Національна академія наук України
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна

Андреєв Кирило Миколайович

УДК 517.957

Хвилі розрідження для рівняння Кортевега – де Фріза: асимптотики та інтеграли руху

01.01.03 – математична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна Національної академії наук України.

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Єгорова Ірина Євгенівна,
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна
Національної академії наук України,
провідний науковий співробітник відділу математичної фізики.

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук, професор
Гордевський Вячеслав Дмитрович,
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
професор кафедри фундаментальної математики;

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Самойленко Юлія Іванівна,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
старший науковий співробітник.

Захист відбудеться «03» жовтня 2018 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01 у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна Національної академії наук України за адресою: м. Харків, пр. Науки, 47.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України за адресою: м. Харків, пр. Науки, 47.

Автореферат розісланий «31» серпня 2018 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Горькавий В.О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. З часів знаменитого відкриття К. Гарднера, Дж. Гріна, М. Крускала, Р. Міури (1967), які запропонували новий метод розв'язання рівняння Кортевега – де Фріза (КдФ), в сучасних дослідженнях з нелінійних еволюційних рівнянь велика увага приділяється двом взаємопов'язаним аспектам. Перший – метод оберненої задачі розсіювання (МОЗР), в основі якого лежить зображення Лакса для цілком інтегровних нелінійних еволюційних рівнянь та відповідний обернений спектральний аналіз лінійних операторів. Завдяки МОЗР вдалося не тільки побудувати важливі класи точних розв'язків цих рівнянь (солітонні, скінченнозонні, раціональні), але й довести теореми існування розв'язків задачі Коші для різних класів початкових умов. Сучасною модернізацією цього методу є нелінійний метод найшвидшого спуску, що дозволяє дослідити асимптотичну поведінку розв'язку при великих значеннях часу. Це є «аналітичний» аспект проблеми. Другий, «алгебраїчний», аспект, пов'язаний з вивченням внутрішніх симетрій динамічних систем, розвивався паралельно і був ініційований важливим спостереженням, зробленим Л.Д. Фаддєєвим і В.Є. Захаровим (1971), а саме: всі рівняння, що розв'язні методом оберненої задачі, можна розглядати як нескінченновимірні гамільтонові цілком інтегровні (в сенсі Ліувілля) системи, для яких змінними типу «дія – кут» є деякі спектральні характеристики відповідного L-оператора Лакса. У зв'язку з цим виникла проблема побудови послідовної теорії нескінченновимірних цілком інтегровних динамічних систем. Цим двом аспектам і присвячено дисертаційну роботу, у якій вони вивчаються для рівняння КдФ в класі розв'язків типу сходинки, а саме розв'язків, які швидко спадають при $x \to +\infty$ і прямують до ненульової додатної константи при $x \to -\infty$. Такий розв'язок називається хвилею розрідження.

Розв'язання оберненої задачі розсіювання для одновимірного оператора Шрьодінгера на всій осі зі спадним потенціалом було проведено І. Кеєм, Г. Мозесом (1955), Л.Д. Фаддєєвим (1964), В.О. Марченко (1977), П. Дейфтом і Е. Трубовіцем (1979). Ці дослідження дозволили проінтегрувати рівняння КдФ у класі швидкоспадних розв'язків. Подальший розвиток МОЗР у теорії нелінійних еволюційних рівнянь дозволив вивчити деякі класи неспадних розв'язків, а саме: періодичні, скінченнозонні, розв'язки типу сходинки та інші. Дослідження в цьому напрямку використовували результати спектральної теорії та теорії розсіювання для оператора Шрьодінгера з потенціалами відповідного класу. Зокрема, рівняння КдФ з початковими умовами типу сходинки було проінтегровано в працях В.С. Буслаєва, В.Н. Фоміна (1962), Е. Коен, Т. Каппелера (1984), І.Є. Єгорової, Г. Тешля (2011).

МОЗР дозволяє дослідити асимптотичну поведінку розв'язку рівняння КдФ при великих значеннях часу у так званій солітонній зоні. Цей метод також виявився ефективним при дослідженні асимптотики хвилі стиску рівняння КдФ в області позаду переднього хвильового фронту, де, як показано Є.Я. Хрусловим (1976), з'являються асимптотичні солітони, які не є пов'язаними з дискретним спектром. Найбільш ефективним методом дослідження асимптотичної поведінки розв'язків нелінійних інтегровних рівнянь при великих значеннях часу наразі є нелінійний метод найшвидшого спуску для осциляційної задачі Рімана – Гільберта (РГ), який було запропоновано С.В. Манаковим (1973), а також П. Дейфтом і С. Джоу (1993). Розвитку цього методу присвячено значну кількість праць. Метод застосовується у вивченні асимптотичної поведінки як розв'язків нелінійних інтегровних рівнянь, так і поліномів великого степеня, ортогональних відносно ваги, що залежить від великих значень параметра, також є ефективним в теорії матриць великих розмірностей. Зокрема, цим методом вивчено асимптотичну поведінку хвилі стиску. Вперше ці дослідження було проведено В.П. Котляровим і О.О. Мінаковим (2010) для модифікованого рівняння КдФ та надалі узагальнено А. Буте де Монвель, В.П. Котляровим, Д.Г. Шепельським (2010) для нелінійного рівняння Шрьодінгера. Для рівняння КдФ аналогічні результати отримано І.Є. Єгоровою, З.М. Гладкою, Г. Тешлєм (2013). Хвиля розрідження цим методом раніше не вивчалась, і відповідні дослідження є основним сюжетом даної дисертаційної роботи.

У 1971 р. В.Є. Захаров і Л.Д. Фаддєєв побудували теорію рівняння КдФ як цілком інтегровної гамільтонової системи. Для спадних початкових умов було введено симплектичну структуру на відповідному многовиді, а також знайдено зображення для локальних щільностей (інтегралів руху) в термінах даних розсіювання й у термінах змінних типу «дія – кут». У випадку розв'язків типу сходинки локальні щільності не спадають, тому відповідні інтеграли розбігаються. У дисертації побудовано локальні щільності, для яких відповідні інтеграли збігаються, а також отримано зображення цих інтегралів через дані розсіювання і побудовано симплектичну форму для відповідної динамічної системи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано у математичному відділенні Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України. Результати дисертації є складовою частиною держбюджетних науково-дослідних робіт за темами: «Геометричні та асимптотичні методи теорії крайових задач математичної фізики» (номер державної реєстрації 0116U005036), «Матричні та диференціальні оператори та їх застосування у квантовій інформатиці, інтегрованих системах та статистичній фізиці» (номер державної реєстрації 0116U005035).

Мета і завдання дослідження. Мета дисертації полягає у дослідженні асимптотичної поведінки при великих значеннях часу розв'язків задачі Коші для рівняння КдФ, що відповідають хвилі розрідження, та у побудові регуляризованих інтегралів руху.

Завдання дослідження:

- аналіз асимптотичної поведінки хвилі розрідження для рівняння КдФ в основних областях просторово-часової півплощини для загальних початкових умов, що допускають наявність резонансу;
- виведення точних формул для першого та другого членів асимптотичного розвинення при великих значеннях часу і повне обґрунтування цих асимптотик у всіх принципових областях просторово-часової півплощини;
- отримання регуляризованих інтегралів руху для асимптотично періодичних розв'язків рівняння КдФ типу сходинки і виведення зображення цих інтегралів через дані розсіювання початкових умов у випадку сталих фонів.

Об'єктом дослідження є розв'язок задачі Коші для нелінійного рівняння КдФ на всій осі з початковими умовами типу сходинки.

Предметом дослідження є розв'язок векторної задачі Рімана – Гільберта, що відповідає хвилі розрідження, а також регуляризовані інтеграли руху для відповідної динамічної системи.

