}$, $m_k = s_n(k) + d_k$, *а* $s_n(k)$ – *коефіцієнт* z^k *у ряді Тейлора функції*

$f_n(z)$ *в точці* $z=0$, $k=1,\dots,p$ *(де* Gr_i^j *– множина всіх* i *-вимірних лінійних підпросторів* j*-вимірного лінійного простору.)*

У *підрозділі 6.2* розглядається еквівалентність систем з точністю до заміни змінних і (невиродженої) заміни керування. Введені поняття A-нормального і A-простого вектора зросту. Для систем з двовимірним керуванням отримано повний опис A-нормальних і A-простих векторів зросту.

Означення 6.3. *Ми кажемо, що дві системи вигляду* (1) *є A-еквівалентними, якщо їх ядерні підалгебри Лі збігаються.*

Таким чином, дві системи є A-еквівалентними, якщо вони мають одну й ту саму однорідну апроксимацію.

У багатьох задачах теорії керування природно заміни керування у вигляді зворотного зв'язку. Ми розглядаємо заміни керування вигляду

$$u_i=\sum_{j=1}^{m}g_{ij}(x)\hat{u}_j\,,\quad i=1,\dots,m,\quad \det\{g_{ij}(0)\}\neq 0, \tag{46}$$

де $g_{ij}(x)$ – дійсно-аналітичні функції в околі нуля. Зауважимо, що вектор зросту інваріантний відносно такої заміни керування.

Означення 6.4. *Ми кажемо, що дві системи вигляду* (1) *є A-еквівалентними за зворотним зв'язком, якщо вони стають A-еквівалентними після деякої заміни керування вигляду* (46) *в одній з цих систем.*

Очевидно, що для розглядання еквівалентності *однорідних апроксимацій* достатньо замість (46) розглядати заміни керування вигляду

$$u_i=\sum_{j=1}^{m}g_{ij}\hat{u}_j\,,\quad i=1,\dots,m,\quad \det\{g_{ij}\}\neq 0.$$

Отже, загальна лінійна група GL_m діє на множині ядерних підалгебр Лі, і дві системи є A-еквівалентними за зворотним зв'язком тоді і тільки тоді, коли їх ядерні підалгебри Лі належать одній і тій самій орбіті.

Означення 6.5. *Ми кажемо, що вектор зросту* v *є A-нормальним, якщо множина ядерних підалгебр Лі всіх систем з цим вектором зросту покривається скінченною кількістю орбіт.*

Іншими словами, це означає, що v є A-нормальним, якщо існує така скінченна множина Σ систем вигляду (1), що будь-яка система вигляду (1) з цим вектором зросту є A-еквівалентною за зворотним зв'язком деякій системі з Σ. Ми називаємо системи з Σ *A-нормальними формами*.

Наступний крок – розглянути малі збурення систем вигляду (1). Ми кажемо, що множина повністю неголономних систем з векторними полями $X_1',\dots,X_m'$, для яких $\|X_i(0)-X_i'(0)\|\leq\varepsilon$, $i=1,\dots,m$, утворює *окіл* (1).

Означення 6.6. *Ми кажемо, що вектор зросту v є A-простим, якщо для будь-якої системи з цим вектором зросту існує такий окіл, що множина ядерних підалгебр Лі всіх систем з об'єднання всіх цих околів покривається скінченною кількістю орбіт.*

Тобто v є A-простим, якщо існує така скінченна множина Σ' систем вигляду (1), що для будь-якої системи вигляду (1) з цим вектором зросту будь-яке її мале збурення є A-еквівалентним за зворотним зв'язком деякій системі з Σ'.

Зокрема, як добре відомо, вільні вектори зросту, для яких $v_k - v_{k-1} = \dim(\mathcal{L}^k)$, є A-простими. Зазначимо, що необхідною умовою A-нормальності є умова $\sum_{k=1}^{p} d_k(m_k - d_k) \leq m - 1$. У пункті 6.2.2 отриманий опис усіх A-нормальних і A-простих векторів зросту для систем з двома керуваннями, тобто при $m = 2$, вказаний метод побудови A-нормальних форм.

