

ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР
ім. Б.І. ВЕРКІНА НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б.І. Веркіна Національної академії наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Івахненко Олег Володимирович

УДК 538.915, 538.945

ДИСЕРТАЦІЯ

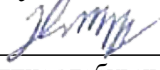
**ДИНАМІКА НЕАДІАБАТИЧНИХ ПЕРЕХОДІВ
В КВАНТОВИХ ТА КЛАСИЧНИХ
ДВОРІВНЕВИХ СИСТЕМАХ**

104 — Фізика та астрономія

10 — Природничі науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

 О.В. Івахненко
(підпис здобувача)

Науковий керівник: **Шевченко Сергій Миколайович**, доктор фізико-
математичних наук, старший науковий співробітник

Харків 2023

АНОТАЦІЯ

Івахненко О. В. Динаміка неадіабатичних переходів в квантових та класичних дворівневих системах. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 104 – «Фізика та астрономія» (10 – Природничі науки). – Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна Національної академії наук України, Харків, 2023.

Дисертація присвячена дослідженню фундаментальних динамічних явищ, які виникають внаслідок збудження квантових та класичних дворівневих систем у мікроскопічних та мезоскопічних структурах.

У **вступі** коротко обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету та основні завдання дослідження, також об'єкт, предмет та методи дослідження. Сформульовано наукову новизну та практичне значення отриманих результатів. Наведено відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації. Також приведені відомості про структуру та обсяг дисертаційної роботи.

Розділ 1 присвячено огляду та аналізу літератури за темою дисертації. В цьому розділі розглянуто основні явища, які виникають при збудженні дворівневих систем (ДРС), які ще також називаються кубітами. Зокрема введено перехід Ландау-Зінера-Штукельберга-Майорани (ЛЗШМ).

Представлено дворівневу систему, як одну з базових моделей в квантовій фізиці яка описує явища, які повсюдно зустрічаються в природі. З одного боку це одна з найпростіших непростих задач в квантовій механіці, з іншої сторони, це забезпечує основу для квантових технологій, де ДРС використовується в якості кубіта. Там також введено типовий гамільтоніан дворівневої системи, два основних базиси: діабатичний та адіабатичний, оператор переходу між цими двома базисами. Велика кількість різноманітних систем, можуть бути розглянуті як ДРС.

Обґрунтовано відношення всіх чотирьох науковців Ландау, Зінера, Штукельберга та Майорани до розв'язку задачі про лінійне збудження ДРС, яку вони розв'язали у різний спосіб на прикладі різних систем, але отримали такий же результат для вірогідності збудження.

Вивчено поточний стан проблеми динаміки ДРС та наведено зв'язок з попередніми роботами.

Розділ 2 присвячено детальному аналізу одноразового переходу ЛЗШМ та дослідженню його властивостей.

Детально перевиведено та розширено підхід Зінера до розв'язку задачі про збудження ДРС. Згідно підходу Зінера рівняння Шредінгера можна переписати у вигляді двох канонічних рівнянь для спеціальних функцій параболічного циліндру, в термінах яких отримано: вірогідність збудження; а також повний набір фази; аналітичну динаміку всіх параметрів ДРС під дією лінійного збудження; оператор прямого та зворотного діабатичного та адіабатичного переходу з фазою Стокса.

Застосовано аналітичні та наближені розв'язки для вивчення різних властивостей одноразового переходу ЛЗШМ, таких як динаміка для різних швидкостей переходу та різними початковими умовами, а також тривалості переходу ЛЗШМ в адіабатичному та діабатичному базисах. У цьому розділі також введено метод матриць переходу та, вперше, перехід зі збереженням заселеності, який приводить до того, що кінцева заселеність залишається такою ж як і до переходу не дивлячись на збудження.

Розділ 3 присвячено дослідженню різних підходів до багаторазових переходів ЛЗШМ під дією гармонічного сигналу збудження та деяких властивостей багаторазового переходу ЛЗШМ та порівнянню найбільш розповсюджених підходів.

В адіабатично-імпульсній моделі (АІМ) є два типи еволюції: адіабатична та діабатична (перехідна). Також там вивчено шлях для отримання матриці еволюції дворазового переходу ЛЗШМ з аналогією до інтерферометру Маха-Зендера, та шлях для узагальнення теорії на багаторазові переходи ЛЗШМ. Там продемонстровано конструктивну та деструктивну інтерференцію для багаторазових переходів ЛЗШМ, а також аналог частоти Рабі в АІМ. Отримані формули для усередненої за часом заселеності верхнього рівня в адіабатичному базисі та більш точна формула для діабатичного базису. Детально вивчено наближення хвилі, що обертається (НХО). Досліджено вплив частоти збудження на середню за часом вірогідність збудження, та інтерферограми. Показано багатофотонні осциляції Рабі на

інтерферограмах та вивчена можливість використовувати в НХО періодичні сигнали різної форми. Також в цьому розділі вивчено метод Флоке, який може бути застосований для будь-якого періодичного гамільтоніану. Першим наближенням по малій мінімальній відстані між рівнями, являється НХО, а узагальнена теорія збурень Ван-Флека дозволяє отримати друге наближення по теорії Флоке та дозволяє отримати поправку, яка відповідає за зміщення резонансів Блоха-Зігерта.

Досліджено вплив релаксації декогеренції та температури на динаміку дворівневої системи. За допомогою рівняння Ліндблада для ДРС у дисипативному середовищі, продемонстровано що нахил Фур'є образу інтерферограм пропорційний до коефіцієнту декогеренції. Продемонстровано можливість використання Фур'є образів інтерферограм для виявлення їх властивостей за допомогою квантової фазової томографії.

Детально порівняно найбільш популярні наближення, які використовуються для симуляції динаміки ДРС під дією періодичного збудження. Зокрема наведено порівняння інтерферограм з одними і тими ж параметрами, побудованими різними методами, та областей застосування різних методів. А також вперше представлена відносна складність розрахунків інтерферограм за різними методами як час необхідний на побудову однієї і тієї ж інтерферограми різними методами та наближеннями.

Розділ 4 присвячено дослідженню та демонстрації використання багаторазових неадіабатичних переходів ЛЗШМ як базису для квантових логічних операцій. Показано, що переходи ЛЗШМ мають декілька переваг над осциляціями Рабі, які зазвичай використовуються для квантових логічних операцій, такі як більша швидкість виконання операції при більшій точності. Що дозволяє зробити більше операцій до того моменту як вплив дисипативного середовища буде значущим.

Розділ 5 присвячено теоретичному вивченню взаємодії кубіту типу трансмон з напівобмеженою лінією передач, та коефіцієнту відбиття такої системи та порівнянню результатів з експериментальними даними. Особливості конструкції такої системи приводять до зникнення нульового резонансу на інтерферограмах. Вивчено особливості системи кубіт навпроти дзеркала та типові значення параметрів такої системи.

Вперше створено теорію для симуляції поведінки такої системи, зокрема наведено спосіб отримання гамільтоніану системи, подвійно застосовано НХО, перший раз для отримання так званого одягненого гамільтоніану, вдруге для отримання середньої за часом вірогідності збудження кубіту. Показано, що середня за часом вірогідність збудження пропорційна зменшенню коефіцієнту відгуку такої системи, продемонстровано схожість та відмінність теоретичних та експериментальних інтерферограм.

Вперше обговорено відмінності між теорією та експериментом на прикладі інтерферограм та пропонується ввести нелінійну поправку до амплітуди збудження для отримання кращого співпадіння з експериментом. Однією з переваг такого розташування кубіту та напівнескінченної лінії передач є можливість маніпулювати поглинанням дворівневої системи, що забезпечує новий спосіб маніпулювання квантовими станами.

Розділ 6 присвячено дослідженню схожості та відмінності між кубітом та класичними системами зв'язаних осциляторів.

За допомогою наближення повільно змінюваної оминаючої та ніближення малої релаксації можна перейти від рівняння Ньютона до рівняння Шредінгера для класичної системи з двох зв'язаних осциляторів. Також наводяться вирази для параметрів класичної системи, які аналогічні параметрам кубіту, та детально вивчені принципові відмінності між такою квантовою та класичною системами.

Описано розв'язок рівняння Шредінгера з класичними аналогами параметрів для отримання затухаючих осциляцій Рабі, та порівнюється теорія, чисельний розрахунок динаміки кубіту, та динаміки класичної системи. Детально досліджені інтерферограми, подібні до інтерферограм кубіту для різних параметрів, зокрема вперше розрахований результат інтерферометрії класичної системи під дією шумового збуджуючого сигналу прямокутної форми та продемонстрована її схожість до отриманого за допомогою кубіту. Цю аналогію можна використати для симуляції інтерференційних явищ на класичній системі, яка зазвичай не потребує екстремально низьких температур для роботи і може працювати при кімнатній температурі, що робить їх більш доступними.

Розділ 7 присвячено дослідженню динаміки стиснутої з боків мембрани,

яка має два стабільних стани для використання її як одії з обкладок мем'ємності (конденсатор з ефектом пам'яті).

Досліджена динаміка стиснутої випуклої мембрани за допомогою теорії пружності, яка приводить до інтегро-диференційного рівняння четвертого ступеня. Це рівняння, в свою чергу, можна розкласти по власним функціям стиснутої мембрани, що призведе до системи диференційних рівнянь першого ступеня на власні функції. Вперше показано, що принципово є два типи перескоку мембрани симетричний та асиметричний, та що для асиметричного перескоку потрібна менша порогова сила, а отже перескок в основному буде відбуватись асиметрично. Також вперше показано, що для знаходження мінімальної порогової сили для переключення мембрани в інше положення достатньо розглядати всього дві власні функції, що значно спрощує розрахунок цієї сили. Показана можливість та розрахована порогова сила для зворотного перемикання після припинення дії цієї сили на стиснуту мембрану. Порівняно результати розрахунків для порогової сили необхідної для перемикання з іншими теоретичними та чисельними розрахунками, та показано гарний збіг порогової сили для несиметричного перемикання з іншими методами.

Ключові слова: Кубіт, дворівнева система, перехід Ландау-Зінера-Штукельберга-Майорани, метод матриць переходу, адіабатично-імпульсна модель, наближення хвилі що обертається, мем'ємність, наномеханічний резонатор, трансмон, інтерферометрія, неадіабатичний перехід, квантові логічні гейти, вигнута мембрана, шумовий сигнал, гармонічний осцилятор, спин $1/2$, тунелювання, непружне розсіяння.

ABSTRACT

Ivakhnenko O. V. Dynamics of nonadiabatic transitions in quantum and classical two-level systems. — Qualification scientific work printed as manuscript.

dissertation for a Doctor of Philosophy degree in speciality 104 – «Physics and Astronomy» (10 – Natural Sciences). – B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, NAS of Ukraine, Kharkiv 2023.

The dissertation is devoted to the study of fundamental dynamical phenomena which emerge due to the driving of the quantum and classical two-level systems in microscopic and mesoscopic structures.

In the **introduction** is briefly justified the relevance of the dissertation topic, defined purpose and main tasks of the research, objects, subject, and research methods. The scientific novelty is formulated and the practical value of the obtained results are described. Also, this chapter has discussed the information about the publications, personal applicant's contribution, and approbation of the dissertation results. The information, about the structure and volume of the dissertation is also given.

The **chapter 1** is devoted to the review and analysis of the literature related to the topic of the dissertation. The main phenomena of two-level system (TLS) driving are briefly described. In particular, I introduce Landau-Zener-Stückelberg-Majorana transition. This chapter has described that a two-level system (TLS) is one of the basic models in quantum physics and describes phenomena that are ubiquitous in nature. On one hand, this is the simplest nonsimple problem in quantum mechanics, on the other hand, this provides the basis for quantum technologies, where a TLS is used as a qubit. There also typical Hamiltonian of the TLS, with two main bases diabatic and adiabatic, and transition operators between these bases is introduced. A wide variety of different systems is demonstrated, which could be considered as a TLS.

There we describe the connection of all four scientists Landau-Zener-Stückelberg-Majorana to solving a problem about linear excitation of the TLS, they solved that problem in completely different ways on different systems, but they obtained the same result for the excitation probability. There are relations to the previous works described.

The **chapter 2** is devoted to derivation and analysis of single Landau-Zener-Stückelberg-Majorana transition and its properties.

There we introduce and expand Zener's approach. According to Zener's approach, the Schrödinger equation could be rewritten as two canonical equations of parabolic cylinder special functions, in terms of which I obtained: analytical excitation probability; total gained phase; dynamics of all parameters of the two-level system under linear excitation; transition diabatic evolution operator with the Stokes phase.

I apply analytical and approximated solutions to investigate different properties of the single-passage LZSM transition such as dynamics for a different speed of transition and different initial conditions, as well as time of the transition in adiabatic and diabatic bases. This chapter has considered also the derivation of the transfer matrix method, and first time occupation conserving transition, which could lead to the same final occupation probabilities after the transition as it was before despite the excitation.

The **chapter 3** is devoted to describing different approaches for multiple LZSM passage driving, some properties of LZSM transition, and a comparison of the most widespread methods.

We describe the adiabatic-impulse model (AIM) in detail. The two types of evolution: adiabatic and diabatic (transition) are introduced. There we also explain the way to obtain an evolution matrix for double passages with the analogy to Mach-Zender interferometer for double transitions and the way to extend this theory to multi-passage LZSM transitions. There we demonstrate constructive and destructive interference for multiple LZSM transitions as well as the analog of the Rabi frequency in AIM. As a result of the AIM, we obtain formulas for the time-averaged upper-level occupation probability on the adiabatic basis, and a more precise formula for the diabatic basis.

The rotating wave approximation (RWA) is described in detail. The way to obtain a time-averaged probability of excitation is also described, and the influence of the excitation frequency on interferograms is demonstrated, multiphoton Rabi oscillations are described, and the possibility of using various shapes of periodic signals in RWA is demonstrated. Also in this section, the Floquet method is described, which can be applied to any periodic Hamiltonian.

The first approximation for a small minimum distance with levels is RWA, and the generalized Van Fleck perturbation theory allows obtaining a second approximation according to the Floquet theory and allows obtaining the correction responsible for the Bloch-Siegert shifting of resonances.

Then we describe the influence of decoherence, relaxation, and temperature on the dynamics of a two-level system. With the Lindblad equation for TLS in a dissipative environment, it is demonstrated that the Fourier slope of the interferogram image is proportional to the decoherence coefficient.

The possibility of using Fourier images of interferograms to study their properties using quantum phase tomography is demonstrated.

I compared the most popular approximations for describing the dynamics of TLS under periodic excitation and describe it in detail. In particular, a comparison of interferograms for the same parameters, calculated by different methods, and areas of application of different methods are given. And also, first time compared the relative computational complexity of calculating interferograms using different methods, which is presented as the time required to construct the same interferogram using different methods and approximations.

The **chapter 4** is devoted to the description and demonstration of the usage of multiple non-adiabatic LZSM transitions as a basis for quantum logic operations. LZSM transitions have several advantages over Rabi oscillations, which are commonly used for quantum logic operations, such as faster operation speed with higher accuracy. That allows us to apply more operations before the influence of the dissipative environment becomes significant.

The **chapter 5** is devoted to the theoretical description of the interaction of a transmon qubit with a semi-limited transmission line, the study of the reflection coefficient of such a system, and the comparison of the results with experimental data. Features of the design of such a system lead to the disappearance of zero resonance in interferograms.

The features of the qubit system in front of the mirror are described and typical values for the parameters of such system are given.

The theory for describing the behavior of such a system is investigated for the first time, in particular, the method to obtain the Hamiltonian of the system is demonstrated, the RWA approximation is applied twice, the first time to obtain

the so-called dressed-state Hamiltonian, and the second time to obtain the time-averaged probability of qubit being excited. We show that the time-averaged excitation probability is proportional to the decrease in the response coefficient of such a system, and the similarities and differences between theoretical and experimental interferograms are described.

Differences between theory and experiment are discussed for the first time on resulted interferograms, and a nonlinear correction to the excitation amplitude is proposed to obtain a better agreement with the experiment. One of the advantages of this qubit arrangement of the semi-infinite transmission line is the ability to manipulate the absorption properties of the two-level system, which provides a new way to manipulate quantum states.

The **chapter 6** is devoted to the study of similarities and differences between the qubit and classical systems of two coupled oscillators.

There we describe the transition from Newton's equations to the Schrödinger equation for two coupled classical oscillators and the approximations that are used for it. Expressions for the parameters of the classical system, and analogy to parameters of the qubit, are also demonstrated, fundamental differences between such quantum and classical systems are described.

The solution of the Schrödinger equation with classical analogs of the parameters for obtaining damped Rabi oscillations is described. The theory, numerical calculation of the qubit dynamics, and the dynamics of the classical system are compared. Numerical calculation of interferograms which are similar to qubit interferograms for various parameters is also described, in particular for the first time, the result of interferometry of classical system under the action of a noisy excitation rectangular signal is given and its similarity to that obtained using a qubit is discussed. This analogy can be used to simulate interference phenomena on a classical system, which usually does not require extremely low temperatures to operate and can operate at room temperature, which makes them more accessible.

The **chapter 7** is devoted to the study of dynamics of the laterally compressed buckled membrane, which has two stable states for its use as one of the plates of a memcapacitor (a capacitor with a memory effect).

The dynamics of a compressed buckled membrane are described using the theory of elasticity, which leads to a fourth-degree integrodifferential

equation. This equation can be decomposed into eigenfunctions of the buckled membrane, which will lead to a system of differential equations of the first degree for eigenfunctions. We show that there are two types of membrane switching, symmetric and asymmetric, and that asymmetric switching, leads to a smaller required threshold force. Therefore, the switching will mainly take place asymmetrically. This chapter is also shown, for the first time, that to find the minimum threshold force for switching the membrane to another position, it is enough to consider only two eigenfunctions, which greatly simplifies the calculation of this force. The possibility to reverse switching after the removing force on the buckled membrane is demonstrated and the threshold force for this is calculated.

The results of calculations for the threshold force required for switching are compared with other theoretical and numerical calculations, and a good agreement of the threshold force for asymmetric switching with other methods is demonstrated.

Keywords: Qubit, two-level system, Landau-Zener-Stückelberg-Majorana transition, transfer matrix method, adiabatic-impulse model, rotating wave approximation, memcapacitor, nanomechanical resonator, transmon, interferometry, non-adiabatic transition, quantum logic gate, buckled membrane, noise signal, harmonic oscillator, spin 1/2, tunneling, inelastic scattering.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації:

1. **O. V. Ivakhnenko**, S. N. Shevchenko, and Franco Nori, "Simulating quantum dynamical phenomena using classical oscillators: Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry, latching modulation, and motional averaging", *Sci. Rep.* **8**, 12218 (2018),
DOI: 10.1038/s41598-018-28993-8
2. Ruslan D. Yamaletdinov, **Oleg V. Ivakhnenko**, Olga V. Sedelnikova, Sergey N. Shevchenko, Yuriy V. Pershin, "Snap-through transition of buckled graphene membranes for memcapacitor applications", *Sci. Rep.* **8**, 3566 (2018), DOI: 10.1038/s41598-018-21205-3
3. P. Y. Wen, **O. V. Ivakhnenko**, M. A. Nakonechnyi, B. Suri, J.-J. Lin, W.-J. Lin, J. C. Chen, S. N. Shevchenko, Franco Nori, I.-C. Hoi, "Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry of a superconducting qubit in front of a mirror", *Phys. Rev. B* **102**, 075448 (2020), DOI: 10.1103/physrevb.102.075448
4. **Oleh V. Ivakhnenko**, Sergey N. Shevchenko, Franco Nori, "Nonadiabatic Landau-Zener-Stückelberg-Majorana transitions, dynamics, and interference", *Phys. Rep.* **995**, 1-89 (2022), DOI: 10.1016/j.physrep.2022.10.002

Наукові праці, які засвідчують апробацію результатів:

5. **O. V. Ivakhnenko**, S. N. Shevchenko, "Simulating quantum dynamical phenomena using classical oscillators", International school & conference on nanoscience and quantum transport (nanoQT-2016), 8-14 October, 2016, Kyiv, Ukraine, Poster, onsite (2016).
6. **O.V. Ivakhnenko**, and S.N. Shevchenko, "Interferometry with nanomechanical resonator", Student conference on Applied Physics "Actual problems of modern physics", 25 Nov, 2016, Kharkiv, Ukraine, Abstracts, p. 21 (2016).

7. **O. V. Ivakhnenko**, S. N. Shevchenko, R. D. Yamaletdinov, and Y. V. Pershin, "Dynamics of a membrane for creation of a memcapacitance", VIII International Conference for Professionals & Young Scientists low temperature physics (ICPYS-LTP2017), 29 May-2 June, 2017, Kharkiv, Ukraine, Abstracts, p. 147 (2017).
8. **O. V. Ivakhnenko**, S. N. Shevchenko, R. D. Yamaletdinov, and Y. V. Pershin, "Elastic dynamics of the membrane to create the memcapacitors", Student conference on Applied Physics "Actual problems of modern physics", 24 Nov, 2017, Kharkiv, Ukraine, Abstracts, p. 31 (2017).
9. **O. V. Ivakhnenko**, S. N. Shevchenko, and Franco Nori, "Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry, latching modulation, and motional averaging – dynamical quantum phenomena simulated by coupled classical oscillators", IX International Conference for Professionals & Young Scientists low temperature physics (ICPYS-LTP2018), 4-8 June, 2018, Kharkiv, Ukraine, Abstracts, p. 183 (2018).
10. **O. V. Ivakhnenko**, S. N. Shevchenko, and Franco Nori, "Qubit and coupled mechanical resonators, similarities and differences of behaviour", International School and Symposium on Nanoscale Transport and photonics 2019 (ISNTT2019), 18-22 November, 2019, Atsugi, Japan.
11. **O. V. Ivakhnenko**, S. N. Shevchenko, and Franco Nori, "Comparison of approaches for description of driven qubits", International Advanced Study Conference «Condensed Matter and Low Temperature Physics 2020», (CM<P 2020), 8-14 June, 2020, Kharkiv, Ukraine, Online, Abstracts, p. 167 (2020).
12. **O. V. Ivakhnenko**, S. N. Shevchenko, and Franco Nori, "Occupation-conservation transition in a quantum two-level system", XI Conference of Young Scientists "Problems of Theoretical Physics", ("Problems of Theoretical Physics"), 21-23 December, 2020, Kyiv, Ukraine, Online, Abstracts, p. 23 (2020).
13. **O. V. Ivakhnenko**, S. N. Shevchenko, and Franco Nori, "Simulating quantum

- dynamical phenomena using classical oscillators”, American Physics Society March meeting 2021 (“APS March meeting”), 15-19 March, 2021, Online, USA, Abstracts, p. P31.003 (2021).
14. **O. V. Ivakhnenko** and S. N. Shevchenko and Franco Nori, ”Ultrafast Landau-Zener-Stückelberg-Majorana (LZSM) gates”, International Symposium on Novel maTerials and quantum Technologies (ISNTT2021), 14-17 November, 2021, Atsugi, Japan, Online.
 15. **O. V. Ivakhnenko**, S. N. Shevchenko, and Franco Nori, ”Landau-Zener-Stuckelberg-Majorana transitions for interferometry and quantum control”, American Physics Society March meeting 2022 (“APS March meeting”), 14-18 March, 2022, Chicago, USA, Online, Abstracts, p. Q38.00010 (2022).
 16. **O. V. Ivakhnenko**, A. I. Ryzhov, S. N. Shevchenko, M. F. Gonzalez-Zalba, and Franco Nori, ”Landau-Zener-Stückelberg-Majorana transitions for fast quantum logic gates”, 29th International Conference on low temperature physics” (LT29), 18-24 August, 2022, Sapporo, Japan, Online, Abstracts, p. P20-SF4-24 (2022).
 17. **O. V. Ivakhnenko**, S. N. Shevchenko, and Franco Nori, ”Nonadiabatic Landau-Zener-Stuckelberg-Majorana transitions dynamics, and interference”, American Physics Society March meeting 2023 (“APS March meeting”), 20-22 March, 2023, Los-Angeles, USA, Online, Abstracts, p. UU05.00006 (2023).

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	17
ВСТУП.....	18
РОЗДІЛ 1 НЕАДІАБАТИЧНІ ПЕРЕХОДИ В	
 ДВОРІВНЕВИХ СИСТЕМАХ	25
1.1 Всюдисущі дворівневі системи (ДРС)	25
1.2 Проблема Ландау-Зінера-Штукельберга-Майорани	29
1.2.1 Біля адіабатичний ліміт (Ландау)	30
1.2.2 Використання функцій параболічного циліндру (Зінер)	30
1.2.3 Використання наближення ВКБ (Штукельберг)	31
1.2.4 Використання контурних інтегралів (Майорана)	31
1.3 Зв'язок з попередніми роботами	34
РОЗДІЛ 2 ОДНОРАЗОВИЙ ЛЗШМ ПЕРЕХІД З ЛІНІЙНИМ	
 ЗБУДЖЕННЯМ	36
2.1 Функції параболічного циліндра та розширення підходу	
Зінера	38
2.2 Різні властивості одиночного переходу ЛЗШМ	48
2.2.1 Динаміка та час одноразового переходу в різних базисах	48
2.2.2 Метод матриці еволюції	58
2.3 Висновки	63
РОЗДІЛ 3 БАГАТОРАЗОВИЙ ПЕРЕХІД ЛЗШМ З	
 ГАРМОНІЧНИМ ЗБУДЖЕННЯМ.....	64
3.1 Адіабатично-імпульсна модель (АІМ)	64
3.1.1 Адіабатична еволюція.....	65
3.1.2 Дворазове проходження.....	66
3.1.3 Багаторазове проходження	68
3.2 Наближення хвилі, що обертаються (НХО)	75
3.2.1 Багатофотонні коливання Рабі	78
3.2.2 Багатофотонні переходи, аналіз за теорією ЛЗШМ.....	82
3.2.3 Теорія Флоке	84
3.3 Вплив дисипації та температури.....	93
3.4 Квантова фазова томографія	97
3.5 Порівняння різних методів для періодичного збудження ..	99
3.6 Висновки	103

РОЗДІЛ 4	КВАНТОВІ ЛОГІЧНІ ГЕЙТИ ЛЗШМ.....	105
4.1	Когерентне керування мікроскопічними та мезоскопічними структурами.....	105
4.2	Однокубітові квантові логічні гейти	106
4.3	Висновки	109
РОЗДІЛ 5	КУБІТ ПЕРЕД ДЗЕРКАЛОМ	110
5.1	Надпровідний кубіт перед дзеркалом.....	111
5.2	Теоретичний опис	112
5.2.1	Гамільтоніан.....	113
5.2.2	інтерференція ЛЗШМ зустрічається з багатофотонними збудженнями.....	115
5.3	Деталі розрахунків та роль нелінійності	122
5.4	Висновки	124
РОЗДІЛ 6	КЛАСИЧНИЙ ДВІЙНИК КУБІТА	125
6.1	Від Ньютона до рівняння Шредінгера	127
6.2	Розв'язок рівняння типу Шредінгера, затухання коливань Рабі.....	130
6.2.1	Інтерферометрія ЛЗШМ	131
6.2.2	Модуляція з фіксацією	133
6.2.3	Усереднення по руху	134
6.3	Висновки	135
РОЗДІЛ 7	ПЕРЕСКОК ЗІГНУТОЇ ГРАФЕНОВОЇ МЕМБРАНИ ДЛЯ ЗАСТОСУВАННЯ В МЕМ'ЄМНОСТЯХ.	137
7.1	Теорія пружності	139
7.2	Чотири методи опису стрибкоподібних переходів	147
7.3	Висновки	149
ВИСНОВКИ	150	
БІБЛІОГРАФІЯ	153	
Додаток А Список публікацій здобувача за темою дисертації	188	
Додаток Б Відомості про апробацію результатів дисертації	191	

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

АІМ: Адіабатично-імпульсна модель;

ЛЗШМ : Ландау-Зінера-Штукельберга-Майорани;

НХО : Наближення хвилі, що обертається;

ДРС : дворівнева система;

\mathcal{P} : ймовірність збудження;

Δ : мінімальна відстань між рівнями;

ε : Енергетичний зсув;

A, ω, T_d : Амплітуда, частота, період збуджуючого сигналу;

δ : параметр адіабатичності;

ΔE : Відстань між енергетичними рівнями TLS;

T_1, T_2 : Час релаксації, дефазування;

t - час;

ϕ_S - Фаза Стокса

ВСТУП

Обґрунтування актуальності теми дослідження.

Дворівнева система (ДРС) є однією з базових моделей у квантовій фізиці і описує явища, які повсюдно поширені в природі. З одного боку, це найпростіша непроста задача квантової механіки, з іншого боку, вона є основою квантових технологій, де ДРС використовується як кубіт.

З часів піонерських робіт Ландау, Зінера, Штукельберга і Майорани (ЛЗШМ) було відомо, що збудження квантової дворівневої системи призводить до тунелювання між її станами. Незважаючи на те, що інтерференція між цими переходами є важливою, лише нещодавно вона стала доступною, контрольованою і корисною для маніпулювання у все зростаючій кількості квантових систем.

Якщо квантова система збуджується залежним від часу сигналом, вона демонструє різноманітні цікаві та важливі ефекти. Системи, поведінку яких можна описати за допомогою моделі дворівневої системи дуже різні за своїм фізичним походженням, оскільки об'єкти дослідження можуть бути мікроскопічними (електронні або ядерні спіни, фотони, атоми), мезоскопічними (надпровідні кубіти, квантові точки, графенові структури) або макроскопічними (механічні або електричні резонатори).

Перехід Ландау-Зінера-Штукельберга-Майорани має багато різних властивостей, від самих основ до релаксації, динаміки, періодичного збудження та інтерферометрії, а також багато різних підходи та наближень до цієї проблеми. Застосовність аналітичних розв'язків можна перевірити чисельним розв'язанням рівнянь Шредінгера, Ліндблада і Блоха.

Аналоги переходу ЛЗШМ в класичній фізиці є доволі цікавим випадком, коли теорія, що була створена для квантових систем, успішно може застосовуватись для опису класичних систем.

Процес перескоку між двома стабільними станами вигнутої, стиснутої з боків мембрани представляє собою інтерес в контексті вивчення основи для створення електромеханічних елементів пам'яті, зокрема конденсатора з ефектом пам'яті - мем'ємності.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.
Дисертацію виконано в Фізико-технічному інституті низьких температур

ім. Б.І. Веркіна НАН України в рамках тематичного плану ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України за відомчими тематиками:

”Надпровідні і мезоскопічні мікроструктури та прилади сучасної квантової електроніки на їх основі” (реєстраційний номер 0117U002291, шифр 1.4.10.16.14, термін виконання 2017-2021 рр.),

”Квантові нано-розмірні надпровідні системи: теорія, експеримент, практична реалізація” (реєстраційний номер 0122U001503, шифр 1.4.10.16.15, термін виконання 2022-2026 рр.).

Частину дисертаційної роботи виконано в лабораторії теоретичної квантової фізики, Інституту фізико-хімічних досліджень (RIKEN), м. Вако, Японія, в рамках проєктів ”Переходи Ландау-Зінера-Штукельберга-Майорани для інтерферометрії та квантового контролю” (International program associate IPA) та ”Квантові логічні гейти засновані на переходах Ландау-Зінера-Штукельберга-Майорани” (International program associate IPA).

Частина дисертаційної роботи була виконана за підтримки гранту ARO, США, в рамках проєкту ”Квантові системи під дією збудження: фізика Ландау-Зінера-Штукельберга-Майорани” під керівництвом Шевченка С. М., (реєстраційний номер W911NF2010261, термін виконання 2020-2023 рр.)

Частина дисертаційної роботи була виконана за підтримки гранту Президента України, в рамках проєкту ”Дослідження актуальних систем квантової інженерії на основі квантових бітів” під керівництвом Шевченка С. М., (реєстраційний номер 0119U103164, термін виконання 2019 р.)

Частина дисертаційної роботи була виконана за підтримки гранту Президента України, в рамках проєкту ”Транспортні, динамічні та інтерференційні ефекти в мезоскопічних системах” під керівництвом Шевченка С. М., (реєстраційний номер 0116U006535, термін виконання 2017 р.)

Частина дисертаційної роботи була виконана за підтримки Цільової програми фундаментальних досліджень НАН України «Перспективні фундаментальні дослідження та інноваційні розробки наноматеріалів і нанотехнологій для потреб промисловості, охорони здоров'я та сільського господарства», в рамках проєкту ”Розробка та дослідження перспективних

наноструктурованих об'єктів для квантової інженерії” під керівництвом Шевченка С. М., (реєстраційний номер 0121U109286, термін виконання 2020-2024 р.)

Мета і задачі дослідження.

Метою дисертаційної роботи є теоретичний опис динаміки квантових дворівневих системи. Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити наступні завдання:

- Розширити теоретичний опис динаміки дворівневої системи.
- Порівняти та розширити різні методи опису поведінки одноразових переходів дворівневих систем.
- Порівняти та розширити різні методи опису поведінки дворівневих систем при багаторазовому збудженні.
- Дослідити використання переходів ЛЗШМ для застосування квантових логічних гейтів.
- Теоретично описати експеримент з кубітом приєднаним до напівнескінченої лінії передачі.
- Описати інтерферометрію, подібну до квантової, в класичних системах.
- Описати поведінку мембрани, що вигнута, для застосування в якості мемемності.

Об'єкт дослідження.

Квантова дворівнева система. Може бути реалізована у таких квантових системах, як надпровідні кубіти, квантові точки, спін у магнітному полі, тощо. Класичними аналогами квантових дворівневих систем є зв'язані механічні осцилятори, вигнута мембрана.

Предмет дослідження.

Динаміка та різні властивості динаміки квантових дворівневих систем, різні види інтерференції у дворівневих системах.

Методи дослідження.

В основному в цій роботі використовується чисельне моделювання рівнянь теорії Шредінгера, Ліндблада, Блоха, Ньютона і теорії пружності, а також порівняння їх з аналітичними розв'язками для покращення аналітичної теорії. Тут використано кілька теоретичних підходів для опису поведінки різних дворівневих систем, таких як адіабатично-імпульсна модель, наближення хвилі що обертається, метод Флоке, теорія збурень. В одній роботі також використано порівняння експериментального спостереження динаміки квантової дворівневої системи з чисельним моделюванням та аналітичним розв'язком.

Наукова новизна отриманих результатів

- Узагальнено знання про динаміку кубітів і зроблено детальний виклад популярних підходів до опису динаміки кубітів під дією збуджуючого сигналу, щоб зробити цю складну сучасну наукову галузь більш доступною, з отриманням кількох оригінальних результатів. *Вперше* отримано спрощену типову тривалість перехідного процесу; вивчено перехід, що зберігає заселеність, де ймовірність заселеності рівнів може бути постійною, незважаючи на збудження; отримано та описано аналог частоти Рабі в адіабатично-імпульсній моделі; продемонстровано, що нахил Фур'є-образу інтерферограми пропорційний часу декогеренції; отримано більш точну формулу для усередненої за часом ймовірності зайнятості верхнього рівня в адіабатично-імпульсній моделі в діабатичному базисі. Вперше порівняно різні методи за областю їх застосування та за відносною обчислювальною потужністю.
- *Вперше* продемонстровано альтернативний спосіб маніпулювання станом кубіта з множинними переходами ЛЗШМ з використанням теорії АІМ.
- *Вперше* продемонстровано застосовність теорії динаміки одягненого кубіта до кубіту типу трансмон перед дзеркалом, показано спосіб опису поведінки кубіту типу трансмон, з'єданого з напівнескінченою лінією передачі, за допомогою теорії динаміки одягненого кубіта з наближенням хвилі, що обертається. Вперше отримано інтерферометрію ЛЗШМ надпровідного кубіта в напівнескінченній лінії передач, обмеженій

дзеркалом.

- Продемонстровано застосовність теорії динаміки кубітів до класичних систем з двох зв'язаних осциляторів. *Вперше* теоретично отримано затухаючі осциляції Рабі та інтерферометрію ДРС (прямокутна модуляція, усереднення по руху, ЛЗШМ інтерферометрія) на класичній системі, а також продемонстровано принципову різницю між квантовою та класичною системами на прикладі одноразового проходження ЛЗШМ.
- *Вперше* удосконалено теорію зігнутої мембрани для великих ступенів згинання. Теоретично отримано порогове зусилля для переходів ”вгору-вниз” і ”вниз-вгору” для вигнутої мембрани та розраховано динаміку переходу, з динаміки виявлено, що асиметричний перехід призводить до меншого порогового зусилля. Та показано, що порогова сила для несиметричного переходу добре співпадає з розрахунками за допомогою інших теорій та чисельного розрахунку молекулярної динаміки.

Практичне значення отриманих результатів.

Отримані результати можуть бути використані в сучасній квантовій науці для кращого розуміння динаміки квантових систем, що може бути використано для вдосконалення квантових технологій, таких як квантові обчислення, квантові комунікації, квантова криптографія, квантові детектори та інші застосування квантових технологій. Дворівневі системи зустрічаються в природі повсюдно, тому багато абсолютно різних систем і явищ можна описати за допомогою теорії про кубітну динаміку, яка є однією з базових теорій квантової механіки. Також досліджено, як класичні дворівневі системи можуть бути використані для створення нових мезоскопічних електромеханічних пристроїв, таких як мемемність або нано-електро-механічні резонатори.

Внесок здобувача.

У роботах [1, 2, 3], що написані у співавторстві та включені до дисертації, автором виконано всі аналітичні та чисельні розрахунки. У роботі [4], що написана у співавторстві та включена до дисертації, автором виконано всі аналітичні та чисельні розрахунки для розділу ”Теорія пружності”. Автор брав участь в обговоренні результатів і написав статті або окремі розділи

в статтях, де дисертант не є першим автором, для всіх статей. Таким чином, особистий внесок здобувача у розв'язання теоретичних проблем, що розглядаються в дисертації, є визначальним.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати, які містяться в дисертації, були представлені на наступних 13 міжнародних конференціях:

- Міжнародна школа та конференція з нанонауки та квантового транспорту (nanoQT-2016), 8-14 жовтня, 2016, Київ, Україна.
- Студентська конференція з прикладної фізики "Актуальні проблеми сучасної фізики", 25 листопада, 2016, Харків, Україна.
- VIII Міжнародна конференція для фахівців та молодих вчених з фізики низьких температур (ICPYS-LTP2017), 29 травня-2 червня, 2017, Харків, Україна.
- Студентська конференція з прикладної фізики "Актуальні проблеми сучасної фізики", 24 листопада 2017 р., Харків, Україна.
- IX Міжнародна конференція для фахівців та молодих вчених "Фізика низьких температур" (ICPYS-LTP2018), 4-8 червня 2018 р., Харків, Україна.
- Міжнародна школа та симпозіум з нанорозмірного транспорту та фононіки 2019 (ISNTT2019), 18-22 листопада 2019 р., м. Ацугі, Японія
- Міжнародна наукова конференція "Фізика конденсованих систем і низьких температур 2020", (CM<P 2020), 8-14 червня, 2020, Харків, Україна
- XI Конференція молодих вчених "Проблеми теоретичної фізики", ("Проблеми теоретичної фізики"), 21-23 грудня, 2020, Київ, Україна.
- Березнева зустріч Американського фізичного товариства 2021 ("APS March meeting"), 15-19 березня, 2021, Онлайн, США

- Міжнародний симпозиум з нових матеріалів та квантових технологій (ISNTT2021), 14-17 листопада, 2021, Ацугі, Японія
- Березнева зустріч Американського фізичного товариства 2022 ("APS March meeting"), 14-18 березня, 2022, Чикаго, США
- 29-та Міжнародна конференція з низькотемпературної фізики" (LT29), 18-24 серпня, 2022, Саппоро, Японія
- Березнева зустріч Американського фізичного товариства 2023 ("APS March meeting"), 20-22 березня, 2023, Лос-Анджелес, США

Публікації.

Дисертація базується на результатах, опублікованих у 4 [1, 4, 2, 3] наукових статтях та 13 тезах доповідей на конференціях.

Структура дисертації.

Дисертація складається з анотації, вступу, шести оригінальних розділів з рисунками, висновків і списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації становить 192 сторінки. Робота містить 28 рисунків, 4 таблиці та список використаних джерел з 365 найменувань на 35 сторінках.

РОЗДІЛ 1

НЕАДІАБАТИЧНІ ПЕРЕХОДИ В ДВОРІВНЕВИХ СИСТЕМАХ

1.1 Всюдисущі дворівневі системи (ДРС)

Квантова дворівнева система (ДРС) є однією з базових моделей у квантовій фізиці і описує системи, які повсюдно зустрічаються в природі. З одного боку, це “найпростіша непроста квантова задача”, цитуючи [5]; і, з іншого боку, це забезпечує основу для квантових технологій, в яких ДРС є кубітом.

Якщо квантова система збуджується залежним від часу сигналом, вона демонструє різноманітні цікаві та важливі ефекти. Зазначимо, що кілька Нобелівських премій з фізики було присуджено фізикам, які досліджували динаміку дво та кількарівневих квантових систем:

- 1944 рік: Рабі, про молекулярні пучки та ядерний магнітний резонанс;
- 1952 рік: Блох і Перселл, про магнітні поля в атомних ядрах атомних ядрах та ядерних магнітних моментах;
- 1964 рік: Таунс, Басов та Прохоров, про мазери, лазери та квантову оптику;
- 1966 рік: Кастлер, про оптичне накачування;
- 1989 рік: Рамзі, Демелт та Пол, з атомної спектроскопії, водневого мазера та атомного годинника годинники;
- 1997 рік: Чу, Кохен-Таноуджі та Філіпс, про охолодження та захоплення атомів лазерним світлом;
- 2012 рік: Харош та Вайнленд, про зв’язані атоми та фотони
- 2022 рік: Аспект, Клаузер та Цейлінгер, про заплутані фотони та квантову інформатику.

По-перше, окреслимо системи, в яких відбуваються описувані явища. Вони дуже різні за своїм фізичним походженням, оскільки об’єкти

дослідження можуть бути мікроскопічними (електронні або ядерні спіни, фотони, атоми), мезоскопічними (надпровідні кубіти, квантові точки, графенові структури) або макроскопічними (механічні або електричні резонатори) [13, 14]. Наша мета - продемонструвати, що опис усього цього можна звести до квантової дво- чи кількарівневої системи. Тут ключова ідея полягає в тому, щоб показати, що базове поняття квантової механіки - ДРС з квазіперетином рівнів - є повсюдним, і що для таких систем таких систем, фізика ЛЗШМ є релевантною. Вибрано кілька ілюстративних прикладів і представлено їх на рис. 1.1, з деякими з деякими подробицями, наведеними в таблиці 1.1. Мета полягає в тому, щоб показати різноманітність систем і їхніх характерних параметрів, включно з їхніми типовими розмірами. Слід зробити зауваження. Класичні реалізації детально описано у розділі (6), а в інших випадках розглядаємо квантові системи. Цікаво, що неадіабатичні переходи ЛЗШМ значною мірою пов'язані з квантовими системами; і це рідкісний приклад у фізиці коли явища вивчаються в класичній фізиці пізніше, ніж їхні квантові аналоги а не навпаки.

Зауважте, що ні рис. 1.1, ні таблиця 1.1 не є вичерпними, оскільки жодна з них не дає повної картини різноманітності відповідних систем.

Система	Розмір	Базис	Змінна	Δ/h	$\omega/2\pi$	Температура
Джозеф-сонівські (JJ) кубіти	1 $\mu\text{м}$ до 1 мм	заряд, струм	напруга, потік	10 МГц до 10 ГГц	1 ГГц	50 мК
квантові точки	10 нм до 1 $\mu\text{м}$	заряд, спіні	напруга, магнітне поле	0.1 до 10 ГГц	1 до 10 ГГц	50 мК
атомні кубіти	$\frac{1 \text{ \AA}}{1 \mu\text{м}}$	заряд електрону або спіні ядерний спіні	оптичні та мікрохвильові поля	0.1 ГГц	1 МГц до 10 ГГц	$\frac{50 \text{ мК до } 10 \text{ К}}{1 \text{ К до кімнатної}}$
графен	1 $\mu\text{м}$	смуги провідності валентні зони	електричне поле	100 ТГц до 1 ПГц	100 ТГц	кімнатна
ультраохлодні молекули	$\frac{1 \text{ \AA}}{40 \mu\text{м}}$	молекулярні стани смуги решітки	магнітне поле нахил решітки	10 кГц	10 кГц	0.01 до 100 $\mu\text{К}$
класичні резонатори	50 $\mu\text{м}$	моди коливань	напруга зсуву	10 кГц	10 кГц	кімнатна
квантові фазові переходи	300 $\mu\text{м}$	орієнтація дефектів	гранична напруга	100 кГц	100 кГц	10 $\mu\text{К}$

Табл. 1.1: **Характерні дворівневі системи (ДРС)** та їхні параметри, включаючи мінімальне розщеплення енергетичних рівнів Δ та характерну частоту збудження ω . Числа, наведені вище, є характеристичними значеннями або діапазонами. У таблиці вказано як розмір ядра квантової системи так і розмір носія. Наприклад, для надхолодних молекул характерний розмір атомів має порядок кількох ангстремів, тоді як розмір локалізованого конденсату Бозе-Ейнштейна зазвичай становить кілька десятків мікрометрів.

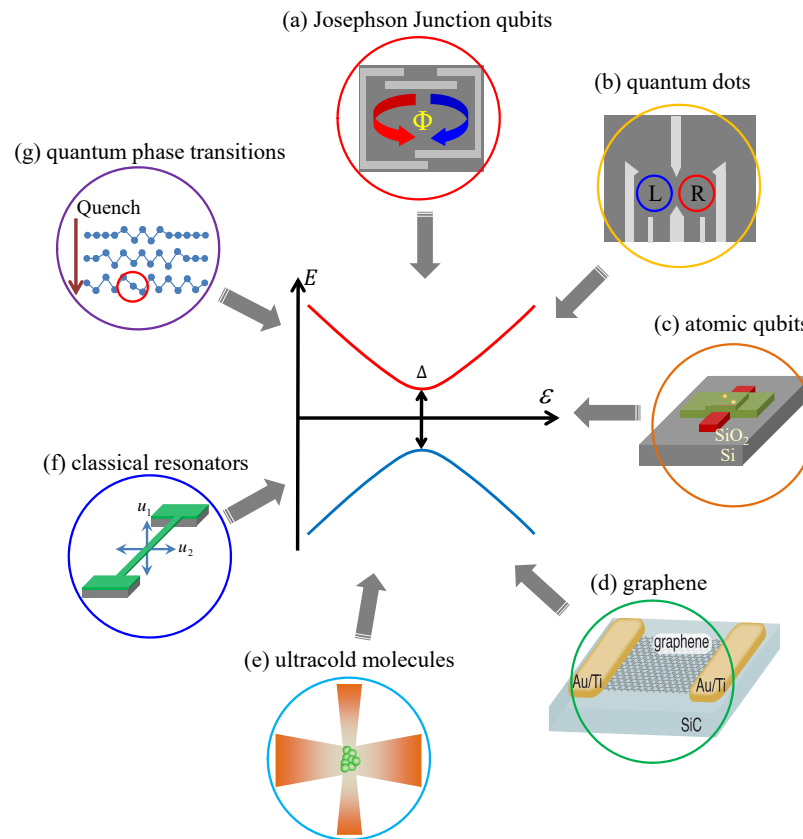


Рис. 1.1: Різні фізичні системи, які можна описати за допомогою дворівневої моделі. Вони можуть керуватися зовнішніми полями і демонструвати переходи Ландау-Зінера-Штукельберага-Майорани (ЛЗШМ). (а) Надпровідні квантові схеми з джозефсонівським переходом (JJ) кубітами проілюстровано на прикладі потокового кубіта, зробленого з надпровідного кільця з трьома тунельними Джозефсонівськими-переходами і станами кубіту, утвореними напрямком струму (наприклад, [6]). (б) Штучні напівпровідникові атоми в напівпровідниках проілюстровано тут подвійною квантовою точкою, обмеженою затвором [7], де зарядовий кубіт утворюється електронними станами, локалізованими у лівій (L), або у правій (R) точці. (с) Домішковий кубіт, утворений донорними атомами фосфору або арсену у кремнієвому нанодотовому транзисторі [8]. (д) Графенова смужка, що контактує з золотими електродами, де струм відображає неадіабатичні переходи між валентною зоною та зоною провідності навколо точки Дірака [9]. (е) Надхолодний цезій Молекули Фешбаха в лазерній пастці, де зростання магнітного поля призводить до до переходів в молекулярних станах [10]. (ф) Класичний наномеханічний резонатор [11, 1], де когерентна суперпозиція площинної та позаплощинної мод поводить як керована ДРС. (г) Топологічне дефектоутворення схематично представлено за допомогою кулонівського кристалу; це - захоплений іонний ланцюжок, де зміна обмежувального потенціалу призводить до вигину ланцюжка; де порушення осьової симетрії є фазовим переходом другого порядку, за густиною дефектів та описується механізмом Кіббла-Зурека [12].

1.2 Проблема Ландау-Зінера-Штукельберга-Майорани

З часів піонерських робіт Ландау, Зінера, Штукельберга і Майорани (ЛЗШМ) було відомо, що збудження квантової дворівневої системи призводить до тунелювання між її станами. Незважаючи на те, що інтерференція між цими переходами є важливою, лише нещодавно вона стала доступною, контрольованою і корисною для маніпулювання у все зростаючій кількості квантових систем.

“Без неадіабатичних переходів цей світ був би мертвим, оскільки не могли б відбуватися основні хімічні та біологічні процеси, такі як перенесення електронів і протонів. Неадіабатичний перехід, безумовно, є джерелом мінливості цього світу.” [15]

У своїй першій праці про неадіабатичні переходи [16], Л.Д. Ландау вивчав адіабатичні непружні атомні зіткнення. Він вивів загальний вираз для ймовірності неадіабатичних переходів у рамках теорії збурень, який було застосовано для близької до раптової муди з $\delta \ll 1$. Отримана ймовірність збудження для процесу з подвійним проходженням була

$$P_{\text{double}}^{(L)} = 8\pi\delta \sin^2 \Phi_L, \quad (1.1)$$

яка є функцією, що швидко осцилює. Будучи усередненою по великій динамічній фазі Φ_L , накопиченій під час подвійного проходження еволюції [див. Рис. 2.1(b)], це дасть $\bar{P}_{\text{double}}^{(L)} = 4\pi\delta$. Справді, з Рівн. (2.7) при $\delta \ll 1$, маємо $\mathcal{P} \approx 1 - 2\pi\delta$. Це узгоджені результати, якщо зауважити, що остання з них дає ймовірність $P_{0 \rightarrow 1} \approx 2\pi\delta$ перебування у основному стані після першого проходження; тоді, є дві можливості бути збудженим під час другого проходження: $P_{0 \rightarrow 1 \rightarrow 1} \approx 2\pi\delta$ і $P_{0 \rightarrow 0 \rightarrow 1} \approx 2\pi\delta$, що в сумі дасть значення Ландау $4\pi\delta$.

1.2.1 Біля адіабатичний ліміт (Ландау)

У своїй другій статті про неадіабатичні переходи [17], Ландау застосував загальну формулу переходу до загального випадку майже перетину потенціальних кривих у близькій до адіабатичного ліміту, тобто для $\delta \gg 1$ і отриману ймовірність збудження у вигляді рівняння (2.7), але з префактором C , який, як припускається, має значення порядку одиниці. Якщо аналізувати іншими (точнішими) методами, які подано нижче, ця константа стає точно рівною 1.

1.2.2 Використання функцій параболічного циліндру (Зінер)

Другий релевантний підхід належить Кларенсу Зінеру [18]. Він вивчав перетин полярних і гомополярних станів молекули. Енергетичний зсув для електронних станів був повільною змінною положення ядер. Задача зводилася до тієї самої задачі, сформульованої на рис. 2.1(а): Яка ймовірність збудження, якщо стартувати з основного стану ліворуч і лінійно проходити квазіперетин, і далі лінійно рухатися праворуч? Відповідне рівняння Шредінгера переписано у вигляді диференціального рівняння другого порядку, розв'язок якого є параболічні циліндричні функції Вебера. Цей точний розв'язок після зняття асимптот приводить до рівняння (2.7).

Тут доречно згадати про тунелювання/ефект/діод Зінера. Два роки по тому, Зінер опублікував ще одну статтю [19], в якій він вивчав діелектричний пробій, тобто електричний пробій у твердих ізоляторах при накладанні сильного постійного електричного поля. Пробій відбувається через тунелювання електронів між зонами провідності через заборонену зону. Пізніше такий тип електричного пробію був вивчений для напівпровідників [20] і лежить в основі роботи діоду *Зінера* (стабілітрона).

Деякі автори аналізували аналогію між тунелюванням в діоді Зінера і переходами ЛЗШМ, наприклад, [21]; однак ми відрізняємо тунелювання стабілітрона від переходів ЛЗШМ, тому що перший не передбачає переходу через квазіперетин а натомість потребує сильних полів, в той час як перехід на рівні, якого уникають, є основою для інтерферометрії ЛЗШМ. Виходячи

з цього, ці два випадки також можна назвати нерезонансним і резонансним (Зінерівським) тунелюванням, відповідно [22]. Як окремий випадок тут можна згадати так звану динаміку Блоха(-Ландау)-Зінера [23, 24, 25, 26, 27, 28], яка включає переходи ЛЗШМ між енергетичними діапазонами, коли вони відображають осциляції Блоха з квазіперетином рівнів.

1.2.3 Використання наближення ВКБ (Штукельберг)

Подібно до вищесказаного, Е.К.Г. Штукельберг також розглядав атомні зіткнення, для яких він використовував наближення Вентцеля-Крамерса-Бріллюена (ВКБ) і метод фазового інтегралу [29]. В результаті, Штукельберг отримав формулу для задачі з подвійним проходженням:

$$P_{\text{double}} = 4\mathcal{P}(1 - \mathcal{P}) \sin^2 \Phi_{\text{St}}, \quad (1.2)$$

де ймовірність однократного проходження \mathcal{P} знову дається формулою (2.7), а Φ_{St} - це фаза, тобто так звана фаза Штукельберга, яка накопичується хвильовою функцією під час еволюції між переходами. Видно, що вона складається з двох частин: перша, накопичується під час адіабатичному русі, а друга (так звана динамічна або фаза Стокса) ϕ_S накопичується під час одного проходження області квазіперетину [30]. Цікаво, що Штукельберг вказав на те, що, зокрема для $\delta \ll 1$ його результат дає те, що отримав Ландау в роботі [16] з $\Phi_{\text{St}} = \Phi_L$ і $2\mathcal{P}(1 - \mathcal{P}) = 4\pi\delta$.

Ми виявили, що навіть при всіх ускладненнях і загальних положеннях цього підходу, вираз для динамічної частини фази Штукельберга не може бути отримати в рамках цього формалізму [31].

