Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Афанасьєв Євгеній Володимирович

УДК 519.213

ДИСЕРТАЦІЯ

«ЗАСТОСУВАННЯ ГРАСМАНОВОГО ІНТЕГРУВАННЯ В ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ МАТРИЦЬ»

111 «Математика»
11 «Математика і статистика»

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

________________ Афанасьєв Є.В.

Науковий керівник: Щербина Марія Володмирівна, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник.

Харків – 2020

АНОТАЦІЯ

Афанасьєв Є. В. Застосування грасманового інтегрування в задачах теорії випадкових матриць. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика». — Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна Національної академії наук України, Харків, 2020.

У **вступі** обґрунтовано актуальність досліджуваних задач, наведено зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Сформульовано мету, задачі та методи дослідження. Визначено наукову новизну і значення отриманих результатів. Надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

Перший розділ присвячений огляду та аналізу літератури. У **підрозділі 1.1** дано визначення основним спектральним характеристикам, які досліджуються в теорії випадкових матриць, а саме: нормованій рахуючій мірі власних значень, лінійній статистиці власних значень, спектральним кореляційним функціям та кореляційним функціям характеристичних поліномів. Також наведено головні попередні результати про ці спектральні характеристики.

У **підрозділі 1.2** описано метод грасманового інтегрування та наведено історію його застосування в теорії випадкових матриць.

У роботі ми досліджуємо два ансамблі випадкових матриць: ансамбль розріджених ермітових матриць та ансамбль матриць з незалежними елементами. У **підрозділах 1.3** та **1.4** наведено ключові результати по вищезгаданих ансамблях.

Ансамбль розріджених ермітових випадкових матриць досить добре досліджено в глобальному режимі. Так, відомо, що нормована рахуюча міра власних значень слабко збігається до невипадкової міри, причому для слабко розріджених матриць гранична міра є напівкруговим законом. Також доведено Центральну граничну теорему для лінійної статистики. У локальному режимі обчислено асимптотичну поведінку спектральних кореляційних функцій у випадку слабкого розрідження. Якщо ж матриці сильно розріджені, то асимптотична поведінка спектральних кореляційних функцій невідома.

Ансамбль випадкових матриць з незалежними елементами також добре досліджено в глобальному режимі як у комплексному, так і у дійсному випадку. Відомо, що нормована рахуюча міра власних значень слабко збігається до кругового закону. Також доведено Центральну граничну теорему для лінійної статистики. У локальному режимі обчислено асимптотичну поведінку спектральних кореляційних функцій на межі спектра в загальному випадку, а всередині спектра — з деякими обмеженнями на моменти спільного розподілу ймовірностей елементів матриць.

Другий розділ присвячений дослідженню ансамблю розріджених ермітових випадкових матриць розміром $n \times n$ виду

$$M_n = (d_{jk} w_{jk})_{j,k=1}^{n}$$

де

$$d_{jk} = p^{-1/2} \begin{cases} 1 \text{ з ймовірністю } \dfrac{p}{n}; \\ 0 \text{ з ймовірністю } 1 - \dfrac{p}{n}; \end{cases}$$

$$w_{jk} = w_{jk}^{(1)} + i w_{jk}^{(2)},\ j \neq k$$

та $\{w_{jk}^{(1)}, w_{jk}^{(2)}, w_{ll} : 1 \leq j < k \leq n, 1 \leq l \leq n\}$ є такими незалежними однаково розподіленими (н. о. р.) дійсними нормальними випадковими величинами із нульовим середнім, що

$$2\mathbf{E}\{|w_{jk}^{(1)}|^2\} = 2\mathbf{E}\{|w_{jk}^{(2)}|^2\} = \mathbf{E}\{|w_{ll}|^2\} = 1, \quad j \neq k.$$

Тут і всюди нижче $\mathbf{E}$ позначає математичне сподівання по всім випадковим величинам. Випадкові величини $\{d_{jk} : j \leq k\}$ також незалежні одна від одної та від величин $w_{jk}^{(1)}, w_{jk}^{(2)}, w_{ll}$.

