

ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР
ім. Б.І. ВЕРКІНА НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна
Національної академії наук України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Карпенко Ірина Миколаївна

УДК 517.955, 517.957

ДИСЕРТАЦІЯ

МЕТОД ЗАДАЧІ РІМАНА–ГІЛЬБЕРТА ДЛЯ МОДИФІКОВАНОГО РІВНЯННЯ КАМАССИ–ХОЛЬМА З НЕНУЛЬОВИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

111 — Математика

11 — Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

 _____ Карпенко І.М.

Науковий керівник: **Шепельський Дмитро Георгійович**, доктор
фізико-математичних наук, старший науковий
співробітник

Анотація

Карпенко І. М., “Метод задачі Рімана–Гільберта для модифікованого рівняння Камасси–Хольма з ненульовими крайовими умовами,” – кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «математика» (галузь знань 11 «математика та статистика»). Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України.

Метою дослідження дисертаційної роботи є розробка методу оберненої задачі розсіювання у формі задачі Рімана–Гільберта (РГ) для модифікованого рівняння Камасси–Хольма (МКХ):

$$m_t + ((u^2 - u_x^2)m)_x = 0, \quad m := u - u_{xx},$$

з метою дослідження властивостей розв’язків цього рівняння, зокрема, асимптотики за великим часом.

Основними постановками задачі є такі:

- (i) Задача Коші на x -осі у випадку, коли розв’язок прямує до ненульової сталої при $|x| \rightarrow \infty$.
- (ii) Задача Коші на x -осі у випадку, коли розв’язок прямує до двох різних сталих при $x \rightarrow +\infty$ та $x \rightarrow -\infty$.

У розділі 2 розглядається задача Коші для модифікованого рівняння Камасси–Хольма на осі:

$$\begin{aligned} m_t + ((u^2 - u_x^2)m)_x &= 0, & m &:= u - u_{xx}, & t &> 0, & -\infty < x < +\infty, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & & & & & -\infty < x < +\infty, \end{aligned}$$

за умови, що

$$u_0(x) \rightarrow 1 \quad \text{коли } x \rightarrow \pm\infty$$

і що еволюція за часом зберігає цю поведінку: $u(x, t) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \pm\infty$ для всіх $t > 0$. Рівняння мКХ є модифікацією, з кубічною нелінійністю, оригінального рівняння Камасси–Хольма (КХ)

$$m_t + (um)_x + u_x m = 0, \quad m := u - u_{xx}.$$

Рівняння мКХ, як і рівняння КХ, є інтегровним у тому сенсі, що воно є умовою сумісності відповідної пари лінійних диференціальних рівнянь — так званих рівнянь пари Лакса. Завдяки ненульовому фону, x -рівняння з пари Лакса для рівняння мКХ можна розглядати як спектральну задачу, яка має неперервний спектр. Це дозволяє сформулювати обернену спектральну задачу (обернену задачу розсіювання) як задачу аналітичної факторизації Рімана–Гільберта у комплексній площині спектрального параметра, з умовою стрибка на дійсній осі (яка є неперервним спектром).

Запропонований формалізм задачі Рімана–Гільберта ґрунтується на адаптації загальної ідеї — використання спеціальних розв’язків (розв’язків Йоста) асоційованих рівнянь пари Лакса як «блоків» для побудови матричної задачі Рімана–Гільберта, тобто задачі аналітичної факторизації у комплексній площині спектрального параметра, яку параметризовано просторовою та часовою змінними нелінійного рівняння — до випадку рівняння мКХ, з урахуванням особливостей рівнянь асоційованої пари Лакса.

Стандартна пара Лакса для рівняння мКХ, відома в літературі, має форму 2×2 матричних лінійних диференціальних рівнянь:

$$\Phi_x(x, t, \lambda) = U(x, t, \lambda)\Phi(x, t, \lambda), \quad \Phi_t(x, t, \lambda) = V(x, t, \lambda)\Phi(x, t, \lambda),$$

де матриці-коефіцієнти \mathbf{U} та \mathbf{V} визначено у термінах розв'язку рівняння мКХ:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \lambda m \\ -\lambda m & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \lambda^{-2} + \frac{u^2 - u_x^2}{2} & -\frac{u - u_x}{\lambda} - \frac{\lambda(u^2 - u_x^2)m}{2} \\ \frac{(u + u_x)}{\lambda} + \frac{\lambda(u^2 - u_x^2)m}{2} & -\lambda^{-2} - \frac{u^2 - u_x^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що x -рівняння пари Лакса (включає \mathbf{U} та є спектральною задачею зі спектральним параметром λ), має дві особливості, що суттєво впливають на аналітичні властивості розв'язків Йоста: (а) λ входить у \mathbf{U} як добуток з “моментом” $m(x, t)$, який у рамках оберненої задачі є невідомою функцією; (б) коли $|x| \rightarrow \infty$, $m(x, t)$ прямує до ненульової сталої. Зокрема, ці особливості впливають на проблему контролю поведінки розв'язків Йоста, коли $\lambda \rightarrow \infty$. У дисертації цю проблему вирішено таким чином: (i) застосовуючи калібрувальні перетворення, рівняння пари Лакса трансформовано до зручної форми, у якій діагональні члени домінують у певному сенсі, коли $\lambda \rightarrow \infty$; (ii) введено нову просторову змінну, що дозволяє отримати явний опис поведінки розв'язків Йоста при $\lambda \rightarrow \infty$ у термінах (нової) просторової та часової змінних; (iii) введено новий (уніформізуючий) спектральний параметр μ , який дозволяє уникнути нераціональної залежності коефіцієнтів у рівняннях пари Лакса від спектрального параметра.

Крім того, використано наслідок властивості (а), який полягає у тому, що при $\lambda = 0$ матриця коефіцієнтів \mathbf{U} стає незалежною від u . Ця властивість дозволяє побудувати ефективний алгоритм отримання розв'язку задачі Коші для рівняння мКХ з розв'язку асоційованої задачі РГ, розглядаючи поведінку останнього при $\lambda \rightarrow 0$. Зазначимо, що у цьому відношенні рівняння мКХ суттєво відрізняється від інших рівнянь типу Камасси-Холма (включно з оригінальним рівнянням КХ): для контролю розв'язків Йоста при $\lambda = 0$ не треба вводити нове калібрувальне перетворення початкової пари Лакса, а достатньо перегрупувати члени у парі Лакса, яка забезпечує ефективний контроль її розв'язків при $\lambda \rightarrow \infty$.

З використанням розробленого формалізму отримано параметричне зображення розв'язку задачі Коші для рівняння мКХ на постійному фоні в

термінах розв'язку асоційованої задачі РГ, дані для якої (матриця стрибків і параметри для умов на залишки у сингулярних точках, якщо вони наявні) однозначно визначаються початковими даними для задачі Коші.

Запропонований формалізм дозволяє охарактеризувати як регулярні, так і нерегулярні односолітонні розв'язки (розв'язки, що генеруються однією (с точністю до симетрій) сингулярною умовою та мають вигляд локалізованого збурення, що розповсюджується зі сталою швидкістю, не міняючи своєї форми). Такі розв'язки відповідають задачам РГ з тривіальною умовою стрибка та відповідним чином заданими умовами на лишки у сингулярних точках. Зокрема, виділено два типи нерегулярних солітонних розв'язків рівняння мКХ: (і) розв'язки піконного типу, які є функціями неперервними разом із першою похідною, але мають необмежені похідні порядків більших за 2 у точці піку; (ii) петлеподібні багатозначні розв'язки.

Теорема. *Рівняння мКХ має односолітонні розв'язки (серед яких є як регулярні, так і нерегулярні), які характеризуються двома параметрами, $\hat{\delta} > 0$ та $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, та даються у параметричній формі формулою $u(x, t) \equiv \hat{u}(y(x - t, t), t) + 1$, де*

$$\begin{aligned}\hat{u}(y, t) &= 4 \tan^2 \theta \frac{z^2(y, t) + 2 \cos^2 \theta \cdot z(y, t) + \cos^2 \theta}{(z^2(y, t) + 2z(y, t) + \cos^2 \theta)^2} z(y, t), \\ x(y, t) &= y + 2 \ln \frac{z(y, t) + 1 + \sin \theta}{z(y, t) + 1 - \sin \theta}, \\ z(y, t) &= 2\hat{\delta} \sin \theta e^{y \sin \theta} e^{-\frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} t}.\end{aligned}$$

В залежності від значення параметра θ , розв'язки мають якісно різні властивості:

- (і) При $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$, односолітонні розв'язки є гладкими функціями вихідних фізичних змінних (x, t) .
- (ii) При $\theta = \frac{\pi}{3}$, односолітонні розв'язки мають скінчену гладкість у змінних (x, t) у точці піку.
- (iii) При $\theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, односолітонні розв'язки є регулярними функціями

у змінних (y, t) але стають багатозначними (петлеподібними) у змінних (x, t) .

У **розділі 3**, використовуючи формалізм, розроблений у розділі 2, отримано головні члени асимптотики за великого часу t для розв'язку задачі Коші для модифікованого рівняння Камасси–Хольма на сталому ненульовому фоні. Дослідження зосереджене на безсолітонному випадку, тобто у припущенні, що умови на лишки відсутні (нерегулярну задачу Рімана–Гільберта (яка включає в себе умови на лишки) для загального випадку можна звести до регулярної, використовуючи множники Бляшке–Потапова).

Для асимптотичного аналізу розв'язку задачі Коші, коли $t \rightarrow \infty$, застосовано нелінійний метод найскорішого спуску. Попередньо, вихідну задачу РГ, асоційовану з рівнянням мКХ, яка має специфічні сингулярності при $\mu = \pm 1$, зведено до звичайної задачі РГ (тобто такої, що має тільки умову стрибка та умову нормування). Примітною особливістю модифікованого рівняння Камасси–Хольма є те, що асоційована вихідна задача РГ має умови сингулярності у $\mu = 1$ та $\mu = -1$ з різними матричними структурами, що не дозволяє позбутися їх шляхом зведення матричної задачі РГ до векторної (що має місце у випадку звичайного рівняння Камасси–Хольма). Цю проблему розв'язано у два кроки. На першому кроці, задачу РГ з умовами сингулярності у $\mu = \pm 1$ зведено до задачі РГ, що характеризується такими двома умовами: (i) елементи матричного розв'язку регулярні у $\mu = \pm 1$, але його визначник дорівнює нулю у цих точках (зазначимо, що $\det M(\mu) \equiv 1$ для розв'язку вихідної задачі РГ); (ii) розв'язок є сингулярним при $\mu = 0$. Другим кроком, знаходимо зображення розв'язку цієї задачі РГ через розв'язок відповідної регулярної задачі. Саме розв'язок отриманої регулярної задачі РГ проаналізовано асимптотично при $t \rightarrow +\infty$, адаптуючи нелінійний метод найскорішого спуску. У підсумку, отримано головні асимптотичні члени для розв'язку $u(x, t)$ задачі Коші у тих секторах напівплощини (x, t) , де відхилення від фону є нетривіальним (у решті секторів, $\frac{x}{t} > 3$ і $\frac{x}{t} < \frac{3}{4}$, $u(x, t)$ швидко спадає до 1).

Теорема. Нехай $u_0(x)$ — гладка функція така, що (i) вона достатньо швидко прямує до 1, коли $x \rightarrow \pm\infty$, і задовольняє нерівність $(1 - \partial_x^2)u_0(x) > 0$ для всіх x та (ii) асоційована з нею спектральна функція $a(\mu)$ не має нулів у верхній півплощині (безсолітонний випадок).

Тоді у секторах (x, t) півплощини, які задано нерівностями $1 < \frac{x}{t} < 3$ та $\frac{3}{4} < \frac{x}{t} < 1$, розв'язок $u(x, t)$ задачі Коші має таку асимптотичну поведінку за великим часом:

(i) Для $1 < \frac{x}{t} < 3$,

$$u(x, t) = 1 + \frac{C_1(\zeta)}{\sqrt{t}} \cos \left\{ C_2(\zeta)t + C_3(\zeta) \ln t + \tilde{C}_4(\zeta) \right\} + o(t^{-1/2});$$

(ii) Для $\frac{3}{4} < \frac{x}{t} < 1$,

$$u(x, t) = 1 + \sum_{j=0,1} \frac{C_1^{(j)}(\zeta)}{\sqrt{t}} \cos \left\{ C_2^{(j)}(\zeta)t + C_3^{(j)}(\zeta) \ln t + \tilde{C}_4^{(j)}(\zeta) \right\} + o(t^{-1/2}),$$

де $C_i, C_i^{(j)}, \tilde{C}_4, \tilde{C}_4^j$ — функції від $\zeta := \frac{x}{t}$, визначені у термінах спектральних функцій, які, у свою чергу, однозначно визначаються початковими даними $u_0(x)$.

У розділі 4 розглянуто задачу Коші для модифікованого рівняння Камасси–Холма у випадку, у якому розв'язок прямує до двох різних констант, коли просторова змінна прямує до різних нескінченностей дійсної осі:

$$\begin{aligned} m_t + ((u^2 - u_x^2)m)_x &= 0, & m &:= u - u_{xx}, & t &> 0, & -\infty < x < +\infty, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & & & & & -\infty < x < +\infty, \end{aligned}$$

де

$$u_0(x) \rightarrow \begin{cases} A_1, & x \rightarrow -\infty, \\ A_2, & x \rightarrow \infty \end{cases}$$

і еволюція за часом зберігає цю поведінку:

$$u(x, t) \rightarrow \begin{cases} A_1, & x \rightarrow -\infty, \\ A_2, & x \rightarrow \infty \end{cases}$$

для всіх t .

Розроблено формалізм задачі Рімана–Гільберта для цієї задачі Коші. Для цього застосовано перетворення рівнянь пари Лакса, які дозволяють детально дослідити аналітичні властивості відповідних розв’язків Йоста та спектральних функцій, зокрема, симетрії та поведінку в точках розгалуження. При побудові задачі Рімана–Гільберта використано трансформовані пари Лакса, що включають функції $k_j(\lambda) := \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{A_j^2}}$, $j = 1, 2$, визначені як такі, що мають вітки з розрізами вздовж $(-\infty, -\frac{1}{A_j})$ та $(\frac{1}{A_j}, \infty)$. Подібно до випадку з постійним фоном, за допомогою аналізу поведінки розв’язку побудованої задачі Рімана–Гільберта при $\lambda = 0$ отримано параметричне зображення розв’язку задачі Коші.

Теорема. *Припустимо, що задача Рімана–Гільберта, асоційована з початковими даними $u_0(x)$, має розв’язок $\hat{M}(y, t, x)$ з розвиненням*

$$\hat{M}(y, t, \lambda) = i \begin{pmatrix} 0 & \hat{a}_1(y, t) \\ \hat{a}_1^{-1}(y, t) & 0 \end{pmatrix} + i\lambda \begin{pmatrix} \hat{a}_2(y, t) & 0 \\ 0 & \hat{a}_3(y, t) \end{pmatrix} + O(\lambda^2)$$

при $\lambda \rightarrow 0$. Тоді розв’язок $u(x, t)$ задачі Коші можна зобразити у параметричній формі у термінах $\hat{a}_j(y, t)$, $j = 1, 2, 3$ таким чином: $u(x, t) = \hat{u}(y(x, t), t)$, де

$$\begin{aligned} \hat{u}(y, t) &= \hat{a}_1(y, t)\hat{a}_2(y, t) + \hat{a}_1^{-1}(y, t)\hat{a}_3(y, t), \\ x(y, t) &= y - 2 \ln \hat{a}_1(y, t) + A_2^2 t. \end{aligned}$$

Крім того, $\hat{u}_x(y, t)$ також може бути алгебраїчно зображено у термінах $\hat{a}_j(y, t)$, $j = 1, 2, 3$, а саме: $u_x(x, t) = \hat{u}_x(y(x, t), t)$, де

$$\hat{u}_x(y, t) = -\hat{a}_1(y, t)\hat{a}_2(y, t) + \hat{a}_1^{-1}(y, t)\hat{a}_3(y, t).$$

Ключові слова: диференціальні рівняння з частинними похідними, інтегровні нелінійні рівняння, модифіковане рівняння Камасси–Хольма, задача Рімана–Гільберта, спектральна задача, пара Лакса, симетрії, пряма задача розсіювання, обернена задача розсіювання, метод оберненої задачі розсіювання, нелінійний метод найшвидшого спуску, солітон, асимптотика.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

1. A. Boutet de Monvel, I. Karpenko, D. Shepelsky, “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with nonzero boundary conditions”, *J. Math. Phys.* **61**, No. 3, 031504, 24 (2020).
<https://doi.org/10.1063/1.5139519>
2. I. Karpenko, “Long-time asymptotics for the modified Camassa–Holm equation with nonzero boundary conditions”, *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry* **16**, No.2, 224–252 (2022).
<https://doi.org/10.15407/mag18.02.224>
3. I. Karpenko, D. Shepelsky, G. Teschl “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with step-like boundary conditions”, *Monatshefte für Mathematik* **201**, (2023), 127–172.
<https://doi.org/10.1007/s00605-022-01786-y>

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

4. I. Karpenko, D. Shepelsky, “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with nonzero boundary conditions”, VI International Conference “Analysis and Mathematical Physics”, Kharkiv, Ukraine (June 2018).
5. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The Riemann–Hilbert approach to the Cauchy problem for the modified Camassa–Holm equation”, 6th Ya. B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications, Vinnytsia, Ukraine (June 2019).
6. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The inverse scattering transform, in the form of Riemann–Hilbert problem, for the modified Camassa–Holm equation”, international Conference dedicated to 70th anniversary of Professor A.M.Plichko “Banach Spaces and their Applications”, Lviv, Ukraine (June 2019).

7. I. Karpenko, D. Shepelsky, “A Riemann–Hilbert problem approach to the modified Camassa–Holm equation on a nonzero background”, Pidzakharychi, Ukraine (August 2019).
8. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The modified Camassa–Holm equation on a nonzero background: large-time asymptotics for the Cauchy problem”, Workshop “New horizons in dispersive hydrodynamics”, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, United Kingdom (June 2021).
9. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The large-time asymptotics for the modified Camassa–Holm equation on a non-zero background”, 5-th International Conference “DIFFERENTIAL EQUATIONS and CONTROL THEORY”, V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine (September 2021).
10. I. Karpenko, D. Shepelsky, G. Teschl, “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with step-like boundary conditions”, Ivano-Frankivsk, Ukraine (May 2022).
11. I. Karpenko, “The modified Camassa–Holm equation on a step-like background”, Complex Analysis, Spectral Theory and Approximation meet in Linz, Johannes Kepler University, Linz, Austria (July 2022).
12. I. Karpenko, “A Riemann–Hilbert problem approach to the modified Camassa–Holm equation on a step like background”, Workshop From Modeling and Analysis to Approximation and Fast Algorithms, Hasenwinkel, Germany (December 2022).

Abstract

I. Karpenko, “The modified Camassa–Holm equation with nonvanishing boundary conditions by a Riemann–Hilbert approach,” – Scholarly manuscript.

PhD Thesis in Mathematics (specialty code: 111). B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine.

This Thesis aims at the development of the inverse scattering transform (IST), in the form of a Riemann–Hilbert problem, for the modified Camassa–Holm (mCH) equation:

$$m_t + ((u^2 - u_x^2)m)_x = 0, \quad m := u - u_{xx},$$

in order to study properties of solutions of the mCH equations, particularly, their the long-time behavior.

Two main problem settings are as follows:

- (i) The Cauchy problem on the whole x -line in the case when the solution is assumed to approach a non-zero constant as $|x| \rightarrow \infty$.
- (ii) The Cauchy problem on the whole x -line in the case when the solution is assumed to approach two different constants as $x \rightarrow +\infty$ and $x \rightarrow -\infty$.

In **Chapter 2**, we consider the Cauchy problem for the modified Camassa–Holm equation on the line:

$$m_t + ((u^2 - u_x^2)m)_x = 0, \quad m := u - u_{xx}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

assuming that

$$u_0(x) \rightarrow 1 \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty$$

and that the time evolution preserves this behavior: $u(x, t) \rightarrow 1$ as $x \rightarrow \pm\infty$ for all $t > 0$. A non-zero background provides that the spectral problem in the associated Lax pair equations has a continuous spectrum, which allows us to formulate the inverse spectral problem as a Riemann–Hilbert factorization problem with jump conditions across the real axis (constituting the continuous spectrum).

Our development of the Riemann–Hilbert problem formalism is based on the adaptation of a general idea — the use of dedicated (Jost) solutions of the associated Lax pair equations as “building block” for a matrix-valued Riemann–Hilbert problem, which is to be formulated in the complex plane of the spectral parameter and parameterized by the spatial and temporal variable of the nonlinear equation in question — to the case of the mCH equation taking into account particular features of its Lax pair equations.

The Lax pair originally proposed and conventionally used in studies of the mCH equation has the form of 2×2 matrix linear differential equations:

$$\Phi_x(x, t, \lambda) = \mathbf{U}(x, t, \lambda)\Phi(x, t, \lambda), \quad \Phi_t(x, t, \lambda) = \mathbf{V}(x, t, \lambda)\Phi(x, t, \lambda)$$

where the coefficient matrices \mathbf{U} and \mathbf{V} are defined in terms of a solution of the mCH equation:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \lambda m \\ -\lambda m & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \lambda^{-2} + \frac{u^2 - u_x^2}{2} & -\frac{u - u_x}{\lambda} - \frac{\lambda(u^2 - u_x^2)m}{2} \\ \frac{(u + u_x)}{\lambda} + \frac{\lambda(u^2 - u_x^2)m}{2} & -\lambda^{-2} - \frac{u^2 - u_x^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Two specific features of the x -equation associated with the mCH equation (involving \mathbf{U} and constituting the spectral problem, with the spectral parameter λ), that affect analytic properties of the Jost solutions are as follows: (a) λ enters \mathbf{U} through a product with the “momentum” $m(x, t)$, which, in the framework of the inverse problem, is an unknown function; (b) as $|x| \rightarrow \infty$, $m(x, t)$

approaches non-zero constants. In particular, these features affect the problem of control of the large- λ behavior of the Jost solutions. In our development of the RH formalism, this problem is addressed by (i) transforming (by applying a dedicated gauge transformation) the Lax pair equations to an appropriate form, with diagonal parts that dominate, in a certain sense, for large λ ; (ii) introducing a new spatial-type variable, in view of having an explicit description of the large- λ behavior of the Jost solutions in terms of space and time parameters; (iii) introducing a new (uniformising) spectral parameter μ (related to λ by $\lambda = -\frac{1}{2}(\mu + \frac{1}{\mu})$), which allows us to avoid non-rational dependence of the coefficients in the Lax pair equations on the spectral parameter.

Moreover, we take advantage of a consequence of property (a) that for $\lambda = 0$, \mathbf{U} becomes “solution-independent” (independent of u), which suggests an efficient way for “extracting” the solution of the Cauchy problem from the solution of the RH problem taking the details of the behavior of the latter as $\lambda \rightarrow 0$. With this respect, the mCH equation turns out to be remarkably different from other Camassa–Holm-type equations (including the original Camassa–Holm equation): in order to control the Jost solutions at $\lambda = 0$, there is no need of a separate gauge transformation of the original Lax pair, but the required form of the Lax pair comes from regrouping the terms of that appropriate for large λ .

Using the developed formalism, we obtain a parametric representation of the solution of the Cauchy problem for the mCH equation on a constant background in terms of the solution of the associated RH problem, the data for which (the jump matrix and the parameters of the residue conditions, if any) are uniquely determined by the initial data for the Cauchy problem.

Particularly, this formalism allows us to characterize regular as well as non-regular one-soliton solutions (solutions characterized by a single (up to the symmetries) singularity in the RH problem and having the form of a perturbation propagating with a constant speed while keeping its form unchanged) associated with the RH problems with trivial jump condition and appropriately prescribed residue conditions. In this way, we specify two families of non-regular

soliton solutions of the mCH equation: (i) peakon-type solutions, which are continuous together with their first derivative but having unbounded derivatives of order greater than 2 at the peak points; (ii) loop-shaped, multi-valued solutions, which are conventional, signal-valued solitons in the modified variables that becomes multi-valued when going back to the original variables, x and t .

Theorem. *The mCH equation has a family of one-soliton solutions, regular as well as non-regular, $u(x, t) \equiv u_{\theta, \hat{\delta}}(x, t)$, characterized by two parameters, $\hat{\delta} > 0$ and $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. These solitons $u(x, t) \equiv \hat{u}(y(x - t, t), t) + 1$ are given, in parametric form, by*

$$\begin{aligned}\hat{u}(y, t) &= 4 \tan^2 \theta \frac{z^2(y, t) + 2 \cos^2 \theta \cdot z(y, t) + \cos^2 \theta}{(z^2(y, t) + 2z(y, t) + \cos^2 \theta)^2} z(y, t), \\ x(y, t) &= y + 2 \ln \frac{z(y, t) + 1 + \sin \theta}{z(y, t) + 1 - \sin \theta}, \\ z(y, t) &= 2 \hat{\delta} \sin \theta e^{y \sin \theta} e^{-\frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} t}.\end{aligned}$$

Depending on the value of the parameter θ , the solutions have qualitatively different properties:

- (i) *For $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$, one-soliton solutions are smooth in the original $((x, t))$ variables.*
- (ii) *For $\theta = \frac{\pi}{3}$, one-soliton solutions have finite smoothness in the (x, t) variables.*
- (iii) *For $\theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, one-soliton solutions are regular in the (y, t) variables but can be viewed as multivalued and loop-shaped in the (x, t) variables.*

In **Chapter 3**, taking the formalism developed in Section 2 as the starting point, we obtain the leading large- t asymptotic terms for the solution of the Cauchy problem for the modified Camassa–Holm equation on the whole line in the case when the solution is assumed to approach a non-zero constant at the both infinities of the space variable. We focus on the study of the solitonless case assuming that there are no residue conditions (for the soliton case, where

the basic RH problem involves residue conditions, one can reduce (using the Blaschke–Potapov factors) this RH problem to that having no residue conditions).

For the sake of the large- t analysis, we reduce the original (singular) RH problem representation for the solution of the mCH equation to the solution of a regular RH problem (i.e., to a RH problem with the jump and normalization conditions only). A notable feature of the modified Camassa–Holm equation is that the associated basic RH problem has two singularity conditions (at $\mu = \pm 1$) with different matrix structures, which does not allow getting rid of them by reducing the matrix RH problem to a vector one, as it can be done in the case of the (original) Camassa–Holm equation. In our approach, we address the reduction problem in two steps. First, we reduce the RH problem with the singularity conditions at $\mu = \pm 1$ to a RH problem which is characterized by the following two conditions: (i) the matrix entries are regular at $\mu = \pm 1$, but the determinant of the (matrix) solution vanishes at $\mu = \pm 1$ (notice that $\det M(\mu) \equiv 1$ for the solution of the original RH problem); (ii) the solution is singular at $\mu = 0$. Then, we represent the solution of the latter RH problem in terms of the solution of a regular one. In turn, the solution of the resulting regular RH problem is analyzed asymptotically, as $t \rightarrow +\infty$, using an appropriate adaptation of the nonlinear steepest descent method. This finally allows us to present the leading asymptotic terms for the solution $u(x, t)$ of the Cauchy problem, in two sectors of the (x, t) half-plane, $1 < \frac{x}{t} < 3$ and $\frac{3}{4} < \frac{x}{t} < 1$, where the deviation from the background value is nontrivial (in the remaining sectors $\frac{x}{t} > 3$ and $\frac{x}{t} < \frac{3}{4}$, $u(x, t)$ decays to 1 rapidly).

Theorem. *Let $u_0(x)$ be a smooth function which tends sufficiently fast to 1 as $x \rightarrow \pm\infty$ and satisfies $(1 - \partial_x^2)u_0(x) > 0$ for all x . Assume the solitonless case, i.e., assume that the appropriate spectral (scattering) function associated with $u_0(x)$ has no zeros in the upper half-plane*

Then the solution $u(x, t)$ of the Cauchy problem has the following large-time asymptotics in two sectors of the (x, t) half-plane specified by $1 < \frac{x}{t} < 3$ and

$\frac{3}{4} < \frac{x}{t} < 1$:

(i) For $1 < \zeta := \frac{x}{t} < 3$,

$$u(x, t) = 1 + \frac{C_1(\zeta)}{\sqrt{t}} \cos \left\{ C_2(\zeta)t + C_3(\zeta) \ln t + \tilde{C}_4(\zeta) \right\} + o(t^{-1/2});$$

(ii) For $\frac{3}{4} < \frac{x}{t} < 1$,

$$u(x, t) = 1 + \sum_{j=0,1} \frac{C_1^{(j)}(\zeta)}{\sqrt{t}} \cos \left\{ C_2^{(j)}(\zeta)t + C_3^{(j)}(\zeta) \ln t + \tilde{C}_4^{(j)}(\zeta) \right\} + o(t^{-1/2}),$$

where C_i , $C_i^{(j)}$, \tilde{C}_4 , \tilde{C}_4^j are functions of ζ that can be specified in terms of the scattering data, which in turn are uniquely determined by the initial data.

In **Chapter 4**, we consider the Cauchy problem for the modified Camassa–Holm equation on the whole line in the case when the solution is assumed to approach two different constants at plus and minus infinity of the space variable, namely:

$$\begin{aligned} m_t + ((u^2 - u_x^2)m)_x &= 0, & m &:= u - u_{xx}, & t > 0, & -\infty < x < +\infty, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & & & & -\infty < x < +\infty, \end{aligned}$$

assuming that

$$u_0(x) \rightarrow \begin{cases} A_1, & x \rightarrow -\infty \\ A_2, & x \rightarrow \infty \end{cases}$$

and that the time evolution preserves this behavior.

We develop the Riemann–Hilbert problem formalism for this Cauchy problem. For this purpose, we introduce appropriate transformations of the Lax pair equations and the associated Jost solutions (“eigenfunctions”) and present detailed analytic properties of the eigenfunctions and the corresponding spectral functions (scattering coefficients), including the symmetries and the behavior at the branch points. The construction of the Riemann–Hilbert problem exploits the transformed Lax pair equations involving the functions $k_j(\lambda) := \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{A_j^2}}$, $j = 1, 2$ specified as having the branch cuts $(-\infty, -\frac{1}{A_j}) \cup (\frac{1}{A_j}, \infty)$. Similarly to

the case of the constant background, the solution of the constructed Riemann–Hilbert problem evaluated at $\lambda = 0$ gives a parametric representation of the solution of the Cauchy problem.

Theorem. *Assume that $u(x, t)$ is the solution of the Cauchy problem and let $\hat{M}(y, t, x)$ be the solution of the associated RH problem, whose data are determined by $u_0(x)$. Let*

$$\hat{M}(y, t, \lambda) = i \begin{pmatrix} 0 & \hat{a}_1(y, t) \\ \hat{a}_1^{-1}(y, t) & 0 \end{pmatrix} + i\lambda \begin{pmatrix} \hat{a}_2(y, t) & 0 \\ 0 & \hat{a}_3(y, t) \end{pmatrix} + O(\lambda^2)$$

be the development of $\hat{M}(y, t, \lambda)$ as $\lambda \rightarrow 0$. Then the solution $u(x, t)$ of the Cauchy problem can be expressed, in a parametric form, in terms of $\hat{a}_j(y, t)$, $j = 1, 2, 3$ as follows: $u(x, t) = \hat{u}(y(x, t), t)$, where

$$\begin{aligned} \hat{u}(y, t) &= \hat{a}_1(y, t)\hat{a}_2(y, t) + \hat{a}_1^{-1}(y, t)\hat{a}_3(y, t), \\ x(y, t) &= y - 2 \ln \hat{a}_1(y, t) + A_2^2 t. \end{aligned}$$

Moreover, $\hat{u}_x(y, t)$ can also be algebraically expressed in terms of $\hat{a}_j(y, t)$, $j = 1, 2, 3$; namely, $u_x(x, t) = \hat{u}_x(y(x, t), t)$, where

$$\hat{u}_x(y, t) = -\hat{a}_1(y, t)\hat{a}_2(y, t) + \hat{a}_1^{-1}(y, t)\hat{a}_3(y, t).$$

Keywords: partial differential equations, integrable nonlinear equations, modified Camassa–Holm equation, Riemann–Hilbert problem, spectral problem, Lax pair, symmetries, direct scattering problem, inverse scattering problem, inverse scattering transform method, nonlinear steepest descent method, soliton, asymptotics.

Publications of the candidate related to the thesis topic

Journal papers in which the main results of the thesis are published

1. A. Boutet de Monvel, I. Karpenko, D. Shepelsky, “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with nonzero boundary conditions”, *J. Math. Phys.* **61**, No. 3, 031504, 24 (2020).
<https://doi.org/10.1063/1.5139519>
2. I. Karpenko, “Long-time asymptotics for the modified Camassa–Holm equation with nonzero boundary conditions”, *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry* **16**, No.2, 224–252 (2022).
<https://doi.org/10.15407/mag18.02.224>
3. I. Karpenko, D. Shepelsky, G. Teschl “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with step-like boundary conditions”, *Monatshefte für Mathematik* **201**, (2023), 127–172.
<https://doi.org/10.1007/s00605-022-01786-y>

Approbation of the thesis results

4. I. Karpenko, D. Shepelsky, “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with nonzero boundary conditions”, VI International Conference “Analysis and Mathematical Physics”, Kharkiv, Ukraine (June 2018).
5. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The Riemann–Hilbert approach to the Cauchy problem for the modified Camassa–Holm equation”, 6th Ya. B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications, Vinnytsia, Ukraine (June 2019).
6. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The inverse scattering transform, in the form of Riemann–Hilbert problem, for the modified Camassa–Holm equation”, international Conference dedicated to 70th anniversary of Professor A.M.Pli-chko “Banach Spaces and their Applications”, Lviv, Ukraine (June 2019).

7. I. Karpenko, D. Shepelsky, “A Riemann–Hilbert problem approach to the modified Camassa–Holm equation on a nonzero background”, Pidzakharychi, Ukraine (August 2019).
8. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The modified Camassa–Holm equation on a nonzero background: large-time asymptotics for the Cauchy problem”, Workshop “New horizons in dispersive hydrodynamics”, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, United Kingdom (June 2021).
9. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The large-time asymptotics for the modified Camassa–Holm equation on a non-zero background”, 5-th International Conference “DIFFERENTIAL EQUATIONS and CONTROL THEORY”, V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine (September 2021).
10. I. Karpenko, D. Shepelsky, G. Teschl, “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with step-like boundary conditions”, The international online conference “CURRENT TRENDS IN ABSTRACT AND APPLIED ANALYSIS”, Ivano-Frankivsk, Ukraine (May 2022).
11. I. Karpenko, “The modified Camassa–Holm equation on a step-like background”, Complex Analysis, Spectral Theory and Approximation meet in Linz, Johannes Kepler University, Linz, Austria (July 2022).
12. I. Karpenko, “A Riemann–Hilbert problem approach to the modified Camassa–Holm equation on a step like background”, Workshop From Modeling and Analysis to Approximation and Fast Algorithms, Hasenwinkel, Germany (December 2022).

Зміст

| | | |
|--------------------------|---|-----------|
| Умовні позначення | 21 | |
| Вступ | 22 | |
| 1 | Метод оберненої задачі розсіювання та рівнянь типу Камасси–Хольма (огляд літератури) | 29 |
| 1.1 | Інтегровні рівняння та метод оберненої задачі розсіювання | 29 |
| 1.2 | Рівняння Камасси–Хольма | 33 |
| 1.3 | Узагальнення рівняння Камасси–Хольма | 34 |
| 1.4 | Інші піконні рівняння | 37 |
| 2 | Підхід Рімана–Гільберта до модифікованого рівняння Камасси–Хольма з ненульовими крайовими умовами | 41 |
| 2.1 | Пари Лакса і власні функції | 42 |
| 2.2 | Задача Рімана–Гільберта | 51 |
| 2.3 | Від розв’язку задачі РГ до розв’язку рівняння мКХ | 62 |
| 2.4 | Солітони | 71 |
| 2.5 | Висновки до розділу 2 | 78 |
| 3 | Модифіковане рівняння Камасси–Хольма на ненульовому фоні: асимптотика за великим часом для задачі Коші | 80 |
| 3.1 | Зведення до регулярної задачі РГ | 81 |
| 3.2 | Асимптотика за великим часом регулярної задачі РГ | 90 |
| 3.3 | Солітонна асимптотика | 111 |
| 3.4 | Висновки до розділу 3 | 113 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4 | Підхід Рімана–Гільберта до модифікованого рівняння Камасси–Хольма зі ступінчастими граничними умовами | 115 |
| 4.1 | Властивість збереження знаку $m(x, t)$ | 116 |
| 4.2 | Пари Лакса та власні функції | 117 |
| 4.3 | Задачі Рімана–Гільберта | 136 |
| 4.4 | Випадок $A_2 < A_1$ | 154 |
| 4.5 | Перспективи подальших досліджень | 161 |
| 4.6 | Висновки до розділу 4 | 162 |
| | Загальні висновки | 164 |
| | Список використаних джерел | 166 |
| | Додатки | 180 |

Умовні позначення

- σ_1 ... перша матриця Паулі, $\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 σ_2 ... друга матриця Паулі, $\sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
 σ_3 ... третя матриця Паулі, $\sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 $f^*(k)$... спряжена за Шварцем функція $f(k)$: для $k \in \mathbb{C}$, $f^*(k) := \overline{f(\bar{k})}$
 λ ... спектральний параметр
 μ ... спектральний параметр, пов'язаний з λ як $\lambda = -\frac{1}{2} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right)$
 k ... спектральний параметр, пов'язаний з λ як $\lambda^2 = 4k^2 + 1$
 \mathbb{C}^+ ... верхня комплексна півплощина, $\mathbb{C}^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\lambda) > 0\}$
 \mathbb{C}^- ... нижня комплексна півплощина, $\mathbb{C}^- = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\lambda) < 0\}$
 M^i ... i -тий стовпець матриці M
 Σ_j ... $\Sigma_j = (-\infty, -\frac{1}{A_j}] \cup [\frac{1}{A_j}, \infty)$
 $\dot{\Sigma}_j$... $\dot{\Sigma}_j = (-\infty, -\frac{1}{A_j}) \cup (\frac{1}{A_j}, \infty)$
 Σ_0 ... замкнена множина, $[-\frac{1}{A_1}, -\frac{1}{A_2}] \cup [\frac{1}{A_2}, \frac{1}{A_1}]$
 $\dot{\Sigma}_0$... відкрита множина, $\dot{\Sigma}_0 = (-\frac{1}{A_1}, -\frac{1}{A_2}) \cup (\frac{1}{A_2}, \frac{1}{A_1})$
 λ_+ ... точка на верхній стороні Σ_j , $\lambda_+ = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \lambda + i\epsilon$
 λ_- ... точка на нижній стороні Σ_j , $\lambda_- = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \lambda - i\epsilon$
 $k_j(\lambda)$... вітка квадратного кореня $k_j(\lambda) := \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{A_j^2}}$, $j = 1, 2$ з розрізом Σ_j ,
 фіксована умовою $k_j(0) = \frac{i}{A_j}$

Вступ

Обґрунтування вибору теми дослідження

Протягом останніх 50 років багато вчених інтенсивно вивчали інтегровні нелінійні рівняння, відколи стало зрозумілим, що метод оберненої задачі розсіювання, який було винайдено для інтегрування конкретного нелінійного рівняння — рівняння Кортевега–де Фріза [72], є не просто випадковим красивим математичним трюком, а може бути ефективно застосований до вивчення широкого класу рівнянь, які є важливими моделями нелінійних явищ у багатьох галузях фізики.

Одним з таких рівнянь є рівняння Камасси–Хольма (КХ) [33, 34]

$$m_t + (um)_x + u_x m = 0, \quad m := u - u_{xx},$$

яке інтенсивно досліджується протягом останніх 30 років.

Рівняння КХ є моделлю односпрямованого поширення мілководних хвиль на пласкому дні [82, 44]. З математичної точки зору, воно має бі-гамільтонову структуру [33], є повністю інтегровним і має алгебро-геометричні розв'язки [105]. Воно має як глобальні сильні розв'язки, так і розв'язки з розривом за скінченний час [39, 41, 42, 43], а також має глобальні слабкі розв'язки в $H^1(\mathbb{R})$ [31, 45, 116]. Розв'язки солітонного типу рівняння КХ, що спадають на нескінченності [34], є слабкими розв'язками, які мають вигляд пікових хвиль ($u(x, t)$ і $u_x(x, t)$ обмежені, але $u_x(x, t)$ розривна), які є орбітально стабільними [46].

Цікаві математичні та фізичні властивості рівняння КХ стимулювали дослідження його різноманітних модифікацій та узагальнень, див., наприклад, [118]. Новіков [103] застосував підхід збурливої симетрії для класи-

фікації інтегровних рівнянь вигляду

$$(1 - \partial_x^2) u_t = F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots), \quad u = u(x, t), \quad \partial_x = \partial/\partial x,$$

припускаючи, що F є однорідним диференціальним поліномом над \mathbb{C} , квадратичним або кубічним за u та його x -похідними. У списку рівнянь, наведених у [103], рівняння (32), яке було другим рівнянням з *кубічною* нелінійністю, має вигляд

$$m_t + ((u^2 - u_x^2)m)_x = 0, \quad m := u - u_{xx}.$$

З іншого боку, це рівняння (в еквівалентній формі) з'явилося у роботах Фокаса [67] та Олвера і Розенау [104] у 1996 році як нова інтегровна система. Пара Лакса для цього рівняння була запропонована Цяо (Qiao) [106], тому його іноді називають рівнянням Фокаса-Ольвера-Розенау-Цяо (FORQ, ФОРЦ) [77], але здебільшого воно відоме як модифіковане рівняння Камасси-Хольма (mCH, МКХ).

У дисертації розроляється формалізм оберненої задачі розсіювання у формі адачі Рімана-Гільберта для дослідження рівняння МКХ. Специфікою дослідження є те, що це рівняння розглядається у випадку неспадаючих граничних умов, зокрема, ступінчастих. Такі задачі привертають особливу увагу, оскільки вони можуть бути використані як моделі для вивчення дисперсійних ударних хвиль [12]. Таким чином, тема дослідження цікава не тільки з теоретичної точки зору, але й з точки зору потенційних застосувань.

Дослідження, які склали основу дисертаційної роботи, проводились в рамках науково-дослідних робіт тематичного плану ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна НАН України «Геометричні та асимптотичні методи в теорії крайових задач математичної фізики» (номер державної реєстрації 0116U005036) та «Аналітичні і асимптотичні методи математичної фізики і геометрії» (номер державної реєстрації 0121U108115), а також НДР «Нестандартні нелокальні та піконні інтегровні рівняння: асимптотика та метод оберненої задачі» (номер державної реєстрації 0121U111968).

Частина роботи над дисертацією виконувалась у рамках програми академічної мобільності з Віденським університетом (м. Відень, Австрія; співкерівник програми професор Геральд Тешль).

Мета і завдання дослідження

Метою дисертаційної роботи є розробка методу оберненої задачі розсіювання у формі задачі Рімана-Гільберта для модифікованого рівняння Камасси-Хольма та дослідження властивостей розв'язків задачі Коші для цього рівняння з різними граничними умовами, зокрема, їхньої поведінки за великим часом. Зокрема, розглядаються задачі з ненульовим постійним фоном (розділи 2 і 3) та зі ступінчастим фоном (розділ 4).

Об'єктом дослідження є модифіковане рівняння Камасси-Хольма, яке є нелінійним інтегровним диференціальним рівнянням з частинними похідними, та початкові задачі (задачі Коші) для нього.

Предметом дослідження є розв'язки початкових задач на осі (задачі Коші) для модифікованого рівняння Камасси-Хольма у випадку, коли ці розв'язки прямують до ненульових констант коли просторова змінна прямує до тієї чи іншої нескінченності.

Методи досліджень

Для дослідження поставлених задач застосовується метод оберненої задачі розсіювання (МОЗР) у вигляді задачі Рімана-Гільберта (РГ).

Схема МОЗР полягає в наступному: (i) відштовхуючись від заданих початкових даних $u_0(x)$, отримуємо дані розсіювання як функції спектрального параметра, розв'язавши пряму задачу розсіювання; (ii) потім отримуємо еволюцію цих даних розсіювання, розв'язавши певну кількість лінійних задач; (iii) зрештою, отримуємо розв'язок задачі Коші для нелінійного рівняння, розв'язавши обернену задачу розсіювання.

Останній крок у цій процедурі, обернену задачу розсіювання, можна ефективно розв'язати, переформулювавши її як задачу факторизації Рімана-Гільберта (РГ). Відправною точкою тут є зображення у вигляді пари Лакса. Це пара лінійних диференціальних рівнянь, які залежать від дода-

ткового спектрального параметра і умовою сумісності яких є саме нелінійне диференціальне рівняння. Метод задачі РГ зводиться до правильного вибору розв'язків рівнянь пари Лакса, а потім до побудови задачі РГ з цих обраних розв'язків.

Далі аналізується асимптотика за великим часом за допомогою так званого нелінійного методу найскорішого спуску [52]. Цей метод полягає в послідовних перетвореннях вихідної задачі РГ, з метою звести її до явно розв'язної. Послідовні кроки включають (i) відповідні трикутні факторизації матриці стрибків; (ii) “поглинання” трикутних множників з контрольованою поведінкою за великим часом; (iii) зведення, після перемасштабування, до задачі РГ, яка може бути розв'язана в термінах певних спеціальних функцій.

Новизна отриманих результатів

Усі результати, представлені в роботах [18], [85] та [86] і включені в дисертацію, отримані автором самостійно. Результати, що належать іншим вченим, згадуються в міру необхідності для повноти викладу і супроводжуються відповідними посиланнями.

У дисертації розвинуто метод оберненого перетворення розсіювання у вигляді задачі Рімана–Гільберта для задач Коші для модифікованого рівняння Камасси–Хольма з різними граничними умовами. Зокрема, отримано такі результати:

- (i) отримано зображення розв'язку задачі Коші для модифікованого рівняння Камасси–Хольма на всій прямій у випадку, коли розв'язок прямує до ненульової сталої на обох нескінченностях просторової змінної, у термінах розв'язку пов'язаної з нею задачі Рімана–Гільберта. Цей результат отримано вперше (розділ 2).
- (ii) отримано головні асимптотичні члени розв'язку задачі Коші для модифікованого рівняння Камасси–Хольма на всій прямій у випадку, коли розв'язок прямує до ненульової сталої на обох нескінченностях просторової змінної. Цей результат отримано вперше (розділ 3).

- (iii) отримано зображення розв'язку задачі Коші для модифікованого рівняння Камасси–Хольма на всій прямій у випадку, коли передбачається, що розв'язок прямує до двох різних сталих на плюс і мінус нескінченностях просторової змінної, у термінах розв'язку пов'язаної з нею задачі Рімана–Гільберта. Цей результат отримано вперше (розділ 4).

Особистий внесок

Постановка задачі, що розглядається в розділі 2, належить науковому керівнику Дмитру Шепельському, постановка задачі, що розглядається в розділі 3, належить науковому керівнику Дмитру Шепельському та Анні Буте де Монвель, постановка задачі, що розглядається в розділі 4, належить Дмитру Шепельському та Геральду Тешлу. Всі результати, представлені в роботах [18], [85] і [86] і включені в дисертацію, отримані автором самостійно. Результати, які належать іншим вченим, згадуються для повноти викладу і супроводжуються відповідними посиланнями.

Апробація результатів дисертації

Результати дисертації обговорювалися на наукових семінарах відділів математичної фізики та диференціальних рівнянь та геометрії Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України та на семінарі математичної фізики Віденського університету, а також доповідалися на **дев'яти** міжнародних конференціях:

1. I. Karpenko, D. Shepelsky, “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with nonzero boundary conditions”, VI International Conference "Analysis and Mathematical Physics Kharkiv, Ukraine (June 2018).
2. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The Riemann-Hilbert approach to the Cauchy problem for the modified Camassa–Holm equation”, 6th Ya. B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications, Vinnytsia, Ukraine (June 2019).

3. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The inverse scattering transform, in the form of Riemann–Hilbert problem, for the modified Camassa–Holm equation”, international Conference dedicated to the 70th anniversary of Professor A.M. Plichko "Banach Spaces and their Applications Lviv, Ukraine (June 2019).
4. I. Karpenko, D. Shepelsky, “A Riemann–Hilbert problem approach to the modified Camassa–Holm equation on a nonzero background”, Pidzakharychi, Ukraine (August 2019).
5. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The modified Camassa–Holm equation on a nonzero background: large-time asymptotics for the Cauchy problem”, Workshop "New horizons in dispersive hydrodynamics Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, United Kingdom (June 2021).
6. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The large-time asymptotics for the modified Camassa–Holm equation on a non-zero background”, 5-th International Conference “DIFFERENTIAL EQUATIONS and CONTROL THEORY”, V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine (September 2021).
7. I. Karpenko, D. Shepelsky, G. Teschl, “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with step-like boundary conditions”, Ivano-Frankivsk, Ukraine (May 2022).
8. I. Karpenko, “The modified Camassa–Holm equation on a step-like background”, Complex Analysis, Spectral Theory and Approximation meet in Linz, Johannes Kepler University, Linz, Austria (July 2022).
9. I. Karpenko, “A Riemann–Hilbert problem approach to the modified Camassa–Holm equation on a step like background”, Workshop From Modeling and Analysis to Approximation and Fast Algorithms, Hasenwinkel, Germany (December 2022).

Структура та обсяг дисертаційної роботи

Дисертація складається зі змісту, передмови, глосарію умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, який містить 120 позицій. Загальний обсяг дисертації становить 182 сторінки. Обсяг основної частини роботи становить 148 сторінок.

Розділ 1 присвячено огляду літератури за темою дисертації. У розділі 2 досліджено початкову задачу для модифікованого рівняння Камасси–Хольма на ненульовому сталому фоні. У розділі 3 досліджено асимптотику за великим часом асимптотику для цієї задачі. У розділі 4 розглянуто початкову задачу для модифікованого рівняння Камасси–Хольма зі ступінчастими початковими даними.

Практичне значення отриманих результатів

Дисертація має теоретичний характер. Отримані результати та запропоновані методи можуть бути використані в подальших дослідженнях початкових та початково-крайових задач для рівнянь типу Камасси–Хольма, які можуть бути перспективними моделями фізичних процесів різної природи.

Публікації

Основні результати дисертації опубліковані в 3 наукових статтях, що індексуються в міжнародних наукометричних базах даних Scopus та Web of Science. Дві з них [18, 86] опубліковані в наукових журналах інших країн, одна з них [85] опублікована в українському науковому журналі.

Відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, статті [18] та [86] опубліковані в журналах з квантилем Q2; стаття [85] опублікована в журналі з квантилем Q3.

Крім того, результати дисертації відображені у 9 тезах конференцій.

Розділ 1

Метод оберненої задачі розсіювання та рівнянь типу Камасси–Хольма (огляд літератури)

1.1 Інтегровні рівняння та метод оберненої задачі розсіювання

У 1965 році Забузький та Крускал виявили, що частинкоподібний розв'язок у вигляді усамітненої хвилі нелінійного рівняння Кортевега-де Фріза (КдФ) має властивість, що раніше була невідома: цей розв'язок “пружно” взаємодіє з іншим розв'язком такого типу. Вони назвали ці розв'язки *солітонами*. Невдовзі після цього відкриття Гарднер, Грін, Крускал і Міура (1967), (1974) відкрили новий метод математичної фізики (див. [72, 73]). Зокрема, вони запропонували метод розв'язання рівняння КдФ, використовуючи ідеї прямого та оберненого розсіювання для лінійного рівняння Штурма-Ліувілля. У 1968 році Лакс значно узагальнив ці ідеї [89]. На той час було незрозуміло, чи можна застосувати цей метод до інших важливих з фізичної точки зору нелінійних еволюційних рівнянь. Однак у 1972 році Захаров і Шабат показали, що метод не був випадковістю. Застосувавши ідеї прямого та оберненого розсіювання, вони розв'язали початкову задачу для нелінійного рівняння Шредінгера [119]. У 1973 році, використовуючи ці ідеї, Абловіц, Кауп, Ньюелл і Сегур зробили те саме для рівняння синус-Гордона [2]. А потім вони розробили спосіб для знаходження досить

широкого класу нелінійних еволюційних рівнянь, які можна розв'язати цим методом [3, 4]. Вони назвали цю процедуру методом оберненої задачі розсіювання (МОЗР).

У найзагальнішому вигляді рівняння $F(u_t, u, u_x, u_{xx}, \dots) = 0$ називається інтегровним, якщо воно є умовою сумісності системи *лінійних* рівнянь (так званої *пари Лакса*):

$$\begin{cases} \Phi_x(x, t, \lambda) = U(x, t, \lambda)\Phi(x, t, \lambda) \\ \Phi_t(x, t, \lambda) = V(x, t, \lambda)\Phi(x, t, \lambda) \end{cases}, \quad (1.1)$$

де U і V визначаються в термінах розв'язку рівняння, а $\lambda \in \mathbb{C}$ є допоміжним (спектральним) параметром. Саме пара Лакса є відправною точкою для вивчення різних задач для інтегровних рівнянь, наприклад, знаходження різних типів точних розв'язків (за допомогою так званих перетворень типу Беклунда–Дарбу), чи розв'язування початкових та початково-крайових задач.

Інтегровні нелінійні диференціальні рівняння з неспадаючими на нескінченності граничними умовами є предметом численних досліджень, див., наприклад, [11, 15]. Зокрема, початкові задачі з початковими даними, що прямують до різних “фонів” на різних просторових нескінченностях (так звані ступінчасті початкові дані) привернули значну увагу, оскільки вони можуть бути використані як моделі для вивчення дисперсійних ударних хвиль [12].

У загальному випадку, МОЗР для розв'язування початкових задач для інтегровних нелінійних рівнянь, записаних у вигляді умови сумісності для лінійних рівнянь, полягає в наступному (див. рисунок 1.1): стартуючи з заданих початкових даних, розв'язати пряму задачу, тобто визначити відповідні власні функції (розв'язки x -рівняння пари Лакса) з добре контрольованими аналітичними властивостями (як функції спектрального параметра λ) і пов'язані з ними спектральні функції (від λ); тоді, в силу t -рівняння пари Лакса, асоційовані функції еволюціонують простим, явним чином; нарешті, використовуючи явну еволюцію спектральних функцій, розв'язати

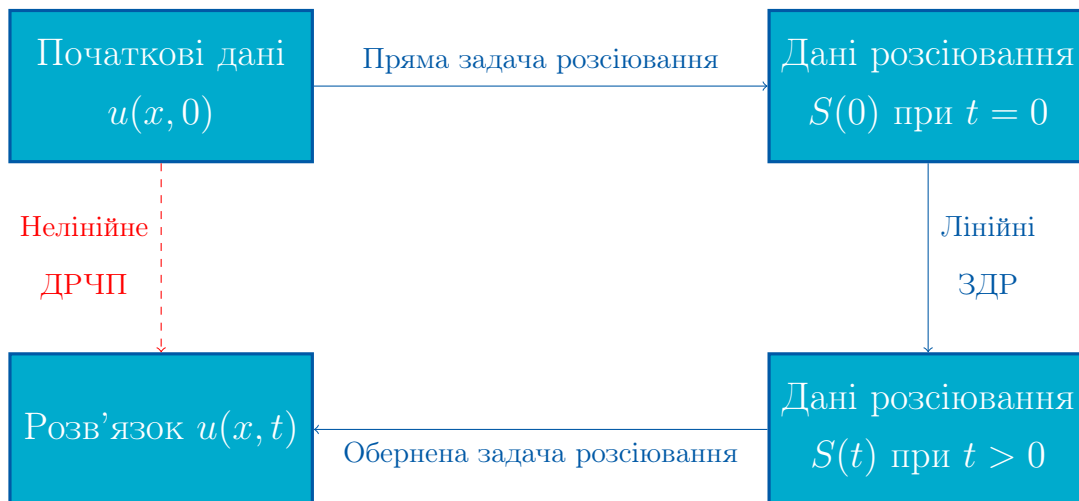


Рис. 1.1: Схема МОЗР

обернену задачу знаходження відповідного коефіцієнта в x -рівнянні. В силу сумісності рівнянь пари Лакса цей коефіцієнт еволюціонує відповідно до заданого нелінійного рівняння, і таким чином є розв'язком задачі Коші для цього рівняння.