У *розділі 7* ми розглядаємо задачу відображення систем класу C^1 за допомогою заміни змінних і заміни керування на лінійні системи і системи спеціального вигляду. Задача відображення на лінійні системи добре досліджена для нескінченно-диференційовних або дійсно-аналітичних систем[17]. Дослідження задач відображуваності в класі C^1 розпочато В. І. Коробовим[18].

Означення 7.1. *Система*

$$\dot{x} = f(x,u), \;\; x \in Q \subset \mathbb{R}^n, \, u \subset \mathbb{R}^r, \;\; f(x,u) \in C^1(Q \times \mathbb{R}^r), \tag{47}$$

де $Q \subset \mathbb{R}^n$ – фіксована область, локально лінеаризовна за зворотним зв'язком в області Q, якщо існує заміна змінних $z = F(x) \in C^2(Q)$ (для якої $\det F_x(x) \neq 0$, *$x \in Q$) і заміна керування вигляду $v = g(x,u) \in C^1(Q \times \mathbb{R}^r)$ (для якої $g(x, \mathbb{R}^r) = \mathbb{R}^r$,* $\det g_u(x,u) \neq 0, x \in Q, u \in \mathbb{R}^r$*), які зводять систему* (47) *до лінійної системи*

$$\dot{z} = Az + Bv, \;\; \operatorname{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n, \;\; \operatorname{rank}(B) = r.$$

У пункті 7.1.1 досліджене питання про єдиність набору індексів керованості у випадку відображення лійної системи на лінійну за допомогою нелінійної заміни змінних і керування і отриманий критерій лінеаризовності за зворотним зв’язком.

У пункті 7.1.2 розглянуто задачу відображуваності нелінійних систем (47) на (нелінійні) системи з прямим зв'язком вигляду

$$\dot{y}_k = \psi_k(y_1, \dots, y_{k-1}, u), \;\; k = 1, \dots, n \tag{48}$$

(з одновимірним керуванням). Важливою властивістю таких систем є можливість за заданим керуванням $u = u(t)$ знайти траєкторії, послідовно виконуючи інтегрування. Узагальненням цього класу є «нестрогі» системи з прямим зв'язком вигляду

$$\dot{y}_k = \psi_k(y_1, \dots, y_k, u), \;\; k = 1, \dots, n. \tag{49}$$

[17] Krener A. On the equivalence of control systems and the linearization of nonlinear systems /A. Krener // SIAM J. Control. – 1973. – V. 11. – P. 670–676; Jakubczyk B. On linearization of control systems / B. Jakubczyk, W. Respondek // Bull. Acad. Sci. Polonaise Ser. Sci. Math.–1980. – V. 28. – P. 517–522 та ін.

[18] Коробов В. И. Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем / В. И. Коробов // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 4(4). – P. 614–619.

Для таких систем за заданим керуванням $u = u(t)$ можна знайти траєкторію, послідовно розв'язуючи диференціальні рівняння: якщо $y_1(t), \dots, y_{k-1}(t)$ вже знайдені, то для знаходження $y_k(t)$ треба знайти розв'язок *одного* диференціального рівняння $\dot{y}_k = \psi_k(y_1(t), \dots, y_{k-1}(t), y_k, u(t))$ відносно невідомої функції $y_k = y_k(t)$. У пункті 7.1.2 отримані умови локальної відображуваності (існування заміни змінних класу C^2) і локальної відображуваності з заміною керування (існування заміни змінних класу C^2 і заміни керування класу C^1) в області Q на системи (48) і (49) для нелінійних керованих систем (47) класу C^1.

Нарешті, *у підрозділі 7.2* розглядається задача швидкодії для одного класу систем спеціального вигляду

$$\dot{x}_1 = u, \;\; \dot{x}_i = P_i(x_1), \quad i = 2, \dots, n, \;\; P_2(0) = \dots = P_n(0) = 0, \qquad (50)$$

де $P_2(z), \dots, P_n(z)$ – дійсно-аналітичні функції в околі нуля в $\mathbb{R}$.