Означення. Кореляційною функцією характеристичних поліномів називається

$$\mathsf{f}_m(Y) = \mathbf{E}\left\{ \prod_{j=1}^{m} \det\left(M_n^* - y_j\right)\left(M_n - y_{m+j}\right) \right\},$$

де $Y = \mathrm{diag}\{y_1, \ldots, y_{2m}\}$, причому $y_1, \ldots, y_{2m}$ — дійсні або комплексні параметри, що можуть залежати від n.

У **підрозділі 2.1** отримано інтегральне представлення для кореляційних функцій характеристичних поліномів розріджених ермітових випадкових матриць. Основним результатом цього підрозділу є Пропозиція 2.6.

У **підрозділі 2.2** проводиться асимптотичний аналіз отриманого інтегрального представлення для другої кореляційної функції характеристичних поліномів всередині спектра. Основним результатом цього підрозділу є Теорема 2.1.

Теорема 2.1. *Нехай* $p = \mathrm{const}$, $\lambda_*(p) = \sqrt{\max\left(4 - \frac{8}{p}, 0\right)}$, $\lambda_j = \lambda_0 + \frac{x_j}{n}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$. *Тоді кореляційна функція двох характеристичних поліномів* $\mathsf{f}_1(\Lambda)$ *задовольняє асимптотичні співвідношення*

(i) при $\lambda_0 \in (-\lambda_*(p), \lambda_*(p))$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{f}_1(\Lambda)}{\sqrt{\mathsf{f}_1(\lambda_1 I)\mathsf{f}_1(\lambda_2 I)}} = \frac{\sin\left((x_1 - x_2)\sqrt{\lambda_*(p)^2 - \lambda_0^2}/2\right)}{(x_1 - x_2)\sqrt{\lambda_*(p)^2 - \lambda_0^2}/2};$$

(ii) при $\lambda_0 \notin (-\lambda_*(p), \lambda_*(p))$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{f}_1(\Lambda)}{\sqrt{\mathsf{f}_1(\lambda_1 I)\mathsf{f}_1(\lambda_2 I)}} = 1.$$

У **підрозділі 2.3** проводиться асимптотичний аналіз отриманого інтегрального представлення для всіх кореляційних функцій характеристичних поліномів всередині спектра. Основним результатом цього підрозділу є Теорема 2.3.

Теорема 2.3. *Нехай* $p \to \infty$, $\lambda_j = \lambda_0 + \frac{x_j}{n}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, 2m$. *Тоді кореляційні функції характеристичних поліномів* $\mathsf{f}_m(\Lambda)$ *для* $\lambda_0 \in (-2, 2)$ *задовольняють асимптотичні співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{f}_m(\Lambda)}{\left(\prod_{j=1}^{2m} \mathsf{f}_m(\lambda_j I)\right)^{1/2m}} = \frac{\hat{s}_{2m}(X)}{\hat{s}_{2m}(I)},$$

де $X = \mathrm{diag}\{x_1, \ldots, x_{2m}\}$ *та*

$$\hat{s}_{2m}(X) = \frac{\det\left\{\frac{\sin\left((x_j - x_{m+k})\sqrt{4 - \lambda_0^2}/2\right)}{(x_j - x_{m+k})\sqrt{4 - \lambda_0^2}/2}\right\}_{j,k=1}^{m}}{\triangle(x_1, \ldots, x_m)\triangle(x_{m+1}, \ldots, x_{2m})},$$

а також $\triangle(y_1, \ldots, y_m)$ *— визначник Вандермонда чисел* $y_1, \ldots, y_m$.

У **підрозділі 2.4** проводиться асимптотичний аналіз отриманого інтегрального представлення для другої кореляційної функції характеристичних поліномів на межі спектра. Основним результатом цього підрозділу є Теорема 2.4.