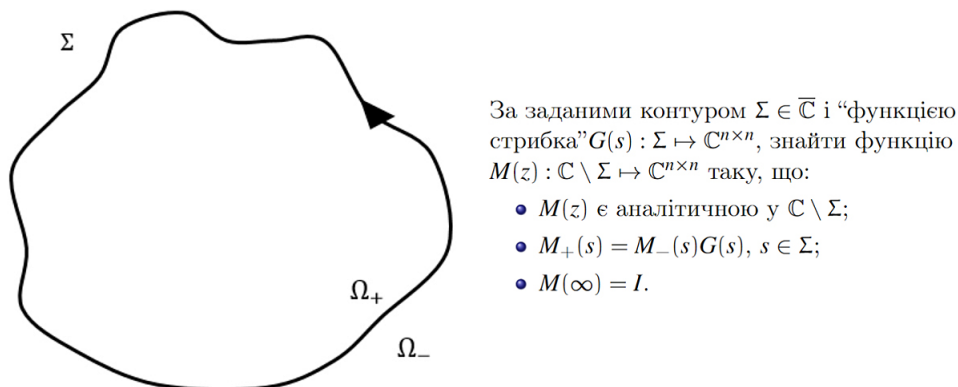


Рис. 1.2: Задача Рімана–Гільберта: крайова задача в комплексному аналізі

Останній крок у цій процедурі, обернену задачу розсіювання, можна ефективно розв'язати, переформулювавши її як задачу факторизації Рімана–Гільберта (RH) (див. рисунок 1.2): за заданими контуром на комплексній площині та матричній функції, визначеній на цьому контурі, знайти кусково-аналітичну (відносно контуру), матричнозначну функцію, граничні значен-

ня якої на контурі пов'язані за допомогою заданої функції. У застосуваннях до нелінійних рівнянь, задана матриця (стрибка) залежить також від параметрів (які є фізичними змінними у відповідному нелінійному рівнянні, наприклад, простору x і часу t), а отже, розв'язок задачі РГ також залежить від цих параметрів. Якщо матрицю стрибків побудовано належним чином, використовуючи початкові дані для (нелінійного) диференціального рівняння з частинними похідними (ДРЧП), то, обчислюючи розв'язок задачі РГ при певному значенні спектральної змінної, можна отримати розв'язок вихідної задачі Коші для цього ДРЧП.

У певному сенсі зображення розв'язку нелінійного (інтегрового) рівняння у термінах розв'язку відповідної задачі Рімана–Гільберта є аналогом інтегрального зображення у випадку лінійних ДРЧП, у термінах рядів або інтегралів Фур'є, або функції Гріна. Для лінійних ДРЧП інтегральні зображення дозволяють:

- отримати результати існування та єдиності, що безпосередньо впливають із теорії інтегрування;
- вивчати асимптотику за допомогою методу стаціонарної фази або методу найшвидшого спуску;
- чисельно обчислювати розв'язки за допомогою методу простих квадратур.

У випадку інтегровних нелінійних ДРЧП, всі ці цілі певною мірою досягаються за допомогою розвитку формалізму задачі РГ [112]. Зокрема, результати про існування можна отримати, довівши існування розв'язку асоційованої задачі РГ та контролюючи його поведінку за просторовими та часовим параметрами.

Асимптотику за великим часом можна ефективно аналізувати за допомогою так званого нелінійного методу найшвидшого спуску [52]. Цей метод полягає в послідовних перетвореннях вихідної задачі РГ з метою звести її до явно розв'язної. Послідовні кроки включають (i) відповідні трикутні

факторизації матриці стрибків; (ii) “поглинання” трикутних множників з гарною поведінкою за великим часом; (iii) зведення, після перемасштабування, до задачі РГ, яку можна розв’язати в термінах певних спеціальних функцій.

Незважаючи на те, що і МОЗР, і нелінійний метод найшвидшого спуску є в певному сенсі алгоритмічними, їхня адаптація до конкретного нелінійного рівняння є складною задачею, що вимагає великої аналітичної роботи. Наприклад, застосування МОЗР для початкових задач з нульовим фоном сильно відрізняється від застосування МОЗР для початкових задач з ненульовим фоном. Зокрема, властивості відповідних спектральних функцій, пов’язана з ними задача Рімана–Гільберта та адаптація нелінійного методу найшвидшого спуску суттєво відрізняються.

З іншого боку, дослідження конкретної задачі може призвести не тільки до отримання результатів для цієї задачі, але й стимулювати розвиток нових аналітичних методів і підходів, які можуть бути ефективно застосовані до широкого класу задач з інших розділів математики (як це вже сталося, зокрема, в теорії ортогональних поліномів і випадкових матриць великих розмірів).

1.2 Рівняння Камасси–Хольма

Рівняння Камасси–Хольма (КХ) [33, 34]

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xx} = 0, \quad (1.2)$$

яке може бути також написано в термінах змінної моменту

$$m_t + (um)_x + u_x m = 0, \quad m := u - u_{xx}, \quad (1.3)$$

привертає увагу протягом останніх 30 років завдяки своїй багатій математичній структурі. Це модель односпрямованого поширення мілководних хвиль над плоским дном [82, 44], вона має бі-гамільтонову структуру [33], є

повністю інтегрованою та має алгебро-геометричні розв'язки [105]. Локальну та глобальну розв'язність задачі Коші для рівняння КХ добре досліджено [41, 42, 47]. Зокрема, вона має як глобальні сильні розв'язки, так і розв'язки, що є розривними за скінченний час [39, 41, 42, 43], а також має глобальні слабкі розв'язки в $H^1(\mathbb{R})$ [31, 45, 116].

Розв'язки солітонного типу рівняння КХ, що спадають на нескінченності [34], є слабкими розв'язками, які мають форму пікових хвиль ($u(x, t)$ і $u_x(x, t)$ обмежені, але $u_x(x, t)$ розривна), що є орбітально-стійкими [46]. Вони можуть бути виражені як $u(x, t) = ce^{-|x-ct|}$, $c \in \mathbb{R}$. Такі розв'язки називаються піконами (піконними розв'язками).

З іншого боку, якщо додати до (1.2) лінійний дисперсійний член bu_x з $b > 0$, то рівняння КХ набуває вигляду

$$u_t - u_{xxt} + bu_x + 3uu_x - 2u_xu_{xx} - uu_{xx} = 0, \quad (1.4)$$

який допускає розв'язки у вигляді звичайних гладких солітонів [40, 23, 24].

У випадку рівняння Камасси–Хольма на нульовому фоні (коли розв'язок спадає на нескінченності), метод оберненої задачі розсіювання (зокрема, у вигляді задачі факторизації Рімана–Гільберта) працює для версії цього рівняння, яка містить додатковий лінійний дисперсійний доданок [19, 23, 24, 25]. Еквівалентно цю задачу можна переписати як задачу Коші для рівняння (1.3), що розглядається на сталому ненульовому фоні. Причина цього полягає у тому, що метод оберненої задачі розсіювання вимагає, щоб x -рівняння пари Лакса, пов'язане з рівнянням КХ, мало неперервний спектр. З іншого боку, асимптотичний аналіз бездисперсійного рівняння КХ (1.3) на нульовому фоні (де спектр є суто дискретним) вимагає іншого підходу (що має певну аналогію з методом Рімана–Гільберта), а саме, аналізу задачі зщеплення (coupling problem) для цілих функцій [58, 59, 60].

1.3 Узагальнення рівняння Камасси–Хольма

За останні кілька років були запропоновані різні модифікації та узагальнення рівняння КХ, див., наприклад, [118] та посилання в ній. Новіков [103] застосував підхід збурненої симетрії для класифікації інтегровних рівнянь вигляду

$$(1 - \partial_x^2) u_t = F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots), \quad u = u(x, t), \quad \partial_x = \partial/\partial x,$$

припускаючи, що F є однорідним диференціальним поліномом над \mathbb{C} , квадратичним або кубічним за u та її x -похідними (див. також [99]). Такі рівняння відомі як рівняння *типу Камасси–Хольма*.

Адаптація методу оберненої задачі розсіювання у формі задачі Рімана–Гільберта до рівнянь типу КХ має свої специфічні властивості. Зокрема, перші кроки включають калібрувальні перетворення $\Phi \mapsto P\tilde{\Phi}$, що перетворюють початкову пару Лакса до вигляду

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_x(x, t, \lambda) = \tilde{Q}_x(x, t, \lambda)\tilde{\Phi}(x, t, \lambda) + \tilde{U}(x, t, \lambda)\tilde{\Phi}(x, t, \lambda) \\ \tilde{\Phi}_t(x, t, \lambda) = \tilde{Q}_t(x, t, \lambda)\tilde{\Phi}(x, t, \lambda) + \tilde{V}(x, t, \lambda)\tilde{\Phi}(x, t, \lambda) \end{cases},$$

де

▷ в околі сингулярних точок (відносно спектрального параметра λ) головні члени мають вигляд \tilde{Q}_x та \tilde{Q}_t , де \tilde{Q} — деяка діагональна матриця, що залежить, в загальному випадку, від t та x через розв'язок відповідного нелінійного рівняння;

▷ решта доданків \tilde{U} та \tilde{V} прямує до нуля при $x \rightarrow \pm\infty$.

Тоді \tilde{Q} визначає зміну змінних таким чином, що матриця стрибка в основній задачі РГ, пов'язаній із задачею Коші для нелінійного рівняння, залежить від нових змінних у явний спосіб.

У списку рівнянь, наведених у [103], рівняння (32), що було другим рівнянням з *кубічною* нелінійністю, має вигляд

$$m_t + ((u^2 - u_x^2)m)_x = 0, \quad m := u - u_{xx}. \quad (1.5)$$

В еквівалентній формі це рівняння було запропоновано Фокасом у [67] (див. також [104] і [71]). Шіфф [108] розглянув рівняння (1.5) як дуальне до модифікованого рівняння Кортвега–де Фріза (мКдФ) і ввів для нього пару Лакса, шляхом перемасштабування елементів просторової частини пари Лакса для рівняння мКдФ. Альтернативну (фактично, калібрувально еквівалентну) пару Лакса для (1.5) було запропоновано Цяо [106], тому його іноді називають рівнянням Фокаса–Ольвера–Розенау–Цяо (FORQ) [77], але здебільшого воно відоме як *модифіковане рівняння Камасси–Хольма* (мКХ).

Рівняння (1.5) має бігамільтонову структуру [104, 76]. У [83] наведено перетворення типу Ліувілля, яке пов'язує ізоспектральні задачі для рівняння мКдФ і рівняння мКХ, а також побудовано перетворення типу Міури від рівняння мКдФ до рівняння мКХ.

Рівняння (1.5) належить до класу піконних рівнянь: воно має розв'язки у вигляді локалізованих пікових хвиль, що “біжать” — піконів [76]. Усамітнені однопікові хвильові розв'язки (пікони) рівняння мКХ мають вигляд [76]

$$u(x, t) = \frac{p}{2} e^{-|x-x(t)|}, \quad m(x, t) = p\delta(x - x(t)) \quad \text{with } x(t) = \frac{1}{6} p^2 t.$$

Динамічна стійкість піконів розглядається у [107] (див. також [94] про стійкість піконів узагальненого рівняння мКХ). Механізми локальної коректності та руйнування хвиль для рівняння мКХ та його узагальнень, зокрема, рівняння мКХ з лінійною дисперсією, обговорюються у [76, 70, 95, 38, 37]. Алгебро-геометричні квазіперіодичні розв'язки вивчаються у [77]. У [74] обговорюється локальна коректність для класичних розв'язків та глобальних слабких розв'язків (1.5) у лагранжевих координатах. У [36] розглядаються мультипіконні розв'язки за допомогою оберненого спектрального метода для асоційованої піконної системи звичайних диференціальних рівнянь. Гамільтонова структура та інтегровність за Ліувіллем піконних систем обговорюється в [8] та [35]. Перетворення Беклунда для рівняння мКХ і пов'язану з ним нелінійну формулу суперпозиції наведено в [115].

1.4 Інші піконні рівняння

Пікоподібні розв'язки (піконні розв'язки або пікони) - це особливі розв'язки, що допускаються певними нелінійними диференціальними рівняннями (так званими “піконними рівняннями”). Ці розв'язки мають форму набору пікоподібних хвиль і взаємодіють подібно до частинок.

Пікони вперше з'явилися як розв'язки рівняння Камасси–Хольма, а пізніше в багатьох інших пов'язаних рівняннях, наприклад, Дегасперіса–Процесі (ДП), Новікова (Н) та модифікованому рівнянні Камасси–Хольма.

Рівняння Дегасперіса–Процесі

$$m_t + um_x + 3u_x m = 0, \quad m = u - u_{xx}$$

було запропоновано у 1998 році Дегасперісом та Процесі [57]. Воно виникло як модельне рівняння, що описує мілководне наближення в нев'язкій гідродинаміці у так званому “режимі помірної амплітуди”. Рівняння ДП ($b = 3$) і рівняння КХ ($b = 2$) є єдиними інтегровними випадками в “b-сім'ї”

$$m_t + m_x u + b m u_x = 0, \quad m = u - u_{xx}$$

і обидва мають квадратичну нелінійність. Рівняння ДП має піконні розв'язки тієї ж форми, що й рівняння КХ. Незважаючи на те, що на вигляд рівняння схоже на рівняння КХ, рівняння ДП має іншу структуру інтегровності (матрична розмірність лінійних рівнянь пари Лакса — 3×3 , на відміну від 2×2 у випадку рівнянь КХ та мКХ), а його піконні розв'язки пов'язані з теорією наближення через поняття дискретної кубічної струни, змішаних наближень Ерміта–Паде та біортогональних поліномів Коші [96], [97]. Інша відмінність полягає в тому, що рівняння ДП допускає слабкі розв'язки, які не є неперервними (зі стрибковими особливостями у $u(x, t)$, а не у $u_x(x, t)$).

Рівняння Новікова

$$m_t + (um_x + 3u_x m)u = 0, \quad m = u - u_{xx}$$

було отримано Новіковим [103] у процесі класифікації інтегровних рівнянь виду

$$(1 - \partial_x^2) u_t = F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots), \quad u = u(x, t), \quad \partial_x = \partial/\partial x.$$

На вигляд воно відрізняється від рівняння ДП лише додатковим множником u , тому його нелінійність є кубічною (як і у випадку мКХ). Рівняння Новікова демонструє феномен руйнування хвиль (blow-up) і має пікоподібні розв'язки з неперервними та розривними $u(x, t)$.

Завдяки багатій математичній структурі та цікавим властивостям цих рівнянь природним є вивчення їхніх модифікацій та узагальнень. Зокрема, багато дослідників розглядають їхні короткохвильові границі (момент має форму $m = -u_{xx}$; у випадку оригінальних рівнянь момент має форму $m = u - u_{xx}$) і так звані μ -рівняння (момент має форму $m = \mu(u) - u_{xx}$, де $\mu(u) = \int_{\mathbb{S}} u(x, t) dx$). У певному сенсі μ -рівняння можна вважати рівняннями, проміжними між оригінальними рівняннями та їхніми короткохвильовими границями.

Короткохвильова модель для рівняння Камасси–Хольма

$$m_t + 2u_x - 2u_x m - u m_x = 0, \quad m = -u_{xx}$$

є моделлю для коротких капілярних хвиль, що поширюються під дією сили тяжіння [16]. Це рівняння також відоме як модифіковане рівняння Хантера–Сакстона (мХС). Особливістю мХС є те, що воно має каспонні розв'язки (розв'язки, що мають форму потоку хвиль у формі каспона, тобто обидві (ліва та права) похідні дорівнюють нескінченностям).

Короткохвильова модель для рівняння Дегасперіса–Процесі

$$m_t + 3u_x - u m_x - 3u_x m = 0, \quad m = -u_{xx}$$

є моделлю, що описує односпрямоване поширення нелінійних мілководних хвиль. Це рівняння також називають рівнянням Островського–Вахненко (ОВ). Точні розв'язки рівняння ОВ солітонного типу були побудовані за

допомогою формалізму Рімана–Гільберта в [28]. Ці розв’язки є багатозначними функціями, що мають вигляд вигляд петлі (1-солітон) або багатьох петель (мультисолітони).

Рівняння μ -КХ

$$m_t + (um)_x + u_x m = 0, \quad m := \mu(u) - u_{xx},$$

було вперше введено у [87] Хесіном, Ленелсом та Місіолеком. Воно описує геодезичну течію на групі дифеоморфізмів S з певною метрикою. Його інтегровність, коректність, руйнування розв’язків та існування піконів розглянуто в [87].

Рівняння μ -ДП

$$m_t + um_x + 3u_x m = 0, \quad m = \mu(u) - u_{xx}$$

було введено Ленелсом, Місіолеком та Тиглаєм у [93]. Його інтегровність, коректність, можливість руйнування розв’язків та існування піконів було досліджено у [93].

Іншим природним узагальненням рівняння мКХ є двокомпонентне інтегровне модифіковане рівняння Камасси-Хольма (2-мКХ):

$$m_t + ((u - u_x)(v + v_x)m)_x = 0, \quad m := u - u_{xx}, \quad (1.6a)$$

$$n_t + ((u - u_x)(v + v_x)n)_x = 0, \quad m := v - v_{xx}. \quad (1.6b)$$

Його було запропоновано Сонгом, Ку та Цяо у [111].

У [111] показано, що рівняння (1.6) виникає у випадку нерозтяжних інваріантних криволінійних течій у n -вимірній одиничній сфері $S^n(1)$. Відомо, що ця система рівнянь має нескінченну кількість законів збереження, а також є умовою сумісності такої пари Лакса:

$$\Phi_x(x, t, \lambda) = \mathbf{U}(x, t, \lambda)\Phi(x, t, \lambda), \quad \Phi_t(x, t, \lambda) = \mathbf{V}(x, t, \lambda)\Phi(x, t, \lambda)$$

де матриці коефіцієнтів \mathbf{U} і \mathbf{V} визначаються через розв’язок рівняння 2-мКХ:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \lambda m \\ -\lambda n & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 4\lambda^{-2} + (u - u_x)(v + v_x) & -\frac{2(u-u_x)}{\lambda} - \lambda m(u - u_x)(v + v_x) \\ \frac{2(v+v_x)}{\lambda} + \lambda n(u - u_x)(v + v_x) & -(u - u_x)(v + v_x) \end{pmatrix}.$$

Локальну коректність асоційованої задачі Коші у просторах Бесова, явні вирази для його однопіконного та двопіконного розв'язків, а також сценарій руйнування було досліджено в [117].

Всі описані вище рівняння належать до класу інтегровних рівнянь. Важливо підкреслити, що існують також неінтегровні піконні рівняння. Типовий приклад був вперше наведено в роботі Дегасперіса, Хольма і Хоне [56], які описали сім'ю рівнянь

$$u_t - u_{xxt} + (b + 1)uu_x = bu_xu_{xx} + uu_{xx}, \quad b \in \mathbb{R},$$

які зводяться до рівнянь КХ та ДП при $b = 2$, $b = 3$ відповідно, тоді як для інших значень b вони не є інтегровними, що було показано в [57].

Огляд літератури свідчить про значний інтерес науковців, які працюють у різних галузях математики та фізики, до інтегровних нелінійних рівнянь, зокрема, до рівняння Камасси–Хольма та його узагальнень. Це підтверджує актуальність обраної в дисертації теми.

Розділ 2

Підхід Рімана–Гільберта до модифікованого рівняння Камасси–Хольма з ненульовими крайовими умовами

Результати цього розділу опубліковано у [18].

У цьому розділі розглядається початкова задача для рівняння мКХ (1.5):

$$m_t + ((u^2 - u_x^2)m)_x = 0, \quad m := u - u_{xx}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.1a)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.1b)$$

припускаючи, що $u_0(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \pm\infty$, і, що розв'язок зберігає цю поведінку: $u(x, t) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \pm\infty$ для всіх $t > 0$. Тоді, за аналогією з рівнянням КХ та іншими рівняннями типу КХ, можна очікувати, що задача Коші (2.1) має гладкі солітонні розв'язки.

Введемо нову функцію \tilde{u} таким чином:

$$u(x, t) = \tilde{u}(x - t, t) + 1, \quad (2.2)$$

тоді рівняння мКХ зводиться до системи

$$\tilde{m}_t + (\tilde{\omega}\tilde{m})_x = 0, \quad (2.3a)$$

$$\tilde{m} := \tilde{u} - \tilde{u}_{xx} + 1, \quad (2.3b)$$

$$\tilde{\omega} := \tilde{u}^2 - \tilde{u}_x^2 + 2\tilde{u}. \quad (2.3\text{в})$$

Надалі досліджується рівняння (2.3а) на нульовому фоні: $\tilde{u} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. А саме, розвинено підхід задачі Рімана–Гільберта (РГ) до рівняння (2.3а) на нульовому фоні з метою отримати представлення розв’язку задачі Коші для (2.3) в термінах розв’язку пов’язаної з ним задачі РГ, сформульованої в комплексній площині спектрального параметра.

У підрозділі 2.1 вводяться розв’язки Йоста для рівнянь пари Лакса, що записані у формі, придатній для контролю їхніх аналітичних властивостей як функцій спектрального параметра. У підрозділі 2.2 формулюється задача Рімана–Гільберта у двох постановках: (і) у початковій постановці, коли вона (неявно) залежить від фізичних змінних (x, t) як параметрів, і (ii) у трансформованій постановці, коли введені нові змінні (y, t) , в термінах яких задача Рімана–Гільберта має явну залежність від параметрів. Дані для останньої задачі РГ однозначно визначаються початковими даними для рівняння мКХ, що приводить до процедури розв’язування задачі Коші (2.1). У підрозділі 2.3 показано, що, починаючи з розв’язку задачі РГ з відповідною залежністю від параметрів, ми завжди приходимо до розв’язку рівняння мКХ, навіть якщо дані для цієї задачі РГ не пов’язані з деякими конкретними початковими даними для рівняння мКХ. Нарешті, у підрозділі 2.4, використовуючи формалізм задачі РГ, побудовано гладкі та негладкі солітонні розв’язки рівняння мКХ. Всюди в тексті підкреслено відмінності в застосуванні підходу РГ до рівнянь КХ і мКХ.

2.1 Пари Лакса і власні функції

2.1.1 Пари Лакса

Почнемо з того, що введемо пару Лакса для рівняння (2.3а).

Пара Лакса для рівняння мКХ (1.5) [106] має такий вигляд:

$$\Phi_x = U\Phi, \quad \Phi_t = V\Phi, \quad (2.4)$$

де $\Phi \equiv \Phi(x, t, \lambda)$, $U \equiv U(x, t, \lambda)$ і $V \equiv V(x, t, \lambda)$, і коефіцієнти U і V визначаються як:

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \lambda m \\ -\lambda m & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5a)$$

$$V = \begin{pmatrix} \lambda^{-2} + \frac{u^2 - u_x^2}{2} & -\lambda^{-1}(u - u_x) - \frac{\lambda(u^2 - u_x^2)m}{2} \\ \lambda^{-1}(u + u_x) + \frac{\lambda(u^2 - u_x^2)m}{2} & -\lambda^{-2} - \frac{u^2 - u_x^2}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.5b)$$

де $m := u - u_{xx}$. Це приводить нас до пари рівнянь

$$\Phi_x = U\Phi, \quad (2.6a)$$

$$\Phi_t = V\Phi, \quad (2.6b)$$

де коефіцієнти $U \equiv U(x, t, \lambda)$ та $V \equiv V(x, t, \lambda)$ визначаються у термінах \tilde{u} , \tilde{m} та $\tilde{\omega}$:

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \lambda \tilde{m} \\ -\lambda \tilde{m} & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.7a)$$

$$V = \begin{pmatrix} \lambda^{-2} + \frac{\tilde{\omega}}{2} & -\lambda^{-1}(\tilde{u} - \tilde{u}_x + 1) - \frac{\lambda \tilde{\omega} \tilde{m}}{2} \\ \lambda^{-1}(\tilde{u} + \tilde{u}_x + 1) + \frac{\lambda \tilde{\omega} \tilde{m}}{2} & -\lambda^{-2} - \frac{\tilde{\omega}}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.7b)$$

Тут $\tilde{m} := \tilde{u} - \tilde{u}_{xx} + 1$ і $\tilde{\omega} := \tilde{u}^2 - \tilde{u}_x^2 + 2\tilde{u}$ як у (2.3б) і (2.3в), з \tilde{u} як у (2.2). Можна безпосередньо перевірити, що (2.3а) є умовою сумісності для системи (2.6)-(2.7). Отже, ця система (2.6)-(2.7) є парою Лакса для (2.3а).

Формалізм РГ для інтегровних нелінійних рівнянь ґрунтується на використанні належним чином визначених власних функцій, тобто розв'язків пари Лакса, поведінка яких, як функцій спектрального параметра, добре контролюється в розширеній комплексній площині. Зауважимо, що матриці коефіцієнтів U і V мають нульові сліди, а це означає, що визначник матричного розв'язку (2.6) (складеного з двох векторних розв'язків) не залежить від x і t .

Зауважимо також, що U і V мають сингулярності (у розширеній комплексній λ -площині) при $\lambda = 0$ і $\lambda = \infty$. Для того, щоб контролювати поведінку розв'язків (2.6) як функцій спектрального параметра λ (що є

важливим для методу Рімана–Гільберта), використано стратегію, подібну до тієї, що була застосована для рівняння КХ [23, 24].

А саме, для того, щоб контролювати поведінку розв'язків (2.6) при великих λ , ця пара Лакса приведена до відповідного вигляду (див. [9, 23, 24]).

Твердження 2.1.1. *Рівняння (2.3а) допускає пару Лакса виду:*

$$\hat{\Phi}_x + Q_x \hat{\Phi} = \hat{U} \hat{\Phi}, \quad (2.8a)$$

$$\hat{\Phi}_t + Q_t \hat{\Phi} = \hat{V} \hat{\Phi}, \quad (2.8b)$$

де коефіцієнти $Q \equiv Q(x, t, \lambda)$, $\hat{U} \equiv \hat{U}(x, t, \lambda)$ та $\hat{V} \equiv \hat{V}(x, t, \lambda)$ є 2×2 матрицями з такими властивостями:

- (i) Q є діагональною і необмеженою при $\lambda \rightarrow \infty$.
- (ii) $\hat{U} = O(1)$ і $\hat{V} = O(1)$ при $\lambda \rightarrow \infty$.
- (iii) Діагональні частини \hat{U} та \hat{V} спадають при $\lambda \rightarrow \infty$.
- (iv) $\hat{U} \rightarrow 0$ і $\hat{V} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Доведення. Зауважимо, що U у (2.7а) можна записати як

$$U(x, t, \lambda) = \frac{\tilde{m}(x, t)}{2} \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} + \frac{\tilde{m}(x, t) - 1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

де $\tilde{m}(x, t) - 1 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Перший (неспадний при $x \rightarrow \pm\infty$) член у (2.9) можна діагоналізувати, ввівши

$$\hat{\Phi}(x, t, \lambda) := D(\lambda)\Phi(x, t, \lambda),$$

де

$$D(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda}{1+\sqrt{1-\lambda^2}} \\ -\frac{\lambda}{1+\sqrt{1-\lambda^2}} & 1 \end{pmatrix},$$

а квадратний корінь вибрано так, що $\sqrt{1-\lambda^2} \sim i\lambda$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Це трансформує (2.6а) у

$$\hat{\Phi}_x + \frac{\tilde{m}\sqrt{1-\lambda^2}}{2}\sigma_3\hat{\Phi} = \hat{U}\hat{\Phi}, \quad (2.10a)$$

де $\hat{U} \equiv \hat{U}(x, t, \lambda)$ задано виразом:

$$\hat{U} = \frac{\lambda(\tilde{m} - 1)}{2\sqrt{1 - \lambda^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\tilde{m} - 1}{2\sqrt{1 - \lambda^2}} \sigma_3. \quad (2.10б)$$

Аналогічно, t -рівняння (2.6б) пари Лакса трансформується у

$$\hat{\Phi}_t + \sqrt{1 - \lambda^2} \left(-\frac{1}{2} \tilde{m} \tilde{\omega} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \sigma_3 \hat{\Phi} = \hat{V} \hat{\Phi}, \quad (2.10в)$$

де $\hat{V} \equiv \hat{V}(x, t, \lambda)$ задано формулою

$$\begin{aligned} \hat{V} = & \frac{1}{2\sqrt{1 - \lambda^2}} \left(\lambda \tilde{\omega} (\tilde{m} - 1) + \frac{2\tilde{u}}{\lambda} \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\tilde{u}_x}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & - \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \left(\tilde{u} + \frac{1}{2} (\tilde{m} - 1) \tilde{\omega} \right) \sigma_3. \end{aligned} \quad (2.10г)$$

Зауважимо, що рівняння (2.10а) і (2.10в) мають бажаний вигляд (2.8), якщо ми визначимо Q через

$$Q(x, t, \lambda) := p(x, t, \lambda) \sigma_3, \quad (2.11а)$$

де

$$p(x, t, \lambda) := -\frac{1}{2} \sqrt{1 - \lambda^2} \int_x^{+\infty} (\tilde{m}(\xi, t) - 1) d\xi + \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{2} x - \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{\lambda^2} t. \quad (2.11б)$$

Дійсно, p має похідні

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\tilde{m} \sqrt{1 - \lambda^2}}{2}, \\ p_t &= \sqrt{1 - \lambda^2} \left(-\frac{1}{2} \tilde{m} \tilde{\omega} - \frac{1}{\lambda^2} \right). \end{aligned}$$

Перша формула є очевидною, а друга випливає з (2.3а). \square

2.1.2 Власні функції

Пара Лакса у вигляді (2.10) дозволяє визначити спеціальні розв'язки з добре контрольованою поведінкою (як функцій спектрального параметра λ)

при великих значеннях λ за допомогою відповідних інтегральних рівнянь. Дійсно, ввівши

$$\tilde{\Phi} = \hat{\Phi} e^Q \quad (2.12)$$

(розуміючи $\tilde{\Phi}$ як 2×2 матрицю), рівняння (2.10а) та (2.10в) можна переписати як

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_x + [Q_x, \tilde{\Phi}] = \hat{U} \tilde{\Phi}, \\ \tilde{\Phi}_t + [Q_t, \tilde{\Phi}] = \hat{V} \tilde{\Phi}, \end{cases} \quad (2.13)$$

де $[\cdot, \cdot]$ позначає комутатор. Визначимо спеціальні розв'язки (Йоста) $\tilde{\Phi}_{\pm} \equiv \tilde{\Phi}_{\pm}(x, t, \lambda)$ (2.13) як розв'язки відповідних інтегральних рівнянь Вольтера:

$$\tilde{\Phi}_{\pm}(x, t, \lambda) = I + \int_{\pm\infty}^x e^{Q(\xi, t, \lambda) - Q(x, t, \lambda)} \hat{U}(\xi, t, \lambda) \tilde{\Phi}_{\pm}(\xi, t, \lambda) e^{Q(x, t, \lambda) - Q(\xi, t, \lambda)} d\xi, \quad (2.14)$$

тобто з урахуванням визначення (2.11) для Q отримуємо

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_+(x, t, \lambda) &= I - \int_x^{+\infty} e^{\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{2} \int_x^{\xi} \tilde{m}(\eta, t) d\eta \sigma_3} \hat{U}(\xi, t, \lambda) \tilde{\Phi}_+(\xi, t, \lambda) e^{-\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{2} \int_x^{\xi} \tilde{m}(\eta, t) d\eta \sigma_3} d\xi, \\ \tilde{\Phi}_-(x, t, \lambda) &= I + \int_{-\infty}^x e^{\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{2} \int_x^{\xi} \tilde{m}(\eta, t) d\eta \sigma_3} \hat{U}(\xi, t, \lambda) \tilde{\Phi}_-(\xi, t, \lambda) e^{-\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{2} \int_x^{\xi} \tilde{m}(\eta, t) d\eta \sigma_3} d\xi \end{aligned} \quad (2.15)$$

(I - одинична матриця). Надалі, нехай $\hat{\Phi}_{\pm} := \tilde{\Phi}_{\pm} e^{-Q}$ позначає відповідні розв'язки Йоста для (2.10).

Введемо новий спектральний параметр k за формулою

$$\lambda^2 = 4k^2 + 1,$$

тоді експоненти у (2.15) набувають вигляду $e^{\pm ik \int_x^{\xi} \tilde{m}(\eta, t) d\eta \sigma_3}$. Крім того, введемо нову просторову змінну

$$y(x, t) := x - \int_x^{+\infty} (\tilde{m}(\xi, t) - 1) d\xi. \quad (2.16)$$

Тоді Q набуває вигляду $Q(y, t, k) = -ik \left(y - \frac{2t}{4k^2 + 1} \right) \sigma_3$, який збігається з тим, що спостерігається у випадку рівняння КХ [23, 24].

Зауваження 2.1.2. Нагадаємо, що пара відомих інтегровних рівнянь — рівняння Кортевега–де Фріза (КдФ) та модифіковане рівняння Кортевега–де Фріза (мКдФ) — мають однакову Q , яка в обох випадках має вигляд

$Q(x, t, k) = (ikx + 4ik^3t)\sigma_3$. Це міркування дає додаткову підставу назвати рівняння (1.5) *модифікованим* рівнянням Камасси–Хольма.

Зауваження 2.1.3. Зміна змінних (2.16) фактично є частиною перетворення Ліувілля [83], яке пов'язує просторові рівняння з пар Лакса для рівнянь мКдФ та мКХ, і, таким чином, встановлює відповідність між потоками в ієрархії мКХ та ієрархії мКдФ. У поєднанні з перетворенням Ліувілля, яке пов'язує ієрархію КХ та ієрархію Кортвега–де Фріза (КдФ) [90], це дозволяє ввести перетворення типу Міури від рівняння мКХ до рівняння КХ [83]. Однак, оскільки це відображення не є однозначним і передбачає нелінійні маніпуляції з залежними змінними, його важко використовувати при вивченні різних властивостей розв'язків конкретних задач для рівняння мКХ (наприклад, поведінки за великим часом розв'язків задачі Коші з певними граничними умовами). Це спонукало нас запропонувати більш прямий підхід до задачі Коші для рівняння мКХ, який не спирається на перетворення до рівняння КХ, а має справу безпосередньо з рівняннями пари Лакса для мКХ.

Суттєва відмінність між парами Лакса для рівнянь КХ і мКХ полягає в тому, що в останньому випадку залежність асоційованої матриці коефіцієнтів $\hat{U}(x, t, k)$ (ми використовуємо те саме позначення \hat{U}) від спектрального параметра k не є раціональною (через наявність $\lambda(k)$):

$$\hat{U}(x, t, k) = \frac{\tilde{m} - 1}{2} \left(\frac{1}{2ik} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda(k)}{2ik} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

що ускладнює побудову задачі РГ, вимагаючи або введення вітки в площині k , або формулювання задачі РГ на сфері Рімана, асоційованій з

$$\lambda^2 = 4k^2 + 1.$$

Щоб уникнути цих ускладнень, введемо новий (уніфікуючий) спектральний параметр μ такий, що і λ , і k є раціональними відносно μ :

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right), \quad k = \frac{1}{4} \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right). \quad (2.17)$$

Точніше, визначимо $\mu = -\lambda - i\sqrt{1 - \lambda^2}$, так що $k = -\frac{i}{2}\sqrt{1 - \lambda^2} + i\sqrt{1 - \lambda^2} = \frac{i}{2}\frac{\mu^2 - 1}{\mu} = 2ik$. У термінах μ маємо

$$p(x, t, \mu) = -\frac{i(\mu^2 - 1)}{4\mu} \left(\int_x^{+\infty} (\tilde{m}(\xi, t) - 1) d\xi - x + \frac{8\mu^2}{(\mu^2 + 1)^2} t \right), \quad (2.18)$$

$$\hat{U}(x, t, \mu) = \frac{i(\mu^2 + 1)(\tilde{m} - 1)}{2(\mu^2 - 1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i\mu(\tilde{m} - 1)}{\mu^2 - 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

і, відповідно, рівняння (2.15) набувають вигляду

$$\tilde{\Phi}_{\pm}(x, t, \mu) = I + \int_{\pm\infty}^x e^{\frac{i(\mu^2 - 1)}{4\mu} \int_x^{\xi} \tilde{m}(\eta, t) d\eta \sigma_3} \hat{U}(\xi, t, \mu) \tilde{\Phi}_{\pm}(\xi, t, \mu) e^{-\frac{i(\mu^2 - 1)}{4\mu} \int_x^{\xi} \tilde{m}(\eta, t) d\eta \sigma_3} d\xi. \quad (2.20)$$

Тепер можна, за аналогією з випадком рівняння КХ [23, 24], проаналізувати аналітичні та асимптотичні властивості розв'язків $\tilde{\Phi}_{\pm}$ рівняння (2.20) як функцій μ , використовуючи розвинення у ряди Неймана. Нехай $A^{(1)}$ і $A^{(2)}$ позначають стовпчики матриці 2×2 $A = \begin{pmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} \end{pmatrix}$. Використовуючи ці позначення, маємо такі властивості:

- $\tilde{\Phi}_{-}^{(1)}$ та $\tilde{\Phi}_{+}^{(2)}$ аналітичні в $\mathbb{C}^+ = \{\mu \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \mu > 0\}$;
- $\tilde{\Phi}_{+}^{(1)}$ та $\tilde{\Phi}_{-}^{(2)}$ аналітичні в $\mathbb{C}^- = \{\mu \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \mu < 0\}$;
- $\tilde{\Phi}_{-}^{(1)}$, $\tilde{\Phi}_{+}^{(2)}$, $\tilde{\Phi}_{+}^{(1)}$ та $\tilde{\Phi}_{-}^{(2)}$ неперервні на дійсній прямій, за виключенням $\mu = \pm 1$.

Зауважимо, що $\hat{U}(\mu) \equiv \hat{U}(x, t, \mu)$, $\hat{V}(\mu) \equiv \hat{V}(x, t, \mu)$ задовольняють однаковим симетріям:

$$\hat{U}(\bar{\mu}) = \sigma_1 \overline{\hat{U}(\mu)} \sigma_1, \quad \hat{U}(-\mu) = \sigma_2 \hat{U}(\mu) \sigma_2, \quad \hat{U}(\mu^{-1}) = \sigma_1 \hat{U}(\mu) \sigma_1, \quad (2.21a)$$

$$\hat{V}(\bar{\mu}) = \sigma_1 \overline{\hat{V}(\mu)} \sigma_1, \quad \hat{V}(-\mu) = \sigma_2 \hat{V}(\mu) \sigma_2, \quad \hat{V}(\mu^{-1}) = \sigma_1 \hat{V}(\mu) \sigma_1, \quad (2.21b)$$

при $\mu \neq \pm 1$, а також $\mu \neq 0$ для симетрії $\mu \mapsto \mu^{-1}$. Крім того, $p(\mu) \equiv p(x, t, \mu)$ задовольняє таким симетріям:

$$p^*(\mu) = -p(\mu) = p(-\mu) = p(\mu^{-1}). \quad (2.22)$$

Звідси випливає, що

- $\tilde{\Phi}_{\pm}$ також задовольняє тим самим симетріям, що й у (2.21a):

$$\tilde{\Phi}_{\pm}(\bar{\mu}) = \sigma_1 \overline{\tilde{\Phi}_{\pm}(\mu)} \sigma_1, \quad \tilde{\Phi}_{\pm}(-\mu) = \sigma_2 \tilde{\Phi}_{\pm}(\mu) \sigma_2, \quad \tilde{\Phi}_{\pm}(\mu^{-1}) = \sigma_1 \tilde{\Phi}_{\pm}(\mu) \sigma_1. \quad (2.23)$$

Це означає, що $\tilde{\Phi}_{\pm}^{(1)}(\mu) = \sigma_1 \tilde{\Phi}_{\pm}^{(2)*}(\mu) = \sigma_3 \sigma_1 \tilde{\Phi}_{\pm}^{(2)}(-\mu) = \sigma_1 \tilde{\Phi}_{\pm}^{(2)}(\mu^{-1})$ for $\pm \operatorname{Im} \mu \leq 0$, $\mu \neq \pm 1$.

У (2.13) коефіцієнти є матрицями без слідів, з чого випливає, що

- $\det \tilde{\Phi}_{\pm} \equiv 1$.

При аналізі значень $\tilde{\Phi}_{\pm}$ у певних точках площини μ , з (2.20) випливає, що

- $(\tilde{\Phi}_{-}^{(1)} \tilde{\Phi}_{+}^{(2)}) \rightarrow I$ при $\mu \rightarrow \infty$ у випадку $\operatorname{Im} \mu \geq 0$, а також при $\mu = 0$ (за симетрією (2.23)).
- $(\tilde{\Phi}_{+}^{(1)} \tilde{\Phi}_{-}^{(2)}) \rightarrow I$ при $\mu \rightarrow \infty$ у випадку $\operatorname{Im} \mu \leq 0$, а також при $\mu = 0$.
- Коли $\mu \rightarrow 1$, $\tilde{\Phi}_{\pm}(x, t, \mu) = \frac{i}{2(\mu-1)} \alpha_{\pm}(x, t) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + O(1)$ з $\alpha_{\pm}(x, t) \in \mathbb{R}$ (розуміючи цей вираз по стовпчиках, у відповідних півплощинах μ).
- Коли $\mu \rightarrow -1$, $\tilde{\Phi}_{\pm}(x, t, \mu) = -\frac{i}{2(\mu+1)} \alpha_{\pm}(x, t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + O(1)$ з тими самими $\alpha_{\pm}(x, t)$, що й у попередньому пункті (за симетрією (2.23)).

2.1.3 Спектральні дані

Введемо матрицю розсіювання $s(\mu)$ як матрицю, що зв'язує $\tilde{\Phi}_{+}$ і $\tilde{\Phi}_{-}$ на дійсній прямій:

$$\tilde{\Phi}_{+}(x, t, \mu) = \tilde{\Phi}_{-}(x, t, \mu) e^{-p(x, t, \mu) \sigma_3} s(\mu) e^{p(x, t, \mu) \sigma_3}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu \neq \pm 1. \quad (2.24)$$

Використовуючи (2.23), $s(\mu)$ можна записати через дві скалярні спектральні функції, $a(\mu)$ та $b(\mu)$:

$$s(\mu) = \begin{pmatrix} \overline{a(\mu)} & b(\mu) \\ \overline{b(\mu)} & a(\mu) \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (2.25)$$

які задовольняють симетріям $\overline{a(\mu)} = a(-\mu) = a(\mu^{-1})$ та $\overline{b(\mu)} = -b(-\mu) = b(\mu^{-1})$ для $\mu \in \mathbb{R}$.

Спектральні функції $a(\mu)$ і $b(\mu)$ однозначно визначаються функцією $u(x, 0)$ через розв'язки $\tilde{\Phi}_{\pm}(x, 0, \mu)$ рівнянь (2.20). З іншого боку, за допомогою представлень

$$a(\mu) = \det \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_{-}^{(1)} & \tilde{\Phi}_{+}^{(1)} \\ \tilde{\Phi}_{-}^{(2)} & \tilde{\Phi}_{+}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad b(\mu) = e^{2p} \det \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_{+}^{(2)} & \tilde{\Phi}_{-}^{(2)} \\ \tilde{\Phi}_{+}^{(1)} & \tilde{\Phi}_{-}^{(1)} \end{pmatrix},$$

аналітичні властивості $\tilde{\Phi}_{\pm}$, наведені вище, зумовлюють відповідні властивості $a(\mu)$ та $b(\mu)$:

- $a(\mu)$ можна аналітично продовжити у \mathbb{C}^+ , причому вона є неперервною на дійсній прямій, за виключенням $\mu = \pm 1$. Крім того, $a(0) = 1$, $a(\mu) \rightarrow 1$ при $\mu \rightarrow \infty$, і $a(\mu)$ задовольняє симетрії

$$a(\mu) = \overline{a(-\bar{\mu})} = a(-\mu^{-1}) \text{ для } \text{Im } \mu \geq 0.$$

- $b(\mu)$ неперервна при $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Крім того, $b(0) = 0$ і $b(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \pm\infty$.
- При $\mu \rightarrow 1$, $a(\mu) = \gamma \frac{i}{2(\mu-1)} + O(1)$ і $b(\mu) = \gamma \frac{i}{2(\mu-1)} + O(1)$ з однією і тією ж $\gamma \in \mathbb{R}$, що випливає з (2.24).
- При $\mu \rightarrow -1$, $a(\mu) = \gamma \frac{i}{2(\mu+1)} + O(1)$ і $b(\mu) = -\gamma \frac{i}{2(\mu+1)} + O(1)$, де γ з попередньої властивості, за симетрією.
- $|a(\mu)|^2 - |b(\mu)|^2 = 1$ для $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq \pm 1$.

Зауваження 2.1.4. Випадок $\gamma \neq 0$ є випадком загального положення. З іншого боку, у незагальному випадку, $\gamma = 0$, маємо $a(\pm 1) = a_1$ і $b(\pm 1) = \pm b_1$ з деякими $a_1 \in \mathbb{R}$ і $b_1 \in \mathbb{R}$ такими, що $a_1^2 = 1 + b_1^2$. З (2.24) випливає, що коефіцієнти $\alpha_+(x, t)$ та $\alpha_-(x, t)$, які з'являються у розвиненнях $\tilde{\Phi}$ при $\mu = \pm 1$, пов'язані співвідношенням

$$\alpha_+(x, t) = (a_1 - b_1)\alpha_-(x, t). \quad (2.26)$$

2.2 Задача Рімана–Гільберта

2.2.1 Задача РГ, параметризована (x, t)

Аналітичні властивості $\tilde{\Phi}_{\pm}$ дозволяють переписати співвідношення розсіювання (2.24) як співвідношення стрибка для кусково-мероморфної (відносно μ), 2×2 -матричної функції (що залежить від x та t як параметрів).

Дійсно, визначимо $M \equiv M(x, t, \mu)$ за допомогою

$$M(x, t, \mu) = \begin{cases} \left(\frac{\tilde{\Phi}_{-}^{(1)}(x, t, \mu)}{a(\mu)} & \tilde{\Phi}_{+}^{(2)}(x, t, \mu) \right), & \text{Im } \mu > 0, \\ \left(\tilde{\Phi}_{+}^{(1)}(x, t, \mu) & \frac{\tilde{\Phi}_{-}^{(2)}(x, t, \mu)}{a(\bar{\mu})} \right), & \text{Im } \mu < 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Визначимо також

$$r(\mu) := \frac{b(\mu)}{a^*(\mu)}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.28)$$

Тоді граничні значення $M_{\pm}(x, t, \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$ для M коли μ наближається з \mathbb{C}^{\pm} пов'язані співвідношенням

$$M_{-}(x, t, \mu) = M_{+}(x, t, \mu)J(x, t, \mu), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu \neq \pm 1, \quad (2.29a)$$

де

$$J(x, t, \mu) = e^{-p(x, t, \mu)\sigma_3} J_0(\mu) e^{p(x, t, \mu)\sigma_3} \quad (2.29b)$$

з

$$J_0(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & -r(\mu) \\ r^*(\mu) & 1 - r(\mu)r^*(\mu) \end{pmatrix}. \quad (2.29b)$$

Враховуючи властивості $\tilde{\Phi}_{\pm}$ та $s(\mu)$, отримуємо, що $M(x, t, \mu)$ задовольняє такі умови:

- Умову стрибка (2.29) на \mathbb{R} .
- Умову визначника $\det M \equiv 1$.
- Умову нормування:

$$M \rightarrow I \quad \text{as } \mu \rightarrow \infty \quad (2.30)$$

(і також $M(0) = I$ за симетрією, див. (2.33)).

- Умови сингулярності:

$$M(x, t, \mu) = \begin{cases} \frac{i\alpha_+(x, t)}{2(\mu-1)} \begin{pmatrix} -c & 1 \\ -c & 1 \end{pmatrix} + O(1), & \mu \rightarrow 1, \quad \text{Im } \mu > 0, \\ -\frac{i\alpha_+(x, t)}{2(\mu+1)} \begin{pmatrix} c & 1 \\ -c & -1 \end{pmatrix} + O(1), & \mu \rightarrow -1, \quad \text{Im } \mu > 0, \end{cases} \quad (2.31)$$

з деяким $\alpha_+(x, t) \in \mathbb{R}$ і (див. зауваження 2.1.4)

$$c := \begin{cases} 0, & \text{if } \gamma \neq 0, \\ \frac{a_1+b_1}{a_1}, & \text{if } \gamma = 0, \end{cases} \quad (2.32a)$$

де $a_1 = a(1)$, $b_1 = b(1)$, і $\gamma := -2i \lim_{\mu \rightarrow 1} (\mu - 1)a(\mu)$. Зауважимо, що в термінах $r(\pm 1)$ загальний випадок $\gamma \neq 0$ відповідає $r(1) = -r(-1) = -1$, тоді як у незагальному випадку $|r(\pm 1)| < 1$ (див. задачу для одновимірного оператора Шредінгера [51], яка є спектральною задачею для рівняння Кортевега–де Фріза). Отже, (2.32a) можна записати так

$$c := \begin{cases} 0, & \text{if } r(1) = -1, \\ 1 + r(1) = 1 - r(-1), & \text{if } |r(1)| < 1. \end{cases} \quad (2.32b)$$

Ці дві умови у (2.31) є еквівалентними за симетрією (2.33).

- Симетрії (які випливають з (2.23)):

$$M(\bar{\mu}) = \sigma_1 \overline{M(\mu)} \sigma_1, \quad M(-\mu) = \sigma_2 M(\mu) \sigma_2, \quad M(\mu^{-1}) = \sigma_1 M(\mu) \sigma_1, \quad (2.33)$$

де $M(\mu) \equiv M(x, t, \mu)$. Першу симетрію також можна записати як $\sigma_1 M^{(1)*} = M^{(2)}$. Крім того, (2.33) зумовлює симетрії $\overline{M(-\bar{\mu})} = M(-\mu^{-1}) = \sigma_3 M(\mu) \sigma_3$.

Якщо $a(\mu)$ має нулі у \mathbb{C}^+ , то наведені вище умови слід доповнити умовами на лишки у цих нулях. Припустимо, що $a(\mu)$ має скінченну кількість простих нулів $\{\mu_j\}_1^N$ у \mathbb{C}^+ . Симетрії $a(\mu) = \overline{a(-\bar{\mu})} = a(-\mu^{-1})$ означають, що ця множина нулів інваріантна при перетвореннях $\mu \mapsto -\bar{\mu}$ та $\mu \mapsto -\mu^{-1}$: для кожного j існують j' та j'' такі, що $-\bar{\mu}_j = \mu_{j'}$ та $-\mu_j^{-1} = \mu_{j''}$.

- Умови на лишки: $M^{(1)}(x, t, \mu)$ має прості полюси у $\{\mu_j\}_1^N$ і $M^{(2)}(x, t, \mu)$ має прості полюси у $\{\bar{\mu}_j\}_1^N$. Крім того,

$$\operatorname{Res}_{\mu_j} M^{(1)}(x, t, \mu) = \frac{1}{\varkappa_j(x, t)} M^{(2)}(x, t, \mu_j), \quad (2.34a)$$

$$\operatorname{Res}_{\bar{\mu}_j} M^{(2)}(x, t, \mu) = \frac{1}{\bar{\varkappa}_j(x, t)} M^{(1)}(x, t, \bar{\mu}_j). \quad (2.34б)$$

Тут $\varkappa_j(x, t) = \dot{a}(\mu_j)\delta_j e^{-2p(x, t, \mu_j)}$ з деякими сталими $\delta_j \neq 0$. За симетрією (2.33) умови (2.34) є еквівалентними. Зауважимо також, як змінюються лишки при перетвореннях $\mu \mapsto -\bar{\mu}$ і $\mu \mapsto -\mu^{-1}$: якщо $-\bar{\mu}_j = \mu_{j'}$ і $-\mu_j^{-1} = \mu_{j''}$, то $\varkappa_j = \bar{\varkappa}_{j''} = -\mu_j^{-2} \varkappa_{j''}$.

Доведення (2.34). Дійсно, нехай μ_j є простим коренем з $a(\mu)$, тобто $a(\mu_j) = 0$ і $\dot{a}(\mu_j) \neq 0$. Тоді, використовуючи рівності $a(\mu) = \det \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_-^{(1)} & \tilde{\Phi}_+^{(2)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_-^{(1)} & \hat{\Phi}_+^{(2)} \end{pmatrix}$, маємо

$$\hat{\Phi}_+^{(2)}(x, t, \mu_j) = \delta_j \hat{\Phi}_-^{(1)}(x, t, \mu_j), \quad (2.35a)$$

$$\tilde{\Phi}_+^{(2)}(x, t, \mu_j) = \delta_j e^{-2p(x, t, \mu_j)} \tilde{\Phi}_-^{(1)}(x, t, \mu_j) \quad (2.35б)$$

з деякою сталою $\delta_j \neq 0$. Звідси випливає, що

$$\operatorname{Res}_{\mu_j} M^{(1)}(x, t, \mu) = \operatorname{Res}_{\mu_j} \frac{\tilde{\Phi}_-^{(1)}(x, t, \mu)}{a(\mu)} = \frac{\tilde{\Phi}_-^{(1)}(x, t, \mu_j)}{\dot{a}(\mu_j)} = \frac{\tilde{\Phi}_+^{(2)}(x, t, \mu_j)}{\dot{a}(\mu_j)\delta_j e^{-2p(x, t, \mu_j)}}.$$

Позначивши $\varkappa_j(x, t) := \dot{a}(\mu_j)\delta_j e^{-2p(x, t, \mu_j)}$ отримуємо (2.34a). Співвідношення на лишки (2.34б) випливає з симетрії $\mu \mapsto \mu^* = \bar{\mu}$. Дійсно, застосувавши цю симетрію до (2.34a) і помноживши на σ_1 , отримуємо

$$\operatorname{Res}_{\bar{\mu}_j} \sigma_1 M^{(1)*}(x, t, \mu) = \frac{1}{\bar{\varkappa}_j(x, t)} \sigma_1 M^{(2)*}(x, t, \bar{\mu}_j),$$

що, враховуючи співвідношення $\sigma_1 M^{(1)*} = M^{(2)}$ (див. (2.33)), зводиться до (2.34б). \square

В рамках підходу Рімана–Гільберта до нелінійних еволюційних рівнянь співвідношення стрибка (2.29a), умову нормування (2.30), умови сингулярності (2.31) та умови на лишки (2.34) інтерпретуються як задача Рімана–Гільберта, з матрицею стрибка та параметрами лишків, що визначаються

початковими даними для нелінійної задачі. Аналогічно до випадку рівняння КХ:

- 1) Для того, щоб дані для задачі РГ явно залежали від параметрів, використовується просторова змінна $y(x, t) := x - \int_x^{+\infty} (\tilde{m}(\xi, t) - 1) d\xi$, введена у (2.16).
- 2) Для того, щоб визначити ефективний спосіб отримання розв'язку рівняння мКХ з розв'язку задачі РГ, розглядається поведінка розв'язків Йоста для рівнянь пари Лакса при $\mu = \pm i$, тобто при значеннях, що відповідають $\lambda = 0$. Тоді x -рівняння (2.6а), (2.7а) пари Лакса стає тривіальним (незалежним від розв'язку нелінійного рівняння, що розглядається).

2.2.2 Власні функції в околі $\mu = i$

У випадку рівняння КХ [24], як і в інших нелінійних інтегровних рівняннях типу КХ, досліджених дотепер (див., наприклад, [27, 28]), аналіз поведінки відповідних розв'язків Йоста у спеціальних точках комплексної площини спектрального параметра (див. п. 2) вище) вимагав спеціального калібрувального перетворення рівнянь пари Лакса.

Цікаво, що у випадку рівняння мКХ не потрібно використовувати таке перетворення. Все, що потрібно — це перегрупувати члени в парі Лакса (2.10а), (2.10в).