Методи дослідження. Для дослідження асимптотичної поведінки розв'язку використано нелінійний метод найшвидшого спуску для осциляційної задачі Рімана – Гільберта у векторній постановці. Для побудови регуляризованих інтегралів руху застосовано метод оберненої задачі розсіювання для одновимірного рівняння Шрьодінгера на всій осі з потенціалом типу сходинки.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати, одержані в дисертації, є новими і полягають у такому:

- В рамках застосування нелінійного методу найшвидшого спуску поставлено і досліджено векторні задачі Рімана – Гільберта, які є асоційованими з правими та лівими даними розсіювання. Ці розв'язки використано для опису асимптотичної поведінки розв'язку задачі Коші для рівняння КдФ з початковими умовами типу сходинки, що відповідають хвилі розрідження.
- В основних областях просторово-часової півплощини отримано перший та другий члени асимптотичного розвинення при великих значеннях параметру часу розв'язку задачі Коші для рівняння КдФ з початковими умовами типу сходинки, що відповідають хвилі розрідження. Це асимптотичне розвинення є математично строго обґрунтованим.

- Побудовано регуляризовані інтеграли руху у випадку асимптотично періодичних початкових умов задачі Коші для рівняння КдФ. Для початкових умов на сталих фонах знайдено їх зображення через дані розсіювання оператора Шрьодінгера.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Одержані результати й методи, які набули розвинення, можуть бути використані при вивченні поведінки розв'язку рівняння КдФ та інших важливих класів цілком інтегровних рівнянь у різних асимптотичних режимах. Результати, які одержані в дисертації, можуть бути корисними в дослідженнях у галузі математичної фізики, що проводяться у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України (м. Харків), в Інституті математики НАН України (м. Київ), на факультеті математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна та на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка, на математичному факультеті Віденського університету (Австрія).

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації отримані автором самостійно. У роботах, які виконані у співавторстві, авторство розподілено таким чином: у роботі [2] Є.Я. Хруслову належить постановка задачі; у роботі [7] І.Є. Єгоровій належить постановка задачі та ідея доведення теореми 2.5, Г. Тешль є автором вступу та рисунків статті, Т.-Л. Лянге – автором леми 4.2. У роботах [9,10] постановка задач належить науковому керівнику І.Є. Єгоровій.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися на міжнародних наукових конференціях:
- II International Conference «Analysis and Mathematical Physics» (Харків, 2014);
- III International Conference «Analysis and Mathematical Physics» (Харків, 2015);
- IV International Conference «Analysis and Mathematical Physics» (Харків, 2016);
- A trilateral German-Russian-Ukrainian summer school «Spectral Theory, Differential Equations and Probability» (Mainz, Germany, 2016);
- V International Conference «Analysis and Mathematical Physics» dedicated to Vladimir A. Marchenko's 95th birthday and the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine (Харків, 2017).

Результати дисертації доповідалися і обговорювалися на наукових семінарах:
- науковий семінар відділу диференціальних рівнянь і геометрії Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України (керівник: академік НАН України, д.ф.-м.н. Є.Я. Хруслов);
- науковий семінар відділу математичної фізики Фізико-технічного інституту ім. Б.І. Вєркіна НАН України (керівник: д.ф.-м.н., п.н.с. В.П. Котляров);
- науковий семінар математичного відділення Фізико-технічного інституту

ім. Б.І. Вєркіна НАН України (керівник: академік НАН України, д.ф.-м.н. Є.Я. Хруслов).

Публікації. Результати дисертації опубліковано у 10 наукових публікаціях, в тому числі у 5 статтях у фахових виданнях [1-5], а також 5 тезах доповідей наукових конференцій [6-10].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел, який містить 71 найменування та складається з 9 сторінок. Загальний обсяг роботи становить 128 сторінок. Основні результати, що винесені на захист, викладено в розділах 2-4.

Автор щиро вдячний Євгену Яковичу Хруслову та Ірині Євгенівні Єгоровій за постановку задач і численні обговорення.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** дисертації обґрунтовано вибір теми дослідження, сформульовано мету та задачі дослідження і розкрито наукову новизну отриманих результатів.

У **першому розділі** описано головний об'єкт дослідження, наведено деякі початкові відомості про метод оберненої задачі розсіювання та про нелінійний метод найшвидшого спуску для осциляційної задачі Рімана – Гільберта (РГ).

Головним об'єктом цього дисертаційного дослідження є розв'язок задачі Коші для рівняння Кортевега – де Фріза

$$q_t(x,t) - 6q(x,t)q_x(x,t) + q_{xxx}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

з початковими умовами типу сходинки $q(x,0) = q(x)$, що відповідають хвилі розрідження:

$$\begin{cases} q(x) \to 0, & \text{при } x \to +\infty, \\ q(x) \to c^2, & \text{при } x \to -\infty. \end{cases} \tag{2}$$

Як відомо, рівняння КдФ є еквівалентним рівнянню Лакса $\frac{\partial L}{\partial t} = [P, L]$, де $L(t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x,t)$ є оператором Шрьодінгера, а $P(t)$ є кососиметричним оператором: $P(t) = -4\partial_x^3 + 6q(x,t)\partial x + 3q_x(x,t)$. За умови, що початкові дані (2) прямують до своїх асимптотик достатньо швидко і мають достатню гладкість, розв'язок задачі Коші (1)-(2) існує та належить до класу[1]:

$$\int_{\mathbb{R}_+} (1 + |x|) \left(|q(x,t)| + |q(-x,t) - c^2| \right) dx < \infty. \tag{3}$$

Нагадаємо деякі спектральні властивості оператора Шрьодінгера $L(t)$ з потенціалом типу сходинки, що задовольняє умові (3). Спектр оператора не залежить від t і складається з абсолютно неперервної частини $\mathbb{R}_+$ та скінченної кількості

[1] З. Н. Гладкая. О решениях уравнения Кортевега — де Фриза с начальными данными типа ступеньки // Допов. Нац. акад. наук Укр. — 2015. — № 2. — С. 7–14.

від'ємних власних значень $-\kappa_1^2 < \cdots < -\kappa_N^2 < 0$. Спектральне рівняння $(L(t)y)(x) = k^2 y(x)$ при $\operatorname{Im} k \geq 0$ має два розв'язки Йоста $\phi(k,x,t)$ і $\phi_1(k,x,t)$, що задовольняють умові:

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\phi(k,x,t) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 x}\phi_1(k,x,t) = 1, \text{ де } k_1 = \sqrt{k^2-c^2}.$$

Ці розв'язки при $k \in \mathbb{R}$ пов'язані співвідношенням розсіювання

$$T(k,t)\phi_1(k,x,t) = \overline{\phi(k,x,t)} + R(k,t)\phi(k,x,t),$$

де $T(k,t)$ і $R(k,t)$ є правими коефіцієнтами проходження і відбиття. Еволюція цих коефіцієнтів в силу рівняння КдФ є такою[2]:

$$R(k,t) = R(k)\mathrm{e}^{8\mathrm{i}k^3 t}, \quad T(k,t) = T(k)\mathrm{e}^{(-4\mathrm{i}k^3+4\mathrm{i}k_1^3+6\mathrm{i}k_1 c^2)t}. \tag{4}$$

Тут $R(k) = R(k,0)$, $T(k) = T(k,0)$ є коефіцієнтами відбиття і проходження початкової сходинки (2). Розв'язки $\phi(-\kappa_j^2,x,t)$ є власними функціями оператора $L(t)$. З ними пов'язані нормувальні константи $\gamma_j^{-1}(t) = \int_{\mathbb{R}} \phi^2(-\kappa_j^2,x,t)dx$, де в силу рівняння КдФ має місце еволюція $\gamma_j(t) = \gamma_j \mathrm{e}^{8\mathrm{i}\kappa_j^3 t}$, $\gamma_j = \gamma_j(0)$.

