

ВІДГУК

офіційного опонента про дисертаційну роботу
Рибалка Володимира Олександровича
«Існування і асимптотична поведінка
розв'язків задач математичної фізики»,
подану на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика

Дисертаційна робота В. О. Рибалка присвячена розробці нових та удосконаленню відомих методів дослідження важливих задач сучасної математичної фізики. Тематика дисертаційного дослідження досить широка: варіаційні задачі для функціонала Гінзбурга–Ландау, спектральні задачі для еліптичних диференціальних операторів з малим параметром і сингулярно збуреними коефіцієнтами, деякі нелінійні задачі усереднення та крайові задачі з вільними межами. Незважаючи на таку різноманітність об'єктів, більшість з них мають спільну рису: некомпактність відповідних варіаційних задач та/або суттєве змінення властивостей задач при граничному переході (зокрема, втрата їх компактності). Це суттєво ускладнює вивчення таких задач і вимагає розробки нових специфічних методів дослідження. Автор дисертації зосереджує свою увагу на центральних питаннях про умови існування розв'язків досліджуваних задач та їх поведінку.

Більшість з розглянутих у дисертації математичних задач виникає у фізиці надпровідників, і за своєю складністю є чималим викликом для математика-аналітика. Тому цілком природно, що ця робота виконана у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Веркіна НАН України, провідному науковому центрі з дослідження надпровідності, який має у своєму математичному відділенні сильні школи з теорії диференціальних рівнянь і функціонального аналізу. Безсумнівно, тема дисертації В. О. Рибалка є актуальною і важливою для застосувань у природничих науках, насамперед у квантовій фізиці (теорія надпровідників), та з точки зору чистої математики, зокрема, для теорії рівнянь з частинними похідними і теорії усереднення.

Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел. Окрім того, вона містить анотації, список публікацій здобувача за темою дисертації і 14 додатків. Загальний обсяг дисертації становить 452 сторінки, а обсяг її основної частини налічує 329 сторінок.

Основній частині дисертації передують анотації українською і англійською, які стисло але змістовно повідомляють про основні результати роботи. Анотації доповнює список публікацій автора за темою дисертації. Він

складається з 20 статей у міжнародних та вітчизняних математичних журналах і 4 публікацій (тез доповідей) у матеріалах міжнародних наукових конференцій.

Основна частина дисертації складається із вступу, чотирьох розділів і висновків. Для зручності читачів кожний розділ завершується висновками до нього, у яких вказано основні його результати.

У вступі обґрунтовано вибір теми дослідження та її актуальність, вказано держбюджетні науково-дослідні теми, у рамках яких воно виконувалося, сформульовано мету, об'єкт, предмет і завдання дослідження, вказано методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих у дисертації результатів та особистий внесок здобувача у них, подано інформацію про їх апробацію і публікації. Обґрунтовуючи актуальність свого дослідження, автор наводить достатню кількість літературних посилань на роботи відомих математиків, серед яких чимало недавніх публікацій.

Перший розділ дисертації є найбільшим за обсягом. Він присвячений дослідженню некомпактних варіаційних задач для функціонала Гінзбурга–Ландау, заданого на класі усіх функцій з комплексного гільбертового простору Соболева $H^1(G)$, які мають модуль рівний 1 на межі обмеженої плоскої області G і вказані степені відображення на компонентах межі. Ці задачі тісно пов'язані з теорією фазових переходів у надпровідниках. Для двозв'язної області G класу C^1 доведено, що для вказаного функціонала існують локальні мінімізанти з вихорами. При цьому досліджено окремо випадки як спрощеного функціонала (що не враховує магнітний потенціал), так і повного функціонала. Вивчено асимптотичну поведінку цих локальних мінімізантів, коли показник Гінзбурга–Ландау прямує до нескінченності (так звана границя Лондонів). З'ясовано, що вихори наближаються до межі, а в їх околах зосереджуються скінченні квантовані енергії. Доведено критерій існування глобальних мінімізантів вказаного функціонала і досліджено їх поведінку, коли цей показник прямує до числа $1/\sqrt{2}$ зліва (апроксимація інтегровного випадку). Серед інших основних результатів цього розділу відмічу критерій існування глобальних мінімізантів функціонала Гінзбурга–Ландау в однозв'язних областях з заданим степенем відображення на межі. (На мою думку, автор даремно не вказав цей результат серед основних, що виносяться на захист.)