Теорема 2.4. *Нехай* $p \to \infty$, $\lambda_j = \lambda_0 + \dfrac{x_j}{n^{2/3}}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,2$, $\lambda_0 = 2$. *Тоді кореляційна функція двох характеристичних поліномів* $\mathsf{f}_1(\Lambda)$ *задовольняє асимптотичні співвідношення*

(i) Якщо $\frac{n^{2/3}}{p} \to \infty$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{f}_1(\Lambda)}{\sqrt{\mathsf{f}_1(\lambda_1 I)\mathsf{f}_1(\lambda_2 I)}} = 1;$$

(ii) Якщо $\frac{n^{2/3}}{p} \to c$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{f}_1(\Lambda)}{\sqrt{\mathsf{f}_1(\lambda_1 I)\mathsf{f}_1(\lambda_2 I)}} = \frac{\mathbb{A}(x_1+2c, x_2+2c)}{\sqrt{\mathbb{A}(x_1+2c, x_1+2c)\mathbb{A}(x_2+2c, x_2+2c)}},$$

де $\mathbb{A}(x,y)$ *— ядро Ейрі. Для* $\lambda_0 = -2$ *справджуються аналогічні твердження.*

У **третьому розділі** ми вивчаємо комплексні випадкові матриці з незалежними елементами виду

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{n}} X = \frac{1}{\sqrt{n}} (x_{jk})_{j,k=1}^n,$$

де x_{jk} — такі н. о. р. комплексні випадкові величини, що

$$\mathbf{E}\{x_{jk}\} = \mathbf{E}\{x_{jk}^2\} = 0, \quad \mathbf{E}\{\left|x_{jk}\right|^2\} = 1.$$

У **підрозділі 3.1** отримано інтегральне представлення для кореляційних функцій характеристичних поліномів комплексних неермітових випадкових матриць з незалежними елементами. Основним результатом цього підрозділу є Пропозиція 3.3.

У **підрозділі 3.2** проводиться асимптотичний аналіз отриманого інтегрального представлення для кореляційних функцій характеристичних поліномів всередині спектра. Основним результатом цього підрозділу є Теорема 3.1.

Теорема 3.1. *Нехай перші* $2m$ *абсолютних моментів спільного розподілу елементів матриць* M_n *є скінченними, і* $z_j = z_0 + \dfrac{\zeta_j}{\sqrt{n}}$, $\zeta_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, m$, $|z_0| < 1$. *Тоді*

(i) *m-та кореляційна функція характеристичних поліномів* $\mathsf{f}_m(\check{Z})$ *задовольняє асимптотичне співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{m^2-m}{2}} \frac{\mathsf{f}_m(\check{Z})}{\mathsf{f}_1(\bar{z}_1,z_1)\cdots\mathsf{f}_1(\bar{z}_m,z_m)} = e^{\frac{m^2-m}{2}\left(1-|z_0|^2\right)^2\kappa_{2,2}} \frac{\det(K_{\mathbb{C}}(\zeta_j,\zeta_k))_{j,k=1}^m}{|\triangle(\mathscr{Z})|^2},$$

де $\check{Z} = \mathrm{diag}\{\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_m,z_1,\ldots,z_m\}$, $\kappa_{2,2} = \mathbf{E}\{|x_{11}|^4\}-2$*;* $\mathscr{Z} = \mathrm{diag}\{\zeta_1,\ldots,\zeta_m\}$ *та*

$$K_{\mathbb{C}}(z,w) = e^{-|z|^2/2-|w|^2/2+z\overline{w}}.$$

(ii) *у окремому випадку* $\zeta_1 = \cdots = \zeta_m = 0$ *ми маємо*

$$\mathbf{E}\left\{|\det(M_n-z_0)|^{2m}\right\} = (2\pi)^{m/2}\left(\prod_{j=1}^{m-1} j!\right)^{-1} e^{\frac{m^2-m}{2}\left(1-|z_0|^2\right)^2\kappa_{2,2}} n^{\frac{m^2}{2}} e^{mn(|z_0|^2-1)}(1+o(1)).$$

У **четвертому розділі** ми вивчаємо дійсні випадкові матриці з незалежними елементами виду

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{n}}X = \frac{1}{\sqrt{n}}(x_{jk})_{j,k=1}^n,$$

де x_{jk} — такі н. о. р. дійсні випадкові величини, що

$$\mathbf{E}\{x_{jk}\} = 0 \quad \text{та} \quad \mathbf{E}\{x_{jk}^2\} = 1.$$

У **підрозділі 4.1** отримано інтегральне представлення для кореляційних функцій характеристичних поліномів дійсних випадкових матриць з незалежними елементами. Основним результатом цього підрозділу є Пропозиція 4.3.