Важливою характеристикою спектральних властивостей оператора $L(t)$ є вронскіан розв'язків Йоста: $W(k,t) = \phi_1(k,x,t)\phi'(k,x,t) - \phi_1'(k,x,t)\phi(k,x,t)$. Вронскіан обертається або не обертається у нуль в точці $k = 0$ одночасно при всіх t. При цьому $R(0,t) = 1$, якщо $W(0,t) = 0$ (випадок *резонансу*), і $R(0,t) = -1$, якщо $W(0,t) \neq 0$ (*нерезонансний* випадок).

У першому розділі описано загальні властивості МОЗР як для спадних початкових умов, так і для початкових умов типу сходинки (2) і продемонстровано, що розв'язок $q(x,t)$ рівняння (1) однозначно визначається за правими даними розсіювання

$$\{R(k), k \in \mathbb{R}; \quad -\kappa_j^2, \gamma_j > 0, \ j = 1, \dots, N\} \tag{5}$$

за допомогою рівнянь Марченко, що явно залежать від часу. Також надано загальні відомості про нелінійний метод найшвидшого спуску для матричних та векторних задач Рімана – Гільберта, що дозволяє дослідити асимптотичну поведінку спадного розв'язку $q(x,t)$ у припущенні, що $x \to \infty$, $t \to \infty$, а $\frac{x}{t} \sim \mathrm{const}$. Крім того, описано інтеграли руху для рівняння КдФ у класі спадних розв'язків[3].

У **другому розділі** дисертації досліджено асимптотичну поведінку розв'язку задачі (1)-(2) при великих значеннях часу із початковими умовами, що швидко

[2] Е. Я. Хруслов. Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Кортевега — де Фриза с начальными данными типа ступеньки // Мат. сборник. — 1976. — Т. 99, № 2. — С. 261–281.

[3] В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев. Уравнение Кортевега — де Фриса — вполне интегрируемая гамильтонова система // Функц. анализ и его прилож. — 1971. — Т. 5, № 4. — С. 18–27.

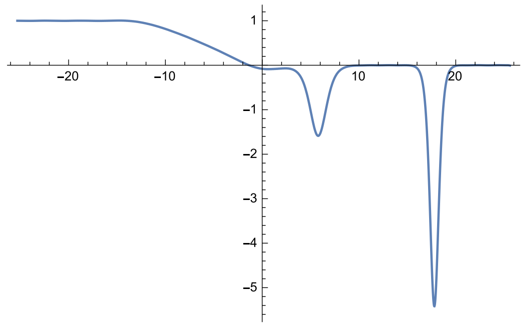

Рис. 1. Числовий розв'язок для $q(x) = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{erf}(x)) - 4\,\mathrm{sech}(x-1)$ при $t = 1.5$

прямують до своїх фонових констант 0 і c^2:

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{\kappa x}(|q(x)| + |q(-x) - c^2|)dx < \infty, \quad x^3 q^{(i)}(x) \in L_1(\mathbb{R}), \quad i = 1, ..., 6, \tag{6}$$

де $\kappa > 0$ є малим. Зауважимо, що ми не вимагаємо істотної гладкості початкових даних, тому МОЗР гарантує існування класичного розв'язку задачі (1), (6) (тобто з трьома неперервними похідними за змінною x і однією за змінною t) тільки в класі (3).

Числові розрахунки (рис. 1) демонструють, що незалежно від профілю початкових умов при достатньо великих значеннях часу можна виділити три основні області просторово-часової півплощини $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ з різною поведінкою розв'язку: (1) область $x > 0$, де розв'язок є асимптотично близьким до суми солітонів; (2) середня область $-6c^2t < x < 0$, де $q(x,t) \approx -\frac{x}{6t}$; (3) область $x < -6c^2t$, де розв'язок є асимптотично близьким до лівої фонової константи c^2. У другому розділі отримано й обґрунтовано формули для першого та другого членів асимптотичного розвинення розв'язку $q(x,t)$ в солітонній і середній областях. Методом дослідження є нелінійний метод найшвидшого спуску для векторної задачі Рімана – Гільберта. Ця задача формулюється таким чином. Уведемо вектор-функцію змінної $k \in \mathbb{C}^+$:

$$m(k) := m(k,x,t) = \left(T(k,t)\phi_1(k,x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\ \ \phi(k,x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right),$$

де x і t є великими параметрами ($x \to \infty$, $t \to +\infty$). Ми вважаємо, що їх відношення $\xi = \frac{x}{12t}$ змінюється повільно на заданому скінченному відрізку. Величина ξ є основним параметром задачі РГ разом із параметром часу t. Функція $m(k)$ є мероморфною в області $\mathbb{C}^+$, має прості полюси в точках $\mathrm{i}\kappa_j$ і має неперервні граничні значення з обох сторін дійсної вісі. При $k \to \infty$ має місце асимптотика

$$m(k) = \begin{pmatrix}1, & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1, & -1\end{pmatrix} \frac{\int_x^{+\infty} q(y,t)dy}{2\mathrm{i}k} + O\left(k^{-2}\right). \tag{7}$$

Для спрощення записів застосуємо такі матричні позначення:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ \mathbb{J}_1 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \mathbb{J}_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \mathbb{J}_3 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Довизначимо тепер $m(k)$ в $\mathbb{C}^-$ за формулою $m(k) = m(-k)\sigma_1$. Після такого продовження функція $m(k)$ має стрибок уздовж дійсної осі $\mathbb{R}$. Будемо розглядати дійсну вісь $\mathbb{R}$ як контур з орієнтацією від мінус до плюс нескінченності і позначимо через $m_+(k)$ (відповідно, $m_-(k)$) граничні значення $m(k)$ з верхньої (відповідно, нижньої) півплощини. Має місце така теорема:

Теорема 2.2. *Нехай набір* (5) *є правими даними розсіювання для потенціалу* $q(x)$, *що задовольняє умові* (6), *і нехай* $q(x,t)$ *є розв'язком задачі Коші* (1), (6). *Тоді функція* $m(k)$ *є єдиним розв'язком такої векторної задачі Рімана – Гільберта: знайти вектор-функцію* $m(k)$, *яка є мероморфною поза контуром* $\mathbb{R}$, *має неперервні граничні значення з обох сторін контуру і задовольняє таким умовам:*

I. *умові стрибка* $m_+(k) = m_-(k)v(k)$, *де*
$$v(k) := v(k,x,t) = \begin{pmatrix} 1 - |R(k)|^2 & -\overline{R(k)}\mathrm{e}^{-2t\Phi(k)} \\ R(k)\mathrm{e}^{2t\Phi(k)} & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$
Тут $\Phi(k) := \Phi(k,x,t) = 4\mathrm{i}k^3 + 12\mathrm{i}k\xi$ *є фазовою функцією;*

II. *полюсним умовам*
$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i}\kappa_j}\, m(k) = \mathrm{i}\gamma_j \mathrm{e}^{2t\Phi(\mathrm{i}\kappa_j)} \lim_{k\to\mathrm{i}\kappa_j} m(k)\mathbb{J}_2,$$
$$\mathrm{Res}_{-\mathrm{i}\kappa_j}\, m(k) = -\mathrm{i}\gamma_j \mathrm{e}^{-2t\Phi(\mathrm{i}\kappa_j)} \lim_{k\to-\mathrm{i}\kappa_j} m(k)\mathbb{J}_3;$$

III. *умові симетрії* $m(k) = m(-k)\sigma_1$;

IV. *нормувальній умові* $m(k) = \begin{pmatrix}1, & 1\end{pmatrix} + O(k^{-1}), \quad k\to\infty.$

Отже, якщо цю задачу якимось чином буде розв'язано, то з асимптотики розв'язку $m(k)$ при $k \to \infty$, яка природно залежить від параметрів x і t, в силу (7), ми отримаємо й асимптотику розв'язку $q(x,t)$. Відзначимо, що асимптотична поведінка $q(x,t)$ суттєво залежить від розподілу знаків дійсної частини фазової функції $\Phi(k)$. Рис. 2 демонструє розподіл цих знаків при $\xi > 0$.