1.2.4 Використання контурних інтегралів (Майорана)

У четвертому підході Етторе Майорана розглядав орієнтований атомний промінь що проходить точку зникаючого магнітного поля [32]. Проблема була зведена автором до частинки зі спіном $1/2$ у лінійно залежному від часу магнітному полі, яке описується гамільтоніаном (2.1) зі зсувом

(2.2). Подібно до підходу Зінера, Майорана звів проблему до математичної обробки диференціального рівняння другого порядку. Цього разу автор розв'язав рівняння за допомогою прямого та оберненого перетворення Лапласа шляхом обчислення відповідних контурних інтегралів в ліміті $t \rightarrow \pm\infty$, що знову приводить до рівняння (2.7). Очікувано, що цей інтеграл подібний до інтегрального представлення функції параболічного циліндра.

Зауважимо, що раніше в більшості праць, присвячених неадіабатичним переходів називались ЛЗ, або ЛЗШ переходами. Як це не парадоксально, до певної міри робота Майорани є навіть більш актуальною і краще підходить для розв'язання проблеми:

- Підхід Майорани не містить невизначених експоненціальних префакторів або обмежень на значення δ , як у підході Ландау.
- Не посилається на спеціальні функції, які вимагають використання асимптотики з книг або чисел, як у підході Зінера.
- Отримання є менш складним, ніж у підході Штукельберга.

Робота Майорани була як стимульована, так і підтверджена експериментальними спостереженнями [33]. Про історію цього див. [34, 35, 36]. Зі схожими аргументами, Ф. Ді Джіакомо та Є.Є. Нікітін [37] запропонували, по-перше, зробити підхід Майорани центральною проблемою підручників з квантової механіки і, по-друге, назвати задачу та формулу, рівняння (2.7) використовуючи всі чотири назви: задача ЛЗШМ і формула ЛЗШМ, відповідно.

З дат у таблиці 1.2 ми бачимо, що якщо слідувати датам публікацій, то правильним буде такий порядок МЛЗШ. Однак, щоб уникнути плутанини, ми будемо називати це ЛЗШМ, як і майже всі інші автори, які визнають роль Майорани. Щодо внеску Майорани див. також [41].

Як додаткову перевагу формулювання Майорани зазначимо, що він (на відміну від ЛЗШ) сформулював задачу в термінах гамільтоніану спіну $1/2$, саме у тій формі, яка сьогодні використовується у квантовій науці.

Нарешті, підхід Майорани дозволяє явно отримати фазу, набуту під час переходу, також як і підхід Зінера, цього не можна зробити в напівкласичних розрахунках Ландау та Штукельберга.

Стаття	Подача	Публікація	Система	Метод	Фаза
Е. Майорана [32]	?-1931	02-1932	Спін 1/2 в магнітному полі	перетворення Лапласа	Так ¹
Л.Д. Ландау [17]	12-1931	06-1932	Непружні адіабатичні зіткнення атомів	Квазікласичне наближення	Ні
К. Зінер [18]	07-1932	09-1932	Перетин полярних та гомополярних станів в молекулах	функції параболічного циліндру	Так ²
Е.К.Г. Штукельберг [29]	?-1932	11-1932	Непружні адіабатичні зіткнення	ВКБ наближення	Ні

Табл. 1.2: Роботи Ландау, Зінера, Штекельберга та Майорани з одного погляду погляд. ¹ Зауважимо, що Майорана у своїй роботі отримав лише ймовірність і не звернув уваги на зміну фази. Також зверніть увагу, що Майорана раніше за інших опублікував рівняння (2.7), що мало кому відомо. Детальні вивід повної хвильової функції, включно зі зміною фази, в рамках підходу Майорани див. в [38] та [39]. ² Зінер отримав повну хвильову функцію в термінах функцій параболічного циліндру. Однак у своїй роботі Зінер розглядав лише абсолютну величину, тобто ймовірність, рівняння (2.7). Для детального обговорення розв'язку, включаючи фазу, див. розділ 2.1 та [31, 40].

Див. розділ 2.1 для детальнішої інформації, де ми представляємо розширений підхід Зінера. Серед інших підходів можна згадати підхід [42], який також було представлено у §1.5.2 підручника [43], а також теорію Чу-Накамури [44, 13]. Див. також [45, 46, 47, 48], [49, 50].

Отже, існують різні способи знайти ймовірність переходу ЛЗШМ, включно зі швидкими способами знаходження розв'язків без розв'язання диференціального рівняння Шредінгера. Однак, оскільки нас цікавить повна хвильова функція, а не лише ймовірності переходу, ми наголошуємо, що це можна зробити лише одним з методів з диференціальними рівняннями [31, 30]. Це проілюстровано в останньому стовпчику таблиці 1.2, яка відповідає на таке питання: Чи можна безпосередньо застосувати метод для обчислення фази набутої після переходу? Лише дві відповіді є позитивними, і розглянуто їх у розділі 2.1 та підхід Майорани 2. А саме розглянуто підходи Зінера та

Майорани, де перший є досить відомим, а другий набагато менш відомий. З цих причин ми коротко представимо підхід Майорани у розділі 2, більш детальний опис можна знайти в статті [38].

1.3 Зв'язок з попередніми роботами

Можна було б поставити собі запитання, цитуючи посилання [51]:

“Назва цієї статті на перший погляд може здатися дивною. Що ще можна сказати про задачу Ландау-Зінера (ЛЗ) після численних описів як у науковій, так і у підручниковій літературі?”

Нижче ми наведемо декілька причин, починаючи з того, що з того, що цю тему слід було б назвати ЛЗШМ, а не тільки ЛЗ, і закінчуючи тим, що ця вічнозелена тема сьогодні важлива для багатьох галузей фізики, та її застосування з часом зростає.

переходи ЛЗШМ є повсюдними і важливими, і їх розглянуто в кількох оглядових статтях (наприклад, [52, 53, 54, 15, 55, 56, 57, 58]) та книгах [44, 59, 13]. Тут коротко згадано ключові аспекти цієї дисертації:

- Показано як вивести формулу ЛЗШМ різними способами. Ми переконливо демонструємо, що те, що відоме як перехід/формула Зінера або Ландау-Зінера, слід віднести до чотирьох фізиків: Ландау, Зінеру, Шткельберга і Майорани (ЛЗШМ).
- Розглянуто різні важливі аспекти неадіабатичного переходу, такі як час переходу, нелінійність і дисипація.
- Наголошено, що детальне розуміння динаміки ЛЗШМ динаміки та її аспектів, таких як багатофотонні переходи, важливе не лише для спектроскопії чи інтерферометрії, але й для квантового контролю.
- Продемонстровано класичний аналог квантової дворівневої системи.
- Пов'язано теорію ЛЗШМ з експериментом з кубітом типу трансмон перед дзеркалом

Коротко розглянуто підходи ЛЗШМ, які узагальнено в таблиці 1.2 та деталі підходу Зінера у розділі 2.1. Важливо, що всі четверо опублікували статті того самого року, в яких одним з ключових результатів було саме рівняння (2.7).

РОЗДІЛ 2

ОДНОРАЗОВИЙ ЛЗШМ ПЕРЕХІД З ЛІНІЙНИМ ЗБУДЖЕННЯМ

Розглянемо різні підходи до виведення формули для збудження ймовірності збудження ДРС. Цікаво, що це можна зробити кількома способами в рамках різних теоретичних підходів [37]. Ми маємо на меті дослідити та порівняти різні методи, застосувавши їх до класичної задачі ЛЗШМ з лінійним збудженням ДРС [3, 38].

Розглянемо ДРС, з типовим гамільтоніаном

$$H(t) = -\frac{\Delta}{2}\sigma_x - \frac{\varepsilon(t)}{2}\sigma_z = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon & \Delta \\ \Delta & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

з лінійним збудженням за енергетичним зсувом

$$\varepsilon(t) = vt, \quad (2.2)$$

Δ є незалежною від часу величиною, час $t \in (-\infty, \infty)$. Тепер визначимо *діабатичні* рівні енергії, які є власними функціями гамільтоніану при $\Delta = 0$: $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Відповідні (діабатичні) енергетичні рівні дорівнюють $E_{0,1} = \mp\varepsilon/2$. Вони зображені на рис. 2.1 пунктирними лініями. Загалом, хвильова функція є суперпозицією станів

$$|\psi(t)\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

де α і β - залежні від часу коефіцієнти.

Адіабатичні власні значення $E_{\pm}(t)$ та власні стани $|E_{\pm}(t)\rangle$ задаються рівнянням Шредінгера, де час - параметр, $H(t) |E_{\pm}(t)\rangle = E_{\pm}(t) |E_{\pm}(t)\rangle$. Отримуємо *адіабатичні* енергетичні рівні

$$E_{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2 + \varepsilon(t)^2} = \pm \frac{1}{2} \Delta E(t). \quad (2.4)$$

Тут $\Delta E = E_+ - E_-$ - це відстань між енергетичними рівнями, які зображено суцільними кривими на рис. 2.1. Тепер отримаємо сенс параметра Δ (мінімальна енергетична відстань - або проміжок -), а параметр ε - це

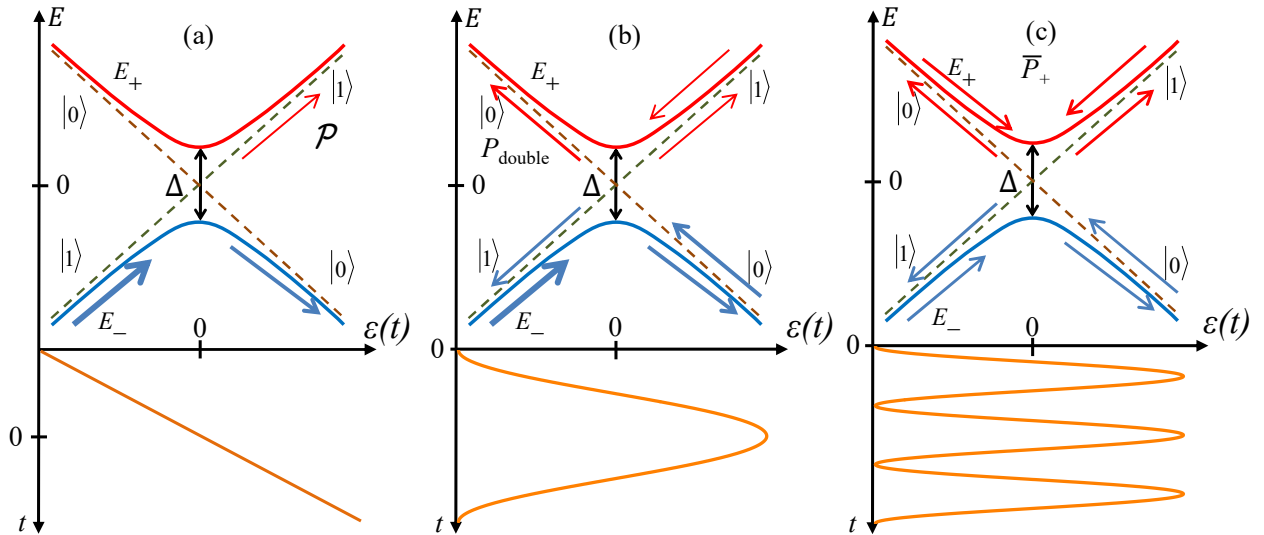


Рис. 2.1: Схема енергетичних рівнів дворівневої системи (ДРС) зі збудженням. Де, E_{\pm} це верхній і нижній енергетичні рівні, Δ - мінімальна відстань між енергетичними рівнями, а ε описує енергетичний зсув. Область уникнення перетину відповідає околиці $\varepsilon = 0$. У цій роботі розглядаються три задачі: (а) одноразове проходження області квазіперетину, яке описується ймовірністю \mathcal{P} ; (б) задача про дворазове проходження для P_{double} ; та (в) багаторазове проходження задачі з середньою за часом ймовірністю заселеності рівнів \bar{P}_+ .

енергетичний зсув. Відстань між енергетичними рівнями є найменшою при $\varepsilon = 0$; відповідно, у цій точці ми маємо квазіперетин.

Власні стани *адіабатичної* енергії мають вигляд

$$|E_{\pm}(t)\rangle = \gamma_{\mp} |0\rangle \mp \gamma_{\pm} |1\rangle, \quad (2.5)$$

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \frac{\varepsilon(t)}{\Delta E(t)}}. \quad (2.6)$$

Зокрема, у точці квазіперетину, $\varepsilon = 0$, $|E_{\pm}(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \mp |1\rangle)$. Для $\varepsilon \gg \Delta$, адіабатичні рівні енергії наближаються до діабатичних.

Тепер проблема полягає у знаходженні ймовірності того, що ДРС опиниться у верхньому збудженому стані після проходження області квазіперетину. Припустимо, що еволюція починається з основного стану $|E_{-}\rangle$ у лівій частині рис. 2.1(а), тобто на $t \rightarrow -\infty$. Нас цікавить ймовірність \mathcal{P} знаходження системи у збудженому стані $|E_{+}\rangle$ після проходження області

квзіперетину, тобто при $t \rightarrow +\infty$. Також альтернативну, задачу можна сформулювати в термінах діабатичних станів: яка ймовірність \mathcal{P} залишитися у тому ж самому діабатичному стані $|0\rangle$, або яка ймовірність $(1 - \mathcal{P})$ зміни стану з $|0\rangle$ на $|1\rangle$?

Залежне від часу рівняння Шредінгера дає нам розв'язок, який відомий як формулою ЛЗШМ:

$$\mathcal{P} = \exp\{-2\pi\delta\}, \quad (2.7)$$

де

$$\delta = \frac{\Delta^2}{4\hbar v}, \quad (2.8)$$

параметр адіабатичності. Для повільного проходження області квзіперетину $\delta \gg 1$ (тобто, $v \ll \Delta^2/\hbar$), маємо адіабатичну еволюцію, де дворівнева система (ДРС) здебільшого залишається у основному стані, $\mathcal{P} \approx 0$.

Для швидкого проходження, $\delta \ll 1$, маємо діабатичну еволюцію, де система переважно прямує до діабатичного стану, $(1 - \mathcal{P}) \approx 0$; це означає, що, починаючи зі стану $|0\rangle$ при $t = -\infty$ на рис. 2.1(а), ми отримаємо майже з одиничною ймовірністю у тому самому стані $|0\rangle$ при $t = \infty$. Підкреслимо, що формула ЛЗШМ, рівн. (2.7), описує ймовірність переходу, якщо починати з основного; випадок, коли система починається з суперпозиційного стану, буде розглянуто пізніше.

Крім абсолютного значення хвильової функції, для інтерферометрії та квантового контролю вирішальне значення має фаза, отримана під час переходу ЛЗШМ. Ця фаза відома як фаза Стокса,

$$\phi_S(\delta) = \frac{\pi}{4} + \delta(\ln \delta - 1) + \text{Arg}[\Gamma(1 - i\delta)], \quad (2.9)$$

де Γ Гамма-функція.

Далі ми покажемо виведення формули (2.7), різними методами.

2.1 Функції параболічного циліндра та розширення підходу Зінера

У цьому розділі ми розглянемо, як обчислити ймовірність переходу ЛЗШМ на основі роботи Кларенса Зінера [18]. Фактично ми розвиваємо

підхід Зінера, аналітично знаходячи повну хвильову функцію з залежністю від часу [60, 55]. Тут ми приділяємо більше уваги знаходженню зміни фази хвильової функції після переходу. У цьому підході ми отримуємо прямий розв'язок рівняння Шредінгера з залежністю від часу в термінах спеціальної функції, відомої як функція параболічного циліндру. Цей метод не такий простий, як метод Майорани або Ландау, але він дає більш загальний і точний розв'язок цієї задачі. Зокрема, тут не буде невідомого множника C , як у підході Ландау. Для теоретичного опису, що включає узагальнення на неермітові гамільтоніани, див. [61, 62].

Розглянемо залежне від часу рівняння Шредінгера, рівняння (2.65). Використовуючи хвильову функцію рівняння (2.3) та гамільтоніан у матричному вигляді рівняння (2.1), отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} i\hbar\dot{\alpha} = -\frac{v}{2}t\alpha - \frac{\Delta}{2}\beta, \\ i\hbar\dot{\beta} = -\frac{\Delta}{2}\alpha + \frac{v}{2}t\beta. \end{cases} \quad (2.10)$$

Цю систему рівнянь можна переписати у вигляді двох рівнянь другого порядку на функції Вебера (функції параболічного циліндру), для α або β :

$$\frac{d^2\alpha}{d\tau^2} + (2\delta - i + \tau^2)\alpha = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{d^2\beta}{d\tau^2} + (2\delta + i + \tau^2)\beta = 0, \quad (2.12)$$

де

$$\tau = t\sqrt{\frac{v}{2\hbar}}, \quad (2.13)$$

і δ - параметр адіабатичності, рівняння (2.8). Наступна заміна

$$z = \tau\sqrt{2}\exp(i\pi/4) \quad (2.14)$$

дозволяє отримати так зване рівняння Вебера у канонічному вигляді

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2} + \left(-i\delta - \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right)\alpha = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{d^2\beta}{dz^2} + \left(-i\delta + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right)\beta = 0. \quad (2.16)$$

Розв'язками рівняння Вебера є комбінації функцій параболічного циліндру [63],

$$\alpha = A_+ D_{-1-i\delta}(z) + A_- D_{-1-i\delta}(-z), \quad (2.17)$$

$$\beta = B_+ D_{-i\delta}(z) + B_- D_{-i\delta}(-z). \quad (2.18)$$

Знайдемо співвідношення між коефіцієнтами A_{\pm} і B_{\pm} за допомогою підстановки розв'язків у диференційне рівняння Шредінгера першого порядку (2.10):

$$B_{\pm} = \mp \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{\delta}} A_{\pm}. \quad (2.19)$$

Використовуючи співвідношення (2.19) і точний розв'язок (2.17), ми можемо знайти A_{\pm} з початкових умов при $z = z_i$ з певними $\alpha(z_i)$ та $\beta(z_i)$ [60]:

$$A_+ = \frac{\Gamma(1+i\delta)}{\sqrt{2\pi}} \left[\alpha(z_i) D_{-i\delta}(-z_i) - \beta(z_i) e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\delta} D_{-1-i\delta}(-z_i) \right], \quad (2.20)$$

$$A_- = \frac{\Gamma(1+i\delta)}{\sqrt{2\pi}} \left[\alpha(z_i) D_{-i\delta}(z_i) + \beta(z_i) e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\delta} D_{-1-i\delta}(z_i) \right]. \quad (2.21)$$

Це дає *точний аналітичний розв'язок у будь-який момент часу $\tau > \tau_i$* для одноразового переходу ЛЗШМ для *будь-якої початкової умови* в термінах матриці еволюції Ξ^e

$$\begin{pmatrix} \alpha(z) \\ \beta(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Xi_{11}^e & \Xi_{12}^e \\ \Xi_{21}^e & \Xi_{22}^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(z_i) \\ \beta(z_i) \end{pmatrix} \equiv \Xi^e \begin{pmatrix} \alpha(z_i) \\ \beta(z_i) \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

де залежні від часу елементи матриці Ξ^e мають такий вигляд

$$\Xi_{11}^e = \frac{\Gamma(1+i\delta)}{\sqrt{2\pi}} [D_{-i\delta}(-z_i)D_{-1-i\delta}(z) + D_{-i\delta}(z_i)D_{-1-i\delta}(-z)], \quad (2.23)$$

$$\Xi_{12}^e = \frac{\Gamma(1+i\delta)}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\delta} [-D_{-1-i\delta}(-z_i)D_{-1-i\delta}(z) + D_{-1-i\delta}(z_i)D_{-1-i\delta}(-z)],$$

$$\Xi_{21}^e = \frac{\Gamma(1+i\delta)}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\delta}} [-D_{-i\delta}(-z_i)D_{-i\delta}(z) + D_{-i\delta}(z_i)D_{-i\delta}(-z)],$$

$$\Xi_{22}^e = \frac{\Gamma(1+i\delta)}{\sqrt{2\pi}} [D_{-1-i\delta}(-z_i)D_{-i\delta}(z) + D_{-1-i\delta}(z_i)D_{-i\delta}(-z)].$$

З матриці еволюції (2.22) можна отримати *точний* розв'язок рівняння (2.18) для задачі ЛЗШМ у термінах хвильової функції (2.3) у будь-який момент часу для лінійного збудження. Звичайно, цей точний розв'язок збігається з числовим розв'язком рівняння (2.10). Однак, якщо ми хочемо знати хвильову функцію (2.3) у певний момент часу, нам не потрібно обчислювати її для всіх попередніх моментів часу, як це робиться для чисельного розв'язку рівняння (2.10). Точна матриця еволюції (2.22) є основою для методу матриць переходу, що описує динаміку переходу ЛЗШМ. Отже, зараз ми пояснимо, як обчислюється точна матриця еволюції Ξ^e призводить до матриці переходу N , рівняння (2.89). Для цього візьмемо початковий та кінцевий моменти часу симетрично далеко від області квазіперетину

$$\tau_i = -\tau_a, \quad \tau_f = \tau_a, \quad \text{де } \tau_a \gg 1; \quad (2.24)$$

$$z_i = \tau_a \sqrt{2} e^{-3i\pi/4}, \quad z_f = \tau_a \sqrt{2} e^{i\pi/4}. \quad (2.25)$$

Тепер ми використаємо наближення для функцій параболічного циліндру з аргументом, що прямує до нескінченності [63] (див. розділ про функції параболічного циліндру, стор. 1092-1094),

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} D_{-i\delta\Gamma(i\delta+1)} e^{i\pi(i\delta+1)} e^{z^2/4} z^{i\delta}, \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \text{Arg}(z) &= -\frac{3\pi}{4}, \\ \lim_{|z| \rightarrow \infty} D_{-i\delta-1}(-z) &\approx e^{-z^2/4} z^{-i\delta-1}, \quad \text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (2.27)$$

і наступні властивості гамма-функції

$$\Gamma(i\delta) = \sqrt{\frac{\pi}{\delta \sinh \pi\delta}} \exp(i\text{Arg}[\Gamma(i\delta)]), \quad (2.28)$$

$$\text{Arg}[\Gamma(i\delta)] = -\text{Arg}[\Gamma(-i\delta)] = -\frac{\pi}{2} - \text{Arg}[\Gamma(1-i\delta)]. \quad (2.29)$$

В результаті знаходимо асимптотичні значення матриці еволюції одноразового переходу в діабатичному базисі

$$\Xi_{11}^e \approx \exp[-\pi\delta] = T, \quad (2.30)$$

$$\Xi_{12}^e \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1+i\delta)} \sqrt{\delta} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\tau_a^2} \left(\sqrt{2}\tau_a\right)^{2i\delta} e^{-\frac{\pi\delta}{2}} = \quad (2.31)$$

$$= R \exp i \left\{ \frac{\pi}{4} + \text{Arg}[\Gamma(1-i\delta)] + \tau_a^2 + 2\delta \ln \left(\sqrt{2}\tau_a\right) \right\}. \quad (2.32)$$

Інші елементи, Ξ_{21}^e та Ξ_{22}^e , можна можна знайти з цих двох матричних елементів. В цих рівняннях,

$$T = e^{-\pi\delta}, \quad R = \sqrt{1 - e^{-2\pi\delta}} \quad (2.33)$$

позначають коефіцієнти проходження та відбиття.

Розглянемо, як це пов'язати з адіабатично-імпульсною моделлю (AIM); а саме, знайдемо неадіабатичну матрицю переходу N . Згідно з методу матриць переходу, підрозділ 2.2.2, повна однопрохідна еволюція для довільного початкового стану складається з трьох стадій:

- (a) адіабатична еволюція перед переходом,
- (b) сам перехід, і
- (c) адіабатична еволюція після переходу.

Отже, для цього випадку природний природним є опис в адіабатичному базисі. Три стадії еволюції в адіабатичному базисі описуються добутком трьох відповідних матриць $\Xi^a = U_2 N U_1$. Матриці адіабатичних стадій дорівнюють $U_{1,2} = \exp [i\zeta(\pm\tau_a)\sigma_z/2]$ з

$$\zeta(\pm\tau_a) = \frac{1}{2\hbar} \int_0^{\pm\tau_a} \sqrt{\Delta^2 + 2\hbar v \tau^2} d\tau \approx \Phi(\tau) - \Phi_\delta, \quad (2.34)$$

де

$$\Phi(\tau) = \frac{\tau^2}{2} + \delta \ln(\sqrt{2}\tau), \quad \Phi_\delta = \frac{1}{2}\delta(\ln\delta - 1). \quad (2.35)$$

Таким чином, отримуємо матрицю однопрохідної еволюції в адіабатичному базисі

$$\Xi^a = U_2 N U_1 = \begin{pmatrix} Re^{i\{-\frac{\pi}{4} - \text{Arg}[\Gamma(1-i\delta)] - 2\Phi(\tau_a)\}} & T \\ -T & Re^{i\{\frac{\pi}{4} + \text{Arg}[\Gamma(1-i\delta)] + 2\Phi(\tau_a)\}} \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Матриці еволюції в адіабатичному та діабатычному базисах пов'язані між собою матрицею переходу між базисами

$$S(\tau) = \begin{pmatrix} \gamma_+ & \gamma_- \\ \gamma_- & -\gamma_+ \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

де коефіцієнти γ_\pm визначено в рівнянні (2.6). Асимптоти матриці $S(\tau)$ мають вигляд

$$S(-\tau_a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S(\tau_a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Зіставимо два представлення

$$S(\tau_a)\Xi^e S(-\tau_a) = \Xi^a = U_2 N U_1, \quad (2.39)$$

звідки отримуємо шукану матрицю для *неадіабатичного* переходу

$$N = U_2^{-1} S(\tau_a) \Xi^e S(-\tau_a) U_1^{-1} = \begin{pmatrix} Re^{-i\phi_s} & -T \\ T & Re^{i\phi_s} \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

де фазу Стокса $\phi_S(\delta)$ визначено у рівнянні (2.9). Докладніше про цей фазовий зсув див. [64].

Зауважимо, що матрицю переходу N тут подано в адіабатичному представленні. У діабатычному базисі отримаємо.

$$N_d = S(\tau_a)NS(-\tau_a) = \begin{pmatrix} T & Re^{i\phi_S} \\ -Re^{-i\phi_S} & T \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Розглянемо зворотний перехід, від $\tau = +\tau_a$ до $\tau = -\tau_a$. Тоді маємо $z_i = \tau_a\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ і $z_f = \tau_a\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$. Отримуємо, що матриці перехідної еволюції для цього оберненого переходу транспоновані відносно матриць прямої перехідної еволюції в адіабатичному та діабатычному базисах,

$$N_{\text{inverse}} = N^\top = \begin{pmatrix} Re^{-i\phi_S} & T \\ -T & Re^{i\phi_S} \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

$$N_{d,\text{inverse}} = N_d^\top = \begin{pmatrix} T & -Re^{-i\phi_S} \\ Re^{i\phi_S} & T \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

де \top позначає транспонування. Підкреслимо, що зворотний перехід описується транспонованими матрицями, які можна отримати як з інвертування часу ($t \rightarrow -t$) у рівнянні Шредінгера, так і з прямого розв'язку, як ми перевірили в рівняння (2.42). Важливо, що наведене вище міркування має загальний характер і може бути застосоване для будь-яких початкових умов. Зокрема, у випадку, коли спочатку наша ДРС перебувала на нижньому (основному) енергетичному рівні, тобто

$$\begin{cases} \alpha(z_i) = 0, \\ \beta(z_i) = 1, \end{cases} \quad (2.44)$$

маємо

$$\begin{cases} \alpha(z) = \Xi_{12}^e, \\ \beta(z) = \Xi_{22}^e. \end{cases} \quad (2.45)$$

Цей вираз визначає розв'язок для довільного початкового моменту часу τ_i . Крім того, спрощуються вирази для Ξ^e для $-\tau_i = \tau_a \gg 1$. Тоді отримаємо

вираз для заселеності верхнього діабатичного енергетичного рівня:

$$P_d(z) = |\alpha(z)|^2 = \delta e^{-\frac{\pi\delta}{2}} |D_{-1-i\delta}(-z)|^2. \quad (2.46)$$

Беручи до уваги зв'язок між діабатичним та адіабатичним базисами, для відповідної ймовірності заселеності верхнього рівня в адіабатичному базисі, отримуємо

$$P_a(z) = |\beta(z)\gamma_+ - \alpha(z)\gamma_-|^2, \quad (2.47)$$

і це призводить до наступної залежності від часу

$$P_a(z) = e^{-\frac{\pi\delta}{2}} \left| D_{-i\delta}(-z)\gamma_+ - \sqrt{\delta} e^{-\frac{i\pi}{4}} D_{-1-i\delta}(-z)\gamma_- \right|^2. \quad (2.48)$$

Ці вирази визначають залежність зайнятості верхнього рівня від часу ймовірності. Вони ще більше спрощуються, якщо нас цікавить асимптотичний розв'язок з $\tau \gg 1$.

Розширення підходу Зінера 1932 року

Розглянемо тепер інший, більш традиційний спосіб розв'язання цієї задачі та розвиток підходу Зінера. Нижче ми розширимо підхід Зінера 1932 року. Ми вивчатимемо асимптотику α і β і знайдемо коефіцієнти A'_\pm після отримання асимптотики з початкових умов. Розглянемо асимптотичний розв'язок з Рівн. (2.25), з асимптотикою функцій параболічного циліндру Рівн. (2.27).

Знайдемо асимптотичні значення α та β :

$$\alpha(-\tau_a) \approx A'_+ \Theta_1 \exp(i\Phi(\tau_a)), \quad (2.49)$$

$$\beta(-\tau_a) \approx \left(-e^{-\delta\pi/2} A'_+ + e^{\delta\pi/2} A'_- \right) \Theta_2 \exp(-i\Phi(\tau_a)), \quad (2.50)$$

$$\alpha(\tau_a) \approx A'_- \Theta_1 \exp(i\Phi(\tau_a)), \quad (2.51)$$

$$\beta(\tau_a) \approx \left(-e^{\delta\pi/2} A'_+ + e^{-\delta\pi/2} A'_- \right) \Theta_2 \exp(-i\Phi(\tau_a)), \quad (2.52)$$

де

$$\Theta_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1+i\delta)} \exp\left(-\frac{\pi}{4}\delta\right), \quad (2.53)$$

$$\Theta_2 = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\delta\right), \quad (2.54)$$

і A'_\pm - асимптотичні коефіцієнти, які відіграють ту саму роль, що й A_\pm для точного розв'язку. Зіставимо цей асимптотичний розв'язок з переходом від діабатичного до адіабатичного базису, Рівн. (2.5), при $\tau_a \gg 1$. Тоді отримаємо

$$\begin{pmatrix} c_+(-\tau_a) \\ c_-(-\tau_a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(-\tau_a) \\ \beta(-\tau_a) \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

$$\begin{pmatrix} c_+(\tau_a) \\ c_-(\tau_a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta(\tau_a) \\ -\alpha(\tau_a) \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

де c_\pm - коефіцієнти розкладання для хвильової функції $|\psi\rangle$ за адіабатичними хвильовими функціями $|\psi_\pm\rangle$,

$$|\psi\rangle = c_+ |\psi_+\rangle + c_- |\psi_-\rangle. \quad (2.57)$$

Далі, використовуємо початкові умови (2.44), і знаходимо ймовірність знаходження ДРС на верхньому енергетичному рівні, яка дорівнює $|c_+(\tau_f)|^2 \approx |\beta(\tau_f)|^2$. Для цього потрібно знайти абсолютне значення коефіцієнтів A'_\pm . Опишемо коефіцієнти з першої початкової умови (2.44) та першого рівняння системи (2.10); отже, отримаємо $i\hbar\dot{\alpha} = -\frac{\Delta}{2}$. Тоді, перш ніж використовувати анзац (2.17), потрібно переписати початкову умову у через змінну z , введenu у рівнянні (2.14)

$$\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}} d\alpha}{\sqrt{\delta} dz} = 1. \quad (2.58)$$

На наступному кроці нам потрібно визначити похідну для функції параболічного циліндру на нескінченності, як показано у рівнянні (2.27), яке

має вигляд [63]:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{d}{dz} D_{-i\delta-1}(-z) \approx -\frac{1}{2} e^{-z^2/4} z^{-i\delta}. \quad (2.59)$$

Тепер визначимо коефіцієнти A'_{\pm} , для чого використаємо анзац (2.17) та асимптотики параболічного циліндра функції (2.59):

$$\frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\delta}} A'_{\pm} e^{-i\tau^2/2} (\sqrt{2\tau})^{-i\delta} e^{i\pi\delta/4} = 1. \quad (2.60)$$

Звідси випливає, що

$$A'_+ = A'_- = 2\sqrt{\delta} e^{-\delta\pi/4} e^{i\pi/4} \exp\left[i\frac{\tau^2}{2}\right] \exp\left[i\delta \ln(\sqrt{2\tau})\right]. \quad (2.61)$$

Нарешті, отримаємо *імовірність зайняття нижчого енергетичного рівня після переходу*:

$$|\alpha(z_f)|^2 \approx \frac{2\pi\delta}{|\Gamma(1+i\delta)|^2} e^{-\pi\delta} = \frac{2\pi\delta e^{-\pi\delta}}{\delta^2 |\Gamma(i\delta)|^2} = 1 - e^{-2\pi\delta}. \quad (2.62)$$

Тут ми використали рівняння (2.28) з умовою нормування $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Тоді, ми отримаємо ймовірність заселеності верхнього рівня:

$$|\beta(z_f)|^2 = \exp[-2\pi\delta] = \mathcal{P}. \quad (2.63)$$

На додаток до знаходження кінцевої ймовірності зайнятості верхнього рівня, після визначення коефіцієнтів A'_{\pm} , цей підхід дає нам асимптотику для коефіцієнтів α та β хвильової функції $|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|0\rangle + \beta(t)|1\rangle$ після проходження області квазіперетину рівнів. Якщо ми розглянемо фазу $\alpha(z_f)$, використовуючи рівняння (2.28), (2.32) і (2.61), можна знайти різницю фаз накопичену під час перехідного процесу:

$$\text{Arg}[\alpha(z_f)] = \frac{\pi}{4} + \text{Arg}[\Gamma(1-i\delta)] + 2\Phi(\tau_a). \quad (2.64)$$

(Зауважте, що рівняння (2.64) не наведено у статті Зінера). Отже, ми

двічі отримали рівняння (2.7) за допомогою методу Зінера з повною фазою одноперехідної еволюції рівняння (2.32). Тоді ми можемо зробити те саме перетворення, що й в рівняння (2.36, 2.40), і отримаємо ту саму матрицю переходів з фазою Стокса рівняння (2.9). Маємо $\alpha(\tau_a) = \Xi_{12}^e$ з початковими умовами (2.44). А Отже, отримуємо той самий кінцевий результат для ймовірності збудження та фази, що й у рівнянні (2.32).

Підсумовуючи, у цьому розділі ми представили два підходи, які узагальнюють роботи [18] та [60]. Отримано точний розв'язок в термінах спеціальних функцій параболічного циліндра для однопрохідної задачі в загальному випадку в термінах точної матриці однопрхідної еволюції Ξ^e , рівняння (2.22). Також отримали простіший граничний варіант матриці еволюції, який описує еволюцію від z_i до z_f , рівняння (2.89). Як окремий випадок, ми маємо задачу про одноразовий перехід області квазіперетину, яка починається з основного стану далеко від квазіперетину і закінчується також далеко від квазіперетину; тоді ймовірність переходу задається формулою ЛЗШМ, а різниця фаз визначається фазою Стокса. Зінер отримав лише ймовірність переходу ЛЗШМ переходу; очевидно, його не цікавила зміна фази хвильової функції. Однак виявилось, що визначити її, використовуючи підхід Зінера, нескладно.

2.2 Різні властивості одиночного переходу ЛЗШМ

Тут ми описуємо різні властивості переходу ЛЗШМ, які можуть бути корисними у багатьох різних застосуваннях.

2.2.1 Динаміка та час одноразового переходу в різних базисах

Вище зазначено, що для лінійного збудження, $\varepsilon = vt$, ДРС, що починається з основного стану з імовірністю збудження ЛЗШМ \mathcal{P} . Для графічного представлення задачі з лінійним збудженням див. на рис. 2.1(а). Розглянемо це тепер більш детально наступні питання: Яка динаміка системи $P_+(t)$? Як вона змінюється, якщо не починати з основного стану? Який

характерний час описує, прагнення $P_+(t)$ до \mathcal{P} ? Що змінюється, якщо збудження нелінійне?

Почнемо з того, що динаміка залежить від представлення. Як теоретично, так і експериментально, ми можемо вивчати еволюцію у різних базисах [65]. Найважливішими базисами є діабатичний та адіабатичний, які ми ввели вище. Враховуючи важливість цих двох базисів як для теорії, так і для вимірювань, ми розглянемо динаміку та її характерні особливості для обох базисів. Для подальшого більш детального вивчення див. посилання [66] на про експериментальну візуалізацію динаміки одноразового переходу; посилання [67, 68, 69] про багаторівневі переходи у відкритих квантових системах; та посилання [60, 70] про скінченний зв'язок між рівнями, де Δ - ступінчаста функція.

У найпростішому підході динаміка описується адіабатично-імпульсною моделлю (AIM). Зважаючи на її важливість, розглянемо її більш детально у наступному розділі про періодичне збудження. Для задачі одноразового проходження AIM модель складається з адіабатичних станів, які слідує за основним станом, потім резонансне (імпульсне) збудження на верхній рівень в точці квазіперетину, а потім знову адіабатичний стан, тепер з певною ймовірністю зайняття збудженого стану. Ця динаміка показана на рис. 2.2(a) пунктирними лініями. Математично таку поведінку ступінчастої функції зручно описувати за допомогою методу матриці еволюції, де кожному типу еволюції приписується відповідна матриця.

Тепер з'ясуємо, наскільки точним є підхід матриць еволюції і які існують обмеження на застосування AIM [71]. Відповідно, ми розв'яжемо рівняння Шредінгера точно і опишемо перехідну поведінку, включаючи час релаксації.

Існує два різні способи отримати точний розв'язок. Перший спосіб полягає у чисельному розв'язанні рівняння Шредінгера

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle, \quad (2.65)$$

який можна використовувати для всіх випадків, включаючи різні нелінійні збуджуючі сигнали та різні початкові умови.

Другий підхід полягає у розв'язанні рівняння Шредінгера з лінійним збудженням через функції параболічного циліндру $D_\nu(x)$ (див. Додаток 2.1).

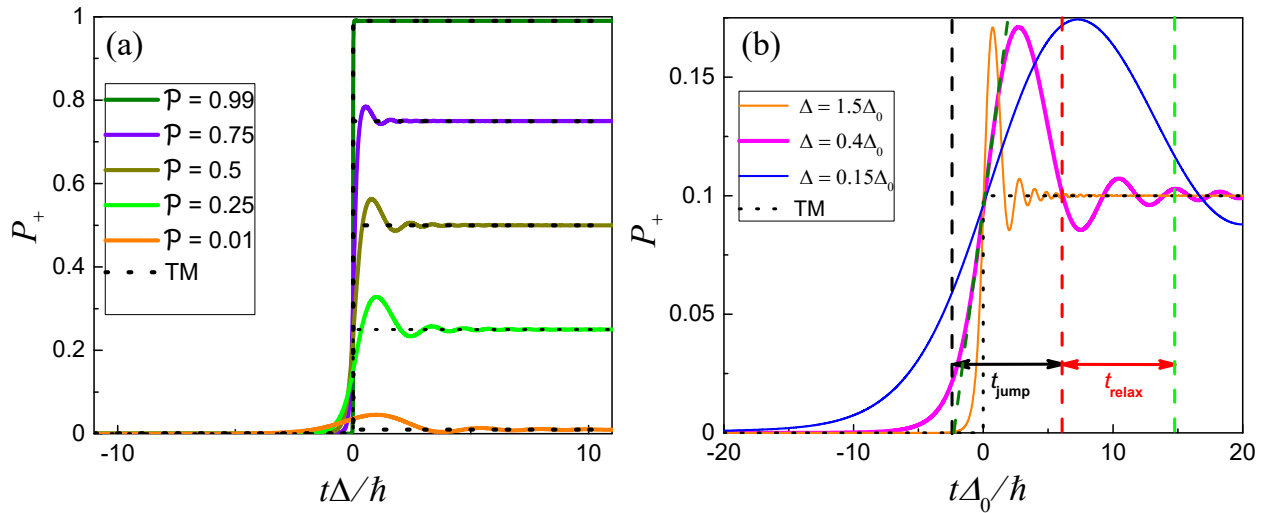


Рис. 2.2: **Одноразовий перехід Ландау-Зінера-Штукельберга-Майорани (ЛЗШМ)** з різними ймовірностями (a) та з різним часом переходу для фіксованого значення ймовірності переходу \mathcal{P} (b). В (a) зображено залежність від часу ймовірності зайняття верхнього рівня $P_+(t)$, демонструючи таким чином динаміку для заданого значення кінцевої ймовірності переходу ЛЗШМ \mathcal{P} . Чорні пунктирні криві побудовано за допомогою методу матриці еволюції, тоді як суцільні криві показують чисельний розв’язок рівняння Шредінгера. У (b) всі криві наведено для фіксованої ймовірності переходу ЛЗШМ $\mathcal{P} = 0.1$, тоді як і Δ , і v змінюються; це демонструє вплив цих параметрів на динаміку переходного процесу. Тут зручно нормалізувати час фіксованим значенням Δ_0 , за яким визначені Δ в легенді. Еволюція характеризується двома часами переходу: часом стрибка t_{jump} і часом релаксації t_{relax} , які показано на рисунку для товстої пурпурової кривої.

Цей підхід дає простий вираз для ймовірності у діабатичному базисі $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. При розв’язуванні рівняння Шредінгера за Зінером, природно спочатку ввести безрозмірний час, τ , а потім пов’язану з ним комплексну величину, z , яку можна назвати “змінною Зінера”:

$$\tau = t\sqrt{\frac{v}{2\hbar}}, \quad z = \tau e^{i\pi/4} \sqrt{2} e^{i\pi/4} = t\sqrt{\frac{v}{\hbar}}. \quad (2.66)$$

Тоді, починаючи еволюцію з основного рівня, $|E_-\rangle$ ліва частина рис. 2.1(a), можна отримати залежний від часу розв’язок для ймовірності заселеності

верхнього рівня в діабатичному базисі (див. розділ 2.1)

$$P_d(z) = \delta \exp(-\pi\delta/2) |D_{-1-i\delta}(-z)|^2. \quad (2.67)$$

Для отримання динаміки переходу для ймовірності зайняття верхнього рівня в адіабатичному базисі $\{|E_-(t)\rangle, |E_+(t)\rangle\}$ використовуємо формули (2.5,2.6),

$$P_a(z) = \exp(-\pi\delta/2) \left| D_{-i\delta}(-z)\gamma_+ - \sqrt{\delta} e^{-\frac{i\pi}{4}} D_{-1-i\delta}(-z)\gamma_- \right|^2. \quad (2.68)$$

Такий аналітичний розв'язок має перевагу у тому, що не потрібно знаходити всі значення хвильової функції від початкового моменту часу до потрібного нам на відміну від чисельного розв'язку, де потрібно обчислити всі попередні значення хвильової функції від початкового моменту часу до потрібного обчислити всі попередні значення хвильової функції між поточним і початковим моментами часу.

На рис. 2.2, ми ілюструємо еволюцію ймовірності заселеності верхнього рівня, підкреслюючи декілька різних аспектів. На рис. 2.2(a) ми спочатку фіксуємо декілька значень кінцевої ймовірності переходу ЛЗШМ \mathcal{P} . Вони визначаються параметром адіабатичності δ , рівняння (2.8). Інвертуванням співвідношення для \mathcal{P} , рівняння (2.7), отримаємо вираз

$$\frac{\hbar v}{\Delta^2} = -\frac{\pi}{2 \ln(\mathcal{P})}, \quad (2.69)$$

яка визначає співвідношення між v та Δ для заданого значення \mathcal{P} . За визначеними значеннями v та Δ будемо графік, зображений на рис. 2.2(a) аналітичний розв'язок (штрихові лінії), який є ступінчастою функцією від 0 до \mathcal{P} , та чисельний розв'язок (показано суцільними лініями). Підкреслимо, що для чисельного підходу ми можемо однаково використовувати як прямий розв'язок для рівняння Шредінгера або наведені вище формули, тобто рівняння (2.67, 2.68). Зауважте, що зі збільшенням \mathcal{P} еволюція стає більш подібною до аналітичного розв'язку: ступінчастою функцією. Важливо, що на рис. 2.2(a) наочно показує, що формула ЛЗШМ є стійкою і правдивою у всьому діапазоні параметрів ДРС, що також було теоретично обґрунтовано в

літературі [45, 72, 73, 13].

На рис. 2.2(b), ми беремо фіксоване значення для ймовірності переходу ЛЗШМ, $\mathcal{P} = 0.1$. Тоді, для різних кривих, ми одночасно змінюємо як Δ , так і v , щоб зберегти цю величину \mathcal{P} постійною; значення Δ приводяться. Рисунок 2.2(b) демонструє, що для заданого \mathcal{P} інші параметри суттєво впливають на динаміку. Ми охарактеризуємо це за допомогою двох параметрів часу переходу: t_{jump} і t_{relax} . Розглянемо тепер визначення та обчислення цих важливих величин; докладніше деталі наведено у розділі 2.2.1. Важливо, що часові масштаби перехідних процесів дуже відрізняються в адіабатичному та діабатичному базисах; таким чином, ми описуємо тривалість переходу ЛЗШМ в обох базисах, слідуючи [74].

Таким чином, процес переходу має дві послідовні фази. Перша фаза це коли ймовірність заселеності стрибає від початкового значення $P(-\infty)$ до околиці кінцевого значення $P(\infty)$. Для адіабатичного базису маємо $P(\infty) = \mathcal{P}$, тоді як для діабатичного базису маємо $P(\infty) = 1 - \mathcal{P}$. Щоб кількісно оцінити цей проміжок часу t_{jump} , зауважимо, що нахил до нуля наближено дорівнює $P'(0) \sim \Delta P / \Delta t$; замінивши ΔP на $P(\infty)$ і Δt на t_{jump} , ми приходимо до визначення

$$t_{\text{jump}} = \frac{P(\infty)}{P'(0)}. \quad (2.70)$$

Однак, це означення не завжди є доречним, як ми обговорюємо у підрозділі 2.2.1 Друга фаза еволюції - це час, коли ймовірність проявляє затухаючі коливання навколо свого кінцевого значення $P(\infty)$; тривалість цього процесу позначається як t_{relax} . Цей час релаксації можна описати кількісно, ввівши малий параметр $\eta \ll 1$, який описує що після t_{relax} амплітуда коливань стає меншою ніж $\eta P(\infty)$.

Ми повинні розрізнити ймовірність заселеності верхнього рівня в адіабатичному базисі P_+ від такої в діабатичному базисі P_0 . Динаміка ймовірностей у різних базисах була теоретично досліджена в [75, 76] та експериментально в [77, 65]. Ми демонструємо динаміку в цих двох базисах на рис. 2.3. Для параметра адіабатичності δ , який описує динаміку, ми візьмемо дві протилежних ліміти: $\delta \ll 1$ (*діабатичний ліміт*) та $\delta \gg 1$ (*адіабатичний ліміт*). Точніше, в адіабатичному випадку візьмемо $\delta \gtrsim 1$,

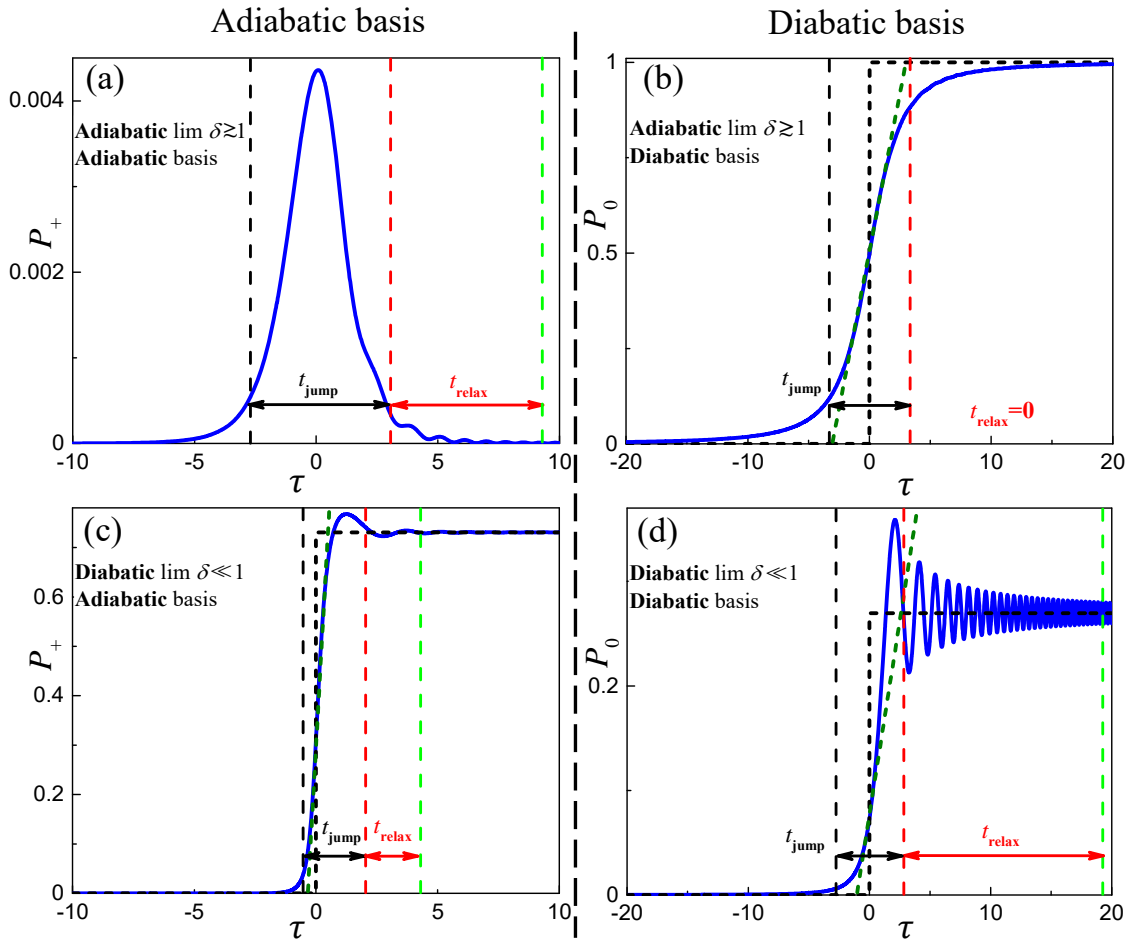


Рис. 2.3: Динаміка одного переходу ЛЗШМ в адіабатичному базисі (а,с) та в діабатычному базисі (b,d). Проілюстровано два граничні випадки параметра параметра адіабатичності: $\delta = 2 \gtrsim 1$ у $P_+(\tau)$ (a,b) та $\delta = 0.05 \ll 1$ у $P_0(\tau)$ (c,d). Горизонтальні чорні подвійні стрілки показують t_{jump} , а червоні подвійні стрілки - t_{relax} . Похилі пунктирні зелені лінії показують похідну у точці квазіперетину, $\tau = 0$. Нагадаємо, що безрозмірний час дорівнює $\tau = t \sqrt{\frac{v}{2\hbar}}$.

оскільки при $\delta \gg 1$ ймовірність ЛЗШМ $\mathcal{P} = \exp(-2\pi\delta)$ стає дуже малою. З цими чотирма варіантами, на рис. 2.3(a-d), ми можемо можна спостерігати якісно і кількісно різні типи динаміки.

Зауважте, що часи релаксації також дуже відрізняються в адіабатичному та діабатычному базисах. А саме загальний час переходу ($t_{\text{LZSM}} = t_{\text{jump}} + t_{\text{relax}}$) в адіабатичному ліміті ($\delta \gtrsim 1$) набагато довший в адіабатичному базисі, ніж у діабатычному. Справедливо і протилежне: час переходу в *діабатычному ліміті* ($\delta \ll 1$) набагато більший в діабатычному ніж в адіабатичному базисі. Зокрема, для $\delta \gtrsim 1$, у діабатычному базисі немає коливань, а це означає, що релаксація дорівнює нулю time, $t_{\text{relax}}^{\text{d}} = 0$.

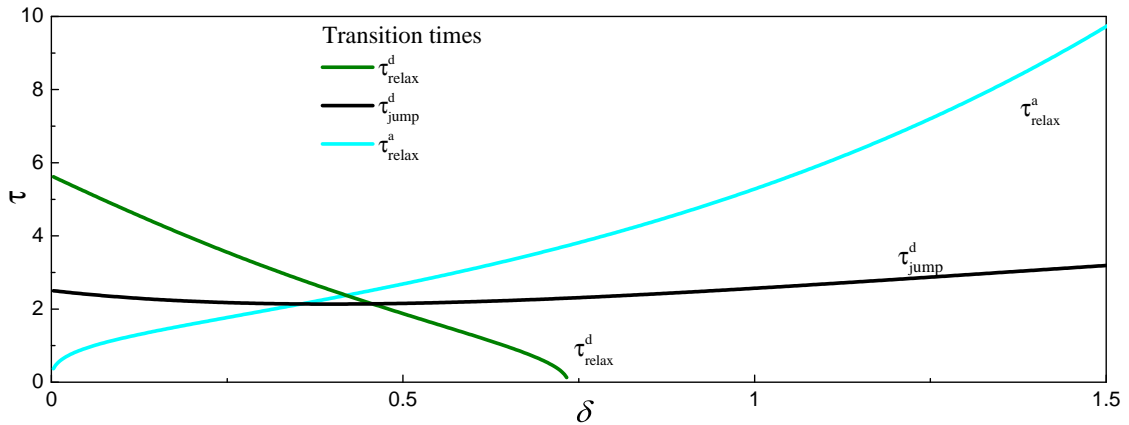


Рис. 2.4: Часи переходу в залежності від параметра адіабатичності δ . Побудуємо графіки як τ_{relax}^d , так і τ_{jump}^d для переходу в діабатичному базисі та час релаксації τ_{relax}^a в адіабатичному базисі. Ми не будемо графік часу стрибка в адіабатичному базисі, оскільки він дуже близький до часу релаксації, $\tau_{\text{jump}}^a \approx \tau_{\text{relax}}^a$. Тут безрозмірний час дорівнює $\tau = t(v/2\hbar)^{1/2}$. Див. розділ 2.2.1 для детальнішої інформації

Часи переходу та релаксації можна отримати аналітично з точного розв'язку, що описує один перехід ЛЗШМ з лінійним збудженням, а деталі подано в розділі 2.2.1. Тут ми визначаємо спрощені часи переходу t_{LZSM} , які дозволяють нам перевірити правильність методу ТМ. Характерним часом для однопрохідного процесу є час стрибку від початкового до кінцевого стану; якщо рух періодичний, то час стрибку дорівнює половині періоду періоду, $T_d/2$. Отже, цей характерний час має бути набагато більшим за час переходу ЛЗШМ, який можна компактно записати наступним чином (див. розділ 2.2.1):

$$t_{\text{LZSM}}^d \sim 4\sqrt{\frac{\hbar}{v}} \max\{1, \sqrt{\delta}\}, \quad (2.71)$$

$$t_{\text{LZSM}}^a \sim \pi\sqrt{\frac{\hbar}{v}} \max\left\{\left(\frac{\delta}{\eta}\right)^{1/3}, \left(\frac{\delta}{\eta}\mathcal{P}\right)^{1/6}\right\}, \quad (2.72)$$

у діабатичному та адіабатичному базисах відповідно. У рівнянні (2.72) $\eta \ll 1$ є малим параметр, який описує величину області біля початкової та кінцевої ймовірностей. Ці формули проілюстровано на рис. 2.4, використовуючи $\tau = t(v/2\hbar)^{1/2}$.