А саме, перепишемо (2.10а) через μ (зберігаючи те саме позначення $\hat{\Phi}$ для розв'язку):

$$\hat{\Phi}_x + \frac{i(\mu^2 - 1)}{4\mu} \sigma_3 \hat{\Phi} = \hat{U}_0 \hat{\Phi}, \quad (2.36а)$$

де

$$\hat{U}_0(x, t, \mu) := \frac{i(\mu^2 + 1)(\tilde{m} - 1)}{2(\mu^2 - 1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{i\mu(\tilde{m} - 1)}{\mu^2 - 1} + \frac{i(\mu^2 - 1)\tilde{m}}{4\mu} - \frac{i(\mu^2 - 1)}{4\mu} \right) \sigma_3; \quad (2.36б)$$

отже, $\hat{U}_0(x, t, \pm i) \equiv 0$. Відповідно, перепишемо (2.10в) як

$$\hat{\Phi}_t - \frac{2i(\mu^2 - 1)\mu}{(\mu^2 + 1)^2} \sigma_3 \hat{\Phi} = \hat{V}_0 \hat{\Phi}, \quad (2.36\text{в})$$

де

$$\hat{V}_0(x, t, \mu) := \frac{i(\mu^2 - 1)}{4\mu} (\tilde{u}^2 - \tilde{u}_x^2 + 2\tilde{u}) \tilde{m} \sigma_3 + \hat{V}(x, t, \mu). \quad (2.36\text{г})$$

Далі введемо (пор. з (2.18))

$$p_0(x, t, \mu) := \frac{i(\mu^2 - 1)}{4\mu} x - \frac{2i(\mu^2 - 1)\mu}{(\mu^2 + 1)^2} t \quad (2.37)$$

та визначимо $Q_0 := p_0 \sigma_3$ і $\tilde{\Phi}_0 := \hat{\Phi} e^{Q_0}$. Тоді рівняння (2.36а) і (2.36в) набувають вигляду

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_{0x} + [Q_{0x}, \tilde{\Phi}_0] = \hat{U}_0 \tilde{\Phi}_0, \\ \tilde{\Phi}_{0t} + [Q_{0t}, \tilde{\Phi}_0] = \hat{V}_0 \tilde{\Phi}_0. \end{cases} \quad (2.38)$$

Визначимо розв'язки Йоста $\tilde{\Phi}_{0\pm}$ для (2.38) як розв'язки інтегральних рівнянь

$$\tilde{\Phi}_{0\pm}(x, t, \mu) = I + \int_{\pm\infty}^x e^{-\frac{i(\mu^2-1)}{4\mu}(x-\xi)\sigma_3} \hat{U}_0(\xi, t, \mu) \tilde{\Phi}_{0\pm}(\xi, t, \mu) e^{\frac{i(\mu^2-1)}{4\mu}(x-\xi)\sigma_3} d\xi. \quad (2.39)$$

Введемо $\hat{\Phi}_{0\pm} := \tilde{\Phi}_{0\pm} e^{-p_0 \sigma_3}$, тоді $\hat{\Phi}_{0\pm}(x, t, \mu)$ і $\hat{\Phi}_{\pm}(x, t, \mu)$ задовольняють однакові диференціальні рівняння (2.36) і, отже, вони пов'язані матрицями $C_{\pm}(\mu)$, незалежними від x і t :

$$\hat{\Phi}_{\pm} = \hat{\Phi}_{0\pm} C_{\pm}(\mu).$$

Звідси випливає, що

$$\tilde{\Phi}_{\pm}(x, t, \mu) = \tilde{\Phi}_{0\pm}(x, t, \mu) e^{-p_0(x, t, \mu) \sigma_3} C_{\pm}(\mu) e^{p(x, t, \mu) \sigma_3}. \quad (2.40)$$

Таким чином, $C_{\pm}(\mu) = e^{(p_0(\pm\infty, t, \mu) - p(\pm\infty, t, \mu)) \sigma_3}$.

Так як $p(x, t, \mu) - p_0(x, t, \mu) = -\frac{i(\mu^2-1)}{4\mu} \int_x^{+\infty} (\tilde{m}(\xi, t) - 1) d\xi$, то $C_+(\mu) \equiv I$, тоді як $C_-(\mu) = e^{\frac{i(\mu^2-1)}{4\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{m}(\xi, t) - 1) d\xi} \sigma_3$.

Оскільки $\hat{U}_0(x, t, i) \equiv 0$, то з (2.39) випливає, що $\tilde{\Phi}_{0\pm}(x, t, i) \equiv I$, а отже

$$\tilde{\Phi}_+(x, t, i) = e^{\frac{1}{2} \int_x^{+\infty} (\tilde{m}(\xi, t) - 1) d\xi} \sigma_3 \quad \text{and} \quad \tilde{\Phi}_-(x, t, i) = e^{-\frac{1}{2} \int_x^{+\infty} (\tilde{m}(\xi, t) - 1) d\xi} \sigma_3.$$

Тому

$$a(i) = e^{-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{m}(\xi, t) - 1) d\xi}$$

i

$$M(x, t, i) = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2} \int_x^{+\infty} (\tilde{m}(\xi, t) - 1) d\xi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2} \int_x^{+\infty} (\tilde{m}(\xi, t) - 1) d\xi} \end{pmatrix}. \quad (2.41a)$$

Тоді, за симетрією,

$$M(x, t, -i) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2} \int_x^{+\infty} (\tilde{m}(\xi, t) - 1) d\xi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2} \int_x^{+\infty} (\tilde{m}(\xi, t) - 1) d\xi} \end{pmatrix}. \quad (2.41б)$$

Зауваження 2.2.1. Симетрії (2.33) означають, що $\overline{M(i)} = M(i) = \sigma_3 M(i) \sigma_3$, де $M(i) \equiv M(x, t, i)$. Таким чином, $M(i)$ є діагональною матрицею з дійсними елементами, яка, завдяки тотожності визначника $\det M \equiv 1$, має вигляд

$$M(x, t, i) = \begin{pmatrix} \varphi(x, t) & 0 \\ 0 & \varphi^{-1}(x, t) \end{pmatrix} \quad (2.42a)$$

з деяким $\varphi(x, t) \in \mathbb{R}$. Тоді, знову використовуючи (2.33), маємо, що

$$M(x, t, -i) = \begin{pmatrix} \varphi^{-1}(x, t) & 0 \\ 0 & \varphi(x, t) \end{pmatrix} \quad (2.42б)$$

з тим самим $\varphi(x, t)$. Отже, матрична структура $M(x, t, \pm i)$ як у (2.41) впливає із загальних властивостей розв'язку задачі Рімана–Гільберта (визначених умовами стрибка, нормування, на лишки, сингулярності та симетрії). Це відрізняється від випадку рівняння КХ [23, 24], де специфічна матрична структура розв'язку пов'язаної з ним задачі Рімана–Гільберта, отримана у спеціальній точці ($k = \frac{1}{2}$ для рівняння КХ), є додатковою вимогою до розв'язку. У випадку рівняння КХ доведення єдиності розв'язку задачі РГ ґрунтується, головним чином, на цій додатковій властивості.

Далі будемо використовувати (2.41) для того, щоб отримати розв'язок рівняння мКХ з розв'язку пов'язаної з ним задачі РГ.

2.2.3 Задача РГ у координатах (y, t)

Ввівши нову просторову змінну $y(x, t)$ через (2.16) та $\hat{M}(y, t, \mu)$ таким чином, що $M(x, t, \mu) = \hat{M}(y(x, t), t, \mu)$, умова стрибка (2.29а) набуває вигляду

$$\hat{M}_-(y, t, \mu) = \hat{M}_+(y, t, \mu) \hat{J}(y, t, \mu), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu \neq \pm 1, \quad (2.43а)$$

де

$$\hat{J}(y, t, \mu) := e^{-\hat{p}(y, t, \mu)\sigma_3} J_0(\mu) e^{\hat{p}(y, t, \mu)\sigma_3} \quad (2.43б)$$

де $J_0(\mu)$ задано через (2.29в) та

$$\hat{p}(y, t, \mu) := -\frac{i(\mu^2 - 1)}{4\mu} \left(-y + \frac{8\mu^2}{(\mu^2 + 1)^2} t \right) \quad (2.43в)$$

так, що $J(x, t, \mu) = \hat{J}(y(x, t), t, \mu)$ і $p(x, t, \mu) = \hat{p}(y(x, t), t, \mu)$, де стрибок $J(x, t, \mu)$ і фаза $p(x, t, \mu)$ визначено у (2.29б) і (2.18), відповідно.

Відповідно, у цих координатах умови на лишки (2.34) також стають явними:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\mu_j} \hat{M}^{(1)}(y, t, \mu) &= \frac{1}{\hat{\chi}_j(y, t)} \hat{M}^{(2)}(y, t, \mu_j), \\ \text{Res}_{\bar{\mu}_j} \hat{M}^{(2)}(y, t, \mu) &= \frac{1}{\hat{\chi}_j(y, t)} \hat{M}^{(1)}(y, t, \bar{\mu}_j), \end{aligned} \quad (2.44)$$

де $\hat{\chi}_j(y, t) = \dot{a}(\mu_j) \delta_j e^{-2\hat{p}(y, t, \mu_j)}$. Позначимо $\rho_j := \dot{a}(\mu_j) \delta_j$.

Зауваживши, що умова нормування (2.30), симетрії (2.33) та умови сингулярності (2.31) при $\mu = \pm 1$ виконуються у нових координатах (y, t) , отримуємо основну задачу РГ.

Основна задача РГ. Для заданих $r(\mu)$ на $\mu \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ та $\{\mu_j, \rho_j\}_1^N$, множини точок $\mu_j \in \mathbb{C}^+$ та комплексних чисел $\rho_j \neq 0$, інваріантних відносно $\mu \mapsto -\bar{\mu}$ і $\mu \mapsto -\mu^{-1}$ (тобто, $-\bar{\mu}_j = \mu_{j'}$ і $-\mu_j^{-1} = \mu_{j''}$ при $\rho_j = \bar{\rho}_{j'} = -\mu_j^{-2} \rho_{j''}$), знайти кусково-мероморфну (відносно \mathbb{R}), 2×2 -матричнозначну функцію $\hat{M}(y, t, \mu)$, яка задовольняє такі умови:

- Умову стрибка (2.43) через \mathbb{R} (з $J_0(\mu)$, визначеним у (2.29в)).

- Умову на лишки (2.44) з $\hat{\chi}_j(y, t) = \rho_j e^{-2\hat{p}(y, t, \mu_j)}$.
- Умову нормування $\hat{M}(y, t, \mu) \rightarrow I$ при $\mu \rightarrow \infty$.
- Симетрії

$$\hat{M}(\bar{\mu}) = \sigma_1 \overline{\hat{M}(\mu)} \sigma_1, \quad \hat{M}(-\mu) = \sigma_2 \hat{M}(\mu) \sigma_2, \quad \hat{M}(\mu^{-1}) = \sigma_1 \hat{M}(\mu) \sigma_1 \quad (2.45)$$

де $\hat{M}(\mu) \equiv \hat{M}(y, t, \mu)$.

Ці симетрії означають, що

$$\hat{M}(-\mu^{-1}) = \sigma_3 \hat{M}(\mu) \sigma_3 = \overline{\hat{M}(-\bar{\mu})}.$$

- Умови сингулярності

$$\hat{M}(y, t, \mu) = \frac{i\hat{\alpha}_+(y, t)}{2(\mu - 1)} \begin{pmatrix} -c & 1 \\ -c & 1 \end{pmatrix} + O(1) \quad \text{при } \mu \rightarrow 1, \quad \text{Im } \mu > 0, \quad (2.46a)$$

$$\hat{M}(y, t, \mu) = -\frac{i\hat{\alpha}_+(y, t)}{2(\mu + 1)} \begin{pmatrix} c & 1 \\ -c & -1 \end{pmatrix} + O(1) \quad \text{при } \mu \rightarrow -1, \quad \text{Im } \mu > 0, \quad (2.46b)$$

де $\hat{\alpha}_+(y, t) \in \mathbb{R}$ не задається. Ці дві умови сингулярності є еквівалентними за симетріями (2.45).

Дані для цієї задачі РГ пов'язані з $u_0(x)$. Конкретні дані для цієї задачі РГ можна отримати з початкової функції задачі Коші (2.1), що задовольняє $u_0(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

- Спочатку знайти $s(\mu)$ за допомогою (2.24) при $t = 0$ (використовуючи розв'язки (2.20), взяті при $t = 0$).
- Тоді визначити спектральні дані $a(\mu)$, $b(\mu)$ та $r(\mu)$ через (2.25) та (2.28).
- Тоді знайти $\{\mu_j\}_1^N$, які є нулями $a(\mu)$ у \mathbb{C}^+ .
- Дійсна константа c визначається через (2.32).

- Визначити константу $\{\delta_j\}_1^N$ через (2.35б) при $t = 0$ (з використанням розв'язків (2.14) при $t = 0$).
- Нарешті, визначити $\{\rho_j\}_1^N$ як $\rho_j = \dot{a}(\mu_j)\delta_j$.

Зауваження 2.2.2. Важливою відмінністю між випадками рівнянь КХ і мКХ є те, що в першому випадку існує можливість звести матричні задачі РГ до векторних, які не мають сингулярності в точці на контурі: це можна зробити, помноживши відповідну матрицю \hat{M} на вектор $(1, 1)$ зліва. Цей прийом, очевидно, не спрацьовує у нашому випадку, оскільки матрична структура (див. (2.46)) сингулярності при $\mu = 1$ відрізняється від структури при $\mu = -1$.

2.2.4 Єдиність розв'язку основної задачі РГ

Припустимо, що задача РГ (2.43)–(2.46) має розв'язок \hat{M} . Щоб довести, що цей розв'язок єдиний, спочатку зауважимо, що $\det \hat{M} \equiv 1$.

Дійсно, умови для \hat{M} означають, що $\det \hat{M}$ не має ні стрибка через \mathbb{R} , ні сингулярностей у μ_j . Більш того, $\det \hat{M}$ прямує до 1 при $\mu \rightarrow \infty$, і єдиними можливими сингулярностями $\det \hat{M}$ є прості полюси при $\mu = \pm 1$. Тоді, за теоремою Ліувілля, $\det \hat{M} \equiv 1 + \frac{\phi_1}{\mu-1} + \frac{\phi_2}{\mu+1}$ з деяким ϕ_j . Але з симетрії $\hat{M}(\mu^{-1}) = \sigma_1 \hat{M}(\mu) \sigma_1$ з (2.45) випливає, що $\phi_1 = \phi_2 = 0$, і тому $\det \hat{M} \equiv 1$.

Тепер припустимо, що \hat{M}_1 і \hat{M}_2 є двома розв'язками задачі РГ і розглянемо $P := \hat{M}_1(\hat{M}_2)^{-1}$. Очевидно, що P не має ні стрибка через \mathbb{R} , ні сингулярностей в μ_j . Більше того, P прямує до I при $\mu \rightarrow \infty$ і єдиними можливими сингулярностями P є прості полюси при $\mu = \pm 1$.

Розглянемо, наприклад, розвинення \hat{M}_j , $j = 1, 2$ при $\mu \rightarrow -1$ за умови, що $\text{Im } \mu > 0$:

$$\hat{M}_j(y, t, \mu) = -\frac{i\beta_j(y, t)}{2(\mu + 1)} \begin{pmatrix} c & 1 \\ -c & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_j(y, t) & m_j(y, t) \\ f_j(y, t) & g_j(y, t) \end{pmatrix} + O(\mu+1), \quad \mu \in \mathbb{C}^+.$$

З $\det \hat{M}_j \equiv 1$ випливає, що

$$(\hat{M}_j(y, t, \mu))^{-1} = -\frac{i\beta_j(y, t)}{2(\mu + 1)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ c & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_j(y, t) & -m_j(y, t) \\ -f_j(y, t) & n_j(y, t) \end{pmatrix} + O(\mu + 1).$$

Використаємо ці вирази для обчислення розвинення $\hat{M}_j \hat{M}_j^{-1}$ при $\mu \rightarrow -1$. Відсутність члена порядку $(\mu + 1)^{-1}$ означає, що

$$n_j(y, t) + f_j(y, t) = c(m_j(y, t) + g_j(y, t)), \quad j = 1, 2. \quad (2.47)$$

У свою чергу, з (2.47) випливає, що

$$P(y, t, \mu) = -\frac{i\psi(y, t)}{2(\mu + 1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + O(1) \text{ as } \mu \rightarrow -1, \quad \mu \in \mathbb{C}^+,$$

для деякого $\psi(y, t)$. Тоді, за симетрією $P(\mu^{-1}) = \sigma_3 P(\mu) \sigma_3$, маємо

$$P(y, t, \mu) = -\frac{i\psi(y, t)}{2(\mu - 1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + O(1) \text{ as } \mu \rightarrow 1, \quad \mu \in \mathbb{C}^+.$$

Використовуючи умову нормування, за теоремою Ліувілля маємо

$$P = -\frac{i}{2}\psi(y, t) \left(\frac{1}{\mu - 1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu + 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right) + I.$$

Підставивши у останню рівність $\mu = i$, отримуємо

$$P(y, t, i) = -\frac{i}{2}\psi(y, t) \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} + I. \quad (2.48)$$

Але, згідно з (2.42a), обидві матриці $\hat{M}_1(i)$ і $\hat{M}_2(i)$ є діагональними. Тому $P(y, t, i)$ також діагональна, і з (2.48) випливає, що $\psi(y, t) \equiv 0$. Отже, $P(y, t, \mu) \equiv I$ і, відповідно, $\hat{M}_1 \equiv \hat{M}_2$.

2.2.5 Отримання $u(x, t)$ з розв'язку задачі РГ

Покажемо, як можна отримати розв'язок задачі Коші (2.1) з розв'язку основної задачі РГ, дані якої пов'язані з початковими даними $u_0(x)$. Почнемо з деяких попередніх спостережень.

Повертаючись до побудови $M(x, t, \mu)$ з розв'язків Йоста (див. розділ 2.2.2), можна використати (2.41а), щоб виразити розв'язок $u(x, t)$ рівняння мКХ через розв'язок асоційованої задачі РГ $M(x, t, \mu)$, обчислений при $\mu = i$. Дійсно, введемо (пор. з випадком рівняння КХ [24])

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_1(x, t) &:= M_{11}(x, t, i) + M_{21}(x, t, i) = e^{\frac{1}{2} \int_x^{+\infty} (\tilde{m}(\xi, t) - 1) d\xi}, \\ \tilde{\mu}_2(x, t) &:= M_{12}(x, t, i) + M_{22}(x, t, i) = e^{-\frac{1}{2} \int_x^{+\infty} (\tilde{m}(\xi, t) - 1) d\xi}.\end{aligned}$$

Використовуючи нову просторову змінну $y(x, t) := x - \int_x^{+\infty} (\tilde{m}(\xi, t) - 1) d\xi$, введenu в (2.16), наведені вище рівняння означають

$$\frac{\tilde{\mu}_1(x, t)}{\tilde{\mu}_2(x, t)} = e^{\int_x^{+\infty} (\tilde{m}(\xi, t) - 1) d\xi} = e^{x - y(x, t)} \quad (2.49)$$

і таким чином

$$x = y(x, t) + \ln \frac{\tilde{\mu}_1(x, t)}{\tilde{\mu}_2(x, t)}. \quad (2.50)$$

Також зауважимо, що

$$\tilde{\mu}_1(x, t) \tilde{\mu}_2(x, t) = 1. \quad (2.51)$$

Твердження 2.2.3. *Нехай $\hat{M}(y, t, \mu)$ - розв'язок задачі РГ (2.43)–(2.46), дані якої пов'язані з початковими даними $u_0(x)$. Визначимо $\hat{\mu}_1(y, t) := \hat{M}_{11}(y, t, i) + \hat{M}_{21}(y, t, i)$ та $\hat{\mu}_2(y, t) := \hat{M}_{12}(y, t, i) + \hat{M}_{22}(y, t, i)$. Розв'язок $u(x, t)$ задачі Коші (2.1) має x -похідну, яка задається параметричним представленням*

$$u_x(x + t, t) = \frac{1}{2} \partial_t \ln \frac{\hat{\mu}_1(y, t)}{\hat{\mu}_2(y, t)}, \quad (2.52a)$$

$$x(y, t) = y + \ln \frac{\hat{\mu}_1(y, t)}{\hat{\mu}_2(y, t)}. \quad (2.52b)$$

Доведення. Виразимо \tilde{u}_x через змінні (y, t) . Для вираження функції $\tilde{f}(x, t)$ через (y, t) будемо використовувати запис $\hat{f}(y, t) := \tilde{f}(x(y, t), t)$, наприклад,

$$\hat{u}(y, t) := \tilde{u}(x(y, t), t), \quad \hat{u}_x(y, t) := \tilde{u}_x(x(y, t), t),$$

$$\hat{m}(y, t) := \tilde{m}(x(y, t), t), \quad \hat{\omega}(y, t) := \tilde{\omega}(x(y, t), t).$$

Диференціюючи тотожність $x(y(x, t), t) = x$ відносно t , отримуємо:

$$\partial_t (x(y(x, t), t)) = x_y(y, t)y_t(x, t) + x_t(y, t) = 0. \quad (2.53)$$

З (2.16) випливає, що

$$x_y(y, t) = \frac{1}{\hat{m}(y, t)} \quad (2.54)$$

і $y_t(x, t) = -\int_x^{+\infty} \tilde{m}_t(\xi, t)d\xi$. За допомогою (2.3а) остання рівність набуває вигляду

$$y_t(x, t) = \int_x^{+\infty} (\tilde{\omega}\tilde{m})_\xi(\xi, t)d\xi = -\tilde{\omega}\tilde{m}(x, t).$$

Підставивши це і (2.54) у (2.53), отримуємо:

$$x_t(y, t) = \hat{\omega}(y, t). \quad (2.55)$$

Диференціюючи (2.55) відносно y , отримуємо:

$$x_{ty}(y, t) = \hat{\omega}_x x_y(y, t) = 2\hat{u}_x(\hat{u} - \hat{u}_{xx} + 1)\frac{1}{\hat{m}}(y, t) = 2\hat{u}_x(y, t). \quad (2.56)$$

Таким чином, отримуємо параметричне представлення $\tilde{u}_x(x, t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x(x(y, t), t) &\equiv \hat{u}_x(y, t) = \frac{1}{2}\partial_t x(y, t), \\ x(y, t) &= y + \frac{\ln \hat{\mu}_1(y, t)}{\ln \hat{\mu}_2(y, t)}, \end{aligned}$$

що дає (2.52). □

Зауваження 2.2.4. У випадку рівняння КХ, зв'язок між новими та оригінальними просторовими змінними (2.50) такий самий, тоді як похідна (2.55) дає безпосередньо розв'язок u рівняння КХ (у змінних (y, t)). Для безпосереднього визначення розв'язку рівняння мКХ u з розв'язку асоційованої задачі РГ див. зауваження 2.3.8 нижче.

2.3 Від розв'язку задачі РГ до розв'язку рівняння мКХ

Розглянемо задачу РГ (2.43)–(2.46) з даними, які не обов'язково пов'язані з початковими даними для рівняння мКХ. Цей розділ має на меті показати, що, стартуючи з розв'язку $\hat{M}(y, t, \mu)$ такої задачі РГ, можна побудувати

розв'язок (принаймні, локально) рівняння мКХ за допомогою маніпуляцій, подібних до тих, що описано в розділі 2.2.5. Для цього покажемо, що, починаючи з $\hat{M}(y, t, \mu)$, можна визначити 2×2 -матричні функції $\hat{\Psi}(y, t, \mu)$, які задовольняють рівняння пари Лакса

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_y &= \hat{U}\hat{\Psi}, \\ \hat{\Psi}_t &= \hat{V}\hat{\Psi},\end{aligned}$$

коефіцієнти яких \hat{U} і \hat{V} отримано з $\hat{M}(y, t, \mu)$, а умовою сумісності є рівняння мКХ (записане у змінних (y, t)).

Спочатку переформулюємо вихідні рівняння пари Лакса (2.10) у змінних (y, t) . Ввівши $\hat{\Psi}(y, t) = \hat{\Phi}(x(y, t), t)$ і взявши до уваги (2.55) та (2.54), пара Лакса (2.10) у змінних (y, t) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_y + ik\sigma_3\hat{\Psi} &= \frac{\tilde{m} - 1}{\tilde{m}} \frac{\lambda}{4ik} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \hat{\Psi}, \\ \hat{\Psi}_t - \frac{2ik}{\lambda^2}\sigma_3\hat{\Psi} &= \left(\frac{\tilde{u}}{2ik} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda} & 1 \end{pmatrix} + \frac{\tilde{u}_x}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \hat{\Psi},\end{aligned}$$

де $k := -\frac{i}{2}\sqrt{1 - \lambda^2}$.

Отже, використовуючи μ як спектральний параметр (див. (2.17)), ми маємо таке твердження:

Твердження 2.3.1. *Пара Лакса (2.10) у змінних (y, t, μ) має такий вигляд:*

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_y + \frac{i(\mu^2 - 1)}{4\mu}\sigma_3\hat{\Psi} &= \tilde{U}\hat{\Psi}, \\ \hat{\Psi}_t - \frac{2i(\mu^2 - 1)\mu}{(\mu^2 + 1)^2}\sigma_3\hat{\Psi} &= \tilde{V}\hat{\Psi},\end{aligned}\tag{2.57}$$

де

$$\tilde{U}(y, t, \mu) = \frac{if(y, t)}{\mu - 1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{if(y, t)}{\mu + 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + if(y, t) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\tag{2.58a}$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}(y, t, \mu) = & \frac{iq(y, t)}{\mu - 1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{iq(y, t)}{\mu + 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{\mu - i} \begin{pmatrix} 0 & g_1(y, t) \\ g_2(y, t) & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu + i} \begin{pmatrix} 0 & g_2(y, t) \\ g_1(y, t) & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.586)$$

де f , q , g_1 та g_2 визначені таким чином:

$$f = -\frac{\hat{m} - 1}{2\hat{m}}, \quad q = \hat{u}, \quad g_1 = -\hat{u} - \hat{u}_x, \quad g_2 = \hat{u} - \hat{u}_x. \quad (2.59)$$

Наша мета у цьому розділі — показати, що з розв’язку $\hat{M}(y, t, \mu)$ задачі РГ (2.43)–(2.46), де дані $r(\mu)$ при $\mu \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, і $\{\mu_j, \rho_j\}_1^N$ не пов’язані апріорі з деякими початковими даними $u_0(x)$, можна “витягти” розв’язок рівняння МКХ. Ідея полягає у наступному:

- (а) Визначити $\hat{\Psi}(y, t, \mu) := \hat{M}(y, t, \mu)e^{-\hat{p}(y, t, \mu)\sigma_3}$ і показати, що $\hat{\Psi}(y, t, \mu)$ задовольняє систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_y &= \hat{U}\hat{\Psi}, \\ \hat{\Psi}_t &= \hat{V}\hat{\Psi}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

де \hat{U} і \hat{V} мають таку саму (раціональну) залежність від μ , як і у (2.57) і (2.58), причому коефіцієнти визначаються у термінах розв’язку $\hat{M}(y, t, \mu)$ у відповідних μ .

- (б) Показати, що умова сумісності для (2.60), тобто рівність $\hat{U}_t - \hat{V}_y + [\hat{U}, \hat{V}] = 0$, зводиться до рівняння МКХ.

Твердження 2.3.2. *Нехай $\hat{M}(y, t, \mu)$ є розв’язком задачі РГ (2.43)–(2.46). Визначимо*

$$\hat{\Psi}(y, t, \mu) := \hat{M}(y, t, \mu)e^{-\hat{p}(y, t, \mu)\sigma_3}, \quad (2.61)$$

де $\hat{p}(y, t, \mu) := -\frac{i(\mu^2 - 1)}{4\mu} \left(-y + \frac{8\mu^2}{(\mu^2 + 1)^2} t \right)$. Тоді $\hat{\Psi}(y, t, \mu)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\hat{\Psi}_y = \hat{U}\hat{\Psi}$$

де $\hat{U} = -\frac{i(\mu^2-1)}{4\mu}\sigma_3 + \tilde{U}$, де \tilde{U} як у (2.58а) з f , заданим як

$$f(y, t) := -\frac{\eta(y, t)}{2},$$

а $\eta(y, t)$ можна отримати з розвинення $\hat{M}(y, t, \mu)$ при великих μ :

$$\hat{M}(y, t, \mu) = I + \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \xi(y, t) & \eta(y, t) \\ \eta(y, t) & -\xi(y, t) \end{pmatrix} + O(\mu^{-2}), \quad \mu \rightarrow \infty.$$

Доведення. Зауважимо, що $\hat{\Psi}(y, t, \mu)$ задовольняє умову стрибка

$$\hat{\Psi}_-(y, t, \mu) = \hat{\Psi}_+(y, t, \mu)J_0(\mu)$$

з матрицею стрибка J_0 , що не залежить від y . Тому $\hat{\Psi}_y(y, t, \mu)$ задовольняє ту саму умову стрибка. Отже, $\hat{\Psi}_y\hat{\Psi}^{-1} = \hat{M}_y\hat{M}^{-1} - \hat{p}_y\hat{M}\sigma_3\hat{M}^{-1}$ не має стрибка і є мероморфною функцією, з можливими особливими точками при $\mu = \infty$, $\mu = 0$ і $\mu = \pm 1$. Проаналізуємо $\hat{\Psi}_y\hat{\Psi}^{-1}$ в околі цих точок.

(i) При $\mu \rightarrow \infty$, маємо $\hat{p}_y = \frac{i\mu}{4} + O(\mu^{-1})$ і тому

$$\hat{\Psi}_y\hat{\Psi}^{-1} = -\frac{i\mu}{4}\sigma_3 - \frac{i}{4}[\hat{M}^{(\infty)}, \sigma_3] + O(\mu^{-1}),$$

де $\hat{M}^{(\infty)} \equiv \hat{M}^{(\infty)}(y, t)$ отримано з асимптотики \hat{M} при великих μ :

$$\hat{M} = I + \frac{\hat{M}^{(\infty)}}{\mu} + O(\mu^{-2}), \quad \mu \rightarrow \infty.$$

Симетрії (2.45) означають, що $\sigma_2\hat{M}^{(\infty)}\sigma_2 = -\hat{M}^{(\infty)}$ і $\sigma_1\hat{M}^{(\infty)}\sigma_1 = \overline{\hat{M}^{(\infty)}}$, тому

$$\hat{M}^{(\infty)} = \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \eta & -\xi \end{pmatrix},$$

де $\xi(y, t) \in i\mathbb{R}$ та $\eta(y, t) \in \mathbb{R}$. Отже,

$$\hat{\Psi}_y\hat{\Psi}^{-1} = -\frac{i\mu}{4}\sigma_3 - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix} + O(\mu^{-1}), \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (2.62)$$

Тоді, за симетрією,

$$\hat{\Psi}_y\hat{\Psi}^{-1} = \frac{i}{4\mu}\sigma_3 + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix} + O(\mu), \quad \mu \rightarrow 0. \quad (2.63)$$

(ii) Розвинувши $\hat{M}(\mu)$ у (2.46а) далі, і, діючи як у розділі 2.2.4, щоб отримати (2.47), маємо

$$\hat{\Psi}_y \hat{\Psi}^{-1} = \frac{i\beta_1}{\mu - 1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + O(1), \quad \mu \rightarrow 1, \quad (2.64)$$

де $\beta_1(y, t) \in \mathbb{R}$. З симетрій випливає

$$\hat{\Psi}_y \hat{\Psi}^{-1} = \frac{i\beta_1}{\mu + 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + O(1), \quad \mu \rightarrow -1. \quad (2.65)$$

Комбінуючи (2.62), (2.63), (2.64) та (2.65), отримуємо, що функція

$$\hat{\Psi}_y \hat{\Psi}^{-1} + \frac{i(\mu^2 - 1)}{4\mu} \sigma_3 - \frac{i\beta_1}{\mu - 1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{i\beta_1}{\mu + 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}$$

є голоморфною у всій комплексній μ -площині і, більш того, спадає до 0 при $\mu \rightarrow \infty$. Тоді, за теоремою Ліувілля, вона тотожно дорівнює нулю.

Далі, знову ж за симетрією, $\hat{M}(y, t, i)$ є діагональною (див. зауваження 2.2.1), з чого випливає, що така сума також є діагональною:

$$\frac{i\beta_1}{i - 1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{i\beta_1}{i + 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що $\frac{\eta}{2} = -\beta_1$, і таким чином ми приходимо до рівності $\hat{\Psi}_y = \hat{U} \hat{\Psi}$ з $\hat{U} = -\frac{i(\mu^2 - 1)}{4\mu} \sigma_3 + \tilde{U}$, де \tilde{U} як у (2.58а) з $f = \beta_1$. \square

Твердження 2.3.3. *Функція $\hat{\Psi}(y, t, \mu)$, задана формулою (2.61), задовольняє диференціальне рівняння*

$$\hat{\Psi}_t = \hat{V} \hat{\Psi} \quad (2.66)$$

з $\hat{V} = \frac{2i(\mu^2 - 1)\mu}{(\mu^2 + 1)^2} \sigma_3 + \tilde{V}$, де \tilde{V} – як у (2.58б) з коефіцієнтами q , g_1 та g_2 , що визначаються шляхом аналізу $\hat{M}(y, t, \mu)$ при $\mu \rightarrow 1$ та $\mu \rightarrow i$.

Доведення. Подібно до твердження 2.3.2, зауважимо, що $\hat{\Psi}_t \hat{\Psi}^{-1} = \hat{M}_t \hat{M}^{-1} - \hat{p}_t \hat{M} \sigma_3 \hat{M}^{-1}$ не має стрибка і, отже, є мероморфною функцією з можливими

сингулярностями у точках $\mu = \infty$, $\mu = 0$, $\mu = \pm 1$ та $\mu = \pm i$, остання з яких зумовлена сингулярністю \hat{p}_t при $\mu = \pm i$:

$$\hat{p}_t(\mu) = \pm \frac{1}{(\mu \mp i)^2} - \frac{i}{\mu \mp i} + O(1), \quad \mu \rightarrow \pm i. \quad (2.67)$$

Аналізуючи поведінку $\hat{\Psi}_t \hat{\Psi}^{-1}$ поблизу цих точок, маємо наступне:

(i) При $\mu \rightarrow \infty$ маємо $\hat{p}_t(\mu) = O(\mu^{-1})$ і тому

$$\hat{\Psi}_t \hat{\Psi}^{-1}(\mu) = O(\mu^{-1}), \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (2.68)$$

Тоді за симетрією

$$\hat{\Psi}_t \hat{\Psi}^{-1}(\mu) = O(\mu), \quad \mu \rightarrow 0. \quad (2.69)$$

(ii) Розвинувши $\hat{M}(\mu)$ при $\mu = 1$ і діючи, як у попередньому твердженні, щоб отримати (2.64), маємо

$$\hat{\Psi}_t \hat{\Psi}^{-1}(\mu) = \frac{i\beta_2}{\mu - 1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + O(1), \quad \mu \rightarrow 1, \quad (2.70)$$

де $\beta_2(y, t) \in \mathbb{R}$. За симетрією,

$$\hat{\Psi}_t \hat{\Psi}^{-1}(\mu) = \frac{i\beta_2}{\mu + 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + O(1), \quad \mu \rightarrow -1. \quad (2.71)$$

(iii) Аналізуючи поведінку $\hat{M}(\mu)$ при $\mu \rightarrow i$ і приймаючи до уваги симетрії, отримуємо

$$\hat{M}(\mu) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix} (\mu - i) + O((\mu - i)^2), \quad \mu \rightarrow i, \quad (2.72)$$

де $a_j \equiv a_j(y, t)$, $j = 1, 2, 3$. Враховуючи (2.67), маємо

$$\hat{\Psi}_t \hat{\Psi}^{-1}(\mu) = -\frac{1}{(\mu - i)^2} \sigma_3 + \frac{1}{\mu - i} \left(i\sigma_3 + \begin{pmatrix} 0 & 2a_2 a_1 \\ -2a_3 a_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} \right) + O(1), \quad \mu \rightarrow i. \quad (2.73)$$

Тоді за симетрією

$$\hat{\Psi}_t \hat{\Psi}^{-1}(\mu) = \frac{1}{(\mu + i)^2} \sigma_3 + \frac{1}{\mu + i} \left(i\sigma_3 + \begin{pmatrix} 0 & -2a_3 a_1^{-1} \\ 2a_2 a_1 & 0 \end{pmatrix} \right) + O(1), \quad \mu \rightarrow -i. \quad (2.74)$$

Комбінуючи (2.68), (2.70) та (2.71), (2.73) та (2.74), отримуємо, що функція

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_t \hat{\Psi}^{-1}(\mu) - \frac{2i(\mu^2 - 1)\mu}{(\mu^2 + 1)^2} \sigma_3 - \frac{1}{\mu - 1} i \beta_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\mu + 1} i \beta_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ - \frac{1}{\mu - i} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\mu + i} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

де $\gamma_1 = 2a_2 a_1$ та $\gamma_2 = -2a_3 a_1^{-1}$, є голоморфною у всій комплексній μ -площині і спадає до 0 при $\mu \rightarrow \infty$. Тоді, за теоремою Ліувілля, вона то-тожно дорівнює нулю. Таким чином, маємо рівність $\hat{\Psi}_t = \hat{V} \hat{\Psi}$ з $\hat{V}(\mu) = \frac{2i(\mu^2 - 1)\mu}{(\mu^2 + 1)^2} \sigma_3 + \tilde{V}(\mu)$, де $\tilde{V}(\mu)$ як у (2.58б), і $q = \beta_2$, $g_1 = \gamma_1$ і $g_2 = \gamma_2$. \square

Наступним кроком доведемо, що умова сумісності

$$\hat{U}_t - \hat{V}_y + [\hat{U}, \hat{V}] = 0 \quad (2.75)$$

дає рівняння МКХ у змінних (y, t) .

Твердження 2.3.4. *Рівняння МКХ (2.3а) у змінних (y, t) має такий вигляд:*

$$(\hat{m}^{-1})_t(y, t) = 2\hat{u}_x(y, t), \quad (2.76a)$$

$$\hat{m}(y, t) := \hat{u}(y, t) - \hat{u}_{xx}(y, t) + 1, \quad (2.76б)$$

де $\hat{f}(y, t) := \tilde{f}(x(y, t), t)$ для будь-якої функції $\tilde{f}(x, t)$ і $x_y(y, t) = \hat{m}^{-1}(y, t)$.

Доведення. Підставивши $\tilde{m}_t = -(\tilde{\omega}\tilde{m})_x$ з (2.3а) та $x_t = \hat{\omega}$ з (2.55) у рівність

$$\hat{m}_t(y, t) = \tilde{m}_x(x(y, t), t)x_t(y, t) + \tilde{m}_t(x(y, t), t)$$

і використавши той факт, що $\tilde{\omega}_x = 2\tilde{m}\tilde{u}_x$, отримуємо

$$\begin{aligned} \hat{m}_t(y, t) &= \tilde{m}_x(x(y, t), t)\hat{\omega}(y, t) - \tilde{m}_x(x(y, t), t)\hat{\omega}(y, t) - 2\tilde{m}^2(x(y, t), t)\hat{u}_x(y, t) \\ &= -2\hat{u}_x\hat{m}^2(y, t), \end{aligned}$$

звідки випливає (2.76а). \square

Зауваження 2.3.5. Зауважимо, що (2.76б) можна записати так:

$$\hat{m}(y, t) = \hat{u}(y, t) - (\hat{u}_x)_y(y, t)\hat{m}(y, t) + 1. \quad (2.77)$$

Аналізуючи умову сумісності (2.75) в особливих точках для \hat{U} і \hat{V} , отримуємо алгебраїчні та диференціальні рівняння між коефіцієнтами \hat{U} і \hat{V} , тобто, між β_1 , β_2 , γ_1 та γ_2 , які можна звести до (2.76а).

Твердження 2.3.6. *Нехай $\beta_1(y, t)$, $\beta_2(y, t)$, $\gamma_1(y, t)$ та $\gamma_2(y, t)$ - функції, визначені через $\hat{M}(y, t, \mu)$ як у твердженнях 2.3.2 та 2.3.3. Тоді вони задовольняють рівнянням:*

$$\beta_{1t} + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0; \quad (2.78a)$$

$$\beta_2 - \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} = 0; \quad (2.78б)$$

$$(\gamma_1 - \gamma_2)_y - (1 + 2\beta_1)(\gamma_1 + \gamma_2) = 0; \quad (2.78в)$$

$$(\gamma_2 + \gamma_1)_y + 4\beta_1 - (1 + 2\beta_1)(\gamma_1 - \gamma_2) = 0. \quad (2.78г)$$

Доведення. Нагадаємо, що β_1 і β_2 задаються через (2.64) і (2.70), відповідно. Крім того, $\gamma_1 := 2a_2a_1$ і $\gamma_2 := -2a_3a_1^{-1}$, де a_1 , a_2 і a_3 визначаються через (2.72).

(i) Аналізуючи поведінку лівої частини рівності (2.75) при $\mu \rightarrow \infty$, головний член (порядку $O(1)$) має вигляд

$$\left(\beta_{1t} + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \right) \sigma_2,$$

звідки випливає (2.78а).

(ii) Аналізуючи поведінку лівої частини рівності (2.75) при $\mu \rightarrow 0$, головний член (порядку $O(\mu^{-1})$) має вигляд

$$-\frac{1}{\mu} \left(\beta_2 + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \right) \sigma_1,$$

звідки випливає (2.78б).

(iii) Оцінюючи ліву частину рівності (2.75) при $\mu \rightarrow 1$, діагональна частина головного члена (порядку $O((\mu - 1)^{-1})$) дорівнює

$$\frac{i}{\mu - 1} (\beta_{1t} - \beta_{2y} - \beta_1(\gamma_1 + \gamma_2)) \sigma_3,$$

звідки випливає (2.78в), враховуючи (2.78а) та (2.78б).

(iv) Оцінюючи ліву частину рівності (2.75) при $\mu \rightarrow i$, головний член (порядку $O((\mu - i)^{-1})$) має вигляд

$$\frac{1}{\mu - i} \left[\begin{pmatrix} 0 & -\gamma_{1y} \\ -\gamma_{2y} & 0 \end{pmatrix} + (1 + 2\beta_1) \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 \\ -\gamma_2 & 0 \end{pmatrix} - 2\beta_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right],$$

з чого випливає (2.78г). \square

Твердження 2.3.7. Нехай $\hat{m}(y, t)$, $\hat{u}(y, t)$ та $x(y, t)$ визначено через β_1 , β_2 , γ_1 та γ_2 таким чином:

$$\hat{m} = (1 + 2\beta_1)^{-1}, \quad \hat{u} = \beta_2 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}, \quad x_y = 1 + 2\beta_1. \quad (2.79)$$

Тоді чотири рівняння (2.78) зводяться до (2.76а) і (2.77).

Доведення. Дійсно, визначивши \hat{u} та $x(y, t)$ як вказано у (2.79), рівняння (2.78в) означає, що $\hat{u}_x = \hat{u}_y x_y^{-1}$ можна виразити як

$$\hat{u}_x = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}.$$

Тоді, беручи до уваги визначення \hat{m} у (2.79), рівняння (2.78а) набуває вигляду (2.76а). Нарешті, використовуючи введені вище позначення, рівняння (2.77) можна записати як

$$\frac{1}{1 + 2\beta_1} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} + \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)_y}{2} \frac{1}{1 + 2\beta_1} + 1,$$

що і є рівнянням (2.78г). \square

Зауваження 2.3.8. Формули $\hat{u} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}$ та $\hat{u}_x = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ дають альтернативний спосіб побудови функцій \hat{u} та \hat{u}_x з розв'язку \hat{M} задачі РГ. Дійсно, згідно з твердженням 2.3.3, \hat{u} та \hat{u}_x як функції від (y, t) можна отримати за допомогою коефіцієнтів $a_j(y, t)$ (див. (2.72)) розвинення функції $\hat{M}(y, t, k)$ при $\mu \rightarrow i$ (тобто, уникаючи диференціювання, що використано у розділі 2.2.5):

$$\hat{u}(y, t) = -a_2 a_1 - a_3 a_1^{-1}, \quad \hat{u}_x(y, t) = -a_2 a_1 + a_3 a_1^{-1}, \quad (2.80)$$

де $a_j(y, t)$ визначаються через (2.72). Зауважимо, що, аналізуючи поведінку \hat{M} при $\mu \rightarrow \infty$ (див. твердження 2.3.2) можна отримати таке зображення для \hat{m} :

$$\hat{m}(y, t) = \frac{1}{1 + 2\beta_1(y, t)} = \frac{1}{1 - \eta(y, t)}, \quad (2.81)$$

$$\eta(y, t) := \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu \hat{M}_{12}(y, t, \mu).$$

Разом із виразом для заміни змінних (2.52б), який можна записати як ($\hat{\mu}_1 = a_1$ і $\hat{\mu}_2 = a_1^{-1}$)

$$x(y, t) = y + 2 \ln a_1(y, t), \quad (2.82)$$

рівняння (2.80) та (2.81) дають параметричне представлення розв'язку рівняння мКХ (2.3а).

2.4 Солітони

У варіанті Рімана–Гільберта методу оберненої задачі розсіювання чисто солітонні розв'язки можна побудувати з розв'язків задачі РГ, припускаючи, що стрибок є тривіальним ($J \equiv I$). Це зводить побудову розв'язку до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку породжують умови на лишки.

Для того, щоб побудувати найпростіший, односолітонний розв'язок, розглянемо задачу РГ (2.43)–(2.46) з специфічними даними, коли $r(\mu) \equiv 0$ (так що $\hat{J} \equiv I$). Також припустимо, що $\hat{M}^{(1)}$ має простий полюс на одиничному колі, при $\mu_1 = e^{i\theta}$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Тоді $\hat{M}^{(1)}$ також має прості полюси при $\mu_2 = -e^{-i\theta} = -\bar{\mu}_1 = -\mu_1^{-1}$. Згідно з симетріями (2.45) коефіцієнти $\hat{\chi}_j(y, t) = \rho_j e^{-2\hat{p}(y, t, \mu_j)}$, $j = 1, 2$ в умовах на лишки (2.44) мають задовольняти співвідношення $\hat{\chi}_1 = \overline{\hat{\chi}_2} = -\mu_1^{-2} \hat{\chi}_2$, тобто $\rho_1 = \bar{\rho}_2 = -\mu_1^{-2} \rho_2$, що означає $\rho_1 = ie^{-i\theta} \hat{\delta}$ для деяких $\hat{\delta} \in \mathbb{R}$. Далі будемо позначати $\hat{\chi}(y, t) := \hat{\chi}_1(y, t)$ і $\rho := \rho_1 \in \mathbb{C}$. Отже, ρ задовольняє умовам

$$\bar{\rho} = -e^{2i\theta} \rho. \quad (2.83)$$

Таким чином, отримуємо таку задачу Рімана–Гільберта:

Задача РГ для солітонів. За заданими двома дійсними параметрами $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ та $\hat{\delta} \neq 0$ знайти кусково (відносно \mathbb{R}) мероморфну, 2×2 -матричну функцію $\hat{M}(y, t, \mu)$, що задовольняє такі умови:

- Умову стрибка $\hat{J} \equiv I$ на \mathbb{R} .
- Умови на лишки (2.44) при $\mu_1 = e^{i\theta}$ та $\bar{\mu}_1 = e^{-i\theta}$:

$$\text{Res}_{e^{i\theta}} \hat{M}^{(1)}(y, t, \mu) = \frac{1}{\hat{\varkappa}(y, t)} \hat{M}^{(2)}(y, t, e^{i\theta}), \quad (2.84a)$$

$$\text{Res}_{e^{-i\theta}} \hat{M}^{(2)}(y, t, \mu) = \frac{1}{\hat{\varkappa}(y, t)} \hat{M}^{(1)}(y, t, e^{-i\theta}), \quad (2.84б)$$

де $\hat{\varkappa}(y, t) = ie^{-i\theta} \hat{\delta} e^{-2\hat{p}(y, t, e^{i\theta})}$ з $\hat{p}(y, t, e^{i\theta}) = \frac{\sin\theta}{2}(-y + \frac{2}{\cos^2\theta}t)$, і $\bar{\hat{\varkappa}} = -e^{2i\theta} \hat{\varkappa}$.

- Умову нормування $\hat{M}(y, t, \infty) = I$.
- Симетрії (2.45).
- Умови сингулярності (2.46) при $\mu = \pm 1$.

Умови на лишки при μ_2 та $\bar{\mu}_2$ впливають з (2.84) з урахуванням симетрій (2.45):

$$\text{Res}_{-e^{-i\theta}} \hat{M}^{(1)}(y, t, \mu) = \frac{1}{\hat{\varkappa}(y, t)} \hat{M}^{(2)}(y, t, -e^{-i\theta}), \quad (2.85a)$$

$$\text{Res}_{-e^{i\theta}} \hat{M}^{(2)}(y, t, \mu) = \frac{1}{\hat{\varkappa}(y, t)} \hat{M}^{(1)}(y, t, -e^{i\theta}). \quad (2.85б)$$

Підсумовуючи, солітонна задача РГ з параметрами $(\theta, \hat{\delta})$ є задачею РГ (2.43)–(2.46) з тривіальною умовою стрибка та даними умов на лишки $\{\mu_j, \rho_j\}_1^2$, де $\mu_1 = -\bar{\mu}_2 = e^{i\theta}$ і $\rho_1 = \bar{\rho}_2 = ie^{-i\theta} \hat{\delta}$.

Зауваження 2.4.1. Припустимо, що дані солітонної задачі РГ пов'язані зі спектральними даними, що відповідають деяким початковим даним $u_0(x)$ (див. розділ 2.1.3). Зокрема, $b(\mu) \equiv 0$ і $a(\mu)$ мають два корені у \mathbb{C}^+ , кожен з яких однократний, $\mu_1 = e^{i\theta}$ і $\mu_2 = -e^{-i\theta}$, які знаходяться на одиничному колі. Коефіцієнт $\hat{\varkappa}$ в умові на лишки для $M^{(1)}$ при μ_1 задається як $\hat{\varkappa} = \rho e^{-2\hat{p}(y, t, e^{i\theta})}$, де $\rho = \dot{a}(e^{i\theta})\delta$ і константа δ пов'язує дві функції Йоста:

$\hat{\Phi}_+^{(2)}(x, t, \mu_1) = \delta \hat{\Phi}_-^{(1)}(x, t, \mu_1)$. Використовуючи симетрії (2.23) та співвідношення $\bar{\mu}_1 = \mu_1^{-1}$ отримуємо, що $\sigma_1 \hat{\Phi}_\pm(e^{-i\theta}) \sigma_1 = \overline{\hat{\Phi}_\pm(e^{i\theta})} = \hat{\Phi}_\pm(e^{i\theta})$. Тому δ дійсна. Крім того, з співвідношення симетрії $a(\mu^{-1}) = \overline{a(\bar{\mu})}$ випливає, що $\overline{\hat{a}(e^{i\theta})} = -e^{2i\theta} \hat{a}(e^{i\theta})$, і, таким чином, $\rho = \hat{a}(e^{i\theta}) \delta$ задовольняє (2.83). Отже, у цьому випадку $\hat{\delta} = -ie^{i\theta} \hat{a}(e^{i\theta}) \delta$.

Твердження 2.4.2. *Нехай $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ і $\hat{\delta} \neq 0$ – два дійсні параметри. Тоді солітонна задача РГ з параметрами $(\theta, \hat{\delta})$ має розв'язок $\hat{M} \equiv \hat{M}_{\theta, \hat{\delta}}$:*

$$\begin{aligned} \hat{M}(y, t, \mu) = I + \frac{i \hat{\alpha}_+(y, t)}{2} \frac{1}{\mu - 1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{i \hat{\alpha}_+(y, t)}{2} \frac{1}{\mu + 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} \frac{i \hat{\kappa}_1(y, t) e^{i\theta}}{\mu - e^{i\theta}} + \frac{i \hat{\kappa}_1(y, t) e^{-i\theta}}{\mu + e^{-i\theta}} & \frac{-i \hat{\kappa}_2(y, t) e^{-i\theta}}{\mu - e^{-i\theta}} + \frac{i \hat{\kappa}_2(y, t) e^{i\theta}}{\mu + e^{i\theta}} \\ \frac{i \hat{\kappa}_2(y, t) e^{i\theta}}{\mu - e^{i\theta}} + \frac{-i \hat{\kappa}_2(y, t) e^{-i\theta}}{\mu + e^{-i\theta}} & \frac{-i \hat{\kappa}_1(y, t) e^{-i\theta}}{\mu - e^{-i\theta}} + \frac{-i \hat{\kappa}_1(y, t) e^{i\theta}}{\mu + e^{i\theta}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.86)$$

де

$$\hat{\kappa}_2^{-1}(y, t) = -\hat{\chi}(y, t) - \frac{\cos^2 \theta}{4 \hat{\chi}(y, t) \sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin \theta}, \quad (2.87a)$$

$$\hat{\kappa}_1(y, t) = -\frac{\cos \theta}{2 \hat{\chi}(y, t) \sin \theta} \hat{\kappa}_2(y, t), \quad (2.87b)$$

$$\hat{\alpha}_+(y, t) = 2 \hat{\kappa}_2(y, t). \quad (2.87b)$$

Тут

$$\hat{\chi}(y, t) := \hat{\delta} e^{-2\hat{p}(y, t, e^{i\theta})} \quad \text{з} \quad \hat{p}(y, t, e^{i\theta}) = \frac{\sin \theta}{2} \left(-y + \frac{2}{\cos^2 \theta} t \right). \quad (2.87\Gamma)$$

Доведення. Оскільки $\hat{M}(\mu) \equiv \hat{M}(y, t, \mu)$ є розв'язком солітонної задачі РГ, умова стрибка якої є тривіальною, то це раціональна функція, полюсна структура якої визначається умовами сингулярності (2.46) при $\mu = \pm 1$ та умовами на лишки (2.84) у $\mu = \pm e^{\pm i\theta}$:

$$\hat{M}(\mu) = I + \frac{i}{2} \frac{\hat{\alpha}_+}{\mu - 1} \begin{pmatrix} -c & 1 \\ -c & 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \frac{\hat{\alpha}_+}{\mu + 1} \begin{pmatrix} c & 1 \\ -c & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{c_1}{\mu - e^{i\theta}} + \frac{c_3}{\mu + e^{-i\theta}} & \frac{\tilde{c}_1}{\mu - e^{-i\theta}} + \frac{\tilde{c}_3}{\mu + e^{i\theta}} \\ \frac{c_2}{\mu - e^{i\theta}} + \frac{c_4}{\mu + e^{-i\theta}} & \frac{\tilde{c}_2}{\mu - e^{-i\theta}} + \frac{\tilde{c}_4}{\mu + e^{i\theta}} \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

з деякими $\hat{\alpha}_+(y, t)$, $c_j(y, t)$, $\tilde{c}_j(y, t)$ та c . Ми будемо визначати коефіцієнти за допомогою симетрій (2.45). З симетрії $\hat{M}^{(1)}(-\mu) = \sigma_3 \sigma_1 \hat{M}^{(2)}(\mu)$ випливає,

що $c = 1$, $\tilde{c}_1 = \frac{c_4}{c_1}$, $\tilde{c}_2 = -c_3$, $\tilde{c}_3 = c_2$ і $\tilde{c}_4 = -c_1$. З іншого боку, з симетрії $\hat{M}^{(1)}(-\bar{\mu}) = \sigma_3 \hat{M}^{(1)}(\mu)$ випливає, що $c_3 = -\bar{c}_1$ і $c_4 = \bar{c}_2$. Таким чином (2.88) набуває такого вигляду

$$\hat{M}(\mu) = I + \frac{i}{2} \frac{\hat{\alpha}_+}{\mu - 1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \frac{\hat{\alpha}_+}{\mu + 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{c_1}{\mu - e^{i\theta}} + \frac{-\bar{c}_1}{\mu + e^{-i\theta}} & \frac{\bar{c}_2}{\mu - e^{-i\theta}} + \frac{c_2}{\mu + e^{i\theta}} \\ \frac{c_2}{\mu - e^{i\theta}} + \frac{\bar{c}_2}{\mu + e^{-i\theta}} & \frac{\bar{c}_1}{\mu - e^{-i\theta}} + \frac{-c_1}{\mu + e^{i\theta}} \end{pmatrix}.$$

З симетрії $\hat{M}^{(1)}(-\mu^{-1}) = \sigma_3 \hat{M}^{(1)}(\mu)$ випливає, що $c_3 = c_1 e^{-2i\theta}$ і $c_4 = -c_2 e^{-2i\theta}$, і $\bar{c}_j = -c_j e^{-2i\theta}$ для $j = 1, 2$, тобто $c_j(y, t) = i e^{i\theta} \hat{\kappa}_j(y, t)$ при $\hat{\kappa}_j(y, t) \in \mathbb{R}$. Таким чином отримуємо (2.86).

