Відгук

офіційного опонента на дисертацію Вишнякової Ганни Марківни "Многочлени з обмеженням на розташування коренів і граничні класи функцій", подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 "математичний аналіз"

Одним із фундаментальних напрямків досліджень аналізу є задача опису розташування нулів цілих (і не тільки) функцій, зокрема поліномів. Навіть важко перерахувати, виділивши головних, хто працював в цій галузі. Особливо слід виділити ту область цього напрямку, яка присвячена точному опису розташування коренів функцій, які належать певній множині комплексної площини (наприклад: променю, осі, півплощині). Розв'язок цих задач має важливе прикладне значення не тільки для диференційних рівнянь, але й для спектральної теорії, теорії чисел та інше. Основна задача полягає в знаходженні тих умов, які виконуються для коефіцієнтів функції (полінома), щоб нулі цієї функції мали певне геометричне розташування. Слід зазначити, що розвиток цього напрямку завдячує таким видатним математикам, як Ш. Ерміт, А. Гурвиць, Е. Лагерр, Дж. Поліа, Г. Сеге, І. Дж. Шонберг, М. К. Крейн, Б. Я. Левін та інші. Тематика, якій присвячена дисертація, активно розвивається (В. Бергвайлер, А. Еременко, Дж. Ленглі, Дж. Ксордаш, А. Пінкус та інші). Але залишилось ряд задач, які до кінця були не з'ясовані та остаточно вирішені, це: точна характеристика гіперболічних, стійких та позитивних многочленів; опис класу цілих функцій, що наближаються поліномами; вивчення лінійних операторів в класі гіперболічних стійких, позитивних многочленів. Розв'язку цих актуальних задач і присвячена дисертація.

Метою роботи є створення нових методів для дослідження локалізації і розділення коренів поліномів та цілих функцій, а також встановлення відповідності між властивостями коефіцієнтів та розташуванням коренів цих функцій і нарешті характеризація лінійних операторів в класах гіперболічних, стійких і позитивних поліномів.

Дисертація складається з анотації, вступу, п'яти розділів, одного додатку та 237 посилань на використані джерела.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовані мета та задачі, об'єкт та предмет дослідження, розкрита наукова новизна отриманих результатів.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню дійсних матриць з властивістю тотальної додатності, а також k-кратної додатності матриць. Перевірка цих властивостей матриць потребує багатої кількості обчислень $\left(C_{2n}^{n}-1\right)$. Тому істотно виглядає пошук розумних достатніх умов. Вважаю, що основним результатом цього розділу є теорема 1.1.4, яка стверджує, що

(i) Нехай $M = (a_{ij}),\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n,\ \ (m, n \in \mathrm{N} \bigcup \infty)$ є матрицею з додатними елементами, що вони задовольняють наступну умову: $a_{ij}\ a_{i+1,j+1} \ge c\ a_{i,j+1}\ a_{i+1,j},\ 1 \le i \le m-1,\ 1 \le j \le n-1$. Для кожного $k = 2,3,4,...$, і для кожного $c \ge 4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{k+1}\right)$ усі мінори матриці M, що їх порядки не перевищують k, є невід'ємними;

(ii) Нехай $M = (a_{ij}),\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n,\ \ (m, n \in \mathrm{N} \bigcup \infty)$ є матрицею з додатними елементами, що вони задовольняють наступну умову: $a_{ij}\ a_{i+1,j+1} > c\ a_{i,j+1}\ a_{i+1,j},\ 1 \le i \le m-1,\ 1 \le j \le n-1$. Для кожного $k = 2,3,4,...$, і для кожного $c \ge 4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{k+1}\right)$ усі мінори матриці M, що їх порядки не перевищують k, є додатними.

Знайдені константи c_k є точними. Отриманий результат використаний для опису тих поліномів, які не мають коренів у секторі, причому розмір сектора залежить від степені полінома та константи c_m (наслідок 1.1.15).

Другий розділ присвячений вивченню стійких многочленів і цілих функцій, корені яких лежать у відкритій лівій півплощині. Важливим є знаходження достатніх умов стійкості, які легко перевіряються, і в дисертаційній роботі такі умови знайдено. Визначний критерій Рауса-Гурвиця пов'язує стійкість дійсного многочлена з додатністю головних мінорів спеціальної матриці Гурвиця, побудованої по коефіцієнтах многочлена. Знайдено найменшу можливу константу для твердження, яке є аналогом теореми 1.1.4 для матриць Гурвіця. Виявляється, що така найменша константа, на відміну від випадку тепліцевих матриць або ганкелевих матриць, для матриць Гурвиця не залежить від розміру матриць для степеню многочлена більшого за 5. Основним результатом цього розділу є теорема 2.1.7, яка стверджує, що:

Якщо усі коефіцієнти цілої функції $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ є додатними, і вони задовольняють умови $a_k\ a_{k+1} \ge x_0\ a_{k-1}\ a_{k+2}$ для усіх $k \in \mathrm{N}$, (x_0 –додатний корінь многочлена $x^3 - x^2 - 2x - 1$ ($x_0 \approx 2.1479$)), то усі корені функції G мають від'ємні дійсні частини. Зокрема, твердження є вірним, якщо $a_k^2 \ge \sqrt{x_0}\ a_{k-1}\ a_{k+1}$ для усіх $k \in \mathrm{N}$.