Отримання часів переходу

Перехідна динаміка важлива не лише для опису одного переходу, але й для багаторазових переходів. Зокрема, при описі періодичного руху (що є предметом розділу 3), якщо час переходу стає більшим за проміжок часу між двома переходами, $t_{\text{LZSM}} > T_d/2$, ми не можемо використовувати адіабатично-імпульсну модель.

Ми можемо розкласти час переходу $t_{\text{LZSM}} = t_{\text{jump}} + t_{\text{relax}}$ на два доданки, де час стрибка t_{jump} описує стрибок ймовірності від початкового значення до околиці кінцевого значення де час релаксації t_{relax} , коли осциляції ймовірності заселеності затухають навколо кінцевого значення $P(t \rightarrow \infty)$. Важливо, що час переходу відрізняється в адіабатичному та діабатычному базисах; тому ми визначаємо час релаксації в обох базисах, за [74]. У діабатычному базисі $P_d(\infty) = 1 - \mathcal{P}$, а в адіабатичному базисі $P_a(\infty) = \mathcal{P}$. У цьому розділі під P ми маємо на увазі ймовірності заселеності верхнього рівня.

Час переходу можна визначити наступним чином:

$$t_{\text{jump}} = \frac{P(\infty)}{P'(0)}. \quad (2.73)$$

Тут слід скористатися аналітичним розв'язком для ймовірностей у задачі ЛЗШМ рівняння. (2.46, 2.48), розклавши його у ряд навколо $\tau = 0$. Знайдемо значення цього аналітичного розв'язку в точці з нульовим зміщенням:

$$P'_d(0) = \sqrt{2\delta(1-\mathcal{P})} \cos \chi, \quad (2.74)$$

$$P'_a(0) = \frac{e^{-\pi\delta}}{\sqrt{8\delta}}, \quad (2.75)$$

де

$$\chi(\delta) = \frac{\pi}{4} + \text{Arg} \left[\Gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{i\delta}{2} \right) \right] - \text{Arg} \left[\Gamma \left(1 - \frac{i\delta}{2} \right) \right]. \quad (2.76)$$

Це дуже зручне визначення, рівняння (2.73), підходить для більшості випадків, включаючи діабатычну динаміку і, в деяких випадках, адіабатичну динаміку. Однак, як видно далі, таке визначення стає недійсним для адіабатичної динаміки в області *адіабатичного ліміту* $\delta \gg 1$; див. також

рис. 2.3. Ось чому нам потрібно ввести більш детальне означення.

Для отримання часів переходу можна використати розширений вираз для $P(\tau > 0)$, рівняння (2.46, 2.48), після проходження області квазіперетину в режимі сильного зв'язку з $\delta \gg 1$; тоді маємо

$$\begin{aligned}
 P_d(\tau > 0) &\approx \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \mathcal{P}\right) \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + 2\delta}} - \\
 &- \sqrt{\mathcal{P}(1 - \mathcal{P})} \sqrt{\frac{2\delta}{\tau^2 + 2\delta}} \cos \zeta(\tau), \\
 P_a(\tau > 0) &\approx \mathcal{P} + (1 - 2\mathcal{P}) \frac{\delta}{8(\tau^2 + 2\delta)^3} + \\
 &+ \sqrt{\mathcal{P}(1 - \mathcal{P})} \sqrt{\frac{\delta}{2(\tau^2 + 2\delta)^3}} \sin \zeta(\tau),
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

де

$$\begin{aligned}
 \zeta(\tau) &= -\delta + 2\delta \ln \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tau + \sqrt{\tau^2 + 2\delta} \right) \right] \\
 &+ \tau \sqrt{\tau^2 + 2\delta} + \frac{\pi}{4} + \text{Arg} [\Gamma(1 - i\delta)].
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

Ці вирази демонструють, що наближений розв'язок для має два вклади. Перший прагне до $P(\infty)$ при τ прямує до нескінченності; цей доданок визначає час стрибка t_{jump} . Другі члени, з $\cos \zeta(\tau)$ або $\sin \zeta(\tau)$, описують затухаючі коливання після проходження області квазіперетину; вони визначають час релаксації t_{relax} . Зокрема, ми бачимо, що $P'_a(0) = 0$ при $\delta \gg 1$. Отже, наведене вище визначення часу стрибка стає при цьому невірним.

Тому, у загальному випадку, час стрибка t_{jump} можна визначити як відстань між початком часу $t_{\text{jump}}^{(1)}$ і кінцем часу $t_{\text{jump}}^{(2)}$. Перший можна визначити як момент, коли ймовірність виходить з околиці початкової ймовірності, $P(t_{\text{jump}}^{(1)}) = \eta P(\infty)$, а другий - як момент, коли входження в околиці кінцевої ймовірності, $P(t_{\text{jump}}^{(2)}) - P(\infty) = \eta P(\infty)$. Тут $\eta \ll 1$ - це малий параметр, який описує величину околиці біля початкової та кінцевої ймовірностей. Тоді з рівняння (2.46, 2.73), ми отримуємо час стрибка в діабатичному базисі,

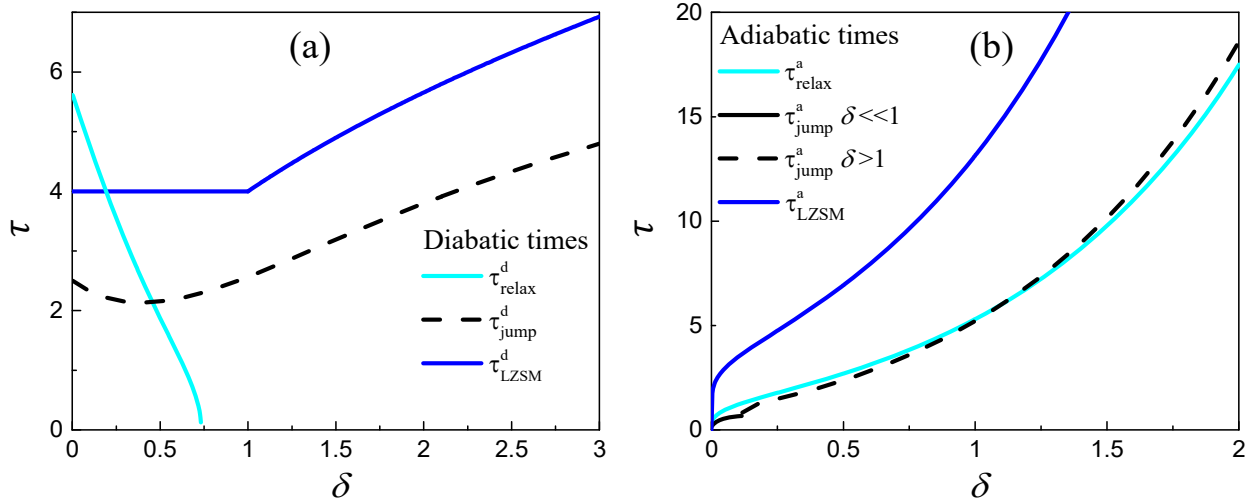


Рис. 2.5: Часи переходу t_{jump} and t_{relax} в залежності від параметра адіабатичності δ . Тут безрозмірний час дорівнює $\tau = t [v/2\hbar]^{1/2}$. Зауважте, що в адіабатичному базисі $t_{\text{jump}}^a \approx t_{\text{relax}}^a$, а також що цей час переходу зростає експоненціально у адіабатичному ліміті ($\delta \gg 1$). У діабатичному базисі та діабатичному ліміті ($\delta \ll 1$) $t_{\text{relax}}^d > t_{\text{jump}}^d$, і в адіабатичному ліміті немає t_{relax}^d . Зауважте, що τ_{LZSM} побудовано за допомогою рівнянь (2.71) та (2.72).

розклавши функції параболічного циліндра в ряд [63, 78]:

$$t_{\text{jump}}^d = \frac{\sqrt{1 - \mathcal{P}}}{\sqrt{2\delta} \cos \chi(\delta)}. \quad (2.79)$$

Звідси можна отримати граничні вирази:

$$t_{\text{jump}}^d \approx \begin{cases} 2\sqrt{\hbar\pi/v}, & \delta \ll 1, \\ 4\sqrt{\hbar\delta/v}, & \delta \gg 1. \end{cases} \quad (2.80)$$

Для часу релаксації в діабатичному базисі з рівняння (2.78) маємо

$$t_{\text{relax}}^d \approx 2\sqrt{\frac{\delta}{v} \left(\frac{1}{\eta^2(e^{2\pi\delta} - 1)} - 1 \right)}. \quad (2.81)$$

Для часу стрибка та релаксації в адіабатичному базисі з рівнянь (2.48)

та (2.73) впливає, що

$$t_{\text{jump}}^a \approx \begin{cases} 4\sqrt{\frac{\hbar\delta}{v}}, & \delta \ll 1, \\ \sqrt{\frac{2}{v}} \left(\frac{1}{\eta} 8\delta \exp[4\pi\delta] \right)^{1/6}, & \delta \gg 1, \end{cases} \quad (2.82)$$

і

$$t_{\text{relax}}^a \approx \sqrt{\frac{4\delta}{v} \left[\left(\frac{e^{2\pi\delta} - 1}{16\eta^2\delta^4} \right)^{1/3} - 1 \right]}. \quad (2.83)$$

У граничних випадках для часу релаксації маємо

$$t_{\text{relax}}^a \approx \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{v}} (2\delta/\eta)^{1/3}, & \delta \ll 1, \\ \sqrt{\frac{2}{v}} \left(\frac{\exp[\pi\delta]}{\eta} \right)^{1/3} (\delta/2)^{1/6}, & \delta \gg 1. \end{cases} \quad (2.84)$$

Час переходу показано на рис. 2.5. Для побудови графіків ми використали рівняння (2.81) для t_{relax}^d і рівняння (2.79) для t_{jump}^d на рис. 2.5(a); далі використано рівняння (2.83) для t_{relax}^a і рівняння (2.84) для t_{jump}^a на рис. 2.5(b).

Тут для $\delta \ll 1$ маємо $t_{\text{relax}}^d \gg t_{\text{relax}}^a$. Ця різниця у часі релаксації відбувається тому, що коливання $P_d(t)$ затухають пропорційно до t^{-1} , а $P_a(t)$ затухає пропорційно до t^{-3} .

Для випадку $\delta \gg 1$ маємо протилежну ситуацію: $t_{\text{relax}}^a \gg t_{\text{relax}}^d \approx 0$. Зауважте, що $t_{\text{relax}}^a \approx t_{\text{jump}}^a$; отже, ми можемо визначити $t_{\text{LZSM}} \approx 2t_{\text{relax}}^a$. У результаті, наведені вище рівняння можна підсумувати як рівн. (2.71, 2.72) наведені вище.

2.2.2 Метод матриці еволюції

Розглянемо тепер динаміку під час одноразового переходу як послідовність трьох етапів:

- (i) адиабатична еволюція, починаючи з часу $t_i < 0$ до досягнення перетину рівня, якого вдалося уникнути,
- (ii) неадиабатичний перехід дуже близько до $t = 0$, та

- (iii) адіабатичну еволюцію, що починається з переходу через рівень, якого вдалося уникнути, до моменту часу $t_f = -t_i > 0$.

Хвильову функцію можна розкласти у базисі *діабатичних* власних станів $|E_{\pm}(t)\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t) |E_-(t)\rangle + \beta(t) |E_+(t)\rangle = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}. \quad (2.85)$$

Умова нормування призводить до того, що всі матриці еволюції є унітарними. Розглянемо це для (i,iii) адіабатичної та (ii) неадіабатичної еволюцій. Для першого випадку, з нестационарного рівняння Шредінгера рівняння (2.65), отримуємо адіабатичний оператор часової еволюції

$$U(\zeta(t, t_i)) = \begin{pmatrix} \exp[-i\zeta(t, t_i)] & 0 \\ 0 & \exp[i\zeta(t, t_i)] \end{pmatrix} = \exp[-i\zeta(t, t_i)\sigma_z], \quad (2.86)$$

де $\zeta(t, t_i)$ - фаза, накопичена під час адіабатичної еволюції від часу t_i до моменту часу t

$$\zeta(t, t_i) = \frac{1}{2\hbar} \int_{t_i}^t \Delta E(t) dt. \quad (2.87)$$

Таким чином, адіабатична еволюція описується співвідношенням

$$|\psi(t)\rangle = U(\zeta(t, t_i)) |\psi(t_i)\rangle, \quad (2.88)$$

що відповідає відсутності переходів між адіабатичними рівнями, а лише накопичується різниця фаз.

Далі розглянемо перехід імпульсного типу при $t = 0$. Отримаємо матрицю переходу в діабатичному базисі; після переходимо від діабатичного базису до адіабатичного, використовуючи рівняння (2.6) і припускаючи $\varepsilon(t) \gg \Delta$, отримаємо матрицю переходу

$$N = \begin{pmatrix} Re^{-i\phi_s} & -T \\ T & Re^{i\phi_s} \end{pmatrix}, \quad (2.89)$$

де

$$T = \sqrt{\mathcal{P}} = \text{Коефіцієнт переходу}, \quad (2.90)$$

$$R = \sqrt{1 - \mathcal{P}} = \text{Коефіцієнт відбиття}, \quad (2.91)$$

ϕ_S - це фаза Стокса (2.9), яка з'являється у теорії диференціальних рівнянь другого порядку. Для детальнішої інформації див. [79, 64, 40, 80], зокрема про те, як ця фаза з'являється в термінах еволюції вектора Блоха та фазі Беррі. Отже, неадіабатичний перехід імпульсного типу при $t = 0$ описується рівнянням

$$|\psi(+0)\rangle = N |\psi(-0)\rangle. \quad (2.92)$$

Зауважимо, що з огляду на асимптотичність гамма-функції, монотонна функція $\phi_S(\delta)$ змінюється від 0 у області *адіабатичного ліміту* ($\delta \gg 1$) до $\pi/4$ в області *діабатичного ліміту* ($\delta \ll 1$).

Тепер можна визначити загальну матрицю одноперехідної еволюції у загальному випадку $\zeta_i \equiv \zeta(0, t_i) \neq \zeta(t_f, 0) \equiv \zeta_f$

$$U(\zeta_f)NU(\zeta_i) = \begin{pmatrix} R \exp[-i(\phi_S + \zeta_i + \zeta_f)] & -T \exp[-i(\zeta_i - \zeta_f)] \\ T \exp[i(\zeta_i - \zeta_f)] & R \exp[i(\phi_S + \zeta_i + \zeta_f)] \end{pmatrix}. \quad (2.93)$$

Ми також можемо знайти повну матрицю одноперехідної еволюції у випадку симетричної адіабатичної еволюції $\zeta(0, t_i) = \zeta(t_f, 0) \equiv \zeta$,

$$U(\zeta)NU(\zeta) = \begin{pmatrix} R \exp[-i(\phi_S + 2\zeta)] & -T \\ T & R \exp[i(\phi_S + 2\zeta)] \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

Зауважте, що коли ми розглядаємо зворотний перехід, ми повинні замінити матрицю прямого переходу N на матрицю зворотного переходу

$$N_{\text{inverse}} \equiv N^\top, \quad (2.95)$$

яка є транспонованою матрицею до матриці прямого переходу, див. в рівняння (2.42), та посилання [81].

За загальну початкову умову при $t = t_i$ візьмемо суперпозицію стан

$$|\psi(t_i)\rangle = \alpha(t_i) |E_-(t_i)\rangle + \beta(t_i) |E_+(t_i)\rangle, \quad (2.96)$$

де $|E_{\pm}(t)\rangle$ - миттєві власні стани залежного від часу гамільтоніана $H(t)$ та

$$\begin{cases} \alpha(t_i) = \sqrt{P_-(t_i)}, \\ \beta(t_i) = \sqrt{P_+(t_i)} e^{i\phi_i}, \end{cases} \quad (2.97)$$

де $P_{\pm}(t_i)$ - ймовірності зайнятості відповідних станів, а ϕ_i описує початкову різницю фаз. Важливо, що для суперпозиційного стану різниця фаз суттєво впливає на динаміку [82, 75]. Тепер, маючи матрицю еволюції UNU , ми можемо отримати остаточне значення заселеності верхнього рівня

$$P_+(t_f) = T^2 P_-(t_i) + R^2 P_+(t_i) - 2RT \sqrt{P_-(t_i) P_+(t_i)} \cos(-\phi_S - 2\zeta + \phi_i). \quad (2.98)$$

Ця формула описує декілька важливих аспектів. По-перше, коли косинус дорівнює $+1$ або -1 , ми маємо максимальну і мінімальну ймовірності збудження $P_+^{\max/\min}(t_f)$, відповідно. Ці вирази відповідають конструктивній та деструктивній інтерференції початкових станів. Відповідні умови мають вигляд

$$\begin{cases} -\phi_S - 2\zeta + \phi_i = 2\pi n & \text{для } P_+^{\max}, \\ -\phi_S - 2\zeta + \phi_i = 2\pi(n + \frac{1}{2}) & \text{для } P_+^{\min}, \end{cases} \quad (2.99)$$

де n - ціле число. По-друге, зауважимо, що діапазон між екстремальними значеннями P_+^{\min} і P_+^{\max} включає початкову ймовірність $P_+(t_i)$. Це означає, що ми можемо вибрати таке значення початкової різниці фаз ϕ_i , яке дасть перехід без зміни ймовірності так, що

$$P_+(t_f) = P_+(t_i). \quad (2.100)$$

Цей процес можна назвати *перехід зі збереженням заселеності*. Він

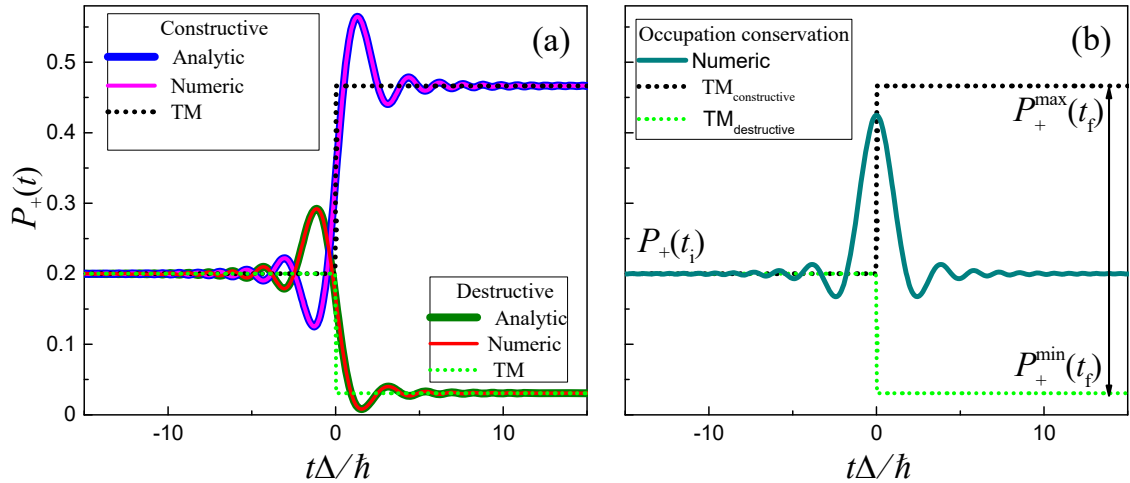


Рис. 2.6: **Неадіабатичний перехід з суперпозиційним станом.** Порівняння чисельних, аналітичних та матричних розв'язків для одного переходу ЛЗШМ, що починається зі стану суперпозиції. Для цього ми взяли $\alpha(t_i) = \sqrt{0.2}$ і $\beta(t_i) = \sqrt{0.8}e^{i\phi_i}$, тут з двома випадками для різниці фаз: один для випадку деструктивної інтерференції, $\phi_i = 5\pi/3$, та інший випадок конструктивної інтерференції, $\phi_i = 2\pi/3$ у (а), який може реалізувати максимально та мінімально можливі значення кінцевої заселеності верхнього рівня, рівняння (2.98, 2.99), та випадок збереження ймовірності у (b), тут з початковою різницею фаз, визначеною в рівнянні (2.101), і переходом без зміни ймовірності. Чорна подвійна стрілка показує діапазон можливих кінцевих значень ймовірності. Це демонструє драматичну залежність еволюції від початкової різниці фаз різниці та ролі інтерференції.

відбувається для різниці фаз $\phi_i = \phi_i^{\text{OCT}}$

$$\phi_i^{\text{OCT}} = -\phi_s - 2\zeta + \arccos \left[\frac{T(P_+(t_i) - 1/2)}{R\sqrt{P_+(t_i)P_-(t_i)}} \right]. \quad (2.101)$$

Зауважте, що це можливо лише для суперпозиційного початкового стану; коли якщо починати з основного стану, це не впливає на різницю фаз.

У випадку старту з суперпозиційного початкового стану, всі ці динамічні особливості проілюстровано на рис. 2.6. На цьому рисунку ми порівнюємо чисельний розв'язок з аналітичним, який задається рівнянням (2.23), з повним збігом між ними. Крім того, показано асимптотичний розв'язок описаний методом матриці еволюції зі ступінчастим переходом, як як описано в рівняннях вище. Для розрахунків ми беремо параметр адіабатичності $\delta = 0.4$, що відповідає ймовірності переходу ЛЗШМ $\mathcal{P} =$

0.08. На рис. 2.6 ми наведено розв'язки для трьох різних випадків: для конструктивної інтерференції з початковою різницею фаз $\phi_1 = \phi_2 = 2\pi/3$, для деструктивної інтерференції з $\phi_1 = \phi_2 = 5\pi/3$, та для випадку збереження ймовірності заселеності з $\phi_1 = \phi_1^{\text{TC}}$, рівн. (2.101). Зауважте, що \mathcal{P} це ймовірність збудження, якщо починати з основного стану, тоді як тепер можна продемонструвати більш загальний випадок, якщо починати зі стану суперпозиції. Це показує, що ймовірність заселеності верхнього рівня $P_+(\infty)$ суттєво відрізняється від \mathcal{P} і що вона визначається не лише δ , але й початковими умовами.

2.3 Висновки

Перехід через квазіперетин, описується моделлю ЛЗШМ, яка включає адіабатичну еволюцію, неадіабатичні переходи та квантову інтерференцію [3]. Ми розглянули це, відштовхуючись від оригінальних робіт Ландау, Зінера, Штукельберга та Майорани. Було показано, що ця вічноактуальна проблема надає важливі інструменти для опису та керування квантовими системами.

Детальний розгляд праць Ландау, Зінера, Штукельберга та Майорани показує, що неадіабатичні переходи слід віднести до всіх чотирьох імен. Ми зосередилися на підході Зінера, тому що він описує як кінцеву хвильову функцію, включаючи її фазу, так і динаміку. Обидва підходи: підхід Зінера та Майорани можуть бути розвинуті для опису кілька або багаторазових проходжень квазіперетину рівнів, що є основою для адіабатично-імпульсної моделі (AIM) в термінах матриць еволюції, продемонстровано важливість часу переходу у різних базисах для методу матриць еволюції, вперше отримано умову для збуджень, що зберігають заселеність рівнів.

РОЗДІЛ 3

БАГАТОРАЗОВИЙ ПЕРЕХІД ЛЗШМ З ГАРМОНІЧНИМ ЗБУДЖЕННЯМ

У попередній главі ми розглядали ДРС з лінійним збудженням $\varepsilon(t) = vt$. Відтепер розглянемо еволюцію для загального випадку періодичного збудження зі зсувом ε_0 ,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 - A \cos \omega t. \quad (3.1)$$

Тепер ми розглянемо кілька підходів до опису гармонічного руху ДРС [3].

3.1 Адіабатично-імпульсна модель (АІМ)

Адіабатично-імпульсна модель є, можливо, найбільш інтуїтивно зрозумілою моделлю для опису багаторазових переходів ЛЗШМ [83, 84]. У цій моделі ми розглядаємо еволюцію ДРС за межами області квазіперетину як адіабатичну еволюцію, а в квазіперетину - діабатичну еволюцію ДРС. Крім того, тут розглянемо область квазіперетину апроксимовану точкою з мінімальною відстанню між енергетичними рівнями. Таким чином, ми маємо адіабатичну еволюцію всюди, окрім точок з мінімальною відстанню між енергетичними рівнями, де відбуваються неадіабатичні переходи ЛЗШМ. Таким чином, АІМ полягає в тому, що еволюція моделюється (апроксимується) як адіабатична, окрім неадіабатичних переходів у точках квазіперетину рівнів (де збудження апроксимується як лінійне); враховуючи ці апроксимації, замість АІМ цю методику можна альтернативно називати *адіабатично-імпульсне наближення*. По суті, АІМ описується за допомогою методу матриць еволюції. Цей метод був розроблений [85, 86, 87, 60, 88, 81, 89].

У розділі “Метод матриць переносу”, ми ввели матриці U та N для адіабатичної еволюції та неадіабатичного переходу імпульсного типу, відповідно. Це описує еволюцію протягом півперіоду збудження. Коли говориться про збуджувані системи, ілюстративно послідовно розглянути три випадки збудження: ймовірність однопрохідного переходу, випадок

дворазового переходу і ймовірність багаторазового переходу [90]. Зараз розглянемо еволюцію протягом одного повного періоду збудження, а потім для багатьох періодів, які ми називаємо дворазовим та багаторазовим проходженням, відповідно.

3.1.1 Адіабатична еволюція

Розглянемо тепер адіабатичну еволюцію, коли система знаходиться в одному з адіабатичних власних станів $|E_{\pm}(t)\rangle$. Це означає, що адіабатичний базис складається з миттєвих власних станів гамільтоніана, який залежить від часу. Ми можемо отримати миттєві власні функції з рівняння Шредінгера (2.1), де час t розглядається як параметр:

$$H(t) |E_{\pm}(t)\rangle = E_{\pm}(t) |E_{\pm}(t)\rangle. \quad (3.2)$$

Для опису динаміки системи розв'яжемо динамічну форму рівняння Шредінгера рівняння (2.65), з початковою умовою

$$|E_{\pm}(t_i)\rangle = |E_{i\pm}\rangle. \quad (3.3)$$

Підставимо рівняння (3.2) у рівняння Шредінгера (2.65), розв'яжемо це диференціальне рівняння і отримаємо еволюцію хвильових функцій верхнього та нижнього енергетичних рівнів

$$|E_{\pm}(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^t E_{\pm}(t') dt'\right) |E_{i\pm}\rangle = \exp(\mp i\zeta) |E_{i\pm}\rangle, \quad (3.4)$$

$$\zeta(t) = \frac{1}{2\hbar} \int_{t_i}^t \Delta E(t) dt. \quad (3.5)$$

В результаті отримуємо матрицю адіабатичної еволюції, рівняння (2.86). Адіабатичні енергетичні рівні

$$E_{\pm}(t) = \pm \frac{\Delta E(t)}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2 + \varepsilon(t)^2} \quad (3.6)$$

мають мінімальну відстань (рівну Δ) у моменти часу $t_{1,2} + nT_d$, де $\omega t_1 = \arccos(\varepsilon_0/A)$ і $\omega t_2 = \pi + \omega t_1$, див. рис. 3.1(a).

3.1.2 Дворазове проходження

Тут описано еволюцію одного періоду збудження, тобто подвійного проходження. Адіабатична еволюція під час подвійного проходження описується рівнянням

$$U_{1,2} = \exp(-i\zeta_{1,2}\sigma_z) \quad (3.7)$$

з різницею фаз

$$\zeta_1 = \frac{1}{2\hbar} \int_{t_1}^{t_2} \Delta E(t) dt, \quad \zeta_2 = \frac{1}{2\hbar} \int_{t_2}^{t_1+T_d} \Delta E(t) dt. \quad (3.8)$$

Неадіабатичні переходи між станами $|E_{\pm}(t)\rangle$ описуються матрицею переходу N , яка справедлива для обох проходжень і відповідає розгортці збудження, що відбувається як праворуч, так і ліворуч на рис. 2.1, відповідно. Зауважимо, що еволюція в діабатичному базисі має бути описана інакше [91, 55]. У деяких роботах [55] еволюція подвійного проходження описується, починаючи з точки квазіперетину і закінчуючи також у точці квазіперетину, див. [60, 92]. І цей спосіб дає правильний результат для усередненої заселеності рівнів при періодичному збудженні

$$\Xi = N_{\text{inverse}} U_2 N U_1 = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ -\Xi_{12}^* & \Xi_{11}^* \end{pmatrix}.$$

Набагато зручніше описувати еволюцію, яка починається далеко від точки квазіперетину і закінчується також далеко від неї. Тоді еволюція з двома проходженнями відбувається після повного періоду і описується матрицею дворазового проходження

$$\Xi \equiv \sqrt{U_2} N_{\text{inverse}} U_1 N \sqrt{U_2} = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{12} & \Xi_{11}^* \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

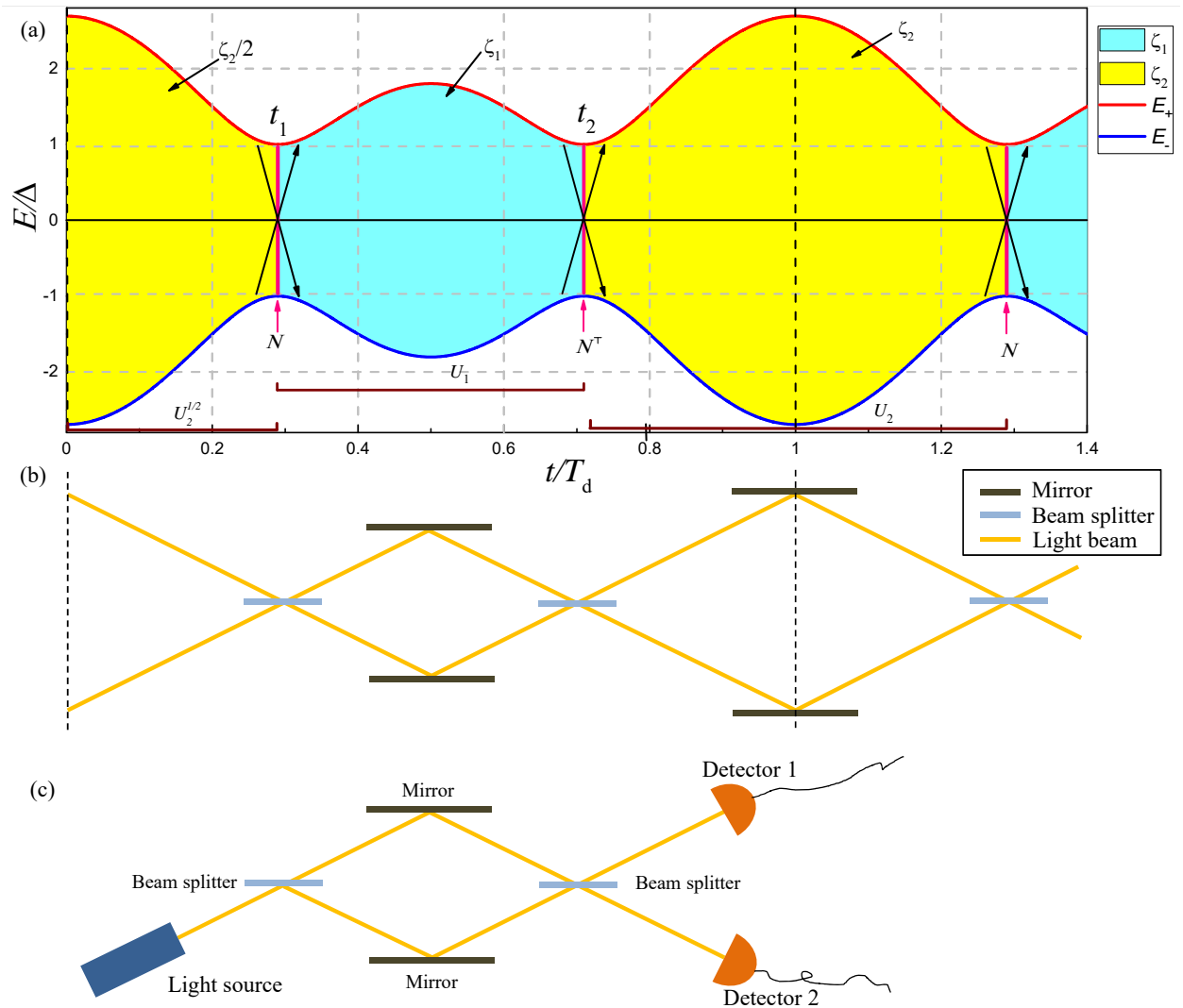


Рис. 3.1: Еволюція енергетичних рівнів в адіабатично-імпульсній моделі (AIM). (a) Залежні від часу адіабатичні рівні енергії $E_{\pm}(t)$ визначають два етапи еволюції: перший, адіабатична еволюція з матрицями адіабатичної еволюції U_1 та U_2 і, по-друге, перехід в області квазіперетину, що визначається матрицею переходу N . Тут ми розглядаємо еволюцію протягом одного періоду від $t = 0$ до $t = T_d$, тобто час між двома вертикальними пунктирними чорними лініями на панелі (a). Ця еволюція описується $\sqrt{U_2}N_{\text{inverse}}U_1N\sqrt{U_2}$, в термінах матриць еволюції, де $\sqrt{U_2} = U(\zeta_2/2)$. (b) Еквівалентна оптична схема на основі інтерферометра Маха-Цендера, де розгалужувачі оптичного пучка аналогічні точкам переходу в (a). Траєкторії можуть мати різну довжину (наприклад, через рухоме верхнє дзеркало), що призводить до набору відносних фаз двох променів, аналогічно до різниці фаз хвильової функції, що накопичується під час переходів ЛЗШМ в (a). (c) Типова схема оптичного інтерферометра Маха-Цендера, аналогічна до двопрохідної задачі ЛЗШМ.

де

$$\Xi_{11} = -R^2 e^{-i\zeta_+} - T^2 e^{-i\zeta_-} \quad (3.10)$$

$$\Xi_{12} = -2iRT \sin(\Phi_{\text{St}}) = -\Xi_{12}^*, \quad (3.11)$$

$$\zeta_+ = \zeta_1 + \zeta_2 + 2\phi_S, \quad \zeta_- = \zeta_1 - \zeta_2, \quad \Phi_{\text{St}} = \phi_S + \zeta_1, \quad (3.12)$$

Обернену матрицю переходу N_{inverse} див. в рівняння (2.95). Отримуємо ті самі Ξ_{11} , що й у [55] для подвійного переходу, але Ξ_{12} відрізняється через використання зсунутого сигналу збудження.

З рівняння (3.11) видно, що ймовірність зайняття верхнього рівня, якщо починати з основного стану, набуває вигляду

$$P_+^{\text{double}} = |\Xi_{12}|^2 = 4\mathcal{P}(1 - \mathcal{P}) \sin^2 \Phi_{\text{St}}. \quad (3.13)$$

Таким чином, слідуючи підходу Зінера, ми підтвердили формулу Штукельберга, рівняння (1.2).

Тут доречно навести *аналогію з інтерферометром Маха-Цендера* доречно [93, 94, 95, 96]. Проілюструємо цю аналогію графічно: Рис. 3.1(b) показує, що наша динаміка на рис. 3.1(a) аналогічна до мультиперіодичних інтерферометрів Маха-Цендера [93], а рис. 3.1(c) показує, що наша задача ЛЗШМ з двома проходженнями аналогічна до оптичного інтерферометра Маха-Цендера [95]. А саме, проходження квазіперетину рівнів аналогічне проходженню світла через частково прозоре дзеркало, яке функціонує як розгалуджувач пучка з коефіцієнтами R і T . Після того, як два промені зустрічаються, результатом є інтерференція, яка залежить від різниці фаз Φ_{St} . Детальніше про теорію режиму подвійного проходження див., наприклад, [97, 98, 99, 100, 80].

3.1.3 Багаторазове проходження

Тут ми описуємо деякі аспекти еволюції багаторазового проходження. Щоб легко підвести матрицю Ξ до n -го степеня [див. рівняння (3.9)], нам

спочатку потрібно діагоналізувати її. Для цього скористаємося унітарною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21}^* \\ A_{21} & A_{11}^* \end{pmatrix} \quad AA^\dagger = 1, \quad |A_{11}|^2 + |A_{21}|^2 = 1, \quad (3.14)$$

такі, що $A\Xi A^\dagger = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}$, де ϕ - шукане значення. Розглянемо рівняння

$$\Xi = A^\dagger \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix} A \text{ і отримаємо}$$

$$\begin{cases} \Xi_{11} = |A_{11}|^2 e^{i\phi} + |A_{21}|^2 e^{-i\phi} \\ \Xi_{21} = -2iA_{11}A_{21} \sin \phi. \end{cases} \quad (3.15)$$

З них ми визначимо ϕ : $\cos \phi = \text{Re}\Xi_{11}$. На наступному кроці знайдемо матрицю Ξ_n еволюції за n періодів

$$\Xi_n = \Xi^n = A^\dagger \begin{pmatrix} e^{in\phi} & 0 \\ 0 & e^{-in\phi} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \Xi_{n11} & -\Xi_{n21}^* \\ \Xi_{n21} & \Xi_{n11}^* \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

спростимо отримані елементи матриці, тут враховуючи рівняння (3.15):

$$\Xi_{n11} = \cos(n\phi) + i\text{Im}(\Xi_{11}) \frac{\sin(n\phi)}{\sin \phi}, \quad (3.17)$$

$$\Xi_{n21} = \Xi_{21} \frac{\sin(n\phi)}{\sin \phi}. \quad (3.18)$$

Й отримаємо ймовірність заселеності верхнього рівня ДРС протягом відповідних періодів часу:

$$P_+^{(1)}(n) = |\Xi_{n21}|^2 = |\Xi_{21}|^2 \frac{\sin^2 n\phi}{\sin^2 \phi}, \quad \text{для } (t - nT_d) \in (t_2, T_d + t_1), \quad (3.19)$$

$$P_+^{(2)}(n) = 2Q_1 \frac{\sin^2 n\phi}{\sin^2 \phi} + Q_2 \frac{\sin 2n\phi}{\sin \phi} + \mathcal{P} \cos 2n\phi, \quad \text{для } (t - nT_d) \in (t_1, t_2),$$

де

$$Q_1 = \mathcal{P} [\mathcal{P} \sin^2 \zeta_- + (1 - \mathcal{P})(1 + \cos \zeta_+ \cos \zeta_-)], \quad (3.20)$$

$$Q_2 = 2\mathcal{P}(1 - \mathcal{P}) \cos(\zeta_1 + \phi_s) \cos(\zeta_2 + \phi_s). \quad (3.21)$$

Для усередненого за часом значення нам потрібно усереднити по багатьом періодам $n \gg 1$, в результаті отримуємо

$$\overline{P_+^{(1)}} = \frac{|\Xi_{21}|^2}{2 \sin^2 \phi} = \frac{1}{2} \frac{|\Xi_{21}|^2}{|\Xi_{21}|^2 + (\text{Im} \Xi_{11})^2}, \quad (3.22)$$

$$\overline{P_+^{(2)}} = \frac{Q_1}{\sin^2 \phi}. \quad (3.23)$$

Можна знехтувати різницею між $\overline{P_+^{(1)}}$ і $\overline{P_+^{(2)}}$ у випадку ліміту повільного проходження $\mathcal{P} \ll 1$, тобто $\delta \gg 1$. Тут ми використовуємо \mathcal{P} як малий параметр, і в першому наближенні отримаємо рівняння (3.34). Для випадку багаторазового проходження, після n повних періодів, часова еволюція має вигляд описується наступними матрицями еволюції:

$$U(t, t_1 + nT_d) \Xi^n \quad \text{для } t - nT_d \in (t_1, t_2), \quad (3.24)$$

$$U(t, t_2 + nT_d) N U_1 \Xi^n \quad \text{для } t - nT_d \in (t_2, t_1 + T_d). \quad (3.25)$$

Отже, стан системи після n повних періодів еволюції визначається через Ξ^n , див. [85]

$$\Xi^n = \begin{pmatrix} \Xi_{n11} & \Xi_{n12} \\ -\Xi_{n12}^* & \Xi_{n11}^* \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

$$\Xi_{n11} = \cos n\phi + i \text{Im} \Xi_{11} \frac{\sin n\phi}{\sin \phi}, \quad \Xi_{n21} = \Xi_{21} \frac{\sin n\phi}{\sin \phi}, \quad \phi = \arccos \text{Re} \Xi_{11}.$$

Тоді, для відповідної ймовірності заселеності верхнього рівня, якщо починати з основного стану, отримаємо

$P_+(n) = |\Xi_{n12}|^2$, що дає

$$P_+(n) = |\Xi_{12}|^2 \frac{\sin^2 n\phi}{\sin^2 \phi} = \underbrace{4\mathcal{P}(1 - \mathcal{P}) \sin^2 \Phi_{\text{St}}}_{P_+^{\text{double}}} \frac{\sin^2 n\phi}{\sin^2 \phi}. \quad (3.27)$$

Це описує еволюцію, де n позначає ціле число кількість пройдених періодів, як показано на рис. 3.2. Зверніть увагу на вражаючу узгодженість між результатами АІМ та чисельними розрахунками; див. також [101, 102]. Подібний опис для багаторівневих систем див. [103, 104, 105, 106].

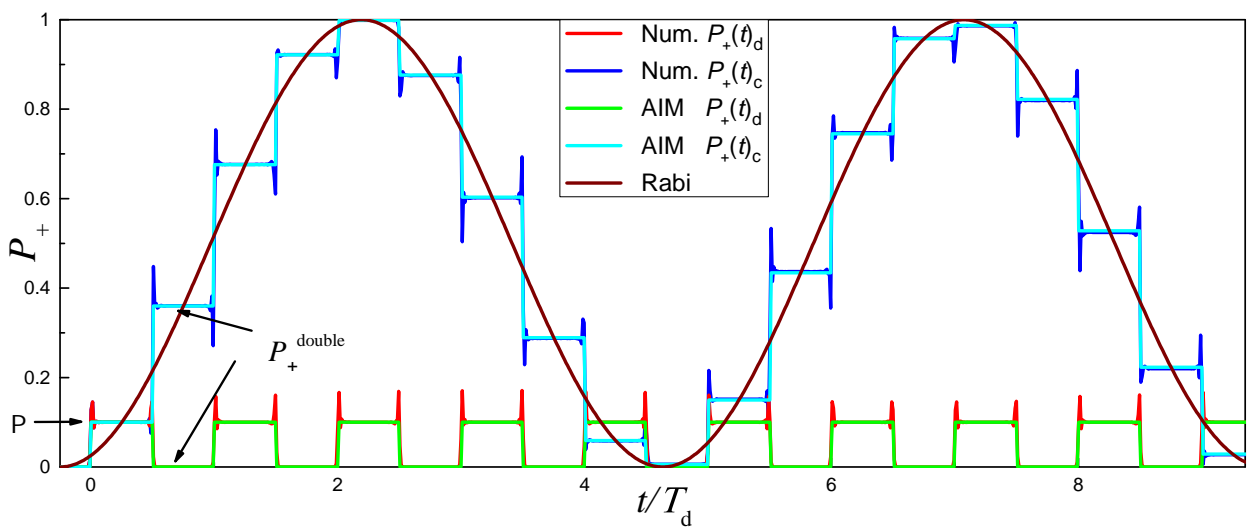


Рис. 3.2: Конструктивна та деструктивна інтерференція Порівняння ймовірності заселеності верхнього рівня, отриманої чисельно та з АІМ у режимі конструктивної інтерференції сині та світло-блакитні криві. Криві: $P_+(t)_c$, розраховані чисельно та в АІМ, відповідно для деструктивної інтерференції (червона та зелена криві: $P_+(t)_d$, розраховані чисельно і в АІМ, відповідно). Світло синя та зелена криві показують аналітичні розв'язки, тоді як синя та червона криві відповідають чисельним розв'язкам. Тут взято такі параметри: $\varepsilon_0 = 0$ (тоді $\zeta_1 = \zeta_2$) і $\mathcal{P} = 0.1$; і умови для конструктивної і деструктивної інтерференції, $\zeta_1 + \phi_S = \pi k$ та $= \pi k + \frac{\pi}{2}$ відповідно; ці умови визначають ω та A . Коричневою лінією показано частоту Рабі, знайдену у формулі (3.28).

Осциляції Рабі в теорії переходів ЛЗШМ

Адіабатична динаміка характеризується малою зміною вірогідності

збудження при кожному проходженні, які за умови резонансу призводять до Рабі-подібні коливання [107, 108, 109]. Це можна побачити на Рис. 3.2. Частоту цих Рабі-подібних коливань можна знайти з рівняння (3.27), якщо ототожнити $\sin^2(n\phi)$ з $\sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$ [91, 104, 110]. Зауважимо, що за один період руху ціле число n змінюється на одиницю, а це відповідає зміні часу t на $2\pi/\omega$. Враховуючи це, отримаємо вираз для великих коливань

$$\Omega_R = \frac{\omega}{\pi} |\phi| = \frac{\omega}{\pi} \arccos [(1 - \mathcal{P}) \cos \zeta_+ - \mathcal{P} \cos \zeta_-]. \quad (3.28)$$

Ця формула правильно описує коливання Рабі, індуковані сильним збудженням, як це досліджено в роботах [111, 104]. Дійсно, ми зауважимо, що для малого збудження $\varepsilon_0/A \ll 1$, вирази для ζ_{\pm} можна спростити:

$$\zeta_1 + \zeta_2 \approx 2A/\hbar\omega \quad \text{та} \quad \zeta_1 - \zeta_2 \approx \pi\varepsilon_0/\hbar\omega. \quad (3.29)$$

Таким чином, у *адіабатичному ліміті* ($\mathcal{P} \ll 1$) отримаємо $\Omega_R \sim A/\hbar$. Це правильно описує резонансну частоту Рабі і виправдовує термін “Рабі коливання”, який ми використовували вище.

Усереднена ймовірність заселення за великим проміжком часу, отримана з усередненням за великою кількістю періодів n ,

$$\overline{P_+} = \frac{|\Xi_{21}|^2}{2 \sin^2 \phi} = \frac{1}{2} \frac{|\Xi_{21}|^2}{|\Xi_{21}|^2 + (\text{Im}\Xi_{11})^2}. \quad (3.30)$$

Звідси випливає, що ймовірність заселеності верхнього рівня $\overline{P_+}$ максимальна при $\text{Im}\Xi_{11} = 0$. Звідси випливає умова резонансу:

$$(1 - \mathcal{P}) \sin \zeta_+ - \mathcal{P} \sin \zeta_- = 0. \quad (3.31)$$

Зокрема, в адіабатичному (повільній) та діабатичному (швидкій) ліміті умова резонансу має такий вигляд:

$$\zeta_1 + \zeta_2 = k\pi \quad \text{для} \quad \delta \gg 1 \quad (\text{адіабатична}), \quad (3.32)$$

$$\zeta_1 - \zeta_2 = k\pi \quad \text{для} \quad \delta \ll 1 \quad (\text{діабатична}). \quad (3.33)$$

За допомогою граничних виразів (3.1.3), умову резонансу для *адіабатичний ліміт* читається як $2A \approx k\pi\hbar\omega$, а для *діабатичний ліміт*, це дає $\varepsilon_0 \approx k\hbar\omega$. Оскільки у *діабатичному ліміті* Δ є відносно малою ($\Delta E \approx |\varepsilon_0|$), останню умову можна інтерпретувати як обмін k фотонами між збуджуючим полем і нашою дворівневою системою.

В *ліміті повільного проходження*, де $\delta \gg 1$ і $\mathcal{P} \ll 1$, ми безпосередньо отримуємо усереднену за часом ймовірність заселеності верхнього рівня:

$$\overline{P}_+ = \frac{\mathcal{P}(1 + \cos \zeta_+ \cos \zeta_-)}{\sin^2 \zeta_+ + 2\mathcal{P}(1 + \cos \zeta_+ \cos \zeta_-)}, \quad (3.34)$$

який описує залежність від змінних та контрольованих параметрів ε_0 , A та ω .

У випадку *швидкого переходу*, де $(1 - \mathcal{P}) \approx 2\pi\delta \ll 1$, існує велика ймовірність ($\mathcal{P} \sim 1$) переходу між адіабатичними станами за одне проходження, тоді як ймовірність переходу між діабатичними станами мала, $(1 - \mathcal{P}) \ll 1$. Отже, ми розглянемо усереднену за часом ймовірність верхнього діабатичного стану $P_{\text{ур}}$. Тоді, можна отримати:

$$\overline{P}_{\text{ур}} = \frac{1}{2} \frac{4\pi\delta \cos^2(\zeta_2 - \pi/4)}{\sin^2 \zeta_- + 4\pi\delta \cos^2(\zeta_2 - \pi/4)}. \quad (3.35)$$

На резонансі маємо $\zeta_- = k\pi$ і $\overline{P}_{\text{ур}} = 1/2$. Тоді, зокрема, для малого зсуву, при $\zeta_- \approx \pi\varepsilon_0/\hbar\omega$, отримаємо резонансну частоту $\hbar\omega^{(k)} = \varepsilon_0/k$, а це означає, що резонансні переходи описуються їхнім багатотонним співвідношенням. В околі k -го резонансу, для $\omega \sim \omega^{(k)}$, у першому наближенні за ε_0/A отримуємо

$$\overline{P}_{\text{ур}}^{(k)} = \frac{1}{2} \frac{\Delta_k^2}{\Delta_k^2 + (k\hbar\omega - \varepsilon_0)^2}, \quad (3.36)$$

$$\Delta_k = \Delta \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\pi A}} \cos \left(\frac{A}{\hbar\omega} - \frac{\pi}{4}(2k + 1) \right).$$

Повну ймовірність $\overline{P}_{\text{ур}}$ отримано як суму часткових внесків $\overline{P}_{\text{ур}}^{(k)}$. Зауважте, що наведений вище висновок в рамках АІМ припускає, що ймовірність збудження може стати ненульовою при досягненні квазіперетину

енергетичних рівнів, тобто при $|\varepsilon_0| < A$; інакше, при $|\varepsilon_0| > A$, ця модель дає нульову ймовірність переходу.

Модуляція прямокутним сигналом

Наші викладки у цій главі в основному розроблено для синусоїдального керування. Вони можуть бути адаптовані до опису будь-якого іншого періодичного руху, $\varepsilon(t + T_d) = \varepsilon(t) = \varepsilon(t)$. Зокрема, розглянемо тепер ситуацію, коли ДРС збуджується так, що поділ рівнів різко перемикається між двома значеннями і залишається незмінним увесь інший час [112]. У цьому випадку ми маємо зсув

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + A \operatorname{sgn} [\cos(\omega t)], \quad (3.37)$$

що призводить до періодичної *прямокутної модуляції* енергетичних рівнів кубіту. Безпосереднє застосування підходу ЛЗШМ дало б нескінченну швидкість проходження v , що призведе до точної одиничної ймовірності переходу $\mathcal{P} = 1$ без жодних проблем. У цьому випадку, при $v = \infty$, АІМ не може бути безпосередньо застосований, оскільки тоді ширина області переходу стає нескінченною: $v t_{\text{LZSM}}^d \sim \sqrt{\hbar v}$, див. рівняння (2.71). Це було проаналізовано у [112], де представлено узагальнення АІМ. Цікаво, що більшість формул, наведених вище, які описують ймовірність заселеності верхнього рівня, залишаються справедливими лише з однією важливою заміною: тепер, замість ймовірності ЛЗШМ \mathcal{P} , ми пишемо ймовірність раптового переходу $p_s = \langle \psi_+^{(l)} | \psi_-^{(r)} \rangle$, який відбувається між нижнім станом прямокутного збудження $|\psi_-^{(r)}\rangle$ і верхній позиції прямокутного збудження $|\psi_+^{(l)}\rangle$. Успішне застосування АІМ з такою заміною $\mathcal{P} \rightarrow p_s$ у статті [112] було не лише порівняно з чисельним розв'язком та експериментом, але й з наближенням хвилі, що обертаються (НХО).

Інтерферограми

За допомогою наведеної вище формули (3.30), а також її граничних виразів (3.34) і (3.36), ми можемо графічно візуалізувати інтерференцію.

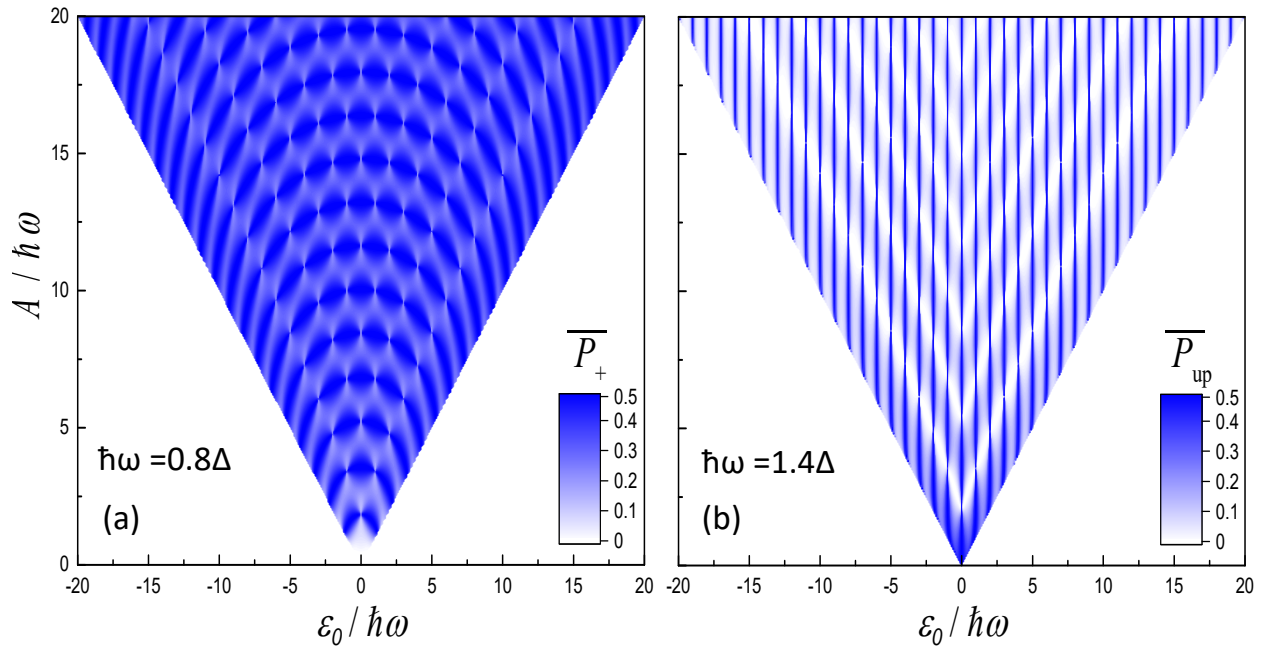


Рис. 3.3: Інтерферограми ЛЗШМ, розраховані в рамках адіабатично-імпульсної моделі (AIM). (а) Низькочастотне збудження, що відповідає режиму повільного проходження, рівняння (3.34), з $\hbar\omega/\Delta = 0.8 < 1$. (б) Високочастотне збудження відповідає ліміту швидкого проходження, рівняння (3.36), з $\hbar\omega/\Delta = 1.4 > 1$.