Тоді, використовуючи $\hat{M}(0) = \sigma_1 \hat{M}(\infty) \sigma_1 = I$, отримуємо, що $\hat{\alpha}_+ = 2\hat{\kappa}_2$, тобто виконується (2.87в). Введемо $\hat{\mathcal{X}}(y, t) := \hat{\delta} e^{-2\hat{p}(y, t, e^{i\theta})}$ так, що $\hat{\mathcal{X}}(y, t) = i e^{-i\theta} \hat{\mathcal{X}}(y, t)$. Тоді, підставивши (2.86) в умову на лишок (2.84а) при $e^{i\theta}$, отримуємо (2.87б) з першого рядка, а потім (2.87а) у другого. \square

Зауваження 2.4.3. Припустимо, що дані нашої солітонної задачі РГ отримано зі спектральних даних, які відповідають деяким початковим даним $u_0(x)$, як у зауваженні 2.4.1. Звідси безпосередньо випливає, що $c = 1$. Оскільки $b(\mu) \equiv 0$, то дійсно маємо (див. зауваження 2.1.4 і (2.32)) $\rho = 0$, $b_1 = 0$ і $a_1^2 = 1$; отже, $c = 1$.

Згідно з розділом 2.3, розв'язок солітонної задачі РГ дає розв'язок (принаймні, локально, у змінних (y, t)) рівняння мКХ. Таким чином, твердження 2.4.2 дає сім'ю односолітонних розв'язків, параметризованих двома дійсними параметрами $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ і $\hat{\delta} \neq 0$.

Твердження 2.4.4. *Односолітонний розв'язок $\hat{u} \equiv \hat{u}_{\theta, \hat{\delta}}$ з параметрами $(\theta, \hat{\delta})$ має такий вигляд у змінних (y, t) :*

$$\hat{u}(y, t) = 4 \tan^2 \theta \frac{z^2(y, t) + 2 \cos^2 \theta \cdot z(y, t) + \cos^2 \theta}{(z^2(y, t) + 2z(y, t) + \cos^2 \theta)^2} z(y, t), \quad (2.89a)$$

де

$$z(y, t) = 2\hat{\delta} \sin \theta e^{\sin \theta (y - \frac{2}{\cos^2 \theta} t)}. \quad (2.89b)$$

Доведення. Нехай $z(y, t)$ задано формулою

$$z(y, t) := 2\hat{\mathcal{X}}(y, t) \sin \theta. \quad (2.90)$$

Тоді $z(y, t) = 2\hat{\delta} \sin \theta e^{\sin \theta (y - \frac{2}{\cos^2 \theta} t)}$. Таким чином, z є дійсною величиною. Більше того, $z(y, t) > 0$, якщо $\hat{\delta} > 0$, і $z(y, t) < 0$, якщо $\hat{\delta} < 0$. Використовуючи (2.87а), (2.87б) та (2.90), отримуємо такі вирази для $\hat{\kappa}_2$ та $\hat{\kappa}_1$:

$$\hat{\kappa}_2 = -\frac{2z \sin \theta}{z^2 + 2z + \cos^2 \theta} \quad \text{і} \quad \hat{\kappa}_1 = -\frac{\cos \theta}{z} \hat{\kappa}_2 = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{z^2 + 2z + \cos^2 \theta}. \quad (2.91)$$

Для того, щоб отримати формулу для солітонного розв'язку $\hat{u} \equiv \hat{u}(y, t)$, скористаємося співвідношенням

$$\hat{u} = -a_2 a_1 - a_3 a_1^{-1}. \quad (2.92)$$

Для того, щоб обчислити $a_1 \equiv a_1(y, t)$, зауважимо, що $a_1 = \hat{M}_{11}(i)$. Таким чином, використовуючи співвідношення $\frac{\hat{\alpha}_+}{2} = \hat{\kappa}_2$, що витікає з (2.87в), отримуємо

$$a_1 = 1 - \frac{\hat{\alpha}_+}{2} - i\kappa_1 \frac{1 + e^{2i\theta}}{2(1 - \sin \theta)} = 1 - \hat{\kappa}_2 + \hat{\kappa}_1 \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}.$$

Використовуючи вирази для $\hat{\kappa}_1$ і $\hat{\kappa}_2$ з (2.91), отримуємо

$$a_1 = \frac{z + 1 + \sin \theta}{z + 1 - \sin \theta}. \quad (2.93а)$$

Для обчислення $a_2 \equiv a_2(y, t)$ та $a_3 \equiv a_3(y, t)$ зауважимо, що $a_2 = \partial_\mu \hat{M}_{12}(i)$ та $a_3 = \partial_\mu \hat{M}_{21}(i)$. Використовуючи додатково вираз $\hat{\kappa}_2$ з (2.91), отримуємо

$$a_2 = \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} \hat{\kappa}_2 = -\frac{2z \sin^2 \theta}{(1 + \sin \theta)(z^2 + 2z + \cos^2 \theta)}, \quad (2.93б)$$

$$a_3 = \frac{\sin \theta}{1 - \sin \theta} \hat{\kappa}_2 = -\frac{2z \sin^2 \theta}{(1 - \sin \theta)(z^2 + 2z + \cos^2 \theta)}. \quad (2.93в)$$

Тоді, підставивши (2.93) у (2.92), отримуємо (2.89а). \square

З (2.89а) випливає, що при $\hat{\delta} > 0$ для будь-якого $t \geq 0$ $\hat{u}(y, t)$ є гладкою функцією від y з єдиним піком і (експоненціально) наближається до 0 при $y \rightarrow \pm\infty$. З іншого боку, якщо $\hat{\delta} < 0$, то \hat{u} має дві особливі точки, які відповідають $z = -1 \pm \sin \theta$.

Тепер обговоримо заміну змінної $(y, t) \mapsto (x, t)$, яку можна задати явно. Ця заміна змінної пов'язана з $\tilde{u}_{\theta, \hat{\delta}}$, тобто задається через (2.52б), де $\hat{\mu}_1$ та $\hat{\mu}_2$ визначено через $\hat{M} \equiv \hat{M}_{\theta, \hat{\delta}}$.

Твердження 2.4.5. *Заміна змінної $x(y, t)$, пов'язана з солітоном $\tilde{u}_{\theta, \hat{\delta}}$, має такий вигляд:*

$$x(y, t) = y + 2 \ln \frac{z(y, t) + 1 + \sin \theta}{z(y, t) + 1 - \sin \theta}. \quad (2.94)$$

Доведення. Як показано у розділі 2.3, $x(y, t)$ можна задати за допомогою (2.82):

$$x(y, t) = y + 2 \ln a_1(y, t), \quad (2.95)$$

де $a_1(y, t) = \hat{M}_{11}(y, t, i)$. Підставивши (2.93а) у (2.95), отримуємо (2.94). \square

Висновок 2.4.6. *Нехай $x(y, t)$ - заміна змінної, пов'язана з $\tilde{u}_{\theta, \hat{\delta}}$. Вона має такі властивості регулярності:*

- (а) *Якщо $\hat{\delta} < 0$, то $x(\cdot, t)$ сингулярна: існують значення y , при яких $x(y, t)$ нескінченна.*
- (б) *Якщо $\hat{\delta} > 0$, то $x(\cdot, t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є регулярним відображенням. Крім того, вона має такі додаткові властивості:*
 - (і) *Якщо $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$, то $x(\cdot, t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є дифеоморфізмом для будь-якого $t \geq 0$.*
 - (іі) *Якщо $\theta = \frac{\pi}{3}$, то $x(\cdot, t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є бієкцією, але похідна оберненого відображення має сингулярність, причому тільки одну.*
 - (ііі) *Якщо $\theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, то $x(\cdot, t)$ не є монотонною. А саме, існує три інтервали монотонності.*

Можливі сингулярності $x(y, t)$ – це сингулярності для $\hat{u}(y, t)$: вони відповідають $z = -1 \pm \sin \theta$. Отже, якщо $\hat{\delta} > 0$, то $z(y, t) > 0$ і, таким чином, сингулярностей немає, у той час як якщо $\hat{\delta} < 0$, то $x(y, t)$ є сингулярною при тих y , де $z = -1 \pm \sin \theta$.

Розглянемо випадок $\hat{\delta} > 0$ (а отже $z(y, t) > 0$). Похідна $\partial_y x(y, t) \equiv x_y(y, t)$ задається таким чином:

$$x_y(y, t) = R(z(y, t)), \text{ where } R(z) = \frac{z^2 + 2z \cos 2\theta + \cos^2 \theta}{z^2 + 2z + \cos^2 \theta}. \quad (2.96)$$

Звідси випливає, що $R(0) = R(\infty) = 1$. Крім того, маємо таке:

1) Якщо $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$, то $R(z) > 0$ для всіх $z \geq 0$.

2) Якщо $\theta = \frac{\pi}{3}$, то $z = \frac{1}{2}$ є двократним нулем $R(z)$.

3) Якщо $\theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, то

а) $R(z) > 0$ для $z \in [0, -\cos 2\theta - \sqrt{-\sin \theta \cdot \sin 3\theta}] \cup (-\cos 2\theta + \sqrt{-\sin \theta \cdot \sin 3\theta}, +\infty)$,

б) $R(z) < 0$ для $z \in (-\cos 2\theta - \sqrt{-\sin \theta \cdot \sin 3\theta}, -\cos 2\theta + \sqrt{-\sin \theta \cdot \sin 3\theta})$.

Звідси випливає, що для $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$ розв'язок є гладким (як у змінних (y, t) , так і у змінних (x, t)). З іншого боку, для $\theta = \frac{\pi}{3}$ розв'язок $\tilde{u}(x, t) = \hat{u}(y(x, t), t)$ задається у параметричній формі за формулою

$$\hat{u}(y, t) = 48z(y, t) \frac{4z^2(y, t) + 2z(y, t) + 1}{(4z^2(y, t) + 8z(y, t) + 1)^2}, \quad (2.97a)$$

$$z(y, t) = \hat{\delta} \sqrt{3} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}y} e^{-4\sqrt{3}t}, \quad (2.97б)$$

$$x(y, t) = y + 2 \ln \frac{\hat{\delta} \sqrt{3} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}y} e^{-4\sqrt{3}t} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\hat{\delta} \sqrt{3} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}y} e^{-4\sqrt{3}t} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}. \quad (2.97в)$$

Зокрема, в останньому випадку з (2.96) та (2.97а) витікає, що

$$x_y = \frac{2\hat{z}^2}{2\hat{z}^2 + 6\hat{z} + 3} \quad \text{і} \quad \hat{u}_y = -24\sqrt{3} \frac{\hat{z}^3(\hat{z} + 1)(2\hat{z} + 1)}{(2\hat{z}^2 + 6\hat{z} + 3)^3},$$

де $\hat{z} := z - \frac{1}{2}$. Таким чином, x_y має двократний нуль при $\hat{z} = 0$, що відповідає гребеню (crest) розв'язку, тоді як у тій же точці \hat{u}_y має потрійний нуль, так що $\tilde{u}_x = \hat{u}_y/x_y = 0$. Отже, $\tilde{u}(x, t)$ залишається неперервною, з неперервною першою похідною \tilde{u}_x , яка обертається в нуль на гребені, але похідні вищих порядків стають необмеженими у цій точці, наприклад, $\tilde{u}_{xx} \sim -\frac{3}{2}\hat{z}^{-2}$ як $\hat{z} \rightarrow 0$. Ця незвичайна властивість (скінченної) гладкості солітона, що відповідає параметрам, які відділяють (нескінченно) гладкі солітони від багатозначних розв'язків (що спричинено порушенням біективності $x(\cdot, t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), була вперше виявлена Мацуно [98], де солітонні розв'язки було побудовано за допомогою прямого методу.

Теорема 2.4.7. *Рівняння мКХ (2.3) має сім'ю односолітонних розв'язків, як регулярних, так і нерегулярних, $\tilde{u}(x, t) \equiv \tilde{u}_{\theta, \hat{\delta}}(x, t)$, параметризованих*

двома параметрами, $\hat{\delta} > 0$ і $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Ці солітони $\tilde{u}(x, t) \equiv \hat{u}(y(x, t), t)$ задаються у параметричній формі такими формулами

$$\hat{u}(y, t) = 4 \tan^2 \theta \frac{z^2(y, t) + 2 \cos^2 \theta \cdot z(y, t) + \cos^2 \theta}{(z^2(y, t) + 2z(y, t) + \cos^2 \theta)^2} z(y, t), \quad (2.98a)$$

$$x(y, t) = y + 2 \ln \frac{z(y, t) + 1 + \sin \theta}{z(y, t) + 1 - \sin \theta}, \quad (2.98б)$$

$$z(y, t) = 2\hat{\delta} \sin \theta e^{y \sin \theta} e^{-\frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} t}. \quad (2.98в)$$

Вони мають різні властивості залежно від значення параметра θ :

- (i) При $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$ односолітонний розв'язок $\tilde{u}(x, t)$ є гладким у змінних (x, t) .
- (ii) При $\theta = \frac{\pi}{3}$ розв'язок $\tilde{u}(x, t)$ задається (2.97) і має скінченну гладкість: u та u_x неперервні з $\tilde{u}_x(x, t) = 0$, коли $z(y(x, t), t) = \frac{1}{2}$, але старші похідні стають необмеженими при $z \rightarrow \frac{1}{2}$.
- (iii) При $\theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, $\tilde{u}(x, t) = \hat{u}(y, t)$ є регулярною у змінних (y, t) , але багатозначною і петлеподібною (loop-shaped) у змінних (x, t) .

2.5 Висновки до розділу 2

У цьому розділі розглянуто задачу Коші для модифікованого рівняння Камасси–Хольма на всій прямій у випадку, коли передбачається, що розв'язок прямує до ненульової сталої на обох нескінченностях просторової змінної. Завдяки ненульовому фону, спектральна задача у відповідних рівняннях пари Лакса має неперервний спектр, що дозволяє сформулювати обернену спектральну задачу як задачу факторизації Рімана–Гільберта з умовами стрибка на дійсній осі.

Розвинуто підхід Рімана–Гільберта до цієї задачі, який ґрунтується на розв'язках Йоста пари Лакса та співвідношеннях розсіювання між ними. Дві особливості x рівняння, пов'язаного з рівнянням мКХ, які впливають на аналітичні властивості розв'язків Йоста, полягають у тому, що: (а) λ

входить до \mathbf{U} через добуток з “моментом” $m(x, t)$, який в рамках оберненої задачі є невідомою функцією; (b) зі зростанням $|x| \rightarrow \infty$ $m(x, t)$ наближається до ненульової константи. Зокрема, ці особливості впливають на проблему контролю поведінки при великих λ розв’язків Йоста. У нашому розробленні формалізму РГ, ця проблема вирішується шляхом (i) перетворення рівнянь пари Лакса до відповідного вигляду з виділеними діагональними частинами, які є головними, в певному сенсі, при великих λ ; (ii) введення нової просторової змінної, враховуючи наявність явного опису поведінки при великих λ розв’язків Йоста в термінах просторових та часових параметрів; (iii) введення нового спектрального параметра μ (пов’язаного з λ співвідношенням $\lambda = -\frac{1}{2}(\mu + \frac{1}{\mu})$), який дозволяє уникнути нерациональної залежності коефіцієнтів у рівняннях пари Лакса від спектрального параметра. Крім того наслідок властивості (a), що при $\lambda = 0$ \mathbf{U} стає незалежною від u , надає ефективний спосіб “витягувати” розв’язок задачі Коші з розв’язку задачі РГ, беручи до уваги поведінку останньої при $\lambda \rightarrow 0$.

Використовуючи цей підхід, отримано (i) зображення розв’язку задачі Коші для рівняння мКХ в термінах розв’язку пов’язаної з ним задачі факторизації Рімана–Гільберта та (ii) опис певних розв’язків солітонного типу, як регулярних, так і нерегулярних. Зокрема, отримано розв’язок піконного типу, який має іншу поведінку порівняно з (оригінальним) рівнянням Камасси–Хольма поблизу “піку”: сам розв’язок і його перша просторова похідна є неперервними обмеженими функціями, а старші похідні стають необмеженими.

Розділ 3

Модифіковане рівняння Камасси–Хольма на ненульовому фоні: асимптотика за великим часом для задачі Коші

Результати цього розділу опубліковано в [85].

У цьому розділі вивчається поведінка розв'язку задачі Коші для рівняння мКХ на ненульовому фоні (2.1) за великим часом, беручи за відправну точку формалізм задачі РГ, розвинений у розділі 2. Зосереджуючись на безсолітонному випадку, у підрозділі 3.1 початкову сингулярну задачу РГ трансформовано до регулярної. У підрозділі 3.2, остання задача РГ аналізується асимптотично, при $t \rightarrow +\infty$. Отримано головні асимптотичні члени для розв'язку задачі Коші (2.1) у двох секторах півплощини (x, t) , $1 < \frac{x}{t} < 3$ і $\frac{3}{4} < \frac{x}{t} < 1$, де відхилення від фонового значення є нетривіальним. У цих секторах це відхилення має вигляд повільно спадаючих (порядку $t^{-1/2}$), модульованих (за $\frac{x}{t}$) коливань (Теореми 3.2.2 і 3.2.4), тоді як у решті секторів $\frac{x}{t} > 3$ і $\frac{x}{t} < \frac{3}{4}$ воно швидко спадає до 1.

3.1 Зведення до регулярної задачі РГ

Згадаємо, що після введення нової функції \tilde{u} таким чином, що

$$u(x, t) = \tilde{u}(x - t, t) + 1, \quad (3.1)$$

рівняння мКХ (2.1а) зводиться до системи рівнянь

$$\tilde{m}_t + (\tilde{\omega}\tilde{m})_x = 0, \quad (3.2a)$$

$$\tilde{m} := \tilde{u} - \tilde{u}_{xx} + 1, \quad (3.2b)$$

$$\tilde{\omega} := \tilde{u}^2 - \tilde{u}_x^2 + 2\tilde{u}, \quad (3.2в)$$

де розв'язок \tilde{u} розглядається на нульовому фоні: $\tilde{u}(x, t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$ для всіх $t \geq 0$. Припустимо, що $\tilde{m}_0(x) := (1 - \partial_x^2)u_0(x) = (1 - \partial_x^2)\tilde{u}_0(x) + 1 > 0$ для всіх $x > 0$. Підхід Рімана–Гільберта (РГ) для задачі Коші для рівняння (3.2), який розвинуто у розділі 2, дає параметричне зображення для $\tilde{u}(x, t)$ в термінах розв'язку відповідної задачі РГ за таким алгоритмом:

- (а) За заданим $u_0(x)$ знайти “коефіцієнт відбиття” $r(\mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$ і, у випадку, коли дискретний спектр є не пустою множиною, “дані дискретного спектра” $\{\mu_j, \rho_j\}_{j=1}^N$, розв'язавши рівняння пари Лакса, пов'язані з (3.2), коефіцієнти яких визначено через початкову функцію $u_0(x)$.
- (б) Побудувати матрицю стрибка $J(y, t, \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$ за формулою

$$J(y, t, \mu) := e^{-p(y, t, \mu)\sigma_3} J_0(\mu) e^{p(y, t, \mu)\sigma_3} \quad (3.3)$$

де

$$p(y, t, \mu) := -\frac{i(\mu^2 - 1)}{4\mu} \left(-y + \frac{8\mu^2}{(\mu^2 + 1)^2} t \right) \quad (3.4)$$

і $J_0(\mu)$ визначається через

$$J_0(\mu) := \begin{pmatrix} 1 - r(\mu)r^*(\mu) & r(\mu) \\ -r^*(\mu) & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

- (в) Розв'язати таку задачу **РГ** (параметризовану y та t): Знайти кусково-мероморфну (відносно \mathbb{R} , за комплексною змінною μ), 2×2 -матричну функцію $M(y, t, \mu)$, що задовольняє такі умови:

- Умову стрибка

$$M_+(y, t, \mu) = M_-(y, t, \mu)J(y, t, \mu), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu \neq \pm 1. \quad (3.6)$$

- Умови на лишки

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\mu_j} M^{(1)}(y, t, \mu) &= \frac{1}{\varkappa_j(y, t)} M^{(2)}(y, t, \mu_j), \\ \operatorname{Res}_{\bar{\mu}_j} M^{(2)}(y, t, \mu) &= \frac{1}{\overline{\varkappa_j}(y, t)} M^{(1)}(y, t, \bar{\mu}_j), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\text{з } \varkappa_j(y, t) := \rho_j e^{-2p(y, t, \mu_j)}.$$

- Умову нормування

$$M(y, t, \mu) \rightarrow I \text{ при } \mu \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

- Симетрії

$$M(\mu) = \overline{M(\bar{\mu}^{-1})} = \sigma_3 \overline{M(-\bar{\mu})} \sigma_3 = \sigma_1 \overline{M(\bar{\mu})} \sigma_1, \quad (3.9)$$

де $M(\mu) \equiv M(y, t, \mu)$.

- Умови сингулярності

$$M(y, t, \mu) = \frac{i\alpha_+(y, t)}{2(\mu - 1)} \begin{pmatrix} -c & 1 \\ -c & 1 \end{pmatrix} + O(1) \quad \text{при } \mu \rightarrow 1, \quad \operatorname{Im} \mu > 0, \quad (3.10a)$$

$$M(y, t, \mu) = -\frac{i\alpha_+(y, t)}{2(\mu + 1)} \begin{pmatrix} c & 1 \\ -c & -1 \end{pmatrix} + O(1) \quad \text{при } \mu \rightarrow -1, \quad \operatorname{Im} \mu > 0, \quad (3.10b)$$

де $c = 1 + r(1)$ (у випадку загального положення, $c = 0$), а $\alpha_+(y, t) \in \mathbb{R}$ не задано.

- (г) Знайшовши (єдиний) розв'язок $M(y, t, \mu)$ цієї задачі РГ, отримати дійсні функції $a_j(y, t)$, $j = 1, 2, 3$ з розвинення $M(y, t, \mu)$ при $\mu = i$:

$$\begin{aligned} M(y, t, \mu) &= \begin{pmatrix} a_1(y, t) & 0 \\ 0 & a_1^{-1}(y, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2(y, t) \\ a_3(y, t) & 0 \end{pmatrix} (\mu - i) \\ &\quad + O((\mu - i)^2), \quad \mu \rightarrow i. \end{aligned} \quad (3.11)$$

(д) Отримати $\tilde{u}(x, t)$ у параметричній формі таким чином:

$$\tilde{u}(x, t) = \hat{u}(y(x, t), t),$$

де

$$\begin{aligned}\hat{u}(y, t) &:= -a_2(y, t)a_1(y, t) - a_3(y, t)a_1^{-1}(y, t), \\ x(y, t) &:= y + 2 \ln a_1(y, t).\end{aligned}\tag{3.12}$$

Зауваження 3.1.1. Симетрії (3.9) узгоджуються з симетріями $r(\mu)$, а саме

$$r(\mu) = -\overline{r(-\mu)} = \overline{r(\mu^{-1})},\tag{3.13}$$

і з інваріантністю множини $\{\mu_j, \rho_j\}_{j=1}^N$:

$$-\overline{\mu_j} = \mu_{j'} \text{ і } -\mu_j^{-1} = \mu_{j''}, \text{ де } \rho_j = \overline{\rho_{j'}} = -\mu_j^{-2} \rho_{j''}.$$

Ці симетрії та інваріантності впливають з наведеної вище побудови задачі РГ в термінах спеціальних розв'язків (Йоста) рівнянь пари Лакса, пов'язаних з рівнянням мКХ (див. розділ 2). Крім того, симетрії (3.9) передбачають конкретну структуру матриць у (3.11).

Зауваження 3.1.2. У випадку рівняння Камасси–Хольма умова $m_0(x) := (1 - \partial_x^2)u_0(x) > 0$ для всіх x забезпечує існування глобального розв'язку відповідної початкової задачі (див., напр., [40]). У випадку модифікованого рівняння Камасси–Хольма ситуація інша: навіть якщо початковий момент m_0 не змінює знак, розв'язок $u(x, t)$ може “вибухнути” за скінченний час [76]. Підхід Рімана–Гільберта для побудови розв'язків РЧП, який, власне, є локальним у відповідних змінних (у випадку рівняння мКХ цими змінними є y та t), найкраще підходить для зображення розв'язків (зокрема, початкових задач), які мають “вибухають” у скінченний час (див., наприклад, у [68, Chapter 3, Section 1, Corollary 3.1]). Він дозволяє вивчати поведінку розв'язків за великим часом. Дійсно, як показує асимптотичний аналіз (див. (3.57б) та (3.69б)), у безсолітонному випадку відповідність між x та y є однозначною для будь-якого достатньо великого t , і тому розв'язки

$u(x, t)$ також є добре визначеними для будь-якого достатньо великого t у півплощині (x, t) .

З іншого боку, саме порушення цієї однозначної відповідності $x \leftrightarrow y$ забезпечує механізм руйнування хвиль розв'язку $u(x, t)$ у випадках, коли розв'язок $M(y, t, \mu)$ задачі РГ (3.6)-(3.10) існує для всіх y і t . Зокрема, якщо початкові дані такі, що деякі з асоційованих дискретних спектральних точок $\{\mu_j\}$ мають вигляд $\mu_j = e^{i\theta_j}$ з $\frac{\pi}{3} < \theta_j < \frac{\pi}{2}$, то відповідність між x та y перестане бути однозначною для довільного достатньо великого t (див. висновок 2.4.6.).

У загальному випадку нелінійних інтегровних рівнянь, формалізм задачі РГ (тобто зображення розв'язку вихідної задачі — задачі Коші для нелінійного інтегровного рівняння з частинними похідними — у термінах розв'язку пов'язаної з ним задачі РГ) дозволяє звести задачу аналізу розв'язку нелінійного рівняння з частинними похідними за великим часом до аналізу розв'язку асоційованої задачі РГ. Умови на лишки (якщо є), що входять до формулювання задачі РГ генерують солітонну, незгасаючу частину асимптотики, тоді як умови стрибка відповідають за дисперсійну (спадаючу) частину, яку можна дослідити, застосувавши відповідну модифікацію нелінійного методу найшвидшого спуску до асимптотичного аналізу попередньо регуляризованої задачі РГ (тобто задачі РГ, яка містить лише умови стрибка та нормалізації).

У зв'язку з цим зауважимо, що у випадку з нетривіальними умовами на лишки (3.7), можна звести вихідну задачу РГ до регулярної оним з двох способів:

- (i) додавши до контуру маленькі кола навколо кожного μ_j та $\bar{\mu}_j$ і звівши умови на лишки до відповідних умов стрибка на межі кіл,
- (ii) за допомогою множників Бляшке–Потапова (див., наприклад, [19]).

В обох підходах вихідна задача РГ зводиться до задачі РГ без умов на лишки.

Щодо умов сингулярності, зауважимо, що у випадку рівняння Камасси–Хольма, що також має аналогічну умову у формалізмі матричної задачі РГ, позбутися цієї сингулярності можна через зведення матричної задачі РГ до векторної шляхом множення зліва на постійний вектор $(1, 1)$. Дійсно, умова сингулярності для рівняння КХ має вигляд (3.10б), і, таким чином, таке множення усуває сингулярність, зводячи задачу РГ до регулярної. Зауважимо, що сингулярності у матричній задачі РГ для модифікованого рівняння Камасси–Хольма мають іншу структуру: зокрема, вони включають умову сингулярності (3.10а), яку, очевидно, не можна усунути за допомогою того ж самого прийому.

Зосередимося на дослідженні *дисперсійної* частини асимптотики за великим часом розв’язків задачі Коші для рівняння мКХ. Відповідно, будемо розглядати безсолітонний випадок, припускаючи, що умови на лишки відсутні. Наявність дискретного спектра можна “побороти” за вже добре розробленою методикою (див., наприклад, [19]).

Зведемо оригінальну задачу РГ (яка є сингулярною через умови (3.10)) до регулярної задачі у два кроки.

На Кроці 1 зведемо задачу РГ з умовами сингулярності (3.10) при $\mu = \pm 1$ до задачі РГ, яка характеризується такими двома умовами:

- (i) елементи матриці регулярні при $\mu = \pm 1$, але визначник (матриці) розв’язку дорівнює нулю при $\mu = \pm 1$ (зауважимо, що $\det M(\mu) \equiv 1$ для розв’язку вихідної задачі РГ);
- (ii) розв’язок є сингулярним при $\mu = 0$.

На Кроці 2 останню задачу РГ зведемо до регулярної, тобто до задачі РГ лише зі стрибком та умовою нормування.

Твердження 3.1.3. *Нехай $M(y, t, \mu)$ є розв’язком задачі РГ (3.6), (3.8)–(3.10). Визначимо \tilde{M} за допомогою*

$$\tilde{M}(y, t, \mu) := \left(I - \frac{1}{\mu} \sigma_1 \right) M(y, t, \mu). \quad (3.14)$$

Тоді $\tilde{M}(\mu) \equiv \tilde{M}(y, t, \mu)$ є єдиним розв'язком такої задачі РГ:

(С1) $\tilde{M}(\mu)$ є аналітичною на \mathbb{C}^+ та \mathbb{C}^- і неперервною на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(С2) $\tilde{M}(\mu)$ задовольняє умову стрибка (3.6) зі стрибком, визначеним (3.3)–(3.5).

(С3) $\tilde{M}(\mu) \rightarrow I$ при $\mu \rightarrow \infty$.

(С4) $\tilde{M}(\mu) = -\frac{1}{\mu}\sigma_1 + O(1)$ при $\mu \rightarrow 0$.

(С5) $\det \tilde{M}(\pm 1) = 0$.

(С6) $\tilde{M}(\mu^{-1}) = -\mu\tilde{M}(\mu)\sigma_1$.

Доведення. Перевіримо, що $\tilde{M}(y, t, \mu)$, побудована з $M(y, t, \mu)$, задовольняє наведені вище умови. Асимптотичні властивості (С3) і (С4) при $\mu \rightarrow \infty$ і при $\mu \rightarrow 0$ виконуються за побудовою, тоді як (С2) випливає з того, що множення зліва не змінює умову стрибка. Оскільки $\det M(y, t, \mu) \equiv 1$, то $\det \tilde{M}(y, t, \mu) = 1 - \frac{1}{\mu^2}$. Таким чином, $\det \tilde{M}(y, t, \pm 1) = 0$. Крім того, враховуючи (3.10а), при $\mu \rightarrow 1$ маємо

$$\begin{aligned} \left(\tilde{M}_{11}(\mu), \tilde{M}_{12}(\mu) \right) &= (M_{11}(\mu), M_{12}(\mu)) - \frac{1}{\mu} (M_{21}(\mu), M_{22}(\mu)) \\ &= (M_{11}(\mu) - M_{21}(\mu), M_{12}(\mu) - M_{22}(\mu)) + O(1) = O(1). \end{aligned}$$

Аналогічно, враховуючи (3.10б), при $\mu \rightarrow -1$ маємо

$$\left(\tilde{M}_{11}(\mu), \tilde{M}_{12}(\mu) \right) = (M_{11}(\mu) + M_{21}(\mu), M_{12}(\mu) + M_{22}(\mu)) + O(1) = O(1).$$

Аналогічні розвинення можна отримати для $(\tilde{M}_{21}(\mu), \tilde{M}_{22}(\mu))$. Таким чином, $\tilde{M}(y, t, \mu)$ не є сингулярною при $\mu = \pm 1$. Нарешті, (С6) випливає зі співвідношення симетрії $M(\mu^{-1}) = \sigma_1 M(\mu) \sigma_1$ (див. (3.9)).

Тепер доведемо, що розв'язок задачі РГ (С1)–(С6) єдиний (якщо він існує). Зауважимо, що якщо $\tilde{M}(y, t, \mu)$ розв'язує задачу (С1)–(С6), то

$$\det \tilde{M}(y, t, \mu) = 1 - \frac{1}{\mu^2}. \quad (3.15)$$

Дійсно, оскільки $\det J(y, t, \mu) \equiv 1$ і $\det M(y, t, \mu)$ обмежений при $\mu = \infty$, то $\det M(\mu)$ є раціональною функцією. Крім того, з (С4) витікає, що $\det M(\mu) = -\frac{1}{\mu^2} + \frac{c}{\mu} + O(1)$ при $\mu \rightarrow 0$, де $c \equiv c(y, t)$. Враховуючи (С3), маємо, що $\zeta(y, t, \mu) := \det M(y, t, \mu) - 1 + \frac{1}{\mu^2} - \frac{c}{\mu}$ — обмежена ціла функція від μ , яка, за теоремою Ліувілля та (С3), дорівнює нулю для всіх (y, t) . Нарешті, аналізуючи $\zeta(y, t, \mu)$ при $\mu = \pm 1$ і використовуючи (С5), отримуємо, що $c(y, t) \equiv 0$ і, таким чином, виконується (3.15).

Припустимо, що \tilde{M} є іншим розв'язком задачі РГ (С1)–(С6), і визначимо $N(\mu) := \tilde{M}(\mu)\tilde{M}^{-1}(\mu)$. Оскільки \tilde{M} і \tilde{M}^{-1} задовольняють однакові умови стрибка, $N(\mu)$ є раціональною функцією, з можливими особливими точками при $\mu = 0, -1, 1$. З огляду на (3.15) та (С3), $\tilde{M}^{-1}(\mu) = \frac{\mu^2}{\mu^2-1}(\frac{1}{\mu}\sigma_1 + O(1)) = O(\mu)$ при $\mu \rightarrow 0$. Тому $N(\mu)$ не є сингулярною при $\mu = 0$. Щоб довести, що $N(\mu)$ не є сингулярною при $\mu = \pm 1$, скористаємося співвідношенням (С6). Зокрема, маємо $\tilde{M}(1) = -\tilde{M}(1)\sigma_1$ і, таким чином, $\tilde{M}(\mu) = \begin{pmatrix} g_1 & -g_1 \\ g_2 & -g_2 \end{pmatrix} + O(\mu - 1)$ при $\mu \rightarrow 1$, і $\tilde{M}^{-1}(\mu) = \frac{\mu^2}{\mu^2-1} \left(\begin{pmatrix} -\tilde{g}_2 & \tilde{g}_1 \\ -\tilde{g}_2 & \tilde{g}_1 \end{pmatrix} + O(\mu - 1) \right)$ при $\mu \rightarrow 1$. Тому $N(\mu)$ є обмеженою при $\mu \rightarrow 1$. Аналогічно можна довести, що $N(\mu)$ є обмеженою при $\mu \rightarrow -1$. Отже, $N(\mu)$ є цілою функцією, такою, що $N(\infty) = I$. Тому $N(\mu) \equiv I$ за теоремою Ліувілля. \square

Зауваження 3.1.4. Так як $r(\mu) = -\overline{r(-\mu)}$ (див. (3.13)), то $J(\mu)$ задовольняє симетріям:

$$J(\mu) = \sigma_3 \overline{J(-\mu)} \sigma_3 = \sigma_1 \overline{J^{-1}(\mu)} \sigma_1,$$

які, через єдиність розв'язку, зумовлюють що \tilde{M} задовольняє ті самі симетрії, що і M :

$$\tilde{M}(\mu) = \sigma_3 \overline{\tilde{M}(-\bar{\mu})} \sigma_3 = \sigma_1 \overline{\tilde{M}(\bar{\mu})} \sigma_1 \quad (3.16)$$

(враховуючи, що симетрії (3.16) узгоджуються з усіма умовами задачі РГ у твердженні 3.1.3).

Крок 2 у зведенні задачі РГ виконується таким чином (пор. з [80, 113, 114] для випадку нелінійного рівняння Шредінгера з граничними умовами “скінченної густини”).

Твердження 3.1.5 (регулярна задача РГ). Розв'язок \tilde{M} задачі РГ з твердження 3.1.3 можна записати в термінах розв'язку регулярної задачі РГ таким чином:

$$\tilde{M}(y, t, \mu) = \left(I - \frac{1}{\mu} \Delta(y, t) \right) M^R(y, t, \mu), \quad (3.17)$$

де $M^R(\mu) \equiv M^R(y, t, \mu)$ — розв'язок такої задачі РГ:

Знайти $M^R(\mu)$ таку, що

(R1) $M^R(\mu)$ є аналітичною на \mathbb{C}^+ та \mathbb{C}^- і неперервною на дійсній осі.

(R2) $M^R(\mu)$ задовольняє умову стрибка (3.3)–(3.6).

(R3) $M^R(\mu) \rightarrow I$ при $\mu \rightarrow \infty$.

Матрицю Δ у (3.17) можна зобразити через розв'язок M^R задачі РГ, яка сформульована вище, за формулою

$$\Delta(y, t) = \sigma_1 [M^R(y, t, 0)]^{-1}.$$

Доведення. Нехай $M^R(\mu)$ є розв'язком регулярної задачі РГ (R1)–(R3). Тоді $\tilde{M}(y, t, \mu)$, визначена через (3.17), задовольняє умови (C1)–(C4) задачі РГ з твердження 3.1.3 (за побудовою). Для перевірки умов (C5) і (C6), використаємо матричну структуру Δ , яка впливає з симетрій $M^R(\mu)$.

(i) Оскільки $M^R(\mu)$ і $M(\mu)$ задовольняють одну й ту саму умову стрибка, єдиність розв'язку регулярної задачі РГ означає, що $M^R(\mu)$ задовольняє ту саму симетрію, що і $M(\mu)$ (див. (3.9)) (породжену симетрією $r(\mu) = -\overline{r(-\mu)}$):

$$M^R(\mu) = \sigma_3 \overline{M^R(-\bar{\mu})} \sigma_3 = \sigma_1 \overline{M^R(\bar{\mu})} \sigma_1. \quad (3.18)$$

Тому, розглянувши $M^R(\mu)$ у $\mu = 0$, маємо $M^R(y, t, 0) = \begin{pmatrix} \alpha(y, t) & i\beta(y, t) \\ -i\beta(y, t) & \alpha(y, t) \end{pmatrix}$, де $\alpha(y, t) \in \mathbb{R}$ та $\beta(y, t) \in \mathbb{R}$. Більше того, $\alpha^2(y, t) - \beta^2(y, t) \equiv 1$, оскільки $\det M^R(\mu) \equiv 1$. Отже, $\Delta(y, t)$ має таку структуру

$$\Delta = \begin{pmatrix} i\beta & \alpha \\ \alpha & -i\beta \end{pmatrix} \text{ with } \alpha^2 - \beta^2 = 1 \quad (3.19)$$

і, таким чином, $\det(I - \mu^{-1}\Delta(y, t)) = 1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\mu^2} = 1 - \frac{1}{\mu^2}$, звідки випливає (С5). Зауважимо, що $\Delta^2 \equiv I$.

(ii) Розглянемо симетрію $\mu \mapsto \mu^{-1}$. З того, що $r(\mu) = \overline{r(\mu^{-1})}$, випливає, що $J(\mu) = \sigma_1 J^{-1}(\mu^{-1}) \sigma_1$ і, тому $\check{M}(\mu) := \sigma_1 M^R(\mu^{-1}) \sigma_1$ задовольняє ту саму умову стрибка, що й $M^R(\mu)$. Враховуючи, що $\check{M}(\infty) = \sigma_1 M^R(0) \sigma_1$, з теореми Ліувілля випливає, що

$$\check{M}^{-1}(\infty) \check{M}(\mu) \equiv \sigma_1 [M^R(0)]^{-1} M^R(\mu^{-1}) \sigma_1 = M(\mu),$$

або, в термінах Δ ,

$$M^R(\mu^{-1}) = \Delta M^R(\mu) \sigma_1. \quad (3.20)$$

Комбінуючи (3.17) з (3.20), виразимо $\check{M}(\mu^{-1})$ через $\check{M}(\mu)$ таким чином:

$$\check{M}(\mu^{-1}) = (I - \Delta\mu) M^R(\mu^{-1}) = (I - \Delta\mu) \Delta M^R(\mu) \sigma_1 = Q(\mu) \check{M}(\mu) \sigma_1 \quad (3.21)$$

з

$$Q(\mu) = (I - \Delta\mu) \Delta (I - \Delta\mu^{-1})^{-1}.$$

Прямі обчислення, з використанням (3.19), показують, що $Q(\mu) = -\mu I$ і, таким чином, симетрія (3.20) набуває вигляду (С6) у твердженні 3.1.3. \square

Від M^R до \tilde{u}

Отримаємо параметричне зображення розв'язку $\tilde{u}(x, t)$ задачі Коші (3.2) через розв'язок $M^R(y, t, \mu)$ регулярної задачі РГ з твердження 3.1.5. Використовуючи (3.14) та (3.17), отримуємо M з M^R :

$$M(\mu) = \left(I - \frac{1}{\mu} \sigma_1 \right)^{-1} \left(I - \frac{1}{\mu} \Delta \right) M^R(\mu). \quad (3.22)$$

За допомогою (3.11) та (3.12) маємо такий алгоритм:

$$M(y, t, \mu) \rightsquigarrow \{a_1(y, t), a_2(y, t), a_3(y, t)\} \rightsquigarrow \{\hat{u}(y, t), x(y, t)\}.$$

Нарешті, $\tilde{u}(x, t) = \hat{u}(y(x, t), t)$.

3.2 Асимптотика за великими часом регулярної задачі РГ

У цьому підрозділі вивчається асимптотика за великим часом розв'язку $M^R(y, t, \mu)$ регулярної задачі РГ з твердження 3.1.5, використовуючи ідеї та інструменти нелінійного методу найшвидшого спуску [52]. Метод полягає у послідовних перетвореннях вихідної задачі РГ, щоб звести її до задачі РГ, яку можна явно розв'язати. Перетворення включають:

- (а) відповідні трикутні факторизації матриці стрибка;
- (б) “поглинання” трикутних множників з “хорошою” поведінкою за великим часом;
- (в) зведення, після перемасштабування, до задачі РГ, яка розв'язується у термінах певних спеціальних функцій;
- (г) аналіз похибок наближення.

Інформацію про L^p -задачі РГ та їх застосування до асимптотики можна знайти в [48, 53, 68, 120]. Це дослідження зосереджено на виведенні головних членів асимптотики за великим часом. Методи аналізу похибок наведені у [91].

3.2.1 Перетворення регулярної задачі РГ

Введемо

$$\theta(\mu, \xi) := \hat{\theta}(k(\mu, \xi),$$

де

$$\xi := \frac{y}{t}, \quad k(\mu) := \frac{1}{4} \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right), \quad \hat{\theta}(k, \xi) := k\xi - \frac{2k}{1 + 4k^2}. \quad (3.23)$$

Тоді $p(y, t, \mu) = it\theta(\mu, \xi)$. Матриця стрибка $J(y, t, \mu)$ у (3.6), яка визначається (3.3)–(3.5), допускає дві трикутні факторизації:

$$J(y, t, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & r(\mu)e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r^*(\mu)e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.24a)$$

$$J(y, t, \mu) = \tag{3.24б}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{r^*(\mu)}{1-r(\mu)r^*(\mu)}e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-r(\mu)r^*(\mu) & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-r(\mu)r^*(\mu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{r(\mu)}{1-r(\mu)r^*(\mu)}e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дотримуючись основної ідеї нелінійного методу найшвидшого спуску [52], факторизації (3.24) можна використати таким чином, що осцилююча матриця стрибків на \mathbb{R} для модифікованої задачі РГ зводиться до одиної матриці (див. задачу РГ для M_2 нижче), тоді як стрибки, що виникають за межами \mathbb{R} , є експоненціально малими при $t \rightarrow +\infty$. Використання тієї чи іншої форми факторизації визначається “таблицею знаків” для θ , тобто розподілом знаків $\text{Im } \theta(\mu, \xi)$ (який залежить від ξ) у комплексній площині μ .

- а) Факторизація (3.24а) підходить для відкритих інтервалів \mathbb{R} , для яких $\text{Im } \theta(\mu)$ додатна при $\mu \in \mathbb{C}^+$ поблизу цих інтервалів (і від’ємна при $\mu \in \mathbb{C}^-$ поблизу тих же інтервалів). Позначимо через $\Sigma_a \equiv \Sigma_a(\xi)$ об’єднання цих інтервалів.
- б) Факторизація (3.24б) підходить для відкритих інтервалів \mathbb{R} , для яких $\text{Im } \theta(\mu)$ від’ємна при $\mu \in \mathbb{C}^+$ поблизу цих інтервалів. Позначимо їх об’єднання через $\Sigma_b(\xi) = \mathbb{R} \setminus \overline{\Sigma_a(\xi)}$.

Діагонального множника у (3.24б) можна позбутися, розв’язавши таку скалярну задачу РГ: знайти скалярну функцію $\delta(\mu, \xi)$ (де ξ — параметр), аналітичну в $\mu \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_b(\xi)}$ таку, що

$$\delta_+(\mu, \xi) = \delta_-(\mu, \xi)(1 - |r(\mu)|^2), \quad \mu \in \Sigma_b(\xi), \tag{3.25а}$$

$$\delta(\mu, \xi) \rightarrow 1, \quad \mu \rightarrow \infty. \tag{3.25б}$$

Розв’язок задачі РГ (3.25) задається інтегралом Коші:

$$\delta(\mu, \xi) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_b(\xi)} \frac{\ln(1 - |r(s)|^2)}{s - \mu} ds \right\}. \tag{3.26}$$

Визначимо $M_1(y, t, \mu) := M^R(y, t, \mu)\delta^{-\sigma_3}(\mu, \xi)$. Тоді M_1 можна охарактеризувати як розв'язок задачі РГ, що включає стандартну умову нормування $M_1(\mu) \rightarrow I$ при $\mu \rightarrow \infty$ та умову стрибка

$$M_{1+}(y, t, \mu) = M_{1-}(y, t, \mu)J_1(y, t, \mu), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (3.27)$$

де матриця стрибків факторизована таким чином:

$$J_1(y, t, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & r(\mu)\delta^2(\mu, \xi)e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r^*(\mu)\delta^{-2}(\mu, \xi)e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \Sigma_a(\xi) \quad (3.28a)$$

$$J_1(y, t, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{r^*(\mu)}{1-r(\mu)r^*(\mu)}\delta^{-2}(\mu, \xi)e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{r(\mu)}{1-r(\mu)r^*(\mu)}\delta_+^2(\mu, \xi)e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \Sigma_b(\xi). \quad (3.28b)$$

Тепер обговоримо структуру $\Sigma_a(\xi)$ та $\Sigma_b(\xi)$. Зауважимо, що функція $\hat{\theta}(\xi, k)$ така сама, як і у випадку рівняння КХ [25]. Беручи до уваги зв'язок між μ і k (див. (3.23)), “таблиця знаків” для рівняння КХ підказує “таблицю знаків” для рівняння мКХ (яке, крім того, має симетрію $\mu \mapsto 1/\mu$), а діапазони значень ξ , для яких “таблиця знаків” зберігає структуру, є однаковими. А саме, можна виділити чотири діапазони значень ξ , для яких $\Sigma_a(\xi)$ і $\Sigma_b(\xi)$ мають якісно різні структури (що, відповідно, означає чотири якісно різні типи асимптотики за великим часом):

$$(I) \quad \xi > 2,$$

$$(II) \quad 0 < \xi < 2,$$

$$(III) \quad -\frac{1}{4} < \xi < 0,$$

$$(IV) \quad \xi < -\frac{1}{4}.$$

Кожен діапазон значень ξ характеризується структурою $\Sigma_a(\xi)$ (або $\Sigma_b(\xi)$): $\Sigma_a(\xi)$ є об'єднанням інтервалів, що неперетинаються, скінченними кінцями

яких є (дійсні) стаціонарні точки $\theta(\mu, \xi)$, тобто точки $\mu \in \mathbb{R}$, де $\frac{d\theta}{d\mu}(\mu, \xi) = 0$. Аналогічно $\Sigma_b(\xi)$ можна зобразити таким чином:

$$\Sigma_b(\xi) = \begin{cases} \emptyset, & \xi > 2, \\ (-\mu_0, -\frac{1}{\mu_0}) \cup (\frac{1}{\mu_0}, \mu_0), & 0 < \xi < 2, \\ (-\infty, -\mu_1) \cup (-\mu_0, -\frac{1}{\mu_0}) \cup (-\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_1}) \cup (\frac{1}{\mu_0}, \mu_0) \cup (\mu_1, +\infty), & -\frac{1}{4} < \xi < 0, \\ (-\infty, +\infty), & \xi < -\frac{1}{4}. \end{cases} \quad (3.29)$$

Тут значення $\mu_0(\xi) > 1$ і $\mu_1(\xi) > 1$ – це значення, пов’язані (через $\kappa_j = \frac{1}{4}(\mu_j - \frac{1}{\mu_j})$, $j = 0, 1$) з (дійсними) стаціонарними точками $\hat{\theta}(k) - \kappa_0(\xi)$ та $\kappa_1(\xi)$, тобто, –кінцевими точками у випадку рівняння КХ. Вони визначаються співвідношенням $\xi = \frac{2-8\kappa^2}{(1+4\kappa^2)^2}$ (див. [25]):

$$\kappa_0^2(\xi) = \frac{\sqrt{1+4\xi} - 1 - \xi}{4\xi}, \quad \kappa_1^2(\xi) = -\frac{\sqrt{1+4\xi} + 1 + \xi}{4\xi}$$

($\kappa_0(\xi)$ відноситься до діапазонів II і III, тоді як $\kappa_1(\xi)$ відноситься тільки до діапазону III). Аналогічно до випадку рівняння КХ, для ξ в діапазонах I і IV розв’язок M_2 задачі РГ (див. нижче) швидко спадає (при $t \rightarrow +\infty$) до одиничної матриці, що відповідає (у випадку відсутності дискретного спектра) швидкому спаданню $\hat{u}(y, t)$. З іншого боку, діапазони II і III є тими, де асимптотика за великим часом у випадку рівняння КХ має тип Захарова–Манакова (тригонометричні коливання, що затухають як $t^{-1/2}$), див. [19, 25]. Основною метою цього розділу є виведення аналогічних асимптотичних формул для діапазонів II і III у випадку рівняння мКХ.

Наступним кроком є “поглинання” трикутних множників у (3.28а) та (3.28б) у розв’язок деформованої задачі РГ з додатковим контуром стрибка (що має частини за межами \mathbb{R}). Це поглинання вимагає, щоб трикутні множники в (3.28а) і (3.28б) мали аналітичне продовження принаймні в смугу, що оточує \mathbb{R} . У зв’язку з цим зауважимо, що, як і у випадку інших

інтегровних рівнянь (зокрема, рівняння КХ), коефіцієнт відбиття $r(\mu)$ визначено, у загальному випадку, лише при $\mu \in \mathbb{R}$. Однак можна наблизити $r(\mu)$ і $\frac{r(\mu)}{1-r(\mu)r^*(\mu)}$ деякими раціональними функціями з добре контрольованими похибками (див., наприклад, [91]). Альтернативно, якщо *припустити*, що початкові дані $\tilde{u}(x, 0)$ спадають експоненціально до 0 при $x \rightarrow \pm\infty$ (або що $\tilde{u}(x, 0)$ має фінітний носій в \mathbb{R}), то $r(\mu)$ є аналітичною в смузі, що містить дійсну вісь (або аналітичною на всій площині) і, таким чином, немає необхідності використовувати раціональні наближення для того, щоб мати можливість виконати це поглинання (див. перетворення $M_1 \rightsquigarrow M_2$ нижче). Надалі, з метою уникнення зайвих технічних ускладнень, *припускаємо*, що $r(\mu)$ (і, таким чином, $1 - r(\mu)r^*(\mu)$) є аналітичним в області комплексної площини, яка містить контури послідовних задач РГ (при подробиці, пов'язаними з раціональними наближеннями, див. [91]).

Для $0 < \xi < 2$ і для $-\frac{1}{4} < \xi < 0$ визначимо контур $\Sigma \equiv \Sigma(\xi)$, який узгоджується з таблицею знаків для $\theta(\mu, \xi)$, див. рисунки 3.1 і 3.2 відповідно.

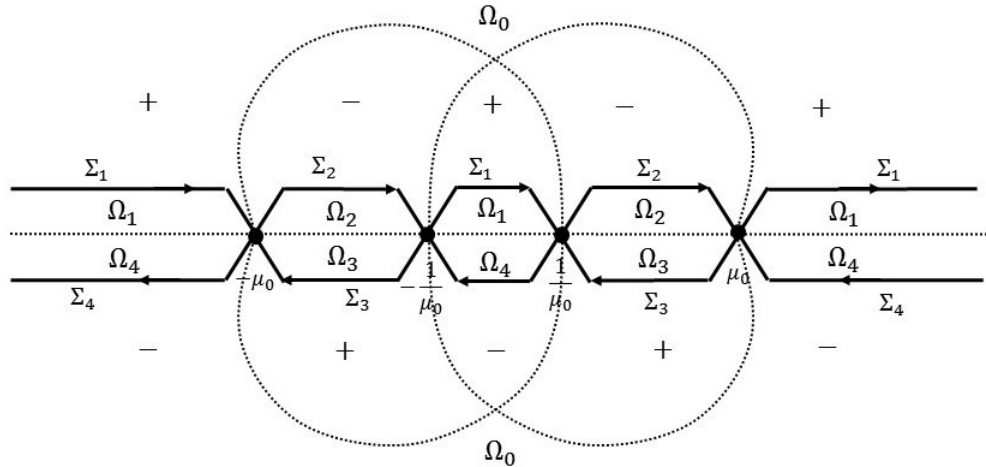


Рис. 3.1: Таблиця знаків (пунктирні лінії), контур $\Sigma(\xi) = \cup_{j=1}^4 \Sigma_j$ (суцільні лінії) та області $\Omega_j(\xi)$ для $0 < \xi < 2$.

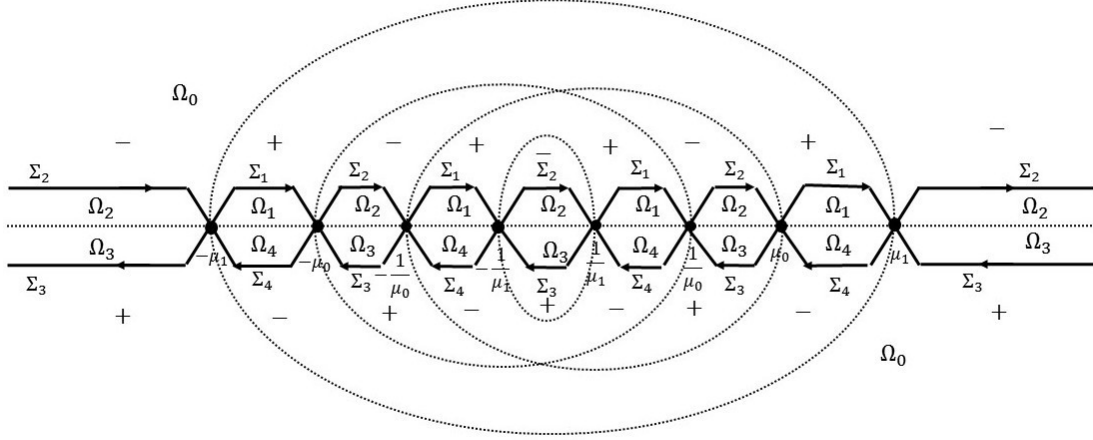


Рис. 3.2: Таблиця знаків (пунктирні лінії), контур $\Sigma(\xi) = \cup_{j=1}^4 \Sigma_j$ (суцільні лінії) та області $\Omega_j(\xi)$ для $-\frac{1}{4} < \xi < 0$.