Дослідження асимптотичної поведінки розв'язку у солітонній області проведено в дисертаційній роботі за схемою, що у цілому є аналогічною схемі, запропонованій К. Грюнерт, Г. Тешлєм[4] для спадного випадку. Доведено таку теорему:

Теорема 2.6. *Нехай* $q(x,t)$ *є розв'язком задачі Коші* (1), (6). *Тоді при довільному малому* $\epsilon > 0$ *в області* $x > \epsilon t$ *при* $t\to\infty$ *є справедливою така*

[4] K. Grunert, G. Teschl Long–time asymptotics for the Korteweg-–de Vries equation via nonlinear steepest descent // Math. Phys. Anal. Geom. – 2009. – Vol. 12. – Pp. 287-324.

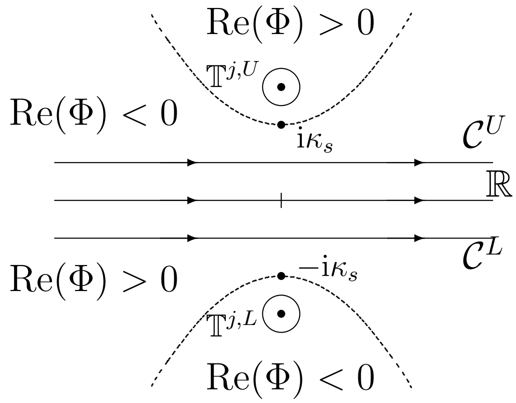

Рис. 2. Контур деформації в солітонній області

асимптотика:

$$q(x,t) = -\sum_{j=1}^{N} \frac{2\kappa_j^2}{\cosh^2\left(\kappa_j x - 4\kappa_j^3 t - \frac{1}{2}\log\frac{\gamma_j}{2\kappa_j} - \sum_{i=j+1}^{N}\log\frac{\kappa_i-\kappa_j}{\kappa_i+\kappa_j}\right)} + O(\mathrm{e}^{-\epsilon t/2}).$$

Тут $-\kappa_j^2$ є точками дискретного спектра і γ_j є відповідними нормувальними константами початкових умов.

Основним і найбільш цікавим з фізичної точки зору результатом даного розділу є асимптотична формула для хвилі розрідження в середній області просторово-часової півплощини, а саме при $-6c^2 t < x < 0$. Специфіка дослідження задачі РГ, яка пов'язана з початковими умовами типу сходинки, проявляється тут повною мірою в порівнянні зі спадними початковими умовами. Ідея знаходження розв'язку полягає в здійсненні декількох тотожних перетворень, які трансформують мероморфну задачу, описану в Теоремі 2.2, в еквівалентну голоморфну задачу РГ зі стрибками на контурах, які є асимптотично близькими до сталих матриць за змінною k при великих значеннях часу. Першим кроком ми переходимо до голоморфної задачі РГ з додатковими стрибками на малих колах з центрами в точках $\pm\mathrm{i}\kappa_j$. При цьому перетворенні поза кружками навколо цих точок функція $m(k)$ домножується на діагональну матрицю:

$$m^{(1)}(k) = m(k)[\Lambda(k)]^{-\sigma_3}, \quad \Lambda(k) = \prod_{j=1}^{N}\frac{k+\mathrm{i}\kappa_j}{k-\mathrm{i}\kappa_j}.$$

На відміну від солітонної області у середній області стандартна нижня-верхня факторизація матриці стрибка[5] не є ефективною на деякій частині контуру. Тому ми використовуємо так званий механізм g-функції, яка замінює фазову функцію завдяки перетворенню $m^{(2)}(k) = m^{(1)}(k)\mathrm{e}^{-t(\Phi(k)-g(k))\sigma_3}$, $k \in \mathbb{C}$, і має більш

[5]P. Deift, X. Zhou. A steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problems // Ann. of Math. — 1993. — no. 137. — Pp. 295–368.

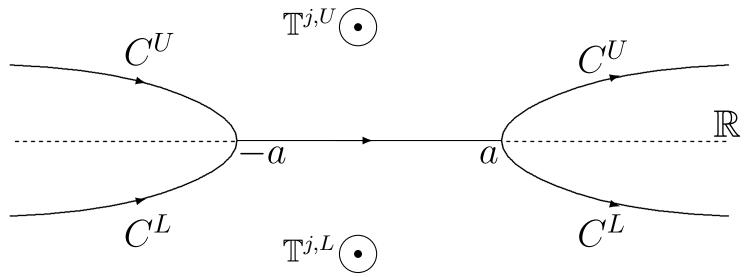

Рис. 3. Контур деформації в області $-6c^2t < x < 0$

«зручні» властивості[6]. Для задачі, описаної в Теоремі 2.2, g-функція має такий вигляд:

$$g(k) := g(k,\xi) = 4\mathrm{i}(k^2 - a^2)\sqrt{k^2 - a^2}, \quad a = \sqrt{-2\xi}, \quad -\frac{c^2}{2} < \xi < 0.$$

Наступний крок – це перетворення $m^{(3)}(k) = m^{(2)}(k)[d(k)]^{-\sigma_3}$, $k \in \mathbb{C}$, де $d(k)$ є голоморфним в $\mathbb{C} \setminus [-a,a]$ розв'язком скалярної задачі РГ:

$$d_+(k)d_-(k) = \mathcal{R}^{-1}(0)\mathcal{R}(k), \quad k \in [-a,a], \quad \mathcal{R}(k) = R(k)\Lambda^{-2}(k),$$

що задовольняє умовам

$$d(-k) = d^{-1}(k), \quad k \in \operatorname{clos}\left(\mathbb{C} \setminus [-a,a]\right), \quad d(k) \to 1, \quad k \to \infty.$$

Завершальним перетворенням початкової задачі РГ є факторизація матриці стрибка на контурі $\mathbb{R} \setminus [-a,a]$:

$$v^{(3)}(k) = \left(\mathbb{I} - d(k)^2\mathcal{R}(-k)\mathrm{e}^{-2tg(k)}\mathbb{J}_3\right)\left(\mathbb{I} - d(k)^{-2}\mathcal{R}(k)\mathrm{e}^{2tg(k)}\mathbb{J}_2\right)^{-1},$$

із подальшим застосуванням стандартного механізму лінз, що полягає у переміщенні стрибка з цієї частини дійсної вісі на контури $C^U \cup C^L$, як показано на рис. 3. Ми отримуємо вектор-функцію $m^{(4)}(k)$:

Теорема 2.10. *Нехай $\xi \in [-c^2/2 + \epsilon, -\epsilon]$, де $\epsilon > 0$ є довільною малою величиною. Тоді задача РГ з Теореми 2.2 є еквівалентною такій задачі РГ: знайти голоморфну вектор-функцію $m^{(4)}(k)$ в області $\mathbb{C} \setminus \left(\mathcal{C}^U \cup \mathcal{C}^L \cup \cup_{j=1}^N \left(\mathbb{T}^{j,U} \cup \mathbb{T}^{j,L}\right) \cup [-a,a]\right)$, що є неперервною аж до межі області, задовольняє умовам симетрії та нормування, як у Теоремі 2.2, а також умові стрибка $m_+^{(4)}(k) = m_-^{(4)}(k)v^{(4)}(k)$, де*

$$v^{(4)}(k) = \begin{cases} v^{(mod)}(k) + \frac{d_+(k)}{d_-(k)}\mathrm{e}^{-2tg_+(k)}\mathbb{J}_1, & k \in [-a,a], \\ \mathbb{I} + d(k)^{-2}\mathcal{R}(k)\mathrm{e}^{2tg(k)}\mathbb{J}_2, & k \in \mathcal{C}^U, \\ \mathbb{I} - d(k)^2\mathcal{R}(-k)\mathrm{e}^{-2tg(k)}\mathbb{J}_3, & k \in \mathcal{C}^L, \\ \mathbb{I} + A(k,t), & k \in \cup_{j=1}^N \left(\mathbb{T}^{j,U} \cup \mathbb{T}^{j,L}\right). \end{cases} \tag{8}$$

[6] V. Kotlyarov, A. Minakov. Riemann–Hilbert problem to the modified Korteweg-–de Vries equation: Long–time dynamics of the steplike initial data // J. Math. Phys. — 2010. — Vol. 51, no. 9. — P. 3506.