У другому розділі дисертації (теж досить великому за обсягом) досліджено спектральні задачі для еліптичних диференціальних рівнянь другого порядку, які містять малий параметр $\varepsilon > 0$ і сингулярні дійсні коефіцієнти вигляду $a^{i,j}(x, x/\varepsilon^\alpha)$, де x пробігає багатовимірну обмежену область, у якій задано рівняння, а додатне число α є фіксованим. Еліптичні з малим параметром задачі виникають, зокрема, у механіці і теорії керування. При-

пускається, що матриця старших коефіцієнтів $a^{i,j}$ є симетричною і рівномірно еліптичною. Основні результати цього розділу стосуються асимптотичної поведінки перших власних значень крайових задач Діріхле і Неймана для розглянутих еліптичних рівнянь. Доведено збіжність послідовності перших власних значень і відповідних власних функцій задачі Діріхле у випадку, коли коефіцієнти еліптичного рівняння є функціями періодичними за $y := x/\varepsilon^\alpha$, і задачі Неймана у випадку двічі неперервно диференційовних коефіцієнтів, не залежних від малого параметра. Досліджено також крайову задачу в тонкому циліндрі з умовою Неймана на бічній поверхні циліндра і третьою крайовою умовою на його основах. Для цієї задачі доведено збіжність перших власних значень і перетворень $\varepsilon \log u_\varepsilon$ перших власних функцій u_ε у випадку подібному до розглянутого при вивченні задачі Діріхле. Окрім того, отримано двочленні асимптотичні формули для першого і наступних власних значень.

Третій і четвертий розділи дисертації істотно менші за обсягом, але містять важливі математичні результати з точки зору їх застосувань у фізиці і біології. У третьому розділі досліджено дві задачі усереднення зі складними колективними ефектами, які спричинені неоднорідностями розглянутих об'єктів. Перша з них служить двовимірною математичною моделлю надпровідника з великим числом періодичних мілких отворів (які моделюють чужорідні домішки) за умови, що на нього діє слабе рівномірне магнітне поле. Досліджено задачу про усереднений опис великого числа вихорів у такому надпровіднику. Знайдено умови на період, розмір отворів і величину зовнішнього магнітного поля, за яких у такому надпровіднику виникають структури у вигляді вкладених областей з кратними вихорами. Доведено, що за цих умов послідовність узагальнених функцій, які дають усереднений опис розподілів вихорів, слабо збігається, якщо період прямує до нуля. Більше того, знайдено ефективну (усереднену) задачу, розв'язком якої є ця слабка границя

Також у третьому розділі досліджено один клас нелінійних еліптичних крайових задач у періодично перфорованих обмежених багатовимірних областях з третьою крайовою умовою на межі дірок і умовою Неймана на зовнішній межі. Знайдено достатні умови, серед яких — монотонність диференціальних операторів, за яких розв'язок цієї задачі збігається у середньому квадратичному до розв'язку відповідної усередненої задачі, коли період прямує до нуля. Остання містить нетривіальну праву частину у крайовій умові на зовнішній межі області, що є новим ефектом для задач такого типу. Подібний результат отримано і для параболічного аналогу цих задач.

У четвертому розділі дисертації досліджено двовимірну крайову задачу з вільною межею, яка описує рух живих клітин на субстраті. Ця зада-

ча складається з гідродинамічного рівняння і рівняння адвекції-дифузії та умов нульового напруження і нульового потоку. Еволюція вільної межі описується кінематичною крайовою умовою щодо нормальної швидкості межі. Доведено, що вказана задача має розв'язки типу біжучих хвиль, а також не-радіальні стаціонарні розв'язки. Встановлено біфуркаційні властивості цих розв'язків.