Теорема 7.6. *Оптимальне керування* $\hat{u}(t), t \in [0, \hat{\theta}]$ *у задачі швидкодії для системи* (50) *є кусково-сталим, набуває значень* $-1, 0, +1$ *і має скінченну кількість перемикань.*

Більш того, оптимальне керування $\hat{u}(t)$ і перша компонента оптимальної траєкторії $\hat{x}_1(t)$ пов'язані таким чином: керування має перемикання в такі моменти часу t_i, для яких $\hat{x}_1(t_i)$ є коренем функції $P(z) = -\psi_0 - \sum_{i=2}^{n} \psi_i P_i(z)$; оптимальне керування перемикається на значення 0 тільки в такі моменти часу t_i, для яких $\hat{x}_1(t_i)$ є кратним коренем функції $P(z)$ (тоді $\hat{x}_1(t)$ є сталою на інтервалі (t_i, t_{i+1})).

Однорідні системи (50), які є однорідними апроксимаціями, мають вигляд

$$\dot{x}_1 = u, \;\; \dot{x}_i = x_1^{r_i}, \quad i = 2, \dots, n, \qquad (51)$$

де $1 \le r_2 < \dots < r_n$ – цілі числа. Система (9) має однорідну апроксимацію (51) тоді і тільки тоді, коли

$$\mathrm{Lin}\{b(0,0)\} + \mathrm{Lin}\left\{\mathrm{ad}_{R_b}^{k} R_a E(x)|_{t=0,x=0}\right\}_{k=1}^{\infty} = \mathbb{R}^n,$$

$$\left[\mathrm{ad}_{R_a}^{m_1} R_b, \cdots \left[\mathrm{ad}_{R_a}^{m_{j-1}} R_b, \mathrm{ad}_{R_a}^{m_j} R_b\right]\right] E(x)|_{t=0,x=0} \in$$
$$\in \mathrm{Lin}\{b(0,0)\} + \mathrm{Lin}\left\{\mathrm{ad}_{R_b}^{k} R_a E(x)|_{t=0,x=0}\right\}_{k=1}^{m-2},$$

де $m_1 + \dots + m_j + j = m$, для будь-яких $j \ge 2$, $m_1 + \dots + m_j \ge 2$. Вказані умови нагадують відповідні умови для лінійних систем[19], тому системи (50) названі «спряженими до лінійних».

У пункті 7.2.2 розглянута конкретна нелінійна система вигляду (50)

$$\dot{x}_1 = u, \;\; \dot{x}_2 = x_1, \;\; \dot{x}_3 = x_1^3,$$

для якої отриманий повний розв'язок задачі швидкодії.

[19] Sklyar G. M. Moment approach to nonlinear time optimality / G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich // SIAM J. on Control and Optimiz. – 2000. – V. 38. – P. 1707–1728.

ВИСНОВКИ

У дисертації запропоновано і розвинуто методи аналізу нелінійних керованих систем, основані на зображенні системи у вигляді ряду елементів вільної алгебри і дослідженні структур у цій вільній алгебрі, які породжує система. Детальніше, розглянуто дві задачі: задачу Коші для нелінійних керованих систем, лінійних за керуванням, і задачу потрапляння в точку спокою для нелінійних керованих систем, афінних за керуванням. Для першої з цих задач розглянуте розвинення відображення в кінець траєкторії в ряд ітерованих інтегралів, а для другої – розвинення відображення до початку траєкторії в ряд нелінійних степеневих моментів (в обох випадках розглядаються дійсно-аналітичні системи). Коефіцієнти рядів є сталими векторами, які містять у собі всю інформацію щодо конкретної системи, а функціонали – ітеровані інтеграли або нелінійні степеневі моменти – не залежать від системи і утворюють вільну градуйовану асоціативну алгебру (ми позначаємо її $\mathcal{F}$ у випадку ітерованих інтегралів і $\mathcal{A}$ у випадку нелінійних степеневих моментів).

