

**ВІДГУК**  
**офіційного опонента на дисертаційну роботу**  
**СИНЕЛЬЩИКОВА Сергія Дмитровича**  
**«Дії некомутативних груп і квантових алгебр на точкових**  
**просторах та їх q-аналогах», представлену на здобуття наукового ступеня**  
**доктора фізико-математичних наук за спеціальністю**  
**01.01.01 – математичний аналіз**

Рецензована робота складається з 7 розділів, з котрих розділи 2 - 4 містять результати з ергодичної теорії, а розділи 5 - 7 – з теорії квантових груп. Результати досліджень, подані у дисертації, належать до кола проблем, які у різні часи привертали увагу багатьох визначних фахівців у галузях ергодичної теорії та теорії квантових груп. Це питання класифікації коциклів динамічних систем і їх застосування до побудови нових нетривіальних групових дій і вивчення їх змістовних властивостей, регуляризації дій груп та групоїдів на вимірних відношеннях еквівалентності, вивчення полів стабілізаторів невірних групових дій, ентропійної теорії дій загальних аменабельних груп, побудова квантових аналогів обмежених симетричних областей і дослідження асоційованих структур, зокрема зображень відповідних квантових алгебр і диференціальних числень; побудова і дослідження квантових алгебр з ідемпотентами; опис та класифікація симетрій найпростіших квантових обмежених симетричних областей.

У розділі 2 доведено, що кожна аменабельна дія локально компактної сепарабельної групи (не обов'язково вільна) є дією Маккі для коцикла ергодичного автоморфізму. Встановлено, що аменабельність ергодичної дії є тотожною властивістю до аменабельності траєкторного відношення еквівалентності, разом з аменабельністю стабілізаторів майже всіх точок простору дії. Це становить заключний результат з існування коциклів із заданою дією Маккі, що підбиває підсумок попереднім частковим результатам таких спеціалістів, як Вершика, Крігера, Фельдмана, Мура, К. Шмідта, Конна, Зіммера, Голодця, Безуглого та інших. Але набагато більш змістовним уявляється так звана теорема єдиності для коциклів, насамперед з огляду на велику кількість застосувань. Вона, з усіма її варіантами, становить вичерпну класифікацію коциклів аменабельних відношень еквівалентності. Наведено два застосування зазначених вище результатів цього розділу: побудовані змістовні приклади ергодичних дій з тривіальною фундаментальною групою, а також встановлено зв'язок між властивістю необмежених лакун для дійснозначних коциклів і наявністю інваріантної міри для відповідних потоків

Маккі. Варто відзначити, що насправді різноманітних застосувань різних версій теореми єдиності набагато більше у роботах різних авторів.

У розділі також одержано теореми регуляризації для груп автоморфізмів вимірних відношень еквівалентності, з подальшим узагальненням на дії вимірних групоїдів.

Іншим об'єктом розгляду є групи псевдогомеоморфізмів польських просторів без ізольованих точок, що є виходом поза межі вимірної ергодичної теорії. Всі об'єкти у цьому контексті розглядаються з точністю до підмножин першої категорії Бера (замість множин міри нуль). Доводяться теореми існування та єдиності для коциклів з щільними образами в довільних польських групах, зовнішню спряженість зчисленних груп автоморфізмів траєкторних відношень еквівалентності. Кидається у вічі більш загальний характер цих результатів, оскільки аменабельність об'єктів розгляду не відіграє тут жодної ролі. Ці результати є логічним продовженням відомої теореми Сулівана, Вейса та Райта про траєкторну еквівалентність груп псевдогомеоморфізмів на польських просторах.

Розділ 3 присвячений вивченню властивостей полів стабілізаторів невірних ергодичних групових дій. Тривіальне спостереження полягає в тому, що стабілізатори є спряженими (зокрема, ізоморфними) над кожною траєкторією, і отже клас спряженості (ізоморфізму) стабілізаторів є інваріантом ергодичної дії. Могло б здаватися, що цей клас має бути константою. Здобувачем показано, що за певних умов воно так і є: в роботі відокремлено достатні умови спряженості та ізоморфізму стабілізаторів над усім простором. Але, на мою думку, більш цікавими, ніж зазначені теореми, є приклади дій з неспряженими, і навіть з неізоморфними стабілізаторами, існування яких є дещо несподіваним.

Розділ 4 містить результати з ентропійної теорії дій зчисленних аменабельних груп. Після робіт Вейса, Камінського та Конца, що узагальнюють класичну теорію ентропії Колмогорова-Синяя для індивідуальних перетворень простору з мірою на випадок прямих сум групи цілих чисел, виникло питання про подальші узагальнення. Таке узагальнення побудовано для скінчено генерованих нільпотентних груп без кручень, які, як і група цілих чисел, є впорядкованими групами. Здобувач визначає та досліджує розбиття з різноманітними властивостями інваріантності, одержує опис алгебр Пінскера, доводить, що дії зазначених груп з додатною ентропією мають зчислений лебегівський спектр. При цьому здолано труднощі, пов'язані з некомутативністю груп.