Визначимо M_2 через $M_2(y, t, \mu) := M_1(y, t, \mu)P(y, t, \mu)$, де

$$P(y, t, \mu) = \begin{cases} I, & \mu \in \Omega_0, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r^*(\mu)\delta^{-2}(\mu, \xi)e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix}, & \mu \in \Omega_1, \\ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{r(\mu)}{1-r(\mu)r^*(\mu)}\delta^2(\mu, \xi)e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mu \in \Omega_2, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{r^*(\mu)}{1-r(\mu)r^*(\mu)}\delta^{-2}(\mu, \xi)e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix}, & \mu \in \Omega_3, \\ \begin{pmatrix} 1 & r(\mu)\delta^2(\mu, \xi)e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mu \in \Omega_4. \end{cases} \quad (3.30)$$

Тоді $M_2(y, t, \mu)$ можна охарактеризувати як розв'язок задачі РГ зі стандартною умовою нормування $M_2(\mu) \rightarrow I$ при $\mu \rightarrow \infty$ та умовою стрибка

$$M_{2+}(y, t, \mu) = M_{2-}(y, t, \mu)J_2(y, t, \mu), \quad \mu \in \Sigma := \cup_{j=1}^4 \Sigma_j, \quad (3.31)$$

де $\Sigma_j := \overline{\Omega_0} \cap \overline{\Omega_j}$ і

$$J_2(y, t, \mu) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r^*(\mu)\delta^{-2}(\mu, \xi)e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix}, & \mu \in \Sigma_1, \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{r(\mu)}{1-r(\mu)r^*(\mu)}\delta^2(\mu, \xi)e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mu \in \Sigma_2, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{r^*(\mu)}{1-r(\mu)r^*(\mu)}\delta^{-2}(\mu, \xi)e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix}, & \mu \in \Sigma_3, \\ \begin{pmatrix} 1 & -r(\mu)\delta^2(\mu, \xi)e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mu \in \Sigma_4. \end{cases} \quad (3.32)$$

Задача РГ для M_2 є такою, що рівномірне спадання (при $t \rightarrow +\infty$) матриці стрибків порушується лише поблизу стаціонарних фазових точок $\theta(\mu)$. Аналіз таких задач за великим часом, з відповідними оцінками, включає дослідження задач РГ модифікованих в малих околах стаціонарних фазових точок. Для цього використовуються перемасштабовані спектральні параметри і наближення матриць стрибків в цих околах [52].

У подальший аналіз для M_2 за великим часом відповідає стратегії, представленої в [91].

Крок (i). Додати до Σ маленькі кола γ_j ($j = 0, 1$), що оточують μ_j , разом з їхніми образами $-\gamma_j$ (що оточують $-\mu_j$) та $\pm\gamma_j^{-1}$ (що оточують $\pm 1/\mu_j$) під дією $\mu \mapsto -\mu$ та $\mu \mapsto 1/\mu$, відповідно.

Крок (ii). Всередині кіл навколо μ_0 та μ_1 визначити (явно) функцію $m_0(y, t, \mu)$, що точно задовольняє умову стрибка через Σ , отриману з (3.32), замінивши $r(\mu)$ на $r(\mu_0)$ та $r(\mu_1)$ відповідно, та замінивши $\delta^2(\mu, \xi)e^{-2it\theta(\mu, \xi)}$ на її наближення за великим часом.

Крок (iii). Визначити $m_0(y, t, \mu)$ всередині інших малих контурів за допомогою симетрій $m_0(\mu) = \overline{m_0(1/\bar{\mu})}$ і $m_0(\mu) = \sigma_3 \overline{m_0(-\bar{\mu})} \sigma_3$ (які узгоджуються з симетріями $M_2(\mu)$).

Крок (iv). Визначити $\hat{m}(\mu)$ за формулою:

$$\hat{m}(y, t, \mu) = \begin{cases} M_2(y, t, \mu)m_0^{-1}(y, t, \mu), & \mu \text{ всередині } \pm \gamma_j \text{ та } \pm \gamma_j^{-1}, \\ M_2(y, t, \mu), & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

Тоді $\hat{m}(\mu)$ задовольняє умовам задачі РГ

$$\begin{cases} \hat{m}_+(y, t, \mu) = \hat{m}_-(y, t, \mu)\hat{J}(y, t, \mu), & \mu \in \hat{\Sigma} := \Sigma \cup_j \{\pm\gamma_j\} \cup_j \{\pm\gamma_j^{-1}\}, \\ \hat{m}(y, t, \mu) \rightarrow I, & \mu \rightarrow \infty, \end{cases}$$

де

$$\hat{J}(y, t, \mu) = \begin{cases} m_0^{-1}(y, t, \mu), & \mu \in \cup_j \{\pm\gamma_j\} \cup_j \{\pm\gamma_j^{-1}\}, \\ m_0^{-1}(y, t, \mu)J_2(y, t, \mu)m_{0+}(y, t, \mu), & \mu \in \Sigma \cap \{\mu \mid \\ & \mu \text{ всередині } \cup_j \{\pm\gamma_j^{\pm 1}\}\}, \\ J_2(y, t, \mu), & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

З іншого боку, єдиний розв'язок цієї задачі можна виразити через розв'язок $\Theta(\mu)$ сингулярного інтегрального рівняння (див. [91]):

$$\hat{m}(y, t, \mu) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\Sigma}} \Theta(y, t, s) \hat{w}(y, t, s) \frac{ds}{s - \mu}, \quad (3.33)$$

де $\hat{w}(y, t, s) := \hat{J}(y, t, s) - I$ і $\Theta \in I + L^2(\hat{\Sigma})$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$\Theta(\mu) - \mathcal{C}_{\hat{w}}\Theta(\mu) = I,$$

де $\mathcal{C}_{\hat{w}}: L^2(\hat{\Sigma}) + L^\infty(\hat{\Sigma}) \rightarrow L^2(\hat{\Sigma})$ – інтегральний оператор, визначений за допомогою сингулярного оператора Коші: $\mathcal{C}_{\hat{w}}f := \mathcal{C}_-(f\hat{w})$, де $\mathcal{C}_- = \frac{1}{2}(-I + S_{\hat{\Sigma}})$ і $S_{\hat{\Sigma}}$ – оператор, пов'язаний з $\hat{\Sigma}$, що визначається головним значенням інтеграла Коші:

$$(S_{\hat{\Sigma}}f)(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\Sigma}} \frac{f(s)}{s - \mu} ds, \quad \mu \in \hat{\Sigma}.$$

Тут $L^2(\hat{\Sigma}) + L^\infty(\hat{\Sigma})$ позначає простір усіх функцій, які можна записати як суму функції з $L^2(\hat{\Sigma})$ та функції з $L^\infty(\hat{\Sigma})$.

Крок (v). Оцінити поведінку $\hat{m}(y, t, \mu)$ за великим часом при $\mu = i$ та $\mu = 0$ з урахуванням таких фактів:

- Основний внесок у праву частину (3.33) дають інтеграли за малими контурами, де $\hat{w}(y, t, \mu) = m_0^{-1}(y, t, \mu) - I$:

$$\hat{m}(y, t, \mu) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\cup_j \{\pm\gamma_j\} \cup_j \{\pm\gamma_j^{-1}\}} \frac{m_0^{-1}(y, t, s) - I}{s - \mu} ds + o(t^{-1/2}). \quad (3.34)$$

Оцінки похибок є рівномірними для $\varepsilon < \xi < 2 - \varepsilon$ та $-\frac{1}{4} + \varepsilon < \xi < -\varepsilon$, для будь-яких малих $\varepsilon > 0$ (деталі оцінки див. у [91]).

- Основний внесок у $m_0^{-1}(y, t, \mu) - I$ дає асимптотика задачі РГ для функцій параболічного циліндра (яка бере участь у побудові $m_0(y, t, \mu)$, див. [91]), яку можна навести в явному вигляді.

3.2.2 Діапазон $0 < \xi < 2$

Цей діапазон характеризується наявністю чотирьох дійсних стаціонарних точок: $\pm\mu_0$ and $\pm\mu_0^{-1}$.

Конструкція m_0

Наблизимо $it\theta(\mu, \xi)$, використовуючи (3.23), співвідношення

$$\kappa_0 = \frac{1}{4} \left(\mu_0 - \frac{1}{\mu_0} \right) \quad (3.35)$$

між μ_0 і κ_0 , і наближення для $\hat{\theta}(k, \xi)$ в околі κ_0 (див. [25]):

$$\hat{\theta}(k, \xi) \approx \hat{\theta}(\kappa_0) + 8f_0(\kappa_0)(k - \kappa_0)^2,$$

де

$$f_0(\kappa_0) = \frac{\kappa_0(3 - 4\kappa_0^2)}{(1 + 4\kappa_0^2)^3}, \quad \hat{\theta}(\kappa_0) = -\frac{16\kappa_0^3}{(1 + 4\kappa_0^2)^2}. \quad (3.36)$$

Тут і далі символ \approx використовується дещо нестрого, щоб показати, що ліва частина апроксимується правою частиною як функція спектрального параметра з членом похибки, який ми можемо контролювати в оцінках похибки (див., наприклад, (3.44) і (3.47)–(3.49)). Маємо $-it\theta(\mu, \xi) \approx$

$-it\hat{\theta}(\kappa_0) - \frac{i\hat{\mu}^2}{4}$, де перемасштабовану спектральну змінну $\hat{\mu}$ введено за допомогою

$$\mu - \mu_0 = \frac{\hat{\mu}}{(1 + \mu_0^{-2})\sqrt{2f_0t}}. \quad (3.37)$$

Наблизимо $\delta(\mu, \xi)$ в околі $\mu = \mu_0$. З (3.26) маємо:

$$\begin{aligned} \delta(\mu, \xi) &= \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-\mu_0}^{-1/\mu_0} + \int_{1/\mu_0}^{\mu_0} \right) \frac{\ln(1 - |r(s)|^2)}{s - \mu} ds \right\} \\ &= \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu - 1/\mu_0} \right)^{ih_0} \left(\frac{\mu + 1/\mu_0}{\mu + \mu_0} \right)^{ih_0} e^{\chi(\mu)}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

де

$$\begin{aligned} h_0 &= -\frac{1}{2\pi} \ln(1 - |r(\mu_0)|^2), \\ \chi(\mu) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-\mu_0}^{-1/\mu_0} + \int_{1/\mu_0}^{\mu_0} \right) \ln \frac{1 - |r(s)|^2}{1 - |r(\mu_0)|^2} \frac{ds}{s - \mu} \end{aligned}$$

(зауважимо, що $|r(\mu)| = |r(-\mu)| = |r(1/\mu)|$). Тому (див. [25]),

$$\delta(\mu, \xi) \approx (\mu - \mu_0)^{ih_0} \left(\frac{\mu_0 + 1/\mu_0}{2\mu_0(\mu_0 - 1/\mu_0)} \right)^{ih_0} e^{\chi(\mu_0)} = \hat{\mu}^{ih_0} (128f_0\kappa_0^2t)^{-\frac{ih_0}{2}} e^{\chi(\mu_0)}$$

і відповідно

$$\delta(\mu, \xi) e^{-it\theta(\mu, \xi)} \approx \delta_{\mu_0}(\xi, t) \hat{\mu}^{ih_0} e^{-\frac{i\hat{\mu}^2}{4}}, \quad (3.39)$$

де

$$\delta_{\mu_0}(\xi, t) = e^{-it\hat{\theta}(\kappa_0(\mu_0))} e^{\chi(\mu_0)} (128f_0(\kappa_0(\mu_0))\kappa_0^2(\mu_0)t)^{-\frac{ih_0}{2}}. \quad (3.40)$$

Наближення (3.39) підказує ввести $m_0(y, t, \mu)$ (біля $\mu = \mu_0$) таким чином:

$$m_0(y, t, \mu) = D(\xi, t) m^X(\xi, \hat{\mu}) D^{-1}(\xi, t), \quad (3.41)$$

де $D(\xi, t) = \delta_{\mu_0}^{\sigma_3}(t)$ і $m^X(\xi, \hat{\mu})$ – розв'язок задачі РГ, у $\hat{\mu}$ -комплексній площині, який задається у вигляді функцій параболічного циліндра [91] (з $q = -\bar{r}(\mu_0)$).

Оскільки (див. (3.37)) скінченні значення μ відповідають зростаючим (зі зростанням t) значенням $\hat{\mu}$, то асимптотика за великим часом $m_0(y, t, \mu)$

для μ на малих контурах, що оточують $\pm\mu_0$ і $\pm\frac{1}{\mu_0}$, визначається асимптотикою за великим $\hat{\mu}$ $m^X(\xi, \hat{\mu})$, що має вигляд (див. [91])

$$m^X(\xi, \hat{\mu}) = I + \frac{i}{\hat{\mu}} \begin{pmatrix} 0 & -\beta_{\mu_0}(\xi) \\ \bar{\beta}_{\mu_0}(\xi) & 0 \end{pmatrix} + O(\hat{\mu}^{-2}) \quad (3.42)$$

з

$$\beta_{\mu_0}(\xi) = \sqrt{h_0} e^{i(\frac{\pi}{4} - \arg(-\bar{r}(\mu_0)) + \arg \Gamma(ih_0))}, \quad (3.43)$$

де Γ - гамма-функція Ейлера. З (3.37), (3.41) та (3.42) маємо

$$\begin{aligned} m_0^{-1}(y, t, \mu) &= D(\xi, t)(m^X)^{-1}(\xi, \hat{\mu}(\mu))D^{-1}(\xi, t) \\ &= D(\xi, t) \left(I - \frac{i}{\hat{\mu}(\mu)} \begin{pmatrix} 0 & -\beta_{\mu_0}(\xi) \\ \bar{\beta}_{\mu_0}(\xi) & 0 \end{pmatrix} \right) D^{-1}(\xi, t) + O(t^{-1}) \\ &= I + \frac{B(\xi, t)}{\sqrt{t}(\mu - \mu_0)} + O(t^{-1}), \end{aligned} \quad (3.44)$$

де

$$B(\xi, t) = \begin{pmatrix} 0 & B_0(\xi, t) \\ \bar{B}_0(\xi, t) & 0 \end{pmatrix} \text{ та } B_0(\xi, t) = \frac{i\delta_{\mu_0}^2(\xi, t)\beta_{\mu_0}(\xi)}{(1 + \mu_0^{-2})\sqrt{2f_0(\kappa_0(\mu_0))}}. \quad (3.45)$$

Тут оцінка $O(t^{-1})$ є рівномірною для ξ та μ таких, що $\varepsilon_1 < \xi < 2 - \varepsilon_1$ та $|\mu - \mu_0| = \varepsilon_2$ для будь-якого малого додатного ε_j , $j = 1, 2$.

Асимптотика для \hat{m}

З огляду на алгоритм зображення u у термінах розв'язку відповідної регулярної задачі РГ, див. (3.22), (3.11), (3.12) та (3.1), потрібно знати асимптотику $\hat{m}(y, t, 0)$, $\hat{m}(y, t, i)$ та $\hat{m}_1(y, t)$, де \hat{m}_1 отримується з розвинення $\hat{m}(y, t, \mu) = \hat{m}(y, t, i) + \hat{m}_1(y, t)(\mu - i) + O((\mu - i)^2)$ при $\mu \rightarrow i$. З (3.44) та теореми про лишки випливає, що головні внески до інтегралу по γ_0 у (3.34) задаються таким чином:

$$\frac{B}{\mu_0\sqrt{t}}, \quad \frac{B}{(\mu_0 - i)\sqrt{t}} \text{ та } \frac{B}{(\mu_0 - i)^2\sqrt{t}}. \quad (3.46)$$

Для того, щоб врахувати внески від усіх малих контурів, поширимо визначення m_0 симетріями (як зазначено у кроці (iii)). Це дає:

$$\begin{aligned}\hat{m}(y, t, 0) &= I + \left(\frac{B}{\mu_0} - \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_0^2} \frac{\bar{B}}{\mu_0^{-1}} + \frac{1}{\mu_0^2} \frac{B}{\mu_0^{-1}} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} + o(t^{-1/2}) \\ &= I + \frac{4i \operatorname{Im} B_0(\xi, t)}{\mu_0 \sqrt{t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + o(t^{-1/2}),\end{aligned}\quad (3.47)$$

$$\begin{aligned}\hat{m}(y, t, i) &= I + \left(\frac{B}{\mu_0 - i} + \frac{\bar{B}}{-\mu_0 - i} - \frac{1}{\mu_0^2} \frac{\bar{B}}{\mu_0^{-1} - i} - \frac{1}{\mu_0^2} \frac{B}{-\mu_0^{-1} - i} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} + o(t^{-1/2}) \\ &= I + \frac{2i \operatorname{Im} B_0(\xi, t)}{\mu_0 \sqrt{t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + o(t^{-1/2})\end{aligned}\quad (3.48)$$

i

$$\begin{aligned}\hat{m}_1(y, t) &= \left(\frac{B}{(\mu_0 - i)^2} + \frac{\bar{B}}{(-\mu_0 - i)^2} - \frac{1}{\mu_0^2} \frac{\bar{B}}{(\mu_0^{-1} - i)^2} - \frac{1}{\mu_0^2} \frac{B}{(-\mu_0^{-1} - i)^2} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} \\ &+ o(t^{-1/2}) = \frac{4}{\sqrt{t}} \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{Re} \frac{B_0}{(\mu_0 - i)^2} \\ \operatorname{Re} \frac{\bar{B}_0}{(\mu_0 - i)^2} & 0 \end{pmatrix} + o(t^{-1/2}).\end{aligned}\quad (3.49)$$

Від \hat{m} до M^R

У розділі 3.2.2 представлено асимптотику за великим часом для $\hat{m}(y, t, \mu)$ (і, відповідно, $M_2(y, t, \mu)$) для деяких спеціальних значень μ . Оскільки $P(y, t, 0) = I$, а $P(y, t, \mu)$ прямує до I експоненціально швидко при $t \rightarrow +\infty$ для всіх μ , близьких до i , то для того, щоб отримати головні члени асимптотики для $M^R(y, t, \mu) = M_1(y, t, \mu) \delta^{\sigma_3}(\mu, \xi) = M_2(y, t, \mu) P^{-1}(y, t, \mu) \delta^{\sigma_3}(\mu, \xi)$, треба знати $\delta(\mu, \xi)$ (3.26) при $\mu = 0$ та в околі i .

За симетрією $|r(\mu)| = |r(-\mu)|$ маємо

$$\delta(0, \xi) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_b(\xi)} \frac{\ln(1 - |r(s)|^2)}{s} ds \right\} \equiv 1. \quad (3.50)$$

Нехай I_0 та I_1 визначені через розвинення $\delta(\mu, \xi) = e^{I_0 + I_1(\mu - i) + \dots}$ при $\mu \rightarrow i$. Застосовуючи симетрію $|r(\mu)| = |r(-\mu)|$, маємо

$$I_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma_b(\xi)} \frac{\ln(1 - |r(s)|^2)}{s - i} ds = \frac{1}{\pi} \int_{1/\mu_0}^{\mu_0} \frac{\ln(1 - |r(s)|^2)}{s^2 + 1} ds.$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1/\mu_0}^{\mu_0} \ln(1 - |r(s)|^2) \left(\frac{1}{(s-i)^2} + \frac{1}{(-s-i)^2} \right) ds \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{1/\mu_0}^{\mu_0} \ln(1 - |r(s)|^2) \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} ds \equiv 0, \end{aligned}$$

де остання рівність виконується завдяки симетрії $|r(\mu)| = |r(\mu^{-1})|$. Таким чином, при $\mu \rightarrow i$,

$$\delta(\mu, \xi) = \delta(i, \xi) + O((\mu - i)^2) \text{ та } \delta(i, \xi) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{1/\mu_0}^{\mu_0} \frac{\ln(1 - |r(s)|^2)}{s^2 + 1} ds \right\}. \quad (3.51)$$

Нехай розвинення $M^R(y, t, \mu)$ у околі i виглядає як $M^R(y, t, \mu) = M^R(y, t, i) + M_1^R(y, t)(\mu - i) + O((\mu - i)^2)$, тоді маємо такі асимптотики для $M^R(y, t, 0)$, $M^R(y, t, i)$ та $M_1^R(y, t)$:

$$M^R(y, t, 0) = \hat{m}(y, t, 0) = I + \frac{4i \operatorname{Im} B_0(\xi, t)}{\mu_0 \sqrt{t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + o(t^{-1/2}), \quad (3.52a)$$

$$\begin{aligned} M^R(y, t, i) &= \hat{m}(y, t, i) \delta^{\sigma_3}(i, \xi) + O(e^{-\varepsilon t}) \\ &= \left(I + \frac{2i \operatorname{Im} B_0(\xi, t)}{\mu_0 \sqrt{t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \delta^{\sigma_3}(i, \xi) + o(t^{-1/2}), \end{aligned} \quad (3.52б)$$

$$\begin{aligned} M_1^R(y, t) &= \hat{m}_1(y, t) \delta^{\sigma_3}(i, \xi) + O(e^{-\varepsilon t}) \\ &= \frac{4}{\sqrt{t}} \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{Re} \frac{B_0}{(\mu_0 - i)^2} \\ \operatorname{Re} \frac{\bar{B}_0}{(\mu_0 - i)^2} & 0 \end{pmatrix} \delta^{\sigma_3}(i, \xi) + o(t^{-1/2}), \end{aligned} \quad (3.52в)$$

де $B_0(\xi, t)$ визначено у (3.45), а $\delta(i, \xi)$ визначено у (3.51).

Асимптотика u за великим часом

Зкомбінувавши асимптотики (3.52) для $M^R(y, t, \mu)$ з (3.11), (3.12), (3.14) та (3.17), отримаємо головний член асимптотики $u(x, t)$ за великим часом.

Ввівши $\eta := \frac{2 \operatorname{Im} B_0}{\mu_0 \sqrt{t}}$, з (3.52a) маємо:

$$\Delta(y, t) = \sigma_1 [M^R(y, t, 0)]^{-1} = \begin{pmatrix} 2i\eta & 1 \\ 1 & -2i\eta \end{pmatrix} + o(t^{-1/2}). \quad (3.53)$$

Тому для

$$M(\mu) = \left(I - \frac{1}{\mu} \sigma_1 \right)^{-1} \left(I - \frac{1}{\mu} \Delta \right) M^R(\mu) \quad (3.54)$$

маємо $M(\mu) = I_1(\mu)I_2(\mu)M^R(\mu) + o(t^{-1/2})$, де

$$I_1(\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\mu^2}{\mu^2-1} & \frac{\mu}{\mu^2-1} \\ \frac{\mu}{\mu^2-1} & \frac{\mu^2}{\mu^2-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{i}{2} I(\mu - i) + O((\mu - i)^2), \quad (3.55a)$$

$$I_2(\mu) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2i\eta}{\mu} & -\frac{1}{\mu} \\ -\frac{1}{\mu} & 1 + \frac{2i\eta}{\mu} \end{pmatrix} \quad (3.55b)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 2\eta & i \\ i & 1 + 2\eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2i\eta & -1 \\ -1 & 2i\eta \end{pmatrix} (\mu - i) + O((\mu - i)^2),$$

$$M^R(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & i\eta \\ -i\eta & 1 \end{pmatrix} \delta^{\sigma_3}(i) + \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & 0 \end{pmatrix} \delta^{\sigma_3}(i)(\mu - i) + O((\mu - i)^2), \quad (3.55b)$$

де

$$\beta_1 = \frac{4}{\sqrt{t}} \operatorname{Re} \frac{B_0}{(\mu_0 - i)^2}, \quad \beta_2 = \frac{4}{\sqrt{t}} \operatorname{Re} \frac{\bar{B}_0}{(\mu_0 - i)^2}. \quad (3.56)$$

Підставивши (3.55) в (3.54) і розглянувши члени порядку $t^{-1/2}$, маємо

$$M(\mu) = \begin{pmatrix} (1 - \eta)\delta(i) & 0 \\ 0 & (1 + \eta)\delta^{-1}(i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (\beta_1 + \eta)\delta^{-1}(i) \\ (\beta_2 - \eta)\delta(i) & 0 \end{pmatrix} (\mu - i) + o((\mu - i)t^{-1/2})$$

і тому (див. (3.11))

$$a_1 = (1 - \eta)\delta(i) + o(t^{-1/2}), \quad a_2 = (\beta_1 + \eta)\delta^{-1}(i) + o(t^{-1/2}),$$

$$a_3 = (\beta_2 - \eta)\delta(i) + o(t^{-1/2}).$$

Звідси випливає (див. (3.12)), що

$$\hat{u}(y, t) = -(\beta_1 + \beta_2) + o(t^{-1/2}) = \frac{8(1 - \mu_0^2)}{(1 + \mu_0^2)^2 \sqrt{t}} \operatorname{Re} B_0 + o(t^{-1/2}), \quad (3.57a)$$

$$x(y, t) = y + 2 \ln((1 - \eta)\delta(i)) + o(t^{-1/2}) = y + y_0(\xi) + O(t^{-1/2}), \quad (3.57b)$$

де (див. (3.51)) $y_0(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_{1/\mu_0}^{\mu_0} \frac{\ln(1-|r(s)|^2)}{s^2+1} ds$.

Використовуючи означення (3.45) для B_0 , введемо дійсні функції $\varphi_\delta(\xi, t)$ і $\varphi_\beta(\xi)$ (див. (3.43) і (3.40)) за допомогою рівностей

$$\beta_{\mu_0}(\xi) = \sqrt{h_0} e^{i\varphi_\beta(\xi)}, \quad \delta_{\mu_0}^2(\xi, t) = e^{i\varphi_\delta(\xi, t)}.$$

Тоді отримаємо $B_0 = \frac{\sqrt{h_0}}{(1+\mu_0^{-2})\sqrt{2f_0}} e^{i(\frac{\pi}{2} + \varphi_\delta(\xi, t) + \varphi_\beta(\xi))}$ і, таким чином,

$$\operatorname{Re} B_0(\xi, t) = \frac{\sqrt{h_0}}{(1 + \mu_0^{-2})\sqrt{2f_0}} \cos \left\{ \frac{\pi}{2} + \varphi_\delta(\xi, t) + \varphi_\beta(\xi) \right\}. \quad (3.58)$$

Підставивши (3.58) у (3.57а), отримуємо асимптотику розв'язку задачі Коші для рівняння МКХ (у вигляді (3.2)), виражену параметрично у змінних (y, t) . Використовуючи означення $f_0, \varphi_\delta, \varphi_\beta, \beta_{\mu_0}$ (див. (3.36), (3.40), (3.43)) та співвідношення (3.35) між μ_0 і κ_0 , отримуємо такі асимптотики за великим часом вздовж променів $\frac{y}{t} = \xi$ для $0 < \xi < 2$:

$$\hat{u}(y, t) = \frac{C_1(\xi)}{\sqrt{t}} \cos \{C_2(\xi)t + C_3(\xi) \ln t + C_4(\xi)\} + o(t^{-1/2}), \quad (3.59)$$

де

$$C_1(\xi) = - \left(\frac{8h_0\kappa_0}{3 - 4\kappa_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.60a)$$

$$C_2(\xi) = \frac{32\kappa_0^3}{(1 + 4\kappa_0^2)^2}, \quad (3.60б)$$

$$C_3(\xi) = -h_0, \quad (3.60в)$$

$$C_4(\xi) = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\mu_0}^{-1/\mu_0} + \int_{1/\mu_0}^{\mu_0} \right) \ln \frac{1 - |r(s)|^2}{1 - |r(\mu_0)|^2} \frac{ds}{s - \mu_0} - h_0 \ln \frac{128\kappa_0^3(3 - 4\kappa_0^2)}{(1 + 4\kappa_0^2)^3} - \arg(-\bar{r}(\mu_0)) + \arg \Gamma(ih_0), \quad (3.60г)$$

враховуючи, що h_0, κ_0 та μ_0 є функціями від ξ .

Для того, щоб виразити асимптотику $\tilde{u}(x, t) = \hat{u}(y(x, t), t)$ у змінних (x, t) , зауважимо, що (3.57б) має вигляд

$$\frac{y}{t} = \frac{x}{t} - \frac{y_0}{t} + O(t^{-3/2})$$

і тому, ввівши $\zeta := \frac{x}{t}$, отримуємо $C_j(\xi) = C_j(\zeta) + O(t^{-1})$, $j = 1, \dots, 4$ і

$$C_2(\xi)t = C_2(\zeta)t - \frac{dC_2}{d\zeta}(\zeta)y_0(\zeta) + o(1).$$

Звідси випливає, що головний член асимптотики для $\tilde{u}(x, t)$ можна отримати з правої частини (3.59), де

(i) $C_j(\xi)$ замінено на $C_j(\zeta)$ для $j = 1, 2, 3$, і

(ii) $C_4(\xi)$ замінено на $\tilde{C}_4(\zeta) := C_4(\zeta) - C_2'(\zeta)y_0(\zeta)$.

Обчислюючи $C_2'(\zeta)$ через $\kappa_0(\zeta)$ і використовуючи (3.60б) та $\zeta = \frac{2-8\kappa_0^2}{(1+4\kappa_0^2)^2}$, отримаємо $C_2'(\zeta) = -2\kappa_0$ і, таким чином,

$$\tilde{C}_4(\zeta) = C_4(\zeta) + \frac{4\kappa_0(\zeta)}{\pi} \int_{1/\mu_0}^{\mu_0} \frac{\ln(1 - |r(s)|^2)}{s^2 + 1} ds. \quad (3.61)$$

Асимптотичний аналіз, представлений вище, можна підсумувати так.

Теорема 3.2.1. *У безсолітонному випадку розв'язок $\tilde{u}(x, t)$ задачі Коші для рівняння мКХ, записаного у вигляді (3.2), має таку асимптотику за великим часом вздовж променів $\frac{x}{t} =: \zeta$ у секторі півплощини (x, t) $0 < \zeta < 2$:*

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{C_1(\zeta)}{\sqrt{t}} \cos \left\{ C_2(\zeta)t + C_3(\zeta) \ln t + \tilde{C}_4(\zeta) \right\} + o(t^{-1/2}) \quad (3.62)$$

де C_1, C_2, C_3 визначені через (3.60а)-(3.60в), а \tilde{C}_4 визначено через (3.61)-(3.60г). Крім того, у цих визначеннях $h_0 = -\frac{1}{2\pi} \ln(1 - |r(\mu_0)|^2)$, $\kappa_0(\zeta) = \left(\frac{\sqrt{1+4\zeta}-1-\zeta}{4\zeta} \right)^{\frac{1}{2}}$, а $\mu_0(\zeta) > 1$ характеризується співвідношенням $\kappa_0(\zeta) = \frac{1}{4}(\mu_0(\zeta) - \mu_0(\zeta)^{-1})$.

Використовуючи співвідношення (3.1) між \tilde{u} та u , отримуємо, як наслідок, асимптотику за великим часом для $u(x, t)$ в секторі $1 < \frac{x}{t} < 3$.

Теорема 3.2.2 (Перша осцилююча область). *Нехай $u_0(x)$ - гладка функція, що досить швидко прямує до 1 при $x \rightarrow \pm\infty$ і задовольняє умову $(1 - \partial_x^2)u_0(x) > 0$ для всіх x . Припустимо безсолітонний випадок, тобто,*

що спектральна функція, пов'язана з $u_0(x)$, не має нулів у верхній півплощині і, таким чином, “дискретний спектр” є пустою множиною.

Тоді розв'язок $u(x, t)$ задачі Коші (2.1) для рівняння мКХ має таку асимптотику за великим часом у секторі півплощини (x, t) , що визначається $1 < \zeta := \frac{x}{t} < 3$:

$$u(x, t) = 1 + \frac{C_1(\zeta - 1)}{\sqrt{t}} \cos \left\{ C_2(\zeta - 1)t + C_3(\zeta - 1) \ln t + \tilde{C}_4(\zeta - 1) \right\} + o(t^{-1/2}). \quad (3.63)$$

Похибка є рівномірною у будь-якому секторі $1 + \varepsilon < \zeta < 3 - \varepsilon$, де ε - невелике додатне число.

3.2.3 Діапазон $-\frac{1}{4} < \xi < 0$

Цей діапазон характеризується наявністю восьми дійсних стаціонарних точок: $\pm\mu_0$, $\pm\mu_1$, $\pm\mu_0^{-1}$ і $\pm\mu_1^{-1}$ (див. рисунок 3.2). Аналогічно до діапазону $0 < \xi < 2$, спочатку оцінюємо внесок у (3.34) від γ_0 та $-\gamma_1$, а потім використовуємо симетрії $\mu \mapsto -\mu$ та $\mu \mapsto 1/\mu$. Зауважимо, що вибір $-\gamma_1$ в околі $-\mu_1$ підказано структурою (3.29) $\Sigma_b(\xi)$: частини $\Sigma_b(\xi)$, що закінчуються в μ_0 і в $-\mu_1$, розташовані ліворуч від цих точок. Це означає, що побудова локального наближення в околі $-\mu_1$ відбувається так само, як і для μ_0 , з тією відмінністю, що є внески в праву частину (3.38) з інших критичних точок.

А саме, з (3.26) маємо

$$\delta(\mu, \xi) = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu - \mu_0^{-1}} \right)^{ih_0} \left(\frac{\mu + \mu_0^{-1}}{\mu + \mu_0} \right)^{ih_0} \left(\frac{\mu - \mu_1^{-1}}{\mu + \mu_1^{-1}} \right)^{ih_1} \left(\frac{\mu + \mu_1}{\mu_1 - \mu} \right)^{ih_1} e^{\chi(\mu)}, \quad (3.64)$$

де $h_j = -\frac{1}{2\pi} \ln(1 - |r(\mu_j)|^2)$, $j = 0, 1$ і

$$\begin{aligned} \chi(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ - \int_{-\infty}^{-\mu_1} \ln(\mu - s) d \ln(1 - |r(s)|^2) \right. \\ \left. + \left(\int_{-\mu_0}^{-\mu_0^{-1}} + \int_{\mu_0^{-1}}^{\mu_0} \right) \ln \frac{1 - |r(s)|^2}{1 - |r(\mu_0)|^2} \frac{ds}{s - \mu} \right\} \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$+ \left. \int_{-\mu_1^{-1}}^{\mu_1^{-1}} \ln \frac{1 - |r(s)|^2}{1 - |r(\mu_1)|^2} \frac{ds}{s - \mu} - \int_{\mu_1}^{+\infty} \ln(s - \mu) d \ln(1 - |r(s)|^2) \right\}.$$

Використовуюючи $\kappa_0(\mu_0)$, $f_0(\kappa_0(\mu_0))$ (див. (3.35), (3.36)), і, аналогічно, $\kappa_1(\mu_1)$ та $f_1(\kappa_1(\mu_1))$, маємо

$$\delta(\mu, \xi) \approx \hat{\mu}^{ih_0} (128 f_0 \kappa_0^2 t)^{-\frac{ih_0}{2}} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_0}{\kappa_1 - \kappa_0} \right)^{ih_1} e^{\chi(\mu_0)}, \text{ де } \hat{\mu} = (\mu - \mu_0) \left(1 + \frac{1}{\mu_0^2} \right) \sqrt{2 f_0 t}$$

для μ в околі μ_0 та

$$\delta(\mu, \xi) \approx \hat{\mu}^{ih_1} (-128 f_1 \kappa_1^2 t)^{-\frac{ih_1}{2}} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_0}{\kappa_1 - \kappa_0} \right)^{ih_0} e^{\chi(-\mu_1)}, \text{ де } \hat{\mu} = (\mu + \mu_1) \left(1 + \frac{1}{\mu_1^2} \right) \sqrt{-2 f_1 t}$$

для μ в околі $-\mu_1$ (зауважимо, що $f_0(\kappa_0) = \frac{\kappa_0(3-4\kappa_0^2)}{(1+4\kappa_0^2)^3} > 0$, тоді як $f_1(\kappa_1) = \frac{\kappa_1(3-4\kappa_1^2)}{(1+4\kappa_1^2)^3} < 0$). Отже, коефіцієнти $\delta_{\mu_0}(\xi, t)$ і $\delta_{\mu_1}(\xi, t)$, які будемо використовувати при побудові m_0 (3.41) для μ поблизу μ_0 і $-\mu_1$, є, відповідно, такими:

$$\begin{aligned} \delta_{\mu_0}(\xi, t) &= e^{-it\hat{\theta}(\kappa_0)} e^{\chi(\mu_0)} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_0}{\kappa_1 - \kappa_0} \right)^{ih_1} (128 f_0 \kappa_0^2(\mu_0) t)^{-\frac{ih_0}{2}}, \\ \delta_{\mu_1}(\xi, t) &= e^{it\hat{\theta}(\kappa_1)} e^{\chi(-\mu_1)} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_0}{\kappa_1 - \kappa_0} \right)^{ih_0} (-128 f_1 \kappa_1^2(\mu_1) t)^{-\frac{ih_1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

що означає (пор. з (3.44))

$$\begin{aligned} m_0^{-1}(y, t, \mu) &= I + \frac{B_{\mu_0}(\xi, t)}{\sqrt{t}(\mu - \mu_0)} + O(t^{-1}), \quad \text{для } \mu \text{ всередині } \gamma_0, \\ m_0^{-1}(y, t, \mu) &= I + \frac{B_{\mu_1}(\xi, t)}{\sqrt{t}(\mu + \mu_1)} + O(t^{-1}), \quad \text{для } \mu \text{ всередині } -\gamma_1, \end{aligned}$$

де (пор. з (3.45))

$$B_{\mu_0}(\xi, t) = \begin{pmatrix} 0 & B_0(\xi, t) \\ \bar{B}_0(\xi, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\mu_1}(\xi, t) = \begin{pmatrix} 0 & B_1(\xi, t) \\ \bar{B}_1(\xi, t) & 0 \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} B_0(\xi, t) &= \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_0}{\kappa_1 - \kappa_0} \right)^{2ih_1} \frac{i\delta_{\mu_0}^2(\xi, t)\beta_{\mu_0}(\xi)}{(1 + \mu_0^{-2})\sqrt{2f_0(\kappa_0)}}, \\ B_1(\xi, t) &= \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_0}{\kappa_1 - \kappa_0} \right)^{2ih_0} \frac{i\delta_{\mu_1}^2(\xi, t)\beta_{\mu_1}(\xi)}{(1 + \mu_1^{-2})\sqrt{-2f_1(\kappa_1)}}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Тут $\beta_{\mu_0}(\xi)$ визначено у (3.43) та

$$\beta_{\mu_1}(\xi) = \sqrt{h_1} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \arg(-\bar{r}(-\mu_1)) + \arg \Gamma(ih_1)\right)}.$$

Завдяки симетріям, асимптотики для $\hat{m}(y, t, 0)$, $\hat{m}(y, t, i)$ та $\hat{m}_1(y, t)$ (а отже, для $M^R(y, t, 0)$, $M^R(y, t, i)$ та $M_1^R(y, t)$) у даному випадку (пор. з (3.47)-(3.49) та (3.52)) включають два члени:

$$\begin{aligned} M^R(y, t, 0) &= I + \frac{4i}{\sqrt{t}} \left(\frac{\operatorname{Im} B_0(\xi, t)}{\mu_0} - \frac{\operatorname{Im} B_1(\xi, t)}{\mu_1} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + o(t^{-1/2}), \\ M^R(y, t, i) &= \left(I + \frac{2i}{\sqrt{t}} \left(\frac{\operatorname{Im} B_0(\xi, t)}{\mu_0} - \frac{\operatorname{Im} B_1(\xi, t)}{\mu_1} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \delta^{\sigma_3}(i, \xi) + o(t^{-1/2}), \\ M_1^R(y, t) &= \frac{4}{\sqrt{t}} \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{Re} \frac{B_0}{(\mu_0-i)^2} + \operatorname{Re} \frac{B_1}{(\mu_1+i)^2} \\ \operatorname{Re} \frac{\bar{B}_0}{(\mu_0-i)^2} + \operatorname{Re} \frac{\bar{B}_1}{(\mu_1+i)^2} & 0 \end{pmatrix} \delta^{\sigma_3}(i, \xi) + o(t^{-1/2}), \end{aligned}$$

де $\delta(i, \xi)$ тепер має вигляд

$$\delta(i, \xi) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\mu_1^{-1}} + \int_{\mu_0^{-1}}^{\mu_0} + \int_{\mu_1}^{+\infty} \right) \frac{\ln(1 - |r(s)|^2)}{s^2 + 1} ds \right\}. \quad (3.68)$$

Звідси випливає, що асимптотика для параметричного представлення \tilde{u} (див. (3.57а) та (3.57б)) має вигляд

$$\hat{u}(y, t) = \frac{8}{\sqrt{t}} \left(\frac{(1 - \mu_0^2)}{(1 + \mu_0^2)^2} \operatorname{Re} B_0 + \frac{(1 - \mu_1^2)}{(1 + \mu_1^2)^2} \operatorname{Re} B_1 \right) + o(t^{-1/2}), \quad (3.69a)$$

$$x(y, t) = y + y_{01}(\xi) + O(t^{-1/2}), \quad (3.69b)$$

де $y_{01}(\xi) = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\mu_1^{-1}} + \int_{\mu_0^{-1}}^{\mu_0} + \int_{\mu_1}^{+\infty} \right) \frac{\ln(1 - |r(s)|^2)}{s^2 + 1} ds$.

Використовуючи означення (3.67) для B_j , $j = 0, 1$ і розмірковуючи як у випадку $0 < \xi < 2$, приходимо до асимптотики для $\hat{u}(y, t)$ (пор. з (3.59))

$$\hat{u}(y, t) = \sum_{j=0,1} \frac{C_1^{(j)}(\xi)}{\sqrt{t}} \cos \left\{ C_2^{(j)}(\xi) t + C_3^{(j)}(\xi) \ln t + C_4^{(j)}(\xi) \right\} + o(t^{-1/2}), \quad (3.70)$$

де

$$C_1^{(j)}(\xi) = - \left(\frac{8h_j \kappa_j}{|3 - 4\kappa_j^2|} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.71a)$$

$$C_2^{(j)}(\xi) = \frac{(-1)^j 32 \kappa_j^3}{(1 + 4\kappa_j^2)^2}, \quad (3.71б)$$

$$C_3^{(j)}(\xi) = -h_j, \quad (3.71в)$$

$$C_4^{(j)}(\xi) = \frac{3\pi}{4} - 2i\chi((-1)^j \mu_j) - h_j \ln \frac{128 \kappa_j^3 |3 - 4\kappa_j^2|}{(1 + 4\kappa_j^2)^3} \quad (3.71г)$$

$$- \arg(-\bar{r}((-1)^j \mu_j)) + \arg \Gamma(ih_j) + 2h_{1-j} \ln \frac{\kappa_1 + \kappa_0}{\kappa_1 - \kappa_0},$$

а $\chi(\mu)$ визначено у (3.65).

Повертаючись до змінних (x, t) , зазначимо, що аналогічно до (3.61), функції $C_4^{(j)}(\xi)$, $j = 0, 1$ слід замінити на

$$\tilde{C}_4^{(j)}(\zeta) = C_4^{(j)}(\zeta) + \frac{(-1)^j 4\kappa_j(\zeta)}{\pi} \left(\int_0^{\mu_1^{-1}} + \int_{\mu_0^{-1}}^{\mu_0} + \int_{\mu_1}^{+\infty} \right) \frac{\ln(1 - |r(s)|^2)}{s^2 + 1} ds, \quad (3.72)$$

що приводить до такого результату.

Теорема 3.2.3. У безсолітонному випадку розв'язок $\tilde{u}(x, t)$ задачі Коші для рівняння мКХ у формі (3.2) має таку асимптотику за великим часом вздовж променів $\frac{x}{t} =: \zeta$ у секторі півплощини $(x, t) - \frac{1}{4} < \zeta < 0$:

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{j=0,1} \frac{C_1^{(j)}(\zeta)}{\sqrt{t}} \cos \left\{ C_2^{(j)}(\zeta)t + C_3^{(j)}(\zeta) \ln t + \tilde{C}_4^{(j)}(\zeta) \right\} + o(t^{-1/2})$$

з рівномірною у будь-якому секторі $-\frac{1}{4} + \varepsilon < \zeta < -\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) похибкою. Коефіцієнти $C_1^{(j)}, C_2^{(j)}, C_3^{(j)}$ визначаються через (3.71а)-(3.71в), а $\tilde{C}_4^{(j)}$ – через (3.72)-(3.71г). У цих визначеннях,

$$h_j = -\frac{1}{2\pi} \ln(1 - |r(\mu_j)|^2),$$

$$\kappa_0(\zeta) = \left(\frac{\sqrt{1 + 4\zeta} - 1 - \zeta}{4\zeta} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \kappa_1(\zeta) = \left(-\frac{\sqrt{1 + 4\zeta} + 1 + \zeta}{4\zeta} \right)^{\frac{1}{2}},$$

де $\mu_j(\zeta) > 1$, $j = 0, 1$ характеризується співвідношенням $\kappa_j(\zeta) = \frac{1}{4}(\mu_j(\zeta) - \mu_j(\zeta)^{-1})$.

Використовуючи (3.1), отримуємо асимптотику $u(x, t)$ за великим часом у секторі $\frac{3}{4} < \frac{x}{t} < 1$.

Теорема 3.2.4 (Друга осцилююча область). *Нехай $u_0(x)$ - гладка функція, яка досить швидко прямує до 1 при $x \rightarrow \pm\infty$ і задовольняє $(1 - \partial_x^2)u_0(x) > 0$ для всіх x . Припустимо безсолітонний випадок, тобто, що спектральна функція, пов'язана з $u_0(x)$, не має нулів у верхній півплощині і, таким чином, “дискретний спектр” є пустою множиною.*

Тоді розв'язок $u(x, t)$ задачі Коші (2.1) для рівняння мКХ має таку асимптотику за великим часом вздовж променів $\frac{x}{t} =: \zeta$ у секторі півплощини (x, t) , що визначається нерівностями $\frac{3}{4} < \zeta < 1$:

$$u(x, t) = 1 + \sum_{j=0,1} \frac{C_1^{(j)}(\zeta - 1)}{\sqrt{t}} \cos \left\{ C_2^{(j)}(\zeta - 1)t + C_3^{(j)}(\zeta - 1) \ln t + \tilde{C}_4^{(j)}(\zeta - 1) \right\} + o(t^{-1/2}),$$

з рівномірною похибкою у секторах $\frac{3}{4} + \varepsilon < \zeta < 1 - \varepsilon$ з $\varepsilon > 0$.

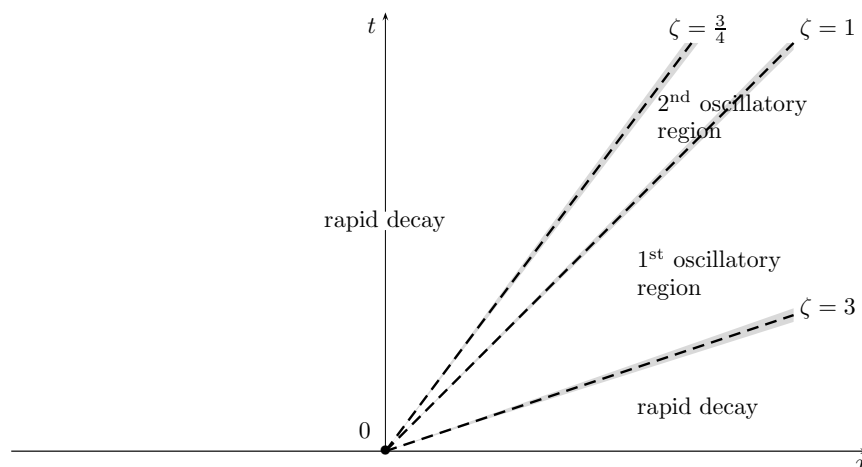


Рис. 3.3: Асимптотика для $u(x, t)$ відповідно до $\zeta := \frac{x}{t}$: чотири області.

Зауваження 3.2.5 (інші області). У безсолітонному випадку $u(x, t)$ швидко спадає до 1 у секторах $\frac{x}{t} > 3$ і $\frac{x}{t} < \frac{3}{4}$ (див. [25]). Це пов'язано з тим, що для цих діапазонів значень $\frac{x}{t}$ $\theta(\mu, \xi)$ не має дійсних стаціонарних точок (таких, що лежать на контурі вихідної задачі РГ).

Зауваження 3.2.6 (перехідні зони (transition zones)). Переходи між секторами (тобто, для $\frac{x}{t}$ поблизу $\frac{3}{4}$ і 3) характеризуються злиттям дійсних стаціонарних точок $\theta(\mu, \xi)$, з чого випливає, що члени похибки в теоремах 3.2.2

і 3.2.4 зростають при $\varepsilon \rightarrow 0$ і, таким чином, наведена асимптотика стає некоректною. З іншого боку, за аналогією до випадку рівняння Камасси–Хольма (див. [17]), використовуючи інше масштабування спектрального параметра, можна отримати правильну асимптотику в перехідних зонах в термінах трансцендентів Пенлеве.

3.3 Солітонна асимптотика

Як і для інших солітонних рівнянь, солітонні розв'язки рівняння мКХ пов'язані з умовами на лишки (2.44). Відповідно, ці умови призводять до солітонної асимптотики у виділеному секторі площини (x, t) . Умов на лишки можна позбутися, додавши до контуру маленькі кола навколо кожного μ_j та їхніх образів за симетрією і, таким чином, зводячи умови на лишки до відповідних умов стрибка [19].

Односолітонний розв'язок $u \equiv u_{\theta, \delta}$ з параметрами (θ, δ) , де $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, має таке параметричне представлення:

$$u(x, t) = \tilde{u}(x - t, t) + 1 = \hat{u}(y(x - t, t), t) + 1, \quad (3.73a)$$

де

$$\hat{u}(y, t) = 4 \tan^2 \theta \frac{z^2(y, t) + 2 \cos^2 \theta \cdot z(y, t) + \cos^2 \theta}{(z^2(y, t) + 2z(y, t) + \cos^2 \theta)^2} z(y, t), \quad (3.73б)$$

$$x(y, t) = t + y + 2 \ln \frac{z(y, t) + 1 + \sin \theta}{z(y, t) + 1 - \sin \theta}, \quad (3.73в)$$

і

$$z(y, t) = 2\delta \sin \theta e^{\sin \theta (y - \frac{2}{\cos^2 \theta} t)}. \quad (3.73г)$$

Зауважимо, що якщо $\theta \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, то відповідність x до y (3.73в) не є однозначною і тому у цьому випадку (3.73) є багатозначною функцією від x типу петлі. З іншого боку, якщо $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$, то (3.73) є гладкою функцією, яка домінує у поведінці за великим часом розв'язку задачі (2.1) у відповідному секторі. Аналогічно до [19] має місце така теорема:

Теорема 3.3.1 (солітонна асимптотика). *Припустимо, що $a(\mu)$, пов'язана з $u_0(x)$, має $2n$ простих нулів: $\mu_j = e^{i\theta_j}$ з $0 < \theta_1 < \dots < \theta_n < \frac{\pi}{3}$ і $\mu_{n+l} = -\bar{\mu}_l$ для $l = 1, \dots, n$. Тоді асимптотика u (що розуміється як глобальний розв'язок (2.1а) або розв'язок, продовжений за межі можливих вибухів згідно з формалізмом РГ) у секторі $3 < \frac{x}{t} < 9$ задається таким чином:*

1. У секторах $\left| \frac{x}{t} - 1 - \frac{2}{\cos^2 \theta_j} \right| < \varepsilon$ з будь-яким достатньо малим $\varepsilon > 0$,

$$u(x, t) = u_j(x, t) + O(t^{-l}), \quad j = 1, \dots, n$$

де $l \geq 1$ залежить від швидкості спадання $u_0(x) - 1$ при $|x| \rightarrow \infty$, де u_j задано параметрично через (3.73) із заміною θ , δ та z на θ_j , δ_j , і z_j відповідно, де

$$z_j(y, t) = 2\delta_j \sin \theta_j e^{\sin \theta_j \left(y - \frac{2}{\cos^2 \theta_j} t + y_j^0 \right)}$$

та y_j^0 - константи, що визначаються через $\{\theta_m, \delta_m\}_{m=j+1}^n$.

2. Поза цими секторами $u(x, t) = O(t^{-l})$.

Зауваження 3.3.2. Оскільки саме задача РГ, параметризована y та t , є тією задачею, що аналізується асимптотично, а солітонні розв'язки (3.73б) є гладкими у змінних (y, t) , асимптотичні результати теореми 3.3.1 справедливі для рівняння мКХ, записаного у змінних (y, t) (див. розділ 2) навіть якщо $a(\mu)$ має нулі при деяких $\mu^* = e^{i\theta^*}$ з $\theta^* \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$. З іншого боку, це дозволяє отримати достатню умову для руйнування хвиль розв'язків задачі (2.1а) (у змінних (x, t)): Якщо $a(\mu)$ має нуль $\mu^* = e^{i\theta^*}$ з $\theta^* \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, то руйнування хвилі відбувається у певний скінченний момент часу. У цьому випадку механізм руйнування хвиль полягає у порушенні однозначної відповідності $x \leftrightarrow y$ (пор. з [30]).

Зауваження 3.3.3 (інші області). $u(x, t)$ швидко спадає до 1 в секторах $\frac{x}{t} > 9$ і $\frac{x}{t} < \frac{3}{4}$, пор. з [25]. Це пов'язано з тим, що для цих діапазонів значень $\frac{x}{t}$, $\theta(\mu, \xi)$ не має дійсних стаціонарних точок (що лежать на контурі вихідної задачі РГ).

3.4 Висновки до розділу 3

У цьому розділі застосовано нелінійний метод найшвидшого спуску, оснований на формалізмі Рімана–Гільберта, для дослідження асимптотики за великим часом розв’язку задачі Коші для модифікованого рівняння Камасси–Хольма на всій прямій у випадку, коли розв’язок прямує до ненульової сталої на обох нескінченностях просторової змінної. Дослідження зосереджене на безсолітонного випадку, припускаючи, що немає умов на лишки (для солітонного випадку, коли основна задача РГ включає умови на лишки, можна звести (за допомогою коефіцієнтів Бляшке–Потапова) цю задачу РГ до такої, що не має умов на лишки).

Для аналізу за великого t , вихідну (сингулярну) задачу РГ, в термінах якої зображується розв’язок задачі Коші, зведено до регулярної задачі РГ (тобто, до такої, яка задається тільки умовами стрибка та нормування). Особливістю модифікованого рівняння Камасси–Хольма є те, що пов’язана з ним основна задача РГ має дві умови сингулярності (при $\mu = \pm 1$) з різними матричними структурами, що не дозволяє позбутися їх шляхом зведення матричної задачі РГ до векторної, як це можна зробити у випадку (оригінального) рівняння Камасси–Хольма. У нашому підході цю проблему вирішено у два кроки. По-перше, задачу РГ з умовами сингулярності при $\mu = \pm 1$ зведено до задачі РГ, яка характеризується такими двома умовами: (i) елементи матриці регулярні при $\mu = \pm 1$, але визначник (матричного) розв’язку є нульовим при $\mu = \pm 1$ (зауважимо, що $\det M(\mu) \equiv 1$ для розв’язку початкової задачі РГ має вигляд $\det M(\mu) \equiv 1$); (ii) розв’язок є сингулярним при $\mu = 0$. Далі розв’язок останньої задачі РГ представлено в термінах розв’язку регулярної задачі. У свою чергу, розв’язок отриманої регулярної задачі РГ було проаналізовано асимптотично, при $t \rightarrow +\infty$, використовуючи відповідну адаптацію нелінійного методу найшвидшого спуску.

Таким чином, отримано результати асимптотичного аналізу в безсолітонному випадку для двох секторів $\frac{3}{4} < \frac{x}{t} < 1$ і $1 < \frac{x}{t} < 3$ (півплощини

(x, t) , $t > 0$), де відхилення головного асимптотичного члена від фону є нетривіальним: цей член має вигляд модульованих (з параметрами, що залежать від $\frac{x}{t}$), затухаючих (як $t^{-1/2}$) тригонометричних коливань.

Розділ 4

Підхід Рімана–Гільберта до модифікованого рівняння Камасси–Хольма зі ступінчастими граничними умовами

Результати цього розділу опубліковані в [86].