Одна з основних ідей напрямку, що розвивається, полягає в тому, щоб розглядати ці ряди замість систем. Зокрема, заміни змінних у системі зводяться до перетворення рядів, які відповідають операції тасуючого добутку у відповідній алгебрі, а градуювання визначається обмеженнями на керування. Коефіцієнти ряду породжують лінійне відображення з алгебри до $\mathbb{R}^n$, яке, у свою чергу, індукує певні структури в алгебрі. Зокрема, елементам вільної алгебри Лі $\mathcal{L}$ (в $\mathcal{F}$ або $\mathcal{A}$) відповідають значення дужок Лі векторних полів системи в початковій або кінцевій точці.

У розділі 3 розглядається загальна алгебраїчна постановка задачі. А саме, розглядається абстрактна вільна асоціативна градуйована алгебра $\mathfrak{A}$, яка породжується скінченною або зчисленною множиною літер, і вивчаються ряди зі сталими векторними коефіцієнтами елементів з $\mathfrak{A}$, які задовольняють певні умови, що відповідають умовам реалізовності цих рядів як повністю неголономних керованих систем (без урахування вимоги дійсної аналітичності). Кожний такий ряд однозначно визначає лінійне відображення $g : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^n$. Центральними об'єктами дослідження є введена у дисертації ядерна підалгебра Лі $\mathfrak{L}_g$ і односторонній ідеал $\mathfrak{J}_g$, які породжуються відображенням g. Ядерна підалгебра Лі визначається лінійними залежностями між образами $g(\ell)$ елементів $\ell \in \mathfrak{L}$ вільної алгебри Лі, яка породжується тими самими літерами, що й $\mathfrak{A}$. Показано, що ядерні підалгебри Лі – це (всі) градуйовані підалгебри Лі в $\mathfrak{L}$ ковимірності n. Для вказаної абстрактної постановки сформульовано і розв'язано задачу однорідної апроксимації ряду; зокрема, показано, що два ряди мають одну й ту саму однорідну апроксимацію тоді і тільки тоді, коли їх ядерні підалгебри Лі збігаються.

У розділах 4 і 5 ці результати застосовуються до нелінійних керованих систем, лінійних і афінних за керуванням. Введено поняття ядерної підалгебри Лі і одностороннього ідеалу, які породжуються відповідною системою; вони визначаються лінійними залежностями дужок Лі векторних полів у початковій або кінцевій точці і є координатно незалежними. Показано, що саме ядерні підалгебри

Лі відповідають за однорідну апроксимацію: дві системи мають одну й ту саму однорідну апроксимацію тоді і тільки тоді, коли їх ядерні підалгебри Лі збігаються. Таким чином, у роботі дане безкоординатне означення і отримана повна класифікація однорідних апроксимацій. Крім того, запропоновані методи побудови однорідних апроксимуючих систем і апроксимуючих замін змінних.

Далі в розділах 4 і 5 досліджено зв'язок однорідної апроксимації і апроксимації у сенсі швидкодії для лінійних і афінних за керуванням систем. А саме, наведено умови, за яких однорідна апроксимація локально еквівалентна вихідний системі у сенсі швидкодії. Це дозволяє отримувати оптимальні або майже оптимальні керування для нелінійної системи, розв'язуючи значно простішу задачу швидкодії для однорідної апроксимації. Для систем, афінних на керуванням, розглянуто і зворотний зв'язок: наведено умови, за яких системи, що є локально еквівалентними в сенсі швидкодії, мають одну й ту саму однорідну апроксимацію.

Заміни керування в системі, на відміну від заміни координат, змінюють ядерну підалгебру Лі, але не змінюють вектор зросту системи. У розділі 6 для систем, лінійних за керуванням, досліджено класифікацію векторів зросту: запропоновані означення A-нормальності і A-простоти і отриманий опис A-нормальних і A-простих векторів зросту для систем з двома керуваннями.

У розділі 7 розглянуто задачі відображуваності для керованих систем у класі C^1. А саме, для нелінійних систем із класу C^1 з багатовимірним керуванням отримано критерій лінеаризовності за зворотним зв'язком, а для систем з одновимірним керуванням отримано критерії відображуваності на системи спеціального вигляду – системи з прямим зв'язком. Також у розділі 7 для систем одного класу – спряжених до лінійних – отримано опис усіх можливих оптимальних за швидкодією керувань. Однорідні системи з розглянутого класу є однорідними апроксимаціями, отже, вони можуть бути використані для побудови (майже) оптимальних керувань для всіх систем з такою однорідною апроксимацією.