Класичним результатом Орнштейна встановлено існування певної відстані між властивостями бернулліївості та цілком позитивної ентропії (K-

властивості) для індивідуальних автоморфізмів простору з мірою. Відтоді постала проблема існування небернулліївських дій з цілком позитивною ентропією для довільних зчисленних аменабельних груп. На відміну від згаданих вище скінчено генерованих нільпотентних груп без кручень, у такій загальній ситуації не працюють методи, пов'язані з впорядкованістю групи що діє. Здобувачем запроваджено новий метод, заснований на так званих коіндукованих діях. З'ясовано, що в межах процедури коіндукції властивості бернулліївості та цілком додатної ентропії для оригінальної дії підгрупи успадковуються коіндукованою дією групи. Отже, для аменабельних груп, що містять елемент нескінченного порядку, коіндукція дає поширення згаданого класичного результату Орнштейна. Варто зазначити, що запропонована конструкція коіндукованих дій знайшла також різноманітні застосування в роботах інших фахівців.

Розділ 5 присвячений вирішенню низки задач, що входять до кола проблем у межах започаткованої Л. Ваксманом та його співробітниками програми вивчення квантових обмежених симетричних областей. У розділі побудовано  $q$ -аналог функтора Бернштейна, що є важливим кроком на шляху до квантового аналога кохомологічної індукції Неппа-Вогана. Вивчено властивості диференціальних числень на поліноміальних алгебрах над квантовими передоднорідними векторними просторами комутативного параболічного типу. Вивчені основні факти теорії функцій на квантових аналогах гіперболічних просторів та відповідних ізотропних конусів. Подано квантовий аналог оператора Пуассона, а також рівнянь Хуа, що дають необхідну умову приналежності функції до образу квантового оператора Пуассона.

В розділі 6 побудовано нові біалгебри на основі  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ , які містять ідемпотенти та інші дільники нуля. Це становить інтерес з точки зору вивчення проблем суперсиметрії. За додаткових умов наведено явні формули для  $R$ -матриць. Визначено  $R$ -матриці, що задовольняють умові регулярності фон Неймана.

В літературі з теорії квантових груп розглядалася лише одна структура  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -модульної алгебри (симетрія) на квантовій площині. В розділі 7 досліджено структури  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -модульної алгебри на квантовій площині та її розширення Лорана. Доведено, що існує незчисленна кількість класів ізоморфізму таких структур, і подано їх повний перелік. З іншого боку, кількість серій таких квантових симетрій лише скінченна. З огляду на це, розглянуто також більш симетричний об'єкт, ніж стандартна квантова площина, а саме її розширення Лорана. Подано перелік симетрій загального положення цього розширення, а також повний перелік симетрій, у яких дія картанівської твірної

не зводиться до множення мономів на константи, як у випадку стандартної квантової площини.

Всі вище перелічені результати мають теоретичний характер. Їх достовірність не визиває сумніву. Вони є вирішенням низки змістовних математичних задач, а деякі з результатів, разом із вперше запровадженими методами їх одержання, знайшли застосування та отримали подальший розвиток у роботах багатьох фахівців. Здобувач демонструє вільне володіння різноманітною математичною технікою.

Головні результати дисертації опубліковані в міжнародних фахових виданнях. Вони також доповідались на міжнародних конференціях і є широко відомими.

Автореферат і основні положення дисертації є ідентичними за змістом.

До недоліків дисертації треба віднести певну кількість друкарських помилок. Крім того, незрозуміло, чому здобувач не включив до дисертації матеріали досить змістовних робіт, які позначені наприкінці вступу як такі, що опубліковані додатково з питань, близьких до тематики дисертації. Наведені зауваження не відбиваються на загальному позитивному враженні від дисертаційної роботи.

З огляду на викладене вище, вважаю, що дисертація Синельщикова Сергія Дмитровича «Дії некомутативних груп і квантових алгебр на точкових просторах та їх  $q$ -аналогах» є завершеною науковою працею, актуальність якої не підлягає сумніву. Дисертація відповідає всім вимогам, що висувають до докторських дисертацій, а її автор, Синельщиков Сергій Дмитрович, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент

доктор фізико-математичних наук

професор кафедри вищої математики

ХНУ імені В.Н. Каразіна



Ю.М. Дюкарев

Підпис   
ЗАСВІДЧУЮ  
Учений секретар Харківського національного  
університету імені В.Н.Каразіна