Розглянемо початкову задачу для рівняння мКХ (4.1а):

$$m_t + ((u^2 - u_x^2)m)_x = 0, \quad m := u - u_{xx}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (4.1a)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (4.1b)$$

припускаючи, що

$$u_0(x) \rightarrow \begin{cases} A_1 & \text{коли } x \rightarrow -\infty \\ A_2 & \text{коли } x \rightarrow \infty \end{cases}, \quad (4.2)$$

де A_1 і A_2 – різні сталі, і що розв’язок $u(x, t)$ зберігає цю поведінку для всіх фіксованих $t > 0$.

У цьому розділі розробляється формалізм Рімана–Гільберта для задачі (4.1) зі ступінчастими початковими умовами (4.2), припускаючи, що $0 < A_1 < A_2$ і що $u(x, t)$ досить швидко наближається до своїх границь при великих x . Також припускається, що $m(x, 0) = u_0(x) - u_{0xx}(x) > 0$ для всіх x ; тоді можна показати, що $m(x, t) > 0$ для всіх t (див. 4.1). У розділі 4.2 вводяться відповідні перетворення рівнянь пари Лакса та пов’язаних

з ними розв'язків Йоста (“власних функцій”) і обговорюються аналітичні властивості власних функцій та відповідних спектральних функцій (коефіцієнтів розсіювання), включаючи симетрії та поведінку в точках розгалуження. Аналіз проводиться за умови, що вітки функцій $k_j(\lambda) := \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{A_j^2}}$, $j = 1, 2$, що входять до перетворень пари Лакса, фіксуються таким чином, що вони мають розріз $(-\infty, -\frac{1}{A_j}) \cup (\frac{1}{A_j}, \infty)$. У розділі 4.3, введені власні функції застосовуються для побудови задач Рімана–Гільберта, розв'язки яких, обчислені при $\lambda = 0$ (де λ – спектральний параметр в рівняннях пари Лакса), дають параметричні зображення розв'язку задачі (4.1). Випадок $0 < A_2 < A_1$ коротко розглянуто в розділі 4.4.

4.1 Властивість збереження знаку $m(x, t)$

При встановленні аналітичних властивостей розв'язків Йоста, важливе значення має властивість $m(x, t)$ зберігати знак. Аналогічний результат для рівняння Камаси–Хольма можна знайти в [39, 41].

Припустимо, що $u(x, t) - A_1 \in H^3(-\infty, a)$ і $u(x, t) - A_2 \in H^3(a, \infty)$ для будь-якого дійсного a і для будь-якого $t \in (0, T)$, де $T \leq +\infty$ – максимальний час існування розв'язку. Тоді з нерівності Моррі випливає, що функція $(mu_x)(s, x)$ є рівномірно обмеженою для $0 < s < t < T$, $x \in \mathbb{R}$. Розглянемо задачу Коші для $q(t, x)$:

$$\frac{dq}{dt} = (u^2 - u_x^2)(q(t, x), t), \quad t \in (0, T), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.3a)$$

$$q(0, x) = x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.3b)$$

де $u(x, t)$ є розв'язком задачі (4.1). Диференціювання (4.3) за x приводить до системи

$$\frac{d}{dt} q_x(t, x) = (2mu_x)(q(t, x), t) q_x(t, x), \quad (4.4a)$$

$$q_x(0, x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.4b)$$

Звідси випливає, що

$$q_x(t, x) = e^2 \int_0^t (mu_x)(q(s, x), s) ds > 0 \quad (4.5)$$

і, крім того,

$$e^{k(t)} \leq q_x(t, x) \leq e^{K(t)}, \quad t \in [0, T) \quad (4.6)$$

для деяких $k(t)$ та $K(t)$.

Тепер зауважимо, що з (4.1а) і (4.3) випливає, що $\frac{d}{dt} [m(q(t, x), t)q_x(t, x)] = 0$. Дійсно,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [m(q(t, x), t)q_x(t, x)] \\ &= [m_t(q(t, x), t) + m_x(q(t, x), t)q_t(t, x)] (q(t, x), t)q_x(t, x) + m(q(t, x), t)q_{tx}(t, x) \\ &= [-(u^2 - u_x^2)_x m - (u^2 - u_x^2)m_x + m_x(u^2 - u_x^2)] (q(t, x), t)q_x(t, x) \\ &+ 2(m^2 u_x)(q(t, x), t)q_x(t, x) = 0. \end{aligned}$$

Звідси, беручи до уваги (4.3б) та (4.4б), маємо

$$m(t, q(t, x))q_x(t, x) = m(0, q(0, x))q_x(0, x) = m(0, x).$$

Отже, якщо $m(x, 0) > 0$, то $m(q(t, x), t) > 0$ для всіх $t \in [0, T)$, $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $q_x(t, x) > 0$, $q(t, x)$ є строго зростаючою функцією. Крім того, інтегруючи (4.6) за x , маємо $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(t, x) = \pm\infty$. Отже, $q(x, t)$ є бієкцією з \mathbb{R} на \mathbb{R} і, таким чином, $m(t, x) > 0$ для всіх $t \in [0, T)$, $x \in \mathbb{R}$.

4.2 Пари Лакса та власні функції

Позначення

- Введемо такі позначення для певних інтервалів дійсної осі:

$$\begin{aligned} \Sigma_j &= (-\infty, -\frac{1}{A_j}] \cup [\frac{1}{A_j}, \infty), & \dot{\Sigma}_j &= (-\infty, -\frac{1}{A_j}) \cup (\frac{1}{A_j}, \infty), \\ \Sigma_0 &= [-\frac{1}{A_1}, -\frac{1}{A_2}] \cup [\frac{1}{A_2}, \frac{1}{A_1}], & \dot{\Sigma}_0 &= (-\frac{1}{A_1}, -\frac{1}{A_2}) \cup (\frac{1}{A_2}, \frac{1}{A_1}). \end{aligned}$$

Зауважимо, що $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$, оскільки $A_1 < A_2$.

- Для $\lambda \in \Sigma_j$ позначимо через λ_+ (λ_-) точку верхньої (нижньої) сторони Σ_j (тобто $\lambda_{\pm} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \lambda \pm i\epsilon$). Тоді маємо $-\lambda_+ = (-\lambda)_-$ і $\overline{\lambda_+} = \lambda_-$.

- $k_j(\lambda) := \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{A_j^2}}$, $j = 1, 2$ з розрізом Σ_j і віткою, що фіксується умовою $k_j(0) = \frac{i}{A_j}$.

Зауважимо, що $\text{Im } k_j(\lambda) \geq 0$ на \mathbb{C} , а $k_j(\lambda)$ є дійсною величиною з обох сторін Σ_j . Зауважимо також, що $k_j(\lambda) = \omega_j^+(\lambda)\omega_j^-(\lambda)$, де $\omega_j^+(\lambda) = \sqrt{\lambda - \frac{1}{A_j}}$ з розрізом $[\frac{1}{A_j}, \infty)$ і $\omega_j^+(0) = \frac{i}{\sqrt{A_j}}$, і $\omega_j^-(\lambda) = \sqrt{\lambda + \frac{1}{A_j}}$ з розрізом $(-\infty, -\frac{1}{A_j}]$ і $\omega_j^-(0) = \frac{1}{\sqrt{A_j}}$.

Відзначимо такі співвідношення симетрії:

$$k_j(-\lambda) = k_j(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_j, \quad (4.7a)$$

$$k_j(\lambda_+) = -k_j((-\lambda)_+), \quad \lambda \in \Sigma_j, \quad (4.7b)$$

$$\overline{k_j(\bar{\lambda})} = -k_j(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_j, \quad (4.7v)$$

$$\overline{k_j(\lambda_+)} = k_j(\lambda_+), \quad \lambda \in \Sigma_j \quad (4.7\Gamma)$$

(тут (4.7b) випливає з (4.7a) та (4.7v)).

4.2.1 Пари Лакса

Нагадаємо, що пара Лакса для рівняння мКХ (4.1a) має вигляд (2.4), (2.5). Для того, щоб мати можливість контролювати поведінку розв'язків рівнянь пари Лакса за великих λ , вводяться два калібрувальні перетворення, пов'язані з границями $x \rightarrow (-1)^j \infty$ та $t \rightarrow A_j$ (аналогічно тому, як це було зроблено у випадку постійного фону [18]).

Твердження 4.2.1. *Рівняння (4.1a) допускає пари Лакса виду ($j = 1, 2$)*

$$\hat{\Phi}_{jx} + Q_{jx} \hat{\Phi}_j = \hat{U}_j \hat{\Phi}_j, \quad (4.8a)$$

$$\hat{\Phi}_{jt} + Q_{jt} \hat{\Phi}_j = \hat{V}_j \hat{\Phi}_j, \quad (4.8b)$$

коефіцієнти яких $Q_j \equiv Q_j(x, t, \lambda)$, $\hat{U}_j \equiv \hat{U}_j(x, t, \lambda)$ та $\hat{V}_j \equiv \hat{V}_j(x, t, \lambda)$ є 2×2 матрицями, визначеними у (4.12) та (4.13). Вони характеризуються такими властивостями:

- (i) Q_j є діагональною і необмеженою при $\lambda \rightarrow \infty$.

(ii) $\hat{U}_j = O(1)$ та $\hat{V}_j = O(1)$ коли $\lambda \rightarrow \infty$.

(iii) Діагональні частини \hat{U}_j та \hat{V}_j спадають до 0 при $\lambda \rightarrow \infty$.

(iv) $\hat{U}_j \rightarrow 0$ та $\hat{V}_j \rightarrow 0$ при $x \rightarrow (-1)^j \infty$.

Доведення. Зауважимо, що U у (2.5а) можна записати таким чином:

$$U(x, t, \lambda) = \frac{m(x, t)}{2A_j} \begin{pmatrix} -1 & \lambda A_j \\ -\lambda A_j & 1 \end{pmatrix} + \frac{m(x, t) - A_j}{2A_j} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

де $m(x, t) - A_j \rightarrow 0$ при $x \rightarrow (-1)^j \infty$. Перший (неспадний при $x \rightarrow (-1)^j \infty$) член у (4.9) можна діагоналізувати, ввівши нову функцію

$$\hat{\Phi}_j(x, t, \lambda) := D_j(\lambda) \Phi(x, t, \lambda), \quad (4.10)$$

де

$$D_j(\lambda) := \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{iA_j k_j(\lambda)} - 1} \begin{pmatrix} \frac{\lambda A_j}{1 - iA_j k_j(\lambda)} & -1 \\ -1 & \frac{\lambda A_j}{1 - iA_j k_j(\lambda)} \end{pmatrix}; \quad (4.11)$$

відповідно,

$$D_j^{-1}(\lambda) := \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{iA_j k_j(\lambda)} - 1} \begin{pmatrix} \frac{\lambda A_j}{1 - iA_j k_j(\lambda)} & 1 \\ 1 & \frac{\lambda A_j}{1 - iA_j k_j(\lambda)} \end{pmatrix}.$$

Множник $\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{iA_j k_j(\lambda)} - 1}$ забезпечує властивість $\det D_j(\lambda) = 1$ для всіх λ , а вітки квадратного кореня вибираються як такі, що відповідають розрізу $[0, \infty)$ і $\sqrt{-1} = i$; тоді $\sqrt{w_j} = -\sqrt{\bar{w}_j}$. Зауважимо, що функції $\sqrt{\frac{1}{iA_j k_j(\lambda)} - 1}$ добре визначені як функції від λ на множинах $\mathbb{C} \setminus \Sigma_j$, а також на сторонах Σ_j . Тоді (4.10) трансформує перше рівняння з (2.4) у рівняння

$$\hat{\Phi}_{jx} + \frac{ik_j(\lambda)m}{2} \sigma_3 \hat{\Phi}_j = \hat{U}_j \hat{\Phi}_j, \quad (4.12a)$$

де $\hat{U}_j \equiv \hat{U}_j(x, t, \lambda)$ задається формулою

$$\hat{U}_j = \frac{\lambda(m - A_j)}{2A_j k_j(\lambda)} \sigma_2 + \frac{m - A_j}{2iA_j^2 k_j(\lambda)} \sigma_3. \quad (4.12b)$$

У свою чергу, t -рівняння пари Лакса (2.4) трансформується у рівняння

$$\hat{\Phi}_{jt} + iA_j k_j(\lambda) \left(-\frac{1}{2A_j} m(u^2 - u_x^2) - \frac{1}{\lambda^2} \right) \sigma_3 \hat{\Phi}_j = \hat{V}_j \hat{\Phi}_j, \quad (4.12в)$$

де $\hat{V}_j \equiv \hat{V}_j(x, t, \lambda)$ задається формулою

$$\begin{aligned} \hat{V}_j = & -\frac{1}{2A_j k_j(\lambda)} \left(\lambda(u^2 - u_x^2)(m - A_j) + \frac{2(u - A_j)}{\lambda} \right) \sigma_2 + \frac{\tilde{u}_x}{\lambda} \sigma_1 \\ & - \frac{1}{iA_j k_j(\lambda)} \left(A_j(u - A_j) + \frac{1}{2A_j} (u^2 - u_x^2)(m - A_j) \right) \sigma_3. \end{aligned} \quad (4.12г)$$

Тепер зауважимо, що рівняння (4.12а) і (4.12в) мають бажаний вигляд (4.8), якщо визначити Q_j таким чином:

$$Q_j(x, t, \lambda) := p_j(x, t, \lambda) \sigma_3, \quad (4.13а)$$

де

$$p_j(x, t, \lambda) := iA_j k_j(\lambda) \left(\frac{1}{2A_j} \int_{(-1)^j \infty}^x (m(\xi, t) - A_j) d\xi + \frac{x}{2} - t \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{A_j^2}{2} \right) \right). \quad (4.13б)$$

Дійсно, очевидно, що $p_{jx} = \frac{ik_j(\lambda)m}{2}$; з іншого боку, рівність

$$p_{jt} = iA_j k_j(\lambda) \left(-\frac{1}{2A_j} m(u^2 - u_x^2) - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

впливає з самого рівняння мКХ (4.1а). \square

Зауваження 4.2.2. У розділі 2, де розглядається рівняння мКХ на сталому фоні, введення уніфікуючого спектрального параметра (такого, що λ і відповідні $k(\lambda) \in$ раціональними відносно нього) дозволило позбутися квадратних коренів і, таким чином, уникнути проблеми введення віток. У цьому розділі, оскільки ми маємо справу з двома різними функціями, $k_1(\lambda)$ і $k_2(\lambda)$, пов'язаними з двома різними фонами, видається природним зберігти початковий спектральний параметр λ як спектральну змінну у формалізмі задачі РГ, який розвивається нижче.

4.2.2 Власні функції

Пара Лакса у вигляді (4.12) дозволяє визначити, за допомогою відповідних інтегральних рівнянь, її спеціальні розв'язки, які мають добре контролювану поведінку як функції спектрального параметра λ за великих значень λ . Дійсно, ввівши нову 2×2 -значну функцію

$$\tilde{\Phi}_j = \hat{\Phi}_j e^{Q_j}, \quad (4.14)$$

рівняння (4.12а) та (4.12в) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_{jx} + [Q_{jx}, \tilde{\Phi}_j] = \hat{U}_j \tilde{\Phi}_j, \\ \tilde{\Phi}_{jt} + [Q_{jt}, \tilde{\Phi}_j] = \hat{V}_j \tilde{\Phi}_j, \end{cases} \quad (4.15)$$

де $[\cdot, \cdot]$ позначає комутатор матриць. Визначимо розв'язки Йоста $\tilde{\Phi}_j \equiv \tilde{\Phi}_j(x, t, \lambda)$, $j = 1, 2$ рівнянь (4.15) як розв'язки відповідних інтегральних рівнянь Вольтерра:

$$\tilde{\Phi}_j(x, t, \lambda) = I + \int_{(-1)^j \infty}^x e^{Q_j(\xi, t, \lambda) - Q_j(x, t, \lambda)} \hat{U}_j(\xi, t, \lambda) \tilde{\Phi}_j(\xi, t, \lambda) e^{Q_j(x, t, \lambda) - Q_j(\xi, t, \lambda)} d\xi, \quad (4.16)$$

або, враховуючи означення (4.13) для Q_j ,

$$\tilde{\Phi}_j(x, t, \lambda) = I + \int_{(-1)^j \infty}^x e^{\frac{ik_j(\lambda)}{2} \int_x^\xi m(\tau, t) d\tau \sigma_3} \hat{U}_j(\xi, t, \lambda) \tilde{\Phi}_j(\xi, t, \lambda) e^{-\frac{ik_j(\lambda)}{2} \int_x^\xi m(\tau, t) d\tau \sigma_3} d\xi, \quad (4.17)$$

де I – одинична 2×2 матриця.

Тут і далі $\hat{\Phi}_j := \tilde{\Phi}_j e^{-Q_j}$, $j = 1, 2$ позначають розв'язки Йоста рівнянь (4.12), тоді як $\Phi_j := D_j^{-1}(\lambda) \hat{\Phi}_j$ позначають відповідні розв'язки Йоста рівнянь (2.4).

Тепер можна проаналізувати аналітичні та асимптотичні властивості розв'язків $\tilde{\Phi}_j$ рівняння (4.17) як функцій λ , використовуючи розвинення у ряд Неймана. Нехай $A^{(1)}$ і $A^{(2)}$ позначають стовпчики 2×2 матриці $A = (A^{(1)} \ A^{(2)})$. Використовуючи ці позначення, маємо такі властивості:

- $\tilde{\Phi}_j^{(j)}$ аналітична в $\mathbb{C} \setminus \Sigma_j$ і має неперервне продовження на нижню та верхню сторони $\dot{\Sigma}_j$.

- $\tilde{\Phi}_j^{(1)}$ та $\tilde{\Phi}_j^{(2)}$ добре визначені та неперервні на нижній та верхній сторонах $\dot{\Sigma}_j$.

Зазначимо, що у рівняннях (4.15), коефіцієнтами є матриці з нульовими слідами, з чого випливає, що $\det \tilde{\Phi}_j$ не залежить від x та t , а отже

- $\det \tilde{\Phi}_j \equiv 1$.

Щодо значень $\tilde{\Phi}_j$ у певних точках λ -площини, з рівнянь (4.17) випливає наступне:

- $(\tilde{\Phi}_1^{(1)} \tilde{\Phi}_2^{(2)}) \rightarrow I$ при $\lambda \rightarrow \infty$ (оскільки діагональна частина \hat{U}_j оцінюється як $O(\frac{1}{\lambda})$, а недіагональна частина \hat{U}_j обмежена).
- $\tilde{\Phi}_j$ має сингулярності при $\lambda = \pm \frac{1}{A_j}$ порядку $\frac{1}{2}$ (щодо деталей, див. підрозділ 4.2.8 нижче).

4.2.3 “Фонові” розв’язки

Введемо до розгляду функції $\Phi_{0,j}(x, t, \lambda) := D_j^{-1}(\lambda)e^{-Q_j(x,t,\lambda)}$. Вони задовольняють диференціальні рівняння

$$\begin{cases} \Phi_{0,jx} = \frac{m(x,t)}{2A_j} \begin{pmatrix} -1 & \lambda A_j \\ -\lambda A_j & 1 \end{pmatrix} \Phi_{0,j}, \\ \Phi_{0,jt} = \left(-\frac{1}{2A_j} m(u^2 - u_x^2) - \frac{1}{\lambda^2} \right) \begin{pmatrix} -1 & \lambda A_j \\ -\lambda A_j & 1 \end{pmatrix} \Phi_{0,j}. \end{cases} \quad (4.18)$$

Порівнюючи ці рівняння з (4.8), функції $\Phi_j(x, t, \lambda)$ можна охарактеризувати як розв’язки інтегральних рівнянь:

$$\Phi_j(x, t, \lambda) = \Phi_{0,j}(x, t, \lambda) + \int_{(-1)^j \infty}^x \Phi_{0,j}(x, t, \lambda) \Phi_{0,j}^{-1}(y, t, \lambda) \frac{m(y, t) - A_j}{2A_j} \sigma_3 \Phi_j(y, t, \lambda) dy. \quad (4.19)$$

Зауважимо, що функції $\Phi_{0,j}(x, t, \lambda) \Phi_{0,j}^{-1}(y, t, \lambda)$ є цілими відносно λ . Отже, “брак аналітичності” (стрибки) $\Phi_j(x, t, \lambda)$ породжується “браком аналітичності” $\Phi_{0,j}(x, t, \lambda)$. Відмітимо, що $\det \Phi_j = \det \Phi_{0,j} = 1$.

4.2.4 Спектральні функції

Введемо матриці розсіяння $s(\lambda_{\pm})$ для $\lambda \in \dot{\Sigma}_1$ як матриці, що зв'язують Φ_1 та Φ_2 :

$$\Phi_1(x, t, \lambda_{\pm}) = \Phi_2(x, t, \lambda_{\pm})s(\lambda_{\pm}), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1. \quad (4.20)$$

Відповідно, $\tilde{\Phi}_1$ і $\tilde{\Phi}_2$ пов'язані співвідношенням

$$D_1^{-1}(\lambda_{\pm})\tilde{\Phi}_1(x, t, \lambda_{\pm}) = D_2^{-1}(\lambda_{\pm})\tilde{\Phi}_2(x, t, \lambda_{\pm})e^{-Q_2(x, t, \lambda_{\pm})}s(\lambda_{\pm})e^{Q_1(x, t, \lambda_{\pm})}, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1. \quad (4.21)$$

Ввівши

$$\tilde{s}(x, t, \lambda_{\pm}) := e^{-Q_2(x, t, \lambda_{\pm})}s(\lambda_{\pm})e^{Q_1(x, t, \lambda_{\pm})} \quad (4.22)$$

маємо

$$(D_1^{-1}\tilde{\Phi}_1)(x, t, \lambda_{\pm}) = (D_2^{-1}\tilde{\Phi}_2)(x, t, \lambda_{\pm})\tilde{s}(x, t, \lambda_{\pm}), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1. \quad (4.23)$$

Зауважимо, що $\det s(\lambda_{\pm}) = 1$ і що елементи матриці розсіювання (коефіцієнти розсіювання) s_{ij} можна виразити таким чином:

$$s_{11} = \det(\Phi_1^{(1)}, \Phi_2^{(2)}), \quad (4.24a)$$

$$s_{12} = \det(\Phi_1^{(2)}, \Phi_2^{(2)}), \quad (4.24б)$$

$$s_{21} = \det(\Phi_2^{(1)}, \Phi_1^{(1)}), \quad (4.24в)$$

$$s_{22} = \det(\Phi_2^{(1)}, \Phi_1^{(2)}). \quad (4.24г)$$

Відповідно,

$$\tilde{s}_{1j} = \det((D_1^{-1}\tilde{\Phi}_1)^{(j)}, (D_2^{-1}\tilde{\Phi}_2)^{(2)}), \quad (4.25a)$$

$$\tilde{s}_{2j} = \det((D_2^{-1}\tilde{\Phi}_2)^{(1)}, (D_1^{-1}\tilde{\Phi}_1)^{(j)}). \quad (4.25б)$$

З (4.24a) випливає, що $s_{11}(\lambda)$ можна аналітично продовжити на $\mathbb{C} \setminus \Sigma_2$ і визначити на верхній і нижній сторонах $\dot{\Sigma}_2$. З іншого боку, оскільки $\Phi_1^{(1)}$ аналітична в $\mathbb{C} \setminus \Sigma_1$ і $\Phi_2^{(1)}$ визначена на верхній і нижній сторонах Σ_2 , то $s_{21}(\lambda)$ можна продовжити за допомогою (4.24в) на нижню і верхню сторони $\dot{\Sigma}_2$. Звідси випливає, що співвідношення (4.20) та (4.21) стосовно першого стовпчика виконуються також і на Σ_0 , а саме,

$$\Phi_1^{(1)}(x, t, \lambda_{\pm}) = s_{11}(\lambda_{\pm})\Phi_2^{(1)}(x, t, \lambda_{\pm}) + s_{21}(\lambda_{\pm})\Phi_2^{(2)}(x, t, \lambda_{\pm}), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_0, \quad (4.26)$$

і, відповідно,

$$(D_1^{-1}\tilde{\Phi}_1^{(1)})(\lambda_{\pm}) = \tilde{s}_{11}(\lambda_{\pm})(D_2^{-1}\tilde{\Phi}_2^{(1)})(\lambda_{\pm}) + \tilde{s}_{21}(\lambda_{\pm})(D_2^{-1}\tilde{\Phi}_2^{(2)})(\lambda_{\pm}), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_0. \quad (4.27)$$

4.2.5 Симетрії

Тепер дослідимо співвідношення симетрії, яким задовольняють власні функції та коефіцієнти розсіювання. Для спрощення позначень будемо опускати залежність від x і t (наприклад, $U(\lambda) \equiv U(x, t, \lambda)$).

Перша симетрія: $\lambda \longleftrightarrow -\lambda$.

Твердження 4.2.3. *Мають місце такі симетрії:*

$$\Phi_1^{(1)}(\lambda) = -\sigma_3\Phi_1^{(1)}(-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_1, \quad (4.28a)$$

$$\Phi_2^{(2)}(\lambda) = \sigma_3\Phi_2^{(2)}(-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_2. \quad (4.28b)$$

Доведення. Зауважимо, що $\sigma_3U(\lambda)\sigma_3 \equiv U(-\lambda)$ і $\sigma_3V(\lambda)\sigma_3 \equiv V(-\lambda)$. Отже, $\sigma_3\Phi_j^{(j)}(-\lambda)$ є розв'язком рівняння (2.4) одночасно з $\Phi_j^{(j)}(\lambda)$. Порівнюючи їхню асимптотичну поведінку при $x \rightarrow (-1)^j\infty$ і використовуючи (4.7a), отримуємо співвідношення (4.28). \square

Висновок 4.2.4. *Маємо*

1.

$$s_{11}(-\lambda) = s_{11}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_2. \quad (4.29)$$

2.

$$\tilde{\Phi}_1^{(1)}(\lambda) = \sigma_3\tilde{\Phi}_1^{(1)}(-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_1, \quad (4.30a)$$

$$\tilde{\Phi}_2^{(2)}(\lambda) = -\sigma_3\tilde{\Phi}_2^{(2)}(-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_2. \quad (4.30b)$$

3.

$$(D_1^{-1}\tilde{\Phi}_1^{(1)})(-\lambda) = -\sigma_3(D_1^{-1}\tilde{\Phi}_1^{(1)})(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_1, \quad (4.31a)$$

$$(D_2^{-1}\tilde{\Phi}_2^{(2)})(-\lambda) = \sigma_3(D_2^{-1}\tilde{\Phi}_2^{(2)})(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_2. \quad (4.31b)$$

Доведення. 1. Підставимо (4.28) у (4.24а).

2. В силу (4.7а) маємо $D_j^{-1}(-\lambda) = -\sigma_3 D_j^{-1}(\lambda) \sigma_3$ і $Q_j(-\lambda) = Q_j(\lambda)$. Комбінуючи це з (4.28) і використовуючи зв'язок між Φ_j і $\tilde{\Phi}_j$, отримуємо (4.30).

3. Комбінуємо $D_j^{-1}(-\lambda) = -\sigma_3 D_j^{-1}(\lambda) \sigma_3$ та (4.30). □

Твердження 4.2.5. *Має місце така симетрія:*

$$\Phi_j(\lambda_+) = -\sigma_3 \Phi_j(-\lambda_+) \sigma_3, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_j. \quad (4.32)$$

Доведення. Оскільки $\sigma_3 U(\lambda) \sigma_3 \equiv U(-\lambda)$ і $\sigma_3 V(\lambda) \sigma_3 \equiv V(-\lambda)$ та U і V не мають стрибків вздовж Σ_j , маємо, що якщо $\Phi_j(\lambda_+)$ розв'язує (2.4), то і $\sigma_3 \Phi_j(-\lambda_+)$ розв'язує (2.4). Порівнюючи їхню асимптотичну поведінку при $x \rightarrow (-1)^j \infty$ і використовуючи (4.7а), отримуємо симетрію (4.32). □

Висновок 4.2.6. *Маємо*

1.

$$s(\lambda_+) = \sigma_3 s(-\lambda_+) \sigma_3, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1 \quad (4.33)$$

2.

$$\tilde{\Phi}_j(\lambda_+) = \sigma_3 \tilde{\Phi}_j(-\lambda_+) \sigma_3, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_j. \quad (4.34)$$

3.

$$(D_j^{-1} \tilde{\Phi}_j)((-\lambda)_-) = -\sigma_3 (D_j^{-1} \tilde{\Phi}_j)(\lambda_+) \sigma_3, \quad \lambda_+ \in \dot{\Sigma}_j. \quad (4.35)$$

Доведення. 1. Підставляємо (4.32) у (4.20).

2. З (4.7а) випливає $D_j^{-1}(-\lambda_+) = -\sigma_3 D_j^{-1}(\lambda_+) \sigma_3$ і $Q_j(-\lambda_+) = Q_j(\lambda_+)$. Поєднавши це з (4.32) і використовуючи зв'язок між Φ_j і $\tilde{\Phi}_j$, отримуємо (4.34).

3. Комбінуємо $D_j^{-1}(-\lambda_+) = -\sigma_3 D_j^{-1}(\lambda_+) \sigma_3$ та (4.34).

□

Друга симетрія: $\lambda \longleftrightarrow -\bar{\lambda}$.

Твердження 4.2.7. *Має місце така симетрія:*

$$\Phi_j(\lambda_+) = \sigma_3 \Phi_j((-\lambda)_+) \sigma_2, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_j. \quad (4.36)$$

Доведення. Оскільки U і V є однозначними функціями від λ , маємо $\sigma_3 U(\lambda_+) \sigma_3 \equiv U((-\lambda)_+)$ і $\sigma_3 V(\lambda_+) \sigma_3 \equiv V((-\lambda)_+)$ для $\lambda \in \Sigma_j$. Отже, $\sigma_3 \Phi_j((-\lambda)_+)$ є розв'язком (2.4) одночасно з $\Phi_j(\lambda_+)$. Порівнюючи їхню асимптотичну поведінку при $x \rightarrow (-1)^j \infty$ і використовуючи (4.76) та рівність $\sqrt{\frac{1}{iA_j k_j(\lambda_+)} - 1} \sqrt{-\frac{1}{iA_j k_j(\lambda_+)} - 1} = -\frac{\lambda_+}{k_j(\lambda_+)}$ для $\lambda_+ \in \dot{\Sigma}_j$, отримуємо (4.36). □

Висновок 4.2.8. *Маємо*

1.

$$s(\lambda_+) = \sigma_2 s((-\lambda)_+) \sigma_2, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1. \quad (4.37)$$

2.

$$s(\lambda_+) = \sigma_1 s(\lambda_-) \sigma_1, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1. \quad (4.38)$$

3.

$$\tilde{\Phi}_j(\lambda_+) = \sigma_2 \tilde{\Phi}_j((-\lambda)_+) \sigma_2, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_j. \quad (4.39)$$

4.

$$(D_j^{-1} \tilde{\Phi}_j)((-\lambda)_+) = \sigma_3 (D_j^{-1} \tilde{\Phi}_j)(\lambda_+) \sigma_2, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_j. \quad (4.40)$$

Доведення. 1. Підставляємо (4.36) в (4.20).

2. Об'єднуємо (4.37) з (4.33).

3. Оскільки $k_j(\lambda_+) \in \mathbb{R}$ і (4.76) і $\sqrt{\frac{1}{iA_j k_j(\lambda_+)} - 1} \sqrt{-\frac{1}{iA_j k_j(\lambda_+)} - 1} = -\frac{\lambda_+}{k_j(\lambda_+)}$, маємо $D_j(\lambda_+) \sigma_3 D_j^{-1}((-\lambda)_+) = \sigma_2$ і $Q_j((-\lambda)_+) = -Q_j(\lambda_+)$ для $\lambda \in \dot{\Sigma}_j$. Об'єднавши це з (4.36) і використовуючи зв'язок між Φ_j і $\tilde{\Phi}_j$, отримуємо (4.39).

4. Комбінуємо $D_j(\lambda_+)\sigma_3 D_j^{-1}((-\lambda)_+) = \sigma_2$ та (4.39). □

Третя симетрія: $\lambda \longleftrightarrow \bar{\lambda}$.

Твердження 4.2.9. *Мають місце такі симетрії:*

$$\overline{\Phi_j^{(j)}(\bar{\lambda})} = -\Phi_j^{(j)}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_j. \quad (4.41)$$

Доведення. Оскільки $\overline{U(\bar{\lambda})} \equiv U(\lambda)$ і $\overline{V(\bar{\lambda})} \equiv V(\lambda)$, то $\overline{\Phi_j^{(j)}(\bar{\lambda})}$ розв'язує (2.4) разом з $\Phi_j^{(j)}(\lambda)$. Отже, порівнюючи їхню асимптотичну поведінку при $x \rightarrow (-1)^j \infty$ і використовуючи (4.7в) та рівність $\sqrt{\frac{1}{iA_j k_j(\bar{\lambda})} - 1} = -\sqrt{\frac{1}{iA_j k_j(\lambda)} - 1}$, отримуємо симетрії (4.41). □

Висновок 4.2.10. *Маємо*

1.

$$\overline{s_{11}(\bar{\lambda})} = s_{11}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_2. \quad (4.42)$$

2.

$$\overline{\tilde{\Phi}_j^{(j)}(\bar{\lambda})} = \tilde{\Phi}_j^{(j)}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_j. \quad (4.43)$$

3.

$$\overline{(D_j^{-1} \tilde{\Phi}_j^{(j)})(\bar{\lambda})} = -(D_j^{-1} \tilde{\Phi}_j^{(j)})(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_j. \quad (4.44)$$

Доведення. 1. Підставимо (4.41) у (4.24а).

2. З (4.7в) та $\sqrt{\frac{1}{iA_j k_j(\bar{\lambda})} - 1} = -\sqrt{\frac{1}{iA_j k_j(\lambda)} - 1}$ випливає $\overline{D_j^{-1}(\bar{\lambda})} = -D_j^{-1}(\lambda)$ і $\overline{Q_j(\bar{\lambda})} = Q_j(\lambda)$. Комбінуючи це з (4.41) і використовуючи зв'язок між Φ_j і $\tilde{\Phi}_j$, отримуємо (4.43).

3. Комбінуємо $\overline{D_j^{-1}(\bar{\lambda})} = -D_j^{-1}(\lambda)$ та (4.43). □

Твердження 4.2.11. *Має місце така симетрія:*

$$\overline{\Phi_j(\bar{\lambda}_+)} = -\Phi_j(\lambda_+), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_j. \quad (4.45)$$

Доведення. Як і раніше, оскільки $\overline{U(\bar{\lambda})} \equiv U(\lambda)$ і $\overline{V(\bar{\lambda})} \equiv V(\lambda)$ та U і V не мають стрибків вздовж Σ_j , маємо $\overline{U(\lambda_-)} \equiv U(\lambda_+)$ та $\overline{V(\lambda_-)} \equiv V(\lambda_+)$. Звідси випливає, що якщо $\Phi_j(\lambda_+)$ розв'язує (2.4), то і $\overline{\Phi_j(\bar{\lambda}_+)}$ розв'язує (2.4). Порівнюючи їхню асимптотичну поведінку при $x \rightarrow (-1)^j \infty$ і використовуючи (4.7в) та той факт, що $\sqrt{\frac{1}{iA_j k_j(\bar{\lambda})} - 1} = -\sqrt{\frac{1}{iA_j k_j(\lambda)} - 1}$, отримуємо (4.45). \square

Висновок 4.2.12. *Маємо*

1.

$$\overline{s(\bar{\lambda}_+)} = s(\lambda_+), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1. \quad (4.46)$$

2.

$$\overline{\tilde{\Phi}_j(\bar{\lambda}_+)} = \tilde{\Phi}_j(\lambda_+), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_j. \quad (4.47)$$

3.

$$\overline{(D_j^{-1} \tilde{\Phi}_j)(\bar{\lambda}_+)} = -(D_j^{-1} \tilde{\Phi}_j)(\lambda_+), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_j. \quad (4.48)$$

Доведення. 1. Підставимо (4.45) у (4.20).

2. З (4.7в) та $\sqrt{\frac{1}{iA_j k_j(\bar{\lambda})} - 1} = -\sqrt{\frac{1}{iA_j k_j(\lambda)} - 1}$ випливає $\overline{D_j^{-1}(\lambda_-)} = -D_j^{-1}(\lambda_+)$ і $\overline{Q_j(\lambda_-)} = Q_j(\lambda_+)$ для $\lambda \in \dot{\Sigma}_j$. Комбінуючи це з (4.45) і використовуючи зв'язок між Φ_j і $\tilde{\Phi}_j$, отримуємо (4.47).

3. Комбінуюємо $\overline{D_j^{-1}(\lambda_-)} = -D_j^{-1}(\lambda_+)$ і $\overline{Q_j(\lambda_-)} = Q_j(\lambda_+)$ та (4.47). \square

Четверта симетрія $\lambda_+ \longleftrightarrow \lambda_+$.

Твердження 4.2.13. *Має місце така симетрія:*

$$\overline{\Phi_j(\lambda_+)} = i\Phi_j(\lambda_+)\sigma_1, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_j. \quad (4.49)$$

Доведення. З того, що $\overline{U(\lambda_+)} \equiv U(\lambda_+)$ і $\overline{V(\lambda_+)} \equiv V(\lambda_+)$ для $\lambda \in \Sigma_j$, випливає, що якщо $\Phi_j(\lambda_+)$ розв'язує (2.4), то $\overline{\Phi_j(\lambda_+)}$ також розв'язує (2.4).

Порівнюючи їхню асимптотичну поведінку при $x \rightarrow (-1)^j \infty$ і використовуючи (4.7г) та рівності $\sqrt{-\frac{1}{iA_j k_j(\lambda_+)} - 1} \cdot \frac{\lambda_+ A_j}{1+iA_j k_j(\lambda_+)} = -i\sqrt{\frac{1}{iA_j k_j(\lambda_+)} - 1}$ і $\sqrt{\frac{1}{iA_j k_j(\lambda_+)} - 1} \cdot \frac{\lambda_+ A_j}{1-iA_j k_j(\lambda_+)} = i\sqrt{-\frac{1}{iA_j k_j(\lambda_+)} - 1}$ для $\lambda \in \dot{\Sigma}_j$, отримуємо (4.49). \square

Висновок 4.2.14. Маємо

1. $s(\lambda_+) = \sigma_1 \overline{s(\lambda_+)} \sigma_1$, $\lambda \in \dot{\Sigma}_1$, що у термінах матричних елементів має такий вигляд:

$$s_{11}(\lambda_+) = \overline{s_{22}(\lambda_+)}, \quad (4.50a)$$

$$s_{12}(\lambda_+) = \overline{s_{21}(\lambda_+)}. \quad (4.50б)$$

2. $|s_{11}(\lambda_+)|^2 - |s_{21}(\lambda_+)|^2 = 1$ for $\lambda \in \dot{\Sigma}_1$.

3. $\left| \frac{s_{21}(\lambda_+)}{s_{11}(\lambda_+)} \right| \leq 1$ for $\lambda \in \dot{\Sigma}_1$.

Зауважимо, що $\left| \frac{s_{21}(\lambda_+)}{s_{11}(\lambda_+)} \right| = 1$ при $\lambda \in \dot{\Sigma}_1$ тоді і тільки тоді, коли $s_{11}(\lambda_+) = \infty$.

4.

$$s_{11}(\lambda_-) = \overline{s_{22}(\lambda_-)}, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1, \quad (4.51a)$$

$$s_{12}(\lambda_-) = \overline{s_{21}(\lambda_-)}, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1. \quad (4.51б)$$

5.

$$\Phi_j(\lambda_+) = i\Phi_j(\lambda_-)\sigma_1, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_j. \quad (4.52)$$

6.

$$\Phi_1^{(1)}(\lambda_+) = i\Phi_1^{(2)}(\lambda_-), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1, \quad (4.53a)$$

$$\Phi_2^{(2)}(\lambda_+) = i\Phi_2^{(1)}(\lambda_-), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_2. \quad (4.53б)$$

7.

$$s_{11}(\lambda_+) = s_{22}(\lambda_-), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1, \quad (4.54a)$$

$$s_{11}(\lambda_+) = -is_{21}(\lambda_-), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_0, \quad (4.54б)$$

$$s_{11}(\lambda_-) = is_{21}(\lambda_+), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_0. \quad (4.54в)$$

8.

$$\left| \frac{s_{21}(\lambda_+)}{s_{11}(\lambda_+)} \right| = 1, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_0.$$

9.

$$\overline{\tilde{\Phi}_j(\lambda_+)} = \sigma_1 \tilde{\Phi}_j(\lambda_+) \sigma_1, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_j. \quad (4.55)$$

10.

$$\tilde{\Phi}_1^{(1)}(\lambda_-) = \sigma_1 \tilde{\Phi}_1^{(2)}(\lambda_+), \quad \lambda \in \Sigma_1, \quad (4.56a)$$

$$\tilde{\Phi}_2^{(2)}(\lambda_-) = \sigma_1 \tilde{\Phi}_2^{(1)}(\lambda_+), \quad \lambda \in \Sigma_2. \quad (4.56b)$$

11.

$$\overline{(D_j^{-1} \tilde{\Phi}_j)(\lambda_+)} = i(D_j^{-1} \tilde{\Phi}_j)(\lambda_+) \sigma_1, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_j. \quad (4.57)$$

12.

$$D_j^{-1}(\lambda_-) \tilde{\Phi}_j^{(j)}(\lambda_-) = (-i D_j^{-1}(\lambda_+) \tilde{\Phi}_j(\lambda_+) \sigma_1)^{(j)}, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1, \quad (4.58a)$$

$$D_2^{-1}(\lambda_-) \tilde{\Phi}_2^{(2)}(\lambda_-) = (-i D_2^{-1}(\lambda_+) \tilde{\Phi}_2(\lambda_+) \sigma_1)^{(2)}, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_0, \quad (4.58b)$$

$$D_1^{-1}(\lambda_-) \tilde{\Phi}_1^{(1)}(\lambda_-) = D_1^{-1}(\lambda_+) \tilde{\Phi}_1^{(1)}(\lambda_+), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_0. \quad (4.58c)$$

13.

$$(D_1^{-1} \tilde{\Phi}_1)((-\lambda)_+) = \sigma_3 \overline{(D_1^{-1} \tilde{\Phi}_1)(\lambda_+)}, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1, \quad (4.59a)$$

$$(D_2^{-1} \tilde{\Phi}_2)((-\lambda)_+) = -\sigma_3 \overline{(D_2^{-1} \tilde{\Phi}_2)(\lambda_+)}, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_2. \quad (4.59b)$$

14.

$$s_{11}((-\lambda)_+) = \overline{s_{11}(\lambda_+)}, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1. \quad (4.60)$$

Доведення. 1. Підставляємо (4.49) у (4.20).

2. Випливає з того, що $\det s(\lambda_{\pm}) = 1$ для всіх $\lambda \in \Sigma_1$ і (4.50).

3. Розділивши попередню рівність на $|s_{11}(\lambda_+)|^2$, отримуємо $1 - \left| \frac{s_{21}(\lambda_+)}{s_{11}(\lambda_+)} \right|^2 = \left| \frac{1}{s_{11}(\lambda_+)} \right|^2 \geq 0$. Звідси $\left| \frac{s_{21}(\lambda_+)}{s_{11}(\lambda_+)} \right| \leq 1$.

4. Комбінуємо (4.50) та (4.46).

5. Комбінуємо (4.49) та (4.45).
6. Записуємо (4.52) по стовпчиках.
7. Підставивши (4.52) у (4.24а), отримуємо (4.54). Зауважимо, що при доведенні (4.54б) та (4.54в) використано той факт, що $\Phi_1^{(1)}$ аналітична на Σ_0 .
8. Використовуючи попередній результат для першої рівності та (4.42) для другої, маємо $\left| \frac{s_{21}(\lambda_+)}{s_{11}(\lambda_+)} \right| = \left| \frac{-is_{11}(\lambda_-)}{s_{11}(\lambda_+)} \right| = \left| \frac{\overline{s_{11}(\lambda_+)}}{s_{11}(\lambda_+)} \right| = 1$.
9. Оскільки $\sqrt{-\frac{1}{iA_j k_j(\lambda_+)} - 1} \cdot \frac{\lambda_+ A_j}{1+iA_j k_j(\lambda_+)} = -i \sqrt{\frac{1}{iA_j k_j(\lambda_+)} - 1} i \sqrt{\frac{1}{iA_j k_j(\lambda_+)} - 1} \cdot \frac{\lambda_+ A_j}{1-iA_j k_j(\lambda_+)} = i \sqrt{-\frac{1}{iA_j k_j(\lambda_+)} - 1}$, то $D_j^{-1}(\lambda_+) = iD_j^{-1}(\lambda_+)\sigma_1$ і $\overline{D_j(\lambda_+)} = -i\sigma_1 D_j(\lambda_+)$. Тоді з (4.7г) отримуємо $\overline{Q_j(\lambda_+)} = -Q_j(\lambda_+)$ для $\lambda \in \dot{\Sigma}_j$. Об'єднавши це з (4.49) і використовуючи зв'язок між Φ_j і $\tilde{\Phi}_j$, отримуємо (4.55).
10. Комбінуємо (4.55) і (4.47).
11. Комбінуємо $\overline{D_j^{-1}(\lambda_+)} = iD_j^{-1}(\lambda_+)\sigma_1$ та (4.55).
12. Використовуємо (4.57) у поєднанні з (4.48) для перших двох рівностей і той факт, що $k_1(\lambda)$ є аналітичною на $\dot{\Sigma}_0$ для останньої рівності.
13. Комбінуємо (4.57) та (4.40).
14. З (4.37) випливає, що $s_{22}(\lambda_+) = s_{11}((-\lambda)_+)$. Комбінуємо це з (4.50а).

□

4.2.6 Граничні значення власних функцій та коефіцієнтів розсіювання знизу та зверху розрізу

Нагадаємо, що $k_j(\lambda)$ аналітична у області $\mathbb{C} \setminus \Sigma_j$ і розривна на Σ_j .

Позначення. Введемо такі позначення (для $\lambda \in \Sigma_j$):

$$k_j^+(\lambda) := k_j(\lambda_+) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} k_j(\lambda + i\epsilon), \quad k_j^-(\lambda) := k_j(\lambda_-) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} k_j(\lambda - i\epsilon).$$

Аналогічно,

$$\tilde{\Phi}_1^{(1)+}(\lambda) := \tilde{\Phi}_1^{(1)}(\lambda_+) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \tilde{\Phi}_1^{(1)}(\lambda + i\epsilon), \quad \tilde{\Phi}_1^{(1)-}(\lambda) := \tilde{\Phi}_1^{(1)}(\lambda_-) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \tilde{\Phi}_1^{(1)}(\lambda - i\epsilon).$$

Зауважимо, що

$$k_j^-(\lambda) = -k_j^+(\lambda), \quad \lambda \in \Sigma_1, \quad (4.61a)$$

$$k_1^-(\lambda) = k_1^+(\lambda) = k_1(\lambda), \quad \lambda \in \Sigma_0, \quad (4.61б)$$

$$k_2^-(\lambda) = -k_2^+(\lambda), \quad \lambda \in \Sigma_0. \quad (4.61в)$$

Комбінуючи (4.55) та (4.47), маємо

$$\tilde{\Phi}_1^{(1)-}(\lambda) = \sigma_1 \tilde{\Phi}_1^{(2)+}(\lambda), \quad \lambda \in \Sigma_1, \quad (4.62a)$$

$$\tilde{\Phi}_2^{(2)-}(\lambda) = \sigma_1 \tilde{\Phi}_2^{(1)+}(\lambda), \quad \lambda \in \Sigma_2. \quad (4.62б)$$

4.2.7 Дискретний спектр і нулі коефіцієнтів розсіювання

Помноживши перше рівняння з (2.4) на $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, отримуємо спектральну задачу для оператора Дірака з вагою:

$$\frac{2}{m} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Phi_x + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Phi \right) = \lambda \Phi, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (4.63)$$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow (-1)^j \infty} m(x, t) = A_j \neq 0$, цей оператор можна розглядати як самоспряжений оператор у $L^2(-\infty, \infty)$ і, відповідно, його спектр є дійсним.

Зауважимо, що для $\lambda \in \dot{\Sigma}_1$ обидві функції $k_j(\lambda)$, $j = 1, 2$ приймають дійсні значення, а отже, власні функції Φ_j обмежені, але їхній квадрат не інтегровний поблизу $(-1)^j \infty$. Оскільки вони пов'язані матрицею, незалежною від x і t , то Φ_j обмежені і їхній квадрат не інтегровний в околі $\pm \infty$. Отже, $\dot{\Sigma}_1$ утворюють неперервний спектр.

Для $\lambda \in (-1/A_2, 1/A_2)$, функція $\Phi_1^{(1)}$ спадає (експоненціально швидко) при $x \rightarrow -\infty$, а функція $\Phi_2^{(2)}$ спадає (експоненціально швидко) при $x \rightarrow +\infty$; отже, власні значення в $(-1/A_2, 1/A_2)$ збігаються з нулями $s_{11}(\lambda) = \det(\Phi_1^{(1)}, \Phi_2^{(2)})$.

Зауважимо, що оскільки $|s_{11}(\lambda_+)|^2 - |s_{21}(\lambda_+)|^2 = 1$ для $\lambda \in \dot{\Sigma}_1$ (див. наслідок 4.2.14), то $s_{11}(\lambda_+) \neq 0$ для $\lambda \in \dot{\Sigma}_1$.

Покажемо, що $s_{11}(\lambda_+) \neq 0$ для $\lambda \in \dot{\Sigma}_0$. Дійсно, якщо $s_{11}(\lambda_+) = 0$ для якогось $\lambda \in \dot{\Sigma}_0$, то з властивості $|\frac{s_{21}}{s_{11}}(\lambda_{\pm})| = 1$ для $\lambda \in \dot{\Sigma}_0$ (див. наслідок 4.2.14) випливає, що і $s_{21}(\lambda_+) = 0$ для цього λ . Але $s_{11}(\lambda_{0+}) = 0$ означає, що $\Phi_1^{(1)}(\lambda_{0+})$ і $\Phi_2^{(2)}(\lambda_{0+})$ залежні. Аналогічно, $s_{21}(\lambda_{0+}) = 0$ означає, що $\Phi_1^{(1)}(\lambda_{0+})$ і $\Phi_2^{(1)}(\lambda_{0+})$ є залежними. Відповідно, у цьому випадку $\Phi_2^{(1)}(\lambda_{0+})$ і $\Phi_2^{(2)}(\lambda_{0+})$ виявляються залежними, що суперечить тому, що $\det \Phi_{0,2} \equiv 1$ (останнє випливає з оцінки $\det \Phi_{0,2}(x, t, \lambda)$ при $x \rightarrow \infty$ і використання того факту, що визначник матриці, складеної з двох векторних розв'язків (4.63) не залежить від x).

Припущення. Будемо вважати, що $s_{11}(\lambda)$ має скінченну кількість нулів на $\mathbb{R} \setminus \Sigma_2$. Оскільки s_{11} аналітична на $\mathbb{C} \setminus \Sigma_2$, то з теореми єдиності випливає, що достатньою умовою для цього є $s_{11}(\pm \frac{1}{A_2}) \neq 0$.

Нехай $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ - нулі $s_{11}(\lambda)$. Для таких λ_k маємо

$$\Phi_1^{(1)}(\lambda_k) = b_k \Phi_2^{(2)}(\lambda_k), \quad b_k := b(\lambda_k).$$

Твердження 4.2.15. *Нулі $s_{11}(\lambda)$ прості.*

Доведення. Позначимо через $'$ похідну відносно λ . Використовуючи означення $s_{11}(\lambda)$, маємо

$$s'_{11}(\lambda) = \det(\Phi_1^{(1)}, \Phi_2^{(2)})'(\lambda) = \det((\Phi')_1^{(1)}, \Phi_2^{(2)})(\lambda) + \det(\Phi_1^{(1)}, (\Phi')_2^{(2)})(\lambda).$$

Оскільки $\Phi_j^{(j)}$ розв'язує перше рівняння з (2.4), маємо

$$(\Phi')_{jx}^{(j)} = U(\Phi')_j^{(j)} + m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Phi_j^{(j)},$$

і, використовуючи той факт, що $\det(U(\Phi')_1^{(1)}, \Phi_2^{(2)}) = -\det((\Phi')_1^{(1)}, U\Phi_2^{(2)})$, маємо

$$\frac{d}{dx} \det((\Phi')_1^{(1)}, \Phi_2^{(2)}) = \det \left(\begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix} \Phi_1^{(1)}, \Phi_2^{(2)} \right),$$

і

$$\frac{d}{dx} \det(\Phi_1^{(1)}, (\Phi')_2^{(2)}) = -\det\left(\begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix} \Phi_2^{(2)}, \Phi_1^{(1)}\right).$$

Обчисливши при $\lambda = \lambda_k$ і використовуючи $\Phi_1^{(1)}(\lambda_k) = b_k \Phi_2^{(2)}(\lambda_k)$, отримуємо

$$\frac{d}{dx} \det((\Phi')_1^{(1)}, \Phi_2^{(2)})(\lambda_k) = b_k m \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Phi_2^{(2)}(\lambda_k), \Phi_2^{(2)}(\lambda_k)\right),$$

$$\frac{d}{dx} \det(\Phi_1^{(1)}, (\Phi')_2^{(2)})(\lambda_k) = -b_k m \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Phi_2^{(2)}(\lambda_k), \Phi_2^{(2)}(\lambda_k)\right).$$

Використовуючи симетрію (4.41) і враховуючи, що $\lambda_k \in \mathbb{R}$, маємо

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Phi_2^{(2)}(\lambda_k), \Phi_2^{(2)}(\lambda_k)\right) = -(|(\Phi_2)_{22}|^2 + |(\Phi_2)_{12}|^2)(\lambda_k)$$

і тому

$$\frac{d}{dx} \det((\Phi')_1^{(1)}, \Phi_2^{(2)})(\lambda_k) = b_k \int_x^\infty m(|(\Phi_2)_{22}|^2 + |(\Phi_2)_{12}|^2) d\tau,$$

$$\frac{d}{dx} \det(\Phi_1^{(1)}, (\Phi')_2^{(2)})(\lambda_k) = b_k \int_{-\infty}^x m(|(\Phi_2)_{22}|^2 + |(\Phi_2)_{12}|^2) dx.$$

Звідси випливає, що

$$s'_{11}(\lambda_k) = b_k \int_{-\infty}^\infty m(|(\Phi_2)_{22}|^2 + |(\Phi_2)_{12}|^2) dx,$$

і тому $s'_{11}(\lambda_k) \neq 0$.

□

Зауважимо, що за симетрією (4.29), якщо $s_{11}(\lambda_k) = 0$, то $s_{11}(-\lambda_k) = 0$ також. Оскільки, згідно з твердженням 4.2.15, всі нулі s_{11} є простими, звідси випливає, що $s_{11}(0) \neq 0$. Цей факт також буде обговорюватись у підрозділі 4.3.2.

4.2.8 Поведінка у точках розгалуження

Зауважимо, що $k_j(\pm \frac{1}{A_j}) = 0$.

Твердження 4.2.16. $\tilde{\Phi}_j(x, t, \lambda)$ має таку поведінку у точках розгалуження:

$$\tilde{\Phi}_j(x, t, \lambda) = \frac{i\alpha_j(x, t)}{\omega_j^+(\lambda)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_j(x, t) & b_j(x, t) \\ b_j(x, t) & a_j(x, t) \end{pmatrix} + O(\sqrt{\lambda - \frac{1}{A_j}}), \quad \lambda \rightarrow \frac{1}{A_j},$$

$$\tilde{\Phi}_j(x, t, \lambda) = \frac{\alpha_j(x, t)}{\omega_j^-(\lambda)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_j(x, t) & -b_j(x, t) \\ -b_j(x, t) & a_j(x, t) \end{pmatrix} + O(\sqrt{\lambda + \frac{1}{A_j}}), \quad \lambda \rightarrow -\frac{1}{A_j},$$

з деякими дійснозначеннями функціями $\alpha_j(x, t)$, $a_j(x, t)$, $ib_j(x, t)$, $j = 1, 2$.