Загалом, у дисертації запропонований і систематично розвинутий підхід, що залучає метод рядів і вільних алгебр до аналізу таких задач нелінійної теорії керування як задача швидкодії, опис і класифікація однорідних апроксимацій, реалізовність і відновлення систем, нормалізація систем тощо. Усі основні результати наведено з повними доведеннями. Отримані результати мають теоретичний характер. Запропоновані методи можуть бути застосовані для дослідження і розв'язання різноманітних задач оптимізації і оптимального керування.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ
ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] Скляр Г. М. Про класифікацію множин керованості нелінійних систем / Г. М. Скляр, С. Ю. Ігнатович // Доповіді НАН України, сер. «Матем., прир. та техн. науки». – 2001. – № 6. – С. 24–28.

[2] Sklyar G. M. Representations of control systems in the Fliess algebra and in the algebra of nonlinear power moments / G. M. Sklyar, S.Yu. Ignatovich // Systems and Control Letters. – 2002. – V. 47. – P. 227–235.

[3] Sklyar G. M. Approximation of time-optimal control problems via nonlinear power moment min-problems / G. M. Sklyar, S.Yu. Ignatovich // SIAM J. Control Optimization. – 2003. – V. 42. – P. 1325–1346.

[4] Игнатович С. Ю. Каноническая форма нелинейной управляемой системы и аппроксимирующие градировки / С. Ю. Игнатович, П. Ю. Бархаев // Вісник Харківського національного університету, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка». – 2003. – Т. 602. – С. 68–76.

[5] Sklyar G. M. Determining of various asymptotics of solutions of nonlinear time optimal problems via right ideals in the moment algebra (Problem 3.8) / G. M. Sklyar, S.Yu. Ignatovich // Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory. – Princeton University Press, Princeton, 2004. – P. 117–121.

[6] Скляр Г. М. Про асимптотичну класифікацію нелінійних керованих систем в околі точки спокою / Г. М. Скляр, С. Ю. Ігнатович, П. Ю. Бархаєв // Доповіді НАН України, сер. «Матем., прир. та техн. науки». – 2004. – № 12. – С. 28–34.

[7] Игнатович С. Ю. Восстановление управляемой системы, являющейся реализацией ряда нелинейных степенных моментов / С. Ю. Игнатович // Вісник Харківського національного університету, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка». – 2004. – Т. 645. – С. 41–52.

[8] Игнатович С. Ю. О связи аппроксимации нелинейных систем в смысле быстродействия и их алгебраической аппроксимации / С. Ю. Игнатович // Матем. физика, анализ, геометрия. – 2005. – Т. 12 (2). – С. 158–172.

[9] Sklyar G. M. On the extension of the Korobov's class of linearizable triangular systems by nonlinear control systems of the class C^1/ G. M. Sklyar, K. V. Sklyar, S. Yu. Ignatovich // Systems and Control Letters. – 2005. – V. 54. – P. 1097–1108.

[10] Sklyar G. M. Algebraic classification of nonlinear steering problems with constraints on control / G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich, P. Yu. Barkhaev // Advances in Mathematics Research, Nova Science Publishers, Inc, New York, 2005. – V. 6. – P. 37–96.

[11] Игнатович С. Ю. Об отображаемости нелинейных систем на feedforward системы в классе C^1/ С. Ю. Игнатович // Вісник Харківського національного університету, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка». – 2006. – Т. 749. – С. 65–79.

[12] Sklyar G. M. Description of all privileged coordinates in the homogeneous approximation problem for nonlinear control systems / G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. – 2007. – V. 344. – P. 109–114.

[13] Sklyar G. M. Development of the Markov moment problem approach in the optimal control theory / G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2007. – V. 13 (4). – P. 386–400.

[14] Sklyar G. M. Fliess series, a generalization of the Ree's theorem, and an algebraic approach to a homogeneous approximation problem / G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich // International J. Control. – 2008. – V. 81. – P. 369–378.