У розділі 3 вивчаються різні типи додатності. Опираючись на розділ 1 отримано нову достатню умову додатності полінома з додатними коефіцієнтами та встановлено, що покращити цю умову неможливо. Досліджується також конус многочленів з додатними коефіцієнтами, які є невід'ємними на всій дійсній осі і мають степінь, не більший за задане число. Отримано повний опис крайніх напрямків цього нормального опуклого конусу. Дано повний опис діагональних в мономіальному базисі лінійних операторів, що вони зберігають вказаний конус. Досліджуються деякі спеціальні лінійні оператори, які зберігають множину невід'ємних многочленів зі степенем не більшим за задане число, зокрема, досліджується найменший можливий порядок диференціальних операторів із вказаною властивістю.

В цьому розділі вивчаються абсолютно монотонні функції, тобто перетворення Лапласа невід'ємних скінчених Борелевських мір з носіями на додатній півосі. Клас абсолютно монотонних функцій є природним континуальним узагальненням многочленів з додатними коефіцієнтами. Клас абсолютно монотонних функцій був введений С.Н. Бернштейном, який отримав відомий критерій абсолютної монотонності. Отримано нову необхідну умову для нульової множини абсолютно монотонної функції і наведені приклади множин, які не задовольняють цю нову умову, але задовольняють усі раніше відомі необхідні умови для нульових множин абсолютно монотонних функцій. Для вивчення нульових множин абсолютно монотонних функцій отримано аналог теореми М. Фекете і Дж. Поліа про домноження дійсного многочлена на експоненту. В кінці третього розділу отримано опис нульових множин цілих абсолютно монотонних функцій за умовою, що ці множини не перетинають деякий кут, який містить від’ємну піввісь. Слід виділити теорему 3.6.4, яка стверджує, якщо $E=\{b_k\}_{k=1}^{\infty}\subset \mathrm{C}$ є множиною без скінчених граничних точок, і існує $\alpha\in(0;\pi/2]$, таке що $E\bigcap\{z:|\arg z-\pi|<\alpha\}=\varnothing$, тоді множина E є нульовою множиною деякої цілої абсолютно монотонної функції тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

1. $E\bigcap \mathrm{R}=\varnothing$, крім того $a\in E\Rightarrow \overline{a}\in E$ (кратності точок a і $\overline{a}$ є рівними).

2. $$\sum_{b_k\in E\bigcap\{z:\,\mathrm{Re}\,z\le\omega\}}\frac{|\mathrm{Re}\,b_k|+1}{|b_k|^2+1}<\infty \text{ для усіх } \omega\in\mathrm{R}.$$

Розділ 4 присвячений гіперболічним многочленам і цілим функціям класу Лаґерра-Поліа. Теорема Е.Лаґерра і Дж.Поліа дає повний опис класу цілих функцій Лаґерра-Поліа. Клас цілих функцій Лаґерра-Поліа відіграє значну роль в комплексному аналізі, дослідженням властивостей функцій цього класу і його численним характеризаціям присвячена велика кількість робіт. Отримана відповідь на питання: для яких значень параметру a часткова тета-функція $g_a(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{a^{k^2}}$, $a>1$, належить до класу Лаґерра-Поліа? Доведена така теорема.

Теорема 4.1.8. Існує константа q_∞ ($q_\infty\approx 3.233636665$), така що:

1. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ відрізок ряду $S_n(z, g_a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{a^{k^2}}$ має усі дійсні корені $\Leftrightarrow$ існує точка $x_n \in (a; a^3)$, така що $S_n(-x_n, g_a) \le 0$.

2. Функція g_a належить до класу Лаґерра-Поліа (тобто має усі дійсні корені) $\Leftrightarrow$ існує точка $x_0 \in (a; a^3)$, така що $g_a(-x_0) \le 0$.

3. Функція g_a належить до класу Лаґерра-Поліа $\Leftrightarrow$ $a^2 \ge q_\infty$.

Отримано нову характеризацію класу Лаґерра-Поліа через спеціальні узагальнені нерівності Лаґерра і через комплексні нерівності Лаґерра.