У **підрозділі 4.2** проводиться асимптотичний аналіз отриманого інтегрального представлення для кореляційних функцій характеристичних поліномів всередині спектра. Основним результатом цього підрозділу є Теорема 4.2.

Теорема 4.2. *Нехай перші* $2m$ *абсолютних моментів спільного розподілу елементів матриць* M_n *є скінченними, і* $z_j = z_0 + \frac{\zeta_j}{\sqrt{n}}$, $\zeta_j \in \mathbb{C}$, $j = 1,\ldots,m$, $z_0 \in (-1,1)$. *Тоді* *(i) m-та кореляційна функція характеристичних поліномів $\mathsf{f}_m(\check{Z})$ задовольняє асимптотичне співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-m^2+m} \frac{\mathsf{f}_m(\check{Z})}{\mathsf{f}_1(\bar{z}_1,z_1)\cdots\mathsf{f}_1(\bar{z}_m,z_m)} = C_{m,z_0} e^{\frac{m^2-m}{2}\left(1-z_0^2\right)^2\kappa_4}$$
$$\times \int\limits_{V=V^R\in U(2m)} \exp\left\{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\check{\mathscr{Z}}V\check{\mathscr{Z}}^R V^* - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\check{\mathscr{Z}}\check{\mathscr{Z}}^R\right\} d\mu_s(V),$$

де $\check{Z} = \operatorname{diag}\{\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_m,z_1,\ldots,z_m\}$, C_{m,z_0} — деяка константа, яка не залежить ані від спільного розподілу елементів матриці, ані від ζ_1, ..., ζ_m; $\kappa_4 = \mathbf{E}\{x_{11}^4\}-3$,

$$A^R = -\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix} A^T \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix},$$

$U(k)$ — унітарна група, ймовірнісна міра $d\mu_s(V)$ відповідає диференціальній формі

$$\det{}^{-m+1/2} V \bigwedge_{j,k\le m} dv_{jk} \bigwedge_{j<k\le m} dv_{j,k+m}\wedge dv_{k+m,j}$$

та

$$\check{\mathscr{Z}} = \operatorname{diag}\{\overline{\zeta}_1,\ldots,\overline{\zeta}_m,\zeta_1,\ldots,\zeta_m\}.$$

(ii) в окремому випадку $m=2$ інтеграл по самодуальним унітарним матрицям можна обчислити, і ми маємо

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2} \frac{\mathsf{f}_2(\check{Z})}{\mathsf{f}_1(\bar{z}_1,z_1)\mathsf{f}_1(\bar{z}_2,z_2)} = C_{2,z_0} e^{\left(1-|z_0|^2\right)^2\kappa_4} \frac{\operatorname{Pf}(K_{\mathbb{R}}(\zeta_j,\zeta_k))_{j,k=1}^2}{\triangle(\zeta_1,\zeta_2,\overline{\zeta}_1,\overline{\zeta}_2)},$$

де

$$K_{\mathbb{R}}(\zeta_j,\zeta_k) = e^{-\frac{|\zeta_j|^2}{2}-\frac{|\zeta_k|^2}{2}} \begin{pmatrix} (\zeta_j-\zeta_k)e^{\zeta_j\zeta_k} & (\zeta_j-\overline{\zeta}_k)e^{\zeta_j\overline{\zeta}_k} \\ (\overline{\zeta}_j-\zeta_k)e^{\overline{\zeta}_j\zeta_k} & (\overline{\zeta}_j-\overline{\zeta}_k)e^{\overline{\zeta}_j\overline{\zeta}_k} \end{pmatrix}.$$

У **п'ятому розділі** ми коротко описуємо метод грасманового інтегрування, а також доводимо деякі допоміжні властивості зовнішнього добутку лінійних операторів.

Ключові слова: грасманові змінні, суперсиметрія, теорія випадкових матриць, розріджені випадкові матриці, матриці суміжності випадкових графів, випадкові матриці з незалежними елементами, ансамбль Жинібра, кореляційні функції характеристичних поліномів, моменти характеристичних поліномів.