Ці залежності, скажімо, від ε_0 і ω , або від ε_0 і A , можна назвати інтерферограмами. Їх показано на рис. 3.3(а) і (б) для $\hbar\omega/\Delta = 0.8$ і 1.4 , відповідно.

3.2 Наближення хвилі, що обертаються (НХО)

Розглянемо тепер випадок сильного збудження, $\Delta \ll \sqrt{A\hbar\omega}$ при $k\hbar\omega \approx \Delta E$, де остання умова означає, що енергія k фотонів приблизно дорівнює енергетичній відстані між рівнями кубіту ΔE . Тут ми дотримуємося посилань [112, 113], де представлено формалізм, справедливий не лише для збудження гармонійним сигналом, а й для загального випадку періодичного збудження $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}(t)$ для будь-якої функції $\tilde{\varepsilon}(t)$ з періодом $T_d = 2\pi/\omega$.

Спочатку розкладемо гамільтоніан на стаціонарну частину H_0 та частину

$V(t)$, що залежить від часу:

$$H = H_0 + V(t) = -\frac{\Delta}{2}\sigma_x - \frac{\varepsilon_0}{2}\sigma_z - \frac{\tilde{\varepsilon}(t)}{2}\sigma_z. \quad (3.38)$$

Щоб було зручно розв'язувати рівняння Блоха, виконаємо унітарне перетворення:

$$U = \exp\left[-i\frac{\eta(t)}{2}\sigma_z\right] = \cos\frac{\eta}{2} - i\sigma_z \sin\frac{\eta}{2}, \quad \eta(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t dt' \tilde{\varepsilon}(t'). \quad (3.39)$$

Використаємо такий оператор $U(t)$ для зв'язування хвильової функції в базисі, що обертається, і в стаціонарному базисі, $\psi = U(t)\psi'$. Далі, підставимо цю функцію в рівняння Шредінгера і отримаємо $i\hbar U\dot{\psi}' + i\hbar\dot{U}\psi' = HU\psi'$. В базисі, що обертається, нам потрібно $i\hbar\dot{\psi}' = H'\psi'$, таким чином отримаємо новий гамільтоніан

$$H' = U^\dagger H U - i\hbar U^\dagger \dot{U} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\sigma_z - \frac{\Delta}{2}(e^{i\eta}\sigma_+ + h.c.), \quad (3.40)$$

з $\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y)$, підготовчий етап завершується розкладанням у ряд Фур'є

$$\Delta e^{i\eta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta_m e^{im\omega t}, \quad (3.41)$$

де комплексна амплітуда визначається зворотнім перетворенням Фур'є

$$\Delta_m = \Delta \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt e^{-im\omega t} e^{i\eta(t)} = \Delta \int_0^1 d\tau' \exp[i\eta(\tau') - i2\pi m\tau']. \quad (3.42)$$

Тоді гамільтоніан набуває такого вигляду

$$H' = -\frac{\varepsilon_0}{2}\sigma_z + \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\Delta_m e^{im\omega t} \sigma_+ + h.c.) = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & \Delta_m e^{im\omega t} \\ \Delta_m e^{-im\omega t} & -\varepsilon_0 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

За допомогою цього гамільтоніана зручно розв'язувати рівняння Блоха для

матриці густини,

$$\dot{\rho}_{ij} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho]_{ij} - \frac{\rho_{ij} - \rho_{ij}^{(0)}}{\tau_{ij}}, \quad (3.44)$$

де ρ_{ij} - матриця густини, τ_{ij} - швидкість релаксації, $\rho^{(0)}$ - рівноважний оператор густини з $\rho_{01}^{(0)} = \rho_{10}^{(0)} = 0$, $Z^{(0)} = \rho_{00}^{(0)} - \rho_{11}^{(0)} = \tanh \frac{\Delta E}{2k_B T}$, а k_B - стала Больцмана. Для цього параметризуємо матрицю густини

$$\rho = \frac{1}{2} (1\sigma_0 + X\sigma_x + Y\sigma_y + Z\sigma_z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + Z & X - iY \\ X + iY & 1 - Z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Наразі вважатимемо, що система наближається до резонансу, де $\Delta E \approx |\varepsilon_0| \approx k\hbar\omega$. Тоді, ми опускаємо “члени, що швидко обертаються” і залишимо лише члени з $m = k$. Ми можемо записати рівняння Блоха за допомогою гамільтоніану H' з компонентами:

$$\dot{Z} = -\frac{\Delta_k}{2\hbar} \text{Im}(e^{-ik\omega t}) - (Z - Z^{(0)})\Gamma_1, \quad (3.46)$$

$$\dot{\rho}_{10} = i\frac{\Delta_k}{2\hbar} e^{ik\omega t} Z - i\frac{\varepsilon_0}{\hbar} \rho_{10} - \rho_{10}\Gamma_2, \quad (3.47)$$

де

$$Z^{(0)} = \rho_{00}^{(0)} - \rho_{11}^{(0)} = \tanh \frac{\Delta E}{2k_B T}. \quad (3.48)$$

Тут Δ_k було визначено у рівнянні (3.66). Після підстановки $\rho_{10} \exp(-ik\omega t) = \tilde{X} + i\tilde{Y}$, отримаємо систему рівнянь

$$\dot{\tilde{X}} = \left(k\omega + \frac{\varepsilon_0}{\hbar}\right) \tilde{Y} - \tilde{X}\Gamma_2, \quad (3.49)$$

$$\dot{\tilde{Y}} = -\left(k\omega + \frac{\varepsilon_0}{\hbar}\right) \tilde{X} + \frac{\Delta_k}{\hbar} Z - \tilde{Y}\Gamma_2, \quad (3.50)$$

$$\dot{Z} = -\frac{\Delta_k}{\hbar} \tilde{Y} - (Z - Z^{(0)})\Gamma_1. \quad (3.51)$$

Стаціонарний розв'язок цих рівнянь можна отримати, підставивши $\dot{\tilde{X}} = \dot{\tilde{Y}} = \dot{Z} = 0$. Розглянемо також низькотемпературний випадок, $T \rightarrow 0$, тоді $Z^{(0)} \approx 1$. В результаті, ми отримуємо стаціонарне значення для ймовірності заселеності верхнього діабатичного стану; підсумовуючи всі

можливі резонансні члени, отримаємо ймовірність заселеності верхнього рівня кубіту

$$\bar{P}_{\text{up}}^{(k)} = \bar{\rho}_{11}^{(k)} = \frac{1}{2} \left(1 - \bar{Z}^{(k)} \right), \quad (3.52)$$

$$\bar{P}_{\text{up}} = \sum_k \bar{P}_{\text{up}}^{(k)} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|\Delta_k|^2}{|\Delta_k|^2 + \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} (k\hbar\omega - \varepsilon_0)^2 + \hbar^2 \Gamma_1 \Gamma_2}. \quad (3.53)$$

Зауважте, що для комплексної величини Δ_k важливим є її абсолютне значення.

Нарешті, щоб отримати ймовірність заселеності верхнього рівня для заданого зсуву $\tilde{\varepsilon}(t)$, треба обчислити функції Δ_k . Хоча більше прикладів можна побачити у [112, 113], для синусоїдальної модуляції, з розкладанням Якобі-Ангера рівняння (3.66), легко побачити, що

$$\Delta_m(x) = \Delta J_m(x), \quad x = \frac{A}{\hbar\omega}. \quad (3.54)$$

Тут корисно нагадати про асимптоту при $x \gg 1$:

$$J_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (3.55)$$

Це явно демонструє, що ймовірність заселеності є квазіперіодична за амплітудою з періодом $\delta A = 2\pi\hbar\omega$.

3.2.1 Багатофотонні коливання Рабі

Розглянемо тепер ситуацію резонансного збудження з параметрами, близькими до мінімальної енергетичної відстані ΔE , яка дорівнює енергії фотона $\hbar\omega$ або, у більш загальному випадку, є близькою до енергії k фотонів, $\Delta E \sim k\hbar\omega$. Перше (однофотонне резонансне збудження) є критичним для мікроскопічних систем, де є електронний парамагнітний (спіновий) резонанс і ядерний магнітний резонанс [114]. У цьому випадку амплітуда A зазвичай мала, і k -фотонні резонанси з'являються в рамках теорії збурень [115, 116, 117].

На противагу цьому, для мезоскопічних систем режим сильного

збудження є доступним, та важливим. Отже, ми спочатку розглянемо розв'язок рівняння Шредінгера для слабого збудження, потім для сильного збудження, а потім розв'язок рівняння Блоха. Ці розв'язки ґрунтуються на методі НХО (який також називають *секулярне наближення*), де членами, які швидко змінюються з часом нехтується.

Для слабого резонансного збудження, з $A \ll \Delta$ і $\delta\omega \equiv \omega - \Delta E/\hbar \ll \omega$, ймовірність заселеності верхнього рівня демонструє коливання Рабі див., наприклад, [104, 59]:

$$P_{\text{up}}(t) = \overline{P_{\text{up}}}(1 - \cos \Omega_{\text{R}} t), \quad (3.56)$$

$$\Omega_{\text{R}} = \sqrt{\Omega_{\text{R}0}^2 + \delta\omega^2}, \quad \Omega_{\text{R}0} = \frac{A\Delta}{2\hbar\Delta E}, \quad \overline{P_{\text{up}}} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{\text{R}0}^2}{\Omega_{\text{R}0}^2 + \delta\omega^2}. \quad (3.57)$$

Тут $\overline{P_{\text{up}}}$ описує усереднену за часом ймовірність заселеності; вона максимальна у резонансі при $\delta\omega = 0$.

Для сильного збудження зазвичай припускають $A \gg \Delta^2/\hbar\omega$, що відповідає тому, що ми називаємо *діабатичним лімітом*, з $\delta \ll 1$. Ця умова також означає, що мінімальна енергетична відстань Δ є малою; маємо тоді маємо $\Delta E \approx |\varepsilon_0|$. Розв'язок рівняння Шредінгера можна отримати близько до k -го резонансу, за допомогою

$$\delta\omega^{(k)} \equiv k\omega - \frac{|\varepsilon_0|}{\hbar} \ll \omega, \quad (3.58)$$

як у посиланнях [118, 119, 120],

$$P_{\text{up}}^{(k)}(t) = \overline{P_{\text{up}}^{(k)}}(1 - \cos \Omega_{\text{R}}^{(k)} t), \quad (3.59)$$

$$\Omega_{\text{R}}^{(k)} = \sqrt{\Omega_{\text{R}0}^{(k)2} + \delta\omega^{(k)2}}, \quad (3.60)$$

$$\Omega_{\text{R}0}^{(k)} = \frac{\Delta}{\hbar} J_k\left(\frac{A}{\hbar\omega}\right), \quad (3.61)$$

$$\overline{P_{\text{up}}^{(k)}} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{\text{R}0}^{(k)2}}{\Omega_{\text{R}0}^{(k)2} + \delta\omega^{(k)2}}. \quad (3.62)$$

Вони описують *багатофотонні коливання Рабі*. Тут частота Рабі модулюється функцією Бесселя першого роду J_k . Якщо параметри системи

змінюються, ми повинні врахувати всі резонанси:

$$\overline{P_{\text{up}}} = \sum_k \overline{P_{\text{up}}^{(k)}}. \quad (3.63)$$

Ми могли б дослідити момент часу t_{max} , коли зайнятість верхнього рівня вперше досягає максимуму, а ймовірність $P_{\text{up}}^{(k)}(T_d)$ після подвійного проходження rdfpsgthtnbye (тобто, після повного періоду) в резонансі [120]. З рівняння (3.59), вони отримуються через $t_{\text{max}} = \pi/\Omega_R^{(k)}$ і

$$P_{\text{up}}^{(k)}(T_d) = 1 - \cos\left(2\pi\frac{\Delta}{\hbar\omega}J_k\left(\frac{A}{\hbar\omega}\right)\right). \quad (3.64)$$

У наступному наближенні, по малому параметру Δ (точніше $\Delta^2/A\hbar\omega \ll 1$), ми можемо отримати зсув резонансної частоти, який відомий як зсув Блоха-Зігерта [120]. Хоча для малих Δ резонансна частота для першого резонансу ($k = 1$) з рівняння (3.62) дорівнює $\omega = |\varepsilon_0|/\hbar$, то резонанс для більших Δ визначається рівнянням (3.56): $\omega = \Delta E/\hbar = \sqrt{\varepsilon_0^2 + \Delta^2}/\hbar$. Отже, коли або Δ велика, або частота ω мала, результати НХО можна покращити, додавши зсув Блоха-Зігерта та вищі поправки (узагальнений зсув Блоха-Зігерта) [121]. Див. посилання [122, 123, 124, 125] для випадків за межами НХО.

У більш загальному випадку, враховуючи релаксацію, НХО для системи з періодичним збудженням представлено в розділі 3.2. Тут розглянуто для загального періодичного збудження $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}(t)$, де $\tilde{\varepsilon}(t) = A \cos \omega t$ як окремий випадок. Вважається, що ДРС пов'язана з дисипативним середовищем, вплив якого враховується враховано введенням швидкостей релаксації та декогеренції $\Gamma_{1,2} = T_{1,2}^{-1}$ [126, 112]. Тоді, розв'язок рівнянь Блоха дає ймовірність зайнятості верхнього рівня P_{up} , яка для стаціонарного випадку має вигляд

$$\overline{P_{\text{up}}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Omega_{R0}^{(k)2}}{\Omega_{R0}^{(k)2} + \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} (k\omega - |\varepsilon_0|/\hbar)^2 + \Gamma_1\Gamma_2}, \quad (3.65)$$

де

$$\Omega_{R0}^{(k)} = \frac{\Delta \omega}{\hbar 2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \tilde{\varepsilon}(t') - ik\omega t \right]. \quad (3.66)$$

Це досить загальні результати, які можуть бути застосовані до будь-якого сигналу збудження $\tilde{\varepsilon}(t)$. Зокрема, для $\tilde{\varepsilon}(t) = A \cos \omega t$, отримуємо частоту Рабі (3.61).

Роль форми збуджуючого сигналу

Хоча більшу частину цієї роботи присвячено синусоїдальному збудженню, розглянемо вплив форми збуджуючого сигналу на інтерференцію ЛЗШМ [127]. Загалом, рівняння на кшталт (3.65, 3.66) можуть бути корисними для опису будь-якого періодичного збурення $\tilde{\varepsilon}(t)$, зокрема мультигармонійне збудження. Хоча якісна картина подібна для будь-якого періодичного сигналу, загальна інтерференційна картина може відрізнятись. Це було досліджено для таких імпульсів, як трикутний [128], гіперболічний тангенс та гауссівські [129], прямокутні [112, 130], секанс [131] та інші [132, 133].

Як особливий та ілюстративний випадок, розглянемо бігармонійний рух [127]. Це дає змогу дослідити вплив співмірних та неспівмірних частот збудження [127], [134]. Було продемонстровано що залежно від різниці фаз між двома компонентами біхроматичне збудження з співмірними частотами може порушувати часову симетрію, що видно з перетворення Фур'є для інтерференційної картини ЛЗШМ яка є корисною для квантового моделювання. Залежно від бажаних властивостей переходів, ми можемо використовувати необхідний сигнал збудження. Ми повернемося до цього у розділі про квантове керування. Тут ми проілюструємо це на прикладі розвитку методу збудження на основі Ляпунова. У роботі [135] було продемонстровано, що надшвидкого збудження можна досягти за допомогою сигналу на основі методу керування Ляпунова, який базується на непрямій теоремі Ляпунова про стійкість.

Тепер, маючи наведені вище рівняння (3.65) і (3.61), можна побудувати графік інтерференційного збудження для синусоїдального збудження, як

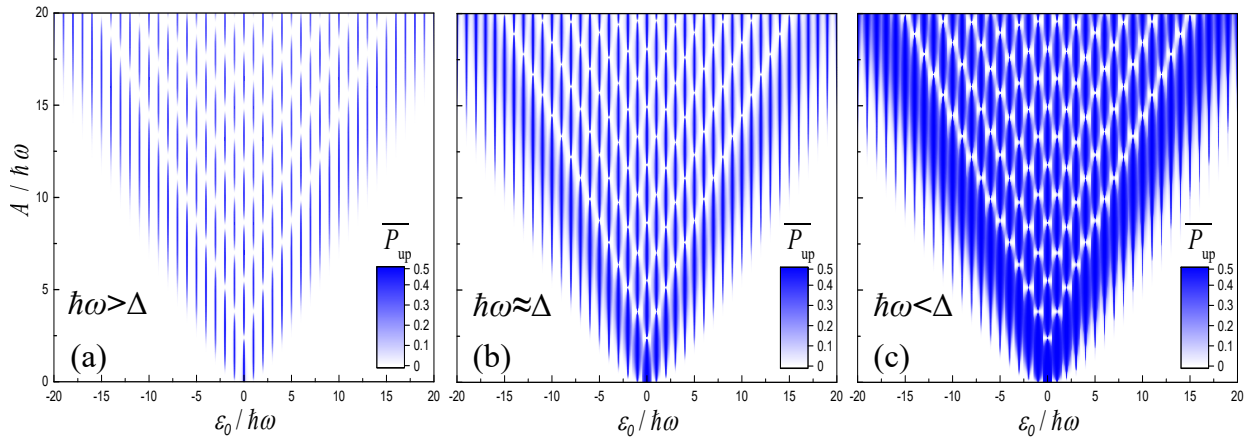


Рис. 3.4: Інтерферограми ЛЗШМ для різних частот. Для цього ми взяли $\hbar\omega/\Delta = 10, 1.14, 0.32$, для (а-с) і $\Gamma_1 = 0.1T_d^{-1}$, $\Gamma_2 = \Gamma_1/2$.

показано на рис. 3.4. Щодо залежності усередненої за часом заселеності верхнього діабатичного рівня \overline{P}_{up} від зсуву ε_0 і амплітуди руху A , можна побачити, що резонанси лежать вздовж ліній $|\varepsilon_0| = k\hbar\omega$, та перериваються нулями функцій Бесселя, в результаті чого отримуємо когерентне руйнування тунелювання (КРТ). Ширина резонансів, визначена рівнянням (3.65), залежить від взаємозв'язку параметрів; на рисунку це проілюстровано зміною частоти збудження ω .

Для сильного збудження, $A > \hbar\omega$, з рівнянь (3.65, 3.66), отримуємо рівняння (3.36). Для цього використаємо асимптотику функцій Бесселя і нехтуємо дисипацією, розглядаючи випадок, коли $T_1 = T_2 = \infty$. Важливо, що тепер ми бачимо, що два різні теоретичні підходи, АІМ та НХО, які ми розвинули в різних режимах параметрів, призводять до одного й того ж самого результату: рівняння (3.36). Більше того, в наступних підрозділах ми приходимо до такого ж результату, представляючи два інші підходи.

3.2.2 Багатофотонні переходи, аналіз за теорією ЛЗШМ

Добре відомо, що атом, підданий досить інтенсивному опроміненню, може поглинути кілька падаючих фотонів і перейти з дискретного рівня a на інший дискретний рівень b , розташований з більшою енергією, на відстані, що дорівнює сумі енергій поглинутих фотонів. Такий

процес називається багатофотонним поглинанням, а зворотний процес багатофотонне випромінювання” [136]. Спостереження в попередньому розділі демонструє, що багатофотонні переходи є важливими і послідовно з’являються в різних випадках, як в рамках резонансної НХО, так і в рамках теорії ЛЗШМ. Зокрема, з рівняння (3.65) видно що резонанси відбуваються при $k\hbar\omega = |\varepsilon_0| \approx \Delta E$.

Багатофотонні процеси вивчалися в різних системах: надпровідних кубітах [137, 138, 139, 140], двовимірні електронні системи [141], атомні та молекулярні структури [142], Рідбергівські атоми [143, 144], ДРС на надпровідних колах [145], квантові точки [146, 147], та електромеханічні системи [148].

ДРС можна піддати резонансному керуванню з енергією k фотонів, що відповідає відстані між енергетичними рівнями $k\hbar\omega \approx \Delta E$; це індукує перехід з одного рівня на інший. Це можна описати як обмін квантами енергії (тут фотонами) з коливальним рушійним полем, який відомий як *фотонне тунелювання з підтримкою (ФТП)*; див., наприклад, посилання [149], де це вивчалось для надпровідного кубіту. ФТП широко вивчався і для інших різних квантових систем з тунелюванням, особливо для напівпровідникових наноструктур [150], зокрема керованих квантових точок [151, 152] та кубіт-резонаторних димерів [153]. Через подвійну квантову точку, ФТП описується тунельним струмом що визначається формулою, аналогічною до рівняння (3.65) [154, 155].

Історично перші експерименти з ФТП були виконані на джозефсонівських контактах зі змінним струмом [156]. У цьому контексті можна відзначити подібність і відмінність ФТП (або, еквівалентно, багатофотонних коливань Рабі) та ефекту Джозефсона зі змінним струмом зі сходишками Шапіра, які з’являються для опроміненого надпровідного тунельного переходу. Перший пов’язаний з тунелюванням електронів (квазічастинок) і призводить до того, що на кривій струм-напруга з’являються сходишки, зсунуті за напругою на $k\hbar\omega/e$; другий припускає надструмовий відгук, який відбувається як сходишки Шапіра при напругах $k\hbar\omega/2e$ [157]. Обидва типи резонансів спостерігали експериментально і описано теоретично в [158, 159]. У цій роботі було показано, що

сходинки Шапіро та ФТП-стани виникають за рахунок куперівських пар та квазічастинок; і якщо на джозефсонівський контакт накласти інтенсивний мікрохвильовий сигнал, у струмі можна спостерігати обидва набори резонансів, змінюючи як напругу, так і потужність мікрохвиль [158, 160].

3.2.3 Теорія Флоке

Природно використовувати теорему Флоке для розв'язання рівняння Шредінгера для системи з періодичним збудженням. Теорія, що ґрунтується на цій теоремі - Теорія Флоке - була висвітлена у багатьох оглядах [161, 54, 162, 163, 55, 164, 48, 58]. Тепер ми розглянемо це для нашої задачі опису динаміки та стаціонарного стану керованої ДРС.

Для залежного від часу рівняння Шредінгера, рівняння (2.65), для хвильової функції $|\psi(t)\rangle$ з періодичним гамільтоніаном $H(t) = H(t + T_d)$, можна скористатися теоремою Флоке. Відповідно до неї, розв'язок (так званий розв'язок Флоке-стану) має вигляд

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{j=1,2} C_j \exp(-i\epsilon_j t/\hbar) |\Phi_j(t)\rangle, \quad (3.67)$$

де $|\Phi_j(t)\rangle$, є періодичним станом, який називається модою Флоке. При цьому індекс $j = 1, 2$ з'являється тому, що ми маємо справу з двовимірним гільбертовим простором. Дійсні значення ϵ_j називаються квазіенергіями, щоб відобразити формальну аналогію з квазімоментом \mathbf{k} , який характеризує власні стани електрона Власні стани Блоха в періодичному твердому тілі [165, 166, 86]. Квазіенергії є унікальними аж до кратних $2\pi\hbar/T_d$. Звідси випливає, що це власні стани у задачі

$$\left(H(t) - i\hbar \frac{d}{dt} \right) |\Phi_j(t)\rangle \equiv \mathcal{H}(t) |\Phi_j(t)\rangle = \epsilon_j |\Phi_j(t)\rangle. \quad (3.68)$$

Квазіенергетичні стани у залежних від часу задачах відіграють роль, аналогічну до стаціонарних станів для незалежних від часу задач.

Використання формалізму Флоке дозволяє звести задачу про періодичні збурення до стаціонарної задачі [115, 167, 168], яка відома як метод Флоке

гамільтоніану [161, 162]. Для цього потрібно розкласти квазіенергетичну функцію в ряд Фур'є, $|\Phi_j(t)\rangle = \sum_n e^{in\omega t} |\Phi_{j,n}\rangle$. Отже, квазіенергетичні стани виражаються як суперпозиція стаціонарних станів $|\Phi_{j,n}\rangle$, з енергіями, що дорівнюють $\epsilon_j + n\hbar\omega$. Використовуючи ряд Фур'є з рівняння Шредінгера, отримаємо співвідношення

$$\epsilon_j |\Phi_{j,n}\rangle = \left(-\frac{\Delta}{2}\sigma_x - \frac{\epsilon_0}{2}\sigma_z + n\omega \right) |\Phi_{j,n}\rangle - \frac{A}{2}\sigma_z (|\Phi_{j,n-1}\rangle + |\Phi_{j,n+1}\rangle). \quad (3.69)$$

Помноживши це зліва на $\langle\Phi_{i,m}|$, отримаємо матричне рівняння для власних значень ϵ_j і власних функцій $|\Phi_{j,n}\rangle$. Потім, ми усікаємо матрицю, щоб розв'язати рівняння чисельно, скажімо, з n у діапазоні від -50 до 50 [169].

Близько до резонансу $\delta\omega^{(k)} \equiv k\omega - |\epsilon_0|/\hbar \ll \omega$, внеском нерезонансних станів можна знехтувати. Це означає використання НХО, наприклад, як у [170, 171, 172]. Тоді, гамільтоніан Флоке складається лише з копій

$$H^{(k)} = \begin{pmatrix} -\epsilon_0/2 & -\hbar\Omega_{R0}^{(k)}/2 \\ -\hbar\Omega_{R0}^{(k)}/2 & \epsilon_0/2 + k\hbar\omega \end{pmatrix}, \quad (3.70)$$

де частота Рабі $\Omega_{R0}^{(k)}$ - це частота, визначена у рівняння (3.61). Діагоналізація цього гамільтоніана дає квазіенергетичну різницю, яку позначимо як $\hbar\Omega_R^{(k)}$: $H^{(k)'} = \sigma_z \hbar\Omega_R^{(k)}/2$. Це приводить нас до того самого результату, що й RWA; див. рівняння (3.60). Отже, теорія Флоке у першому наближенні (тобто у НХО) знову дає нам ймовірність зайнятості верхнього рівня у вигляді рівняння (3.62) [163].

Ці результати НХО є точними, якщо $\Delta/\hbar\omega \ll 1$. Члени вищих порядків можна отримати в рамках узагальненої теорії збурень ван Влека [173], що призводить до зсуву резонансної частоти на

$$\delta_k = \frac{1}{2} \sum_{l \neq -k} \frac{\Omega_{R0}^{(l)2}}{\epsilon_0/\hbar + l\omega}. \quad (3.71)$$

Це означає, що резонанси розташовані при $\epsilon_0 = k\hbar\omega - \delta_k$, і що частота Рабі стає δ_k -зсунутою, $\Omega_R^{(k)} = \sqrt{\Omega_{R0}^{(k)2} + (\delta\omega^{(k)} - \delta_k)^2}$. Зауважте, що ці формули обчислюються у діабатичному базисі, тоді як для адиабатичного

базису потрібно зробити деякі модифікації [172].

Зокрема, розглянемо поправку першого порядку з рівняння (3.71), яка дорівнює $\delta_1 = \Delta^2/2\varepsilon_0$. Тоді, ми очікуємо перший резонанс при $\varepsilon_0 = \hbar\omega - \Delta^2/2\varepsilon_0$ (де ми можемо застосувати $\varepsilon_0 = \hbar\omega$ у правій частині). Це відповідає оригінальному підходу Рабі. Справді, з рівняння (3.56), маємо резонанси при $\hbar\omega = \sqrt{\Delta^2 + \varepsilon_0^2}$, де розкладання дає $\varepsilon_0 = \hbar\omega - \Delta^2/2\varepsilon_0$. Отже, узагальнена теорія збурень ван Влека дає поправку, точно узгоджену з осциляціями Рабі, яка справедлива для малих амплітуд збудження [174]. Детальніше про резонансний зсув, який називають зсувом змінного струму Старка або зсувом Блоха-Зігерта, див. [170, 171, 175].

Оскільки вони пов'язані з частотою Рабі, квазіенергії Флоке можна візуалізувати в експериментах, відомих як спектроскопія Флоке. Нещодавно це було реалізовано з кубітами в порожнинах. У цьому випадку порожнина є надпровідним мікрохвильовим резонатором, а кубіти базуються або на надпровідних ланцюгах [172, 176] або на подвійних квантових точках [177, 178] або на подвійних квантових точках. Інші можливі реалізації включають такі системи, як андерсонівський ізолятор із сильним збудженням [179] або накачування в парному шлюзі Купера [180]. Як подальший розвиток теорії, цей підхід можна використати для вивчення низькочастотного ліміту [181], включно з розсіюванням [182, 183] (теорія Флоке-Маркова), а також розгляд багаторівневих систем [184, 185, 186, 187].

З теорії Флоке [163] можна отримати розв'язок $|\psi(t)\rangle$ для рівняння Шредінгера (2.65) з довільним гамільтоніаном $H(t) = H(t + nT_d)$ для довільного цілого n

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\epsilon t} |\Phi(t)\rangle, \quad (3.72)$$

де $|\Phi(t)\rangle$ позначають періодичні за часом моди Флоке з тим самим періодом, що й гамільтоніан $H(t)$, а ϵ - це так звану квазіенергію. Коли ми підставимо рівняння (3.72) в рівняння (2.65), то отримаємо рівняння для квазіенергії

$$\left(H(t) - i\hbar \frac{d}{dt} \right) |\Phi(t)\rangle = \epsilon |\Phi(t)\rangle. \quad (3.73)$$

Періодичні функції можна розвинути в ряд за гармонійними функції за

допомогою розвинення в ряд Фур'є

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\Phi_n\rangle e^{in\omega t}, \quad (3.74)$$

$$H(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H^{[n]} e^{in\omega t}, \quad (3.75)$$

де надрядковий символ $[n]$ визначає номер частини 2×2 матриці гамільтоніана. На наступному кроці ми перепишемо гамільтоніан в експоненціальній формі

$$H(t) = -\frac{\Delta}{2}\sigma_x - \frac{\varepsilon_0}{2}\sigma_z - \frac{A}{4}\sigma_z (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \quad (3.76)$$

і отримаємо систему стаціонарних рівнянь для квазіенергій використовуючи рівняння Шредінгера (2.65) із замінами (3.72) та (3.2.3)

$$\sum_i \sum_m \langle 0, n | H_F | i, m \rangle \langle i, m | \epsilon_j \rangle = \epsilon_j \langle 0, n | \epsilon_j \rangle, \quad (3.77)$$

де H_F - гамільтоніан Флоке, ϵ_j - власне значення квазіенергії, $|\epsilon_j\rangle$ - власний вектор, і $|i, m\rangle$ - m -та компонента Фур'є i -го енергетичного рівня. Ми також можемо записати його в термінах матричних елементів

$$\epsilon_j \Phi_{j,n} = \left(-\frac{\Delta}{2}\sigma_x - \frac{\varepsilon_0}{2}\sigma_z + n\omega \right) \Phi_n - \frac{A}{4}\sigma_z (\Phi_{n-1} + \Phi_{n+1}), \quad (3.78)$$

де j визначає номер стану, який дорівнює 0 або 1 для ДРС після розкладання хвильової функції, рівняння (2.3). Тоді отримаємо незалежний від часу гамільтоніан Флоке, який визначається формулою

$$\langle i_n | H_F | j_k \rangle = H_{0,1}^{[n-k]} + n\hbar\omega\delta_{ij}\delta_{nk}, \quad (3.79)$$

де i та j визначають номер стану, або

$$H_{F,nk} = H^{[n-k]} + n\hbar\omega\delta_{nk}I, \quad (3.80)$$

для 2×2 елементів (I - матриця тотожності 2×2) з трьома незникаючими

компонентами Фур'є гамільтоніана $H^{[n-k]}$, де n і k - цілі числа, що відповідають різним станам:

$$H^{[0]} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & \Delta \\ \Delta & -\varepsilon_0 \end{pmatrix}, \quad H^{[+1]} = H^{[-1]} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

Вона складається з підматриць 2×2 , і рівняння (3.80) визначає її елемент у n -му стовпчику та k -му рядку. Отже, матрицю станів Флоке можна записати так

$$H_F = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & H^{[0]} + (n-1)\hbar\omega & H^{[+1]} & 0 & \\ & H^{[-1]} & H^{[0]} + n\hbar\omega & H^{[+1]} & \\ & 0 & H^{[-1]} & H^{[0]} + (n+1)\hbar\omega & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3.82)$$

Власні значення цієї матриці можна знайти чисельно, якщо взяти скінченну кількість таких блоків 2×2 . Тоді, ми можемо отримати усереднену за часом ймовірність заселеності верхнього рівня

$$\bar{P}_{\text{ур}} = \sum_n \sum_j |\langle 1_n | \epsilon_j \rangle \langle \epsilon_j | 0_{(n=0)} \rangle|^2. \quad (3.83)$$

Рівняння Шредінгера з гамільтоніаном H_F у загальному випадку не можна розв'язати аналітично, тому спочатку розглянемо задачу на власні значення з $\Delta = 0$; далі ми можемо скористаємося теорією збурень з малим параметром Δ . Позначимо H_0 як незбурений гамільтоніан. У ситуації, коли $\Delta = 0$, немає зв'язку між $|0\rangle$ і $|1\rangle$ станами; тому можна записати так само гамільтоніан H'_0

для обох станів:

$$\tilde{H}_0(\text{для } 0 \text{ або } 1) = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & b + (n-1)\hbar\omega & a & & 0 \\ & a & b + n\hbar\omega & & a \\ & 0 & a & b + (n+1)\hbar\omega & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

де $b = -\frac{\varepsilon_0}{2}$, $a = -\frac{A}{4}$ для стану $|0\rangle$ і $b = \frac{\varepsilon_0}{2}$, $a = \frac{A}{4}$ для стану $|1\rangle$. Для знаходження власних функцій використаємо рівняння Шредінгера (3.73) з гамільтоніаном \tilde{H}'_0 , у якому $\Delta = 0$. Використовуючи формулу Якобі-Ангера (3.54), отримаємо

$$\begin{aligned} |\tilde{\Phi}_n(t)\rangle &= e^{in\omega t} e^{-i(2a/\hbar\omega) \sin \omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k\left(-\frac{2a}{\hbar\omega}\right) e^{i(n+k)\omega t} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{k-n}\left(\frac{A}{2\hbar\omega}\right) e^{-ik\omega t}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Власні стани незбуреного гамільтоніана H_0 такі:

$$|\tilde{0}, n\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{k-n}\left(\frac{A}{2\hbar\omega}\right) |0, k\rangle, \quad (3.86)$$

$$|\tilde{1}, m\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{k-m}\left(-\frac{A}{2\hbar\omega}\right) |1, m\rangle. \quad (3.87)$$

Для гамільтоніана Флоке (3.82), використовуючи теорему додавання для функцій Бесселя

$$J_n(2z) = \sum_m J_m(z) J_{n-m}(z), \quad (3.88)$$

ми можемо отримати елементи матриці для гамільтоніана Флоке на основі

цього (3.82):

$$\begin{aligned}
\langle 0'_n | H_F | 1'_m \rangle &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{k-n}(z) J_{l-m}(-z) \langle 0_k | H_F | 1_l \rangle = -\frac{\Delta}{2} J_{m-n} \left(\frac{A}{\hbar\omega} \right), \\
\langle 1'_n | H_F | 0'_m \rangle &= -\frac{\Delta}{2} J_{n-m} \left(\frac{A}{\hbar\omega} \right), \\
\langle 0'_n | H_F | 0'_m \rangle &= \left(-\frac{\varepsilon_0}{2} + n\hbar\omega \right) \delta_{nm}, \\
\langle 1'_n | H_F | 1'_m \rangle &= \left(\frac{\varepsilon_0}{2} + n\hbar\omega \right) \delta_{nm}.
\end{aligned} \tag{3.89}$$

З рівнянь (3.2.3), якщо маємо умову для багатотонних резонансів, $\varepsilon_0 \approx n\hbar\omega$, то можна знехтувати всіма іншими членами зв'язку, окрім одного між $|0'_0\rangle$ та $|1'_{-n}\rangle$; отже, отримуємо матричний гамільтоніан 2×2 :

$$H_{\text{RWA}} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & \Delta J'_{-n} \\ \Delta J'_{-n} & -\varepsilon_0 + \frac{n\hbar\omega}{2} \end{pmatrix} \tag{3.90}$$

де

$$J'_n = J_n \left(\frac{A}{\hbar\omega} \right). \tag{3.91}$$

Узагальнена теорія збурень Ван Влека

RWA є першим наближенням у теорії Флоке; для наступних наближень ми можемо використовувати узагальнену теорію збурень Ван Влека (УТЗВВ) [163]. У цій теорії збурень (малий) параметр збурення має вигляд

$$\lambda = -\frac{\Delta}{2}. \tag{3.92}$$

Тут ми можемо переписати гамільтоніан Флоке в базисі станів $|0'_n\rangle$ та $|1'_m\rangle$:

$$\tilde{H}_F = \tilde{H}'_0 + \lambda \tilde{V}, \tag{3.93}$$

де

$$\tilde{H}'_0 = \begin{pmatrix} \dots & & & & & & \\ \hline & -\frac{\varepsilon_0}{2} - \hbar\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & \frac{\varepsilon_0}{2} - \hbar\omega & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & 0 & 0 & -\frac{\varepsilon_0}{2} & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon_0}{2} & 0 & \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\varepsilon_0}{2} + \hbar\omega & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon_0}{2} + \hbar\omega \\ \hline & & & & & & \dots \end{pmatrix},$$

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} \dots & & & & & & \\ \hline & 0 & J'_0 & 0 & J'_1 & 0 & J'_2 \\ & J'_0 & 0 & J'_{-1} & 0 & J'_{-2} & 0 \\ \hline & 0 & J'_{-1} & 0 & J'_0 & 0 & J'_1 \\ & J'_1 & 0 & J'_0 & 0 & J'_{-1} & 0 \\ \hline & 0 & J'_{-2} & 0 & J'_{-1} & 0 & J'_0 \\ & J'_2 & 0 & J'_1 & 0 & J'_0 & 0 \\ \hline & & & & & & \dots \end{pmatrix}. \quad (3.94)$$

Ми можемо звести нескінченновимірну матрицю гамільтоніана Флоке (3.82) до матричного гамільтоніана 2×2 h за допомогою майже виродженого формалізму збурень у УТЗВВ [171]. Згідно з теорією збурень теорії збурень, 2×2 матрицю гамільтоніана h та його власні розв'язки ϕ можна розкласти за ступенями λ

$$h = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m h^{(m)}, \quad (3.95)$$

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \phi^{(m)}. \quad (3.96)$$

Для n -фотонного резонансу стани Флоке майже вироджені, тому

$$\phi_-^{(0)} = |\tilde{0}_0\rangle \text{ and } \phi_+^{(0)} = |\tilde{1}_0\rangle \quad (3.97)$$

i

$$h^{(0)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\varepsilon_0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 - 2n\hbar\omega \end{pmatrix}, \quad (3.98)$$

де два стани майже вироджені, тобто $\varepsilon_0 \approx n\hbar\omega$. Використовуючи УТЗВВ, можна отримати декілька членів високого порядку:

$$\phi_-^{(1)} = \sum'_k \frac{-J'_k}{\varepsilon_0 + k\hbar\omega} |\tilde{1}_k\rangle, \quad (3.99)$$

$$\phi_+^{(1)} = \sum'_k \frac{J'_k}{\varepsilon_0 + k\hbar\omega} |\tilde{1}_{-n-k}\rangle, \quad (3.100)$$

$$h^{(1)} = \langle \phi^{(0)} | V' | \phi^{(0)} \rangle = J'_- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.101)$$

$$h^{(2)} = \langle \phi^{(0)} | V' | \phi^{(1)} \rangle - h^{(1)} \langle \phi^{(0)} | \phi^{(1)} \rangle = \sum'_k \frac{J_k'^2}{\varepsilon_0 + k\hbar\omega} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} h^{(3)} &= \langle \phi^{(1)} | V' | \phi^{(1)} \rangle - \langle \phi^{(1)} | \phi^{(1)} \rangle h^{(1)} = \\ &= -\sum'_k \left(\sum'_l \frac{J'_k J'_l J'_{k+l+n}}{(\varepsilon_0 + k\hbar\omega)(\varepsilon_0 + l\hbar\omega)} + \frac{J_k'^2 J'_{-n}}{(\varepsilon_0 + k\hbar\omega)^2} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Тут сума \sum'_k знаходиться від $-\infty$ до ∞ , де ціле число $k \neq -n$. У результаті УТЗВВ ми отримуємо гамільтоніан, який включає n -каналів зв'язку фотонів

$$H_{\text{УТЗВВ}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\varepsilon_0 - \delta_n & \tilde{\Delta}_n \\ \tilde{\Delta}_n & \varepsilon_0 + \delta_n - 2n\hbar\omega \end{pmatrix}, \quad (3.103)$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_n &= J'_{-n}2\lambda - \sum'_k \left(\sum'_l \frac{J'_k J'_l J'_{k+l+n}}{(\varepsilon_0 + k\hbar\omega)(\varepsilon_0 + l\hbar\omega)} + \frac{J'^2_k J'_{-n}}{(\varepsilon_0 + k\hbar\omega)^2} \right) 2\lambda^3 \\ &+ O(\lambda^5), \\ \delta_n &= \sum'_k 2 \frac{J'^2_k}{\varepsilon_0 + k\hbar\omega} \lambda^2 + O(\lambda^4).\end{aligned}\quad (3.104)$$

Далі знайдемо власні значення гамільтоніана УТЗВВ (3.103).

$$\varepsilon_{0,1} = -\frac{n\hbar\omega}{2} \pm \hbar\tilde{\Omega}_R, \quad (3.105)$$

де

$$\left(\hbar\tilde{\Omega}_R\right)^2 = (n\hbar\omega - \varepsilon_0 - \delta_n)^2 + \tilde{\Delta}_n^2. \quad (3.106)$$

Це дає ймовірність заселеності n -фотонний залежний від часу верхній рівень

$$P_{\text{up}}^{(n)}(t) = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\Delta}_n^2}{\left(\hbar\tilde{\Omega}_R\right)^2} \left(1 - \cos \tilde{\Omega}_R t\right), \quad (3.107)$$

і усереднену ймовірність заселеності

$$\bar{P}_{\text{up}}^{(n)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P_{\text{up}}^{(n)}(t') dt' = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\Delta}_n^2}{\tilde{\Delta}_n^2 + (n\hbar\omega - \varepsilon_0 - \delta_n)^2}. \quad (3.108)$$

Якщо ми візьмемо лише перший член цього розвинення, ми можемо досягти ліміту НХО

$$\bar{P}_{\text{up}}^{(n)} = \frac{1}{2} \frac{\Delta_n^2}{\Delta_n^2 + (n\hbar\omega - \varepsilon_0)^2}, \quad (3.109)$$

де Δ_n така сама, як і в НХО, і як було визначено у рівнянні (3.54).

3.3 Вплив дисипації та температури.

Будь-яка реальна квантова система пов'язана з оточенням, і для мезоскопічних систем особливо важливо враховувати дисипацію. Багато авторів вивчають вплив температури, релаксації та декогеренції на динаміку

ДРС [188, 54]. Загальний підхід полягає в наступному почати з рівняння Ліувілля-фон Неймана для матриці густини ρ_{tot} системи, яка тут складається з квантової системи та дисипативного середовища

$$\frac{d}{dt}\rho_{\text{tot}}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_{\text{tot}}(t), \rho_{\text{tot}}(t)]. \quad (3.110)$$

Повний гамільтоніан, $H_{\text{tot}} = H + H_{\text{env}} + H_{\text{int}}$, складається з частини відповідної за квантову систему H , гамільтоніану середовища H_{env} та взаємодію між ними H_{int} , наприклад, [189]. За умови, що зв'язок слабкий, оточення можна розглянути у вигляді набору гармонічних осциляторів з лінійним зв'язком, у координатах осцилятора. В межах цієї спін-бозонної моделі середовище характеризується гамільтоніаном $H_{\text{env}} = \sum \hbar\omega_i b_i^\dagger b_i$ з частотами ω_i та операторами анігіляції b_i ; бозонний резервуар може представляти фонони, якщо наша система пов'язана з кристалічною ґраткою. Загальний вигляд взаємодії має вигляд $H_{\text{int}} = -\frac{1}{2}\mathcal{S} \sum \hbar\lambda_i (b_i + b_i^\dagger)$, де \mathcal{S} представляє спіновий оператор; зазвичай, $\mathcal{S} = \sigma_z$ [190, 191, 192, 193, 194, 195, 196].

Середовище описується спектральною функцією густини $J(\omega) = \pi \sum \lambda_i^2 \delta(\omega - \omega_i)$ [188]. При малих енергіях це характеризується степеневою залежністю і може бути додатково апроксимовано введенням частотного зрізу ω_c : $J(\omega) = \alpha\omega(\omega/\omega_c)^{s-1} \exp(-\omega/\omega_c)$ де безрозмірний параметр α визначає силу, а степеневий закон описується s , з $s = 1$ для омичного середовища [197, 198]. Для неомічних випадків див. [188]. У найпростішому випадку ми можемо розглядати середовище, що моделюється, як лише один гармонічний осцилятор зі скінченною температурою [199, 200, 201].

Простеживши ступені свободи середовища, ми можемо отримати основне рівняння для зведеної матриці густини $\rho(t)$ нашої системи, яке можна записати як рівняння Лідблада (також відоме як рівняння Лідблада-Горіні-Коссаковського-Сударшана, [202])

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \rho] + \sum_k \left(L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2} L_k^\dagger L_k \rho - \frac{1}{2} \rho L_k^\dagger L_k \right). \quad (3.111)$$

Різні канали релаксації описуються операторами Ліндблада L_k . Зауважимо,

що рівняння Ліндблада є коректним за певних умов, таких як

- Відокремлюваність (відсутність кореляцій між системою та її оточенням при $t = 0$),
- Наближення Борна (середовище є статичним, незважаючи на взаємодію з квантовою системою, і слабкий зв'язок між квантовою системою та середовищем),
- Марківське наближення (часовий масштаб розпаду набагато менший за найменший характерний час системи),
- секулярне наближення (всіма членами, які швидко обертаються в картині взаємодії можна знехтувати).

Про обмеження рівняння Ліндблада див. [203].

Зокрема, для ДРС вплив середовища призводить до релаксації та дефазування, які описуються формулою $L_{\text{relax}} = \sqrt{\Gamma_1}(\sigma_x - i\sigma_y)/2$ та $L_\phi = \sqrt{\Gamma_\phi/2}\sigma_z$. Замість швидкостей релаксації можна використати відповідні часи: $T_1 = \Gamma_1^{-1}$ і $T_\phi = \Gamma_\phi^{-1}$. Тоді, рівняння Ліндблада зводиться до рівнянь Блоха для компонент вектора Блоха $\mathbf{s} = \text{Tr}(\sigma\rho)$; записуючи гамільтоніан у вигляді $H = -\mathbf{V} \cdot \sigma/2$, з ефективним “магнітним” полем \mathbf{V} , вони читаються як

$$\frac{d}{dt}\mathbf{s} = -\mathbf{V} \times \mathbf{s} - \frac{1}{T_1}(\mathbf{s}_{\parallel} - \mathbf{s}_{\parallel}^{\text{eq}}) - \frac{1}{T_2}\mathbf{s}_{\perp}, \quad (3.112)$$

$$T_2^{-1} = \frac{1}{2}T_1^{-1} + T_\phi^{-1}, \quad s_z^{\text{eq}} = \tanh(\Delta E/2k_B T). \quad (3.113)$$

Важливо, що рівняння Блоха отримано на основі власних станів кубіту [204] (див. також [205]). Зокрема, це припускає релаксацію до основного стану при низьких температурах. Таким чином, Гамільтоніан $H(t)$ в рівняннях Ліндблада і Блоха слід записувати у представленні адіабатичного базису. Діагоналізація гамільтоніана здійснюється поворотом на кут η . Швидкості релаксації пов'язані зі спектральною густиною [206] і залежать від енергетичного зсуву ε_0 і температури T

$$\Gamma_1 = \pi\alpha \sin^2 \eta \frac{\Delta E}{\hbar} \coth \frac{E}{2k_B T}, \quad \Gamma_\phi = \pi\alpha \cos^2 \eta \frac{2k_B T}{\hbar}. \quad (3.114)$$

Рівняння Блоха можна розширити для багаторівневої системи [53, 207]

$$\dot{\rho}_{ii}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \rho]_{ii} - \frac{\rho_{ii}(t) - \rho_{ii}^{\text{eq}}(t)}{T_{1,i}}, \quad (3.115)$$

$$\dot{\rho}_{ij}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \rho]_{ij} - \frac{\rho_{ij}(t)}{T_{2,ij}}, \quad i \neq j. \quad (3.116)$$

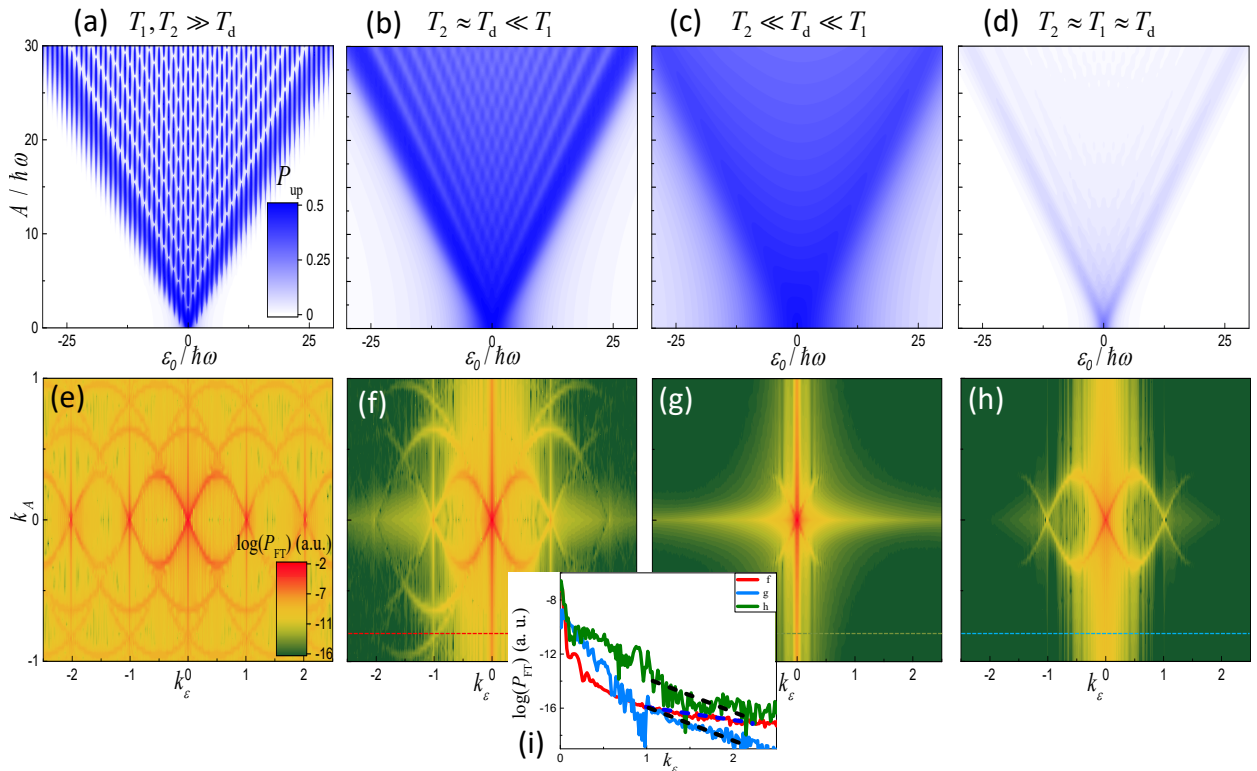


Рис. 3.5: Вплив дисипації та дефазування на інтерферограми та томограми. На вгорі представлено інтерферограми ЛЗШМ, а на низу відповідні двовимірні Фур'є образи, також відомі як томограми. Ці інтерферограми та їхні томограми продемонстровано у кількох випадках: (а) та (е) низька релаксація та дефазування, $T_1 = 10T_d$, $T_2 = 20T_d$ (b) і (f) низька релаксація та час дефазування, порівнянний з періодом збудження, $T_1 = 10T_d$, $T_2 = 0.5T_d$; (c) та (g) слабка релаксація та сильне дефазування, $T_1 = 10T_d$, $T_2 = 0.1T_d$; та (d) і (h) як час релаксації, так і час дефазування, порівнянний з періодом збудження, $T_1 = 0.25T_d$, $T_2 = 0.5T_d$, $T_3 = 0.5T_d$. Для всіх інтерферограм та томограм частота збудження дорівнює $\omega = 1.14\Delta/\hbar$. На врізці (і) показано, що підбір лінійної частини залежності можна використати для визначення часу дефазування T_2 .

Отже, найпростіший спосіб продемонструвати вплив як дисипації, так і температури є розв'язання рівнянь Блоха; див. про це також у статтях [87,

208, 189, 209, 210, 211, 205, 212]. На рис. 3.5, представлено інтерферограми для різних швидкостей релаксації та дефазування та їхні Фур'є-образи. На панелі (а) ми показуємо випадок низьких швидкостей дисипації та релаксації, коли всі резонанси можна розрізнити. На панелі (b), ми показуємо випадок середнього режиму дефазування, який також називаємо двопрхідним режимом, коли відбувається кілька проходжень перед тим, як дефазування починає домінувати, що призводить до злиття резонансів у лінії.

Наступний режим - з великим дефазуванням, який показано на панелі (c), де дефазування домінує над збудженням і резонанси зливаються в одну область $A > |\epsilon|$. Панель (d) представляє випадок сильної релаксації, коли релаксація домінує над збудженням. Характерною особливістю для цього випадку є пік ймовірності поблизу ($\epsilon_0 = 0, A = 0$), де збільшення амплітуди збудження призводить до того, що резонанси зникають.

Дисипативні переходи ЛЗШМ вивчено для квантових точок [213, 214, 215], надпровідних кубітів [216] та молекулярних наномагнетиків, які включають високоспіновий випадок [217, 218, 219]. Перехід у системі що підлягає неперервному вимірюванню, розглянуто в роботі [220]. Коли середовище можна розглядати як континуум станів, переходи ЛЗШМ можуть бути сформульовані в рамках моделі відкритих багатьох станів [221]. Вплив дисипації на когерентне руйнування тунелювання (КРТ) полягає в придушенні цих процесів [173].