В розділі 5 вивчаються міри відділення коренів гіперболічних многочленів: меш і логарифмічний меш. Доведено, що логарифмічний меш знаменитої згортки Шура-Сеге гіперболічних многочленів з додатними коефіцієнтами не є меншим, ніж максимум їх логарифмічних мешів. Знайдено нову достатню умову знаконезалежної гіперболічності многочлена. Вивчаються скінченно-різничні лінійні оператори скінченного порядку зі сталими коефіцієнтами, досліджується, за яких умов ці оператори зберігають множину гіперболічних многочленів. В розділі 5 отримано відповідь на питання, при яких умовах ці оператори зберігають клас Лаґерра-Поліа.

Дисертація написана чіткою ясною мовою, з відповідною аргументацією аналізу кожної задачі, що вивчається.

По дисертації є наступні зауваження.

1) стор. 83. Наслідок 3.1.3. Фраза "має один дійсний корінь (з урахуванням кратності)" не є коректною;
2) Введені оператори A_Λ (стор. 87) мають "діагональний" вид. Цікаво було б з'ясувати, які з отриманих в підрозділі 3.2 результатів переносяться на загальний недіагональний випадок.
3) Описати всі (не лише діагональні оператори), що зберігають відповідні класи поліномів. Це може стати подальшим розвитком методів і ідей дисертації.
4) Скінченно-різничні оператори, що розглядаються в підрозділах 5.3, 5.5, мають спеціальний вигляд. Цікаво було б дати відповідь на питання: це всі оператори, що зберігають клас Лагерра – Поліа, чи ні.

Незважаючи на ці недоліки, вважаю, що дисертація Вишнякової Г. М. є закінченим науковим дослідженням і повністю відповідає вимогам, які пред'являються до дисертацій, поданих на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, так як:

1) В роботі отримано нову достатню умову кратної додатності і тотальної додатності дійсних матриць заданого розміру, а

також доведено, що ця умова є точною для кожного фіксованого розміру матриць (а також точною в класі нескінченних матриць) в класі ганкелевих матриць, і в класі теплицевих матриць.

2) Отримано нову достатню умову стійкості комплексних многочленів, достатню умову розташування коренів цілих функцій у відкритій лівій півплощині, і перевірено, що отримані умови не можуть бути покращеними.

3) Знайдено повний опис крайніх напрямків конусу многочленів з додатними коефіцієнтами, які є невід'ємними на дійсній осі і мають степінь не більшу за дане число. Знайдено повний опис діагональних в стандартному мономіальному базисі лінійних операторів, які зберігають вказаний конус.

4) Знайдено, при яких значеннях параметру часткова тета-функція, а також її відрізки належать до класу Лагера-Поліа.

5) Визначені міри відділення коренів гіперболічних многочленів: меш і логарифмічний меш. Отримані оцінки для мешу і логарифмічного мешу через коефіцієнти многочлену. В роботі доведено, що логарифмічний меш згортки Шура-Сеге двох гіперболічних многочленів не є меншим за максимум логарифмічних мешів многочленів.

6) Отримано повний опис лінійних скінчено-різничних операторів зі сталими коефіцієнтами, які зберігають множину гіперболічних многочленів, і які зберігають множину многочленів з коренями у смузі.

Науковий рівень дисертації високий, а всі результати обґрунтовані і спираються на чіткі і коректні доведення. Отримані результати носять теоретичний характер і можуть бути використані для дослідження різноманітних задач аналізу. Дослідження, що проведені автором, можуть бути корисними в наукових розробках, що проводяться у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна, Київському національному університеті імені Т. Г. Шевченка, Інституті прикладної математики і механіки НАН України, Інституті математики НАН України, Дніпровському національному університеті імені О. Гончара, Одеському національному університеті ім. І. І. Мечнікова та інших. Автореферат ідентичним чином відображає основні положення і твердження дисертації. Публікації містять головні результати дисертаційної роботи.

На підставі вищезгаданого вважаю, що дисертаційна робота Вишнякової Г. М. “ Многочлени з обмеженням на розташування коренів і граничні класи функцій ” задовольняє всім вимогам, що пред’являються до докторських дисертацій, а дисертант заслуговує присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 “математичний аналіз”.

Доктор фізико-математичних наук, професор,
провідний науковий співробітник
Фізико-технічного інституту низьких
температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України В. О. Золотарьов

Золотарьова ВО

ЗАСВІДЧУЮ
Учений секретар ФТІНТ
ім. Б.І. Вєркіна НАН України
кандидат фізико-математичних наук
Кравченко О.Л.

Відгук надійшов до ради 15.05.2019 р.
Вчений секретар
Спец. вченої ради Д 64.175.01
(В.О. Горкавий)

КАНЦЕЛЯРІЯ