[15] Ignatovich S. Yu. Realizable growth vectors of affine control systems / S. Yu. Ignatovich // J. Dynamical and Control Systems. – 2009. – V. 15. – P. 557–585.

[16] Ignatovich S. Yu. Normalization of homogeneous approximations of symmetric affine control systems with two controls systems / S. Yu. Ignatovich // J. Dynamical and Control Systems. – 2011. – V. 17. – P. 1–48.

[17] Sklyar G. M. Free algebras and noncommutative power series in the analysis of nonlinear control systems: an application to approximation problems / G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.). – 2014. – V. 504. – P. 1–88.

[18] Sklyar G. M. Time-optimal control problem for a special class of control systems: optimal controls and approximation in the sense of time optimality / G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich, S. E. Shugaryov // J. Optimization Theory and Applications. – 2015. – V. 165. – P. 62–77.

[19] Sklyar K. V. Linearizability of systems of the class C^1 with multi-dimensional control / K. V. Sklyar, S. Yu. Ignatovich // Systems and Control Letters. – 2016. – V. 94. – P. 92–96.

[20] Ignatovich S. Yu. Explicit solution of the time-optimal control problem for one nonlinear three-dimensional system / S. Yu. Ignatovich // Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка». – 2016. – V. 83. – P. 21–46.

[21] Ignatovich S. Yu. Approximation of autonomous affine control systems in the sense of time optimality and algebraic approximation / S. Yu. Ignatovich // Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, сер. «Матем., прикл. матем. і механіка». – 2016. – V. 84. – P. 9–21.

[22] Sklyar G. M. A development of the moment method and nonlinear approximation of time-optimal control problem / G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich // Book of abstracts of International Akhiezer Centenary Conference. Theory of functions and Mathematical Physics, Kharkiv, Ukraine, 2001. – P. 89–90.

[23] Скляр Г. М. Развитие метода моментов в нелинейной задаче быстродействия / Г. М. Скляр, С. Ю. Игнатович, П. Ю. Бархаев // Тезисы докладов

Международной конференции «Обратные задачи и нелинейные уравнения», Харків, Україна, 2002. – С. 81–83.

[24] Sklyar G. M. Canonical form of nonlinear control system with different constraints / G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich, P. Yu. Barkhaev // Book of abstracts of the First Karazin Scientific Readings dedicated to the bicentenary of the Karazin Karkiv National University. Math. Symposium, Kharkiv, Ukraine, 2004. – P. 21–22.

[25] Sklyar G. M. Classification of nonlinear steering problems with different constraints on control / G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich, P. Yu. Barkhaev // Тезисы докладов 9-й Международной конференции «Устойчивость, управление и динамика твердого тела», Донецьк, Україна, 2005. – С. 66–67.

[26] Sklyar G. M. Development of the Markov moment problem in the optimal control / G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich // Book of abstracts of the International Conference «Modern Analysis and Applications» dedicated to the centenary of Mark Krein, Odessa, Ukraine, 2007. – P. 127–128.

[27] Sklyar G. M. Development of the momrnt approach to the time-optimal control problem for nonlinear systems / G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich // Book of Abstracts of the International conference «Differential Equations and Topology», dedicated to the Centennial Anniversary of L. S. Pontryagin, Moscow, Russia, 2008. – P. 292–93.

[28] Sklyar G. M. Series method in nonlinear time optimality / G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich // Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), Orlando, FL, USA, 2011. – P. 3836–3841.

[29] Игнатович С. Ю. Свободные алгебры в задаче однородной аппроксимации: как они возникают и как их можно использовать / С. Ю. Игнатович // Материалы Школы-конференции «Геометрическая теория управления и анализ на метрических структурах», Республіка Алтай, Росія, 2014. – С. 16–19.

[30] Ignatovich S. Yu.: Normalization of homogeneous approximations under feedbacks. / S. Yu. Ignatovich // Book of abstracts of the International Conference «Differential Equations and Control Theory» dedicated to the 75-th anniversary of professor Korobov V. I., Kharkiv, Ukraine, 2016. – P. 11.

[31] Sklyar K. V. Verification of feedback linearizability conditions for control systems of the class C^1 / K. V. Sklyar, S. Yu. Ignatovich, G. M. Sklyar // Proceedings of the 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), Valetta, Malta, 2017. – P. 163–168.