Доведення. Нагадаємо, що $\omega_j^+(\lambda) = \sqrt{\lambda - \frac{1}{A_j}}$ з розрізом на $[\frac{1}{A_j}, \infty)$ і $\omega_j^+(0) = \frac{i}{\sqrt{A_j}}$, та $\omega_j^-(\lambda) = \sqrt{\lambda + \frac{1}{A_j}}$ з розрізом на $(-\infty, -\frac{1}{A_j}]$ та $\omega_j^-(0) = \frac{1}{\sqrt{A_j}}$.

Спочатку розглянемо поведінку власних функцій в околі $\frac{1}{A_j}$. Введемо $\tilde{\tilde{\Phi}}_j(x, t, \lambda)$ таку, що $\tilde{\Phi}_j(x, t, \lambda) = W^+ \tilde{\tilde{\Phi}}_j(x, t, \lambda)$, де $W^+ = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{\omega_j^+(\lambda)} \\ 1 & -\frac{i}{\omega_j^+(\lambda)} \end{pmatrix}$. Тоді

$\tilde{\tilde{\Phi}}_j(x, t, \lambda)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$\tilde{\tilde{\Phi}}_j(x, t, \lambda) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\omega_j^+(\lambda) & i\omega_j^+(\lambda) \end{pmatrix} + \int_{(-1)^{i\infty}}^x A^{-1} e^{\frac{i}{2}k_j(\lambda) \int_x^\xi m d\tau \sigma_3} \hat{U}_j A \tilde{\tilde{\Phi}}_j e^{-\frac{i}{2}k_j(\lambda) \int_x^\xi m d\tau \sigma_3} d\xi.$$

Ядро цього рівняння і, отже, $\tilde{\tilde{\Phi}}_j$ не має сингулярності у $\frac{1}{A_j}$. Звідси випливає, що

$$\tilde{\tilde{\Phi}}_j(x, t, \lambda) = \frac{i}{\omega_j^+(\lambda)} \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{c}}_j & \tilde{\tilde{d}}_j \\ -\tilde{\tilde{c}}_j & -\tilde{\tilde{d}}_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} + O\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{A_j}}\right), \quad \lambda \rightarrow \frac{1}{A_j}.$$

Використовуючи (4.47), отримуємо, що $\tilde{\tilde{c}}_j, \tilde{\tilde{d}}_j \in \mathbb{R}$ і $a_j, b_j, c_j, d_j \in \mathbb{R}$. Далі, використовуючи (4.55), отримуємо, що $\tilde{\tilde{c}}_j = \tilde{\tilde{d}}_j$ і $a_j = d_j, c_j = b_j$; таким чином,

$$\tilde{\Phi}_j(x, t, \lambda) = \frac{i\alpha_j(x, t)}{\omega_j^+(\lambda)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} + O\left(\sqrt{\lambda - \frac{1}{A_j}}\right), \quad \lambda \rightarrow \frac{1}{A_j}.$$

Щоб отримати аналогічний результат для $-\frac{1}{A_j}$, використаємо $W^- = \begin{pmatrix} \frac{i}{\omega_j^-(\lambda)} & 1 \\ \frac{i}{\omega_j^-(\lambda)} & -1 \end{pmatrix}$ замість W^+ ; це дає

$$\tilde{\Phi}_j(x, t, \lambda) = \frac{\beta_j(x, t)}{\omega_j^-(\lambda)} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{a}_j & \hat{b}_j \\ \hat{b}_j & \hat{a}_j \end{pmatrix} + O\left(\sqrt{\lambda + \frac{1}{A_j}}\right), \quad \lambda \rightarrow -\frac{1}{A_j}.$$

Нарешті, використовуючи (4.34) та (4.39), отримуємо $\alpha_j = -\beta_j$, $a_j = \hat{a}_j$ та $b_j = -\hat{b}_j$. \square

Обчислюючи $D_j^{-1}(\lambda)$ в околі $\pm \frac{1}{A_j}$, отримуємо

Твердження 4.2.17. $D_j^{-1}(\lambda)$ має таку поведінку в точках розгалуження:

$$D_j^{-1}(\lambda) = \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{(2A_j)^{\frac{1}{4}}\nu_j^+(\lambda)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{ie^{\frac{3\pi i}{4}}(2A_j)^{\frac{1}{4}}\nu_j^+(\lambda)}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + O((\lambda - \frac{1}{A_j})^{\frac{3}{4}}), \quad \lambda \rightarrow \frac{1}{A_j}$$

i

$$D_j^{-1}(\lambda) = \frac{i}{(2A_j)^{\frac{1}{4}}\nu_j^-(\lambda)} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{i(2A_j)^{\frac{1}{4}}\nu_j^-(\lambda)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + O((\lambda + \frac{1}{A_j})^{\frac{3}{4}}), \quad \lambda \rightarrow -\frac{1}{A_j}.$$

Тут $\nu_j^+(\lambda) = (\lambda - \frac{1}{A_j})^{\frac{1}{4}}$ з розрізом $(\frac{1}{A_j}, \infty)$ і $\nu_j^+(0) = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{(A_j)^{\frac{1}{4}}}$, і $\nu_j^-(\lambda) = (\lambda + \frac{1}{A_j})^{\frac{1}{4}}$ з розрізом $(-\infty, -\frac{1}{A_j})$ і $\nu_j^-(0) = \frac{1}{(A_j)^{\frac{1}{4}}}$ (зауважимо, що $(\nu_j^\pm(\lambda))^2 = \omega_j^\pm(\lambda)$).

4.3 Задачі Рімана–Гільберта

4.3.1 Задача РГ з параметрами (x, t)

Позначення. Позначимо

$$\rho(\lambda) := \frac{s_{21}(\lambda_+)}{s_{11}(\lambda_+)}, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1 \cup \dot{\Sigma}_0 \quad (4.64)$$

і зауважимо, що з наслідку 4.2.14 випливає, що

$$|\rho(\lambda)| \leq 1, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1, \quad (4.65a)$$

$$|\rho(\lambda)| = 1, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_0. \quad (4.65b)$$

Виходячи з аналітичних властивостей власних функцій та коефіцієнтів розсіювання, введемо матрично-значну функцію

$$M(x, t, \lambda) = \left(\frac{(D_1^{-1}\tilde{\Phi}_1^{(1)})(x, t, \lambda)}{s_{11}(\lambda)e^{p_1(x,t,\lambda)-p_2(x,t,\lambda)}}, (D_2^{-1}\tilde{\Phi}_2^{(2)})(x, t, \lambda) \right), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_2, \quad (4.66a)$$

мероморфну в області $\mathbb{C} \setminus \Sigma_2$, де p_j , $j = 1, 2$ визначені у (4.13б).

Зауважимо, що $D_j^{-1}(\lambda)\tilde{\Phi}_j(x, t, \lambda) = \Phi_j(x, t, \lambda)e^{Q_j(x,t,\lambda)}$ і тому $M(x, t, \lambda)$ можна записати у вигляді

$$M(x, t, \lambda) = \left(\frac{\Phi_1^{(1)}(x, t, \lambda)}{s_{11}(\lambda)}, \Phi_2^{(2)}(x, t, \lambda) \right) e^{p_2(x,t,\lambda)\sigma_3}. \quad (4.66б)$$

Звідси випливає, що $\det M \equiv 1$.

Матриця стрибка

Оскільки $(D_1^{-1}\tilde{\Phi}_1^{(1)})(\lambda)$ аналітична в $\mathbb{C} \setminus \Sigma_1$, то граничні значення M^\pm матриці M при наближенні λ до Σ_2 з \mathbb{C}^\pm можна виразити так:

$$M^\pm(x, t, \lambda) := M(x, t, \lambda_\pm) = \left(\frac{(D_1^{-1}\tilde{\Phi}_1^{(1)})(x, t, \lambda_\pm)}{s_{11}(\lambda_\pm)e^{p_1(x,t,\lambda_\pm)-p_2(x,t,\lambda_\pm)}}, (D_2^{-1}\tilde{\Phi}_2^{(2)})(x, t, \lambda_\pm) \right), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1,$$

$$M^\pm(x, t, \lambda) := M(x, t, \lambda_\pm) = \left(\frac{(D_1^{-1}\tilde{\Phi}_1^{(1)})(x, t, \lambda)}{s_{11}(\lambda_\pm)e^{p_1(x,t,\lambda)-p_2(x,t,\lambda_\pm)}}, (D_2^{-1}\tilde{\Phi}_2^{(2)})(x, t, \lambda_\pm) \right), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_0.$$

Твердження 4.3.1. M^+ і M^- пов'язані таким чином:

$$M^+(x, t, \lambda) = M^-(x, t, \lambda)J(x, t, \lambda), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1 \cup \dot{\Sigma}_0,$$

де

$$J(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-p_2(x,t,\lambda_+)} & 0 \\ 0 & e^{p_2(x,t,\lambda_+)} \end{pmatrix} J_0(\lambda) \begin{pmatrix} e^{p_2(x,t,\lambda_+)} & 0 \\ 0 & e^{-p_2(x,t,\lambda_+)} \end{pmatrix} \quad (4.67a)$$

i

$$J_0(\lambda) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 - |\rho(\lambda)|^2 & -\overline{\rho(\lambda)} \\ \rho(\lambda) & 1 \end{pmatrix}, & \lambda \in \dot{\Sigma}_1, \\ \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\rho(\lambda)} \\ \rho(\lambda) & 1 \end{pmatrix}, & \lambda \in \dot{\Sigma}_0. \end{cases} \quad (4.67б)$$

Доведення. (i) Нехай $\lambda \in \dot{\Sigma}_1$. Розглянемо (4.23) за стовпчиками. Переставивши стовпчики і використавши (4.58а) для $\lambda \in \dot{\Sigma}_1$, отримуємо

$$M^+(x, t, \lambda) = M^-(x, t, \lambda) i \begin{pmatrix} \frac{\tilde{s}_{21}(x, t, \lambda_+) \tilde{s}_{11}(x, t, \lambda_-)}{\tilde{s}_{11}(x, t, \lambda_+) \tilde{s}_{22}(x, t, \lambda_+)} & \frac{\tilde{s}_{11}(x, t, \lambda_-)}{\tilde{s}_{22}(x, t, \lambda_+)} \\ 1 - \frac{\tilde{s}_{21}(x, t, \lambda_+) \tilde{s}_{12}(x, t, \lambda_+)}{\tilde{s}_{11}(x, t, \lambda_+) \tilde{s}_{22}(x, t, \lambda_+)} & -\frac{\tilde{s}_{12}(x, t, \lambda_+)}{\tilde{s}_{22}(x, t, \lambda_+)} \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$

Оскільки $e^{p_1(x, t, \lambda_-) - p_2(x, t, \lambda_-)} = e^{p_2(x, t, \lambda_+) - p_1(x, t, \lambda_+)}$, з (4.46) та (4.50а) маємо $\frac{\tilde{s}_{11}(\lambda_-)}{\tilde{s}_{22}(\lambda_+)} = \frac{s_{11}(\lambda_-)}{s_{22}(\lambda_+)} = 1$. Більше того, використовуючи визначення (4.64) для $\rho(\lambda)$ та (4.50), маємо $\overline{\rho(\lambda)} = \frac{s_{12}(\lambda_+)}{s_{22}(\lambda_+)}$. Отже, з урахуванням (4.67б), умова стрибка (4.68) набуває вигляду (4.67а).

(ii) Нехай $\lambda \in \dot{\Sigma}_0$. Розглядаючи (4.27) за стовпчиками, переставляючи стовпчики та використовуючи (4.58б) і (4.58в) для $\lambda_+ \in \dot{\Sigma}_0$, отримуємо

$$M^+(x, t, \lambda) = M^-(x, t, \lambda) i \begin{pmatrix} \frac{\tilde{s}_{21}(x, t, \lambda_+)}{\tilde{s}_{11}(x, t, \lambda_+)} & 1 \\ 0 & -\frac{\tilde{s}_{11}(x, t, \lambda_+)}{\tilde{s}_{21}(x, t, \lambda_+)} \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

Тоді, використовуючи означення $\rho(\lambda)$ разом з (4.54в) та (4.54б), можна переписати умову стрибка (4.69) у вигляді (4.67а) з урахуванням (4.67б).

□

Зауваження 4.3.2. Функція $J_0(\lambda)$ (а отже, і J) є неперервною у $\pm \frac{1}{A_1}$, якщо $|\rho(\pm \frac{1}{A_1})| = 1$ і $\rho(\pm \frac{1}{A_1} + 0) = \rho(\pm \frac{1}{A_1} - 0)$, і розривною в іншому випадку.

Крім того,

$$\det J \equiv 1. \quad (4.70)$$

Умова нормування при $\lambda \rightarrow \infty$.

Твердження 4.3.3. *Поведінка $M(x, t, \lambda)$ за великих λ описується наступним чином:*

$$M(x, t, \lambda) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} + O(\frac{1}{\lambda}), & \lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \mathbb{C}^+, \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} + O(\frac{1}{\lambda}), & \lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \mathbb{C}^-. \end{cases} \quad (4.71)$$

Доведення. Розглянувши $D_j^{-1}(\lambda)$ (4.11) при $\lambda \rightarrow \infty$, отримуємо

$$D_j^{-1}(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} + O(\frac{1}{\lambda}), & \lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \mathbb{C}^+, \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} + O(\frac{1}{\lambda}), & \lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \mathbb{C}^-. \end{cases}$$

Нагадаємо, що для $\lambda \in \mathbb{C}^+$, $(\tilde{\Phi}_1^{(1)} \tilde{\Phi}_2^{(2)}) \rightarrow I$ при $\lambda \rightarrow \infty$ і, отже,

$$(D_1^{-1} \tilde{\Phi}_1^{(1)})(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} + O(\frac{1}{\lambda}), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

$$(D_2^{-1} \tilde{\Phi}_2^{(2)})(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} + O(\frac{1}{\lambda}), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Підставивши це у (4.25а), отримуємо $\tilde{s}_{11}(\lambda) = 1 + O(\frac{1}{\lambda})$, $\lambda \rightarrow \infty$.

Аналогічно, для $\lambda \in \mathbb{C}^-$ маємо

$$(D_1^{-1} \tilde{\Phi}_1^{(1)})(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + O(\frac{1}{\lambda}), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

$$(D_2^{-1} \tilde{\Phi}_2^{(2)})(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + O(\frac{1}{\lambda}), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

і $\tilde{s}_{11}(\lambda) = 1 + O(\frac{1}{\lambda})$, $\lambda \rightarrow \infty$, звідки випливає твердження. \square

Зауваження 4.3.4. Для того, щоб мати стандартне нормування при $\lambda \rightarrow \infty$, можна ввести

$$\tilde{M}(x, t, \lambda) := \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} M(x, t, \lambda), & \lambda \in \mathbb{C}^+, \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} M(x, t, \lambda) i \sigma_1, & \lambda \in \mathbb{C}^-. \end{cases} \quad (4.72)$$

Тоді маємо $\tilde{M} \rightarrow I$ при $\lambda \rightarrow \infty$. З іншого боку, \tilde{M} набуває додатковий стрибок при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Sigma_2$:

$$\tilde{M}^+(x, t, \lambda) = \tilde{M}^-(x, t, \lambda) \tilde{J}(x, t, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \cup_{j=1,2} \{A_j^{-1}\} \cup \{-A_j^{-1}\} \right\}$$

де

$$\tilde{J}(x, t, \lambda) = \begin{cases} \tilde{J}_{\Sigma_j}(x, t, \lambda), & \lambda \in \dot{\Sigma}_j, \quad j = 0, 1 \\ \tilde{J}_{\mathbb{R} \setminus \Sigma_2}(x, t, \lambda), & \lambda \in \mathbb{R} \setminus \Sigma_2, \end{cases}$$

а $\tilde{J}_{\Sigma_j}(x, t, \lambda) = e^{-p_2(x, t, \lambda_+) \sigma_3} J_0(\lambda) e^{p_2(x, t, \lambda_+) \sigma_3}$, $j = 0, 1$ і $\tilde{J}_{\mathbb{R} \setminus \Sigma_2}(x, t, \lambda) = -i \sigma_1$.

Зауваження 4.3.5. Використовуючи (4.25б), отримуємо $\tilde{s}_{21}(\lambda) = O(\frac{1}{\lambda})$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Зауважимо, що $\rho(\lambda) = \frac{s_{21}(\lambda_+)}{s_{11}(\lambda_+)} = \frac{\tilde{s}_{21}(\lambda_+)}{\tilde{s}_{11}(\lambda_+)} e^{-2p_2(x, t, \lambda_+)}$; оскільки $p_2(x, t, \lambda_+)$ приймає чисто уявні значення при $\lambda \in \Sigma_2$, то функція $e^{-2p_2(x, t, \lambda_+)}$ є обмеженою, і тому $\rho(\lambda) = O(\frac{1}{\lambda})$ коли $\lambda \rightarrow \infty$. Отже,

$$J_0(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow \pm\infty$$

і

$$J(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow \pm\infty.$$

Симетрії

З властивостей симетрій власних функцій та функцій розсіювання (4.31), (4.44), (4.35) та (4.48) випливає, що

$$M(-\lambda) = -\sigma_3 M(\lambda) \sigma_3, \quad \overline{M(\bar{\lambda})} = -M(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_2, \quad (4.73a)$$

$$M((-\lambda)_-) = -\sigma_3 M(\lambda_+) \sigma_3, \quad \overline{M(\lambda_-)} = -M(\lambda_+), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1. \quad (4.73б)$$

де $M(\lambda) \equiv M(x, t, \lambda)$.

Сингулярності у $\pm \frac{1}{A_j}$.

Нехай $A^{(ij)}$ позначає елементи 2×2 матриці $A = \begin{pmatrix} A^{(11)} & A^{(12)} \\ A^{(21)} & A^{(22)} \end{pmatrix}$.

Твердження 4.3.6. $M(x, t, \lambda)$ має таку поведінку в точках розгалуження:

$$M(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\nu_2^+(\lambda)} \begin{pmatrix} 0 & \Upsilon_2 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} + O(1), & \lambda \rightarrow \frac{1}{A_2}, \\ \frac{i}{\nu_2^-(\lambda)} \begin{pmatrix} 0 & \Upsilon_2 \\ 0 & -\Lambda_2 \end{pmatrix} + O(1), & \lambda \rightarrow -\frac{1}{A_2}, \\ \frac{c_+ e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\nu_1^+(\lambda)} \begin{pmatrix} \Upsilon_1 & 0 \\ \Lambda_1 & 0 \end{pmatrix} + O(1), & \lambda \rightarrow \frac{1}{A_1}, \lambda \in \mathbb{C}_+, \\ \frac{\bar{c}_+ e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\nu_1^+(\lambda)} \begin{pmatrix} \Upsilon_1 & 0 \\ \Lambda_1 & 0 \end{pmatrix} + O(1), & \lambda \rightarrow \frac{1}{A_1}, \lambda \in \mathbb{C}_-, \\ \frac{\bar{c}_+ i}{\nu_1^-(\lambda)} \begin{pmatrix} -\Upsilon_1 & 0 \\ \Lambda_1 & 0 \end{pmatrix} + O(1), & \lambda \rightarrow -\frac{1}{A_1}, \lambda \in \mathbb{C}_+, \\ \frac{c_+ i}{\nu_1^-(\lambda)} \begin{pmatrix} -\Upsilon_1 & 0 \\ \Lambda_1 & 0 \end{pmatrix} + O(1), & \lambda \rightarrow -\frac{1}{A_1}, \lambda \in \mathbb{C}_-, \end{cases} \quad (4.74)$$

де $\nu_j^\pm(\lambda)$ визначено в твердженні 4.2.17 і $\Upsilon_j = -(2A_j)^{\frac{1}{4}} \alpha_j(x, t) + \frac{(a_j(x, t) + b_j(x, t))}{(2A_j)^{\frac{1}{4}}}$, $\Lambda_j = (2A_j)^{\frac{1}{4}} \alpha_j(x, t) + \frac{(a_j(x, t) + b_j(x, t))}{(2A_j)^{\frac{1}{4}}}$ з $\alpha_j(x, t)$, $a_j(x, t)$, $b_j(x, t) \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, як у твердженні 4.2.16.

Крім того, $c_+(x, t) = 0$, якщо $\beta_1(x, t) \neq 0$, і $c_+(x, t) = \frac{1}{\tilde{s}_{11}(x, t, \frac{1}{A_2})}$, якщо $\beta_1(x, t) = 0$, де $\beta_1(x, t)$ визначено у (4.75б).

Доведення. Комбінуючи твердження 4.2.16 з твердженням 4.2.17, отримуємо

$$D_j^{-1}(\lambda)\tilde{\Phi}_j(x, t, \lambda) = \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\nu_j^+(\lambda)} \left(-(2A_j)^{\frac{1}{4}}\alpha_j \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{a_j + b_j}{(2A_j)^{\frac{1}{4}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) + O\left(\left(\lambda - \frac{1}{A_j}\right)^{1/4}\right)$$

при $\lambda \rightarrow \frac{1}{A_j}$, де $\alpha_j = \alpha_j(x, t)$, $a_j = a_j(x, t)$ і $b_j = b_j(x, t)$.

Спочатку розглянемо поведінку M поблизу $\frac{1}{A_2}$. Оскільки $D_1^{-1}(\lambda)\tilde{\Phi}_1^{(1)}(x, t, \lambda)$ аналітична у $\frac{1}{A_2}$, маємо

$$D_1^{-1}\left(\frac{1}{A_2}\right)\tilde{\Phi}_1^{(1)}\left(x, t, \frac{1}{A_2}\right) = i \begin{pmatrix} a(x, t) \\ c(x, t) \end{pmatrix},$$

де

$$a(x, t) = \left| \sqrt{\frac{A_2 + |\sqrt{A_2^2 - A_1^2}|}{|\sqrt{A_2^2 - A_1^2}|}} \right| \left(\frac{A_1}{A_2 + |\sqrt{A_2^2 - A_1^2}|} \tilde{\Phi}_1^{(11)}\left(x, t, \frac{1}{A_2}\right) + \tilde{\Phi}_1^{(21)}\left(x, t, \frac{1}{A_2}\right) \right)$$

і

$$c(x, t) = \left| \sqrt{\frac{A_2 + |\sqrt{A_2^2 - A_1^2}|}{|\sqrt{A_2^2 - A_1^2}|}} \right| \left(\frac{A_1}{A_2 + |\sqrt{A_2^2 - A_1^2}|} \tilde{\Phi}_1^{(21)}\left(x, t, \frac{1}{A_2}\right) + \tilde{\Phi}_1^{(11)}\left(x, t, \frac{1}{A_2}\right) \right).$$

Тоді, використовуючи (4.25а), отримуємо таку поведінку $\tilde{s}_{11}(x, t, \lambda)$ коли $\lambda \rightarrow \frac{1}{A_2}$:

$$\tilde{s}_{11}(x, t, \lambda) = \frac{ie^{\frac{3\pi i}{4}}}{\nu_2^+(\lambda)}\beta_2(x, t) + O(1), \quad \lambda \rightarrow \frac{1}{A_2},$$

$$\text{де } \beta_2(x, t) = \left((2A_2)^{\frac{1}{4}}\alpha_2(x, t)(a(x, t) + c(x, t)) + \frac{(a_2(x, t) + b_2(x, t))(a(x, t) - c(x, t))}{(2A_2)^{\frac{1}{4}}} \right).$$

Зауважимо, що з симетрії (4.43) випливає, що $\tilde{\Phi}_1^{(11)}(x, t, \frac{1}{A_2})$ та $\tilde{\Phi}_1^{(21)}(x, t, \frac{1}{A_2})$ є дійсними, а отже $a(x, t) \in \mathbb{R}$ та $c(x, t) \in \mathbb{R}$.

Врахуємо припущення $s_{11}(\frac{1}{A_2}) \neq 0$, що означає $\tilde{s}_{11}(\frac{1}{A_2}) \neq 0$. Таким чином, є дві можливості: або $\beta_2(x, t) \neq 0$, або $\beta_2(x, t) = 0$ і $\tilde{s}_{11}(\frac{1}{A_2}) =: \gamma \neq 0$. В обох випадках маємо

$$M(x, t, \lambda) = \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\nu_2^+(\lambda)} \begin{pmatrix} 0 & -(2A_2)^{\frac{1}{4}}\alpha_2(x, t) + \frac{(a_2(x, t) + b_2(x, t))}{(2A_2)^{\frac{1}{4}}} \\ 0 & (2A_2)^{\frac{1}{4}}\alpha_2(x, t) + \frac{(a_2(x, t) + b_2(x, t))}{(2A_2)^{\frac{1}{4}}} \end{pmatrix} + O(1), \quad \lambda \rightarrow \frac{1}{A_2}.$$

Тепер розглянемо поведінку M при наближенні λ до $\frac{1}{A_1}$ з верхньої півплощини. Оскільки $D_2^{-1}(\lambda)\tilde{\Phi}_2^{(2)}(x, t, \lambda)$ не має сингулярності у $\frac{1}{A_1}$, маємо

$$D_2^{-1}\left(\frac{1}{A_{1+}}\right)\tilde{\Phi}_2^{(2)}\left(x, t, \frac{1}{A_{1+}}\right) = \begin{pmatrix} b_+(x, t) \\ d_+(x, t) \end{pmatrix},$$

де

$$b_+ = \left| \sqrt{\frac{-iA_1 - |\sqrt{A_2^2 - A_1^2}|}{|\sqrt{A_2^2 - A_1^2}|}} \right| \left(\frac{A_2}{A_1 - i|\sqrt{A_2^2 - A_1^2}|} \tilde{\Phi}_2^{(12)}\left(x, t, \frac{1}{A_{1+}}\right) + \tilde{\Phi}_2^{(22)}\left(x, t, \frac{1}{A_{1+}}\right) \right)$$

і

$$d_+ = \left| \sqrt{\frac{-iA_1 - |\sqrt{A_2^2 - A_1^2}|}{|\sqrt{A_2^2 - A_1^2}|}} \right| \left(\frac{A_2}{A_1 - i|\sqrt{A_2^2 - A_1^2}|} \tilde{\Phi}_2^{(22)}\left(x, t, \frac{1}{A_{1+}}\right) + \tilde{\Phi}_2^{(12)}\left(x, t, \frac{1}{A_{1+}}\right) \right).$$

Тоді, використовуючи (4.25а), отримуємо таку поведінку $\tilde{s}_{11}(x, t, \lambda)$ у $\frac{1}{A_1}$ у верхній півплощині:

$$\tilde{s}_{11}(x, t, \lambda) = \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\nu_1^+(\lambda)} \beta_1(x, t) + O(1), \quad \lambda \rightarrow \frac{1}{A_1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (4.75a)$$

де

$$\beta_1(x, t) = -(2A_2)^{\frac{1}{4}} \alpha_1(x, t) (b_+(x, t) + d_+(x, t)) + \frac{(a_1(x, t) + b_1(x, t))(d_+(x, t) - b_+(x, t))}{(2A_1)^{\frac{1}{4}}}. \quad (4.75b)$$

Як і раніше, маємо дві можливості: або $\beta_1(x, t) \neq 0$ (загальний випадок), або $\beta_1(x, t) = 0$ і $\tilde{s}_{11}\left(\frac{1}{A_{1+}}\right) = \gamma_1^+ \neq 0$. Вшпівідно,

$$M(x, t, \lambda) = \frac{c_+ e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\nu_1^+(\lambda)} \begin{pmatrix} -(2A_1)^{\frac{1}{4}} \alpha_1(x, t) + \frac{(a_1(x, t) + b_1(x, t))}{(2A_1)^{\frac{1}{4}}} & 0 \\ (2A_1)^{\frac{1}{4}} \alpha_1(x, t) + \frac{(a_1(x, t) + b_1(x, t))}{(2A_1)^{\frac{1}{4}}} & 0 \end{pmatrix} + O(1), \quad \lambda \rightarrow \frac{1}{A_1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

де $c_+ = 0$, якщо $\beta_1(x, t) \neq 0$, і $c_+ = \frac{1}{\tilde{s}_{11}\left(\frac{1}{A_{1+}}\right)}$, якщо $\beta_1(x, t) = 0$.

Інші твердження випливають з міркувань симетрії. \square

Зауваження 4.3.7. 1. $\rho(\lambda) = \frac{\tilde{s}_{21}(\lambda_+)}{\tilde{s}_{11}(\lambda_+)} e^{-2p_2(x, t, \lambda_+)} = O(1)$ коли $\lambda \rightarrow \frac{1}{A_2}$. Дійсно, при доведенні теореми 4.3.6 ми бачили, що $\tilde{s}_{11}(x, t, \lambda) = \frac{ie^{\frac{3\pi i}{4}}}{\nu_2^+(\lambda)} \beta_2(x, t) + O(1)$ при $\lambda \rightarrow \frac{1}{A_2}$. Аналогічно, завдяки (4.25б), маємо $\tilde{s}_{21}(x, t, \lambda) = -\frac{ie^{\frac{3\pi i}{4}}}{\nu_2^+(\lambda)} \beta_2(x, t) + O(1)$ при $\lambda \rightarrow \frac{1}{A_2}$. Крім того, за нашими припущеннями, $\tilde{s}_{11}\left(\frac{1}{A_2}\right) \neq 0$, і звідси випливає твердження.

2. $\rho(\lambda) = O(1)$ при $\lambda \rightarrow \frac{1}{A_1}$. Дійсно, ми вже знаємо, що $\tilde{s}_{11}(\lambda) = \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\nu_1^+(\lambda)}\beta_1(x, t) + O(1)$ при $\lambda \rightarrow \frac{1}{A_1}$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Аналогічно, (4.25б) разом з (4.57) означає, що при $\beta_1 \neq 0$ маємо $\tilde{s}_{21}(\lambda) = \frac{ie^{\frac{3\pi i}{4}}}{\nu_1^+(\lambda)}\overline{\beta_1(x, t)} + O(1)$, $\lambda \rightarrow \frac{1}{A_1}$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Крім того, за нашими припущеннями, $\tilde{s}_{11}(\frac{1}{A_1+}) \neq 0$, і звідси випливає твердження.

Умови на лишки

Згідно з (4.22), нулі $\tilde{s}_{11}(\lambda)$ збігаються з нулями $s_{11}(\lambda)$; отже, за твердженням 4.2.15, вони є дійсними та простими. Крім того, з симетрії (4.29) випливає, що $-\lambda_k$ є нулем $\tilde{s}_{11}(\lambda)$ разом з λ_k ; будемо позначати множину нулів $s_{11}(\lambda)$ через $\{\lambda_k, -\lambda_k\}_1^n$, де $\lambda_k \in (0, \frac{1}{A_2})$.

Твердження 4.3.8. $M^{(1)}$ має прості полюси у точках $\{\lambda_k, -\lambda_k\}_1^n$, причому

$$\text{Res}_{\pm\lambda_k} M^{(1)}(x, t, \lambda) = \frac{b_k}{s'_{11}(\lambda_k)} e^{2p_2(\lambda_k)} M^{(2)}(x, t, \pm\lambda_k), \quad (4.76)$$

Крім того, $\frac{b_k}{s'_{11}(\lambda_k)} e^{2p_2(\lambda_k)} \in \mathbb{R}$.

Доведення. Нагадаємо, що $\Phi_1^{(1)}(\lambda_k) = b_k \Phi_2^{(2)}(\lambda_k)$, де $b_k = b(\lambda_k) \in \mathbb{R}$ в силу симетрії (4.41). Тоді $(D_1^{-1} \tilde{\Phi}_1^{(1)})(\lambda_k)$ та $(D_2^{-1} \tilde{\Phi}_2^{(2)})(\lambda_k)$ пов'язані наступним чином:

$$\frac{(D_1^{-1} \tilde{\Phi}_1^{(1)})(\lambda_k)}{s_{11}(\lambda_k) e^{p_1(\lambda_k) - p_2(\lambda_k)}} = \frac{b_k}{s_{11}(\lambda_k)} e^{2p_2(\lambda_k)} (D_2^{-1} \tilde{\Phi}_2^{(2)})(\lambda_k),$$

звідки випливає (4.76). Крім того, диференціюючи (4.42) і використовуючи той факт, що $\lambda_k \in \mathbb{R}$, отримуємо $s'_{11}(\lambda_k) \in \mathbb{R}$, а отже $\frac{b_k}{s'_{11}(\lambda_k)} e^{2p_2(\lambda_k)} \in \mathbb{R}$.

Диференціюючи (4.29), отримуємо $s'_{11}(\lambda_k) = -s'_{11}(-\lambda_k)$. З іншого боку, (4.28) означає, що $b(-\lambda_k) = -b(\lambda_k)$. Об'єднавши ці факти, отримуємо (4.76) зі знаком мінус. \square

Зауваження 4.3.9. У термінах \tilde{M} (4.72), умови на лишки мають такий

ВИГЛЯД:

$$\tilde{M}^{(1)}(x, t, \lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \frac{b_k}{s'_{11}(\lambda_k)} e^{2p_2(\lambda_k)} \tilde{M}^{(2)}(x, t, \lambda_{k+}) + O(1), \quad \lambda \rightarrow \lambda_k, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (4.77a)$$

$$\tilde{M}^{(2)}(x, t, \lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \frac{b_k}{s'_{11}(\lambda_k)} e^{2p_2(\lambda_k)} \tilde{M}^{(1)}(x, t, \lambda_{k-}) + O(1), \quad \lambda \rightarrow \lambda_k, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-. \quad (4.77b)$$

Задача РГ з параметрами (x, t) .

В рамках підходу Рімана–Гільберта до нелінійних еволюційних рівнянь, можна інтерпретувати співвідношення стрибка, умови нормування, умови сингулярності та умови на лишки як задачу Рімана–Гільберта, з матрицею стрибка та параметрами лишків, що визначаються початковими даними для нелінійної задачі, що розглядається. З наведених вище міркувань випливає, що $M(x, t, \lambda)$ можна охарактеризувати як розв'язок такої задачі Рімана–Гільберта:

Знайти 2×2 мероморфну матричну функцію $M(x, t, \lambda)$, яка задовольняє такі умови:

- Умову *стрибка* (4.67).
- Умову *нормування* (4.71).
- Умову на *сингулярності*: сингулярності $M(x, t, \lambda)$ при $\pm \frac{1}{A_j}$ мають порядок не більший за $\frac{1}{4}$.
- Умови на *лишки* (якщо ϵ): $M^{(1)}(x, t, \lambda)$ має прості полюси у точках $\{\lambda_k, -\lambda_k\}_1^N$, а лишки задовольняють рівняння

$$\text{Res}_{\pm\lambda_k} M^{(1)}(x, t, \lambda) = \kappa_k e^{2p_2(\lambda_k)} M^{(2)}(x, t, \pm\lambda_k), \quad (4.78)$$

де $\{\lambda_k, \kappa_k\}_1^N$ такі, що $\lambda_k \in (0, \frac{1}{A_2})$ і $\kappa_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ϵ заданими.

Зауваження 4.3.10. Розв'язок наведеної вище задачі РГ, якщо він існує, має такі властивості:

1. $\det M \equiv 1$ (впливає з того, що $\det J \equiv 1$).

2. *Симетрії*

$$M(-\lambda) = -\sigma_3 M(\lambda) \sigma_3, \quad \overline{M(\bar{\lambda})} = -M(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_2, \quad (4.79a)$$

$$M((-\lambda)_-) = -\sigma_3 M(\lambda_+) \sigma_3, \quad \overline{M(\lambda_-)} = -M(\lambda_+), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1. \quad (4.79b)$$

де $M(\lambda) \equiv M(x, t, \lambda)$ (впливає з відповідних симетрій матриці стрибків та умов на лишки, припускаючи єдиність розв'язку).

Зауваження 4.3.11. Для повного формулювання задачі РГ, не потрібно деталізувати поведінку в сингулярних точках, якими є точки розгалуження $\pm \frac{1}{A_j}$, а достатньо вимагати, щоб сингулярності мали порядок не більший, ніж $\frac{1}{4}$.

Як і для інших рівнянь типу Камасси–Хольма, основний недолік формалізму РГ, представленого вище, полягає в тому, що умова стрибка (4.67) включає не тільки функції розсіювання (які однозначно визначаються початковими даними задачі (4.1)), але й сам розв'язок, який фігурує у $p_2(x, t, \lambda)$ у вигляді $m(x, t)$ (4.13б). Для того, щоб дані для задачі РГ явно визначалися лише початковими даними, введемо просторову змінну $y(x, t) := x - \frac{1}{A_2} \int_x^{+\infty} (m(\xi, t) - A_2) d\xi - A_2^2 t$; вона, разом з t , буде відігравати роль параметра для задачі РГ, див. розділ 4.3.3 нижче.

Для того, щоб визначити ефективний спосіб отримання розв'язку рівняння мКХ з розв'язку задачі РГ, зручно використати поведінку розв'язків Йоста рівнянь пари Лакса, обчислену при $\lambda = 0$, коли x -рівняння пари Лакса (2.4) стає тривіальним (незалежним від розв'язку рівняння мКХ).

4.3.2 Власні функції поблизу 0.

У випадку рівняння Камасси–Хольма [24], а також інших нелінійних інтегровних рівнянь типу КХ, досліджених дотепер, див., наприклад, [28],

аналіз поведінки відповідних розв'язків Йоста у спеціальній точці комплексної площини спектрального параметра (у нашому випадку, при $\lambda = 0$) вимагає спеціального калібрувального перетворення рівнянь пари Лакса.

Цікаво, що у випадку рівняння мКХ, для того, щоб контролювати поведінку поведінку власних функцій при $\lambda = 0$, не потрібно вводити додаткове перетворення, а достатньо перегрупувати члени в парі Лакса (4.12).

А саме, перепишемо (4.12) таким чином:

$$\hat{\Phi}_{jx} + \frac{iA_j k_j(\lambda)}{2} \sigma_3 \hat{\Phi}_j = \hat{U}_j^0 \hat{\Phi}_j, \quad (4.80a)$$

де $\hat{U}_j^0 \equiv \hat{U}_j^0(x, t, \lambda)$ задається формулою

$$\hat{U}_j^0 = \frac{(m - A_j)}{2} \frac{\lambda}{ik_j(\lambda)} \begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{A_j} \\ -\frac{1}{A_j} & -\lambda \end{pmatrix}, \quad (4.80б)$$

і

$$\hat{\Phi}_{jt} + iA_j k_j(\lambda) \left(-\frac{A_j^2}{2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \sigma_3 \hat{\Phi}_j = \hat{V}_j^0 \hat{\Phi}_j, \quad (4.80в)$$

де $\hat{V}_j^0 \equiv \hat{V}_j^0(x, t, \lambda)$ задається формулою

$$\hat{V}_j^0 = \hat{V}_j + iA_j k_j(\lambda) \left(\frac{(u^2 - u_x^2)m}{2A_j} - \frac{A_j^2}{2} \right) \sigma_3. \quad (4.80г)$$

Далі вводимо (пор. з (4.13б)) функції

$$p_j^0(x, t, \lambda) := \frac{iA_j k_j(\lambda)}{2} \left(x - 2 \left(\frac{A_j^2}{2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) t \right). \quad (4.81)$$

Тоді, ввівши $Q_j^0 := p_j^0 \sigma_3$ та $\tilde{\Phi}_j^0 := \hat{\Phi}_j e^{Q_j^0}$, зводимо рівняння (4.80а) та (4.80в) до наступних рівнянь:

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_{jx}^0 + [Q_{jx}^0, \tilde{\Phi}_j^0] = \hat{U}_j^0 \tilde{\Phi}_j^0, \\ \tilde{\Phi}_{jt}^0 + [Q_{jt}^0, \tilde{\Phi}_j^0] = \hat{V}_j^0 \tilde{\Phi}_j^0. \end{cases} \quad (4.82)$$

Визначимо розв'язки Йоста $\tilde{\Phi}_j^0$ рівнянь (4.82) як розв'язки інтегральних рівнянь

$$\tilde{\Phi}_j^0(x, t, \lambda) = I + \int_{(-1)^j \infty}^x e^{-\frac{iA_j k_j(\lambda)}{2}(x-\xi)\sigma_3} \hat{U}_j^0(\xi, t, \lambda) \tilde{\Phi}_j^0(\xi, t, \lambda) e^{\frac{iA_j k_j(\lambda)}{2}(x-\xi)\sigma_3} d\xi. \quad (4.83)$$

Далі, визначивши $\hat{\Phi}_j^0 := \tilde{\Phi}_j^0 e^{-p_j^0 \sigma_3}$, зауважимо, що $\hat{\Phi}_j^0(x, t, \lambda)$ і $\hat{\Phi}_j(x, t, \lambda)$ задовольняють однакові диференціальні рівняння (4.12), а отже пов'язані між собою матрицями $C_j(\lambda)$, незалежними від x і t :

$$\hat{\Phi}_j = \hat{\Phi}_j^0 C_j(\lambda).$$

Отже,

$$\tilde{\Phi}_j(x, t, \lambda) = \tilde{\Phi}_j^0(x, t, \lambda) e^{-p_j^0(x, t, \lambda) \sigma_3} C_j(\lambda) e^{p_j(x, t, \lambda) \sigma_3}. \quad (4.84)$$

Оскільки $p_j(x, t, \lambda) - p_j^0(x, t, \lambda) = \frac{ik_j(\lambda)}{2} \int_x^{(-1)^j \infty} (m(\xi, t) - A_j) d\xi$ і

$$\tilde{\Phi}_j(x, t, \lambda) = \tilde{\Phi}_j^0(x, t, \lambda) e^{\frac{ik_j(\lambda)}{2} \int_{(-1)^j \infty}^x (m(\xi, t) - A_j) d\xi \sigma_3},$$

перейшовши до границь $x \rightarrow (-1)^j \infty$, отримуємо $C_j(\lambda) = I$.

Зауважимо, що $\hat{U}_j^0(x, t, 0) \equiv 0$; тоді з (4.83) випливає, що $\tilde{\Phi}_j^0(x, t, 0) \equiv I$, а отже $\tilde{\Phi}_j(x, t, 0) = e^{-\frac{1}{2A_j} \int_{(-1)^j \infty}^x (m(\xi, t) - A_j) d\xi \sigma_3}$. Поєднавши це з $D_j^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, отримуємо

$$(D_j^{-1} \tilde{\Phi}_j)(x, t, 0) = i \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{1}{2A_j} \int_{(-1)^j \infty}^x (m(\xi, t) - A_j) d\xi} \\ e^{-\frac{1}{2A_j} \int_{(-1)^j \infty}^x (m(\xi, t) - A_j) d\xi} & 0 \end{pmatrix}$$

Отже,

$$\tilde{s}_{11}(0) = e^{-\frac{1}{2A_1} \int_{-\infty}^x (m(\xi, t) - A_1) d\xi} e^{-\frac{1}{2A_2} \int_x^{\infty} (m(\xi, t) - A_2) d\xi}$$

(звідки $\tilde{s}_{11}(0) \neq 0$) та

$$M(x, t, 0) = i \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{1}{2A_2} \int_x^{\infty} (m(\xi, t) - A_2) d\xi} \\ e^{\frac{1}{2A_2} \int_x^{\infty} (m(\xi, t) - A_2) d\xi} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.85)$$

Зауваження 4.3.12. Розглядаючи $M(x, t, \lambda)$ як розв'язок задачі РГ у розділі 4.3.1, незалежно отримуємо, що матрична структура $M(x, t, 0)$ має вигляд як у (4.85), тобто,

$$M(x, t, 0) = i \begin{pmatrix} 0 & a_1(x, t) \\ a_1^{-1}(x, t) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.86)$$

з деяким $a(x, t) \in \mathbb{R}$. Це випливає з властивостей симетрії (4.79а) розв'язку, враховуючи, що $\det M \equiv 1$ (за умови, що розв'язок є єдиним).

Тепер покажемо, що для того, щоб отримати розв'язок рівняння мКХ з розв'язку пов'язаної з ним задачі РГ, необхідно знайти наступний член у розвиненні $M(x, t, \lambda)$ при $\lambda = 0$.

Спочатку, розклавши $D_j^{-1}(\lambda)$ в околі 0, маємо

$$D_j^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} i\frac{A_j}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{A_j}{2} \end{pmatrix} + O(\lambda^2).$$

З іншого боку, $e^{\frac{ik_j(\lambda)}{2} \int_{(-1)^{j\infty}}^x (m(\xi, t) - A_j) d\xi \sigma_3} = e^{-\frac{1}{2A_j} \int_{(-1)^{j\infty}}^x (m(\xi, t) - A_j) d\xi \sigma_3} + O(\lambda^2)$, $\lambda \rightarrow 0$. Тоді, розклавши $\tilde{\Phi}_j^0(x, t, \lambda)$ в 0 за допомогою ряду Неймана, маємо

$$\tilde{\Phi}_j^0(x, t, \lambda) = I + \lambda \begin{pmatrix} 0 & -\int_{(-1)^{j\infty}}^x e^{x-\xi} \frac{m-A_j}{2} d\xi \\ \int_{(-1)^{j\infty}}^x e^{-(x-\xi)} \frac{m-A_j}{2} d\xi & 0 \end{pmatrix} + O(\lambda^2).$$

Зокрема,

$$\tilde{s}_{11}(\lambda) = e^{-\frac{1}{2A_1} \int_{-\infty}^x (m(\xi, t) - A_1) d\xi - \frac{1}{2A_2} \int_x^{\infty} (m(\xi, t) - A_2) d\xi} + O(\lambda^2).$$

Нарешті, маємо

$$M(x, t, \lambda) = i \begin{pmatrix} 0 & a_1(x, t) \\ a_1^{-1}(x, t) & 0 \end{pmatrix} + i\lambda \begin{pmatrix} a_2(x, t) & 0 \\ 0 & a_3(x, t) \end{pmatrix} + O(\lambda^2), \quad (4.87)$$

де

$$a_1(x, t) = e^{-\frac{1}{2A_2} \int_x^{\infty} (m(\xi, t) - A_2) d\xi}, \quad (4.88a)$$

$$a_2(x, t) = \left(\int_{-\infty}^x e^{-(x-\xi)} \frac{m - A_1}{2} d\xi + \frac{A_1}{2} \right) e^{\frac{1}{2A_2} \int_x^{\infty} (m(\xi, t) - A_2) d\xi}, \quad (4.88б)$$

$$a_3(x, t) = \left(\int_x^{\infty} e^{(x-\xi)} \frac{m - A_2}{2} d\xi + \frac{A_2}{2} \right) e^{-\frac{1}{2A_2} \int_x^{\infty} (m(\xi, t) - A_2) d\xi}. \quad (4.88в)$$

Зауважимо, що матрична структура членів у правій частині (4.87) узгоджується з властивостями симетрії (4.79а) M .

Твердження 4.3.13. $u(x, t)$ та $u_x(x, t)$ можна алгебраїчно виразити через коефіцієнти $a_j(x, t)$, $j = 1, 3$ у розвиненні $M(x, t, \lambda)$ (4.87) таким чином:

$$u(x, t) = a_1(x, t)a_2(x, t) + a_1^{-1}(x, t)a_3(x, t), \quad (4.89a)$$

$$u_x(x, t) = -a_1(x, t)a_2(x, t) + a_1^{-1}(x, t)a_3(x, t). \quad (4.89б)$$

Доведення. Введемо $v(x, t) := a_1(x, t)a_2(x, t) + a_1^{-1}(x, t)a_3(x, t)$. Використовуючи (4.88) маємо:

$$v(x, t) = \frac{A_1 + A_2}{2} + \int_{-\infty}^x e^{-(x-\xi)} \frac{m - A_1}{2} d\xi + \int_x^{\infty} e^{(x-\xi)} \frac{m - A_2}{2} d\xi \quad (4.90)$$

і, диференціюючи відносно x ,

$$v_x(x, t) = \frac{A_2 - A_1}{2} - \int_{-\infty}^x e^{-(x-\xi)} \frac{m - A_1}{2} d\xi + \int_x^{\infty} e^{(x-\xi)} \frac{m - A_2}{2} d\xi. \quad (4.91)$$

Оскільки ми припустили, що $\lim_{x \rightarrow (-1)^j \infty} m(x, t) = A_i$, то з (4.90) випливає, що $v - v_{xx} = m$ і що

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^j \infty} v(x, t) = A_i, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^i \infty} v_x(x, t) = 0;$$

Таким чином, $v \equiv u$. Наостанок зауважимо, що вираз у правій частині (4.91) можна записати як праву частину (4.89б) з урахуванням (4.88).

□

4.3.3 Задача РН у координатах (y, t)

Як ми вже згадували, умова стрибка (4.67) включає не тільки функції розсіювання, які однозначно визначаються початковими даними задачі (4.1), але й сам розв'язок, через $m(x, t)$, який входить у визначення $p_2(x, t, \lambda)$ (4.13б). Для того, щоб дані для задачі РГ явно визначалися лише початковими даними, введемо нову просторову змінну $y(x, t)$:

$$y(x, t) = x - \frac{1}{A_2} \int_x^{+\infty} (m(\xi, t) - A_2) d\xi - A_2^2 t, \quad (4.92)$$

Тоді, якщо ввести функцію $\hat{M}(y, t, \lambda)$ так, що $M(x, t, \lambda) = \hat{M}(y(x, t), t, \lambda)$, то залежність матриці стрибка в (4.67) від y і t як параметрів стає явною: умова стрибка для $\hat{M}(y, t, \lambda)$ має вигляд

$$\hat{M}^+(y, t, \lambda) = \hat{M}^-(y, t, \lambda) \hat{J}(y, t, \lambda), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1 \cup \dot{\Sigma}_0. \quad (4.93a)$$

Тут

$$\hat{J}(y, t, \lambda) := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\hat{p}_2(y, t, \lambda_+)} & 0 \\ 0 & e^{\hat{p}_2(y, t, \lambda_+)} \end{pmatrix} J_0(\lambda) \begin{pmatrix} e^{\hat{p}_2(y, t, \lambda_+)} & 0 \\ 0 & e^{-\hat{p}_2(y, t, \lambda_+)} \end{pmatrix}, \quad (4.93b)$$

де $J_0(\lambda)$ визначено через (4.67б), а функція p_2 заданється явно в термінах y та t :

$$\hat{p}_2(y, t, \lambda) := \frac{iA_2k_2(\lambda)}{2} \left(y - \frac{2t}{\lambda^2} \right). \quad (4.93в)$$

Відповідно, с умови на лишки (4.78) також стають явними в термінах y та t :

$$\text{Res}_{\pm\lambda_k} \hat{M}^{(1)}(y, t, \lambda) = \kappa_k e^{2\hat{p}_2(y, t, \lambda_k)} \hat{M}^{(2)}(y, t, \pm\lambda_k), \quad (4.94)$$

де $\kappa_k = \frac{b_k}{s'_{11}(\lambda_k)}$.

Помітивши, що умова нормування (4.71) та умови сингулярності при $\lambda = \pm \frac{1}{A_j}$ виконуються в нових координатах (y, t) , приходимо до основної задачі РГ, що характеризує задачу (4.1а).

Основна задача РГ. Задано $\rho(\lambda)$ для $\lambda \in \dot{\Sigma}_1 \cup \dot{\Sigma}_0$ та $\{\lambda_k, \kappa_k\}_1^N$ з $\lambda_k \in (0, \frac{1}{A_2})$ та $\kappa_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, які пов'язані з початковими даними $u_0(x)$ у (4.1); знайти кусково (відносно $\dot{\Sigma}_2$) мероморфну, 2×2 -матричну функцію $\hat{M}(y, t, \lambda)$, що задовольняє такі умови:

- Умову стрибка (4.93) на $\dot{\Sigma}_1 \cup \dot{\Sigma}_0$ (де $J_0(\lambda)$ визначена у (4.67б)).
- Умови на лишки (4.94).
- Умову нормування:

$$\hat{M}(y, t, \lambda) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} + O(\frac{1}{\lambda}), & \lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \mathbb{C}^+, \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} + O(\frac{1}{\lambda}), & \lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \mathbb{C}^-. \end{cases} \quad (4.95)$$

- Умови сингулярності: сингулярності $\hat{M}(y, t, \lambda)$ у точках $\pm \frac{1}{A_j}$ мають порядок, не більший за $\frac{1}{4}$.

Аналізуючи розв'язок цієї задачі при $\lambda \rightarrow 0$, можна зобразити розв'язок u початкової задачі (4.1) у параметричній формі, див. нижче. Щодо даних

задачі РГ, то матриця розсіювання $s(\lambda)$ (а отже, $s_{11}(\lambda)$, $s_{21}(\lambda)$ і $\rho(\lambda)$), а також дискретні дані $\{\lambda_k, \kappa_k\}_1^n$, визначаються через $u_0(x)$ за допомогою розв'язків рівнянь (4.16), розглянутих при $t = 0$.

Єдиність розв'язку основної задачі РГ слідує зі стандартних аргументів, що ґрунтуються на застосуванні теореми Ліувілля до відношення $\hat{M}_1(\hat{M}_2)^{-1}$ двох довільних розв'язків \hat{M}_1 та \hat{M}_2 . Зокрема, умова сингулярності означає, що можливі сингулярності з $\hat{M}_1(\hat{M}_2)^{-1}$ мають порядок не більший за $1/2$ і, тим самим, ці сингулярності, будучи ізольованими, є усувними.

З єдиності, зокрема, випливають симетрії

$$\hat{M}(-\lambda) = -\sigma_3 \hat{M}(\lambda) \sigma_3, \quad \overline{\hat{M}(\bar{\lambda})} = -\hat{M}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_2, \quad (4.96a)$$

$$\hat{M}((-\lambda)_-) = -\sigma_3 \hat{M}(\lambda_+) \sigma_3, \quad \overline{\hat{M}(\lambda_-)} = -\hat{M}(\lambda_+), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1. \quad (4.96b)$$

де $\hat{M}(\lambda) \equiv \hat{M}(y, t, \lambda)$, що випливає з відповідних симетрій $\hat{J}(y, t, \lambda)$.

4.3.4 Отримання $u(x, t)$ з розв'язку основної задачі РГ

Порівнюючи задачу РГ (4.67), (4.71), (4.78), параметризовану за допомогою x та t , із задачею РГ (4.93)–(4.95), параметризованою y та t , і використовуючи (4.88)–(4.92), отримуємо наш основний результат про зображення розв'язку задачі (4.1).

Теорема 4.3.14. *Нехай $u(x, t)$ є розв'язком задачі Коші (4.1) і нехай $\hat{M}(y, t, x)$ є розв'язком задачі РГ (4.93)–(4.95), дані для якої визначаються початковою умовою $u_0(x)$ задачі (4.1). Розглянемо розвинення $\hat{M}(y, t, x)$ коли $\lambda \rightarrow 0$:*

$$\hat{M}(y, t, \lambda) = i \begin{pmatrix} 0 & \hat{a}_1(y, t) \\ \hat{a}_1^{-1}(y, t) & 0 \end{pmatrix} + i\lambda \begin{pmatrix} \hat{a}_2(y, t) & 0 \\ 0 & \hat{a}_3(y, t) \end{pmatrix} + O(\lambda^2). \quad (4.97)$$

Тоді $u(x, t)$ можна виразити, у параметричній формі, у термінах функцій $\hat{a}_j(y, t)$, $j = 1, 2, 3$: $u(x, t) = \hat{u}(y(x, t), t)$, де

$$\hat{u}(y, t) = \hat{a}_1(y, t) \hat{a}_2(y, t) + \hat{a}_1^{-1}(y, t) \hat{a}_3(y, t), \quad (4.98a)$$

$$x(y, t) = y - 2 \ln \hat{a}_1(y, t) + A_2^2 t. \quad (4.98b)$$

Крім того, $\hat{u}_x(y, t)$ також можна алгебраїчно виразити через $\hat{a}_j(y, t)$, $j = 1, 2, 3$: $u_x(x, t) = \hat{u}_x(y(x, t), t)$, де

$$\hat{u}_x(y, t) = -\hat{a}_1(y, t)\hat{a}_2(y, t) + \hat{a}_1^{-1}(y, t)\hat{a}_3(y, t). \quad (4.98\text{в})$$

Зазначимо, що $\hat{u}_x(y, t)$ можна виразити лише через перший член у (4.97). Ціна, яку доводиться платити, полягає у тому, що цей вираз включає похідні цього члена.