Тут

$$v^{(mod)}(k) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{R}(0) \\ \mathcal{R}(0) & 0 \end{pmatrix},$$

а матриця $A(k)$ допускає оцінку

$$\|A(k,t)\| \le C\mathrm{e}^{-Ct},\ C>0, \quad k \in \cup_{j=1}^{N}\left(\mathbb{T}^{j,U} \cup \mathbb{T}^{j,L}\right)$$

рівномірно за змінною ξ.

Як можна помітити, структура матриці (8) є такою, що множники перед матрицями $\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2, \mathbb{J}_3$ є експоненційно малими при великих значеннях часу при всіх k на контурі $[-a,a] \cup \mathcal{C}^U \cup \mathcal{C}^L$ поза малими околами точок $\pm a$. Це дозволяє припустити, що при великих значеннях часу розв'язок задачі РГ з Теореми 2.10 є асимптотично близьким до розв'язку такої модельної задачі: *знайти голоморфну вектор-функцію $m^{\mathrm{mod}}(k)$ в області $\mathbb{C} \setminus [-a,a]$, яка має неперервні граничні значення на обох сторонах контуру, за винятком точок $\pm a$, де можливі особливості порядку $O((k \pm a)^{-1/4})$, та яка задовольняє: (1) умові стрибка*

$$m_+^{\mathrm{mod}}(k) = m_-^{\mathrm{mod}}(k) v^{(mod)}(k), \quad k \in [-a,a];$$

(2) умові симетрії $m^{\mathrm{mod}}(k) = m^{\mathrm{mod}}(-k)\sigma_1$;
(3) умові нормування $m^{\mathrm{mod}}(k) = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} + O(k^{-1}), k \to \infty$.

У дисертаційній роботі обчислено розв'язок цієї задачі РГ:

$$m^{\mathrm{mod}}(k) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\beta(k)(\mathrm{i}-1) + \beta(k)^{-1}(\mathrm{i}+1),\, \beta(k)(\mathrm{i}+1) + \beta(k)^{-1}(\mathrm{i}-1)\right),$$

де $\beta(k) = \sqrt[4]{\frac{k-a}{k+a}}$ у нерезонансному випадку, і $\beta(k) = \sqrt[4]{\frac{k+a}{k-a}}$ у резонансному випадку. Отже, якщо буде встановлено асимптотичну еквівалентність $m^{(4)}(k) \sim m^{\mathrm{mod}}(k)$ при $t \to \infty$ в околі нескінченно віддаленої точки, то асимптотичне розвинення при великих значеннях k для першої компоненти розв'язку можна обчислити за формулою:

$$m_1(k) = m_1^{(4)}(k) d(k)\Lambda(k)\mathrm{e}^{t(\Phi(k)-g(k))} \sim m_1^{\mathrm{mod}}(k) d(k)\Lambda(k)\mathrm{e}^{t(\Phi(k)-g(k))}. \tag{9}$$

В силу (7) ми маємо $q(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\lim_{k\to\infty} 2\mathrm{i}k\left(m_1(k) - 1\right)$, тобто з формули (9) можна обчислити перший та другий члени асимптотичного розвинення за часом для розв'язку $q(x,t)$ задачі Коші (1), (6). Ця асимптотика є коректною за умови обґрунтування відсутності впливу на неї матриці стрибка (8) в околах точок $\pm a$, де вона не є близькою до сталої матриці. Дослідження впливу точок $\pm a$ на асимптотику розв'язку призводить до вивчення додаткової задачі РГ в околі цих точок, яка називається задачею параметрикса. У дисертаційній роботі цю задачу поставлено і строго розв'язано за допомогою функцій Ейрі. Крім того, показано, що вплив розв'язку цих задач параметрикса на асимптотику $q(x,t)$ починається з третього члена асимптотичного розвинення за змінною t. Доведення цього факту проведено шляхом дослідження єдиної розв'язності деяких сингулярних інтегральних рівнянь. Таким чином, асимптотику розв'язку в середній області повністю обґрунтовано. Відповідні результати викладено в наступній теоремі:

Теорема 2.15. *Нехай $q(x,t)$ є розв'язком задачі Коші (1), (6). Тоді при довільному малому $\epsilon > 0$ в області $(-6c^2+\epsilon)t < x < -\epsilon t$ при $t \to \infty$ рівномірно відносно ξ має місце така асимптотика:*

$$q(x,t) = -\frac{x + Q(\xi)}{6t}(1 + O(t^{-1/3})),$$

де

$$Q(\xi) = \frac{2}{\pi}\int_{-\sqrt{-2\xi}}^{\sqrt{-2\xi}} \left(\frac{d}{ds}\log R(s) - 4\mathrm{i}\sum_{j=1}^{N}\frac{\kappa_j}{s^2+\kappa_j^2}\right)\frac{ds}{\sqrt{s^2+2\xi}} \mp \frac{1}{2\sqrt{-2\xi}},$$

причому знаки $\pm$ відповідають резонансному і нерезонансному випадку відповідно. Тут $R(k)$ є правим коефіцієнтом відбиття, а $-\kappa_j^2$, $j = 1,...,N$ є дискретним спектром початкових даних (6).

У **третьому розділі** дисертації обчислено та обґрунтовано асимптотичне розвинення для розв'язку задачі Коші (1)-(2) в області $x < (-6c^2 - \epsilon)t$ для довільних початкових умов (2), що допускають наявність резонансу. Зауважимо, що резонанс суттєво ускладнює дослідження відповідної задачі РГ, і цей випадок розглядається вперше. За наявності резонансу задачу розв'язано у додатковому припущенні, що початкова умова прямує до відповідних фонових констант із такою швидкістю:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(c+\kappa)x}(|q(x)| + |q(-x) - c^2|)dx < \infty, \quad x^3 q^{(i)}(x) \in L_1(\mathbb{R}), \ i = 1,...,6, \tag{10}$$

де $\kappa > 0$ є малим. В області позаду заднього хвильового фронту розв'язання задачі РГ за правими даними розсіювання (5) є досить складним, і ця задача залишається невивченою. У дисертаційній роботі асимптотику в цій області отримано завдяки дослідженню іншої задачі РГ, яку сформульовано за лівими даними розсіювання та в термінах лівої спектральної змінної $k_1 = \sqrt{k^2 - c^2}$. А саме є вірною така теорема:

