

Відгук надійшов до редакції

20.11.2020

ВХМС (Є.Я. Хурсов)
ВІДГУК ОПОНЕНТА

на дисертаційну роботу Теплової Дар'ї Павлівни
"Застосування теорії випадкових матриць до багатовимірних часових рядів",
подану на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань
11 – Математика та статистика за спеціальністю 111 – Математика

Ця дисертація присвячена вивченню властивостей розподілу власних значень великих випадкових матриць, що пов'язані з матрицею автоковаріації $R_{future|past}^{(M,L)}(y)$ між минулим та майбутнім часового ряду $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ розмірністю M ,

$$y_n = u_n + v_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

де (u_n) – випадкова величина, яка представляє "корисний" сигнал та (v_n) – комплексна гауссівська величина, яка відповідає "шуму". Матриця автоковаріацій визначається як

$$R_{f|p}^{(M,L)}(y) = \mathbb{E} \left(\begin{pmatrix} y_{n+L} \\ y_{n+L+1} \\ \vdots \\ y_{n+2L-1} \end{pmatrix} (y_n^*, y_{n+1}^*, \dots, y_{n+L-1}^*) \right). \quad (1)$$

Більш детально, розглядається кількість значущих сингулярних значень матриці наближення $\hat{R}_{f|p}^{(M,L,N)}(y)$ матриці $R_{future|past}^{(M,L)}(y)$, де

$$\hat{R}_{f|p}^{(M,L,N)}(y) = \frac{1}{N} Y_{f,N}^{(M,L)} (Y_{p,N}^{(M,L)})^*, \quad (2)$$

та L – параметр вибірки, N – кількість спостережень та матриці $Y_{f,N}$, $Y_{p,N} \in (ML) \times N$ -вимірними матрицями, які визначаються як

$$Y_{p,N} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_L & y_{L+1} & \dots & y_{L+N-1} \end{pmatrix}$$

і

$$Y_{f,N} = \begin{pmatrix} y_{L+1} & y_{L+2} & \dots & y_{L+N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{2L} & y_{2L+1} & \dots & y_{2L+N-1} \end{pmatrix}.$$

Дана дисертація представляє глибоке, ретельне та послідовне вивчення розподілу власних значень випадкових матриць

$$H = \hat{R}_{f|p}(y) (\hat{R}_{f|p}(y))^*$$

у випадку відсутнього корисного сигналу, тобто $u_n = 0$, та в асимптотичному режимі, де M та N прямують до нескінченності, L залишається фіксованим, та виконується

$$\frac{LM}{N} = c_{M,N} \rightarrow c_* > 0 \quad \text{as} \quad L \in \mathbb{N} \text{ and } M, N \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Основний внесок даної праці для асимптотичного режиму (3), полягає у доведенні того, що нормована рахуюча міра $\hat{\nu}_N$ власних значень матриці H (4) прямує до її невинядкової еквіваленти ν_N ; ця остання міра однозначно визначається замкнутою системою рівнянь для відповідних перетворень Стілтєса. Вивчено носій міри ν_N та доведено, що для достатньо великих N , з імовірністю усі власні значення матриці H належать околу носія міри ν_n .

Дисертація складається з чотирьох частин. У першому розділі представлені загальні факти та мотивація теми дослідження, а також короткий опис ансамблів, що вивчаються у дисертації.

Розділ 2 присвячений вивченню асимптотичних властивостей емпіричного розподілу власних значень $\hat{\nu}_N$ матриць H (4) у випадку, коли сигнал (u_n) відсутній, тобто $(y_n) = (v_n)$. Перетворення Стілтєса міри $\hat{\nu}_N$ визначається резольвентою H . Використовуючи так званий "лінеаризаційний трюк" та аналог формули інтегрування за частинами, автор знаходить невинядкову еквіваленту цієї резольвенти та відповідну міру ν_N . Це дозволяє довести слабку збіжність майже напевно $\hat{\nu}_N - \nu_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Далі показано, що носій ν_N , позначений через $\mathcal{S}_N$, є об'єднанням інтервалів, кінцеві точки яких є екстремумами функції $\phi_{M,N}(w)$,

$$\phi_{M,N}(w) = c_{M,N} w^2 \frac{1}{M} \text{Tr } R_N (R_N - wI)^{-1} \left(c_{M,N} \frac{1}{M} \text{Tr } R_N (R_N - wI)^{-1} - 1 \right),$$

розглянутої для w , для яких

$$\frac{1}{M} \text{Tr } R_N (R_N - wI)^{-1} < 0.$$

Отримана достатня умова того, щоб носій $\mathcal{S}_N$ був представлений кінцевим інтервалом (з можливою δ -функцією Дірака в нулі, якщо $c_* < 1$). За допомогою нерівностей Пуанкаре-Неша дана оцінка варіацій випадкових величин, що пов'язані з резольвентою H .

Усі ці результати вимагають активного використання ряду складних технічних інструментів разом із довгими послідовностями непротих обчислень, але головним результатом цього розділу є твердження, дане у Теоремі 3.3 глави 3, що з імовірністю один, поза доповненням $I_\varepsilon^{(N)}$ до $[x_{-,N}, x_{+,N}]$ для усіх $N \geq N_0$ не міститься власних значень матриці $H_{M,L,N} = H$ (2), де $x_{-,N}$ і $x_{+,N}$ є нижньою та верхньою границею носія $\mathcal{S}_N$ та $N_0 = N_0(\varepsilon, \omega)$. Доведення базується на отриманих оцінках виразів резольвенти у поєднанні з добре відомим методом Haagerup-Thorngbjoernsen.