ABSTRACT

Afanasiev I. An application of the Grassmann integration in random matrix theory problems. — Qualification scientific paper, manuscript.

A thesis to earn a Doctor of Philosophy degree in the specialty 111 "Mathematics". — B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2020.

The **introduction** explains the relevance of the problem under study, and provides a link between thesis and scientific programs, plans, themes. The research goal, tasks and methods are stated there. The scientific novelty and value of the obtained results are determined. The information about the publications, the personal applicant contribution and thesis results approbation testing the results of the thesis is given.

Section 1 is devoted to the review and analysis of the literature. In **subsection 1.1** we give the definition of the main spectral characteristics which are studied in the random matrix theory. Namely, Normalized Counting Measure of eigenvalues, linear statistics of eigenvalues, m-point correlation functions and correlation functions of the characteristic polynomials are discussed. The main previous results on this spectral characteristics are given too.

In **subsection 1.2** the Grassmann integration method is explained. The history of its application to the random matrix theory is discussed.

Two random matrix ensembles are studied in the thesis: an ensemble of sparse Hermitian matrices and an ensemble of matrices with independent entries. In **subsections 1.3** and **1.4** the key results on the above ensembles are given.

The ensemble of sparse Hermitian random matrices is rather well-studied in the global regime. It is known that the Normalised Counting Measure of eigenvalues weakly converges to a non-random measure. Moreover, the limiting measure is a semicircle law for diluted random matrices. The Central Limit Theorem for the linear eigenvalue statistics was also proven. In the local regime the asymptotic behavior of the m-point correlation function was computed in the diluted case. If matrices are sparse then the asymptotic behavior of the m-point correlation function is unknown.

Both complex and real versions of the ensemble of random matrices with independent entries are also well-studied in the global regime. It is known that the Nor-

malised Counting Measure of eigenvalues weakly converges to a circular law. The Central Limit Theorem for the linear eigenvalue statistics was also proven. In the local regime the asymptotic behavior of the m-point correlation function was computed. It was done at the spectrum edge in the general case, and in the bulk of the spectrum with some restrictions on the moments of the common probability distribution of the matrix entries.

Section 2 is concerned with the investigation of the ensemble of $n \times n$ sparse Hermitian random matrices of the form

$$M_n = (d_{jk} w_{jk})_{j,k=1}^n$$

where

$$d_{jk} = p^{-1/2} \begin{cases} 1 \text{ with probability } \dfrac{p}{n}; \\ 0 \text{ with probability } 1 - \dfrac{p}{n}; \end{cases}$$

$$w_{jk} = w_{jk}^{(1)} + i w_{jk}^{(2)}, \ j \neq k$$

and $\{w_{jk}^{(1)}, w_{jk}^{(2)}, w_{ll} : 1 \le j < k \le n, 1 \le l \le n\}$ are i.i.d. real random variables with zero mean such that

$$2\mathbf{E}\{|w_{jk}^{(1)}|^2\} = 2\mathbf{E}\{|w_{jk}^{(2)}|^2\} = \mathbf{E}\{|w_{ll}|^2\} = 1, \quad j \neq k.$$

Here and everywhere below $\mathbf{E}$ denotes the expectation with respect to all random variables. Random variables $\{d_{jk} : j \le k\}$ are also independent of each other and of variables $w_{jk}^{(1)}, w_{jk}^{(2)}, w_{ll}$.

Definition. The correlation function of the characteristic polynomials is

$$\mathsf{f}_m(Y) = \mathbf{E}\left\{ \prod_{j=1}^{m} \det\left(M_n^* - y_j\right)\left(M_n - y_{m+j}\right) \right\},$$

where $Y = \operatorname{diag}\{y_1, \ldots, y_{2m}\}$, with real or complex parameters $y_1, \ldots, y_{2m}$ which may depend on n.

In **Subsection 2.1** we obtain an integral representation for the correlation functions of the characteristic polynomials of sparse Hermitian random matrices. The main result of the subsection is Proposition 2.6.

In **Subsection 2.2** we perform an asymptotic analysis of the obtained integral representation for the second correlation function of the characteristic polynomials in the bulk of the spectrum. The main result of the subsection is Theorem 2.1.