[32] Sklyar G. M. Free algebras and noncommutative power series in the analysis of nonlinear control systems / G. M. Sklyar, S. Yu Ignatovich // 2-nd International Conference «Differential Equations and Control Theory». Book of Abstracts, Świnoujście, Poland, 2017. – P. 16.

АНОТАЦІЯ

Ігнатович С. Ю. Метод рядів та вільних алгебр в аналізі нелінійних керованих систем. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Харків, 2018.

У дисертації запропоновано і розвинуто методи аналізу нелінійних керованих систем, основані на зображенні системи у вигляді ряду елементів вільної алгебри і дослідженні структур у цій вільній алгебрі, які породжує система.

Розглядаються нелінійні дійсно-аналітичні системи, лінійні або афінні за керуванням, і відповідні ряди ітерованих інтегралів або нелінійних степеневих моментів. Ітеровані інтеграли або нелінійні степеневі моменти не залежать від системи і утворюють вільну градуйовану асоціативну алгебру. Коефіцієнти ряду породжують певні структури в цій алгебрі. Центральними об'єктами дослідження є введена в дисертації ядерна підалгебра Лі і односторонній ідеал, який вона породжує. Отриманий повний опис усіх однорідних апроксимацій і привілейованих координат, запропоновані методи побудови апроксимуючих систем. Встановлений зв'язок однорідної апроксимації і апроксимації в сенсі швидкодії, який дозволяє отримати оптимальні або майже оптимальні керування для нелінійної системи, розв'язуючи значно простішу задачу швидкодії для її однорідної апроксимації. Крім того, розглянуто деякі задачі відображуваності в класі C^1, а також для систем одного класу отримано повний опис усіх можливих оптимальних за швидкодією керувань.

Ключові слова: нелінійні керовані системи, задача швидкодії, min-проблема моментів Маркова, однорідна апроксимація, ряди ітерованих інтегралів, ряди нелінійних степеневих моментів, вільна асоціативна алгебра, вільна алгебра Лі, спряжений базис, задача реалізовності, вектор зросту, відображуваність у класі C^1.

ABSTRACT

Ignatovych S. Yu. Method of series and free algebras in the analysis of nonlinear control systems. – Manuscript.

Thesis for obtaining the degree of Doctor of Sciences (Doctor Habilitatus) in physics and mathematics, speciality 01.01.01 – Mathematical Analysis. B. I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2018.

In the thesis, methods of analysis of nonlinear control systems are proposed and developed based on the representation of a system in the form of a series of elements of a free algebra and studying of structures in this free algebra which are generated by the system.

Nonlinear real-analytic control-linear and control-affine systems are considered. For control-linear systems, the initial value problem with a fixed starting point (for convenience, it is zero) and an expansion of the end-point map into the series of iterated

integrals are considered. For control-affine systems, the steering problem to a fixed equilibrium (for convenience, it is zero) and an expansion of the initial-point map into the series of nonlinear power moments are considered. In both cases, coefficients of series are constant vectors which contain all the (local) information on a concrete system while iterated integrals or nonlinear power moments do not depend on a system and form a free graded associative algebra. One of the main ideas in the direction under development is to consider these series instead of systems. In particular, changes of variables in a system are reduced to transformations over a series in which the shuffle product operation in a corresponding algebra is applied while graduation is defined by control constraints.

Coefficients of the series generate a linear map from the algebra to $\mathbb{R}^n$ which, in turn, induces certain structures in the algebra. The central objects of the study are a core Lie subalgebra and a one-side ideal generated by the core Lie subalgebra, which are introduced in the work. It is proved that core Lie subalgebras are responsible for the homogeneous approximation, a coordinate-free definition of a homogeneous approximation is given and a complete classification of homogeneous approximations is obtained. Methods are proposed for constructing of homogeneous approximating systems and privileged coordinates. In particular, it is shown that the series representation of a homogeneous approximation can be found without finding privileged coordinates, by the form of the core Lie subalgebra only, using an orthoprojection. Moreover, representations of all possible homogeneous approximations are homogeneous polynomials with respect to shuffle product of these orthoprojections. This means that the homogeneous approximation is unique up to polynomial homogeneous change of variables. The developed approach allows solving several close problems: to find complete description of all privileged coordinates, to develop methods of construction of approximating systems, to study properties of homogeneous regular systems etc. Also, properties of core Lie subalgebras for regular and homogeneous systems are studied.