Теорема 3.1. *Нехай $\{R_1(k_1), k_1 \in \mathbb{R}; T_1(k_1), k_1 \in [0, \mathrm{i}c]; \kappa_{1,j}, \gamma_{1,j} > 0, j = \overline{1,N}\}$ є лівими даними розсіювання для потенціалу $q(x)$, що задовольняє умовам (10), і нехай $q(x,t)$ є розв'язком задачі Коші (1), (10). Тоді вектор-функція $\breve{m}(k_1) = \breve{m}(k_1,x,t)$, яку визначено формулою*

$$\breve{m}(k_1) = (\breve{m}_1(k_1), \breve{m}_2(k_1)) = \left(T_1(k_1,t)\phi(k_1,x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1x}, \quad \phi_1(k_1,x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1x}\right),$$

є єдиним розв'язком такої векторної задачі РГ$_1$: знайти вектор-функцію $\breve{m}(k_1)$, яка є мероморфною в області $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup [\mathrm{i}c, -\mathrm{i}c])$ з полюсами в точках

$\mathrm{i}\kappa_{1,j},\ j=1,...,N$, *має неперервні граничні значення на обох сторонах контуру, за виключенням, можливо, точок* $\pm\mathrm{i}c$, *і задовольняє таким умовам:*

I. *умові стрибка* $\breve{m}_+(k_1)=\breve{m}_-(k_1)v(k_1)$, *де*

$$v(k_1)=\begin{cases}\begin{pmatrix}1-|R_1(k_1)|^2 & -\overline{R_1(k_1)}\mathrm{e}^{-2t\Phi_1(k_1)}\\ R_1(k_1)\mathrm{e}^{2t\Phi_1(k_1)} & 1\end{pmatrix}, & k_1\in\mathbb{R},\\ \mathbb{I}+\chi(k_1)\mathrm{e}^{2t\Phi_1(k_1)}\mathbb{J}_2, & k_1\in[\mathrm{i}c,0],\\ \sigma_1 v^{-1}(-k_1)\sigma_1, & k_1\in[0,-\mathrm{i}c],\end{cases}$$

причому

$$\chi(k_1,t):=-\lim_{\epsilon\to+0}\frac{\sqrt{(k_1+\epsilon)^2+c^2}}{k_1}|T_1(k_1+\epsilon,t)|^2,\quad k_1\in[0,\mathrm{i}c],$$
$$\Phi_1(k_1):=-4\mathrm{i}k_1^3-6\mathrm{i}c^2k_1-12\mathrm{i}\xi k_1;$$

II. *полюсній умові*

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i}\kappa_{1,j}}\breve{m}(k)=\lim_{k_1\to\mathrm{i}\kappa_{1,j}}\breve{m}(k_1)\mathrm{i}\gamma_j\mathrm{e}^{2t\Phi_1(\mathrm{i}\kappa_{1,j})}\mathbb{J}_2,$$
$$\mathrm{Res}_{-\mathrm{i}\kappa_{1,j}}\breve{m}(k)=\lim_{k_1\to-\mathrm{i}\kappa_{1,j}}\breve{m}(k_1)(-\mathrm{i}\gamma_j\mathrm{e}^{-2t\Phi_1(\mathrm{i}\kappa_{1,j})})\mathbb{J}_3;$$

III. *умові симетрії* $\breve{m}(-k_1)=\breve{m}(k_1)\sigma_1$;

IV. *умові нормування* $\lim_{k\to\infty}\breve{m}(k)=(1\quad 1)$;

V. *при* $k_1\to\pm\mathrm{i}c$ *функція* $\breve{m}(k_1)$ *має таку поведінку:*
(a) *у нерезонансному випадку вектор-функція* $\breve{m}(k_1)$ *є неперервною в* $\pm\mathrm{i}c$;
(b) *у резонансному випадку*

$$\breve{m}(k_1)=\left(\frac{C_1}{\sqrt{k_1-\mathrm{i}c}},\quad C_2\right)(1+o(1)),\quad k_1\to\mathrm{i}c,\quad C_1\neq 0.$$

В точці $-\mathrm{i}c$ *аналогічна умова формулюється з урахуванням умови III.*

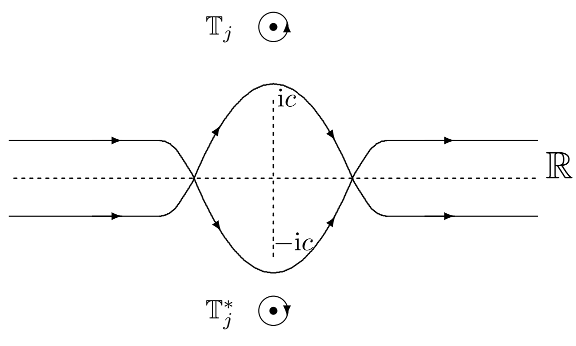

Рис. 4. Контур деформації в області $x<-6c^2t$

Отже, на відміну від спадного випадку контуром спряження тут є хрест із орієнтацією на відрізку $[\mathrm{i}c;-\mathrm{i}c]$ зверху вниз. Ми використовуємо метод лінз зі стандартною верхньою-нижньою факторизацією матриць стрибка на $\mathbb{R}$. При цьому контур спряження деформується, як зображено на рис. 4, а стрибок відповідної вектор-функції $\breve{m}$ на вертикальному відрізку зникає в силу тотожності Плюккера. На новому контурі матриця стрибка є близькою до одиничної, тому єдиний істотний вклад в асимптотику дають матриці стрибка в околах точок $\pm a$. Задача параметрикса тут є у цілому аналогічною відповідній задачі для спадних початкових умов, і цю задачу розв'язано в термінах функцій параболічного циліндра. При цьому доведено, що резонанс не впливає на асимптотику першого і другого членів асимптотичного розвинення для розв'язку $q(x,t)$, а саме є вірною така теорема:

Теорема 3.6. *Нехай $q(x,t)$ є розв'язком задачі Коші (1), (10). Тоді при достатньо малому $\epsilon > 0$ в області $x < (-6c^2 - \epsilon)t$ є справедливою така асимптотика при $t \to \infty$:*

$$q(x,t) = c^2 + \sqrt{\frac{4\nu(a)a}{3t}} \sin(16ta^3 - \nu(a)\log(192ta^3) + \Delta(a)) + o(t^{-\gamma})$$

при будь-якому $1/2 < \gamma < 1$, де

$$a = \sqrt{-\frac{c^2}{2} - \frac{x}{12t}}, \quad \nu(a) = -\frac{1}{2\pi}\log\left(1 - |R_1(a)|^2\right),$$

$$\Delta(a) = \frac{\pi}{4} + \arg(R_1(a)) + \arg(\Gamma(\mathrm{i}\nu(a))) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus[-a,a]} \log\left(\frac{1-|R_1(s)|^2}{1-|R_1(a)|^2}\right)\frac{ds}{s-a},$$

$\Gamma(z)$ є гамма-функцією, а $R_1(k_1)$ є лівим коефіцієнтом відбиття, який відповідає початковій умові $q(x)$.

У **четвертому розділі** дисертаційної роботи розглянуто інтеграли руху, які виникають при інтегруванні рівняння КдФ з більш складними початковими умовами типу сходинки, ніж описано у другому й третьому розділах. Ми припускаємо, що початкові умови швидко спадають на правій півосі і є асимптотично скінченнозонними на лівій. А саме: нехай $v(x)$ є деяким скінченнозонним потенціалом, тоді цей потенціал є нескінченно гладким[7]. Нехай тепер $q(x)$ є нескінченно гладкою функцією, такою що:

$$\int_{\mathbb{R}_+} |x|^m \left(|q^{(j)}(-x) - v^{(j)}(-x)| + |q^{(j)}(x)|\right) dx < \infty, \quad j,m = \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{11}$$

Будемо називати таку функцію $q(x)$ функцією шварцевського типу. Як відомо[8], розв'язок задачі Коші для рівняння КдФ із початковими умовами (11) при кожному фіксованому t також є функцією шварцевського типу:

$$\int_{\mathbb{R}_+} |x|^m \left(|q^{(j)}(-x,t) - v^{(j)}(-x,t)| + |q^{(j)}(x,t)|\right) dx < \infty, \quad j,m = \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

[7]А. Р. Итс, В. Б. Матвеев. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и n–солитонные решения уравнения Кортевега — де Фриза // Теоретическая и математическая физика. – 1975. – Т. 7. – С. 39–46.