Твердження 4.3.15. *Похідна x від розв'язку $u(x, t)$ задачі Коші (4.1) має параметричне представлення*

$$\hat{u}_x(y, t) = -\frac{1}{A_2}\partial_{ty} \ln \hat{a}_1(y, t), \quad (4.99\text{а})$$

$$x(y, t) = y - 2 \ln \hat{a}_1(y, t) + A_2^2 t. \quad (4.99\text{б})$$

Доведення. Диференціювання тотожності $x(y(x, t), t) = x$ відносно t дає

$$0 = \frac{d}{dt} (x(y(x, t), t)) = x_y(y, t)y_t(x, t) + x_t(y, t). \quad (4.100)$$

З (4.92) випливає, що

$$x_y(y, t) = \frac{A_2}{\hat{m}(y, t)}, \quad (4.101)$$

де $\hat{m}(y, t) = m(x(y, t), t)$, і

$$y_t(x, t) = -\frac{1}{A_2}(u^2 - u_x^2)m.$$

Підставивши це і (4.101) у (4.100), отримуємо

$$x_t(y, t) = \hat{u}^2(y, t) - \hat{u}_x^2(y, t). \quad (4.102)$$

Далі, диференціюючи (4.102) відносно y , отримуємо

$$x_{ty}(y, t) = (\hat{u}^2(y, t) - \hat{u}_x^2(y, t))_x x_y(y, t) = 2A_2 \hat{u}_x(y, t), \quad (4.103)$$

звідки

$$u_x(x(y, t), t) \equiv \hat{u}_x(y, t) = \frac{1}{2A_2}\partial_{ty}x(y, t) = -\frac{1}{A_2}\partial_{ty} \ln \hat{a}_1(y, t).$$

□

4.4 Випадок $A_2 < A_1$

Зауважимо, що у цьому випадку $\Sigma_2 \subset \Sigma_1$ і $\Sigma_0 = [-\frac{1}{A_2}, -\frac{1}{A_1}] \cup [\frac{1}{A_1}, \frac{1}{A_2}]$.

Визначимо Φ_i та $\tilde{\Phi}_i$ як у (4.19) та (4.17), і введемо матриці розсіювання $s(\lambda_{\pm})$, цього разу для $\lambda \in \dot{\Sigma}_2$, як матриці, що пов'язують Φ_1 і Φ_2 (для стислості залишимо для них ті самі позначення s):

$$\Phi_1(x, t, \lambda_{\pm}) = \Phi_2(x, t, \lambda_{\pm})s(\lambda_{\pm}), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_2 \quad (4.104a)$$

з $\det s(\lambda_{\pm}) = 1$. У свою чергу, $\tilde{\Phi}_1$ та $\tilde{\Phi}_2$ пов'язані співвідношенням

$$D_1^{-1}(\lambda_{\pm})\tilde{\Phi}_1(x, t, \lambda_{\pm}) = D_2^{-1}(\lambda_{\pm})\tilde{\Phi}_2(x, t, \lambda_{\pm})e^{-Q_2(x, t, \lambda_{\pm})}s(\lambda_{\pm})e^{Q_1(x, t, \lambda_{\pm})}, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_2. \quad (4.105a)$$

Коефіцієнти розсіювання s_{ij} можна виразити як у (4.24). Однак у цьому випадку (4.24a) означає, що $s_{11}(\lambda)$ можна аналітично продовжити у $\mathbb{C} \setminus \Sigma_1$ і визначити на верхній та нижній сторонах $\dot{\Sigma}_1$. Оскільки $\Phi_2^{(2)}$ аналітична в $\mathbb{C} \setminus \Sigma_2$ і $\Phi_1^{(2)}$ визначена на верхній і нижній частинах Σ_1 , $s_{12}(\lambda)$ можна продовжити за допомогою (4.24b) на нижню і верхню сторони $\dot{\Sigma}_1$. Таким чином, такі співвідношення виконуються і для $\dot{\Sigma}_0$:

$$\Phi_2^{(2)}(x, t, \lambda_{\pm}) = s_{11}(\lambda_{\pm})\Phi_1^{(2)}(x, t, \lambda_{\pm}) - s_{12}(\lambda_{\pm})\Phi_1^{(1)}(x, t, \lambda_{\pm}), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_0. \quad (4.106a)$$

і, відповідно,

$$(D_2^{-1}\Phi_2^{(2)})(x, t, \lambda_{\pm}) = \tilde{s}_{11}(x, t, \lambda_{\pm})(D_1^{-1}\Phi_1^{(2)})(x, t, \lambda_{\pm}) - \tilde{s}_{12}(x, t, \lambda_{\pm})(D_1^{-1}\Phi_1^{(1)})(x, t, \lambda_{\pm}), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_0, \quad (4.107a)$$

де $\tilde{s}(x, t, \lambda_{\pm}) := e^{-Q_2(x, t, \lambda_{\pm})}s(\lambda_{\pm})e^{Q_1(x, t, \lambda_{\pm})}$.

4.4.1 Симетрії

Симетрії подібні до випадку $A_1 < A_2$. Зокрема,

$$(1) \quad |s_{11}(\lambda_+)|^2 - |s_{12}(\lambda_+)|^2 = 1, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_2. \quad (4.108)$$

$$(2) \quad \left| \frac{s_{12}(\lambda_+)}{s_{11}(\lambda_+)} \right| \leq 1, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_2 \quad (4.109)$$

$$(3) \quad s_{11}(\lambda_+) = s_{22}(\lambda_-), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_2, \quad (4.110a)$$

$$s_{11}(\lambda_+) = i s_{12}(\lambda_-), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_0, \quad (4.110б)$$

$$s_{11}(\lambda_-) = -i s_{12}(\lambda_+), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_0. \quad (4.110B)$$

$$(4) \quad \left| \frac{s_{12}(\lambda_+)}{s_{11}(\lambda_+)} \right| = 1, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_0 \quad (4.111)$$

$$(5) \quad (D_j^{-1} \tilde{\Phi}_j)((-\lambda)_-) = -\sigma_3 (D_j^{-1} \tilde{\Phi}_j)(\lambda_+) \sigma_3, \quad \lambda_+ \in \dot{\Sigma}_j. \quad (4.112)$$

$$(6) \quad \overline{(D_j^{-1} \tilde{\Phi}_j^{(j)})(\bar{\lambda})} = -(D_j^{-1} \tilde{\Phi}_j^{(j)})(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_j, \quad (4.113)$$

$$(7) \quad (D_1^{-1} \tilde{\Phi}_1^{(1)})(-\lambda) = -\sigma_3 (D_1^{-1} \tilde{\Phi}_1^{(1)})(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_1, \quad (4.114a)$$

$$(D_2^{-1} \tilde{\Phi}_2^{(2)})(-\lambda) = \sigma_3 (D_2^{-1} \tilde{\Phi}_2^{(2)})(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_2. \quad (4.114б)$$

$$(8) \quad D_j^{-1}(\lambda_-) \tilde{\Phi}_j^{(j)}(\lambda_-) = (-i D_j^{-1}(\lambda_+) \tilde{\Phi}_j(\lambda_+) \sigma_1)^{(j)}, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_2, \quad (4.115a)$$

$$D_1^{-1}(\lambda_-) \tilde{\Phi}_1^{(1)}(\lambda_-) = (-i D_1^{-1}(\lambda_+) \tilde{\Phi}_1(\lambda_+) \sigma_1)^{(1)}, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_0, \quad (4.115б)$$

$$D_2^{-1}(\lambda_-) \tilde{\Phi}_2^{(2)}(\lambda_-) = D_2^{-1}(\lambda_+) \tilde{\Phi}_2^{(2)}(\lambda_+), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_0. \quad (4.115B)$$

4.4.2 Дискретний спектр

Аналогічно випадку $A_1 < A_2$, можна показати, що дискретний спектр лежить на $(-\frac{1}{A_1}, \frac{1}{A_1})$ (припускаючи, що в точках розгалуження не виникають спектральні сингулярності).

4.4.3 Задача РГ з параметрами (x, t)

Позначення. У цьому випадку, зручно представити $\check{\rho}$ у вигляді

$$\check{\rho}(\lambda) = \frac{s_{12}(\lambda_+)}{s_{11}(\lambda_+)}, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_2 \cup \dot{\Sigma}_0. \quad (4.116)$$

Зауважимо, що з (4.109) та (4.111) випливає, що

$$|\check{\rho}(\lambda)| \leq 1, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_2, \quad (4.117a)$$

$$|\check{\rho}(\lambda)| = 1, \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_0. \quad (4.117b)$$

Маючи на увазі аналітичні властивості власних функцій та коефіцієнтів розсіювання, введемо матричну функцію

$$N(x, t, \lambda) = \left((D_1^{-1} \tilde{\Phi}_1^{(1)})(x, t, \lambda), \frac{(D_2^{-1} \tilde{\Phi}_2^{(2)})(x, t, \lambda)}{s_{11}(\lambda) e^{p_1(x, t, \lambda) - p_2(x, t, \lambda)}} \right), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_2, \quad (4.118)$$

мероморфну в $\mathbb{C} \setminus \Sigma_2$, де p_j , $j = 1, 2$, визначено у (4.13б).

Оскільки $D_j^{-1}(\lambda) \tilde{\Phi}_j(x, t, \lambda) = \Phi_j(x, t, \lambda) e^{Q_j(x, t, \lambda)}$, $N(x, t, \lambda)$ можна записати як

$$N(x, t, \lambda) = \left(\Phi_1^{(1)}(x, t, \lambda), \frac{\Phi_2^{(2)}(x, t, \lambda)}{s_{11}(\lambda)} \right) e^{p_1(x, t, \lambda) \sigma_3}.$$

Продовжуючи як у випадку $A_1 < A_2$, можна зробити висновок, що $N(x, t, \lambda)$ характеризується як розв'язок такої задачі Рімана–Гільберта:

Знайти 2×2 мероморфну матрицю $N(x, t, \lambda)$, яка задовольняє такі умови:

- Умову *стрибка*

$$N^+(x, t, \lambda) = N^-(x, t, \lambda) G(x, t, \lambda), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_2 \cup \dot{\Sigma}_0, \quad (4.119a)$$

де

$$G(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-p_1(\lambda_+)} & 0 \\ 0 & e^{p_1(\lambda_+)} \end{pmatrix} G_0(\lambda) \begin{pmatrix} e^{p_1(\lambda_+)} & 0 \\ 0 & e^{-p_1(\lambda_+)} \end{pmatrix} \quad (4.119b)$$

i

$$G_0(\lambda) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -\check{\rho}(\lambda) \\ \overline{\check{\rho}(\lambda)} & 1 - |\check{\rho}(\lambda)|^2 \end{pmatrix}, & \lambda \in \dot{\Sigma}_2, \\ \begin{pmatrix} 1 & -\check{\rho}(\lambda) \\ \frac{1}{\check{\rho}(\lambda)} & 0 \end{pmatrix}, & \lambda \in \dot{\Sigma}_0. \end{cases} \quad (4.119\text{В})$$

- Умову нормування:

$$N(x, t, \lambda) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), & \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \mathbb{C}^+, \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), & \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \mathbb{C}^-, \end{cases} \quad (4.120)$$

- Умови сингулярності: сингулярності $N(x, t, \lambda)$ при $\pm \frac{1}{A_j}$ мають порядок не більший за $\frac{1}{4}$.
- Умови на лишки (якщо ϵ): $N^{(2)}(x, t, \lambda)$ має прості полюси у точках $\{\check{\lambda}_k, -\check{\lambda}_k\}_1^{\check{N}}$, причому лишки задовольняють рівняння

$$\text{Res}_{\pm \check{\lambda}_k} N^{(2)}(x, t, \lambda) = \check{\kappa}_k e^{-2p_1(\check{\lambda}_k)} N^{(2)}(x, t, \pm \check{\lambda}_k), \quad (4.121)$$

де $\{\check{\lambda}_k, \check{\kappa}_k\}_1^{\check{N}}$ такі, що $\check{\lambda}_k \in (0, \frac{1}{A_1})$ та $\check{\kappa}_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ϵ заданими.

Зауваження 4.4.1. Розв'язок наведеної вище задачі РГ, якщо він існує, має такі властивості:

1. $\det N \equiv 1$.

2. *Симетрії:*

$$N(-\lambda) = -\sigma_3 N(\lambda) \sigma_3, \quad \overline{N(\bar{\lambda})} = -N(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_1, \quad (4.122\text{а})$$

$$N((-\lambda)_-) = -\sigma_3 N(\lambda_+) \sigma_3, \quad \overline{N(\bar{\lambda}_-)} = -N(\lambda_+), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_2. \quad (4.122\text{б})$$

де $N(\lambda) \equiv N(x, t, \lambda)$ (впливає з відповідних симетрій матриці стрибків та умов на лишки, припускаючи єдиність розв'язку).

4.4.4 Власні функції в околі $\lambda = 0$

Ввівши $\tilde{\Phi}_{0,j}$ як у (4.83) і продовжуючи міркування як у випадку $A_1 < A_2$, отримуємо таке розвинення $N(x, t, \lambda)$ в околі $\lambda = 0$:

$$N(x, t, \lambda) = i \begin{pmatrix} 0 & b_1(x, t) \\ b_1^{-1}(x, t) & 0 \end{pmatrix} + i\lambda \begin{pmatrix} b_2(x, t) & 0 \\ 0 & b_3(x, t) \end{pmatrix} + O(\lambda^2), \quad (4.123)$$

де

$$b_1(x, t) = e^{\frac{1}{2A_1} \int_{-\infty}^x (m(\xi, t) - A_1) d\xi}, \quad (4.124a)$$

$$b_2(x, t) = \left(\int_{-\infty}^x e^{-(x-\xi)} \frac{m - A_1}{2} d\xi + \frac{A_1}{2} \right) e^{-\frac{1}{2A_1} \int_{-\infty}^x (m(\xi, t) - A_1) d\xi}, \quad (4.124б)$$

$$b_3(x, t) = \left(\int_x^{\infty} e^{(x-\xi)} \frac{m - A_2}{2} d\xi + \frac{A_2}{2} \right) e^{\frac{1}{2A_1} \int_{-\infty}^x (m(\xi, t) - A_1) d\xi}. \quad (4.124в)$$

Твердження 4.4.2. $u(x, t)$ та $u_x(x, t)$ можна алгебраїчно виразити через коефіцієнти $b_j(x, t)$, $j = 1, 3$ у розвиненні (4.123) $N(x, t, \lambda)$ таким чином:

$$u(x, t) = b_1(x, t)b_2(x, t) + b_1^{-1}(x, t)b_3(x, t), \quad (4.125a)$$

$$u_x(x, t) = -b_1(x, t)b_2(x, t) + b_1^{-1}(x, t)b_3(x, t). \quad (4.125б)$$

4.4.5 Задача РГ у координатах (y, t)

Введемо нову просторову змінну $\check{y}(x, t)$ за допомогою

$$\check{y}(x, t) = x + \frac{1}{A_1} \int_{-\infty}^x (m(\xi, t) - A_1) d\xi - A_1^2 t \quad (4.126)$$

і введемо $\hat{N}(\check{y}, t, \lambda)$ так, що $N(x, t, \lambda) = \hat{N}(\check{y}(x, t), t, \lambda)$. Тоді умова стрибка (4.119a) набуває вигляду

$$\hat{N}^+(\check{y}, t, \lambda) = \hat{N}^-(\check{y}, t, \lambda) \hat{G}(\check{y}, t, \lambda), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_2 \cup \dot{\Sigma}_0, \quad (4.127a)$$

де

$$\hat{G}(\check{y}, t, \lambda) := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\hat{p}_1(\check{y}, t, \lambda_+)} & 0 \\ 0 & e^{\hat{p}_1(\check{y}, t, \lambda_+)} \end{pmatrix} G_0(\lambda) \begin{pmatrix} e^{\hat{p}_1(\check{y}, t, \lambda_+)} & 0 \\ 0 & e^{-\hat{p}_1(\check{y}, t, \lambda_+)} \end{pmatrix}, \quad (4.127б)$$

$G_0(\lambda)$ задано у (4.119в),

$$\hat{p}_1(\check{y}, t, \lambda) := \frac{iA_1 k_1(\lambda)}{2} \left(\check{y} - \frac{2t}{\lambda^2} \right). \quad (4.127в)$$

Таким чином, $G(x, t, \lambda) = \hat{G}(\check{y}(x, t), t, \lambda)$ і $p_1(x, t, \lambda) = \hat{p}_1(\check{y}(x, t), t, \lambda)$, де стрибок $G(x, t, \lambda)$ та фаза $p_1(x, t, \lambda)$ визначаються через (4.119б) та (4.13б) відповідно.

Відповідно, умови на лишки (4.121) набувають вигляду

$$\text{Res}_{\pm\check{\lambda}_k} \hat{N}^{(2)}(\check{y}, t, \lambda) = \check{\kappa}_k e^{-2\hat{p}_1(\check{y}, t, \lambda_k)} \hat{N}^{(1)}(\check{y}, t, \pm\check{\lambda}_k), \quad (4.128)$$

де $\check{\kappa}_k = \frac{1}{\check{b}_k s'_{11}(\check{\lambda}_k)}$.

Зауваживши, що умова нормування (4.120), симетрії (4.122) та умови сингулярності при $\lambda = \pm\frac{1}{A_j}$ виконуються в нових координатах (\check{y}, t) , приходимо до основної задачі РГ.

Основна задача РГ. За даними $\check{\rho}(\lambda)$ для $\lambda \in \dot{\Sigma}_2 \cup \dot{\Sigma}_0$, і $\{\check{\lambda}_k, \check{\kappa}_k\}_1^{\check{N}}$, де $\check{\lambda}_k \in (0, \frac{1}{A_1})$ та $\check{\kappa}_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, які пов'язані з початковими даними $u_0(x)$ у (4.1), знайти кусково (відносно $\dot{\Sigma}_1$) мероморфну, 2×2 -матричну функцію $\hat{N}(\check{y}, t, \lambda)$, яка задовольняє такі умови:

- Умову стрибка (4.127) на $\dot{\Sigma}_2 \cup \dot{\Sigma}_0$ (з $G_0(\lambda)$, що визначено у (4.119в)).
- Умови на лишки (4.128).
- Умову *нормування*:

$$\hat{N}(\check{y}, t, \lambda) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} + O(\frac{1}{\lambda}), & \lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \mathbb{C}^+, \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} + O(\frac{1}{\lambda}), & \lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \mathbb{C}^-. \end{cases} \quad (4.129)$$

- Умови *сингулярності*: $\hat{N}(\check{y}, t, \lambda)$ може мати сингулярності при $\pm\frac{1}{A_j}$ порядку $\frac{1}{4}$.

- Симетрії:

$$\hat{N}(-\lambda) = -\sigma_3 \hat{N}(\lambda) \sigma_3, \quad \overline{\hat{N}(\bar{\lambda})} = -N(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_2, \quad (4.130a)$$

$$\hat{N}((-\lambda)_-) = -\sigma_3 \hat{N}(\lambda_+) \sigma_3, \quad \overline{\hat{N}(\lambda_-)} = -\hat{N}(\lambda_+), \quad \lambda \in \dot{\Sigma}_1. \quad (4.130б)$$

де $\hat{N}(\lambda) \equiv \hat{N}(\check{y}, t, \lambda)$.

4.4.6 Відновлення $u(x, t)$ з розв'язку задачі PГ

Теорема 4.4.3. *Нехай $u(x, t)$ є розв'язком задачі Коші (4.1) і нехай $\hat{N}(\check{y}, t, x)$ є розв'язком задачі PГ (4.127)–(4.129), дані якої визначаються $u_0(x)$ з (4.1). Нехай*

$$\hat{N}(\check{y}, t, \lambda) = i \begin{pmatrix} 0 & \hat{b}_1(\check{y}, t) \\ \hat{b}_1^{-1}(\check{y}, t) & 0 \end{pmatrix} + i\lambda \begin{pmatrix} \hat{b}_2(\check{y}, t) & 0 \\ 0 & \hat{b}_3(\check{y}, t) \end{pmatrix} + O(\lambda^2) \quad (4.131)$$

є розвиненням $\hat{N}(\check{y}, t, x)$ при $\lambda = 0$. Тоді $u(x, t)$ можна виразити у параметричній формі через $\hat{b}_j(\check{y}, t)$, $j = 1, 2, 3$: $u(x, t) = \hat{u}(\check{y}(x, t), t)$, де

$$\hat{u}(\check{y}, t) = \hat{b}_1(\check{y}, t) \hat{b}_2(\check{y}, t) + \hat{b}_1^{-1}(\check{y}, t) \hat{b}_3(\check{y}, t), \quad (4.132a)$$

$$x(\check{y}, t) = \check{y} - 2 \ln \hat{b}_1(\check{y}, t) + A_2^2 t. \quad (4.132б)$$

Крім того, $\hat{u}_x(\check{y}, t)$ можна також алгебраїчно виразити через $\hat{b}_j(\check{y}, t)$, $j = 1, 2, 3$: $u_x(x, t) = \hat{u}_x(\check{y}(x, t), t)$, де

$$\hat{u}_x(\check{y}, t) = -\hat{b}_1(\check{y}, t) \hat{b}_2(\check{y}, t) + \hat{b}_1^{-1}(\check{y}, t) \hat{b}_3(\check{y}, t). \quad (4.132в)$$

Твердження 4.4.4. *Нехай $\hat{M}(y, t, \mu)$ - розв'язок задачі PГ (4.127)–(4.130), дані якої пов'язані з початковими даними $u_0(x)$. Визначимо $\hat{\mu}_1(y, t) := \hat{M}_{11}(y, t, 0) + \hat{M}_{21}(y, t, 0)$ та $\hat{\mu}_2(y, t) := \hat{M}_{12}(y, t, 0) + \hat{M}_{22}(y, t, 0)$. Нехай ці функції є диференційовними за y і t . Тоді x -похідна розв'язку $u(x, t)$ задачі Коші (4.1) має параметричне пзображення*

$$u_x(x(y, t), t) = \frac{1}{2A_1} \partial_{ty} \ln \frac{\hat{\mu}_1(y, t)}{\hat{\mu}_2(y, t)}, \quad (4.133a)$$

$$x(y, t) = y + \ln \frac{\hat{\mu}_1(y, t)}{\hat{\mu}_2(y, t)} + A_1^2 t. \quad (4.133б)$$

Доведення. Надалі виразимо u_x через змінні (y, t) . Для вираження функції $f(x, t)$ через (y, t) будемо використовувати запис $\hat{f}(y, t) := f(x(y, t), t)$, наприклад,

$$\hat{u}(y, t) := u(x(y, t), t), \quad \hat{u}_x(y, t) := u_x(x(y, t), t), \quad \hat{m}(y, t) := m(x(y, t), t).$$

Диференціювання тотожності $x(y(x, t), t) = x$ w.r.t. t дає

$$\partial_t (x(y(x, t), t)) = x_y(y, t)y_t(x, t) + x_t(y, t) = 0. \quad (4.134)$$

З (4.126) випливає, що

$$x_y(y, t) = \frac{A_1}{\hat{m}(y, t)} \quad (4.135)$$

і

$$y_t(x, t) = -\frac{1}{A_1}(u^2 - u_x^2)m.$$

Підставивши це і (4.135) у (4.134), отримуємо

$$x_t(y, t) = \hat{u}^2(y, t) - \hat{u}_x^2(y, t). \quad (4.136)$$

Далі, диференціюючи (4.136) за y , отримуємо

$$x_{ty}(y, t) = (\hat{u}^2(y, t) - \hat{u}_x^2(y, t))_x x_y(y, t) = 2A_1 \hat{u}_x(y, t). \quad (4.137)$$

Таким чином, отримуємо параметричне представлення $u_x(x, t)$:

$$u_x(x(y, t), t) \equiv \hat{u}_x(y, t) = \frac{1}{2A_1} \partial_{ty} x(y, t),$$

$$x(y, t) = y + \ln \frac{\hat{\mu}_1(y, t)}{\hat{\mu}_2(y, t)} + A_1^2 t,$$

що дає (4.133). □

4.5 Перспективи подальших досліджень

Ми зосередилися на результатах зображення, припускаючи існування розв'язку задачі (4.1) у певних функціональних класах. Наскільки нам відомо, питання існування залишається відкритим. Одним із шляхів до відповіді на нього

є звернення до функціонально-аналітичних методів РУЧП для отримання коректної постановки задачі (2.1) у відповідних функціональних класах. Однак дуже мало відомо про випадки ненульових граничних умов, зокрема, для фонів, що мають різну поведінку на різних нескінченностях. Починаючи з 1980-х років, проблеми існування інтегровних нелінійних РУЧП зі ступінчастими початковими умовами розв'язували за допомогою класичного методу оберненого перетворення розсіювання [84]. Останні досягнення в цьому напрямку (у випадку рівняння Кортевега-де Фріза) було висвітлено в [62, 64, 75] (див. також [63]). Інший спосіб показати існування - це вивести його з формалізму задачі РГ (див., наприклад, [69] для випадку дефокусуєчого нелінійного рівняння Шредінгера), де ключовим моментом є встановлення існування розв'язку пов'язаної з ним задачі РГ та контроль його поведінки відносно просторового параметра. Для рівнянь типу Камасси-Хольма, де формалізм задачі РГ передбачає зміну просторової змінної, природно досліджувати існування розв'язку в обох координатах (x, t) і (y, t) . Точніше кажучи, проблема розв'язності розпадається на дві проблеми: (i) розв'язність задачі РГ, параметризованої (y, t) і (ii) бієктивність заміни просторової змінної. Зокрема, можливо, що саме заміна змінних може бути відповідальною за руйнування хвилі [30, 18].

Іншою цікавою і важливою проблемою, яку можна розв'язати за допомогою розробленого підходу, є дослідження поведінки розв'язків задачі Коші (4.1) за великим часом за допомогою адаптації нелінійного методу найшвидшого спуску.

4.6 Висновки до розділу 4

Представлено підхід задачі Рімана-Гільберта для модифікованого рівняння Камасси-Хольма на осі зі ступінчастими граничними умовами. У запропонованому формалізмі, розрізи $k_j(\lambda)$ взято вздовж півпрямих Σ_j (зовнішні розрізи), що є зручним з тієї точки зору, що розв'язок рівняння мКХ отримується, використовуючи розв'язок задачі РГ в точці, що

лежить в області аналітичності. Зауважимо, що можна сформулювати задачу РГ, визначивши розрізи для $k_j(\lambda)$ як відрізки $(-\frac{1}{A_j}, \frac{1}{A_j})$ (внутрішні розрізи). У випадку з внутрішніми розрізами, властивості розв'язків Йоста є більш традиційними (два стовпчики є аналітичними у верхній півплощині, а інші два - у нижній), але, з іншого боку, можливі власні значення розташовані на контурі стрибка. За результатами досліджень,

- Розроблено метод оберненої задачі розсіювання у вигляді задачі Рімана-Гільберта у двох випадках: коли правий фон більший за лівий і коли лівий фон більший за правий.
- Введено перетворення рівнянь пари Лакса, які дозволяють детально дослідити аналітичні властивості відповідних розв'язків Йоста та спектральних функцій.
- Побудовано розв'язки Йоста, досліджено аналітичні та асимптотичні властивості власних функцій і відповідних спектральних функцій (коефіцієнтів розсіювання), включаючи поведінку в точках розгалуження.
- Досліджено симетрії спектральних функцій.
- Отримано параметричне зображення розв'язку задачі Коші в термінах розв'язку пов'язаної з нею задачі РГ.

Запропонований підхід до зображення розв'язків задачі Коші зі ступінчастими умовами може стати ефективною основою для подальшого дослідження властивостей розв'язків, зокрема, асимптотичної поведінки розв'язків за великим часом.

Загальні висновки

У дисертаційній роботі розроблено метод оберненої задачі розсіювання з метою його застосування до початкових задач для модифікованого рівняння Камасси–Хольма з різними граничними умовами, зокрема, (i) коли розв'язок прямує до ненульової сталої на обох нескінченностях просторової змінної, та (ii) коли розв'язок прямує до двох різних сталих, коли просторова змінна прямує до плюс та мінус нескінченності. Специфікою дисертаційної роботи є те, що це рівняння розглядається у випадку неспадних граничних умов. Такі задачі привертають особливу увагу, оскільки вони можуть бути використані як моделі для вивчення дисперсійних ударних хвиль.

Метод оберненої задачі розсіювання для модифікованого рівняння Камасси–Хольма на постійному ненульовому та ступінчастому фонах був розроблений вперше. Крім того, для задачі на постійному ненульовому фоні вперше була отримана асимптотика за великим часом.

Для модифікованого рівняння Камасси–Хольма на всій прямій у випадку, коли розв'язок прямує до ненульової сталої на обох нескінченностях просторової змінної, отримано такі основні результати (див. розділи 2 та 3):

- Розвинуто метод оберненої задачі розсіювання з використанням формалізму задачі Рімана–Гільберта. Зокрема, запропоновано калібрувальне перетворення для рівнянь пари Лакса, що зводить початкову пару Лакса до вигляду, який дозволяє ефективно контролювати аналітичні властивості її розв'язків як функцій спектрального параметру; введено відповідні розв'язки Йоста та пов'язані з ними коефіцієнти

розсіювання, та проаналізовано їхні аналітичні та асимптотичні властивості; отримано співвідношення симетрії для спектральних функцій; введено новий (уніформізуючий) спектральний параметр, який дозволяє уникнути нераціональної залежності коефіцієнтів у рівняннях пари Лакса від спектрального параметра.

- Виявлено особливості, які відрізняють рівняння мКХ від інших рівнянь типу КХ. Зокрема, у випадку рівняння мКХ виявлено, що для контролю розв'язків Йоста при $\lambda = 0$ не потрібно використовувати нове калібрувальне перетворення, а достатньо перегрупувати члени у парі Лакса, яка забезпечує ефективний контроль її розв'язків при $\lambda \rightarrow \infty$.
- Отримано параметричне зображення розв'язку задачі Коші в термінах розв'язку асоційованої задачі РГ.
- Описано як регулярні, так і нерегулярні односолітонні розв'язки, що відповідають задачам РГ з тривіальними умовами стрибка та відповідним чином заданими умовами на лишки. Зокрема, виділено два типи нерегулярних солітонних розв'язків рівняння мКХ: (i) розв'язки піконного типу, які є функціями неперервними разом із першою похідною, але мають необмежені похідні порядків більших за 2 у точці піку; (ii) петлеподібні багатозначні розв'язки.
- Вихідну задачу РГ, асоційовану з рівнянням мКХ, яка має специфічні сингулярності при $\mu = \pm 1$, зведено до звичайної задачі РГ (тобто такої, що має тільки умову стрибка та умову нормування).
- Застосовуючи нелінійний метод найскорішого спуску, отримано головні асимптотичні члени для розв'язку $u(x, t)$ задачі Коші у двох секторах півплощини (x, t) , $1 < \frac{x}{t} < 3$ та $\frac{3}{4} < \frac{x}{t} < 3 < 1$, де відхилення від фону є нетривіальним. Виявлено, що це відхилення задається модульованими (з параметрами, що залежать від $\frac{x}{t}$), затухаючими (як $t^{-1/2}$) тригонометричними коливаннями.

Для модифікованого рівняння Камасси–Хольма на всій прямій у випадку, коли розв’язок наближається до двох різних сталих, коли просторова змінна прямує до плюс та мінус нескінченності, отримано такі основні результати (див. розділ 4):

- Розроблено метод оберненої задачі розсіювання у вигляді задачі Рімана–Гільберта для двох випадків: коли правий фон для просторової змінної більший за лівий, і навпаки.
- Введено перетворення рівнянь пари Лакса, які дозволяють детально дослідити аналітичні властивості відповідних розв’язків Йоста та спектральних функцій.
- Досліджено аналітичні та асимптотичні властивості розв’язків Йоста і відповідних спектральних функцій (коефіцієнтів розсіювання), включаючи поведінку в точках розгалуження.
- Досліджено симетрії спектральних функцій.
- Отримано параметричне зображення розв’язку задачі Коші в термінах розв’язку пов’язаної з нею задачі Рімана–Гільберта.

Всі результати дисертаційної роботи наведені з повними доведеннями. Вони мають теоретичний характер і можуть бути використані в подальших дослідженнях початково-крайових задач для рівнянь типу Камасси–Хольма, які є перспективними моделями фізичних процесів різної природи.

Список використаних джерел

- [1] M. J. Ablowitz, “Nonlinear Dispersive Waves. Asymptotic Analysis and Solitons”, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge: Cambridge University Press (2011).
- [2] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur, “Method for solving the sine–Gordon equation”, *Phys. Rev. Lett.*, 30 (1973), 1262–1264.
- [3] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur, “Nonlinear evolution equation of physical significance”, *Phys. Rev. Lett.*, 31 (1973), 125–127.
- [4] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur, “The inverse scattering transform – Fourier analysis for nonlinear problems,” *Stud. Appl. Math.*, 53 (1974), 249–315.
- [5] M. J. Ablowitz and A. C. Newell, “The decay of the continuous spectrum for solutions of the Korteweg de Vries equation,” *J. Math. Phys.* 14, (1973), 1277–1284.
- [6] M. J. Ablowitz and H. Segur, “Solitons and Inverse Scattering Transform”, *SIAM Studies in Applied Mathematics*, 4 (1981).
- [7] K. Andreiev, I. Egorova, G. Teschl, G., “Rarefaction waves for the Korteweg-de Vries equation via nonlinear steepest descent”, *J. Diff. Equ.*, 261, (2016), 5371–5410.

- [8] S. Anco, D. Kraus, “Hamiltonian structure of peakons as weak solutions for the modified Camassa–Holm equation”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 38, 9 (2018) 4449–4465.
- [9] R. Beals, R. R. Coifman, “Scattering and inverse scattering for first order systems”, *Comm. Pure Appl. Math.*, 37,1 (1984), 39–90.
- [10] M. Bertola, M. Gekhtman and J. Szmigielski, “The Cauchy two-matrix model”, *Commun. Math. Phys.*, 287, 3 (2009), 983–1014.
- [11] D. Bilman, P. D. Miller, “A robust inverse scattering transform for the focusing nonlinear Schrödinger equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, 72 (2019), 1722–1805.
- [12] G. Biondini, “Riemann problems and dispersive shocks in self-focusing media”, *Phys. Rev. E*, 98 (2018), 052220.
- [13] G. Biondini, E. Fagerstroom, B. Prinari, “Inverse scattering transform for the defocusing nonlinear Schrödinger equation with fully asymmetric non-zero boundary conditions”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 333 (2016), 117–136.
- [14] G. Biondini, L. Lottes, D. Mantzavinos, “Inverse scattering transform for the focusing nonlinear Schrödinger equation with counterpropagating flows”, *Stud. Appl. Math.*, 146, (2021), 371–439.
- [15] G. Biondini, D. Mantzavinos, “Long-time asymptotics for the focusing nonlinear Schrödinger equation with nonzero boundary conditions at infinity and asymptotic stage of modulational instability”, *Comm. Pure Appl. Math.*, 70 (2017), 2300–2365
- [16] C. H. Borzi, R. A. Kraenkel, M. A. Manna, A. Periera, “Nonlinear dynamics of short travelling capillary-gravity waves”, *Phys. Rev. E*, 71 (2005), 026307

- [17] A. Boutet de Monvel, A. Its, D. Shepelsky, “Painlevé-type asymptotics for the Camassa–Holm equation”, *SIAM J. Math. Anal.*, 42, 4 (2010) 1854–1873.
- [18] A. Boutet de Monvel, I. Karpenko, D. Shepelsky, “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with nonzero boundary conditions”, *J. Math. Phys.* 61, 3, (2020), 031504, 24.
- [19] A. Boutet de Monvel, A. Kostenko, D. Shepelsky, and G. Teschl, “Long-time asymptotics for the Camassa–Holm equation”, *SIAM J. Math. Anal.*, 41 (2009), 1559–1588.
- [20] A. Boutet de Monvel, V. P. Kotlyarov and D. Shepelsky, “Focusing NLS Equation: Long-time dynamics of step-like initial data”, *Int. Math. Res. Not.* **7**, 1613–1653 (2011).
- [21] A. Boutet de Monvel, J. Lenells, D. Shepelsky, “The focusing NLS equation with step-like oscillating background: scenarios of long-time asymptotics”, *Comm. Math. Phys.*, 383, (2021), 893–952.
- [22] A. Boutet de Monvel, J. Lenells, D. Shepelsky, “The Focusing NLS Equation with Step-Like Oscillating Background: The Genus 3 Sector”, *Comm. Math. Phys.*
- [23] A. Boutet de Monvel, D. Shepelsky, “Riemann–Hilbert approach for the Camassa–Holm equation on the line”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343, 10 (2006), 627–632.
- [24] A. Boutet de Monvel and D. Shepelsky, “Riemann–Hilbert problem in the inverse scattering for the Camassa–Holm equation on the line, in: Probability, Geometry and Integrable Systems”, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* 55, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, 53–75.
- [25] A. Boutet de Monvel, D. Shepelsky, “Long-time asymptotics of the Camassa–Holm equation on the line”, *Integrable systems and random*

matrices, *Contemp. Math.*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 458, (2008), 99–116.

- [26] A. Boutet de Monvel, D. Shepelsky, “Long time asymptotics of the Camassa–Holm equation on the half-line”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59, 7 (2009), 3015–3056.
- [27] A. Boutet de Monvel and D. Shepelsky, “A Riemann–Hilbert approach for the Degasperis–Procesi equation, *Nonlinearity*”, 26, 7 (2013) 2081–2107.
- [28] A. Boutet de Monvel and D. Shepelsky, “The Ostrovsky–Vakhnenko equation by a Riemann–Hilbert approach”, *J. Phys. A*, 48, 3 (2015), 035204, 34.
- [29] A. Boutet de Monvel and D. Shepelsky, L. Zielinski, “A Riemann–Hilbert approach for the Novikov equation”, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 12, 95 (2016).
- [30] A. Boutet de Monvel, D. Shepelsky and L. Zielinski, “The short pulse equation by a Riemann–Hilbert approach”, *Lett. Math. Phys.* **107** (2017), 1345–1373.
- [31] A. Bressan, A. Constantin, “Global conservative solutions of the Camassa–Holm equation”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 183, 2 (2007), 215–239.
- [32] R. Buckingham, S. Venakides, “Long-time asymptotics of the nonlinear Schrödinger equation shock problem”, *Comm. Pure Appl. Math.*, 60, (2007), 1349–1414.
- [33] R. Camassa and D. D. Holm, “An integrable shallow water equation with peaked solitons”, *Phys. Rev. Lett.* 71 (1993), 1661–1664.
- [34] R. Camassa, D. D. Holm, J. M. Hyman, “A new integrable shallow water equation”, *Adv. Appl. Mech.*, 31, 1 (1994), 1–33

- [35] X. Chang, J. Szmigielski, “Liouville integrability of conservative peakons for a modified CH equation”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, 24, 4 (2017), 584–595.
- [36] X. Chang, J. Szmigielski, “Lax integrability and the peakon problem for the modified –Holm equation”, *Comm. Math. Phys.*, 358, 1 (2018), 295–341.
- [37] R. M. Chen, Robin Ming, F. Guo, Fei, Y. Liu, Yue, C. Qu, “Analysis on the blow-up of solutions to a class of integrable peakon equations”, *J. Funct. Anal.*, 270, 6 (2006), 2343–2374.
- [38] R. M. Chen, Y. Liu, C. Qu, S. Zhang, “Oscillation-induced blow-up to the modified Camassa–Holm equation with linear dispersion”, *Adv. Math.*, 272 (2015), 225–251.
- [39] A. Constantin, Adrian, “Existence of permanent and breaking waves for a shallow water equation: a geometric approach”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50, 2 (2000), 321–362.
- [40] A. Constantin, “On the scattering problem for the Camassa–Holm equation”, *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 457, 2008 (2001), 953–970.
- [41] A. Constantin, Adrian, J. Escher, “Global existence and blow-up for a shallow water equation”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 4, 26, 2 (1998), 303–328.
- [42] A. Constantin, J. Escher, “Well-posedness, global existence, and blowup phenomena for a periodic quasi-linear hyperbolic equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, 51, 5 (1998), 475–504.
- [43] A. Constantin, J. Escher, “Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations”, *Acta Math.*, 181, 2 (1998), 229–243.

- [44] A. Constantin, D. Lannes, “The hydrodynamical relevance of the Camassa–Holm and Degasperis-Procesi equations”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 192, 1 (2009), 165–186.
- [45] A. Constantin, L. Molinet, “Global weak solutions for a shallow water equation”, *Comm. Math. Phys.*, 211, 1 (2000), 45–61.
- [46] A. Constantin, W. A. Strauss, “Stability of peakons”, *Comm. Pure Appl. Math.*, 53, 5 (2000) 603–610.
- [47] R. Danchin, “A few remarks on the Camassa–Holm equation”, *Differential Integral Equations*, 14, 8 (2001), 953–988.
- [48] P. A. Deift, “Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann–Hilbert approach, Courant Lecture Notes in Mathematics”, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 3 (1999), viii–273.
- [49] P. A. Deift, A. R. Its and X. Zhou, “Long-time asymptotics for integrable nonlinear wave equations”, *Springer Series in Nonlinear Dynamics*. Springer, (1993), 181–204
- [50] P. Deift, S. Kamvissis, T. Kriecherbauer, X. Zhou, “The Toda rarefaction problem”, *Comm. Pure Appl. Math.*, XLIX (1996), 35–83.
- [51] P. Deift, E. Trubowitz, “Inverse scattering on the line”, *Comm. Pure Appl. Math.*, 32, 2 (1979) 121–251.
- [52] P. Deift and X. Zhou, “A steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problem. Asymptotics for the MKdV equation”, *Annals Math.*, 137 (1993), 295–368.
- [53] P. Deift, X. Zhou, “A priori L^p -estimates for solutions of Riemann–Hilbert problems”, *Int. Math. Res. Not.*, 40 (2002), 2121–2154.

- [54] P. A. Deift and X. Zhou, “Long-time asymptotics for solutions of the NLS equation with initial data in a weighted Sobolev space”, *Comm. Pure Appl. Math.*, 56 (2003), 1029–1077 .
- [55] F. Demontis, B. Prinari, C. van der Mee, F. Vitale, “The inverse scattering transform for the defocusing nonlinear Schrödinger equations with nonzero boundary conditions”, *Stud. Appl. Math.*, 131 (2013), 1–40.
- [56] A. Degasperis, D. D. Holm, and A. N. W. Hone, “Integrable and non-integrable equations with peakons”, *Nonlinear Physics: Theory and Experiment, II* (2003), 37–43.
- [57] A. Degasperis and M. Procesi, “Asymptotic integrability, *World Scientific*”, 7 (1999), 23–37
- [58] J. Eckhardt, “Unique solvability of a coupling problem for entire functions”, *Constr. Approx.*, 49, 1 (2019), 123–148.
- [59] J. Eckhardt, G. Teschl, “On the isospectral problem of the dispersionless Camassa–Holm equation”, *Adv. Math.*, 235, (2013), 469–495.
- [60] J. Eckhardt, G. Teschl, “A coupling problem for entire functions and its application to the long-time asymptotics of integrable wave equations”, *Nonlinearity*, 29, 3 (2016), 1036–1046.
- [61] I. Egorova, Z. Gladka, V. Kotlyarov, G. Teschl, “Long-time asymptotics for the Korteweg-de Vries equation with steplike initial data”, *Nonlinearity*, 26 (2013), 1839–1864.
- [62] I. Egorova, K. Grunert, G. Teschl, “On the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation with steplike finite-gap initial data I. Schwartz-type perturbations”, *Nonlinearity*, 22 (2009), 1431–1457.
- [63] I. Egorova, J. Michor, G. Teschl, “Soliton asymptotics for KdV shock waves via classical inverse scattering”, Preprint arXiv:2109.08423.

- [64] I. Egorova, G. Teschl, “On the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation with steplike finite-gap initial data II. Perturbations with finite moments”, *J. d’Analyse Math.*, 115 (2011), 71–101.
- [65] G.A. El, M.A. Hoefer, “Dispersive shock waves and modulation theory”, *Phys. D*, 333 (2016), 11–65.
- [66] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, “Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons”, Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, (1987).
- [67] A.S. Fokas, “On a class of physically important integrable equations”, *Phys. D*, 87 (1995), 145–150.
- [68] A. S. Fokas, A. R. Its, Alexander R., A. A. Kapaev, V. Yu. Novokshenov, “Painlevé transcendents, Mathematical Surveys and Monographs, The Riemann–Hilbert approach”, American Mathematical Society, Providence, RI, 128 (2006), xii–553.
- [69] S. Fromm, J. Lenells, R. Quirchmayr, “The defocusing nonlinear Schrödinger equation with step-like oscillatory initial data”, Preprint arXiv:2104.03714.
- [70] Y. Fu, G. Gui, Y. Liu, C. Qu, “On the Cauchy problem for the integrable modified Camassa–Holm equation with cubic nonlinearity”, *J. Differential Equations*, 255, 7 (2013), 1905–1938.
- [71] B. Fuchssteiner, “Some tricks from the symmetry-toolbox for nonlinear equations: generalizations of the Camassa–Holm equation”, *Phys. D*, 95 (1996), 229–243.
- [72] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, “Method for solving the Korteweg-deVries equation”, *Phys. Rev. Lett.*, 19 (1967), 1095–1097.

- [73] C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal and R. M. Miura, “The Korreweg-deVries equation and generalization. VI. Methods for exact solution”, *Comm. Pure Appl. Math.*, 27 (1974), 97–133.
- [74] Y. Gao, J. Liu, “The modified Camassa–Holm equation in Lagrangian coordinates”, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 23, 6 (2018), 2545–2592.
- [75] S. Grudsky, A. Rybkin, “On classical solutions of the KdV equation”, Preprint arXiv:1905.08372.
- [76] G. Gui, Y. Liu, P. J. Olver, C. Qu, “Wave-breaking and peakons for a modified Camassa–Holm equation”, *Comm. Math. Phys.*, 319, 3 (2013), 731–759.
- [77] Y. Hou, E. Fan and Z. Qiao, “The algebro-geometric solutions for the Fokas-Olver-Rosenau-Qiao (FORQ) hierarchy”, *J. Geom. Phys.*, 117 (2017), 105–133.
- [78] A. R. Its, “The Riemann–Hilbert Problem and Integrable Systems”, *Not. AMS*, 50 (2003).
- [79] A. R. Its, “Asymptotic behavior of the solutions to the nonlinear Schrödinger equation, and isomonodromic deformations of systems of linear differential equations”, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 261, 1 (1981), 14–18.
- [80] A. R. Its, A. F. Ustinov, “Time asymptotics of the solution of the Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation with boundary conditions of finite density type”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 291, 1 (1986), 91–95.
- [81] R. Jenkins, “Regularization of a sharp shock by the defocusing nonlinear Schrödinger equation, *Nonlinearity*”, 28 (2015), 2131–2180.
- [82] R. S. Johnson, “Camassa–Holm, Korteweg–de Vries and related models for water waves”, *J. Fluid Mech.*, 455 (2002), 63–82.

- [83] J. Kang, X. Liu, P. J. Olver, C. Qu, “Liouville correspondence between the modified KdV hierarchy and its dual integrable hierarchy”, *J. Nonlinear Sci.*, 26, 1 (2016), 141–170.
- [84] T. Kappeler, “Solution of the Korteweg-de Vries equation with steplike initial data”, *J. of Differential Equations*, 63 (1986), 306–331.
- [85] I. Karpenko, “Long-time asymptotics for the modified Camassa–Holm equation with nonzero boundary conditions”, *Journal of Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, 16, No.2 (2022), 224–252.
- [86] I. Karpenko, D. Shepelsky, G. Teschl, “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with step-like boundary conditions”, *Monatshefte für Mathematik*, 201, (2023), 127–172.
- [87] B. Khesin, J. Lenells, G. Misiołek, “Generalized Hunter–Saxton equation and the geometry of the group of circle diffeomorphisms”, *Math. Ann.* 342 (2008), 617–656.
- [88] V. Kotlyarov and A. Minakov, “Riemann–Hilbert problem to the modified Korteweg-de Vries equation: Long-time dynamics of the step-like initial data”, *J. Math. Phys.* 51 (2010), 093506.
- [89] P. D. Lax, “Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves”, *Comm. Pure Appl. Math.* 21, pp. 467–490 (1968).
- [90] J. Lenells, “The correspondence between KdV and Camassa–Holm”, *Int. Math. Res. Not.*, 71 (2004), 3797–3811.
- [91] J. Lenells, “The nonlinear steepest descent method for Riemann–Hilbert problems of low regularity”, *Indiana Univ. Math. J.*, 66, 4 (2017), 1287–1332.
- [92] J. Lenells, “Matrix Riemann–Hilbert problems with jumps across Carleson contours”, *Monatshefte für Mathematik*, 186, 1 (2018), 111–152.

- [93] J. Lenells, G. Misiolek, F. Tiglay, “Integrable evolution equations on spaces of tensor densities and their peakon solutions”, *Comm. Math. Phys.*, 299 (2010) 129–161.
- [94] X. Liu, Y. Liu, P. J. Olver, C. Qu, “Orbital stability of peakons for a generalization of the modified Camassa–Holm equation”, *Nonlinearity*, 27, 9 (2014), 2297–2319.
- [95] Y. Liu, Yue, P. J. Olver, C. Qu, S. Zhang, “On the blow-up of solutions to the integrable modified Camassa–Holm equation”, *Anal. Appl. (Singap.)*, 12, 4 (2014), 355–368.
- [96] H. Lundmark and J. Szmigielski, “Multi-peakon solutions of the Degasperis–Procesi equation”, *Inverse Probl.*, 19, 6 (2003), 1241–1245.
- [97] H. Lundmark and J. Szmigielski, “Degasperis–Procesi peakons and the discrete cubic string”, *Int. Math. Res. Pap.*, 2 (2005), 53–116.
- [98] Y. Matsuno, “Bäcklund transformation and smooth multisoliton solutions for a modified Camassa–Holm equation with cubic nonlinearity”, *J. Math. Phys.*, 54, 5 (2013), 051504, 14.
- [99] A. V. Mikhailov, V. S. Novikov, “Perturbative symmetry approach”, *J. Phys. A*, 35, 22 (2002), 4775–4790.
- [100] A. Minakov, “Riemann–Hilbert problem for Camassa–Holm equation with step-like initial data”, *J. Math. Anal. Appl.*, 429, 1 (2015), 81–104.
- [101] A. Minakov, “Asymptotics of step-like solutions for the Camassa–Holm equation”, *J. Differential Equations.*, 261, 11 (2016), 6055–6098.
- [102] A. C. Newell, “Solitons in Mathematics and Physics”, SIAM, (1985).
- [103] V. Novikov, “Generalizations of the Camassa–Holm equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 42 (2009), 342002, 14.

- [104] P. J. Olver, P. Rosenau, “Tri-hamiltonian duality between solitons and solitary-wave solutions having compact support”, *Phys. Rev. E*, 53, 2 (1996), 1900.
- [105] Z. Qiao, “The Camassa–Holm hierarchy, N -dimensional integrable systems, and algebro-geometric solution on a symplectic submanifold”, *Comm. Math. Phys.*, 239, 1-2 (2003), 309–341.
- [106] Z. Qiao, “A new integrable equation with cuspons and W/M-shape-peaks solitons”, *J. Math. Phys.*, 47, 11 (2006), 112701, 9.
- [107] C. Qu, X. Liu, Y. Liu, “Stability of peakons for an integrable modified Camassa–Holm equation with cubic nonlinearity”, *Comm. Math. Phys.*, 322, 3 (2013), 967–997.
- [108] J. Schiff, “Zero curvature formulations of dual hierarchies”, *J. Math. Phys.*, 37, 4 (1996), 1928–1938.
- [109] A. B. Shabat, “On the Korteweg de Vries equation”, *Sov. Math. Dokl.*, 14 (1973), 1266.
- [110] D. Shepelsky, “Riemann–Hilbert methods in integrable systems”, *Encyclopedia of Mathematical Physics* (2006), 429–435.
- [111] J. Song, C. Qu, Z. Qiao “A new integrable two-component system with cubic nonlinearity”, *J. Math. Phys.*, 52, 1 (2011), 013503.
- [112] T. Trogdon and S. Olver, “Riemann–Hilbert Problems, Their Numerical Solution”, and the Computation of Nonlinear Special Functions, SIAM, (2016).
- [113] A. H. Vartanian, “Large-time continuum asymptotics of dark solitons”, *Inverse Problems*, 16, 4 2000, L39–L46.
- [114] A. H. Vartanian, “Exponentially small asymptotics of solutions to the defocusing nonlinear Schrödinger equation”, *Appl. Math. Lett.*, 16, 3 (2003), 425–434.

- [115] G. Wang, Q.P Liu, H. Mao, “The modified Camassa–Holm equation: Bäcklund transformation and nonlinear superposition formula”, *J. Phys. A*, 53, (2020).
- [116] Z. Xin, P. Zhang, Ping, “On the weak solutions to a shallow water equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, 53, 11 (2000), 1411–1433.
- [117] Xia, B., Zhou, R., Qiao, Z., “A three-component Camassa–Holm system with cubic nonlinearity and peakons”, *J. Nonlinear. Math. Phys* 22 (2015) 155–169.
- [118] K. Yan, Z. Qiao, and Y. Zhang, “On a new two-component b -family peakon system with cubic nonlinearity”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 38 (2018), 5415–5442.
- [119] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, “Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media”, *Sov. Phys. JETP* 34 (1972), 62–69.
- [120] X. Zhou, “The Riemann–Hilbert problem and inverse scattering”, *SIAM J. Math. Anal.*, 20, 4 (1989), 966–986.

Додатки

Додаток А: Список публікацій здобувача за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

1. A. Boutet de Monvel, I. Karpenko, D. Shepelsky, “A Riemann-Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with nonzero boundary conditions,” *J. Math. Phys.* **61**, No. 3, 031504, 24 (2020).
<https://doi.org/10.1063/1.5139519>
2. I. Karpenko, “Long-time asymptotics for the modified Camassa-Holm equation with nonzero boundary conditions”, *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry* **16**, No.2, 224–252 (2022).
<https://doi.org/10.15407/mag18.02.224>
3. I. Karpenko, D. Shepelsky, G. Teschl “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with step-like boundary conditions”, *Monatshefte für Mathematik* **201**, 127–172 (2023).
<https://doi.org/10.1007/s00605-022-01786-y>

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

4. I. Karpenko, D. Shepelsky, “A Riemann-Hilbert approach to the modified Camassa-Holm equation with nonzero boundary conditions”, VI International Conference “Analysis and Mathematical Physics”, Kharkiv, Ukraine (June 2018).

5. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The Riemann-Hilbert approach to the Cauchy problem for the modified Camassa-Holm equation”, 6th Ya. B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications, Vinnytsia, Ukraine (June 2019).
6. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The inverse scattering transform, in the form of Riemann-Hilbert problem, for the modified Camassa-Holm equation”, international Conference dedicated to 70th anniversary of Professor A.M.Plichko “Banach Spaces and their Applications”, Lviv, Ukraine (June 2019).
7. I. Karpenko, D. Shepelsky, “A Riemann-Hilbert problem approach to the modified Camassa-Holm equation on a nonzero background”, Pidzakharychi, Ukraine (August 2019).
8. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The modified Camassa-Holm equation on a nonzero background: large-time asymptotics for the Cauchy problem”, Workshop “New horizons in dispersive hydrodynamics”, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, United Kingdom (June 2021).
9. I. Karpenko, D. Shepelsky, “The large-time asymptotics for the modified Camassa–Holm equation on a non-zero background”, 5-th International Conference “DIFFERENTIAL EQUATIONS and CONTROL THEORY”, V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine (September 2021).
10. I. Karpenko, D. Shepelsky, G. Teschl, “A Riemann–Hilbert approach to the modified Camassa–Holm equation with step-like boundary conditions”, Ivano-Frankivsk, Ukraine (May 2022).
11. I. Karpenko, “The modified Camassa-Holm equation on a step-like background”, Complex Analysis, Spectral Theory and Approximation meet in Linz, Johannes Kepler University, Linz, Austria (July 2022).
12. I. Karpenko, “A Riemann-Hilbert problem approach to the modified Camassa-Holm equation on a step like background”, Workshop From Modeling and

Analysis to Approximation and Fast Algorithms, Hasenwinkel, Germany
(December 2022).