Changes of a control in the system, unlike changes of coordinates, change the core Lie subalgebra but keep a growth vector of the system. In the thesis, for linear-control systems a description of all core Lie subalgebras (or, what is the same, homogeneous approximations) with a given growth vector is obtained. Besides, a description of all possible growth vectors is obtained. In the thesis, definitions of A-normality and A-simplicity of a growth vector are proposed and a description of all A-normal and A-simple growth vectors for systems with two controls are given and a method of constructing normal forms of systems is described.

One of the original ideas of a development of the series method was the study of the time-optimal control problem to the equilibrium for affine-control systems. The first step is reducing such a problem to a nonlinear Markov moment min-problem: constraints on control and the optimality condition are added to a corresponding series of nonlinear power moments. Two systems are locally equivalent in the sense of time optimality if (after a change of variables in one of them) their solutions, that is, the optimal time and the optimal control, become asymptotically equivalent as functions of an initial point in a neighborhood of the equilibrium. In the thesis, a connection of a homogeneous approximation and an approximation in the sense of time optimality is studied; this allows obtaining optimal or almost optimal controls for a nonlinear system by solving much more simple time-optimal control problem for its homogeneous approximation.

Besides, some problems of mappability in the class C^1 are considered. Also for systems of one special class (dual to linear systems) the set of all possible time optimal controls is completely described.

Key words: nonlinear control systems, time-optimal control problem, Markov moment min-problem, homogeneous approximation, series of iterated integrals, series of nonlinear power moments, free associative algebra, free Lie algebra, dual basis, realizability problem, growth vector, linearizability in the class C^1.

АННОТАЦИЯ

Игнатович С. Ю. Метод рядов и свободных алгебр в анализе нелинейных управляемых систем. – Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков, 2018.

В диссертации предложены и развиты методы анализа нелинейных управляемых систем, основанные на представлении системы в виде ряда элементов свободной алгебры и исследовании структур в этой свободной алгебре, которые порождает система.

Рассматриваются нелинейные вещественно-аналитические системы, линейные или аффинные по управлению, и соответствующие ряды итерированных интегралов или нелинейных степенных моментов. Итерированные интегралы или нелинейные степенные моменты не зависят от системы и образуют свободную градуированную ассоциативную алгебру. Коэффициенты ряда порождают некоторые структуры в этой алгебре. Центральными объектами исследования являются введенная в диссертации ядерная подалгебра Ли и односторонний идеал, который она порождает. Получено полное описание всех однородных аппроксимаций и привилегированных координат, предложены методы построения аппроксимирующих систем. Установлена связь однородной аппроксимации и аппроксимации в смысле быстродействия, которая позволяет получить оптимальные или почти оптимальные управления для нелинейной системы, решая существенно более простую задачу быстродействия для её однородной аппроксимации. Кроме того, рассмотрены некоторые задачи отображаемости в классе C^1, а также для систем одного класса получено полное описание всех возможных оптимальных по быстродействию управлений.

Ключевые слова: нелинейные управляемые системы, задача быстродействия, min-проблема моментов Маркова, однородная аппроксимация, ряды итерированных интегралов, ряды нелинейных степенных моментов, свободная ассоциативная алгебра, свободная алгебра Ли, сопряжённый базис, задача реализуемости, вектор роста, отображаемость в классе C^1.

Підписано до друку з авторського оригінал-макету 5.03.2018 р.
Формат 60х90 1/16. Ум. друк. арк. 2,5. Наклад 100 прим. Зам.№ 18030501

Надруковано у копі-центрі «МОДЕЛІСТ»
(ФО-П Миронов М.В., Свідоцтво ВО4№022953)
М. Харків, вул. Мистецтв, 3 літер Б-1
Тел. 7-170-354
www.modelist.in.ua