3.4 Квантова фазова томографія

Перетворення Фур'є є корисним інструментом для аналізу різних періодичних закономірностей. У випадку інтерферограм ЛЗШМ перетворення Фур'є призводить до високо впорядкованої структури одновимірних дуг [222]. Оскільки зображення Фур'є дає структуроване відображення інтерферограм, воно являє собою томографічне зображення, а відповідні графіки дають початок техніці, яка називається квантовою фазовою томографією [223]. Цей підхід дає додаткову інформацію про фізичні процеси у збуджуваній квантовій системі і є корисним для визначення параметрів системи, зокрема для дослідження механізмів

дефазування [223, 7].

Маючи аналітичний вираз для $\overline{P_{\text{ур}}}$, ми можемо використати неперервне двовимірне перетворення Фур'є

$$P_{\text{FT}}(k_\varepsilon, k_A) = \iint_{-\infty}^{\infty} \overline{P_{\text{ур}}}(\varepsilon_0, A) \exp[-ik_\varepsilon \varepsilon_0 - ik_A A] d\varepsilon_0 dA, \quad (3.117)$$

де k_ε і k_A - змінні взаємного простору що відповідають змінним ε_0 та A , відповідно. У випадку, коли матрицю даних задано формулою для $\overline{P_{\text{ур}}}$, ми можемо використати дискретне 2D перетворення Фур'є. На нижніх панелях рис. 3.5 подано томограми пов'язані з інтерферограмами на верхніх панелях; вони були обчислені за допомогою дискретного перетворення Фур'є даних для інтерферограм. Видно, що релаксація пригнічує низькочастотні резонансні криві; при збільшенні швидкості релаксації виживає лише основна крива (з $l = 1$), як видно на рис. 3.5(h). Зверніть увагу, що вертикальна і горизонтальні лінії збільшення P_{FT} вздовж осей, особливо при $k_\varepsilon = 0$ і $k_A = 0$, є артефактами через скінченний розмір інтерферограм.

Загальні томограми на рис. 3.5(e-h) мають вигляд подібний до лимонних дольок, утворені 1D синусоїдами вигляду

$$k_A(k_\varepsilon) = \pm \frac{2l}{\omega} \sin\left(\frac{\omega k_\varepsilon + 2\pi l'}{2l}\right), \quad (3.118)$$

де $l = 1, 2, 3, \dots$, $l' = 0, 1, 2, \dots$, і $l' < l$. Це можна побачити, проаналізувавши фазу, набуту під час періодичної еволюції [223], або шляхом прямого перетворення рівняння (3.65) [224, 127]. З нижніх панелей на рис. 3.5, ми бачимо, як релаксація та дефазування впливають на зображення Фур'є. Багато резонансів на панелі з низькою релаксацією та декогеренцією (e). З панелей (f) і (g) видно, що збільшення швидкості дефазування призводить до збільшення нахилу вздовж осі $|k_\varepsilon|$. Потім, коли ми порівнюємо Фур'є-зображення на панелях (f) і (h), то бачимо, що для однієї і тієї ж швидкості дефазування, збільшення швидкості релаксації призводить до зникнення резонансів вищого порядку. На панелі (i) показано перерізи панелей (f,g,h) вздовж $k_A = 0.85$; нахил задається швидкостями дефазування, як показано пунктирними лініями. Зауважте, що на цій панелі це дуже зашумлено через

резонансів та артефактів; щоб краще бачити нахили, можна розглянути відгук вздовж резонансних ліній, як у [224].

Нахил на зображенні Фур'є пропорційний до швидкості дефазування: $\ln P_{\text{FT}} \propto -\Gamma_2 |k_\varepsilon|$ [223]. Це показано на вставці, рис. 3.5(i). Це спостереження дає зручний інструмент для отримання швидкості дефазування без додаткових вимірювань чи підбору [7, 225]. Якщо врахувати неоднорідне розширення Γ_2^* , то це призводить до

$$\ln P_{\text{FT}}(k_\varepsilon, k_A(\varepsilon)) \propto -\Gamma_2 |k_\varepsilon| - \Gamma_2^{*2} k_\varepsilon^2 / 2, \quad (3.119)$$

де $k_A(k_\varepsilon)$ визначається співвідношенням рівняння (3.118) [224]. На додаток до Γ_2 , це надає зручний інструмент для визначення Γ_2^* , а головне без будь-яких додаткових вимірювань, таких як експерименти зі спінового ехо [7].

Отже, перетворення Фур'є надає корисний інструмент, квантову фазову томографію, що забезпечує додаткову візуалізацію інтерференції та параметрів системи, таких як швидкість дефазування. Ця методологія може бути подальшого розвитку і застосування до інших систем, зокрема, для біхроматичного збудження [134] та багаторівневих систем [226, 227].

3.5 Порівняння різних методів для періодичного збудження

Вище детально розглянуто різні методи опису квантових систем під дією збудження. Тепер ми хотіли б порівняти ці різні підходи; див. також [91]. Підсумуємо їхні ключові аспекти і порівняємо їх, обчисливши

	Чисельний ЗДР	Чисельний QuTiP	Метод Флоке	НХО	Оптимізований НХО	АІМ
(ε_0, A)	3144	2050	1300	16.4	4.7	9.4
(ε_0, ω)	1400	1241	774	9.3	4	8.6

Табл. 3.1: **Відносна ефективність різних методів.** Кількісно виміряна за часом (у секундах), необхідним для обчислення відповідних інтерферограм як показано на рис. 3.6. Перший рядок відноситься до інтерферограм у координатах (ε_0, A) , а другий рядок - з координатами (ε_0, ω) . Числа у таблиці отримано на восьмиядерному процесорі Intel 10875Н з використанням восьми потоків.

інтерферограми.

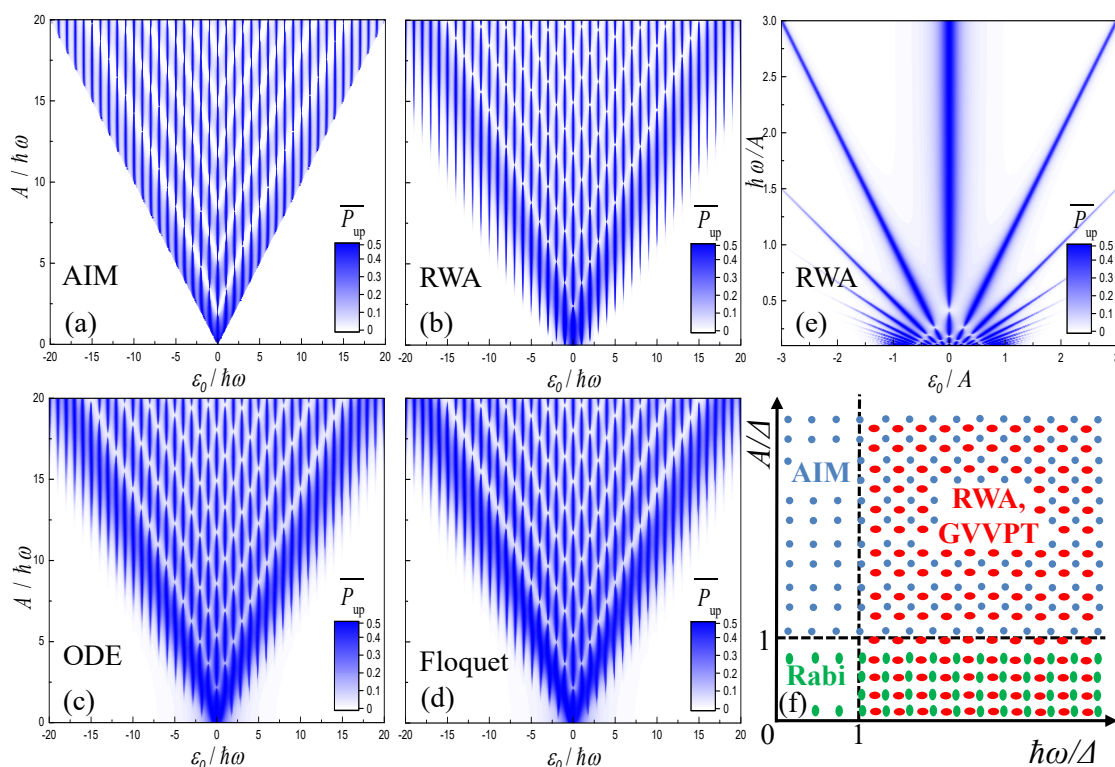


Рис. 3.6: Інтерферограми ЛЗШМ, розраховані різними методами. (a-d) та (e) представляють усереднену за часом ймовірність зайняття верхнього рівня як функцію енергетичного зсуву ε_0 , амплітуди збудження A для (a-d) і частоти збудження ω для (e). Порівняння між областями застосовності різних методів з малими швидкостями релаксації та дефазування (f). Використані методи - адіабатично-імпульсна модель (AIM) (сині кола на панелі (f)), наближення хвилі, що обертаються (НХО) та друге наближення методом Флоке, задане узагальненою теорією збурень Ван-Влека (УТЗВВ), яке має таку саму область застосовності (червоні овали на панелі (f)). Чисельний розв'язок звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), а також підхід Флоке може бути застосований скрізь. Крім того, панель (f) демонструє область застосування методу коливань Рабі (зелені овали).

Чисельне розв'язування рівняння Шредінгера або Ліндблада

Цей метод є найпоширенішим, оскільки він базується на інтегруванні системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Це дає найякісніші результати і може бути використаний для будь-якого діапазону параметрів. Ми порівнюємо всі інші методи з цим, тому що чисельне інтегрування може

бути виконане з високою точністю. Однак, чисельне інтегрування має один суттєвий недолік: воно потребує значних обчислювальних потужностей, тому потребує значного процесорного часу для обчислення інтерферограм. Ми використовуємо чисельний розв'язок на основі модифікованого методу Рунге-Кутта, який є стандартним підходом для розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) мовою Python.

Чисельне розв'язування за допомогою QuTiP

Фреймворк QuTiP (Quantum Toolbox in Python) [228, 229, 230] є дуже корисним інструментом для обчислення динаміки квантових систем. Тут нам потрібно лише ввести гамільтоніан і набір параметрів; в результаті ми отримуємо повну еволюцію системи (всі члени матриці густини, у всі визначені моменти часу) або, також, усереднене значення популяції певного рівня. Ця бібліотека також має детальний посібник і багато різних розв'язувачів для задач динаміки квантових систем.

Метод Флоке

Цей підхід може бути використано лише для періодичних гамільтоніанів і базується на теоремі Флоке. Метод Флоке швидший за прямий чисельний розв'язок, але повільніший за інші аналітичні методи розв'язку. Важливо, що він може включати релаксацію та дефазування. Цей метод є аналогом розкладу за власними функціями у методах математичної фізики.

Наближення обертових хвиль (НХО)

НХО відповідає першому члену формалізму Флоке за малою відстанню між рівнями $\Delta \ll \omega, \varepsilon$. Це найпоширеніший аналітичний метод, оскільки він поєднує в собі достатню точність з помірними потребами в обчислювальних потужностях. Тут для обчислення інтерферограм діапазон застосування обмежується перекриттям резонансів, яке виникає при збільшенні релаксації

і дефазування або зменшенні частоти збудження. У найпростішому підході можна використати формулу рівняння (3.65), яка передбачає обчислення ряду доданків у кожній точці. Однак, якщо взяти лише кілька близьких резонансів, тобто з k близькими до резонансної умови $\varepsilon_0 = k\hbar\omega$, то це значно прискорює обчислення; такий підхід можна назвати *оптимізованим НХО*.

Адіабатично-імпульсна модель (АІМ)

Адіабатично-імпульсна модель може надавати інтерферограми у різних базисах. Зазвичай це робиться, з нехтуванням релаксацією та дефазуванням; таким чином, усереднений за часом результат, отриманий цим методом, залежить від початкових умов. Це коректно дає розташування резонансів; але між ними цей метод може давати значення, відмінні від тих, що отримані за допомогою більш точних чисельних розрахунків, що є наслідком неврахування релаксації та дефазування. Це означає, що усереднений за часом результат залежить від початкової умови; але коли ми використовуємо початкову умову основного стану в АІМ і малу дисипацію в інших методах, то АІМ дає правильний результат. Діапазон застосування цього методу визначається великою амплітудою збудження $A > \Delta$, яка необхідною для адіабатичної еволюції між переходами. Другим обмеженням є час перехідного процесу: $T_d/2 > (\tau_{\text{relax}} + \tau_{\text{jump}})$. Див. час переходу, описаний у пункті 2.2.1.

Інтерферограми та час розрахунку

Проілюструємо наші висновки рисунком 3.6 і таблицею 3.1. По-перше, на рис. 3.6: (a,b,c,d), ми представляємо інтерферограми з використанням координат (ε_0, A) ; а на (e) у координатах (ε_0, ω) . Навіть у першому випадку відмінностей не так вже й багато, а у випадку (e) їх стає ще менше. Для розрахунків ми вибрали частоту коливань $\hbar\omega/\Delta = 1.14$ і швидкості релаксації для (b-d), $\Gamma_1 = 0.1T_d^{-1}$ і $\Gamma_2 = \Gamma_1/2$. Зауважимо, що адіабатично-імпульсна модель в (a) справедлива за умови $A > \varepsilon_0$, без урахування релаксації та дефазування. НХО в (b) дає результат, більш подібний до

чисельного розв'язку в (с), за винятком зсуву резонансів при збільшенні амплітуди збудження, в області $A < \varepsilon_0$.

У таблиці 3.1, як кількісну міру ефективності ми вибрали час, необхідний для обчислення інтерферограм. Для цього ми використовували восьмиядерний процесор Intel 10875Н з вісьмома потоками. Обчислення проводились як на рис. 3.6, з по 401-ій точці на кожній осі. Зауважимо, що найсуттєвіший вплив на час обчислень має кількість точок, тоді як залежність від інших параметрів є різною для різних методів. Як видно з таблиці 3.1, аналітичні методи значно швидші за чисельні розрахунки, з різниця у часі обчислень складає близько двох порядків. Однак, чисельний метод є більш гнучкими і може бути легко використаний для більш складних систем, що включають багато рівнів, додавання шумів тощо. Для опису усередненої за часом ймовірності зайнятості найзручнішим методом є НХО. Для опису динаміки одним з найбільш ілюстративних методів є адіабатично-імпульсна модель, але вона обмежена часом перехідного процесу; для отримання додаткової інформації див. розділ 2.2.1.

3.6 Висновки

Описуючи задачі з одним та кількома переходами, ми доповнили попередні роботи та огляд [55], у якому, крім теорії, описано переважно експерименти з надпровідними квантовими системами. У роботі [3] представлено набагато більш детально різні підходи до вивчення багаторазового проходження ЛЗШМ. Вперше знайдено новий спосіб збудження ЛЗШМ зі збереженням вірогідності, отримано більш точну формулу для середньої за часом ймовірності збудження в діабатичному базисі в рамках АІМ, отримано більш просту формулу для оцінки часу перехідних процесів при одноразовому проходженні ЛЗШМ, порівняно різні методи для опису багаторазового проходження, зокрема зроблено акцент на відносному часу розрахунку інтерферограм різними методами, та способи його покращення для НХО.

Одноразові та багаторазові переходи ЛЗШМ демонструють багату фізику квантових систем як на мікроскопічних, так і на мезоскопічних масштабах

[3]. Споріднену фізику можна використовувати для характеризування їхньої квантової динаміки (інтерферометрія) так і для контролю їхніх станів.

РОЗДІЛ 4

КВАНТОВІ ЛОГІЧНІ ГЕЙТИ ЛЗШМ

Нобелівська премія з фізики 2012 року була присуджена за “експериментальні методи, які дозволяють вимірювати та маніпулювати окремими квантовими системами”. Уточнимо, що ці системи були мікроскопічними і складаються з атомів і фотонів. Зовсім недавно різноманітність квантових систем збільшилась і включає також мезоскопічні системи, що поведуться як дуже великі атоми [231]. Щоб продемонструвати це, ми представляємо наступну різноманітність систем і підходів, де основний ефективний гамільтоніан може бути легко модифікований або сконструйований, а їх когерентне квантове керування вивчається в рамках фізики ЛЗШМ.

4.1 Когерентне керування мікроскопічними та мезоскопічними структурами

У надпровідних структурах властивості неадіабатичних переходів ЛЗШМ можуть бути використані для керування *суперпозиційними станами* в одиничних кубітах [232] та *заплутаністю* у зв’язаних кубітних системах [232]. Було розроблено кілька методів:

- *амплітудна спектроскопія* [222], який можна застосувати до багаторівневих систем, де збільшення амплітуди збудження призводить до досягнення більшої кількості квазіперетинів рівнів, для однієї частоти керування, яка може бути на порядки менша, ніж енергетичні масштаби системи, що досліджуються;
- *квантова фазова томографія* [223], яка ґрунтується на перетвореннях Фур’є інтерферограм, які забезпечують додаткову наочність та інформацію;
- *імпульсна візуалізація* [233], де виміряні інтерферограми використовуються для зображення фактичної форми хвилі збуджуючого (керуючого) сигналу на пристрої, яка, в свою чергу, може бути

використана для інженерії бажаної еволюції квантової системи. Ці та інші подібні методи дають можливість характеризувати і маніпулювати станами надпровідних та інших квантових систем.

4.2 Однокубітові квантові логічні гейти

Найчастіше квантове керування (в тому числі логічними гейтами) асоціюється з резонансним збудженням, який призводить до осциляцій Рабі [234, 235]. Однак, під час резонансного збудження можуть виникати певні обмеження, включаючи досягну швидкість воріт і неідеальності теорії, такі як умови зустрічного обергання [236, 237, 238, 239]. Когерентна інтерференція ЛЗШМ є комплементарним підходом до квантового керування на основі нерезонансного збудження з чергуванням адіабатичної еволюції та неадіабатичних переходів [3]. Це уможливорює надшвидкі кубітні логічні гейти, які керуються виключно за допомогою імпульсів базової смуги, а отже зменшує потребу в імпульсних мікрохвильових сигналах керування [7, 240, 239, 241, 242].

Еволюцію кубітів можна зручно описати траєкторіями на сфері Блоха. Для цього матриці еволюції в підході матриць еволюції ми повинні переписати це, використовуючи кутове розкладання за кутами в полярних координатах [243, 244]. По-перше, щоб описати неадіабатичний перехід, ми перепишемо матрицю N з рівняння (2.89) у вигляді

$$N = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi_S} & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2)e^{i\phi_S} \end{pmatrix} = U_z(\phi_S) U_x(\theta) U_z(\phi_S), \quad (4.1)$$

де $\sin^2(\theta/2) = \mathcal{P}$ і матриці $U_{x,y,z}(\alpha) = \exp(-i\alpha\sigma_{x,y,z}/2)$ описують відповідні обергання. Адіабатична еволюція характеризується оберганням навколо осі z $U(t, t_i) = \exp(-i\zeta\sigma_z)$ у рівнянні (2.86). Тоді еволюція одноразового проходження описується UN , рівнянням (2.94). Повторення цих елементів може відповідати еволюції одного періоду еволюції за сигналом збудження (з подвійним проходженням області квазіперетину), $\Xi = N^\top U_2 N U_1$, рівняння (3.9), або до n -прохідної еволюції з Ξ^n у

рівняння (3.26). Записавши це, ми можемо прирівняти матрицю еволюції з матрицею для розкладу за кутами в полярних координатах $U(\alpha, \beta, \gamma) = U_z(\gamma)U_y(\beta)U_x(\alpha)$ [245] ; в результаті отримуємо формули для позначених кутів повороту α, β, γ . За допомогою цього ми можемо отримати бажаний протокол і параметри для однокубітних операцій [239]. Тут важливим твердженням є те, що за допомогою чистої техніки інтерференції ЛЗШМ ми можемо отримати будь-яке обертання і, відповідно, ефективно однокубітне і двокубітне керування [246]. Такий підхід дає змогу визначити параметри бажаної еволюції або унітарного логічного гейту, а також аналіз резонансних умов [91].

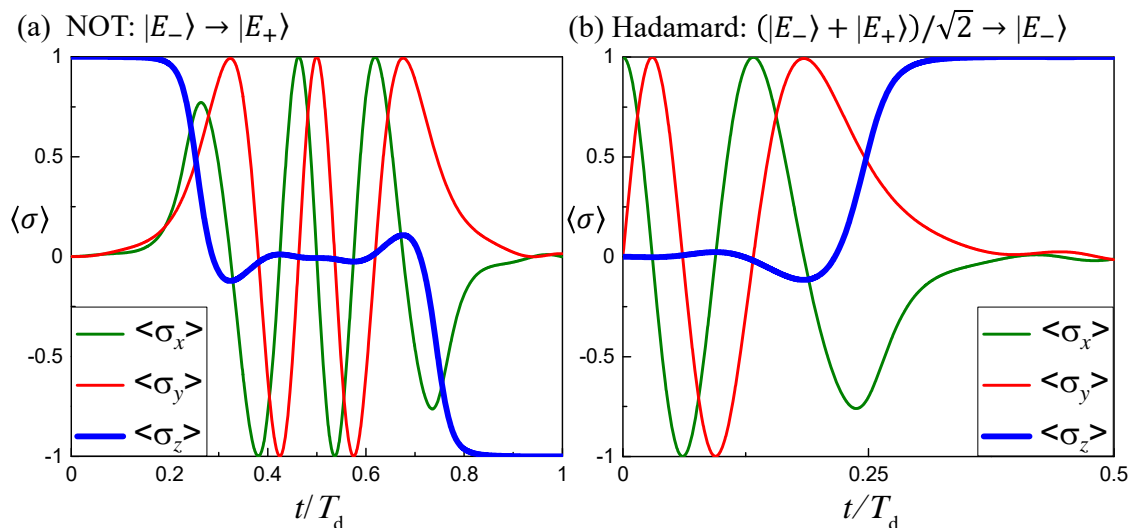


Рис. 4.1: **Гейти ЛЗШМ** Динаміка σ -матриці коефіцієнти $\langle \sigma_{x,y,z} \rangle$, які визначають положення на сфері Блоха, під $\varepsilon(t) = A \cos \omega t$ збудження. (a) NOT гейт, який є переходом $|E_- \rangle \rightarrow |E_+ \rangle$, який виконується двома послідовними переходами ЛЗШМ. Для цього ми використовуємо умову для конструктивного резонансу $\zeta + \phi_S = 2\pi n$ (це визначає амплітуду A) і візьмемо ймовірність переходу $\mathcal{P} = 0.5$. Зокрема, ми знайшли $A = 3.8872\Delta$, а частоту визначили з $\omega = -\pi\Delta^2 [2\hbar A \ln \mathcal{P}]^{-1}$. (b) Гейт Адамара виконано з такими параметрами: $\mathcal{P} = 0.5$, $A = 4.309\Delta$, яка визначається з умови на деструктивну інтерференцію $\zeta + \phi_S = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$.

Як ілюстративний приклад, розглянемо спочатку керування ДРС за допомогою імпульсів які призводять до подвійного проходження області квазіперетину [7]. Це описується матрицею $\Xi = N^\top U_2 N U_1$, тут з чергуванням адіабатичної еволюції (z -обертання) і неадіабатичного переходу з N . Зауважимо, що кути обертання, як θ , так і ϕ_S , визначаються параметром

адіабатичності δ і, відповідно, швидкістю проходження v . Звідси випливає, змінюючи форму імпульсу (яка визначає цю швидкість v), можна отримати будь-який поворот і відповідний логічний гейт [7]. Для фіксованої швидкості, еволюція обмежена між двома траєкторіями, визначеними деструктивною та конструктивною інтерференцією [240].

На рис. 4.1, (а) ми демонструємо операцію NOT, яка є поворотом навколо осі x на кут π . Для цього ми розглядаємо рух з косинусоїдальним імпульсом і беремо параметри для виконання операції NOT. А саме, використовуємо $\mathcal{P} = 0.5$ і повну зміну фази за один перехід ЛЗШМ $\phi_S + \zeta = 2\pi n$, щоб мати конструктивну інтерференцію, див. рівняння (2.87, 2.9). Як результат в результаті можна виконати швидко і надійну операцію NOT, яка на рис. 4.1(а) ілюструє перехід з основного стану (логічний 0) до збудженого стану (логічний 1): $|E_-\rangle \rightarrow |E_+\rangle$.

Далі розглянемо ворота Адамара. Як і вище, цю операцію можна реалізувати за допомогою двопрхідного процесу. Однак, з вибраним значенням $\mathcal{P} = 0.5$, ми можемо зробити це швидше, тут за допомогою одноразового проходження, яке відбувається за половину періоду. Це проілюстровано на рис. 4.1(b). Для виконання гейту Адамара використано один перехід ЛЗШМ, з повною зміною фази $\phi_S + \zeta = 3\pi/2 + 2\pi n$, що призводить до $\{|E_-\rangle + |E_+\rangle\} / \sqrt{2} \rightarrow |E_-\rangle$. Отже, ми продемонстрували два гейти, і цей приклад можна доповнити, наприклад, фазовим гейтом, щоб отримати універсальний набір однокубітних операцій. Фазовий вентиль можна реалізувати за допомогою $U_z(\zeta) = \exp(-i\zeta\sigma_z)$, що є холостим ходом (за відсутності збудження).

На додаток до однокубітних операцій, двокубітові операції також можуть бути реалізовані за допомогою переходів ЛЗШМ та інтерференції. Двокубітні операції зручно демонструвати за допомогою умовного фазового гейту або керованого Z (CZ) гейту між двома кубітами; чотирирівнева динаміка була вивчена в роботі [247, 239] для надпровідних кубітів і в [248] для рідбергівських атомів. Аналогічно, інша операція з двома кубітами - контрольоване HI (CNOT) - може бути реалізована [246, 249]. Важливо, що цей підхід дозволяє швидко виконувати й двокубітні операції з високою точністю. За умови наявності одно- та двокубітових операцій,

наступним кроком може бути реалізація квантових алгоритмів.

Деструктивна інтерференція може бути використана для виконання унітарних перетворень, заснованих на періодичній еволюції, до яких відноситься процес, в якому стан система повертається до початкового стану після гейту [250]. В результаті такої еволюції з деструктивною інтерференцією (тобто когерентного руйнування тунелювання [КРТ]), вектор стану накопичує лише фазу. Ця фаза, набута в процесі еволюції, містить як динамічні, так і геометричні компоненти; див. детальні та педагогічні пояснення у додатковому матеріалі [250], а про зв'язок з фазою Беррі, див. [251, 252, 253].

Геометрична фаза може бути пов'язана з тілесним кутом, віднятим від кривої еволюції на сфері Блоха. Цей аналіз відкриває нові способи інтерпретації та контролю; це називається *геометрична інтерферометрія ЛЗШМ* [80]. Оскільки ми можемо виконувати будь-які логічні операції за допомогою цього методу, тому він надає інструменти для *геометричних квантових обчислень*. Це багатообіцяючий підхід для досягнення надійного керування квантовою системою [254, 255, 256].

4.3 Висновки

Продемонстровано, як адіабатично-імпульсна модель може використовуватись для реалізації однокубітних гейтів [3]. Адіабатично-імпульсна модель застосовна для квантових гейтів з двома умовами: велика амплітуда збудження $A > \Delta$, і час між переходами більший, ніж час, необхідний для перехідного процесу. Це уможливорює створення швидких кубітних гейтів, які керуються виключно за допомогою імпульсів базової резонансної смуги, що зменшує потребу в імпульсних мікрохвильових керуючих сигналах. Швидкість та точність АІМ дозволяє легко розрахувати параметри, необхідні для реалізації швидких та точних гейтів ЛЗШМ. Маючи швидші гейти можливо зробити більше операцій до того моменту, як взаємодія з навколишнім середовищем призведе до суттєвої втрати точності квантових розрахунків.

РОЗДІЛ 5

КУБІТ ПЕРЕД ДЗЕРКАЛОМ

Останніми роками надпровідні штучні атоми [257], які з'єднані з відкритим хвилеводом лінії передачі, стали галуззю, що швидко зростає, яка називається хвилевідною квантовою електродинамікою (хв-КЕД), що забезпечує унікальну платформу для дослідження взаємодії атомів зі світлом. Унікальність хвилевідної КЕД, порівняно зі звичайною порожнинною КЕД, полягає в тому, що атоми пов'язані з континуальними модами електромагнітного (ЕМ) поля у хвилеводі. До цікавих проблем хв-КЕД належить резонансна флуоресценція штучного атома [258], фотонно-опосередкована взаємодія між віддаленими штучними атомами [259], атом перед дзеркалом [260], динаміка в атомоподібних дзеркалах [261], маршрутизація фотонів [262], генерація неklasичних мікрохвиль [263], перехресний ефект Керра [264], підсилення без інверсії заселеності [265], колективний зсув Ламба між двома віддаленими штучними атомами [266], надсильний зв'язок [267], квантова нарізка [268], ймовірнісне усереднення по руху [269] та динамічний ефект Казимира [270, 271, 272].

Коли дворівнева система коливається туди-сюди навколо своєї резонансної частоти, вона створює інтерференцію Ландау-Зінера-Штукельберга-Майорани (ЛЗШМ). Інтерферометрія ЛЗШМ [93, 273, 55] вивчалася в атомних системах [274], квантових точках [275, 276], зарядових і спінових кубітах [277, 278] та надпровідних кубітах у порожнині [279, 280, 281, 282], серед інших. Однак ефект ЛЗШМ не досліджувався з одним штучним атомом перед дзеркалом, де штучний атом зв'язаний з континуумом мод ЕМ поля у хвилеводі лінії передачі, і атом інтерферує зі своїм дзеркальним зображенням, як у роботах [2, 260, 283].

Інтерферометрія ЛЗШМ важлива як для опису системи, так і для керування [284, 285]. Однак для того, щоб це було реалізовано, потрібно мати квазіперетин енергетичних рівнів у спектрі, як функцію параметрів збудження. Одним із прикладів систем без цієї проблеми є надпровідні кубіти типу трансмон, де енергетичні рівні майже не залежать від напруги на затворі. Спосіб виправити це було досліджено в роботі [286], в якій вивчався кубіт за допомогою додаткового збудження мікрохвильовою частотою, що

призводить до одягнених станів з квазіперетином рівнів. Тут ми вивчаємо кубіт типу трансмон, збуджений двома полями (див. також посилання [185]). Одне з них одягає кубіт і створює спектр з квазіперетином рівнів, а друге змушує систему періодично проходити навколо квазіперетину рівнів. Це дає змогу вивчати інтерферометрію ЛЗШМ у кубіті, розміщеному перед дзеркалом. *Дзеркало, дзеркало* коротко описує цю систему, оскільки кубіт діє як ще одне дзеркало.

5.1 Надпровідний кубіт перед дзеркалом

Тут ми досліджуємо інтерферометрію ЛЗШМ надпровідного кубіта в напівнескінченній лінії передачі, яка закінчується дзеркалом. Зокрема, кубіт розташований у вузлі резонансного ЕМ поля, де він ховається від ЕМ поля. Потім ми модулюємо резонансну частоту кубіта, подаючи синусоїдальну хвилю через вбудований насос потоку. Крім того, кубіт також з'єднаний з сигналом від мікрохвильового зонда, що подається на лінію передачі. Потім проводимо спектроскопію системи, подаючи слабе зондувальне поле вздовж лінії передачі, вимірюємо коефіцієнт відбиття. У спектрі з'являються цікаві інтерференційні картини, які можна пояснити багатофотонними резонансами в одягненому кубіті. З'являються нові особливості, порівняно зі звичайною інтерференцією ЛЗШМ; наприклад, тепер зникає резонансна смуга Рабі нульового порядку (див. також посилання [287]).

Трансмоновий кубіт [288, 289, 290] вмонтовано в напівнескінченну лінію передачі з характеристичним імпедансом $Z_0 \simeq 50\Omega$, з основним станом $|0\rangle$ і збудженим станом $|1\rangle$. У цьому випадку $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ енергія переходу дорівнює

$$\hbar\omega_{10}(\Phi) \approx \sqrt{8E_J(\Phi)E_C} - E_C, \quad (5.1)$$

яка визначається енергією заряду одного електрона $E_C = e^2/2C_\Sigma$, де C_Σ - повна ємність кубіта, та залежною від потоку енергією Джозефсона $E_J(\Phi) = E_{J,\max} |\cos(\pi\Phi/\Phi_0)|$; $\Phi_0 = h/2e$ - квант магнітного потоку. Відношення E_C/E_J визначає ангармонійність кубіта.

Поле накачки з частотою ω_{pump} застосовується до лінії потоку на кристалі, синусоїдально модулюючи частоту переходу кубіта. Основні

Значення	Опис	Діапазон
ω_{10}	кубітна частота, $\omega_{10} = \omega_{10}(V)$	$\simeq \omega_{\text{node}}$
δ	амплітуда накачки; $\delta = \delta(P_{\text{pump}})$	$\sim 0.1 \text{ GHz} \cdot 2\pi$
ω_{pump}	частота накачки	$< 0.1 \text{ GHz} \cdot 2\pi$
ω_p	частота зонда	$\simeq \omega_{\text{node}}$

Табл. 5.1: Таблиця керованих параметрів. Тут $\omega_{\text{node}} = 4.75 \text{ GHz} \cdot 2\pi$.

параметри наведено у таблиці 5.1.

5.2 Теоретичний опис

Розглянемо тепер гамільтоніан кубіта. Завдяки дзеркалу, напруга на лінії електропередачі у точці з'єднання кубіта, $x = L$, пропорційна $\cos(\omega_p L/v)$. Коли цей множник дорівнює нулю, це дає частоту вузла ω_{node} , причому $\cos(\omega_{\text{node}} L/v) = 0$. Для малих частотних зсувів,

$$\delta\omega = \omega_p - \omega_{\text{node}} \ll \omega_p, \quad (5.2)$$

ми можемо розкласти косинус у ряд; тоді замість $\cos(\omega_p L/v)$, матимемо $\Delta\omega/\omega_{\text{node}}$. Це означає, що при $\Delta\omega = 0$ кубіт буде “приховано” або “від'єднано” від лінії електропередачі. Отже, маємо гамільтоніан

$$H = -\frac{B_z}{2}\sigma_z - \frac{B_x}{2}\sigma_x, \quad (5.3)$$

в якому діагональна частина є модуляцією енергетичного рівня

$$B_z/\hbar = \omega_{10} + \delta \sin \omega_{\text{pump}} t, \quad (5.4)$$

а недіагональна частина описує зв'язок з сигналом зонда

$$B_x/\hbar = G \sin \omega_p t. \quad (5.5)$$

Важливо, що тут константа зв'язку G пропорційна частоті зсуву $\Delta\omega$,

$$G = G_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{node}}}, \quad (5.6)$$

де G_0 пропорційна амплітуді зондувального сигналу. Спостережуваною величиною є коефіцієнт відбиття r , а саме його відхилення від одиниці. Вплив кубіта полягає у придушенні r . Таким чином, слідуючи роботі [279, 280, 285], ми пов'язуємо коефіцієнт відбиття з ймовірністю зайняття верхнього рівня кубіта P_1 . Це буде проаналізовано в наступному підрозділі.

5.2.1 Гамільтоніан

У цьому додатку описано, як ми отримуємо гамільтоніан (5.3) для кубіта перед дзеркалом, схематично показаного на рис. 5.1, див. також посилання[291].

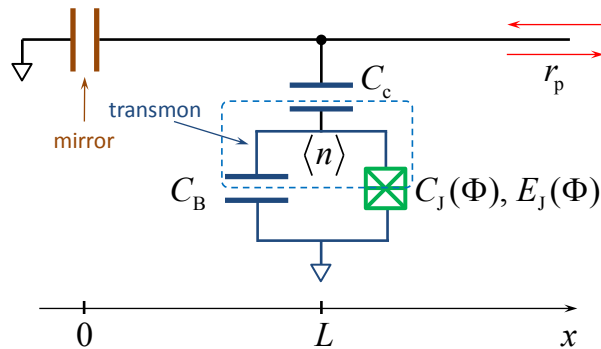


Рис. 5.1: Схематична схема зарядового кубіту зашунтованого ємністю перед дзеркалом. Кубіт і лінія передачі з'єднані через ємність C_c . Лінія передачі зміщена зондуючим сигналом і вимірюється коефіцієнт відбиття r_p . Лінія закінчується конденсатором, який відіграє роль дзеркала. Кубіт типу трансмон складається з джозефсонівських переходів, які описуються залежною від потоку ємністю $C_J(\Phi)$, зашунтованою ємністю C_B .

Лінія передачі описується напругою $V(x, t)$ та струмом $I(x, t)$:

$$V(x, t) = V(x)e^{i\omega_p t}, \quad I(x, t) = I(x)e^{i\omega_p t}, \quad (5.7)$$

3

$$V(x) = V_+ e^{ikx} + V_- e^{-ikx}, \quad (5.8)$$

$$I(x) = -\frac{V_+}{Z_0} e^{ikx} + \frac{V_-}{Z_0} e^{-ikx}, \quad (5.9)$$

де $k = \omega_p/v$. Завдяки відбиттю від дзеркала при $x = 0$, маємо $I(0) = 0$, $V_- = V_+$ і $V(x) = 2V_+ \cos(kx)$ для $x \in (0, L)$.

Кубіт типу трансмон описується числом $\langle n \rangle$ куперівських пар на ньому, а числовий оператор n задається матрицею Паулі [292]

$$n = \left(\frac{E_J}{32E_C} \right)^{1/4} \sigma_x. \quad (5.10)$$

Якщо взяти тут $\hbar\omega_{10} \approx \sqrt{8E_C E_J}$, маємо

$$n = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{10}}{E_C}} \sigma_x. \quad (5.11)$$

Тоді, записавши заряди відповідних пластин конденсатора, отримаємо острівну напругу [293]

$$V_I = \frac{2e}{C_\Sigma} n - \frac{C_c}{C_\Sigma} V(L, t), \quad (5.12)$$

Тоді, записавши заряди відповідних пластин конденсатора, отримаємо острівну напругу [293]

$$V_I = \frac{2e}{C_\Sigma} n - \frac{C_c}{C_\Sigma} V(L, t), \quad (5.13)$$

де $C_\Sigma = C_J + C_B + C_c$. За допомогою цього ми можемо записати гамільтоніан кубіта типу трансмон, з'єднаного з лінією передач, який можна переписати

(опускаючи с-числа) так

$$\begin{aligned} H_c &= \frac{1}{2} C_c [V(L, t) - V_1]^2 \rightarrow C_c V(L, t) V_1 \rightarrow \\ &\rightarrow eV_+ \frac{C_c}{C_\Sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{10}}{E_C}} \cos\left(\frac{\omega_p L}{v}\right) \sin(\omega_p t) \sigma_x. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Для малого зсуву частоти $\Delta\omega = \omega_p - \omega_{\text{node}} \ll \omega_p$, маємо

$$\cos\left(\frac{\omega_p L}{v}\right) \approx \frac{\pi \Delta\omega}{2 \omega_{\text{node}}}, \quad (5.15)$$

з $\cos(\omega_{\text{node}} L/v) = 0$. Тоді гамільтоніан (5.14) описує недіагональну частину гамільтоніану кубіту типу трансмон (5.3) з

$$\begin{aligned} G &= G_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_{\text{node}}}, \\ G_0(V_+) &= \frac{\pi C_c}{\hbar C_\Sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{10}}{E_C}} eV_+. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Це записано як рівняння (5.5).

Розглянемо далі діагональну частину гамільтоніану кубіту типу трансмон, яку дає розщепленням на рівні енергії в рівнянні (5.1). Потік містить постійну та змінну компоненти, $\Phi = \Phi_{\text{dc}} + \Phi_{\text{ac}} \sin(\omega_{\text{pump}} t)$. Вважаючи останню величину малою, отримаємо

$$\hbar\omega_{10} = \hbar\omega_{10}(\Phi_{\text{dc}}) + \hbar\delta(\Phi_{\text{ac}}) \sin(\omega_{\text{pump}} t), \quad (5.17)$$

де $\delta(\Phi_{\text{ac}}) \propto \Phi_{\text{ac}}$ це амплітуда збудження. В основному тексті це записано як рівняння (5.4).

5.2.2 інтерференція ЛЗШМ зустрічається з багатифотонними збудженнями

Щоб вилучити швидкий рух з гамільтоніаном, виконаємо унітарне перетворення $U = \exp(-i\omega_p \sigma_z t/2)$ та наближення хвиль що обертаються

[280, 294]. Новий гамільтоніан має вигляд

$$H_1 = -\frac{\hbar\widetilde{\Delta\omega}}{2}\sigma_z + \frac{\hbar G}{2}\sigma_x, \quad (5.18)$$

де

$$\widetilde{\Delta\omega} = \Delta\omega + f(t), \quad (5.19)$$

$$\Delta\omega = \omega_p - \omega_{10}, \quad (5.20)$$

$$f(t) = \delta \sin \omega_{\text{pump}} t. \quad (5.21)$$

Власні стани гамільтоніана H_1 можна назвати одягненими станами, оскільки вони включають мікрохвильовий рух у кубітоподібному гамільтоніані (5.18). Ці одягнені стани мають енергетичні рівні, які визначаються з рівняння (5.18):

$$\widetilde{E}_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{G^2 + \widetilde{\Delta\omega}^2}. \quad (5.22)$$

Це проілюстровано на рис.5.2. Динаміку системи, зображеної на рис.5.2, можна зручно описати у вигляді інтерференції ЛЗШМ [55]. Будучи збудженою повільним сигналом $f(t)$, система періодично еволюціонує навколо $\widetilde{\Delta\omega} = \Delta\omega$. Коли система наближається до квазіперетину рівнів, де різниця енергій $\Delta\widetilde{E} = \widetilde{E}_+ - \widetilde{E}_-$ має мінімум, рівний $\hbar G$, система може бути частково збуджена за допомогою переходів ЛЗШМ. Періодично перетинання квазіперетину породжує інтерференцію. Що описується фазою, накопиченою вектором-станом за один період

$$\zeta = \int_0^{2\pi/\omega_{\text{pump}}} dt \Delta\widetilde{E}/\hbar \approx \Delta\omega \frac{2\pi}{\omega_{\text{pump}}}. \quad (5.23)$$

Тут під наближенням мається на увазі припущення про мале розщеплення і сильну рушійну силу: $G \ll \delta$. Коли фаза ζ дорівнює $2\pi k$, з цілим числом k , система є резонансно збудженою. Тоді, починаючи з $\zeta = 2\pi k$ умова резонансу набуває вигляду

$$\Delta\omega = k\omega_{\text{pump}}. \quad (5.24)$$

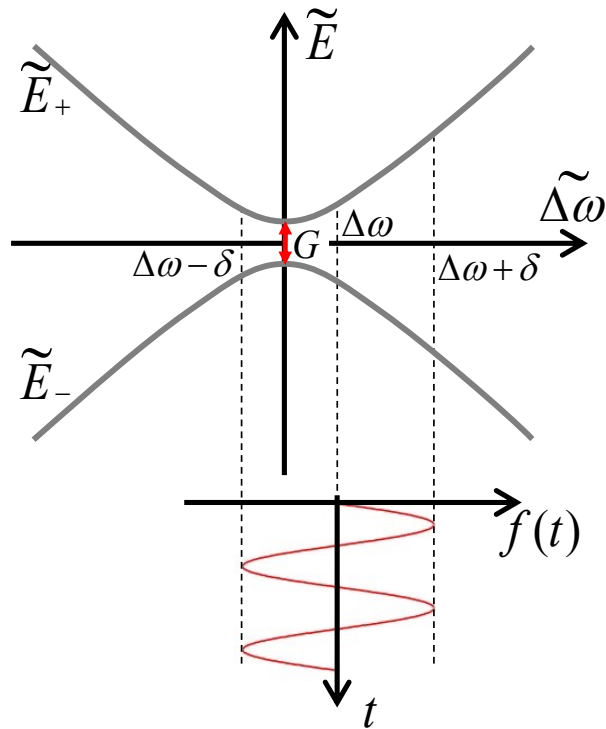


Рис. 5.2: Енергетичні рівні одягненого стану \tilde{E}_{\pm} як функція зсуву $\Delta\omega$. Синусоїдальне збудження $f(t)$, показане на внизу, змушує систему періодично еволюціонувати між $\Delta\omega - \delta$ і $\Delta\omega + \delta$. Для малих енергетичних рівнів розщеплення G і сильного збудження (з великою амплітудою δ) резонансне збудження системи можна еквівалентно описати в термінах послідовних переходів ЛЗШМ, або в термінах багатофотонних збуджень, при $\Delta\omega = k\omega_{\text{pump}}$.

Це можна інтерпретувати як багатофотонне збудження, що означає, що систему резонансно збуджено, коли одягнена енергетична щілина $\hbar\Delta\omega$ дорівнює енергії k фотонів, $k\hbar\omega_{\text{pump}}$.

Кількісно, зі стаціонарного розв'язку рівнянь Блоха з гамільтоніаном H_1 , у наближенні обертової хвилі, для ймовірності заселення верхнього рівня (див., напр. [57, 1]):

$$P_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{G_k^2}{G_k^2 + [\Delta\omega - k\omega_{\text{pump}}]^2 \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} + \Gamma_1\Gamma_2}, \quad (5.25)$$

де перенормована амплітуда збудження

$$G_k = G J_k(\delta/\omega_{\text{pump}}), \quad (5.26)$$

слідуює за осцилюючою функцією Бесселя J_k першого роду; Γ_1 та $\Gamma_2 = \Gamma_1/2 + \Gamma_\phi$ швидкості релаксації та декогеренції, причому чиста швидкість дефазування Γ_ϕ значно менша за Γ_1 . Можна знайти, що максимум P_1 справді визначається умовою (5.24). За цією формулою, рівняння (5.25), ми будемо теоретичні графіки на рис. 5.3, 5.4, та 5.5.

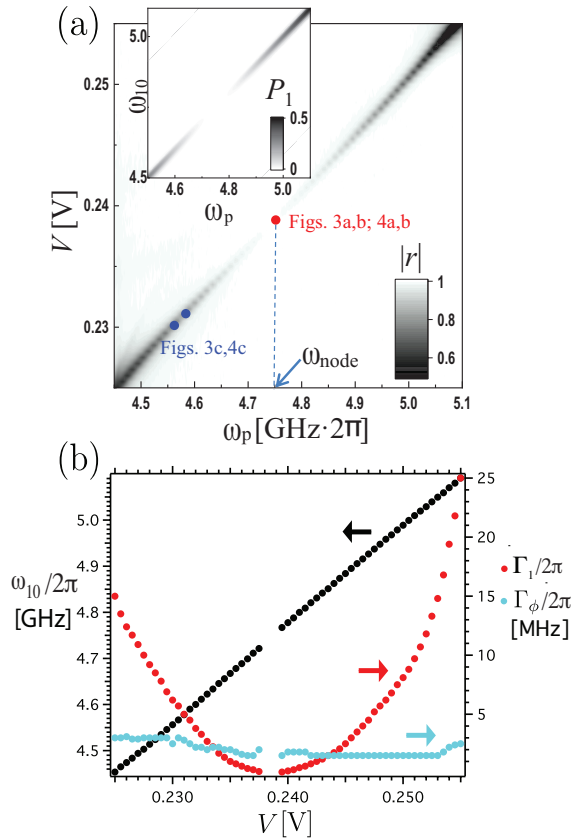


Рис. 5.3: Спектроскопія системи. (a) Амплітуда коефіцієнта відбиття $|r|$ при потужності когерентного зонduючого сигналу -130 dBm як функція частоти зонduючого сигналу ω_p і частоти кубіта ω_{10} (керована напругою V). Спектроскопія показує, як зникає відгук, коли кубіт потрапляє у вузол для ЕМ поля навколо $\omega_p = \omega_{\text{node}} \simeq 4.75$ GHz $\cdot 2\pi$, позначений маркером у вигляді пунктирної лінії. Червоною крапкою позначено точку зсуву кубіта на рис. 5.4a,b та рис. 5.5a,b. Сині точки відповідають точкам зсуву кубітів на рис. 5.4c і рис. 5.5c, відповідно. На вставці показано обчислену ймовірність зайняття верхнього рівня кубітом P_1 як функцію частоти зонduючого сигналу ω_p і частоти кубіта ω_{10} (обидві в ГГц $\cdot 2\pi$). (b) Для заданої напруги зсуву в (a) є Лоренціанський провал (дані не показано), який вказує на те, що кубіт відбиває резонансне поле зонduючого сигналу. Кубіт діє як дзеркало, відбиваючи резонансне поле. Ми знаходимо резонансну частоту ω_{10} , швидкість релаксації Γ_1 і чисту швидкість дефазування Γ_ϕ за [295], враховуючи вплив частоти Рабі. Зокрема, ми переводимо потужність зонduючого сигналу в частоту Рабі на резонансній частоті 5.05 GHz, використовуючи калібрувальні дані з роботи [266] (той самий зразок, але з іншим охолодженням). Крім того, частота Рабі на кожній резонансній частоті задається рівнянням 5.4. Нарешті, ми бачимо $\omega_{10} \propto V$; однак, загалом, для широкого діапазону зсуву напруги це не так; див. деталі залежності потоку в [266].

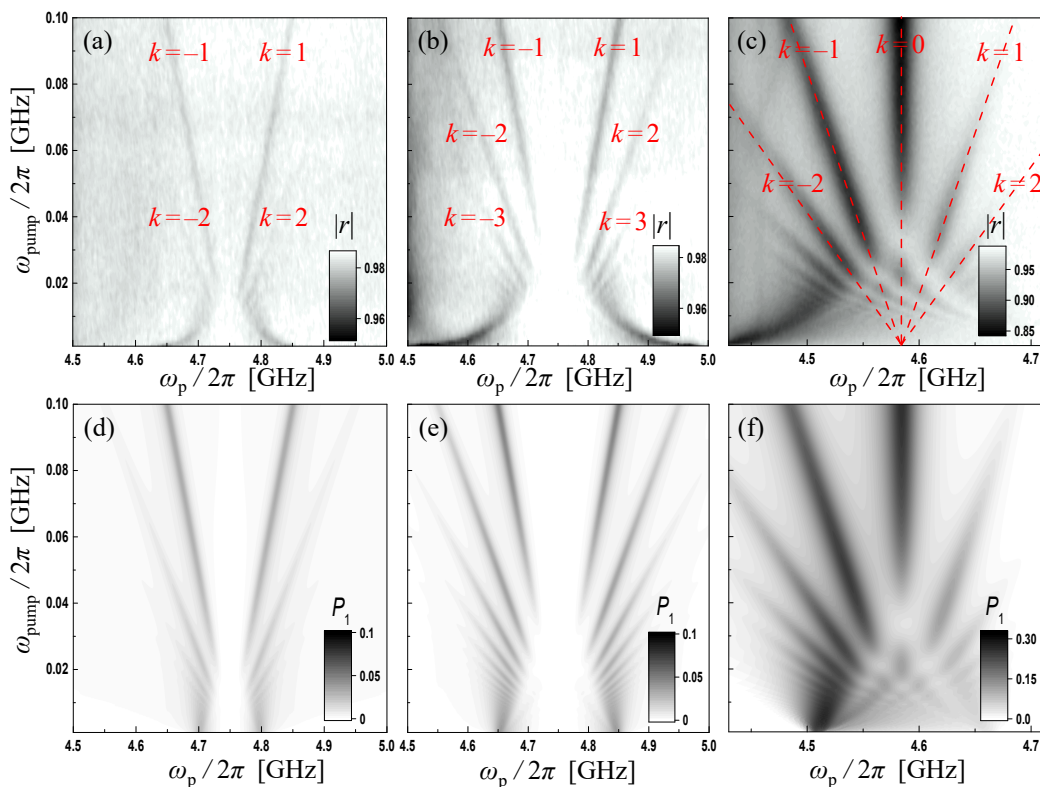


Рис. 5.4: Синусоїдальна модуляція кубіта потоковою накачкою, з резонансною частотою при фіксованій потужності накачки P_{pump} . Амплітудний коефіцієнт відбиття $|r|$ для слабого когерентного зондуючого сигналу як функція частоти зонда ω_p і частоти накачки ω_{pump} ; (a,b,c) - експериментальні дані, (d,e,f) - наші теоретичні розрахунки. (a) Кубіт зміщений на частоті $\omega_{\text{node}} = 4.75 \text{ GHz} \cdot 2\pi$, потужність накачки за потоком фіксована на рівні $P_{\text{pump}} = -45 \text{ dBm}$. (b) Кубіт зміщений у вузлі навколо 4.75 GHz з $P_{\text{pump}} = -38 \text{ dBm}$. (c) Кубіт, зміщений на 4.58 GHz , червоним відхилений від вузла, і $P_{\text{pump}} = -38 \text{ dBm}$. Зауважте, що виникають багатофотонні резонанси, залежні від k : $\Delta\omega = k\omega_{\text{pump}}$, які показано похилими червоними пунктирними лініями. В (b) ми бачимо резонансні смуги Рабі для k від -4 до 4 . В (a) і (b) резонансна лінія Рабі при $k = 0$ зникає, тоді як в (c) резонансна лінія Рабі при $k = 0$ з'являється. Для (a) і (b) додатні k і від'ємні k резонанси симетричні, тоді як у (c) інтерференційні лінії не симетричні вздовж $k = 0$. З наближенням до вузлового режиму, поблизу 4.75 GHz , резонансні лінії стають слабшими. В (d-f) ми показуємо відповідні обчислені ймовірності заселеності верхнього рівня кубіту P_1 . Експериментально потужність накачки, досягнута на зразку, слабо залежить від частоти. Низькочастотна накачка потоку (скажімо, 1 MHz) має приблизно на один дБ більшу потужність, ніж високочастотна накачка потоку (скажімо, 20 MHz). Тому ми бачимо, що ω_{pump} на низькій частоті має більший зсув δ у даних.