Четвертий розділ присвячений вирішенню схожої задачі але у більш складному випадку. Більш детально, розглядається ансамбль $N^2 \times N^2$ -вимірних ермітових

нормованих матриць коваріацій,

$$\mathcal{M}_N = \frac{1}{N^2} \sum_{\mu_1}^M X^{(\mu)} \left(X_N^{(\mu)} \right)^*,$$

де вектори $X_N^{(\mu)}$ визначаються відношенням

$$X_N^{(\mu)} = B_N \cdot \left(Y_N^{(\mu)} \otimes Y_N^{(\mu)} \right),$$

елементи $Y_{N,i}^{(\mu)}$ є випадковими величинами, для яких

$$\mathbb{E} Y_{N,i}^{(\mu)} = 0 \quad \text{and} \quad \mathbb{E} Y_{N,i}^{(\mu)} Y_{N,j}^{(\nu)} = \delta_{ij} \delta_{\mu\nu}$$

та (B_N) є послідовністю не випадкових ермітових $N^2 \times N^2$ - вимірних матриць.

Головним результатом цього розділу є твердження, що якщо послідовність нормованих рахуючих мір σ_N власних значень матриць $B_N J^{(N)} B_N$ збігається до деякої міри σ , де

$$J_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{(N)} = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{q}} + \delta_{\bar{\mathbf{p}},\mathbf{q}}, \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2), \quad \bar{\mathbf{p}} = (p_2, p_1)$$

та матриці B_N рівномірно обмежені, тоді послідовність (ν_N) слабко збігається при

$$M, N \rightarrow \infty, \quad C_N = \frac{M}{N^2} \rightarrow c > 0$$

до деякої не випадкової міри ν , перетворення Стілтєса $f(z)$ якої однозначно визначається рівнянням

$$f(z) = \frac{1}{c - z f(z) - 1} f_0 \left(\frac{z}{c - z f(z) - 1} \right).$$

Зауваження

- Найбільшу кількість зауважень викликає розділ 4, де вивчається нормований розподіл власних значень моделі з компонентами тензорного добутку. Незрозуміло, чому саме вивчається така модель з тензорними добутками, тобто які задачі статистики мотивують таку постановку. Далі, також не зрозуміло що спонукає розгляд таких моделей з наявністю послідовності не випадкових матриць B_N .
- Рівняння (4.26) є головним результатом Теорема 4.1. В роботі сказано, що доведення єдності його рішення є стандартним. Бажано було б, тим не менш, щоб відповідний доказ було наведено.
- Питання про властивості граничної міри (носії, асимптотична поведінка поблизу границь носія та інші) чиє перетворення Стілтєса задовільняє рівнянню (4.26) дуже цікаве. Особливо в тому, як послідовність матриць B впливає на ці властивості. Відповідні результати додали б ваги до цієї роботи.

- Менш важливі зауваження стосуються вживання деяких словосполучень, які не є строго математичними. Зокрема, авторка постійно користується терміном "емпірична матриця коваріацій", але слово "емпірична" не пояснюється. Дивись також сторінку 32 - "емпіричної матриці коваріацій спостережень". Якщо це традиційний вираз, то це треба пояснити, в іншому разі треба уникнути застосування таких словосполучень.
- Після формули (1.9) (яка насправді повинна бути наведена як визначення цієї "емпіричної" матриці коваріацій) говориться що вона є "достатньо хорошим наближенням" "справжньої" матриці R_N . Тут теж треба бути ретельнішим у використанні належних строгих математичних словосполучень, щоб не ввести читача в оману. Теж саме стосується терміну "нормована рахуюча міра".
- В роботі помічено декілька незначних друкарських помилок:
 - на сторінці 8: where - when;
 - стор. 8: sequence of integers
 - стор. 26: цей метод - який метод?
 та деякі інші, які не впливають на якість праці.

Але ці недоліки є несуттєвими та не впливають на мою дуже високу оцінку дисертації.

Окрім навичок, необхідних для вирішення складних технічних проблем, представлена робота вимагала глибокого розуміння механізмів методів, що використовувалися, і доброї математичної інтуїції. Автор показав, що вона здатна вирішити ці непрості питання з успіхом. Перелік інструментів, що використовуються для доведення тверджень може бути вже довгим; представлена дисертація показує, що кандидат володіє ними дуже добре і може з легкістю їх використовувати.

Як зазначено вище, основна частина обчислень містить довгі ланцюги перетворень із громіздкими та складними формулами. Однак дисертація добре структурована і легко читається. Автор показує добре знання існуючої літератури, починаючи від загальних монографій і закінчуючи більш вузькими за спеціальністю науковими роботами.

Дана дисертація є фундаментальною працею, усі доведені в ній результати – нові та є важливим внеском у теорію випадкових матриць та її застосування.

Я не маю сумніву, що дисертантка заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 - Математика та статистика за спеціальністю 111 - Математика.

Науковий опонент
професор Університету
Версаль-Сен-Кантен-ан-Івлін (Франція)

О.М.Хорунжий



Хорунжий О.М.

Савицька О.М.