[8]I. Egorova, K. Grunert, G. Teschl. On the Cauchy problem for the Korteweg-–de Vries equation with steplike finite–gap initial data. I. Schwartz–type perturbations // Nonlinearity. — 2009. — Vol. 22. — Pp. 1431–1457.

Тут $v(x,t)$ є скінченнозонним розв'язком рівняння КдФ, що відповідає початковим умовам $v(x)$. У дисертації доведено таку теорему:

Теорема 4.1 *Нехай $q(x,t)$ є розв'язком задачі Коші* (1), (11). *Тоді існує нескінченна серія регуляризованих інтегралів руху I_j:*

$$I_j = \int_{-\infty}^{0} Q_j(\xi,t)d\xi + \int_0^{+\infty} \sigma_j^{[q]}(\xi,t)d\xi + \\ + \int_0^t (2v(0,\tau)\sigma_j^{[v]}(0,\tau) - \sigma_{j+2}^{[v]}(0,\tau))d\tau, \quad j = 1,2,..., \quad \frac{d}{dt}I_j = 0,$$

де $Q_j(x,t), \sigma_j^{[f]}(x,t)$ *знаходяться з рекурентних співвідношень:*

$$Q_1(x,t) = q(x,t) - v(x,t),$$

$$Q_{j+1}(x,t) = -\frac{d}{dx}Q_j(x,t) - 2\sum_{l=1}^{j-1}\sigma_l^{[v]}(x,t)Q_{j-l}(x,t) - \sum_{l=1}^{j-1}Q_{j-l}(x,t)Q_l(x,t),$$

$$\sigma_1^{[f]}(x,t) = f(x,t), \quad \sigma_{j+1}^{[f]}(x,t) = -\frac{d}{dx}\sigma_j^{[f]}(x,t) - \sum_{l=1}^{j-1}\sigma_l^{[f]}(x,t)\sigma_{j-l}^{[f]}(x,t).$$

Такі інтеграли явно залежать від змінної t, тобто $\frac{\partial I_j}{\partial t} \neq 0$. В окремому випадку для функції шварцевського типу на сталих фонах ($v(x) \equiv c^2$) ця залежність є лінійною. Це дозволяє побудувати нескінченну серію інтегралів, які явно від часу не залежать. Ці інтеграли можуть бути зображені в термінах правих даних розсіювання (4), (5). Перші два мають вигляд:

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus[-c;c]} \log\left(1 - |R(s,t)|^2\right)\frac{-4s^3 + \frac{10}{3}c^2 s}{\sqrt{s^2-c^2}}ds \\ + \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c} B(s,t)\frac{-8s^3 + \frac{20}{3}c^2 s}{\sqrt{c^2-s^2}}ds + \sum_{l=1}^{N}\Big(-\frac{16}{3}\kappa_l^3 + \frac{16}{3}c^2\kappa_l\Big),$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus[-c;c]} \log\left(1 - |R(s,t)|^2\right)\frac{16s^5 - 8c^2s^3 - 5c^4 s}{\sqrt{s^2-c^2}}ds \\ + \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c} B(s,t)\frac{32s^5 - 16c^2s^3 - 10c^4 s}{\sqrt{c^2-s^2}}ds + \sum_{l=1}^{N}\Big(-\frac{64}{5}\kappa_l^5 + 9c^4\kappa_l\Big),$$

де функція $B(k,t)$ визначається за формулою

$$B(k,t) = \frac{1}{2}\arg R(k,t) + \frac{1}{2}\arg\frac{\sqrt{k^2-c^2}}{k} + \sum_{l=1}^{N}\arg\frac{k - \mathrm{i}\kappa_l}{k + \mathrm{i}\kappa_l}.$$

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено асимптотичному аналізу розв'язків рівняння КдФ типу сходинки, що відповідають хвилі розрідження, а також побудові регуляризованих інтегралів руху для цих розв'язків, які необхідні для опису рівняння КдФ як нескінченновимірної гамільтонової динамічної системи. Основні результати можна сформулювати таким чином:

- Досліджено і обґрунтовано асимптотичну поведінку хвилі розрідження для рівняння КдФ нелінійним методом найшвидшого спуску, який є модифікацією методу оберненої задачі розсіювання. Отримано і обґрунтовано перший і другий члени асимптотичного розвинення цього розв'язку при великих значеннях часу у головних регіонах просторово-часової півплощини.
- Доведено, що в області $x > \epsilon t$, де $\epsilon > 0$ є довільною малою величиною, хвиля розрідження асимптотично являє собою суму солітонів і експоненційно малого за змінною t залишкового члена.
- Доведено, що в середній області $(-6c^2 + \epsilon)t < x < -\epsilon t$ головний член асимптотичного розвинення є точним розв'язком $\tilde{q}(x,t) = -\frac{x}{6t}$ рівняння КдФ. Також обчислено другий член асимптотичного розвинення і проаналізовано вплив резонансу на цей член. Обчислено порядок залишкового члену цього асимптотичного розвинення.
- Доведено, що в області $x < (-6c^2 - \epsilon)t$ розв'язок є асимптотично близьким до лівої фонової константи c^2. Виведено строгу формулу для другого члена асимптотичного розвинення в цій області і показано, що резонанс не впливає на цей член.
- Побудовано послідовність регуляризованих інтегралів руху для нескінченно гладкого асимптотично скінченнозонного розв'язку рівняння КдФ типу сходинки. Знайдено зображення цих інтегралів через дані розсіювання початкових умов, що є асимптотично близькими до різних сталих на кожній з півосей.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] *Андреев К. Н.* Регуляризованные интегралы движения уравнения Кортевега – де Фриза в классе неубывающих функций / К. Н. Андреев, Е. Я. Хруслов // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, № 12. – С. 1587-1601.

[2] *Андреев К. Н.* Интегралы движения уравнения Кортевега – де Фриза в классе решений типа ступеньки / К. Н. Андреев // Допов. Нац. акад. наук Укр. – 2016. – Т. 9. – С. 7-13.

[3] *Andreiev K.* Rarefaction waves of the Korteweg–de Vries equation via nonlinear steepest descent / K. Andreiev, I. Egorova, T.-L. Lange, G. Teschl // J. Differential Equations. – 2016. – Vol. 261. – Pp. 5371-5410.

[4] *Андреев К. Н.* Единственность решения задачи Римана – Гильберта для волны разрежения уравнения Кортевега – де Фриза / К. Н. Андреев, И. Е. Егорова // Допов. Нац. акад. наук Укр. – 2017. – Т. 11. – С. 3-9.

[5] *Andreiev K.* On the long-time asymptotics for the Korteweg–de Vries equation with steplike initial data associated with rarefaction waves / K. Andreiev, I. Egorova // J. of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2017. – Vol. 4. – Pp. 325-343.

[6] *Andreiev K.* Regularized integrals of motion of the KdV equation in a class of non-decreasing functions / K. Andreiev // II International conference «Analysis and Mathematical Physics». – Kharkiv: book of abstracts. – June 16-20, 2014. – P. 30.

[7] *Andreiev K.* Regularized integrals of motion for the Korteweg–de Vries equation with steplike initial data / K. Andreiev // III International conference «Analysis and Mathematical Physics». – Kharkiv: book of abstracts. – June 15-19, 2015. – P. 17.

[8] *Andreiev K.* Rarefaction waves of the Korteweg–de Vries equation via nonlinear steepest descent / K. Andreiev, I. Egorova // IV International conference «Analysis and Mathematical Physics». – Kharkiv: book of abstracts. – June 13-17, 2016. – P. 16.