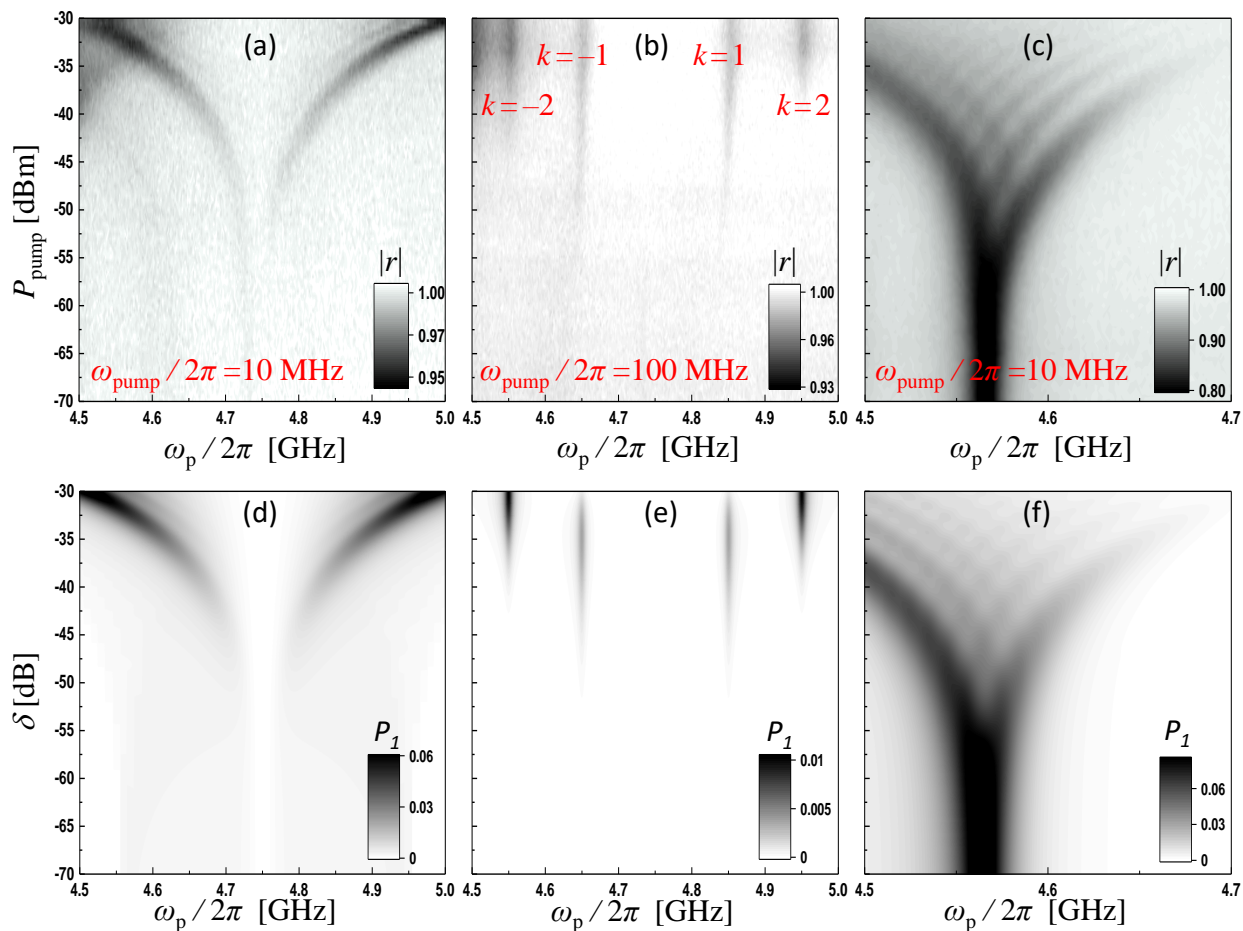


Рис. 5.5: Синусоїдальна модуляція кубіта з накачкою потоку на резонансній частоті при фіксованій частоті накачки ω_{pump} . На графіках показано залежність амплітуди коефіцієнта відбиття $|r|$ для слабого когерентного зонда від частоти зондуючого сигналу ω_p і потужності сигналу накачки P_{pump} . (a,b,c) відповідають експериментальним даним, а (d,e,f) - теорії. (a) і (b) у вузлі навколо 4.75 GHz з $\omega_{\text{pump}}/2\pi = 10$ MHz і 100 MHz, відповідно. Зверніть увагу на резонансні смуги Рабі при $\Delta\omega = k\omega_{\text{pump}}$, де $k = -2, -1, +1, +2$. Чим більша потужність накачки, тим більш розрізнені резонансні смуги видно. Зверніть увагу на появу резонансних смуг Рабі для $k = \pm 1$ і $k = \pm 2$, для -45 dBm і -35 dBm, відповідно. (c) Червоний колір для відстройкі від вузла на частоті 4.56 GHz. У (a,c) ми спостерігаємо Рабі-подібне розщеплення при збільшенні потужності накачки. В (a) ми бачимо симетричне розщеплення, тоді як в (c) є кілька асиметричних розщеплень. У (c), коли смуги наближаються до ω_{node} , вони стають слабшими. У (d-f) ми показуємо відповідні обчислені ймовірності заселеності верхнього рівня кубіту P_1 .

5.3 Деталі розрахунків та роль нелінійності

Для отримання теоретичних графіків, рис. 5.3, 5.4 та 5.5, ми розв'язуємо (5.25) в кожній точці двовимірних графіків. Амплітуда δ визначалася з найнижчої частоти накачки ω_{pump} , де зникають перші резонансні лінії, як показано жовтою подвійною стрілкою на рис. 5.6(a). Ми вибрали цей варіант, тому що в експерименті резонансні смуги зміщуються при малих ω_{pump} . Ми припускаємо, що цей зсув зумовлений нелінійністю і враховуємо його як $\delta = \delta(\omega_{\text{pump}})$ нижче.

Швидкість релаксації Γ_1 і швидкість дефазування Γ_ϕ оцінено з експериментальних даних на рис. 5.3(b). Знаходимо Γ_2 з виразу $\Gamma_2 = \Gamma_1/2 + \Gamma_\phi$. Параметр G_0 є параметром підбору і ми беремо його рівним $0.1 \text{ GHz } h$.

На рис. 5.6 показано, як ми обчислюємо інтерферограми і порівнюємо їх з експериментом. Рисунок 5.6(b) такий самий, як і рис. 5.4(f). На рис. 5.6(c) ми враховуємо нелінійність. А на рис. 5.6(c,d,e) ми бачимо добру відповідність між розташуванням і відносною глибиною резонансів в експерименті (позначено як E_{Exp}) і теорії (позначено як T_{Thy}) для високої частоти ω_{pump} , але в області з низькою частотою ω_{pump} ми бачимо збільшення простору між резонансними смугами. Теоретично, розташування резонансних смуг з $\omega_{\text{pump}} = 0$ визначається амплітудою δ , а вони розташовані на частоті $\omega_{10} \pm \delta$. З цієї різниці ми припустили, що в області низьких частот насоса, $\omega_{\text{pump}} \rightarrow 0$, амплітуда δ збільшується. Ми врахували цю нелінійність і використали цю залежність для кращого узгодження теорії з експериментом в області низьких частот накачки. Для цього замість сталої δ емпірично враховано

$$\delta'(\omega_{\text{pump}}) = \delta + (1 - \omega_{\text{pump}}/G_0)^8 \delta. \quad (5.27)$$

Тоді отримана інтерферограма, рис. 5.6(c), узгоджується з експериментальною рис. 5.6(a). Це узгодження також можна побачити на рис. 5.6(f), де коричнева крива відповідає модифікованій теорії (позначена як $T_{\text{Thy mod}}$).

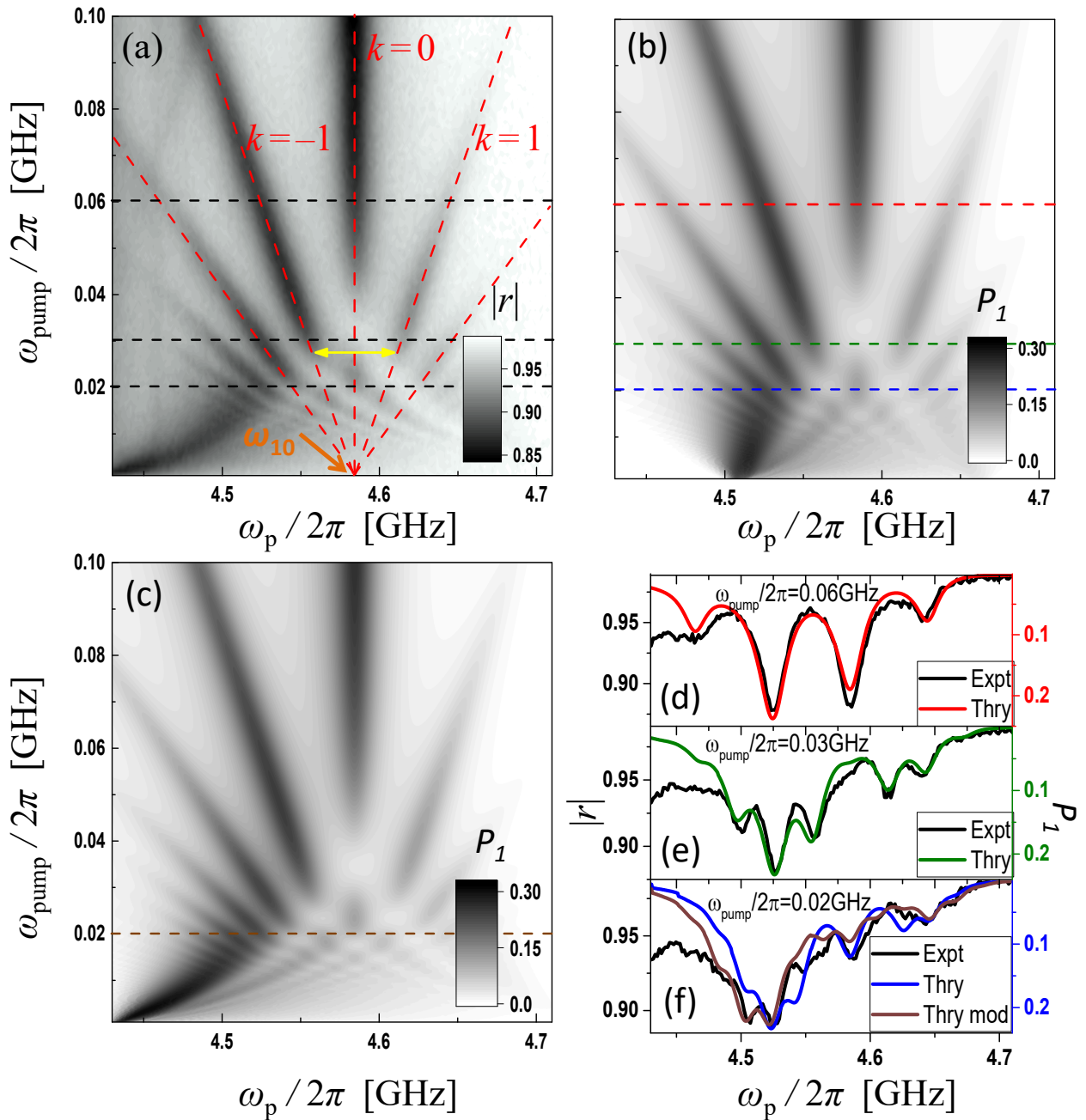


Рис. 5.6: (а) Коефіцієнт відбиття як функція частоти зонда ω_p і частоти насоса ω_{pump} , як на рис. 5.4(с). (b) Ймовірність зайнятості верхнього рівня P_1 , розрахована для тих самих параметрів, що й на рис. 5.4(ф). (с) Аналогічна інтерферограма з урахуванням феноменологічної нелінійності, (5.27). (d,e,f) Перерізи, зняті при різних значеннях частоти накачки, $\omega_{\text{pump}}/2\pi = 60, 30, 20$ МГц, відповідно. (d) і (e) демонструють узгодження теоретичних розрахунків (червона і зелена криві) з експериментальними даними з (а) (чорні криві) для високої частоти накачки, тоді як (f) демонструє відхилення теорії з постійною δ (синя крива) від експерименту. Модифікована теорія з нелінійною $\delta'(\omega_{\text{pump}})$, коричнева крива, має значно краще узгодження.

5.4 Висновки

Досліджено інтерферометрію ЛЗШМ надпровідного кубіта в напівнескінченній лінії передачі, закінченій дзеркалом [2]. Коли частота кубіта встановлена у вузлі електромагнітного поля, після накачки потоком з частотою кубіта виникають чудові інтерференційні картини, які можна інтерпретувати як багатофотонні резонанси в одягнутому кубіті. Ми бачимо багатофотонні резонанси аж до 4-го порядку. Оскільки кубіт інтерферує зі своїм дзеркальним відображенням, фотонний резонанс нульового порядку зникає. Такий ефект не з'явився б у випадку нескінченної лінії передачі. Однією з переваг такого атомно-дзеркального розташування є те, що ми можемо ефективно маніпулювати властивостями поглинання дворівневого атома, забезпечуючи новий спосіб маніпулювання квантовими системами.

РОЗДІЛ 6

КЛАСИЧНИЙ ДВІЙНИК КУБІТА

Подібність між класичною хвильовою оптикою і квантовою хвильовою механікою неодноразово було підкреслено [296, 297, 298, 299, 300]. Зокрема, в нашому контексті в літературі можна знайти численні приклади де неадіабатичні переходи між класичними станами були пов'язані з фізикою ЛЗШМ. Деякі приклади, які можна зіставити з прецесією частинки зі спіном $1/2$, яка демонструє неадіабатичні переходи типу ЛЗШМ між двома станами, модами тощо, включають такі: перетворення електромагнітних хвиль [301, 302], топологічні граничні стани в акустичних хвилеводах [178, 303], два зв'язані фотонні кристалічних нанопорожнин (що утворюють фотонну молекулу), які налаштовуються поверхнею високочастотних акустичних хвиль [304, 305], магнітоопір у квазіодновимірних органічних провідниках [306], змішування двох мод у феромагнітному сферичному резонаторі [307], оптичні моди зв'язаних рухомою мембраною в оптомеханічних системах [308, 309], дві моди механічного резонатора або двох безпосередньо зв'язаних резонаторів [310], сфера, що котиться на спіралі Корну [311]. У цих системах різні реалізації класичних аналогів коливань Рабі та переходів ЛЗШМ та інтерференції.

Зокрема, в цьому розділі показано, що система з двох слабо зв'язаних резонаторів можна описати аналогічно до квантової ДРС. А саме, ми показуємо, що за відповідних умов рівняння Ньютона для цієї класичної системи зводяться до рівняння, формально аналогічного до рівняння Шредінгера для ДРС. Як наслідок, класична система може відображати класичний аналог переходів ЛЗШМ та інтерференції. Крім того, будь-яка фізична система, яку можна відобразити на дворезонаторну систему зі слабким зв'язком, може поводитися аналогічно. На рис. 6.1, ми демонструємо різноманітність таких систем [1].

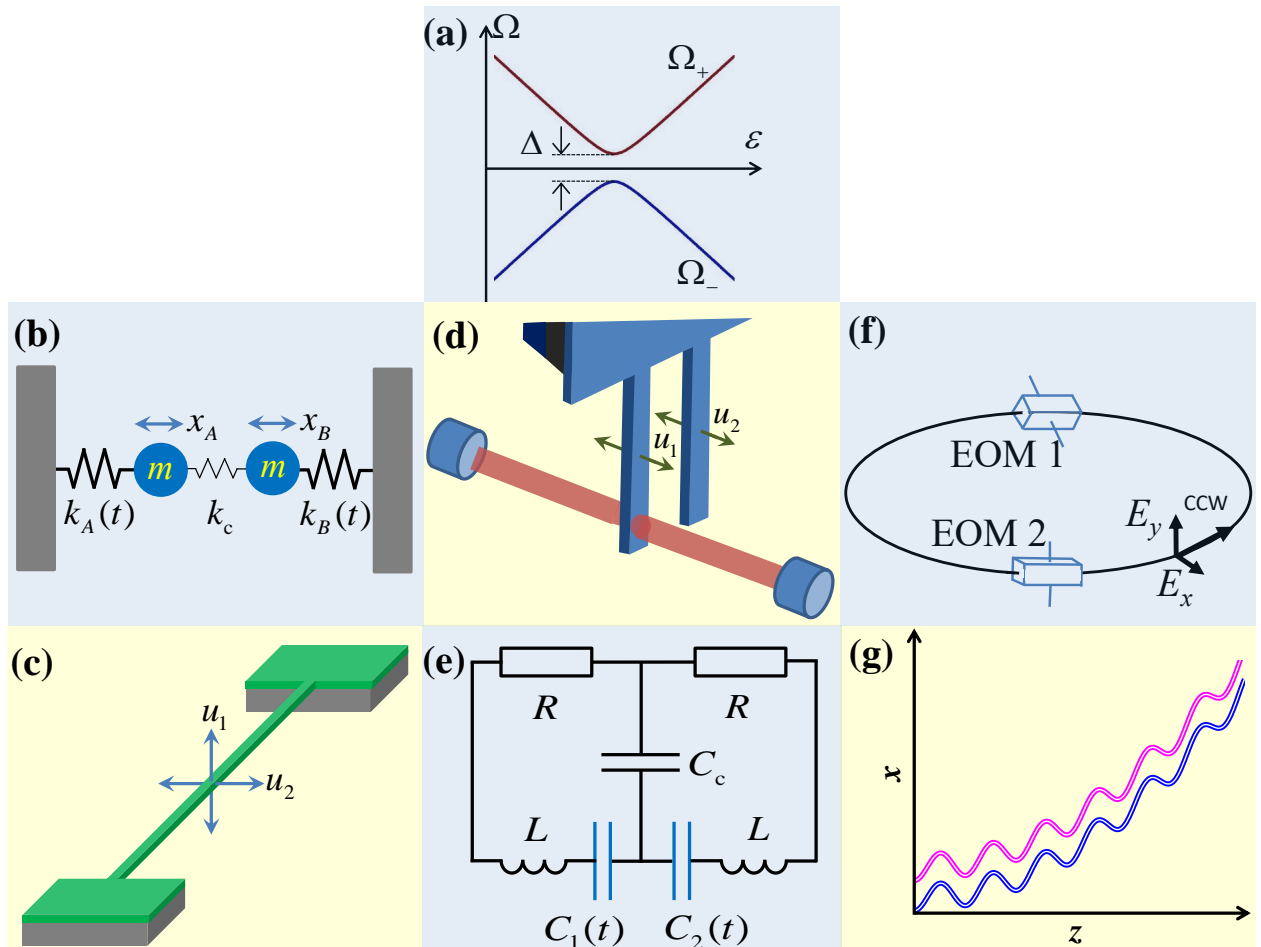


Рис. 6.1: Різні класичні системи, які поведуться аналогічно до квантовим ДРС. У (a) показано, що дві власні частоти Ω_{\pm} залежать від зсуву ε і показують квазіперетин рівнів при $\varepsilon = 0$ з мінімальною відстанню Δ . (b-g) Декілька можливих класичних систем, які мають власні частоти як у (a). А саме, (b) два слабо зв'язані пружинні осцилятори [312], (c) двомодовий нанопромінь [11, 313], (d) оптомеханічна система з двома напівзакріпленими балками, одна з яких з'єднана з оптичною порожниною [314, 315], (e) два зв'язаних електричних резонатори [316, 317], (f) два поляризаційні режими світла, що поширюється у напрямку проти годинникової стрілки (ccw) налаштовані електрооптичними модуляторами, EOM1 та EOM2, з параметром налаштування параметром настроювання ε електричне поле всередині EOM1 [318, 319], і (g) два зв'язаних вигнутих хвилеводи, між якими поширюється електромагнітна хвиля [297, 49].

6.1 Від Ньютона до рівняння Шредінгера

Тепер розглянемо, як класичні рівняння Ньютона для двох зв'язаних резонаторів можна зіставити з рівнянням Шредінгера для квантової дворівневої системи. Тут ми дотримуємося посилань [320, 312]. Розглянемо систему класичних рівнянь Ньютона для двох слабо зв'язаних осциляторів A і B , рис. 6.1(b),

$$\begin{cases} m_A \ddot{x}_A + \gamma_A \dot{x}_A + k_A x_A + k_c (x_A - x_B) = 0, \\ m_B \ddot{x}_B + \gamma_B \dot{x}_B + k_B x_B + k_c (x_A - x_B) = 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

де $x_{A,B}$ - координати, $m_A = m_B = m$ - маси, $\gamma_A = \gamma_B = \gamma$ - коефіцієнти затухання, $k_{A,B}$ - коефіцієнти пружності, а k_c - коефіцієнт зв'язку, який вважається слабким, $k_c \ll k_{A,B}$. Щоб отримати аналогію з квантовою ДРС, ми беремо збудження у вигляді $k_{A,B} = k_0 \pm \Delta k(t)$ з $\Delta k \ll k_0$. Позначимо зсунуту взаємодією власну частоту $\Omega_0^2 \equiv (k_0 + k_c)/m$, і перепишемо цю систему класичних рівнянь Ньютона у матричній формі, використовуючи матриць Паулі:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{d}{dt} + \Omega_0^2 \right) \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} - \left(\frac{k_c}{m} \sigma_x + \frac{\Delta k(t)}{m} \sigma_z \right) \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = 0. \quad (6.2)$$

Використаємо анзац

$$\frac{\tilde{x}_{A,B}(t)}{x_0} = \psi_{A,B} \exp(i\Omega_0 t), \quad x_{A,B} = x_0 \operatorname{Re} \tilde{x}_{A,B}. \quad (6.3)$$

Тут x_0 - початкове відхилення пружин, яке використовується для нормалізації $\tilde{x}_{A,B}$. Отримуємо рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + (\gamma + 2i\Omega_0) \frac{d}{dt} + i\Omega_0 \gamma \right) \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} - \left(\frac{k_c}{m} \sigma_x + \frac{\Delta k(t)}{m} \sigma_z \right) \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = 0. \quad (6.4)$$

Ми можемо спростити це рівняння за допомогою двох припущень

$$\gamma \ll \Omega_0 \text{ and } k_c, \Delta k \ll k_0. \quad (6.5)$$

Перше припущення про малу дисипацію дозволяє нехтувати γ у порівняно з Ω_0 . Друге припущення, разом з анзацом (6.3), дозволяє використовувати наближення повільною змінюваної оминаючої, що полягає в нехтуванні другою похідною. Це означає, що $\psi_{A,B}$ мають малі зміни на проміжку часу $2\pi/\Omega_0$; іншими словами, характерна швидкість еволюції для $\psi_{A,B}$ набагато менша, ніж для Ω_0 . Крім того, припущення $\Delta k \ll k_0$ означає, що ми не можемо досягти швидкого переходу, де $v \rightarrow \infty$ і $|\psi_A^2(t)| \rightarrow \theta(t)\mathcal{P}$. Використовуючи ці припущення, ми отримаємо Шредінгероподібне рівняння

$$i \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H(t) |\psi\rangle - i \frac{\gamma}{2} |\psi\rangle, \quad (6.6)$$

де $|\psi\rangle = (\psi_A, \psi_B)^\top$ а $H(t)$ - гамільтоніан рівняння (2.1) з

$$\Delta = \frac{k_c}{m\Omega_0} \approx \frac{k_c}{\sqrt{mk_0}}, \quad \varepsilon(t) = \frac{\Delta k(t)}{m\Omega_0} \approx \frac{\Delta k(t)}{\sqrt{mk_0}}. \quad (6.7)$$

Подібно до кубітів, механічними резонаторами можна збуджувати за допомогою $\Delta k(t)$, щоб мати і зсув, і періодичне збудження, маємо $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + A \cos \omega t$. Зауважимо, що задача рівняння (6.6) можна описати в термінах неермітового гамільтоніану [61].

За відсутності дисипації $\gamma = 0$, рівняння (6.6) формально збігається з рівнянням Шредінгера для ДРС, рівняння (2.65), у природній системі вимірювання, тобто за умови, що $\hbar = 1$. Дисипацію можна усунути заміною $|\psi\rangle = |\bar{\psi}\rangle \exp(-\gamma t/2)$; тоді класичне рівняння Шредінгера (6.6) набуває вигляду $i \frac{d}{dt} |\bar{\psi}\rangle = H(t) |\bar{\psi}\rangle$. Крім того, слід використовувати параметр “матрицю густини” можна подати у вигляді $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$, де $\langle \psi| := (\psi_A^*, \psi_B^*)$. Тоді для похідної отримаємо

$$\dot{\rho} = -i [H, \rho] - \gamma \rho. \quad (6.8)$$

Це збігається з рівнянням Блоха для ДРС, рівняння (3.112), для гамільтоніану

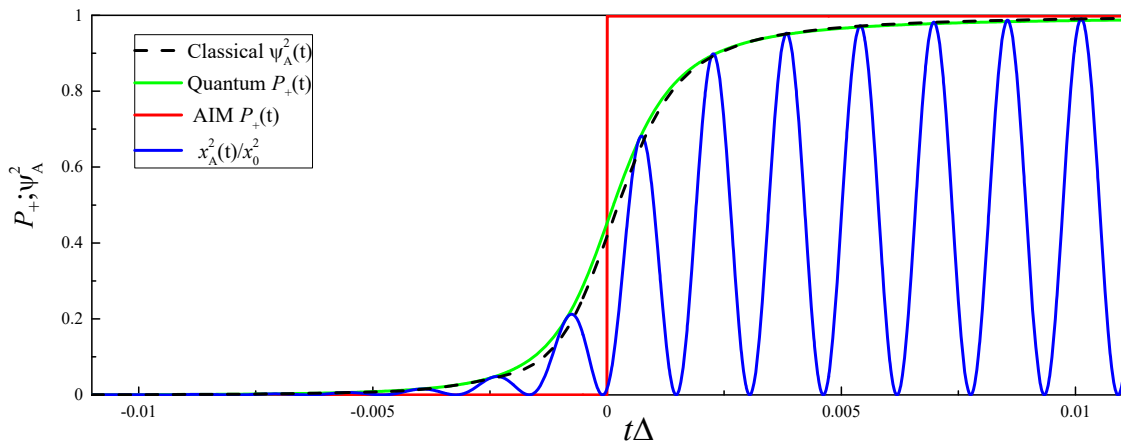


Рис. 6.2: Одноразовий перехід у класичному та квантовому випадках. Тут ми порівнюємо розв'язки класичних рівнянь Ньютона, рівняння (6.2), рівняння Шредінгера та рівняння (2.65) для переходу ЛЗШМ. Для ілюстрації ми беремо параметри так, щоб кінцева ймовірність збудження близька до одиниці, $\mathcal{P} \approx 1$. Класичне перенесення енергії класичне перенесення енергії з однієї гармоніки на іншу показано чорною лінією $|\psi_A^2(t)|$, яка практично збігається з квантовою ймовірністю зайняття верхнього рівня $P_+(t)$, зелена лінія. Крім того, червона крива показує AIM, яка розглядалася вище і позначається тут $\theta(t)\mathcal{P}$; синя крива показує класичні коливання $x_A^2(t)/x_0^2$.

$H(t)$, і якщо припустити, що $\hbar = 1$ і швидкості релаксації рівні, то $T_1 = T_2 = 1/\gamma$.

Це означає, що ми можемо використовувати ті самі методи для розв'язання класичних і квантових систем. Цікаво, що історично неадіабатичні переходи між двома станами вперше було вивчена і розроблено для квантової ДРС, і лише згодом було визначено, що вона має класичний аналог. Зокрема, теорія Зінера допомогла описати зв'язані маятники в роботі [321].

В системі двох зв'язаних класичних осциляторів дві власні частоти аналогічні до двох енергетичних рівнів для квантової ДРС; це власні значення гамільтоніана вище

$$\Omega_{\pm} = \pm \sqrt{\Delta^2 + \varepsilon_0^2}. \quad (6.9)$$

Ймовірність зайняття енергетичних рівнів у квантовій ДРС є аналогом квадрата амплітуди коливань $|\psi_{A,B}|^2$; іншими словами, вона пропорційна кількості енергії у цьому режимі коливань. Щоб ще раз продемонструвати

подібність класичної задачі до її квантового аналога, на рис. 6.2, ми розглядаємо одноразовий перехід подібний до переходу ЛЗШМ з $\varepsilon(t) = vt$, і вибираємо такі параметри: $\Delta_c/k_0 = 5 \times 10^{-4}$ для класичного випадку та $\delta = \delta_{cl} \equiv k_c^2/4v = 3.57 \times 10^{-4}$ для обох випадків. Це демонструє, що за умов (6.5), класична оминаюча $|\psi_A(t)|^2$ відповідає ймовірності квантового заселення $P_+(t)$. Цей принцип можна застосувати до будь-якої класичної системи двох зв'язаних резонаторів зі слабким зв'язком.

Когерентні явища в класичних механічних системах були надійно експериментально; див. підпис до рис. 6.1. Зокрема, реалізовано інтерферометрію ЛЗШМ на механічних резонаторах в роботах [322] та [323, 324]. Подальші теоретичні дослідження таких процесів див. в роботах [325, 326, 327, 328].

6.2 Розв'язок рівняння типу Шредінгера, затухання коливань Рабі.

Спочатку розглянемо режим Рабі зі синусоїдальним збудженням зі слабкою амплітудою. Для розрахунків вибираємо резонансну частоту, $\omega = \omega_0$ з $\varepsilon_0 = 5\Delta$, слабку амплітуду $A = 0.7\omega$ і велику релаксацію $\gamma = 0.006\omega$, для того, щоб побачити затухання коливань Рабі. На рис. 6.3, товста крива показує чисельний розв'язок точного рівняння (6.4), тонка чорна крива - для чисельного розв'язку наближеного рівняння Шредінгера, подібного до рівняння Шредінгера (6.6), а пунктирна крива зображує аналітичний розв'язок, рівняння (3.56). Подібно до своїх квантових аналогів, класичні осциляції з'являються за тих самих умов слабого резонансного збудження і мають подібний вираз для частоти Рабі. Важливою відмінністю є те, що коливання релаксують до нуля, на відміну від квантового випадку, де резонансні коливання призводять до стаціонарного стану з ненульовою заселеністю збудженого стану. Можна зробити висновок з рис. 6.3, для нетривіальних результатів потрібно усереднювати до того, як система релаксує. Це означає, що аналогове моделювання квантової системи має бути реалізоване як динаміка класичної системи на часових масштабах $\Delta t < \gamma^{-1}$. Зокрема, для резонансного збудження, як на рис. 6.3 після усереднення коливальної динаміки отримаємо $|\overline{\psi_+}|^2 \sim 0.5$ для $\gamma\Delta t \ll 1$, причому ця

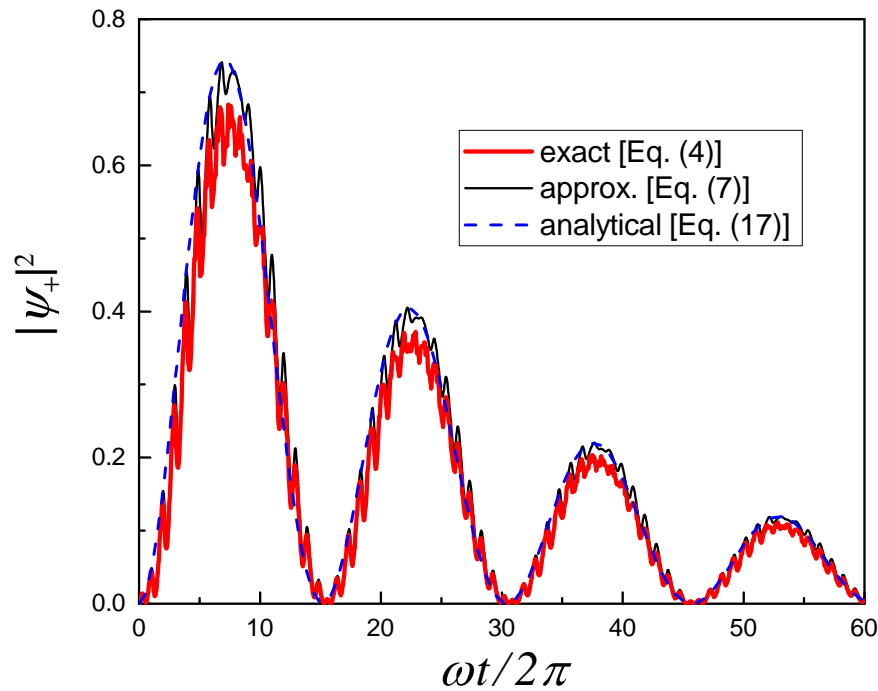


Рис. 6.3: Класичні Рабі-подібні коливання. Коли система з двома станами керується резонансним сигналом, з $\omega = \omega_0$, заселеність верхнього рівня $|\psi_+|^2$ демонструє затухання коливань з частотою Рабі Ω_R . Три рядки показують розв'язки точних рівнянь (4), наближені (7), та аналітичний розв'язок рівняння (17).

величина зменшується зі збільшенням $\gamma\Delta t$.

6.2.1 Інтерферометрія ЛЗШМ

Тепер розглянемо систему класичних осциляторів у режимі сильного збудження де для керованого кубіта у тому ж режимі має місце інтерференція ЛЗШМ. На рисунку 6.4 показано усереднену за часом заселеність верхнього рівня $|\overline{\psi_+}|^2$ як функцію зсуву ε_0 та амплітуди руху A . За допомогою чисельного розв'язку точного рівняння (6.4) для відносно високих і низьких частот ($\omega \gtrless \Delta$), отримано інтерферограми на Рис. 6.4(a) та (b). Вони є аналогічними до тих, що отримано для різноманітних кубітних систем, див. посилання [55]. Точніше кажучи, інтерферограми на рис. 6.4(a) і (b) ідентичні до рис. 7(b) і рис. 8(b) в [55], відповідно. Див. також роботу [329]. [329], де нещодавно аналогічну інтерферограму розраховано для електромеханічного пристрою на основі квантових точок.

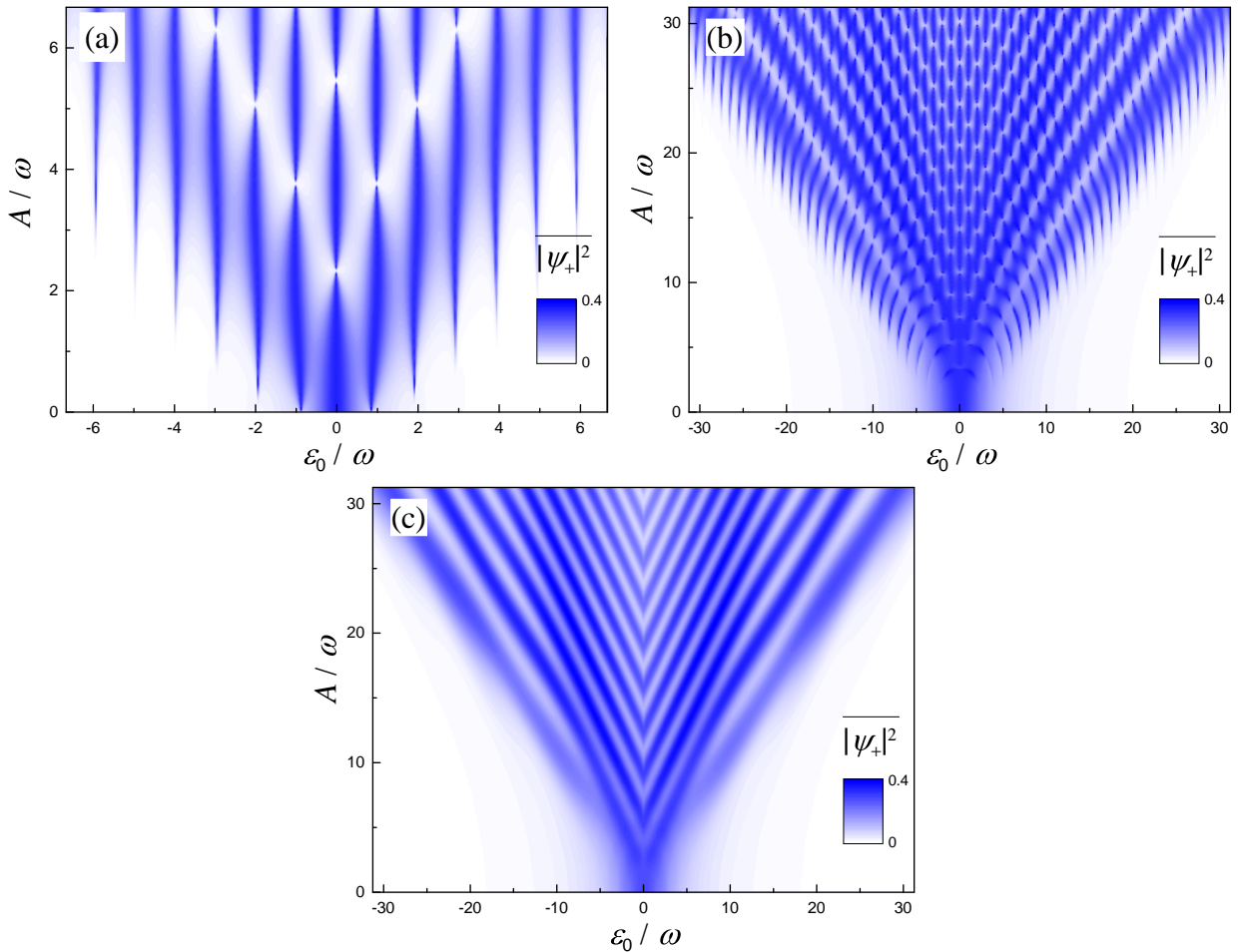


Рис. 6.4: Інтерферограми ЛЗШМ для двох класичних осциляторів, див. роботу [55]. В (а) та (б) ми представляємо випадки зі швидким та повільним збудженням з $\omega/\Delta = 2$ та $1/3$, відповідно, для малого затухання, тоді як панель (с) демонструє випадок сильнішого затухання для $\omega/\Delta = 1/3$;

Крім того, рис. 6.4(с) демонструє випадок відносно сильнішого затухання, коли інтерференційні смуги з'являються переважно за рахунок сусідніх двох переходів, де резонанси утворюють характерні лінії. Цей режим отримав назву квазікласичним у роботі [330], який вивчався для надпровідних і напівпровідних кубітів у [330, 331].

На рис. 6.4 наведено результати розрахунків для слабкого затухання в (а) і (б), $\gamma = 0.02 \cdot \omega/2\pi$ і $\gamma = 0.1 \cdot \omega/2\pi$, відповідно, та для сильнішого затухання в (с), $\gamma = \omega/2\pi$. Початкова зайнятість дорівнювала нулю, $\psi_+(t = 0) = 0$, як на рис. 6.3, а потім ми усереднено для інтервалу часу $\Delta t \sim \gamma^{-1}$. А саме ми взяли $\Delta t = 50, 8, 1 \cdot 2\pi/\omega$ для трьох панелей на рис. 6.4, відповідно. Якщо ми вибрати $\gamma\Delta t \ll 1$ або $\gamma\Delta t \gg 1$, ми отримаємо подібні дані, як на

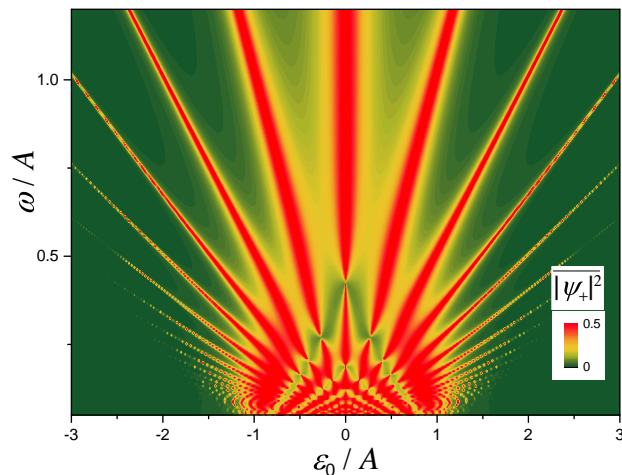


Рис. 6.5: Залежність інтерферограми ЛЗШМ від частоти ω та зсуву ε_0 , див. [280].

рис. 6.4, але з максимальною амплітудою ближче до 0.5 або 0, відповідно. Після обговорення цього тут, для решти інтерферограм нижче ми будемо вважати, що $\gamma\Delta t \ll 1$.

Крім того, на додаток до наведених вище інтерферограм, може бути цікавою залежність від частоти збудження ω , як у посиланні [279, 280]. Ми подаємо таку діаграму на рис. 6.5. Тут амплітуда збудження A вважається сталою і її використовується для нормалізації, що відрізняється від інтерферограми на попередньому рисунку, де русійна амплітуда була змінною величиною.

6.2.2 Модуляція з фіксацією

Якщо систему збуджують прямокутними імпульсами замість синусоїдальних, вона відчуває періодичні швидкі зміни між двома станами, як це було детально обговорено у статті [280]. Таке замикання модуляції призводить до дещо схожих, але відмінних інтерференційних смуг, ніж ті, що показані вище. Для порівняння з результатами, отриманими для кубітів [280] на рис. 6.6 наведено аналогічну інтерферограму для двох зв'язаних класичних осциляторів. На рисунку 6.6 показано усереднену за часом зайнятість моди $|\overline{\psi_+}|^2$ як функцію зсуву ε_0 і частоти збудження ω . Як і на рисунках 6.5 і 6.6, тут ми отримали чудове узгодження з діаграмою,

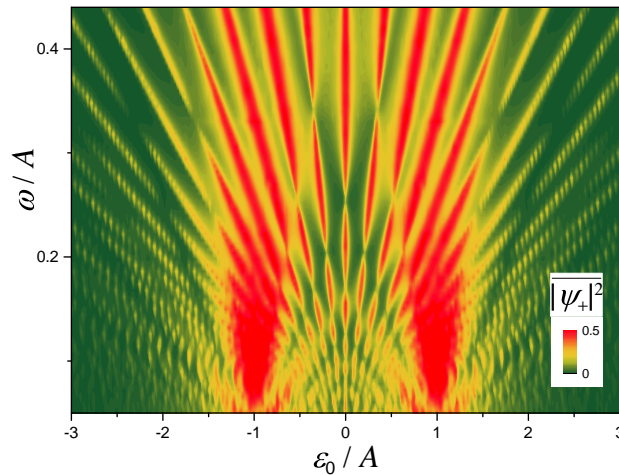


Рис. 6.6: Модуляція з фіксацією з двома класичними генераторами, див. [280]. Режим усереднення за часом зайнятості $|\psi_+|^2$ є побудовано, коли система керується прямокутними імпульсами.

отриманою нещодавно для кубіту в [280].

6.2.3 Усереднення по руху

Альтернативно до вищеописаного, система з двома станами може збуджуватись неперіодичним сигналом. Тут ми хотіли б пов'язати наші результати з роботою [279], яка допускає випадкові стрибки між $\varepsilon_1 = +A$ і $-A$. Вважається, що стрибки з'являються з середньою швидкістю стрибка χ . Тому на рис. 6.7 ми зобразили усереднену за часом заселеність $|\psi_+|^2$ як функцію відстройки ε_0 та характеристичної частоти перемикання χ . Наші дані, наведені на рис. 6.7, узгоджуються з результатом в роботі [231]. [279] в тому, що при малих χ є два піки, які зливаються (в середньому) в один при зростанні χ .

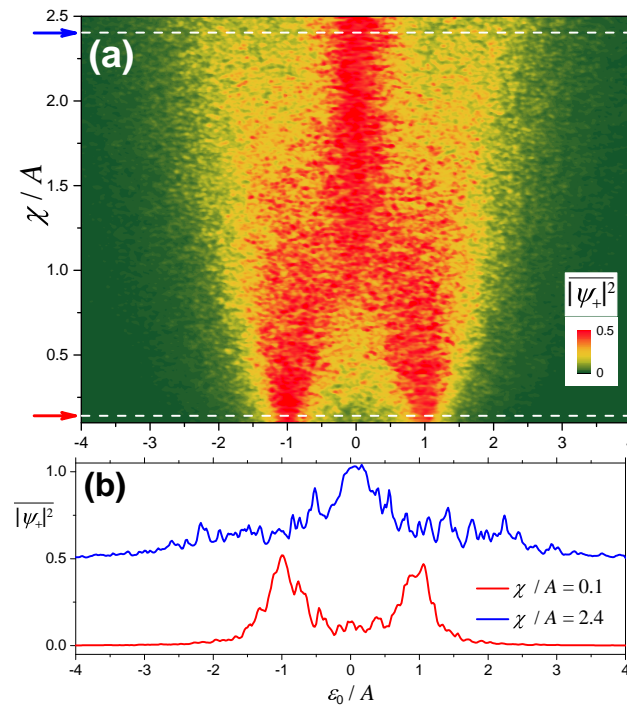


Рис. 6.7: Усреднення за рухом з двома класичними осциляторами, див. [279]. (a) Усреднена за часом заселеність верхнього рівня $|\psi_+|^2$ як функція зміщення ε_0 і швидкості стрибка χ ; тут показано два піки у точці $\varepsilon_0 = \pm A$ для сигналу з повільним проходженням з $\chi \ll A$, тоді як для більш швидкого проходження, з $\chi \gtrsim A$, призводить до злиття двох піків в один. (b) Усреднена за часом заселеність верхнього рівня як функція зсуву $\chi \gtrsim A$. ε_0 для двох значень швидкості стрибка χ .

6.3 Висновки

Класична система двох слабо зв'язаних класичних осциляторів утворює двійника квантової дворівневої системи. А саме, її рівняння руху формально збігається або з рівнянням Шредінгера або з рівнянням Блоха у випадках, коли релаксацію або нехтуємо, або враховуємо релаксацію, відповідно. Це означає, що динамічні явища дворівневої класичної системи можуть бути безпосередньо описані вже вивченими для квантових дворівневих систем, і навпаки. Це було відомо і вивчалось деякий час тому, наприклад, у роботах [332, 333, 334, 335]. Однак різноманітні механічні резонатори, які достатньо добре підходять для аналогового моделювання, з'явилися зовсім недавно [336, 337, 338, 339]. Такі механічні резонатори мають високі добротності і мають надійне керування їхнім міжмодовим зв'язком.

З іншого боку, останнім часом спостерігається зростання інтересу до квантових систем з сильним збудженням, наприклад, див. [55, 279, 280]. Ці дві події стимулювали нас до подальшого розгляду аналогії між слабо збуджуваними механічними осциляторами та збуджуваною квантовою низькорівневою системою. Зокрема, вперше продемонстровано класичні аналоги ефектів нещодавно вивчених для кубітів: інтерферометрія Ландау-Зінера-Штукельберга-Майорани, модуляція з фіксацією та усереднення за рухом [1]. Крім чистого інтересу до таких динамічних явищ на межі класичної та квантової фізики, можна розглянути можливість моделювання деяких квантових явищ за допомогою класичних систем.

РОЗДІЛ 7

ПЕРЕСКОК ЗІГНУТОЇ ГРАФЕНОВОЇ МЕМБРАНИ ДЛЯ ЗАСТОСУВАННЯ В МЕМ'ЄМНОСТЯХ.

Використовуючи обчислювальні та теоретичні підходи, ми досліджуємо наскрізного переходу зігнутих графенових мембран. Наш основний інтерес пов'язаний з можливістю використання вигнутої мембрани як пластини конденсатора з пам'яттю (мем'ємність). Для цього ми виконали розрахунки з теорії пружності для переходів "вгору-вниз" і "вниз-вгору" для мембран кількох розмірів. Отримано вирази для порогових сил перемикання, необхідних для переходів "вгору-вниз" і "вниз-вгору". Цей систематичний підхід може бути використаний для опису інших структур, що зазнають наскрізного переходу, в тому числі наномеханічних і біологічних. Мем'ємність [340] - це надзвичайний тип елементів схем з пам'яттю, миттєва реакція яких залежить від внутрішнього стану і вхідного сигналу. Такі пристрої є перспективними кандидатами для застосування в зберіганні та обробці інформації [341, 342] оскільки їхнім станом можна маніпулювати за допомогою прикладених напруг або зарядами, деякі реалізації, можуть зберігати інформацію протягом тривалих періодів часу. Можна уявити кілька можливих реалізацій мем'ємностей: використання мікроелектромеханічних систем [343], іонний транспорт [344], електронні ефекти [345], надпровідні кубіти [346], тощо.

Загалом, керовані напругою мембранні ємнісні системи (мем'ємності) описуються [340]

$$q(t) = C(x, V, t) V(t) \quad (7.1)$$

$$\dot{x} = f(x, V, t) \quad (7.2)$$

де $q(t)$ - заряд на конденсаторі в момент часу t , $V(t)$ - прикладена напруга, C - мем'ємність, x набір n внутрішніх змінних стану, а f - неперервна n -вимірний векторна функція. У деяких випадках зручніше розглядати керовані зарядом мем'ємності [340] таким чином, що заряд замість напруги розглядається як вхідна величина.

Серед декількох можливих реалізацій мем'ємності, мем'ємності на

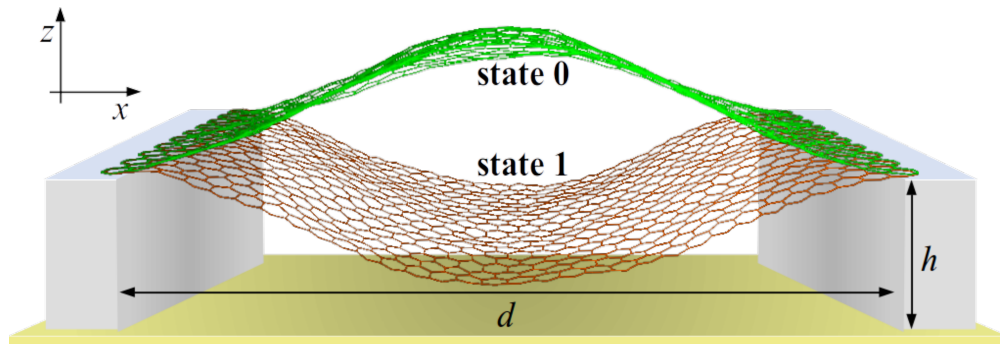


Рис. 7.1: Схематика мембранного мем'ємності [343] у якому верхньою обкладкою слугує графенова мембрана. Де d - відстань між фіксованими сторонами мембрани, h - відстань між нижньою пластиною та фіксованими краями мембрани, L - довжина мембрани, w - ширина мембрани.

мембранній основі [343] становлять значний інтерес, оскільки їхня геометрія робить їх ідеально придатними для енергонезалежного зберігання бінарної інформації. Дійсно, мембрана, яка використовується як верхня обкладка конденсатора (див. схему мембранної мем'ємності на рис. 7.1), має два стабільні стани вигину, що відповідають двом різним значенням ємності. Було припущено [343], що перемикання між цими станами можна здійснювати за допомогою взаємодії притягання протилежно заряджених обкладинок конденсатора. Більш того, теоретично було продемонстровано, що прості схеми мембранних мем'ємностей забезпечують обчислення з функціональною пам'яттю [342].

У цій роботі ми розглядаємо можливу реалізацію мембранної мем'ємності [343] з використанням одно- або багат шарової графенової мембрани [347, 348, 349, 350, 351] як її бістабільну пластину (див. рис. 7.1). Наша мета - зрозуміти основні фізичні процеси та параметри, що лежать в основі стрибкоподібного переходу такої мембрани, включно з деталями динаміки мембрани, пороговими силами, необхідними для зміни напрямку згинання, тощо. З цією метою ми виконали комбіноване дослідження з використанням теорії пружності, зосередившись на одношаровій графеновій мембрані з жорсткими граничними умовами. Такий вибір граничних умов обґрунтований типово сильною адгезією графену до підкладок. Наші результати розширюють попередні дослідження методом теорії функціоналу густини [352] для стрибкоподібного переходу вгору-вниз графенової

мембрани з шарнірними граничними умовами.

7.1 Теорія пружності

Незважаючи на те, що графен має товщину в один атом, графенові мембрани кількісно добре описуються теорією пружності [353, 354, 355, 356]. Це дозволяє нам, з одного боку, отримати аналітичні вирази для мембран, що згинаються [357, 358, 359], а з іншого боку, порівняти з моделюванням молекулярної динаміки.

Існує низка публікацій, присвячених згинанням балок і мембран під дією поперечного навантаження (див., наприклад, посилання [360, 361, 362, 363]). Такі системи часто описують у рамках теорії Ейлера-Бернуллі що, однак, призводить до складних аналітично нерозв'язних рівнянь. Розклад Бубнова-Галеркіна є одним з найкращих підходів для знаходження наближеного аналітичного розв'язку цих рівнянь, хоча він все ще вимагає складного аналізу фазових діаграм. Використовуючи такий аналіз, автори робіт [360, 361, 362, 363] досліджували електростатично навантажену двозатиснену мембрану над жорстким плоским електродом і вивели громіздкі умови для симетричного переходу, порушення симетрії, існування біфуркації та втягування нестійкості.

У цьому розділі ми виводимо компактні, але достатньо точні вирази для порогових сил, необхідних стрибкоподібного переходу на основі теорії пружності.

Вигин та перемикання в теорії пружності

Опис згинних мембран в теорії пружності

Розглянемо двовимірну мембрану в рамках теорії пружності [355, 354, 364]. Повна потенціальна енергія мембрани визначається прогином ζ (вздовж напрямку нормалі z) як

$$U = \frac{D}{2} \iint dS (\Delta\zeta)^2 + T\delta S + \iint dS F\zeta, \quad (7.3)$$

де $D = 1.6$ еВ - жорсткість графену на вигин, а ζ - прогин мембрани. Тут Δ позначає двовимірний лапласіан, $T = T_0 + \delta T$ - повна сила розтягування, T_0 - сила, прикладена опорою, а δT напруження при згинанні, що виникло внаслідок розтягування,

$$\delta T = E_{2D} \frac{\delta S}{S_0}, \quad \delta S = \iint dS (\nabla \zeta)^2, \quad (7.4)$$

$S_0 = wL$, F - густина зовнішніх сил, а $E_{2D} = 340$ Н/м - двовимірний модуль Юнга. Стиснення мембрани відповідає $T_0 < 0$.

Враховуючи потенціальну енергію, можна також цікавитись динамікою мембрани, яка визначається рівнянням

$$\mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \mu \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial t} - F = -D \Delta \Delta \zeta + T \Delta \zeta, \quad (7.5)$$

де μ - двовимірна густина маси.

Власні моди та згин

Просторові гармоніки (власні моди) затиснутих мембран можна записати у вигляді

$$\zeta_n(x) = \cosh\left(b_n \frac{x}{d}\right) - \cos\left(b_n \frac{x}{d}\right) - \frac{\cosh b_n - \cos b_n}{\sinh b_n - \sin b_n} \left(\sinh\left(b_n \frac{x}{d}\right) - \sin\left(b_n \frac{x}{d}\right) \right), \quad (7.6)$$

де числа b_n є розв'язками рівняння $\cosh b_n \cos b_n = 1$. Можна знайти, що $b_n \approx 3\pi/2 + n\pi$ (зокрема, $b_0 = 4.73$ близьке до $3\pi/2 = 4.65$). Функції $\zeta_n(x)$ є ортонормованими.

Розглянемо мембрану, яка має вигляд, як на рис. 7.1. Для початку розглянемо її рівноважний стан, для якого можна обчислити потенціальну енергію (7.3) для фундаментальної моди з $n = 0$, тобто візьмемо $\zeta(x) = \zeta_0(x)$ з $\zeta(d/2) \equiv \zeta_c$ і знайдемо

$$U = -\alpha \zeta_c^2 + \beta \zeta_c^4 + f \zeta_c, \quad (7.7)$$

з $\alpha = \frac{\pi^2 w}{4d} (|T_0| - T_c)$, $\beta = \frac{3\pi^4 Dw}{4\varepsilon^2 d^3}$, і $f = \frac{\pi}{6} Fdw$, де ζ_c - максимальний прогин мембрани. Тут критичний натяг $T_c = 4\pi^2 D/d^2$. При $\alpha > 0$, тобто при $|T_0| > T_c$, є потенціалом подвійної ями з мінімумами при симетричних відхиленнях, $\zeta_c = \pm \sqrt{\alpha/2\beta}$ і потенціальний бар'єр $\delta U = \alpha^2/4\beta$ (Зауважимо, що менш реалістичний випадок шарнірних граничних умови дає більш прості власні моди, $\sim \sin \frac{\pi n x}{d}$, ніж ті, що у рівнянні (7.6). Саме тому деякі автори надають перевагу саме цьому випадку. Однак цей випадок дає кількісно інші значення: наприклад, критичний натяг відрізняється в чотири рази).