У висновках до дисертації подано перелік основних її наукових досягнень. Список використаних джерел налічує 206 найменувань, є досить повним і оформленим в одному стилі.

У 14 додатках А–Н наведено доведення деяких допоміжних технічних результатів, використаних у дисертації.

Дисертаційна робота написана досить чітко з обґрунтуванням результатів. Автореферат адекватно відображає її зміст.

Втім, до змісту дисертації та автореферату є такі зауваження:

1. У вступ до дисертації та в її авторефераті у підрозділі «Наукова новизна одержаних результатів» можна було б детальніше охарактеризувати результати третього розділу дисертації. Бажано уточнити використані там загальні фрази “описано поведінку вихоревих структур” і “знайдено новий колективний ефект”, зазначивши у чому особливості згаданої поведінки і в чому полягає знайдений ефект.

2. З огляду на важливе значення низки результатів дисертації для природничих наук, підрозділ «Практичне значення одержаних результатів» викладено занадто формально. Не завадило б зазначити, для яких галузей наук є корисними результати, отримані у дисертації.

3. У дисертації можна було б приділити трохи уваги фізичному змісту функціонала Гінзбурга–Ландау, який є основним об'єктом дослідження у першому її розділі.

4. У підрозділі «Наукова новизна одержаних результатів» використано термін “плавно змінні коефіцієнти”, який не є загальноприйнятим у математиці і означає двічі неперервну диференційовність.

5. В авторефераті на с. 16 бажано більш детально сформулювати постановку задачі, яка досліджується у підрозділі 2.2 дисертації (пор. з с. 224 дисертації).

6. У списку публікацій автора за темою дисертації вказано лише 4 тези доповідей у матеріалах міжнародних наукових конференцій. Мабуть, таких тез автор має дещо більше з огляду на подану ним інформацію про апробацію результатів дисертації.

7. У дисертації та авторефераті трапляються стилістичні та друкарські помилки, але їх мало.

Ці зауваження жодним чином не впливають на загальне дуже позитивне враження від дисертації.

Всі основні результати дисертації є новими. Їх достовірність ґрунтується на математичних доведеннях. Результати роботи уповні представлено в 24 опублікованих працях, серед яких 20 статей у фахових наукових виданнях. Загалом 18 статей надруковано у міжнародних журналах, які входять до наукометричних баз даних SCOPUS і Web of Science Core Collection. Підкреслю, що принаймні 9 статей надруковано у найпрестижніших математичних журналах, які знаходяться у першому квартилі SCImago Journal Rank. Окремі результати і дисертація у цілому доповідались на численних міжнародних наукових конференціях і семінарах як в Україні так і за кордоном.

Дисертація виконана на високому науковому рівні і є завершеним науковим дослідженням. Вона має теоретичний характер. Її результати та методи можуть бути використані у подальших дослідженнях у математичній фізиці і теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними та мають прикладне значення, зокрема, для фізики надпровідників.

Дисертація відповідає паспорту спеціальності 01.01.03 — математична фізика.

Вважаю, що дисертаційна робота «Існування і асимптотична поведінка розв'язків задач математичної фізики» відповідає всім чинним вимогам, що висуваються до докторських дисертацій, а її автор Рибалко Володимир Олександрович заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика.

Офіційний опонент,
доктор фізико-математичних наук,
провідний науковий співробітник лабораторії
диференціальних рівнянь з частинними похідними
у складі відділу нелінійного аналізу
Інституту математики НАН України

10.12.2019

О. О. Мурач

Підпис Мурача Олександра Олександровича засвідчую

Вчений секретар
Інституту математики НАН України,
к.ф.м.н.

10.12.2019



І. В. Соколенко