[9] *Andreiev K.* Regularized integrals of motion of the Korteweg–de Vries equation in the class of non-decreasing functions / K. Andreiev // Trilateral German-Russian-Ukrainian Summer School «Spectral Theory, Differential Equations and Probability». – Johannes Gutenberg Universitat Mainz – September 4-15, 2016.

[10] *Andreiev K.* The Korteweg–de Vries equation with steplike initial data as a Hamiltonian system / K. Andreiev // V International conference «Analysis and Mathematical Physics» dedicated to Vladimir A. Marchenko’s 95th birthday and the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine. – Kharkiv: book of abstracts. – June 19-24, 2017. – P. 26.

АНОТАЦІЇ

Андреєв К.М. Хвилі розрідження для рівняння Кортевега – де Фріза: асимптотики та інтеграли руху. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика. – Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна Національної академії наук України, Харків, 2018.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню розв'язку задачі Коші для рівняння Кортевега – де Фріза (КдФ) з початковими даними типу сходинки, що відповідають хвилі розрідження. У роботі вивчається асимптотична поведінка цього розв'язку за умови, що змінна часу є позитивною і прямує до нескінченності.

Методом дослідження асимптотик у дисертації є нелінійний метод найшвидшого спуску в застосуванні до векторних осциляційних задач Рімана – Гільберта (РГ). Він є ефективним у режимі, при якому обидві змінні, просторова та часова, прямують до нескінченності, але їхнє відношення змінюється слабо. На відміну від спадних початкових даних, для яких немає відмінностей, яку саме задачу РГ застосовувати при дослідженні асимптотик (за правими даними розсіювання або за лівими), в задачах з початковими умовами типу сходинки вибір постановки задачі РГ має принципове значення. Тому в дисертації поставлено відповідні задачі РГ як за правими, так і за лівими даними розсіювання, і доведено існування та єдиність їхніх розв'язків. За допомогою зсувів контурів стрибка, що становлять так званий механізм лінз, і з використанням методу g-функції, ці задачі зведено до еквівалентних задач РГ, де матриці стрибка мало відрізняються, за винятком малих околів точок екстремумів, від явно розв'язуваних задач РГ зі сталими матрицями стрибків (модельних задач) при великих значеннях часу. У дисертації знайдено точні розв'язки асоційованих матричних і векторних модельних задач та розв'язано додаткові задачі параметрикса, що пов'язані з поведінкою розв'язку в околах точок екстремуму. Також проведено заключний асимптотичний аналіз, що математично строго обґрунтовує асимптотичне розвинення для хвилі розрідження при великих значеннях часу. Такий аналіз для задач із початковими умовами типу сходинки проведено вперше.

У дисертаційній роботі знайдено асимптотики хвилі розрідження для рівняння КдФ в трьох основних областях просторово-часової півплощини: у солітонній області, у середній області між переднім та заднім хвильовими фронтами, та в області позаду заднього хвильового фронту. Також досліджено вплив резонансу на перший та другий члени асимптотичного розвинення на краю неперервного спектра.

У роботі побудовано регуляризовані інтеграли руху у випадку асимптотично періодичних початкових умов задачі Коші для рівняння КдФ. Для початкових умов, що є асимптотично сталими, знайдено зображення цих інтегралів через дані розсіювання відповідного оператора Шрьодінгера.

Ключові слова: Рівняння Кортевега – де Фріза, хвиля розрідження, задача Рімана-Гільберта, інтеграли руху.

Андреев К.Н. Волны разрежения для уравнения Кортевега – де Фриза: асимптотики и интегралы движения. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика. – Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина Национальной академии наук Украины, Харьков, 2018.

Диссертационная работа посвящена исследованию решения задачи Коши для уравнения Кортевега – де Фриза (КдФ) с начальными данными типа ступеньки, соответствующими волне разрежения. В работе рассматривается асимптотическое поведение этого решения в режиме, при котором значение времени стремится к бесконечности, а отношение пространственной переменной к временной изменяется слабо.

Методом исследования асимптотик в диссертации является нелинейный метод наискорейшего спуска в применении к векторным осциляционным задачам Римана – Гильберта (РГ). Поставлены такие задачи РГ по левым и правым данным рассеяния, а также доказано существование и единственность их решений. С помощью так называемых механизмов линз и g-функции эти задачи сведены к эквивалентным задачам РГ, где матрицы скачка мало отличаются при больших значениях времени от явно решаемых задач РГ с постоянными матрицами скачков (модельные задачи), за исключением малых окрестностей точек, которые называются точками параметрикса. В работе найдены точные решения ассоциированных матричных и векторных модельных задач, кроме того решены дополнительные задачи РГ, связанные с параметриксом. Также проведен заключительный асимптотический анализ, который математически строго обосновывает асимптотическое разложение для волны разрежения при больших значениях времени. Такой анализ для задач с начальными условиями типа ступеньки проведен впервые.

В диссертационной работе найдены асимптотики волны разрежения для уравнения КдФ в основных областях пространственно-временной полуплоскости: в солитонной области, в средней области разрежения и в области дисперсионного убывания позади заднего волнового фронта. Также впервые изучено влияние резонанса на первый и второй члены асимптотического разложения на краю непрерывного спектра.

В работе построены регуляризованные интегралы движения в случае асимптотически периодических начальных условий задачи Коши для уравнения КдФ. В случае начальных условий на постоянных фонах найдено их представление через данные рассеяния оператора Шредингера.

Ключевые слова: Уравнение Кортевега – де Фриза, волна разрежения, задача Римана – Гильберта, интегралы движения.

Andreiev K.M. The rarefaction waves for the Korteweg–de Vries equation: asymptotics and the integrals of motion. – Manuscript.

The thesis to acquire a scientific degree of candidate of science in physics and mathematics by specialty 01.01.03 – Mathematical Physics. – B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2018.

The thesis is concerned with the Cauchy problem solution for the Korteweg–de Vries equation with steplike initial data associated with the rarefaction waves. The long time asymptotic behavior of this solution is discussed in the regime when the ratio of the spatial and the time variables changes slowly.

By use of the nonlinear steepest descent method, the asymptotics of the solution was investigated in all principal regions of the space-time half-plane: in the soliton region, in the middle region between the leading and rear wave fronts, and in the region behind the rear wave front. The result generalizes previously known results.

The method is applied to studying of the vector Riemann-Hilbert (RH) oscillation problems associated with the right and left scattering data of the initial profile. The unique solvability of these RH problems is proved, in particular, in the presence of the discrete spectrum and possible resonances. Using the so-called lens and g-function mechanisms, as far as standard conjugation and deformation methods, these RH problems amount to the equivalent RH problems, with the jump matrices slightly differing from constant matrices when the time is large, except of small vicinities of finite number of the extrema points. The RH problems with the constant jump matrices (model problems) are solved explicitly. The additional parametrix RH problems are also solved, and the concluding asymptotic analysis is given. It justifies rigorously the asymptotic expansions for the rarefaction wave of the KdV equation.

The regularized integrals of motion are constructed for asymptotically finite gap steplike solution for the KdV equation. In the case of the asymptotically constant initial data, the representation of the integrals of motion is given via the scattering data of the associated Schödinger operator.

Keywords: Korteweg–de Vries equation, rarefaction wave, Riemann-Hilbert problem, the integrals of motion.

Підписано до друку з авторського оригінал-макету 29.08.2018 р.
Формат 60х90 1/16. Папір друк. №3. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 1,9. Наклад 100 прим. Зам. №135

Надруковано у ПП Єсін
Україна, 61072, м. Харків, пр. Науки, 52
тел. (057) 340-60-39