Крім того, довжина нанострічки задається формулою

$$L = \int_0^d dx \sqrt{1 + \zeta'^2}. \quad (7.8)$$

Розкладаючи цей вираз до другого порядку, отримуємо взаємозв'язок між L , d та максимальним відхиленням ζ_c :

$$\zeta_c \approx 0.64 \sqrt[8]{\frac{d}{L}} \sqrt{L(L-d)}. \quad (7.9)$$

З іншого боку, максимальний прогин мембрани можна з мінімуму потенціальної енергії, рівняння (7.7):

$$\zeta_c^2 = \frac{\alpha}{2\beta} = \frac{2}{\pi^2} \frac{L^2}{E_{2D}} (|T_0| - T_c). \quad (7.10)$$

Рівняння (7.9) і (7.10) пов'язують силу розтягування T_0 з параметром d/L , який ми беремо як міру деформації мембрани. З іншого боку, це дозволяє (для заданого d/L) знайти розтягуючу силу T_0 , що діє на мембрану.

Перескок мембрани

Наша мета - описати динаміку мембрани під дією зовнішньої сили і знайти мінімальну силу, необхідну для наскрізного переходу мембрани. А зручний метод для виконання цих завдань представлено тут. Суть методу полягає в розкладанні $\zeta(x, t)$ по гармонікам $\zeta_n(x)$ (див. рівняння (7.6)) з

амплітудами $q_n(t)$:

$$\zeta(x, t) = \sum_n q_n(t) \zeta_n(x) \quad (7.11)$$

обмежимо суму кількома першими членами. А саме, ми стверджуємо, що для того, щоб описати симетричні та несиметричні переходи достатньо розглядати $n = 0, 2$ та $n = 0, 1$, відповідно. Обчислення полягає в наступному: спочатку ми підставляємо розклад (7.11) у рівняння (7.5); по-друге, ми множимо отримане рівняння на $\zeta_m(x)$ і інтегруємо враховуючи ортогональність гармонік. Тут підкреслимо, що для гармонік (7.6) інтеграли легко обчислюються, і замість інтегро-диференціального рівняння отримуємо систему диференціальних рівнянь для функцій $q_n(t)$. Поставивши отримані функції $q_n(t)$ назад у рівняння (7.11), отримаємо опис динаміки мембран. Нижче наведено результати цих обчислень (виконаних з використанням часу, нормованого на характеристичну частоту мембрани $\omega_c = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{D}{\mu}}$ і $t_c = 1/\omega_c$) [365]. Параметри нанострічки взято такі самі, як і в попередньому розділі для мембрани **B**.

На рис. 7.2 ми показуємо прогин мембрани, $\zeta(x)$, у кілька моментів часу. Наші розрахунки показують, що з високим ступенем точності динаміку мембрани можна описати за допомогою гармонік $n = 0, 1$ і 2 (це твердження також проілюстровано на рис. 7.3(b) та S3(b)). Декілька ілюстративних випадків представлено на рис. 7.2. Перш за все, рис. 7.2(a) демонструє випадок повністю симетричного перемикання, коли динаміка може бути описана рівняннями гармоніками $n = 0$ та 2 . Далі ми введемо невелику асиметрію в задачу за допомогою невеликого несиметричного доданка (порядку 0.1%) до сили. Це призводить до несиметричної динаміки Рис. 7.2(b), яку можна описати в термінах $n = 0$ та 1 гармонік. Зауважимо, що сила, необхідна для несиметричного стрибкоподібного переходу менша, ніж для симетричної динаміки, що також буде проаналізовано нижче більш детально. Нарешті, на рис. 7.2(c) ми ілюструємо комбінацію вищезгаданих режимів, знайдену за допомогою симетричної сили, коли незначна флуктуація чисельного розв'язку змінює симетричну динаміку на несиметричну. Зауважимо, що цей випадок близький до того, який розглянуто в роботі 352.

На рис. 7.3(a) зображено залежність кінцевого положення центру

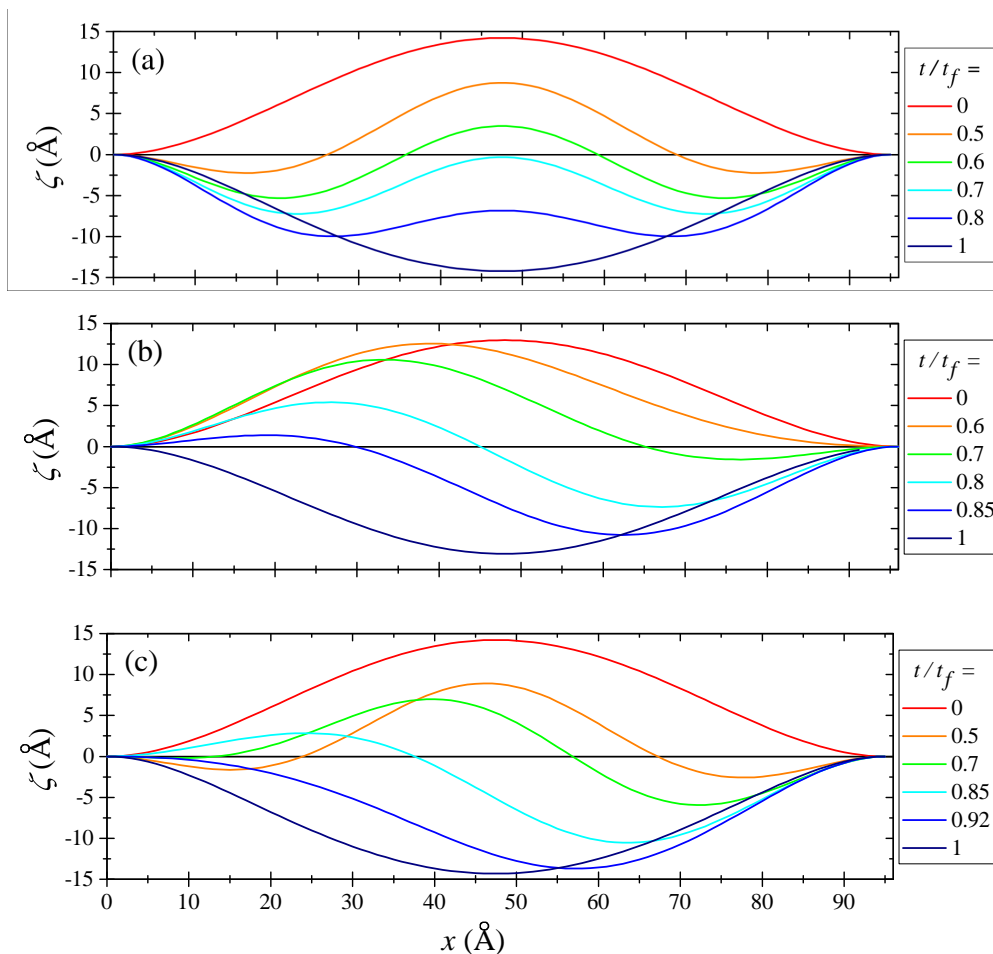


Рис. 7.2: Перехід вгору-вниз в теорії пружності. (а) Повністю симетричний перехід. (б) Несиметричне перемикання, спричинене невеликою асиметрією прикладеної сили. (с) Більш реалістичний сценарій перемикання на основі симетричної сили, де початкове симетричне спотворення стає несиметричним з часом. Для всіх панелей $d/L = 0.95$.

мембрани, $\zeta_c(t_f)$, від прикладеної сили F . При певному значенні сили, $F = F^\downarrow$, мембрана переходить зі стану вигнутої вгору у стан вигнутої вниз. Наші розрахунки показують, що ця величина пропорційна початковому прогину центральної точки ζ_c і є різною для симетричної (s) та несиметричної (ns) динаміки. А саме, ця порогова сила перемикання вгору-вниз F^\downarrow , помножена на площу мембрани wL , має вигляд

$$\frac{F_{s,ns}^\downarrow}{F_0} = C_{s,ns} \sqrt{2.44} \frac{\zeta_c}{d} = C_{s,ns} \left(\frac{L}{d}\right)^{3/8} \sqrt{\frac{L}{d} - 1}, \quad (7.12)$$

$$F_0 = \frac{Dw}{L^2}, \quad C_{ns} = 253.4, \quad C_s = 359.1. \quad (7.13)$$

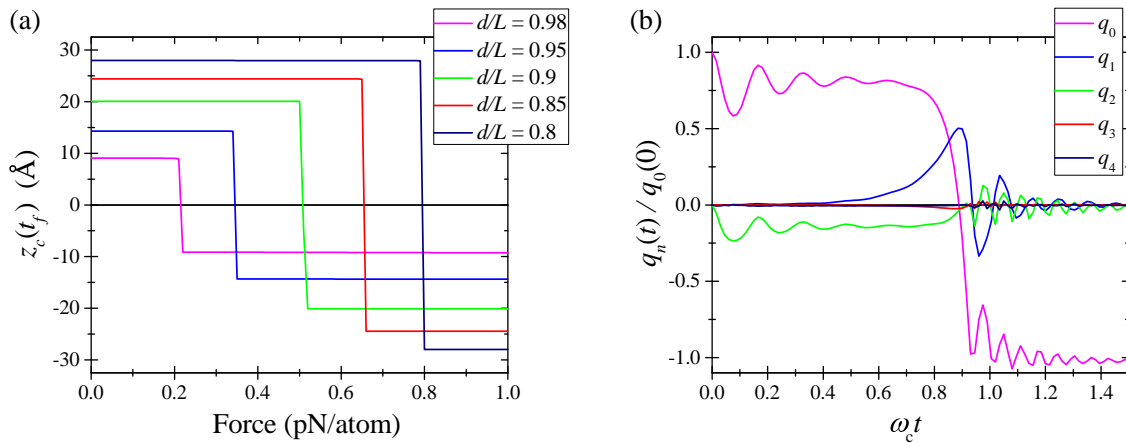


Рис. 7.3: Чисельне моделювання переходу вгору-вниз. (а) Кінцеве відхилення центральної точки ζ_c від прикладеної поперечної сили F для кількох значень d/L . (б) Залежність від часу амплітуди перших кількох гармонік $q_n(t)$.

Оскільки енергетично вигідніше мати перехід через несиметричну еволюцію, ми очікуємо, що саме це значення сили буде використано при проектуванні пристрою/аналізі експерименту. Зауважимо, що оцінки на основі рівняння (7.12) добре узгоджуються з результатами, отриманими іншими методами, як ми обговоримо пізніше і проілюстровано на рис. 7.4.

На рисунку 7.3(b) представлено залежність амплітуд гармонік $q_n(t)$ від часу при переході вгору-вниз. Важливо зазначити, що динаміка добре описується гармоніками $n = 0, 1$ і 2 , тоді як $n = 3$ і 4 амплітуди гармонік нехтовно малі.

Наші розрахунки (аналогічно до розгляду сили "вгору-вниз" вище) показують, що мінімальна порогова сила, необхідна для переходу "вниз-вгору" F^\uparrow пропорційна ζ_c^2 як

$$\frac{F^\uparrow}{F_0} = C^\uparrow 2.44 \left(\frac{\zeta_c}{d} \right)^2 = C^\uparrow \left(\frac{L}{d} \right)^{3/4} \left(\frac{L}{d} - 1 \right), \quad (7.14)$$

$$C^\uparrow = 8.48 \cdot 10^4. \quad (7.15)$$

Перехід вгору-вниз

Наша мета тут - оцінити мінімальну порогову силу, необхідну для наскрізного переходу мембрани в інший стабільний стан. У цьому підрозділі ми припускаємо, що стрибкоподібний перехід індукується

повільно зростаючою силою так, що система завжди перебуває у мінімумі потенціальної енергії. При нульовому значенні сили існують два мінімуми потенціальної енергії, що відповідають двом стабільним станам мембрани. Прикладена сила змінює ландшафт потенційної енергії таким чином, що, починаючи з певної сили потенціальна енергія має єдиний мінімум. Тут це значення сили знаходять і розглядають як оцінку для порогової сили перемикання.

За наявності постійної сили F , спрямованої вниз, потенціальна енергія мембрани має вигляд

$$U = U_b + U_{str} + U_{ext} = \frac{Dw}{2L} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{\partial \theta}{\partial s} \right]^2 ds + U_{str} + U_{ext}, \quad (7.16)$$

де U_b - енергія згинання, U_{str} - енергія розтягування, U_{ext} - потенціальна енергія, зумовлена прикладеною силою. Тоді, використовуючи $U_{ext} = Fz_{cm}$, де z_{cm} - це z координата центра мас, і нехтуючи членом U_{str} , який не важливим для переходу вгору-вниз, отримуємо наступне рівняння для екстремумів потенціальної енергії:

$$F = -\frac{dU_b}{dz_{cm}} = -\frac{dU_b}{dc_i} \left(\frac{dz_{cm}}{dc_i} \right)^{-1}, \quad (7.17)$$

де $i = 0$ для s і $i = 1$ для ns , а z_{cm} - положення центру мас. Рівняння (7.17) дозволяє знайти c_0 і c_1 , що відповідають заданій силі прикладеної сили. Мінімальна сила, необхідна для переходу в інший стан, відповідає максимуму $F(z_{cm})$, а для переходу через симетричну форму дається формулою

$$F_s^\downarrow = 440 \frac{Dw}{L^2} \sqrt{\frac{L-d}{L}} \quad (7.18)$$

що відбувається при $c_0 = 0.3589$. При цьому значенні c_0 енергія згину дорівнює $U_{b,s} = 108Dw(L-d)/L^2$.

Виконуючи ті самі обчислення для несиметричної форми, можна знайти що сила, необхідна для підтримки рівноваги несиметричної форми зменшується з прогресом перемикання. Нульова сила досягається при $c_1 = -c_2 = 1/(2\sqrt{5})$, що відповідає максимуму $U_{b,ns} = 90Dw(L-d)/L^2$.

Можливу (грубу) оцінку для порогової сили перемикання можна отримати, взявши ліміт $c_1 \rightarrow \infty$ що призводить до

$$F_{ns}^\downarrow = 281 \frac{Dw}{L^2} \sqrt{\frac{L-d}{L}} \quad (7.19)$$

and $U_{b,ns} = 42Dw(L-d)/L^2$.

Насправді, реалістичний сценарій перемикання через несиметричну можна уявити наступним чином. Ми починаємо з симетричної мембрани при $F = 0$ і повільно збільшуємо силу. Порушення симетрії відбувається при певному значенні сили, скажімо, F^\downarrow . Динаміка перемикання є складним процесом, який значною мірою залежить від теплових флуктуацій. Припускаємо, що F^\downarrow відповідає точці, коли енергії згину та прикладені сили для симетричної та несиметричної фігур однакові. Можна знайти, що обидві умови задовольняються при $c_0 = 0.4683$ і $c_1 = 0.6948$, так що $U_b = 47.8Dw(L-d)/L^2$ і

$$F^\downarrow = 263.53 \frac{Dw}{L^2} \sqrt{\frac{L-d}{L}}. \quad (7.20)$$

Отже, при $F < F^\downarrow$ мембрана зберігає симетричну форму і переходить до несиметричної, як тільки F досягає F^\downarrow . Оскільки у несиметричній мембрані несиметричне перемикання не пов'язане з бар'єром, то для завершення несиметричного перемикання не потрібне подальше збільшення прикладеної сили для завершення стрибкоподібного переходу через несиметричну форму.

Перехід вниз-вгору

Оскільки енергія розтягування U_{str} (див. рівняння (7.16)) відіграє важливу роль у переході вниз-вгору, її потрібно враховувати до уваги. Для наших цілей достатньо апроксимувати U_{str} у вигляді

$$U_{str} = \frac{E_{2D}w}{2L} \Delta L^2, \quad (7.21)$$

де ΔL - зміна довжини мембрани. У наближенні малого подовження, $\Delta L \ll L$, можна вважати, що U_b і форма розтягнутої мембрани не зазнає суттєвих

змін порівняно з випадком $F = 0$. У цій ситуації умовою збереження енергії на порозі переходу є рівність енергії розтягування (рівняння (7.21)) з різниці між максимальною і мінімальною енергіями згинання. Використовуючи наведені нижче енергії, знаходимо

$$\frac{E_{2D}w}{2L}\Delta L^2 = U_b^{max} - U_b^{min} = 161Dw\frac{L-d}{L^2}. \quad (7.22)$$

Більше того, при рівновазі

$$F(z_{cm}) = \frac{E_{2D}w}{2L} \cdot \frac{d(\Delta L^2)}{dz_{cm}}. \quad (7.23)$$

За умови малих $\Delta L \ll L$, положення центру мас мембрани (зігнутої донизу) можна виразити як

$$z_{cm}^* = -0.3187\sqrt{L(L-d)} + \frac{dz_{cm}}{d(\Delta L)}\Delta L, \quad (7.24)$$

з

$$\frac{dz_{cm}}{d(\Delta L)} = 0.3187\frac{2L-d}{2\sqrt{L(L-d)}}. \quad (7.25)$$

Використовуючи рівняння (7.22) та (7.25), рівняння (7.23) можна переписати так

$$F^\uparrow = 79.62\sqrt{2DE_{2D}}\frac{w}{L}\frac{L-d}{2L-d}. \quad (7.26)$$

Перевірено, що порогова сила перемикання для переходу вниз-вгору за рівнянням (7.26) узгоджується з результатами моделювання молекулярної динаміки. Було отримано дуже добре узгодження з МД моделюванням виконаними з дуже малими дисипаціями енергії.

7.2 Чотири методи опису стрибкоподібних переходів

Як ключовий висновок, на рис. 7.4 представлено залежність сили перемикання вгору-вниз (розрахованої за допомогою різних підходів) від параметра деформації мембрани d/L . Зокрема, з рисунка видно що сили перемикання, отримані різними методами, добре узгоджуються між собою.

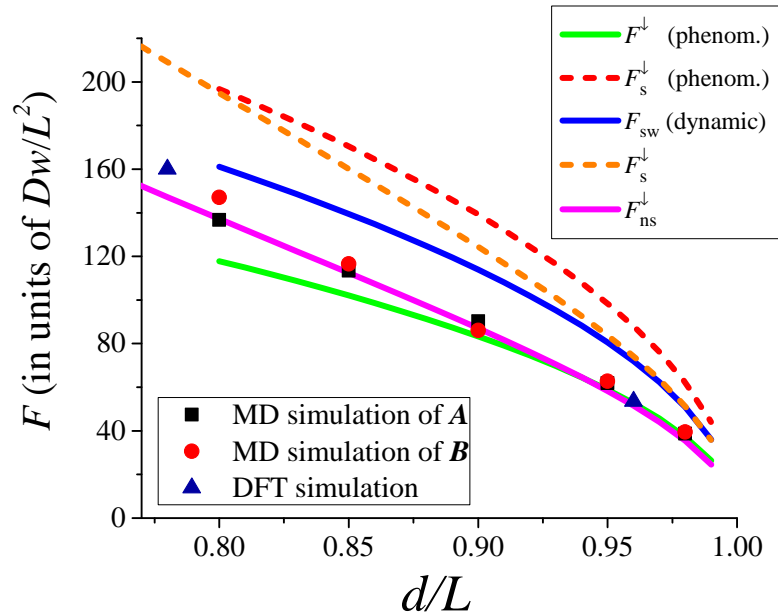


Рис. 7.4: Порівняння порогових зусиль вгору-вниз, обчислених чотирма різними підходами. Зелена, червона та синя лінії були розраховані у несиметричному, адіабатичному та динамічному симетричному режимах перемикання, відповідно. Результати моделювання молекулярної динаміки (МД) показано квадратами для нанострічки A і колами для B . Сили, обчислені за допомогою теорії пружності, рівняння (7.12), показано пурпуровою суцільною лінією для несиметричного і помаранчевою пунктирною лінією для симетричного переходу. Розрахунки теорії функціоналу густини DFT представлені трикутниками.

Теорія пружності описує динаміку мембрани за допомогою інтегро-диференціального рівняння для прогину $\zeta(x, t)$. Розкладання функції $\zeta(x, t)$ на гармоніки мембрани дозволяє звести інтегро-диференціальне рівняння до системи звичайних диференціальних рівнянь. Такий підхід дозволяє описати динаміку мембрани, що було розглянуто в розділі 7.1. Там було показано, що сила вгору-вниз лінійно залежить від початкового прогину центральної точки, $F^{\downarrow} \propto \zeta_c$, тоді як сила перемикання "вниз-вгору" при малій дисипації залежить квадратично від початкового прогину, $F^{\uparrow} \propto \zeta_c^2$. Крім того, ми продемонстрували, що динаміка мембрани може бути описана двома гармоніками і візуалізували процес як прямого, так і зворотного процесів прориву.

7.3 Висновки

Досліджено механічний відгук вигнутої графенової мембрани з використанням різноманітних обчислювальних і теоретичних інструментів. Основними результатами цієї роботи є вирази для порогових сил перемикання (рівняння (7.12, 7.20) для переходу вгору-вниз та рівняння (7.14, 7.26) для переходу вниз-вгору) і відповідної напруги. Аналітичні результати підтверджуються результатами чисельного моделювання, розрахунками молекулярної динаміки та теорії функціоналу густини [4]. Ми очікуємо, що наші висновки знайдуть застосування в проектуванні, виготовленні та аналізі мембранних конденсаторів з пам'яттю.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено різноманітні властивості динаміки дворівневих систем. Основні результати полягають у наступному:

1. Квазіперетин рівнів, описується моделлю ЛЗШМ, яка включає в себе адіабатичну еволюцію, неадіабатичні переходи та квантову інтерференцію. Було продемонстровано, що ця вічнозелена проблема надає важливі інструменти для характеристики і керування квантовими системами. Детальний розгляд робіт Ландау, Зінера, Штукельберга і Майорани показав, що неадіабатичні переходи слід віднести до всіх чотирьох імен. Тут також показано, як розширений підхід Зінера може бути використаний як основа для адіабатично-імпульсоні моделі (AIM), продемонстровано важливість часу переходу у різних базисах для методу матриць еволюції, вперше отримано умову для збуджень, що зберігають заселеність рівнів.
2. Одноразові та багаторазові переходи ЛЗШМ відображають різноманітну фізику квантових систем як на мікроскопічних, так і на мезоскопічних масштабах. Відповідна фізика може бути використана для характеристики їхньої квантової динаміки та інтерферометрії. Тут продемонстровано кілька найпоширеніших підходів до опису динаміки та інтерферометрії кубіту при періодичному збудженні, вперше порівняно різні методи за областю їх застосування та відносною обчислювальною потужністю, вперше отримано точніші формули для інтерферометрії в AIM.
3. Продемонстровано, як адіабатично-імпульсна модель може використовуватись для реалізації однокубітових гейтів. Адіабатично-імпульсна модель може бути застосовна для квантових гейтів з двома умовами: велика амплітуда збудження $A > \Delta$ і час між переходами більший, ніж час, необхідний для перехідного процесу. Це уможливорює створення надшвидких кубітних гейтів, які керуються виключно за допомогою імпульсів базової резонансної смуги, а отже, зменшує потребу в мікрохвильових імпульсних керуючих сигналах.

4. Вперше досліджено інтерферометрію ЛЗШМ надпровідного кубіта в напівнескінченній лінії передач, обмеженій дзеркалом. Коли частота кубіта встановлена у вузлі електромагнітного поля, після накачки потоком частоти кубіта виникають чудові інтерференційні картини, які можна інтерпретувати як багатофотонні резонанси в одягнутому кубіті. Оскільки кубіт інтерферує зі своїм дзеркальним відображенням, фотонний резонанс нульового порядку зникає. Такий ефект не з'явився б у випадку нескінченної лінії передачі. Однією з переваг такого атомно-дзеркального розташування є те, що ми можемо ефективно маніпулювати властивостями поглинання дворівневого атома, забезпечуючи новий спосіб маніпулювання квантовими станами.
5. Класична система двох слабо зв'язаних класичних осциляторів є двійником квантової дворівневої системи. А саме, її рівняння руху формально збігається або з рівнянням Шредінгера, або з рівнянням Блоха у випадках, коли релаксацією можна знехтувати або врахувати її, відповідно. Це означає, що динамічні явища дворівневої класичної системи можуть бути безпосередньо описані вже вивченими для квантових дворівневих систем, і навпаки. Зокрема, вперше продемонстровано класичні аналоги ефектів, нещодавно вивчених для кубітів: інтерферометрія Ландау-Зінера-Штукельберга-Майорани, модуляція замиканням та усереднення за рухом. Крім чистого інтересу до таких динамічних явищ на межі класичної та квантової фізики, можна розглянути можливість моделювання деяких квантових явищ за допомогою класичних систем.
6. Досліджено механічний відгук вигнутої графенової мембрани Використовуючи теорію пружності для великих ступенів вигину мембрани, вперше отримано вирази для порогових сил перемикавання для переходу "вгору-вниз" і "вниз-вгору". Отримані результати підтверджуються результатами чисельного моделювання, молекулярної динаміки і розрахунками теорії функціоналу густини. Очікується, що ці результати знайдуть застосування в проектуванні, виробництві та аналізі мембранних конденсаторів з пам'яттю (мем'ємностей).

Подяки

Дисертант глибоко вдячний Сергію Миколайовичу Шевченку за чудове керівництво науковою роботою.

Крім того, дисертант вдячний за підтримку відділу надпровідних і мезоскопічних структур, та вченому секретарю, канд. ф.-м. наук О.М. Калиненко, Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Веркіна НАН України (м. Харків, Україна). а також проф. Франко Норі та лабораторії теоретичної квантової фізики під його керівництвом в інституті RIKEN (Вако, Японія).

Також здобувач від чистого серця висловлює глибоку подяку Поліні Кофман, Артему Рижову, Олі Багровій та Олі Ільїнській за плідні обговорення, співпрацю та корисні і практичні поради.

БІБЛІОГРАФІЯ

- [1] O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, and F. Nori, Simulating quantum dynamical phenomena using classical oscillators: Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry, latching modulation, and motional averaging, *Sci. Rep.* **8**, 12218 (2018).
- [2] P. Y. Wen, O. V. Ivakhnenko, M. A. Nakonechnyi, B. Suri, J.-J. Lin, W.-J. Lin, J. C. Chen, S. N. Shevchenko, F. Nori, and I.-C. Hoi, Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry of a superconducting qubit in front of a mirror, *Phys. Rev. B* **102**, 075448 (2020).
- [3] O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, and F. Nori, Nonadiabatic Landau-Zener-Stückelberg-Majorana transitions, dynamics, and interference, *Physics Reports* **995**, 1–89 (2023).
- [4] R. D. Yamaletdinov, O. V. Ivakhnenko, O. V. Sedelnikova, S. N. Shevchenko, and Y. V. Pershin, Snap-through transition of buckled graphene membranes for memcapacitor applications, *Sci. Rep.* **8**, 3566 (2018).
- [5] M. Berry, Two-state quantum asymptotics, *Ann. N.Y. Acad. Sci.* **755**, 303–317 (1995).
- [6] A. Izmailkov, M. Grajcar, E. Il'ichev, N. Oukhanski, T. Wagner, H.-G. Meyer, W. Krech, M. H. S. Amin, A. M. van den Brink, and A. M. Zagoskin, Observation of macroscopic Landau-Zener transitions in a superconducting device, *Europhys. Lett.* **65**, 844–849 (2004).
- [7] G. Cao, H.-O. Li, T. Tu, L. Wang, C. Zhou, M. Xiao, G.-C. Guo, H.-W. Jiang, and G.-P. Guo, Ultrafast universal quantum control of a quantum-dot charge qubit using Landau-Zener-Stückelberg interference, *Nat. Commun.* **4**, 1401 (2013).
- [8] E. Dupont-Ferrier, B. Roche, B. Voisin, X. Jehl, R. Wacquez, M. Vinet, M. Sanquer, and S. D. Franceschi, Coherent coupling of two dopants in a silicon nanowire probed by Landau-Zener-Stückelberg interferometry, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 136802 (2013).
- [9] T. Higuchi, C. Heide, K. Ullmann, H. B. Weber, and P. Hommelhoff, Light-field-driven currents in graphene, *Nature* **550**, 224–228 (2017).

- [10] M. Mark, T. Kraemer, P. Waldburger, J. Herbig, C. Chin, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, “Stückelberg interferometry” with ultracold molecules, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 113201 (2007).
- [11] T. Faust, J. Rieger, M. J. Seitner, P. Krenn, J. P. Kotthaus, and E. M. Weig, Nonadiabatic dynamics of two strongly coupled nanomechanical resonator modes, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 037205 (2012).
- [12] K. Pyka, J. Keller, H. L. Partner, R. Nigmatullin, T. Burgermeister, D. M. Meier, K. Kuhlmann, A. Retzker, M. B. Plenio, W. H. Zurek, A. del Campo, and T. E. Mehlstäubler, Topological defect formation and spontaneous symmetry breaking in ion Coulomb crystals, *Nat. Commun.* **4**, 2291 (2013).
- [13] H. Nakamura, *Introduction to Nonadiabatic Dynamics* (World Scientific, 2019).
- [14] M. Kjaergaard, M. E. Schwartz, J. Braumüller, P. Krantz, J. I.-J. Wang, S. Gustavsson, and W. D. Oliver, Superconducting qubits: Current state of play, *Ann. Rev. Cond. Matt. Phys.* **11**, 369–395 (2020).
- [15] C. Zhu, Y. Teranishi, and H. Nakamura, Nonadiabatic transitions due to curve crossings: complete solutions of the Landau-Zener-Stueckelberg problems and their applications, in *Adv. Chem. Phys.*, Vol. 117 (John Wiley & Sons, Inc., 2007) pp. 127–233.
- [16] L. Landau, Zur theorie der Energieübertragung, *Phys. Z. Sowjetunion* **1**, 88 (1932).
- [17] L. Landau, Zur theorie der Energieübertragung II, *Phys. Z. Sowjetunion* **2**, 46–51 (1932).
- [18] C. Zener, Non-adiabatic crossing of energy levels, *Proc. R. Soc. A* **137**, 696–702 (1932).
- [19] C. Zener, A theory of the electrical breakdown of solid dielectrics, *Proc. R. Soc. A* **145**, 523–529 (1934).
- [20] E. Kane, Zener tunneling in semiconductors, *J. Phys. Chem. Solids* **12**, 181–188 (1960).

- [21] J. Y. Romanova, E. V. Demidov, L. G. Mourokh, and Y. A. Romanov, Zener tunneling in semiconductor superlattices, *J. Phys.: Condens. Matter* **23**, 305801 (2011).
- [22] S. Glutsch, Nonresonant and resonant Zener tunneling, *Phys. Rev. B* **69**, 235317 (2004).
- [23] J. Rotvig, A.-P. Jauho, and H. Smith, Bloch oscillations, Zener tunneling, and Wannier-Stark ladders in the time domain, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1831–1834 (1995).
- [24] M. Holthaus, Bloch oscillations and Zener breakdown in an optical lattice, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **2**, 589–604 (2000).
- [25] B. Wu and Q. Niu, Superfluidity of Bose–Einstein condensate in an optical lattice: Landau–Zener tunnelling and dynamical instability, *New J. Phys.* **5**, 104–104 (2003).
- [26] Y. Ke, X. Qin, H. Zhong, J. Huang, C. He, and C. Lee, Bloch-Landau-Zener dynamics in single-particle Wannier-Zeeman systems, *Phys. Rev. A* **91**, 053409 (2015).
- [27] R. Khomeriki and S. Flach, Landau-Zener Bloch oscillations with perturbed flat bands, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 245301 (2016).
- [28] S. Xia, Y. Zhang, Z. Li, L. Qin, C. Yang, H. Lu, J. Zhang, X. Zhao, and Z. Zhu, Band evolution and Landau-Zener Bloch oscillations in strained photonic rhombic lattices, *Opt. Exp.* **29**, 37503 (2021).
- [29] E. C. G. Stückelberg, Theorie der unelastischen Stöße zwischen Atomen, *Helv. Phys. Acta* **5**, 369–423 (1932).
- [30] E. E. Nikitin, Nonadiabatic Transitions: What we learned from old masters and how much we owe them, *Annu. Rev. Phys. Chem.* **50**, 1–21 (1999).
- [31] M. S. Child, On the Stueckelberg formula for non-adiabatic transitions, *Mol. Phys.* **28**, 495–501 (1974).
- [32] E. Majorana, Atomi orientati in campo magnetico variabile, *Il Nuovo Cimento* **9**, 43–50 (1932).

- [33] R. Frisch and E. Segre, Über die einstellung der richtungsquantelung. II, *Z. Phys.* **80**, 610–616 (1933).
- [34] S. Esposito, *The Physics of Ettore Majorana: Theoretical, Mathematical, and Phenomenological* (Cambridge University Press, 2014).
- [35] S. Esposito, *Ettore Majorana* (Springer-Verlag GmbH, 2017).
- [36] L. Cifarelli, ed., *Scientific Papers of Ettore Majorana* (Springer, Berlin, 2020) Chap. Comment on: "Oriented atoms in a variable magnetic field", by M. Inguscio, pp. 85–88.
- [37] F. D. Giacomo and E. E. Nikitin, The Majorana formula and the Landau–Zener–Stückelberg treatment of the avoided crossing problem, *Phys. Usp.* **48**, 515–517 (2005).
- [38] P. O. Kofman, O. V. Ivakhnenko, S. N. Shevchenko, and F. Nori, Majorana’s approach to nonadiabatic transitions validates the adiabatic-impulse approximation, *Sci. Rep.* **13**, 5053 (2023).
- [39] Y. I. Rodionov, K. I. Kugel, and F. Nori, Floquet spectrum and driven conductance in Dirac materials: Effects of Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry, *Phys. Rev. B* **94**, 195108 (2016).
- [40] Y. Kayanuma, Stokes phase and geometrical phase in a driven two-level system, *Phys. Rev. A* **55**, R2495–R2498 (1997).
- [41] F. Wilczek, Majorana and condensed matter physics, in *The Physics of Ettore Majorana*, edited by S. Esposito (Cambridge Univ. Press, 2014) pp. 279–302.
- [42] C. Wittig, The Landau-Zener formula, *J. Phys. Chem. B* **109**, 8428–8430 (2005).
- [43] A. M. Zagoskin, *Quantum Engineering* (Cambridge University Press, 2011).
- [44] H. Nakamura, *Nonadiabatic Transition* (World Scientific, 2012).
- [45] G. A. Hagedorn, Proof of the Landau-Zener formula in an adiabatic limit with small eigenvalue gaps, *Commun. Math. Phys.* **136**, 433–449 (1991).

- [46] A. I. Chichinin, Comment on the Landau–Zener formula, *J. Phys. Chem. B* **117**, 6018–6018 (2013).
- [47] L. T. A. Ho and L. F. Chibotaru, A simple derivation of the Landau–Zener formula, *Phys. Chem. Chem. Phys.* **16**, 6942 (2014).
- [48] M. Rodriguez-Vega, M. Vogl, and G. A. Fiete, Low-frequency and Moiré–Floquet engineering: A review, *Ann. Phys.* **435**, 168434 (2021).
- [49] H. Liu, M. Dai, and L. F. Wei, Simulating the Landau-Zener transitions and Landau-Zener-Stückelberg interferometers with compacted optical waveguides: an invariant method, *Phys. Rev. A* **99**, 013820 (2019).
- [50] L. V. Wang, Multi-stage Stern-Gerlach experiment modeled, *ArXiv* (2022), 2208.06471 .
- [51] V. A. Benderskii, E. V. Vetoshkin, and E. I. Kats, Instanton versus traditional WKB approach to the Landau-Zener problem, *J. Exp. Theor. Phys.* **97**, 232–258 (2003).
- [52] A. P. Kazantsev, G. A. Ryabenko, G. I. Surdutovich, and V. P. Yakovlev, Scattering of atoms by light, *Phys. Rep.* **129**, 75–144 (1985).
- [53] E. Shimshoni and Y. Gefen, Onset of dissipation in Zener dynamics: relaxation versus dephasing, *Ann. Phys.* **210**, 16–80 (1991).
- [54] M. Grifoni and P. Hänggi, Driven quantum tunneling, *Phys. Rep.* **304**, 229–354 (1998).
- [55] S. N. Shevchenko, S. Ashhab, and F. Nori, Landau–Zener–Stückelberg interferometry, *Phys. Rep.* **492**, 1–30 (2010).
- [56] J. Dziarmaga, Dynamics of a quantum phase transition and relaxation to a steady state, *Adv. Phys.* **59**, 1063–1189 (2010).
- [57] M. P. Silveri, J. A. Tuorila, E. V. Thuneberg, and G. S. Paraoanu, Quantum systems under frequency modulation, *Rep. Prog. Phys.* **80**, 056002 (2017).
- [58] A. Sen, D. Sen, and K. Sengupta, Analytic approaches to periodically driven closed quantum systems: methods and applications, *J. Phys.: Condens. Matter* **33**, 443003 (2021).

- [59] S. N. Shevchenko, *Mesoscopic Physics meets Quantum Engineering* (World Scientific Pub Co Inc, 2019).
- [60] N. V. Vitanov and B. M. Garraway, Landau-Zener model: Effects of finite coupling duration, *Phys. Rev. A* **53**, 4288–4304 (1996).
- [61] X. Shen, F. Wang, Z. Li, and Z. Wu, Landau-Zener-Stückelberg interferometry in \mathcal{PT} -symmetric non-Hermitian models, *Phys. Rev. A* **100**, 062514 (2019).
- [62] C.-F. Kam and Y. Chen, Non-adiabatic transitions in parabolic and super-parabolic \mathcal{PT} -symmetric non-Hermitian systems in 1D optical waveguides, *Ann. Phys.* **533**, 2000349 (2021).
- [63] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, seventh ed., edited by D. Z. Alan Jeffrey (Academic Press is an imprint of Elsevier, 2007) Chap. 9, pp. 1028–1031.
- [64] M. S. Child, *Molecular Collision Theory* (Dover Publications, 1996).
- [65] G. Tayebirad, A. Zenesini, D. Ciampini, R. Mannella, O. Morsch, E. Arimondo, N. Lörch, and S. Wimberger, Time-resolved measurement of Landau-Zener tunneling in different bases, *Phys. Rev. A* **82**, 013633 (2010).
- [66] G. Sun, X. Wen, M. Gong, D.-W. Zhang, Y. Yu, S.-L. Zhu, J. Chen, P. Wu, and S. Han, Observation of coherent oscillation in single-passage Landau-Zener transitions, *Sci. Rep.* **5**, 8463 (2015).
- [67] F. Barra and M. Esposito, Dissipation in small systems: Landau-Zener approach, *Phys. Rev. E* **93**, 062118 (2016).
- [68] J. Thingna, F. Barra, and M. Esposito, Kinetics and thermodynamics of a driven open quantum system, *Phys. Rev. E* **96**, 052132 (2017).
- [69] J. Thingna, M. Esposito, and F. Barra, Landau-Zener Lindblad equation and work extraction from coherences, *Phys. Rev. E* **99**, 042142 (2019).
- [70] H. Ribeiro, J. R. Petta, and G. Burkard, Interplay of charge and spin coherence in Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry, *Phys. Rev. B* **87**, 235318 (2013).

- [71] K. Mullen, E. Ben-Jacob, Y. Gefen, and Z. Schuss, Time of Zener tunneling, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2543–2546 (1989).
- [72] A. Joe, Proof of the Landau-Zener formula, *Asympt. Analysis* **9**, 209–258 (1994).
- [73] N. V. Vitanov and K. A. Suominen, Nonlinear level-crossing models, *Phys. Rev. A* **59**, 4580–4588 (1999).
- [74] N. V. Vitanov, Transition times in the Landau-Zener model, *Phys. Rev. A* **59**, 988–994 (1999).
- [75] M. Wubs, K. Saito, S. Kohler, Y. Kayanuma, and P. Hänggi, Landau–Zener transitions in qubits controlled by electromagnetic fields, *New J. Phys.* **7**, 218–218 (2005).
- [76] J. E. Danga, S. C. Kenfack, and L. C. Fai, Quantum wire and magnetic control of a spin qubit in the Landau–Zener–Stückelberg interferometry transition, *J. Phys. A: Math. Theor.* **49**, 195306 (2016).
- [77] A. Zenesini, H. Lignier, G. Tayebirad, J. Radogostowicz, D. Ciampini, R. Mannella, S. Wimberger, O. Morsch, and E. Arimondo, Time-resolved measurement of Landau-Zener tunneling in periodic potentials, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 090403 (2009).
- [78] K. M. Abadir, Expansions for some confluent hypergeometric functions, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26**, 4059–4066 (1993).
- [79] E. E. Nikitin and A. I. Reznikov, Calculation of transition probabilities using the Landau-Zener model, *Phys. Rev. A* **6**, 522–523 (1972).
- [80] S. Gasparinetti, P. Solinas, and J. P. Pekola, Geometric Landau-Zener interferometry, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 207002 (2011).
- [81] Y. Teranishi and H. Nakamura, Control of time-dependent nonadiabatic processes by an external field, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2032–2035 (1998).
- [82] A. Emmanouilidou, X.-G. Zhao, P. Ao, and Q. Niu, Steering an eigenstate to a destination, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1626–1629 (2000).

- [83] B. Damski and W. H. Zurek, Adiabatic-impulse approximation for avoided level crossings: from phase-transition dynamics to Landau-Zener evolutions and back again, *Phys. Rev. A* **73**, 063405 (2006).
- [84] M. Tomka, L. C. Venuti, and P. Zanardi, Accuracy of the adiabatic-impulse approximation for closed and open quantum systems, *Phys. Rev. A* **97**, 032121 (2018).
- [85] Y. A. Bychkov and A. M. Dykhne, Breakdown in semiconductors in an alternating electric field, *Sov. Phys. JETP* **31**, 928–932 (1970).
- [86] I. S. Averbukh and N. F. Perel'man, Quasienergy and optical spectra of a two-level system in a low-frequency field of arbitrary strength, *JETP* **61**, 665 (1985).
- [87] Y. Kayanuma, Phase coherence and nonadiabatic transition at a level crossing in a periodically driven two-level system, *Phys. Rev. B* **47**, 9940–9943 (1993).
- [88] B. M. Garraway and N. V. Vitanov, Population dynamics and phase effects in periodic level crossings, *Phys. Rev. A* **55**, 4418–4432 (1997).
- [89] N. B. Delone and V. P. Krainov, *Atoms in Strong Light Fields* (Springer-Verlag GmbH, 2012).
- [90] E. Nikitin, Adiabatic and diabatic collision processes at low energies, *Springer Handbook of Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 741–752 (2006).
- [91] S. Ashhab, J. R. Johansson, A. M. Zagoskin, and F. Nori, Two-level systems driven by large-amplitude fields, *Phys. Rev. A* **75**, 063414 (2007).
- [92] F. M. Cucchiatti, B. Damski, J. Dziarmaga, and W. H. Zurek, Dynamics of the Bose-Hubbard model: Transition from a Mott insulator to a superfluid, *Phys. Rev. A* **75**, 023603 (2007).
- [93] W. D. Oliver, Y. Yu, J. C. Lee, K. K. Berggren, L. S. Levitov, and T. P. Orlando, Mach-Zehnder interferometry in a strongly driven superconducting qubit, *Science* **310**, 1653–1657 (2005).

- [94] J. R. Petta, H. Lu, and A. C. Gossard, A coherent beam splitter for electronic spin states, *Science* **327**, 669–672 (2010).
- [95] G. Burkard, Splitting spin states on a chip, *Science* **327**, 650–651 (2010).
- [96] J. Ma, X. Wang, C. P. Sun, and F. Nori, Quantum spin squeezing, *Phys. Rep.* **509**, 89–165 (2011).
- [97] R. P. Saxon and R. E. Olson, Quantum calculations and classical interpretation of a model curve-crossing problem, *Phys. Rev. A* **12**, 830–834 (1975).
- [98] B. M. Garraway and S. Stenholm, Population transfer at periodically repeated level crossings, *Phys. Rev. A* **45**, 364–373 (1992).
- [99] B. M. Garraway and K. A. Suominen, Wave-packet dynamics: new physics and chemistry in femto-time, *Rep. Progr. Phys.* **58**, 365–419 (1995).
- [100] K. Nagaya, C. Zhu, and S. H. Lin, Nonlinear responses of degenerate two-level systems to intense few-cycle pulses, *J. Chem. Phys.* **127**, 094304 (2007).
- [101] B. Mukherjee, P. Mohan, D. Sen, and K. Sengupta, Low-frequency phase diagram of irradiated graphene and a periodically driven spin-12 XY chain, *Phys. Rev. B* **97**, 205415 (2018).
- [102] Y. Kuno, Non-adiabatic extension of the Zak phase and charge pumping in the Rice–Mele model, *Eur. Phys. J. B* **92**, 195 (2019).
- [103] X.-K. Qin, How to control the coherent oscillations in Landau-Zener-Stueckelberg dynamics of three-level system, *Mod. Phys. Lett. B* **30**, 1650149 (2016).
- [104] P. Neilinger, S. N. Shevchenko, J. Bogár, M. Reháč, G. Oelsner, D. S. Karpov, U. Hübner, O. Astafiev, M. Grajcar, and E. Il'ichev, Landau-Zener-Stückelberg-Majorana lasing in circuit quantum electrodynamics, *Phys. Rev. B* **94**, 094519 (2016).
- [105] A. Niranjana, W. Li, and R. Nath, Landau-Zener transitions and adiabatic impulse approximation in an array of two Rydberg atoms with time-dependent detuning, *Phys. Rev. A* **101**, 063415 (2020).

- [106] T. Suzuki and H. Nakazato, Generalized adiabatic impulse approximation, *Phys. Rev. A* **105**, 022211 (2022).
- [107] B. M. Garraway and S. Stenholm, Interferometer within a molecule, *Phys. Rev. A* **46**, 1413–1420 (1992).
- [108] H. Pu, S. Raghavan, and N. P. Bigelow, Manipulating spinor condensates with magnetic fields: Stochastization, metastability, and dynamical spin localization, *Phys. Rev. A* **61**, 023602 (2000).
- [109] S. N. Shevchenko, A. S. Kiyko, A. N. Omelyanchouk, and W. Krech, Dynamic behavior of Josephson-junction qubits: crossover between Rabi oscillations and Landau–Zener transitions, *Low Temp. Phys.* **31**, 569–576 (2005).
- [110] W.-X. Liu, T. Wang, X.-F. Zhang, and W.-D. Li, Time-domain Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interference in an optical lattice clock, *Phys. Rev. A* **104**, 053318 (2021).
- [111] J. Zhou, P. Huang, Q. Zhang, Z. Wang, T. Tan, X. Xu, F. Shi, X. Rong, S. Ashhab, and J. Du, Observation of time-domain Rabi oscillations in the Landau-Zener regime with a single electronic spin, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 010503 (2014).
- [112] M. P. Silveri, K. S. Kumar, J. Tuorila, J. Li, A. Vepsäläinen, E. V. Thuneberg, and G. S. Paraoanu, Stückelberg interference in a superconducting qubit under periodic latching modulation, *New J. Phys.* **17**, 043058 (2015).
- [113] K. Ono, S. N. Shevchenko, T. Mori, S. Moriyama, and F. Nori, Quantum interferometry with a g -factor-tunable spin qubit, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 207703 (2019).
- [114] I. I. Rabi, Space quantization in a gyrating magnetic field, *Phys. Rev.* **51**, 652–654 (1937).
- [115] J. H. Shirley, Solution of the Schrödinger equation with a Hamiltonian periodic in time, *Phys. Rev.* **138**, B979–B987 (1965).
- [116] V. P. Krainov, Theory of resonance multiphoton transitions in a three-level

- system under the influence of a strong electromagnetic field, *JETP* **43**, 622 (1976).
- [117] V. P. Krainov and V. P. Yakovlev, Quasienergy states of a two-level atom in a strong low-frequency electromagnetic field, *JETP* **78**, 2204 (1980).
- [118] C. H. Henry and D. V. Lang, Nonradiative capture and recombination by multiphonon emission in GaAs and GaP, *Phys. Rev. B* **15**, 989–1016 (1977).
- [119] M. A. Kmetc and W. J. Meath, Permanent dipole moments and multi-photon resonances, *Phys. Lett. A* **108**, 340–343 (1985).
- [120] J.-M. Lopez-Castillo, A. Filali-Mouhim, and J.-P. Jay-Gerin, Periodic motion around the crossing point in a two-level system, *J. Chem. Phys.* **97**, 1905–1910 (1992).
- [121] J. Tuorila, M. Silveri, M. Sillanpää, E. Thuneberg, Y. Makhlin, and P. Hakonen, Stark effect and generalized Bloch-Siegert shift in a strongly driven two-level system, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 257003 (2010).
- [122] Z. Sun, L. Zhou, G. Xiao, D. Poletti, and J. Gong, Finite-time Landau-Zener processes and counterdiabatic driving in open systems: Beyond Born, Markov, and rotating-wave approximations, *Phys. Rev. A* **93**, 012121 (2016).
- [123] X. Wang, A. Miranowicz, H.-R. Li, and F. Nori, Observing pure effects of counter-rotating terms without ultrastrong coupling: A single photon can simultaneously excite two qubits, *Phys. Rev. A* **96**, 063820 (2017).
- [124] J.-F. Huang, J.-Q. Liao, L. Tian, and L.-M. Kuang, Manipulating counter-rotating interactions in the quantum Rabi model via modulation of the transition frequency of the two-level system, *Phys. Rev. A* **96**, 043849 (2017).
- [125] S. Kohler, Dispersive readout: Universal theory beyond the rotating-wave approximation, *Phys. Rev. A* **98**, 023849 (2018).
- [126] M. Silveri, J. Tuorila, M. Sillanpää, E. Thuneberg, Y. Makhlin, and P. Hakonen, Basis dependence of approximative energy levels in a strongly driven two-level system, *J. Phys. Conf. Ser.* **400**, 042054 (2012).

- [127] R. Blattmann, P. Hänggi, and S. Kohler, Qubit interference at avoided crossings: the role of driving shape and bath coupling, *Phys. Rev. A* **91**, 042109 (2015).
- [128] S. Xu, Y. Yu, and G. Sun, Landau-Zener-Stückelberg spectroscopy of a superconducting flux qubit, *Phys. Rev. B* **82**, 144526 (2010).
- [129] Y.-F. Cao, L.-F. Wei, and B.-P. Hou, Exact solutions to Landau-Zener problems by evolution operator method, *Phys. Lett. A* **374**, 2281–2285 (2010).
- [130] Z.-C. Shi, Y.-H. Chen, W. Qin, Y. Xia, X. X. Yi, S.-B. Zheng, and F. Nori, Two-level systems with periodic N -step driving fields: Exact dynamics and quantum state manipulations, *Phys. Rev. A* **104**, 053101 (2021).
- [131] P.-J. Zhao, W. Li, H. Cao, S.-W. Yao, and L.-X. Cen, Exotic dynamical evolution in a secant-pulse-driven quantum system, *Phys. Rev. A* **98**, 022136 (2018).
- [132] B. Mukherjee, A. Sen, D. Sen, and K. Sengupta, Signatures and conditions for phase band crossings in periodically driven integrable systems, *Phys. Rev. B* **94**, 155122 (2016).
- [133] Q. Xie, Exactly solvable model for Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry, *Phys. Rev. A* **97**, 022113 (2018).
- [134] F. Forster, M. Mühlbacher, R. Blattmann, D. Schuh, W. Wegscheider, S. Ludwig, and S. Kohler, Landau-Zener interference at bichromatic driving, *Phys. Rev. B* **92**, 245422 (2015).
- [135] S. Cong, M.-Y. Gao, G. Cao, G.-C. Guo, and G.-P. Guo, Ultrafast manipulation of a double quantum-dot charge qubit using Lyapunov-based control method, *IEEE J. of Quantum Electron.* **51**, 1–8 (2015).
- [136] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions* (Wiley-VCH Verlag GmbH, 1998).
- [137] A. Wallraff, T. Duty, A. Lukashenko, and A. V. Ustinov, Multiphoton transitions between energy levels in a current-biased Josephson tunnel junction, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 037003 (2003).

- [138] S. Saito, M. Thorwart, H. Tanaka, M. Ueda, H. Nakano, K. Semba, and H. Takayanagi, Multiphoton transitions in a macroscopic quantum two-state system, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 037001 (2004).
- [139] I. Tornes and D. Stroud, Model of multiphoton transitions in a current-biased Josephson junction, *Phys. Rev. B* **77**, 224513 (2008).
- [140] S. N. Shevchenko, A. N. Omelyanchouk, and E. Il'ichev, Multiphoton transitions in Josephson-junction qubits (Review Article), *Low Temp. Phys.* **38**, 283–300 (2012).
- [141] M. A. Zudov, R. R. Du, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Multiphoton processes in microwave photoresistance of two-dimensional electron systems, *Phys. Rev. B* **73**, 041303 (2006).
- [142] D. G. Arbó, K. L. Ishikawa, K. Schiessl, E. Persson, and J. Burgdörfer, Intracycle and intercycle interferences in above-threshold ionization: The time grating, *Phys. Rev. A* **81**, 021403 (2010).
- [143] M. Førre, Landau-Zener-Stueckelberg theory for multiphoton intrashell transitions in Rydberg atoms: Bloch-Siegert shifts and widths, *Phys. Rev. A* **70**, 013406 (2004).
- [144] C. S. E. van Ditzhuijzen, A. Tauschinsky, and H. B. van Linden van den Heuvell, Observation of Stückelberg oscillations in dipole-dipole interactions, *Phys. Rev. A* **80**, 063407 (2009).
- [145] A. L. Burin, A. O. Maksymov, and K. D. Osborn, Quantum coherent manipulation of two-level systems in superconducting circuits, *Supercond. Sci. Technol.* **27**, 084001 (2014).
- [146] G. Giavaras and Y. Tokura, Probing the singlet-triplet splitting in double quantum dots: Implications of the ac field amplitude, *Phys. Rev. B* **100**, 195421 (2019).
- [147] G. Giavaras and Y. Tokura, Spectroscopy of double quantum dot two-spin states by tuning the interdot barrier, *Phys. Rev. B* **99**, 075412 (2019).

- [148] G. Heinrich, J. G. E. Harris, and F. Marquardt, Photon shuttle: Landau-Zener-Stückelberg dynamics in an optomechanical system, *Phys. Rev. A* **81**, 011801 (2010).
- [149] J. Li, M. P. Silveri, K. S. Kumar, J.-M. Pirkkalainen, A. Vepsäläinen, W. C. Chien, J. Tuorila, M. A. Sillanpää, P. J. Hakonen, E. V. Thuneberg, and G. S. Paraoanu, Motional averaging in a superconducting qubit, *Nat. Commun.* **4**, 1420 (2013).
- [150] G. Platero and R. Aguado, Photon-assisted transport in semiconductor nanostructures, *Phys. Rep.* **395**, 1–157 (2004).
- [151] A. Mavalankar, T. Pei, E. M. Gauger, J. H. Warner, G. A. D. Briggs, and E. A. Laird, Photon-assisted tunneling and charge dephasing in a carbon nanotube double quantum dot, *Phys. Rev. B* **93**, 235428 (2016).
- [152] E. N. Osika and B. Szafran, Spin-valley resolved photon-assisted tunneling in carbon nanotube double quantum dots, *Phys. Rev. B* **95**, 205305 (2017).
- [153] F. Zheng, Y. Shen, K. Sun, and Y. Zhao, Photon-assisted Landau-Zener transitions in a periodically driven Rabi dimer coupled to a dissipative mode, *J. Chem. Phys.* **154**, 044102 (2021).
- [154] T. H. Stoof and Y. V. Nazarov, Time-dependent resonant tunneling via two discrete states, *Phys. Rev. B* **53**, 1050–1053 (1996).
- [155] F. Gallego-Marcos, R. Sánchez, and G. Platero, Photon assisted long-range tunneling, *J. Appl. Phys.* **117**, 112808 (2015).
- [156] P. K. Tien and J. P. Gordon, Multiphoton process observed in the interaction of microwave fields with the tunneling between superconductor films, *Phys. Rev.* **129**, 647–651 (1963).
- [157] Y. Nakamura, Y. A. Pashkin, and J. S. Tsai, Rabi oscillations in a Josephson-junction charge two-level system, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 246601 (2001).
- [158] A. A. Boris and V. M. Krasnov, Quantization of the superconducting energy gap in an intense microwave field, *Phys. Rev. B* **92**, 174506 (2015).
- [159] R. S. Shaikhaidarov, K. H. Kim, J. W. Dunstan, I. V. Antonov, S. Linzen, M. Ziegler, D. S. Golubev, V. N. Antonov, E. V. Il'ichev, and O. V. Astafiev,

- Quantized current steps due to the a.c. coherent quantum phase-slip effect, *Nature* **608**, 45–49 (2022).
- [160] R. Snyder, C. Trimble, C. Rong, P. Folkes, P. Taylor, and J. Williams, Weak-link Josephson junctions made from topological crystalline insulators, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 097701 (2018).
- [161] S.-I. Chu, Generalized Floquet theoretical approaches to intense-field multiphoton and nonlinear optical processes, in *Adv. in Chem. Phys.* (John Wiley & Sons, Inc., 1989) pp. 739–799.
- [162] S.-I. Chu and D. A. Telnov, Beyond the Floquet theorem: generalized Floquet formalisms and quasienergy methods for atomic and molecular multiphoton processes in intense laser fields, *Phys. Rep.* **390**, 1–131 (2004).
- [163] S.-K. Son, S. Han, and S.-I. Chu, Floquet formulation for the investigation of multiphoton quantum interference in a superconducting qubit driven by a strong ac field, *Phys. Rev. A* **79**, 032301 (2009).
- [164] A. Eckardt, Colloquium: Atomic quantum gases in periodically driven optical lattices, *Rev. Mod. Phys.* **89**, 011004 (2017).
- [165] Y. B. Zel’dovich, The quasienergy of a quantum-mechanical system subjected to a periodic action, *JETP* **24**, 1006 (1967).
- [166] Y. B. Zel’dovich, Scattering and emission of a quantum system in a strong electromagnetic wave, *Sov. Phys. Usp.* **16**, 427–433 (1973).
- [167] S. R. Barone, M. A. Narcowich, and F. J. Narcowich, Floquet theory and applications, *Phys. Rev. A* **15**, 1109–1125 (1977).
- [168] T. N. Ikeda, S. Tanaka, and Y. Kayanuma, Floquet-Landau-Zener interferometry: Usefulness of the Floquet theory in pulse-laser-driven systems, *Phys. Rev. Res.* **4**, 033075 (2022).
- [169] C. Deng, F. Shen, S. Ashhab, and A. Lupascu, Dynamics of a two-level system under strong driving: quantum-gate optimization based on Floquet theory, *Phys. Rev. A* **94**, 032323 (2016).
- [170] S. H. Autler and C. H. Townes, Stark effect in rapidly varying fields, *Phys. Rev.* **100**, 703–722 (1955).

- [171] P. K. Aravind and J. O. Hirschfelder, Two-state systems in semiclassical and quantized fields, *J. Phys. Chem.* **88**, 4788–4801 (1984).
- [172] M. Silveri, J. Tuorila, M. Kemppainen, and E. Thuneberg, Probe spectroscopy of quasienergy states, *Phys. Rev. B* **87**, 134505 (2013).
- [173] J. Hausinger and M. Grifoni, Dissipative two-level system under strong ac driving: A combination of Floquet and Van Vleck perturbation theory, *Phys. Rev. A* **81**, 022117 (2010).
- [174] H. Sambe, Steady states and quasienergies of a quantum-mechanical system in an oscillating field, *Phys. Rev. A* **7**, 2203–2213 (1973).
- [175] Y. Yan, Z. Lü, J. Luo, and H. Zheng, Effects of counter-rotating couplings of the Rabi model with frequency modulation, *Phys. Rev. A* **96**, 033802 (2017).
- [176] C. Deng, J.-L. Orgiazzi, F. Shen, S. Ashhab, and A. Lupascu, Observation of Floquet states in a strongly driven artificial atom, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 133601 (2015).
- [177] J. Koski, A. Landig, A. Pályi, P. Scarlino, C. Reichl, W. Wegscheider, G. Burkard, A. Wallraff, K. Ensslin, and T. Ihn, Floquet spectroscopy of a strongly driven quantum dot charge qubit with a microwave resonator, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 043603 (2018).
- [178] M.-B. Chen, B.-C. Wang, S. Kohler, Y. Kang, T. Lin, S.-S. Gu, H.-O. Li, G.-C. Guo, X. Hu, H.-W. Jiang, G. Cao, and G.-P. Guo, Floquet state depletion in ac-driven circuit QED, *Phys. Rev. B* **103**, 205428 (2021).
- [179] K. Agarwal, S. Ganeshan, and R. N. Bhatt, Localization and transport in a strongly driven Anderson insulator, *Phys. Rev. B* **96**, 014201 (2017).
- [180] A. Russomanno, S. Pugnetti, V. Brosco, and R. Fazio, Floquet theory of Cooper pair pumping, *Phys. Rev. B* **83**, 214508 (2011).
- [181] M. Rodriguez-Vega, M. Lentz, and B. Seradjeh, Floquet perturbation theory: formalism and application to low-frequency limit, *New J. Phys.* **20**, 093022 (2018).

- [182] S. Restrepo, J. Cerrillo, V. Bastidas, D. Angelakis, and T. Brandes, Driven open quantum systems and Floquet stroboscopic dynamics, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 250401 (2016).
- [183] T. Mori, Floquet states in open quantum systems, *ArXiv* (2022), 2203.16358 .
- [184] M. V. Denisenko, A. M. Satanin, S. Ashhab, and F. Nori, Dynamics of interacting qubits in a strong alternating electromagnetic field, *Phys. Solid State* **52**, 2281–2286 (2010).
- [185] A. M. Satanin, M. V. Denisenko, A. I. Gelman, and F. Nori, Amplitude and phase effects in Josephson qubits driven by a biharmonic electromagnetic field, *Phys. Rev. B* **90**, 104516 (2014).
- [186] Y. Han, X.-Q. Luo, T.-F. Li, and W. Zhang, Analytical double-unitary-transformation approach for strongly and periodically driven three-level systems, *Phys. Rev. A* **101**, 022108 (2020).
- [187] Y. Zhou, S. Gu, K. Wang, G. Cao, X. Hu, M. Gong, H.-O. Li, and G.-P. Guo, Frequency-selective effective model of driven multilevel systems in gate-defined quantum dots, *ArXiv* (2021), 2110.09852 .
- [188] A. J. Leggett, S. Chakravarty, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher, A. Garg, and W. Zwerger, Dynamics of the dissipative two-state system, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 1–85 (1987).
- [189] P. Nalbach and M. Thorwart, Landau-Zener transitions in a dissipative environment: Numerically exact results, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 220401 (2009).
- [190] Y. Kayanuma and H. Nakayama, Nonadiabatic transition at a level crossing with dissipation, *Phys. Rev. B* **57**, 13099–13112 (1998).
- [191] K. Saito and Y. Kayanuma, Nonadiabatic transition probabilities in the presence of strong dissipation at an avoided-level crossing point, *Phys. Rev. A* **65**, 033407 (2002).
- [192] X. Chen and S. A. Meguid, On the parameters which govern the symmetric

- snap-through buckling behavior of an initially curved microbeam, *Int. J. Solid. Struct.* **66**, 77–87 (2015).
- [193] M. Wertnik, A. Chin, F. Nori, and N. Lambert, Optimizing co-operative multi-environment dynamics in a dark-state-enhanced photosynthetic heat engine, *J. Chem. Phys.* **149**, 084112 (2018).
- [194] N. Lambert, S. Ahmed, M. Cirio, and F. Nori, Modelling the ultra-strongly coupled spin-boson model with unphysical modes, *Nat. Comm.* **10**, 3721 (2019).
- [195] N. Lambert, T. Raheja, S. Cross, P. Menczel, S. Ahmed, A. Pitchford, D. Burgarth, and F. Nori, QuTiP-BoFiN: A bosonic and fermionic numerical hierarchical-equations-of-motion library with applications in light-harvesting, quantum control, and single-molecule electronics, *ArXiv* (2020), 2010.10806 .
- [196] K. Funo, N. Lambert, and F. Nori, General bound on the performance of counter-diabatic driving acting on dissipative spin systems, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 150401 (2021).
- [197] P. Ao and J. Rammer, Influence of dissipation on the Landau-Zener transition, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 3004–3007 (1989).
- [198] P. Ao and J. Rammer, Quantum dynamics of a two-state system in a dissipative environment, *Phys. Rev. B* **43**, 5397–5418 (1991).
- [199] K. Saito, M. Wubs, S. Kohler, Y. Kayanuma, and P. Hänggi, Dissipative Landau-Zener transitions of a qubit: Bath-specific and universal behavior, *Phys. Rev. B* **75**, 214308 (2007).
- [200] S. Ashhab, Landau-Zener transitions in a two-level system coupled to a finite-temperature harmonic oscillator, *Phys. Rev. A* **90**, 062120 (2014).
- [201] R. K. Malla and M. E. Raikh, Landau-Zener transition in a two-level system coupled to a single highly excited oscillator, *Phys. Rev. B* **97**, 035428 (2018).
- [202] D. Chruściński and S. Pascazio, A brief history of the GKLS equation, *Open Systems & Information Dynamics* **24**, 1740001 (2017).

- [203] W. Teixeira, F. L. Semiao, J. Tuorila, and M. Möttönen, Assessment of weak-coupling approximations on a driven two-level system under dissipation, *New J. Phys.* **24**, 013005 (2021).
- [204] J. A. Krzywda and Ł. Cywiński, Interplay of charge noise and coupling to phonons in adiabatic electron transfer between quantum dots, *Phys. Rev. B* **104**, 075439 (2021).
- [205] C. Xu, A. Poudel, and M. G. Vavilov, Nonadiabatic dynamics of a slowly driven dissipative two-level system, *Phys. Rev. A* **89**, 052102 (2014).
- [206] Y. Makhlin, G. Schön, and A. Shnirman, Quantum-state engineering with Josephson-junction devices, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 357–400 (2001).
- [207] Y. Gefen and D. J. Thouless, Zener transitions and energy dissipation in small driven systems, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1752–1755 (1987).
- [208] D. Zueco, P. Hänggi, and S. Kohler, Landau–Zener tunnelling in dissipative circuit QED, *New J. Phys.* **10**, 115012 (2008).
- [209] M. Scala, B. Militello, A. Messina, and N. V. Vitanov, Microscopic description of dissipative dynamics of a level-crossing transition, *Phys. Rev. A* **84**, 023416 (2011).
- [210] R. S. Whitney, M. Clusel, and T. Ziman, Temperature can enhance coherent oscillations at a Landau-Zener transition, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 210402 (2011).
- [211] P. P. Orth, A. Imambekov, and K. L. Hur, Nonperturbative stochastic method for driven spin-boson model, *Phys. Rev. B* **87**, 014305 (2013).
- [212] X. Dai, R. Trappen, H. Chen, D. Melanson, M. A. Yurtalan, D. M. Tennant, A. J. Martinez, Y. Tang, E. Mozgunov, J. Gibson, J. A. Grover, S. M. Disseler, J. I. Basham, S. Novikov, R. Das, A. J. Melville, B. M. Niedzielski, C. F. Hirjibehedin, K. Serniak, S. J. Weber, J. L. Yoder, W. D. Oliver, K. M. Zick, D. A. Lidar, and A. Lupascu, Dissipative Landau-Zener tunneling: crossover from weak to strong environment coupling, *ArXiv* (2022), 2207.02017 .
- [213] G. C. Fouokeng, M. Tchoffo, M. E. Ateuafack, and L. C. Fai, Dynamics of a central electron spin coupled to an anti-ferromagnetic spin bath driven by a

- variable magnetic field in the Landau-Zener scenario, *Eur. Phys. J. Plus* **129**, 151 (2014).
- [214] T. Ota, K. Hitachi, K. Muraki, and T. Fujisawa, Dissipative Landau–Zener transition in double quantum dot under sinusoidal potential modulation, *Appl. Phys. Express* **10**, 115201 (2017).
- [215] P. Huang and X. Hu, Electric-dipole-induced resonance and decoherence of a dressed spin in a quantum dot, *ArXiv* (2021), 2103.05817 .
- [216] A. L. Gramajo, D. Domínguez, and M. J. Sánchez, Revealing the system-bath coupling via Landau-Zener-Stückelberg interferometry in superconducting qubits, *Phys. Rev. B* **100**, 075410 (2019).
- [217] C. Calero, E. M. Chudnovsky, and D. A. Garanin, Quantum dynamics of a nanomagnet in a rotating field, *Phys. Rev. B* **72**, 024409 (2005).
- [218] M. Vogelsberger and D. A. Garanin, Butterfly hysteresis curves generated by adiabatic Landau-Zener transitions, *Phys. Rev. B* **73**, 092412 (2006).
- [219] P. Földi, M. G. Benedict, and F. M. Peeters, Dynamics of periodic anticrossings: Decoherence, pointer states, and hysteresis curves, *Phys. Rev. A* **77**, 013406 (2008).
- [220] P. Haikka and K. Mølmer, Dissipative Landau-Zener level crossing subject to continuous measurement: Excitation despite decay, *Phys. Rev. A* **89**, 052114 (2014).
- [221] A. Dodin, S. Garmon, L. Simine, and D. Segal, Landau-Zener transitions mediated by an environment: population transfer and energy dissipation, *J. Chem. Phys.* **140**, 124709 (2014).
- [222] D. M. Berns, M. S. Rudner, S. O. Valenzuela, K. K. Berggren, W. D. Oliver, L. S. Levitov, and T. P. Orlando, Amplitude spectroscopy of a solid-state artificial atom, *Nature* **455**, 51–57 (2008).
- [223] M. S. Rudner, A. V. Shytov, L. S. Levitov, D. M. Berns, W. D. Oliver, S. O. Valenzuela, and T. P. Orlando, Quantum phase tomography of a strongly driven qubit, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 190502 (2008).

- [224] F. Forster, G. Petersen, S. Manus, P. Hänggi, D. Schuh, W. Wegscheider, S. Kohler, and S. Ludwig, Characterization of qubit dephasing by Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 116803 (2014).
- [225] M. F. Gonzalez-Zalba, S. N. Shevchenko, S. Barraud, J. R. Johansson, A. J. Ferguson, F. Nori, and A. C. Betz, Gate-sensing coherent charge oscillations in a silicon field-effect transistor, *Nano Lett.* **16**, 1614–1619 (2016).
- [226] D. M. Berns, W. D. Oliver, S. O. Valenzuela, A. V. Shytov, K. K. Berggren, L. S. Levitov, and T. P. Orlando, Coherent quasiclassical dynamics of a persistent current qubit, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 150502 (2006).
- [227] M. P. Liul and S. N. Shevchenko, Rate-equation approach for multi-level quantum systems, *ArXiv* (2022), 2209.13505 .
- [228] J. R. Johansson, P. D. Nation, and F. Nori, QuTiP: An open-source Python framework for the dynamics of open quantum systems, *Comput. Phys. Commun.* **183**, 1760–1772 (2012).
- [229] J. R. Johansson, P. D. Nation, and F. Nori, QuTiP 2: A Python framework for the dynamics of open quantum systems, *Comput. Phys. Commun.* **184**, 1234 – 1240 (2013).
- [230] N. Shammah, S. Ahmed, N. Lambert, S. D. Liberato, and F. Nori, Open quantum systems with local and collective incoherent processes: Efficient numerical simulations using permutational invariance, *Phys. Rev. A* **98**, 063815 (2018).
- [231] I. Buluta, S. Ashhab, and F. Nori, Natural and artificial atoms for quantum computation, *Rep. Prog. Phys.* **74**, 104401 (2011).
- [232] J. Salmilehto and M. Möttönen, Superadiabatic theory for Cooper pair pumping under decoherence, *Phys. Rev. B* **84**, 174507 (2011).
- [233] J. Bylander, M. S. Rudner, A. V. Shytov, S. O. Valenzuela, D. M. Berns, K. K. Berggren, L. S. Levitov, and W. D. Oliver, Pulse imaging and nonadiabatic control of solid-state artificial atoms, *Phys. Rev. B* **80**, 220506 (2009).

- [234] S. Kwon, A. Tomonaga, G. L. Bhai, S. J. Devitt, and J.-S. Tsai, Gate-based superconducting quantum computing, *J. Appl. Phys.* **129**, 041102 (2021).
- [235] P. Krantz, M. Kjaergaard, F. Yan, T. P. Orlando, S. Gustavsson, and W. D. Oliver, A quantum engineer's guide to superconducting qubits, *Appl. Phys. Rev.* **6**, 021318 (2019).
- [236] N. V. Vitanov, L. P. Yatsenko, and K. Bergmann, Population transfer by an amplitude-modulated pulse, *Phys. Rev. A* **68**, 043401 (2003).
- [237] K. Saito, M. Wubs, S. Kohler, P. Hänggi, and Y. Kayanuma, Quantum state preparation in circuit QED via Landau-Zener tunneling, *Europhys. Lett.* **76**, 22–28 (2006).
- [238] S. Longhi, G. L. Giorgi, and R. Zambrini, Landau-Zener topological quantum state transfer, *Adv. Q. Tech.* **2**, 1800090 (2019).
- [239] D. L. Campbell, Y.-P. Shim, B. Kannan, R. Winik, D. K. Kim, A. Melville, B. M. Niedzielski, J. L. Yoder, C. Tahan, S. Gustavsson, and W. D. Oliver, Universal nonadiabatic control of small-gap superconducting qubits, *Phys. Rev. X* **10**, 041051 (2020).
- [240] T. Ota, K. Hitachi, and K. Muraki, Landau-Zener-Stückelberg interference in coherent charge oscillations of a one-electron double quantum dot, *Sci. Rep.* **8**, 5491 (2018).
- [241] H. Zhang, S. Chakram, T. Roy, N. Earnest, Y. Lu, Z. Huang, D. Weiss, J. Koch, and D. I. Schuster, Universal fast-flux control of a coherent, low-frequency qubit, *Phys. Rev. X* **11**, 011010 (2021).
- [242] B. Li, S. Ahmed, S. Saraogi, N. Lambert, F. Nori, A. Pitchford, and N. Shammah, Pulse-level noisy quantum circuits with QuTiP, *Quantum* **6**, 630 (2022).
- [243] M. Sillanpää, T. Lehtinen, A. Paila, Y. Makhlin, and P. Hakonen, Continuous-time monitoring of Landau-Zener interference in a Cooper-pair box, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 187002 (2006).

- [244] M. Sillanpää, T. Lehtinen, A. Paila, Y. Makhlin, and P. J. Hakonen, Landau–Zener interferometry in a Cooper-pair box, *J. Low Temp. Phys.* **146**, 253–262 (2007).
- [245] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory*, 2nd ed. (Pergamon Press, Oxford, 1965) Chap. 53 Transition under the action of adiabatic perturbation, pp. 185–187.
- [246] H. Ribeiro, J. R. Petta, and G. Burkard, Harnessing the GaAs quantum dot nuclear spin bath for quantum control, *Phys. Rev. B* **82**, 115445 (2010).
- [247] M. A. Rol, F. Battistel, F. K. Malinowski, C. C. Bultink, B. M. Tarasinski, R. Vollmer, N. Haider, N. Muthusubramanian, A. Bruno, B. M. Terhal, and L. DiCarlo, Fast, high-fidelity conditional-phase gate exploiting leakage interference in weakly anharmonic superconducting qubits, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 120502 (2019).
- [248] X.-R. Huang, Z.-X. Ding, C.-S. Hu, L.-T. Shen, W. Li, H. Wu, and S.-B. Zheng, Robust Rydberg gate via Landau-Zener control of Förster resonance, *Phys. Rev. A* **98**, 052324 (2018).
- [249] J.-L. Wu, Y. Wang, J.-X. Han, S.-L. Su, Y. Xia, Y. Jiang, and J. Song, Resilient quantum gates on periodically driven Rydberg atoms, *Phys. Rev. A* **103**, 012601 (2021).
- [250] L. Wang, T. Tu, B. Gong, C. Zhou, and G.-C. Guo, Experimental realization of non-adiabatic universal quantum gates using geometric Landau-Zener-Stückelberg interferometry, *Sci. Rep.* **6**, 19048 (2016).
- [251] L.-K. Lim, J.-N. Fuchs, and G. Montambaux, Geometric phase in Stückelberg interferometry, *Phys. Rev. A* **91**, 042119 (2015).
- [252] L.-K. Lim, J.-N. Fuchs, and G. Montambaux, Geometry of Bloch states probed by Stückelberg interferometry, *Phys. Rev. A* **92**, 063627 (2015).
- [253] O. Bleu, G. Malpuech, Y. Gao, and D. Solnyshkov, Effective theory of nonadiabatic quantum evolution based on the quantum geometric tensor, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 020401 (2018).

- [254] X. Tan, D.-W. Zhang, Z. Zhang, Y. Yu, S. Han, and S.-L. Zhu, Demonstration of geometric Landau-Zener interferometry in a superconducting qubit, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 027001 (2014).
- [255] F. Zhuang, J. Zeng, S. E. Economou, and E. Barnes, Noise-resistant Landau-Zener sweeps from geometrical curves, *Quantum* **6**, 639 (2022).
- [256] E. Barnes, F. A. Calderon-Vargas, W. Dong, B. Li, J. Zeng, and F. Zhuang, Dynamically corrected gates from geometric space curves, *Quantum Sci. Technol.* **7**, 023001 (2022).
- [257] X. Gu, A. F. Kockum, A. Miranowicz, Y.-X. Liu, and F. Nori, Microwave photonics with superconducting quantum circuits, *Phys. Rep.* **718-719**, 1–102 (2017).
- [258] O. Astafiev, A. M. Zagoskin, A. A. Abdumalikov, Y. A. Pashkin, T. Yamamoto, K. Inomata, Y. Nakamura, and J. S. Tsai, Resonance fluorescence of a single artificial atom, *Science* **327**, 840–843 (2010).
- [259] K. Lalumiere, B. C. Sanders, A. F. van Loo, A. Fedorov, A. Wallraff, and A. Blais, Input-output theory for waveguide QED with an ensemble of inhomogeneous atoms, *Phys. Rev. A* **88**, 043806 (2013).
- [260] I.-C. Hoi, A. F. Kockum, L. Tornberg, A. Pourkabirian, G. Johansson, P. Delsing, and C. M. Wilson, Probing the quantum vacuum with an artificial atom in front of a mirror, *Nat. Phys.* **11**, 1045–1049 (2015).
- [261] M. Mirhosseini, E. Kim, X. Zhang, A. Sipahigil, P. B. Dieterle, A. J. Keller, A. Asenjo-Garcia, D. E. Chang, and O. Painter, Cavity quantum electrodynamics with atom-like mirrors, *Nature* **569**, 692 (2019).
- [262] I.-C. Hoi, C. M. Wilson, G. Johansson, T. Palomaki, B. Peropadre, and P. Delsing, Demonstration of a single-photon router in the microwave regime, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 073601 (2011).
- [263] I.-C. Hoi, T. Palomaki, J. Lindkvist, G. Johansson, P. Delsing, and C. M. Wilson, Generation of nonclassical microwave states using an artificial atom in 1D open space, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 263601 (2012).

- [264] I.-C. Hoi, A. F. Kockum, T. Palomaki, T. M. Stace, B. Fan, L. Tornberg, S. R. Sathyamoorthy, G. Johansson, P. Delsing, and C. M. Wilson, Giant Cross-Kerr effect for propagating microwaves induced by an artificial atom, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 053601 (2013).
- [265] P. Y. Wen, A. F. Kockum, H. Ian, J. C. Chen, F. Nori, and I.-C. Hoi, Reflective amplification without population inversion from a strongly driven superconducting qubit, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 053601 (2018).
- [266] P. Y. Wen, K.-T. Lin, A. F. Kockum, B. Suri, H. Ian, J. C. Chen, S. Y. Mao, C. C. Chiu, P. Delsing, F. Nori, G.-D. Lin, and I.-C. Hoi, Large collective Lamb shift of two distant superconducting artificial atoms, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 233602 (2019).
- [267] P. Forn-Diaz, J. J. Garcia-Ripoll, B. Peropadre, J.-L. Orgiazzi, M. A. Yurtalan, R. Belyansky, C. M. Wilson, and A. Lupascu, Ultrastrong coupling of a single artificial atom to an electromagnetic continuum in the nonperturbative regime, *Nat. Phys.* **13**, 39–43 (2017).
- [268] D. Szombati, A. Gomez Frieiro, C. Müller, T. Jones, M. Jerger, and A. Fedorov, Quantum rifling: Protecting a qubit from measurement back action, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 070401 (2020).
- [269] D. S. Karpov, V. Y. Monarkha, D. Szombati, A. G. Frieiro, A. N. Omelyanchouk, E. Il'ichev, A. Fedorov, and S. N. Shevchenko, Probabilistic motional averaging, *Eur. Phys. J. B* **93**, 49 (2020).
- [270] J. Johansson, M. H. S. Amin, A. J. Berkley, P. Bunyk, V. Choi, R. Harris, M. W. Johnson, T. M. Lanting, S. Lloyd, and G. Rose, Landau-Zener transitions in a superconducting flux qubit, *Phys. Rev. B* **80**, 012507 (2009).
- [271] J. R. Johansson, G. Johansson, C. M. Wilson, and F. Nori, Dynamical Casimir effect in superconducting microwave circuits, *Phys. Rev. A* **82**, 052509 (2010).
- [272] C. M. Wilson, G. Johansson, A. Pourkabirian, M. Simoen, J. R. Johansson, T. Duty, F. Nori, and P. Delsing, Observation of the dynamical Casimir effect in a superconducting circuit, *Nature* **479**, 376–379 (2011).

- [273] M. Sillanpää, T. Lehtinen, A. Paila, Y. Makhlin, and P. Hakonen, Continuous-time monitoring of Landau-Zener interference in a Cooper-pair box, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 187002 (2006).
- [274] C. S. E. van Ditzhuijzen, A. Tauschinsky, and H. B. van Linden van den Heuvell, Observation of Stückelberg oscillations in dipole-dipole interactions, *Phys. Rev. A* **80**, 063407 (2009).
- [275] A. Bogan, S. Studenikin, M. Korkusinski, and L. Gaudreau, Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry of a single hole, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 207701 (2018).
- [276] X. Mi, S. Kohler, and J. R. Petta, Landau-Zener interferometry of valley-orbit states in Si/SiGe double quantum dots, *Phys. Rev. B* **98**, 161404 (2018).
- [277] K. Ono, S. N. Shevchenko, T. Mori, S. Moriyama, and F. Nori, Quantum interferometry with a g -factor-tunable spin qubit, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 207703 (2019).
- [278] R. M. Otxoa, A. Chatterjee, S. N. Shevchenko, S. Barraud, F. Nori, and M. F. Gonzalez-Zalba, Quantum interference capacitor based on double-passage Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry, *Phys. Rev. B* **100**, 205425 (2019).
- [279] J. Li, M. P. Silveri, K. S. Kumar, J.-M. Pirkkalainen, A. Vepsäläinen, W. C. Chien, J. Tuorila, M. A. Sillanpää, P. J. Hakonen, E. V. Thuneberg, and G. S. Paraoanu, Motional averaging in a superconducting qubit, *Nat. Comm.* **4**, 1420 (2013).
- [280] M. Silveri, K. Kumar, J. Tuorila, J. Li, A. Vepsäläinen, E. Thuneberg, and G. Paraoanu, Stueckelberg interference in a superconducting qubit under periodic latching modulation, *New J. Phys.* **17**, 043058 (2015).
- [281] J. Pan, Y. Fan, Y. Li, X. Dai, X. Wei, Y. Lu, C. Cao, L. Kang, W. Xu, J. Chen, G. Sun, and P. Wu, Dynamically modulated Autler-Townes effect in a transmon qubit, *Phys. Rev. B* **96**, 024502 (2017).
- [282] T. Bera, S. Majumder, S. K. Sahu, and V. Singh, Large flux-mediated coupling in hybrid electromechanical system with a transmon qubit, *Comm. Phys.* **4**, 12 (2021).

- [283] J. Eschner, C. Raab, F. Schmidt-Kaler, and R. Blatt, Light interference from single atoms and their mirror images, *Nature* **413**, 495 (2001).
- [284] L. Y. Gorelik, N. I. Lundin, V. S. Shumeiko, R. I. Shekhter, and M. Jonson, Superconducting single-mode contact as a microwave-activated quantum interferometer, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2538–2541 (1998).
- [285] T. Wu, Y. Zhou, Y. Xu, S. Liu, and J. Li, Landau-Zener-Stückelberg interference in nonlinear regime, *Chin. Phys. Lett.* **36**, 124204 (2019).
- [286] M. Gong, Y. Zhou, D. Lan, Y. Fan, J. Pan, H. Yu, J. Chen, G. Sun, Y. Yu, S. Han, and P. Wu, Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interference in a 3D transmon driven by a chirped microwave, *Applied Phys. Lett.* **108**, 112602 (2016).
- [287] G. Giavaras and Y. Tokura, Spectroscopy of double quantum dot two-spin states by tuning the interdot barrier, *Phys. Rev. B* **99**, 075412 (2019).
- [288] J. Q. You, J. S. Tsai, and F. Nori, Hybridized solid-state qubit in the charge-flux regime, *Phys. Rev. B* **73**, 014510 (2006).
- [289] J. Q. You, X. Hu, S. Ashhab, and F. Nori, Low-decoherence flux qubit, *Phys. Rev. B* **75**, 140515 (2007).
- [290] A. F. Kockum, A. Miranowicz, S. D. Liberato, S. Savasta, and F. Nori, Ultrastrong coupling between light and matter, *Nature Reviews Physics* **1**, 19–40 (2019).
- [291] G. Wendin, Quantum information processing with superconducting circuits: a review, *Rep. Progr. Phys.* **80**, 106001 (2017).
- [292] J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box, *Phys. Rev. A* **76**, 042319 (2007).
- [293] S. N. Shevchenko, A. I. Ryzhov, and F. Nori, Low-frequency spectroscopy for quantum multilevel systems, *Phys. Rev. B* **98**, 195434 (2018).

- [294] K. Ono, S. N. Shevchenko, T. Mori, S. Moriyama, and F. Nori, Analog of a quantum heat engine using a single-spin qubit, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 166802 (2020).
- [295] I.-C. Hoi, *Quantum Optics with Propagating Microwaves in Superconducting Circuits*, Ph.D. thesis, Chalmers University of Technology, Sweden, Gothenburg, Sweden (2013).
- [296] M. Dragoman, *Quantum-Classical Analogies* (Springer Berlin Heidelberg, 2004).
- [297] S. Longhi, Quantum-optical analogies using photonic structures, *Laser Phot. Rev.* **3**, 243–261 (2009).
- [298] D. I. Bondar, R. Cabrera, and H. A. Rabitz, Conceptual inconsistencies in finite-dimensional quantum and classical mechanics, *Phys. Rev. A* **88**, 012116 (2013).
- [299] K. Y. Bliokh, A. Y. Bekshaev, A. G. Kofman, and F. Nori, Photon trajectories, anomalous velocities and weak measurements: a classical interpretation, *New J. Phys.* **15**, 073022 (2013).
- [300] J. Dressel, K. Y. Bliokh, and F. Nori, Classical field approach to quantum weak measurements, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 110407 (2014).
- [301] V. V. Zheleznyakov, V. V. Kocharovskii, and V. V. Kocharovskii, Linear coupling of electromagnetic waves in inhomogeneous weakly-ionized media, *Phys.-Uspekhi* **141**, 257 (1983).
- [302] K. Y. Bliokh and S. V. Grinyok, On the criterion for effectiveness of wave linear transformation in a smoothly inhomogeneous medium and of nonadiabatic transitions during atomic collisions, *J. Exp. Theor. Phys.* **93**, 71–79 (2001).
- [303] Z.-G. Chen, W. Tang, R.-Y. Zhang, Z. Chen, and G. Ma, Landau-Zener transition in the dynamic transfer of acoustic topological states, *Phys. Rev. Lett.* **126**, 054301 (2021).
- [304] S. Kapfinger, T. Reichert, S. Lichtmannecker, K. Müller, J. J. Finley,

- A. Wixforth, M. Kaniber, and H. J. Krenner, Dynamic acousto-optic control of a strongly coupled photonic molecule, *Nat. Commun.* **6**, 8540 (2015).
- [305] K. Y. Bliokh and F. Nori, Klein-Gordon representation of acoustic waves and topological origin of surface acoustic modes, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 054301 (2019).
- [306] B. K. Cooper and V. M. Yakovenko, Interlayer Aharonov-Bohm interference in tilted magnetic fields in quasi-one-dimensional organic conductors, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 037001 (2006).
- [307] C. Mathai, S. Masis, O. Shtempluck, S. Hacoheh-Gourgy, and E. Buks, Frequency mixing in a ferrimagnetic sphere resonator, *Eur. Phys. Lett.* **131**, 67001 (2020).
- [308] H. Wu, G. Heinrich, and F. Marquardt, The effect of Landau–Zener dynamics on phonon lasing, *New J. Phys.* **15**, 123022 (2013).
- [309] W. Jiang, C. J. Sarabalis, Y. D. Dahmani, R. N. Patel, F. M. Mayor, T. P. McKenna, R. V. Laer, and A. H. Safavi-Naeini, Efficient bidirectional piezo-optomechanical transduction between microwave and optical frequency, *Nat. Commun.* **11**, 1166 (2020).
- [310] Z.-Z. Zhang, X.-X. Song, G. Luo, Z.-J. Su, K.-L. Wang, G. Cao, H.-O. Li, M. Xiao, G.-C. Guo, L. Tian, G.-W. Deng, and G.-P. Guo, Coherent phonon dynamics in spatially separated graphene mechanical resonators, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **117**, 5582–5587 (2020).
- [311] A. G. Rojo and A. M. Bloch, The rolling sphere, the quantum spin, and a simple view of the Landau–Zener problem, *Am. J. Phys* **78**, 1014–1022 (2010).
- [312] M. Frimmer and L. Novotny, The classical Bloch equations, *Am. J. Phys* **82**, 947–954 (2014).
- [313] M. J. Seitner, H. Ribeiro, J. Kölbl, T. Faust, J. P. Kotthaus, and E. M. Weig, Classical Stückelberg interferometry of a nanomechanical two-mode system, *Phys. Rev. B* **94**, 245406 (2016).

- [314] H. Fu, Z.-C. Gong, T.-H. Mao, C.-P. Sun, S. Yi, Y. Li, and G.-Y. Cao, Classical analog of Stückelberg interferometry in a two-coupled-cantilever-based optomechanical system, *Phys. Rev. A* **94**, 043855 (2016).
- [315] H. Fu, G. Zhi-cheng, L.-P. Yang, T.-H. Mao, C.-P. Sun, S. Yi, Y. Li, and G.-Y. Cao, Coherent optomechanical switch for motion transduction based on dynamically localized mechanical modes, *Phys. Rev. App.* **9**, 054024 (2018).
- [316] C. L. G. Alzar, M. A. G. Martinez, and P. Nussenzeig, Classical analog of electromagnetically induced transparency, *Am. J. Phys.* **70**, 37–41 (2002).
- [317] C. M. Muirhead, B. Gunupudi, and M. S. Colclough, Photon transfer in a system of coupled superconducting microwave resonators, *J. Appl. Phys.* **120**, 084904 (2016).
- [318] R. J. C. Spreeuw, N. J. van Druten, M. W. Beijersbergen, E. R. Eliel, and J. P. Woerdman, Classical realization of a strongly driven two-level system, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2642–2645 (1990).
- [319] M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, L. Allen, and J. P. Woerdman, Multiphoton resonances and Bloch-Siegert shifts observed in a classical two-level system, *Phys. Rev. A* **45**, 1810–1815 (1992).
- [320] L. Novotny, Strong coupling, energy splitting, and level crossings: A classical perspective, *Am. J. Phys* **78**, 1199–1202 (2010).
- [321] H. J. Maris and Q. Xiong, Adiabatic and nonadiabatic processes in classical and quantum mechanics, *Am. J. Phys* **56**, 1114–1117 (1988).
- [322] M. J. Seitner, H. Ribeiro, J. Kölbl, T. Faust, and E. M. Weig, Finite-time Stückelberg interferometry with nanomechanical modes, *New J. Phys.* **19**, 033011 (2017).
- [323] X. Zhou, C. Zhao, D. Xiao, J. Sun, G. Sobreviela, D. D. Gerrard, Y. Chen, I. Flader, T. W. Kenny, X. Wu, and A. A. Seshia, Dynamic modulation of modal coupling in microelectromechanical gyroscopic ring resonators, *Nature Com.* **10**, 4980 (2019).

- [324] H. Lorenz, S. Kohler, A. Parafilo, M. Kiselev, and S. Ludwig, Visualized wave mechanics by coupled macroscopic pendula: Classical analogue to driven quantum bits, *ArXiv* (2022), 2207.09296 .
- [325] L. Chotorlishvili, A. Ugulava, G. Mchedlishvili, A. Komnik, S. Wimberger, and J. Berakdar, Nonlinear dynamics of two coupled nano-electromechanical resonators, *J. Phys. B: At., Mol. Opt. Phys.* **44**, 215402 (2011).
- [326] A. V. Parafilo, I. V. Krive, R. I. Shekhter, and M. Jonson, Nanoelectromechanics of superconducting weak links (Review Article), *Low Temp. Phys.* **38**, 273–282 (2012).
- [327] A. V. Parafilo and M. N. Kiselev, Tunable RKKY interaction in a double quantum dot nanoelectromechanical device, *Phys. Rev. B* **97**, 035418 (2018).
- [328] T. Villazon, A. Polkovnikov, and A. Chandran, Swift heat transfer by fast-forward driving in open quantum systems, *Phys. Rev. A* **100**, 012126 (2019).
- [329] A. V. Parafilo and M. N. Kiselev, Tunable RKKY interaction in a double quantum dot nanoelectromechanical device, *Phys. Rev. B* **97**, 035418 (2018).
- [330] D. M. Berns, W. D. Oliver, S. O. Valenzuela, A. V. Shytov, K. K. Berggren, L. S. Levitov, and T. P. Orlando, Coherent quasiclassical dynamics of a persistent current qubit, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 150502 (2006).
- [331] A. Chatterjee, S. N. Shevchenko, S. Barraud, R. M. Otxoa, F. Nori, J. J. L. Morton, and M. F. Gonzalez-Zalba, A silicon-based single-electron interferometer coupled to a fermionic sea, *Phys. Rev. B* **97**, 045405 (2018).
- [332] H. J. Maris and Q. Xiong, Adiabatic and nonadiabatic processes in classical and quantum mechanics, *Am. J. Phys.* **56**, 1114–1117 (1988).
- [333] P. R. Hemmer and M. G. Prentiss, Coupled-pendulum model of the stimulated resonance Raman effect, *J. Opt. Soc. Am. B* **5**, 1613 (1988).
- [334] R. J. C. Spreeuw, N. J. van Druten, M. W. Beijersbergen, E. R. Eliel, and

- J. P. Woerdman, Classical realization of a strongly driven two-level system, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2642–2645 (1990).
- [335] C. L. Garrido Alzar, M. A. G. Martinez, and P. Mussenzveig, Classical analog of electromagnetically induced transparency, *Am. J. Phys.* **70**, 37 (2002).
- [336] T. Faust, J. Rieger, M. J. Seitner, J. P. Kotthaus, and E. M. Weig, Coherent control of a classical nanomechanical two-level system, *Nat. Phys.* **9**, 485–488 (2013).
- [337] H. Okamoto, A. Gourgout, C.-Y. Chang, K. Onomitsu, I. Mahboob, E. Y. Chang, and H. Yamaguchi, Coherent phonon manipulation in coupled mechanical resonators, *Nat. Phys.* **9**, 480–484 (2013).
- [338] G.-W. Deng, D. Zhu, X.-H. Wang, C.-L. Zou, J.-T. Wang, H.-O. Li, G. Cao, D. Liu, Y. Li, M. Xiao, G.-C. Guo, K.-L. Jiang, X.-C. Dai, and G.-P. Guo, Strongly coupled nanotube electromechanical resonators, *Nano Lett.* **16**, 5456–5462 (2016).
- [339] H. Fu, Z. C. Gong, T.-H. Mao, C.-P. Sun, S. Yi, Y. Li, and G.-Y. Cao, Classical analog of Stückelberg interferometry in a two-coupled-cantilever-based optomechanical system, *Phys. Rev. A* **94**, 043855 (2016).
- [340] M. Di Ventra, Y. V. Pershin, and L. O. Chua, Circuit elements with memory: Memristors, memcapacitors, and meminductors, *Proc. IEEE* **97**, 1717–1724 (2009).
- [341] F. L. Traversa, F. Bonani, Y. V. Pershin, and M. Di Ventra, Dynamic computing random access memory, *Nanotechnology* **25**, 285201 (2014).
- [342] Y. V. Pershin, F. L. Traversa, and M. Di Ventra, Memcomputing with membrane memcapacitive systems, *Nanotechnology* **26**, 225201 (2015).
- [343] J. Martinez-Rincon and Y. V. Pershin, Bistable non-volatile elastic membrane memcapacitor exhibiting chaotic behavior, *IEEE Trans. El. Dev.* **58**, 1809 (2011).
- [344] Q. Lai, L. Zhang, Z. Li, W. F. Stickle, R. S. Williams, and Y. Chen, Analog

- memory capacitor based on field-configurable ion-doped polymers, *Appl. Phys. Lett.* **95**, 213503 (2009).
- [345] J. Martinez-Rincon, M. Di Ventra, and Y. V. Pershin, Solid-state memcapacitive system with negative and diverging capacitance, *Phys. Rev. B* **81**, 195430 (2010).
- [346] S. N. Shevchenko, Y. V. Pershin, and F. Nori, Qubit-based memcapacitors and meminductors, *Phys. Rev. Applied* **6**, 014006 (2016).
- [347] N. Lindahl, D. Midtvedt, J. Svensson, O. A. Nerushev, N. Lindvall, A. Isacsson, and E. E. B. Campbell, Determination of the bending rigidity of graphene via electrostatic actuation of buckled membranes, *Nano Lett.* **12**, 3526–3531 (2012).
- [348] P. Weber, J. Guttinger, I. Tsioutsios, D. E. Chang, and A. Bachtold, Coupling graphene mechanical resonators to superconducting microwave cavities, *Nano Lett.* **14**, 2854–2860 (2014).
- [349] P. Lambin, Elastic properties and stability of physisorbed graphene, *Appl. Sci.* **4**, 282 (2014).
- [350] M. M. Benameur, F. Gargiulo, S. Manzeli, G. Autes, M. Tosun, O. V. Yazyev, and A. Kis, Electromechanical oscillations in bilayer graphene, *Nat. Comm.* **6**, 8582 (2015).
- [351] D. Davidovikj, J. J. Slim, S. J. Cartamil-Bueno, H. S. J. van der Zant, P. G. Steeneken, and W. J. Venstra, Visualizing the motion of graphene nanodrums, *Nano Lett.* **16**, 2768–2773 (2016).
- [352] O. V. Sedelnikova, L. G. Bulusheva, A. V. Okotrub, and Y. V. Pershin, Spontaneous symmetry breaking during the switching of a buckled graphene membrane, *JETP Letters* **103**, 244–247 (2016).
- [353] A. M. Eriksson, D. Midtvedt, A. Croy, and A. Isacsson, Frequency tuning, nonlinearities and mode coupling in circular mechanical graphene resonators, *Nanotechnology* **24**, 395702 (2013).
- [354] M. Tomi, A. Isacsson, M. Oksanen, D. Lyashenko, J.-P. Kaikkonen,

- S. Tervakangas, J. Kolehmainen, and P. J. Hakonen, Buckled diamond-like carbon nanomechanical resonators, *Nanoscale* **7**, 14747 (2015).
- [355] M. Abdi, P. Degenfeld-Schonburg, M. Sameti, C. Navarrete-Benlloch, and M. J. Hartmann, Dissipative optomechanical preparation of macroscopic quantum superposition states, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 233604 (2016).
- [356] L. L. Bonilla and M. Ruiz-Garcia, Critical radius and temperature for buckling in graphene, *Phys. Rev. B* **93**, 115407 (2016).
- [357] J. Qiu, J. H. Lang, and A. H. Slocum, A curved-beam bistable mechanism, *J. Microelectromech. Sys.* **13**, 137 (2004).
- [358] P. Cazottes, A. Fernandes, J. Pouget, and M. Hafez, Bistable buckled beam: Modeling of actuating force and experimental validations, *J. Mech. Des.* **131**, 101001 (2009).
- [359] M. H. Bitarafan, H. Ramp, T. W. Allen, C. Potts, X. Rojas, A. J. R. MacDonald, J. P. Davis, and R. G. DeCorby, Thermo-mechanical characterization of on-chip buckled dome fabry-perot microcavities, *J. Opt. Soc. Am. B* **32**, 1214 (2015).
- [360] L. Medina, R. Gilat, and S. Krylov, Symmetry breaking in an initially curved pre-stressed micro beam loaded by a distributed electrostatic force, *Int. J. Solid. Struct.* **51**, 2047–2061 (2014).
- [361] H.-B. Chen, N. Lambert, Y.-C. Cheng, Y.-N. Chen, and F. Nori, Using non-Markovian measures to evaluate quantum master equations for photosynthesis, *Sci. Rep.* **5**, 12753 (2015).
- [362] S. Krylov, B. R. Ilic, D. Schreiber, S. Seretensky, and H. Craighead, The pull-in behavior of electrostatically actuated bistable microstructures, *J. Micromech. Microeng.* **18**, 055026 (2008).
- [363] L. Medina, R. Gilat, and S. Krylov, Symmetry breaking in an initially curved micro beam loaded by a distributed electrostatic force, *Int. J. Solid. Struct.* **49**, 1864–1876 (2012).
- [364] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity* (Pergamon Press, 1975).

- [365] M. Gomez, D. E. Moulton, and D. Vella, Critical slowing down in purely elastic 'snap-through' instabilities, *Nat. Phys.* **13**, 142 (2017).

Додаток А.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. **O. V. Ivakhnenko**, S. N. Shevchenko and Franco Nori, "Simulating quantum dynamical phenomena using classical oscillators: Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry, latching modulation, and motional averaging", *Sci. Rep.* **8**, 12218 (2018),
DOI: 10.1038/s41598-018-28993-8
2. Ruslan D. Yamaletdinov, **Oleg V. Ivakhnenko**, Olga V. Sedelnikova, Sergey N. Shevchenko, Yuriy V. Pershin, "Snap-through transition of buckled graphene membranes for memcapacitor applications", *Sci. Rep.* **8**, 3566 (2018), DOI: 10.1038/s41598-018-21205-3
3. P. Y. Wen and **O. V. Ivakhnenko**, M. A. Nakonechnyi, B. Suri and J.-J. Lin, W.-J. Lin, J. C. Chen, S. N. Shevchenko, Franco Nori and I.-C. Hoi, "Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry of a superconducting qubit in front of a mirror", *Phys. Rev. B* **102**, 075448 (2020),
DOI: 10.1103/physrevb.102.075448
4. **Oleh V. Ivakhnenko**, Sergey N. Shevchenko, Franco Nori, "Nonadiabatic Landau-Zener-Stückelberg-Majorana transitions, dynamics, and interference", *Phys. Rep.* **995**, 1-89 (2022),
DOI: 10.1016/j.physrep.2022.10.002
5. **O. V. Ivakhnenko**, S. N. Shevchenko, "Simulating quantum dynamical phenomena using classical oscillators", International school & conference on nanoscience and quantum transport (nanoQT-2016), 8-14 October, 2016, Kyiv, Ukraine, Poster, onsite (2016).
6. **O.V. Ivakhnenko** and S.N. Shevchenko, "Interferometry with nanomechanical resonator", Student conference on Applied Physics "Actual problems of modern physics", 25 Nov, 2016, Kharkiv, Ukraine, Abstracts, p. 21 (2016).

7. **O. V. Ivakhnenko**, S. N. Shevchenko, R. D. Yamaletdinov, and Y. V. Pershin, "Dynamics of a membrane for creation of a memcapacitance", VIII International Conference for Professionals & Young Scientists low temperature physics (ICPYS-LTP2017), 29 May-2 June, 2017, Kharkiv, Ukraine, Abstracts, p. 147 (2017).
8. **O. V. Ivakhnenko**, S. N. Shevchenko, R. D. Yamaletdinov, and Y. V. Pershin, "Elastic dynamics of the membrane to create the memcapacitors", Student conference on Applied Physics "Actual problems of modern physics", 24 Nov, 2017, Kharkiv, Ukraine, Abstracts, p. 31 (2017).
9. **O. V. Ivakhnenko** and S. N. Shevchenko and Franco Nori, "LANDAU-ZENER-STÜCKELBERG-MAJORANA Landau-Zener-Stückelberg-Majorana interferometry, latching modulation, and motional averaging – dynamical quantum phenomena simulated by coupled classical oscillators", IX International Conference for Professionals & Young Scientists low temperature physics (ICPYS-LTP2018), 4-8 June, 2018, Kharkiv, Ukraine, Abstracts, p. 183 (2018).
10. **O. V. Ivakhnenko** and S. N. Shevchenko and Franco Nori, "Qubit and coupled mechanical resonators, similarities and differences of behaviour", International School and Symposium on Nanoscale Transport and photonics 2019 (ISNTT2019), 18-22 November, 2019, Atsugi, Japan.
11. **O. V. Ivakhnenko** and S. N. Shevchenko and Franco Nori, "Comparison of approaches for description of driven qubits", International Advanced Study Conference «Condensed Matter and Low Temperature Physics 2020», (CM<P 2020), 8-14 June, 2020, Kharkiv, Ukraine, Online, Abstracts, p. 167 (2020).
12. **O. V. Ivakhnenko** and S. N. Shevchenko and Franco Nori, "Occupation-conservation transition in a quantum two-level system", XI Conference of Young Scientists "Problems of Theoretical Physics", ("Problems of Theoretical Physics"), 21-23 December, 2020, Kyiv, Ukraine, Online, Abstracts, p. 23 (2020).

13. **O. V. Ivakhnenko** and S. N. Shevchenko and Franco Nori, "Simulating quantum dynamical phenomena using classical oscillators", American Physics Society March meeting 2021 ("APS March meeting"), 15-19 March, 2021, Online, USA, Abstracts, p. P31.003 (2021).
14. **O. V. Ivakhnenko** and S. N. Shevchenko and Franco Nori, "Ultrafast Landau-Zener-Stückelberg-Majorana (LZSM) gates", International Symposium on Novel maTerials and quantum Technologies (ISNTT2021), 14-17 November, 2021, Atsugi, Japan, Online.
15. **O. V. Ivakhnenko** and S. N. Shevchenko and Franco Nori, "Landau-Zener-Stuckelberg-Majorana transitions for interferometry and quantum control", American Physics Society March meeting 2022 ("APS March meeting"), 14-18 March, 2022, Chicago, USA, Online, Abstracts, p. Q38.00010 (2022).
16. **O. V. Ivakhnenko** and S. N. Shevchenko, M. F. Gonzalez-Zalba and Franco Nori, "Landau-Zener-Stückelberg-Majorana transitions for fast quantum logic gates", 29th International Conference on low temperature physics" (LT29), 18-24 August, 2022, Sapporo, Japan, Online, Abstracts, p. P20-SF4-24 (2022).
17. **O. V. Ivakhnenko**, S. N. Shevchenko, and Franco Nori, "Nonadiabatic Landau-Zener-Stuckelberg-Majorana transitions dynamics, and interference", American Physics Society March meeting 2023 ("APS March meeting"), 20-22 March, 2023, Los-Angeles, USA, Online, Abstracts, p. UU05.00006 (2023).

Додаток Б.

Відомості про апробацію результатів дисертації

- International school & conference on nanoscience and quantum transport (nanoQT-2016) (Kyiv Ukraine, 8-14 October 2016)
- Student conference on Applied Physics "Actual problems of modern physics" (Kharkiv, Ukraine, 25 November 2016)
- VIII International Conference for Professionals & Young Scientists low temperature physics (ICPYS-LTP2017), 29 May-2 June, 2017, Kharkiv, Ukraine
- Student conference on Applied Physics "Actual problems of modern physics", 24 Nov, 2017, Kharkiv, Ukraine
- IX International Conference for Professionals & Young Scientists low temperature physics (ICPYS-LTP2018), 4-8 June, 2018, Kharkiv, Ukraine
- International School and Symposium on Nanoscale Transport and photonics 2019 (ISNTT2019), 18-22 November, 2019, Atsugi, Japan
- International Advanced Study Conference «Condensed Matter and Low Temperature Physics 2020», (CM<P 2020), 8-14 June, 2020, Kharkiv, Ukraine
- International Advanced Study Conference «Condensed Matter and Low Temperature Physics 2020», (CM<P 2020), 8-14 June, 2020, Kharkiv, Ukraine
- XI Conference of Young Scientists "Problems of Theoretical Physics", ("Problems of Theoretical Physics"), 21-23 December, 2020, Kyiv, Ukraine
- American Physics Society March meeting 2021 ("APS March meeting"), 15-19 March, 2021, Online, USA
- International Symposium on Novel materials and quantum Technologies (ISNTT2021), 14-17 November, 2021, Atsugi, Japan

- American Physics Society March meeting 2022 ("APS March meeting"), 14-18 March, 2022, Chicago, USA, Online
- 29th International Conference on low temperature physics" (LT29), 18-24 August, 2022, Sapporo, Japan, Online
- American Physics Society March meeting 2023 ("APS March meeting"), 20-22 March, 2023, Los-Angeles, USA, Online