Theorem 2.1. *Let* $p=\text{const}$, $\lambda_*(p)=\sqrt{\max\left(4-\dfrac{8}{p},0\right)}$, $\lambda_j=\lambda_0+\dfrac{x_j}{n}$, $x_j\in\mathbb{R}$, $j=1,2$. *Then the correlation function of two characteristic polynomials* $\mathsf{f}_1(\Lambda)$ *satisfies the asymptotic relations*

(i) for $\lambda_0\in(-\lambda_*(p),\lambda_*(p))$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathsf{f}_1(\Lambda)}{\sqrt{\mathsf{f}_1(\lambda_1 I)\mathsf{f}_1(\lambda_2 I)}}=\frac{\sin\left((x_1-x_2)\sqrt{\lambda_*(p)^2-\lambda_0^2}/2\right)}{(x_1-x_2)\sqrt{\lambda_*(p)^2-\lambda_0^2}/2};$$

(ii) for $\lambda_0\notin(-\lambda_*(p),\lambda_*(p))$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathsf{f}_1(\Lambda)}{\sqrt{\mathsf{f}_1(\lambda_1 I)\mathsf{f}_1(\lambda_2 I)}}=1.$$

In **Subsection 2.3** we perform an asymptotic analysis of the obtained integral representation for all correlation functions of the characteristic polynomials in the bulk of the spectrum. The main result of the subsection is Theorem 2.3.

Theorem 2.3. *Let* $p\to\infty$, $\lambda_j=\lambda_0+\dfrac{x_j}{n}$, $x_j\in\mathbb{R}$, $j=1,\dots,2m$. *Then the correlation function of characteristic polynomials* $\mathsf{f}_m(\Lambda)$ *for* $\lambda_0\in(-2,2)$ *satisfies the asymptotic relation*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathsf{f}_m(\Lambda)}{\left(\prod\limits_{j=1}^{2m}\mathsf{f}_m(\lambda_j I)\right)^{1/2m}}=\frac{\hat{s}_{2m}(X)}{\hat{s}_{2m}(I)},$$

where $X=\operatorname{diag}\{x_1,\dots,x_{2m}\}$,

$$\hat{s}_{2m}(X)=\frac{\det\left\{\dfrac{\sin\left((x_j-x_{m+k})\sqrt{4-\lambda_0^2}/2\right)}{(x_j-x_{m+k})\sqrt{4-\lambda_0^2}/2}\right\}_{j,k=1}^{m}}{\triangle(x_1,\dots,x_m)\triangle(x_{m+1},\dots,x_{2m})}$$

and $\triangle(y_1,\dots,y_m)$ *is the Vandermonde determinant of* $y_1,\dots,y_m$.

In **Subsection 2.4** we perform an asymptotic analysis of the obtained integral representation for the second correlation function of the characteristic polynomials at the edge of the spectrum. The main result of the subsection is Theorem 2.4.

Theorem 2.4. *Let $p \to \infty$, $\lambda_j = \lambda_0 + \dfrac{x_j}{n^{2/3}}$, $j = 1,2$, $\lambda_0 = 2$. Then the correlation function of two characteristic polynomials $\mathsf{f}_1(\Lambda)$ satisfies the asymptotic relations*

(i) If $\frac{n^{2/3}}{p} \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{f}_1(\Lambda)}{\sqrt{\mathsf{f}_1(\lambda_1 I)\mathsf{f}_1(\lambda_2 I)}} = 1;$$

(ii) If $\frac{n^{2/3}}{p} \to c$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{f}_1(\Lambda)}{\sqrt{\mathsf{f}_1(\lambda_1 I)\mathsf{f}_1(\lambda_2 I)}} = \frac{\mathbb{A}(x_1+2c, x_2+2c)}{\sqrt{\mathbb{A}(x_1+2c, x_1+2c)\mathbb{A}(x_2+2c, x_2+2c)}},$$

where $\mathbb{A}(x,y)$ is an Airy kernel. For $\lambda_0 = -2$ similar assertions are also valid.

In **Section 3** we study complex random matrices with independent entries of the form

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{n}} X = \frac{1}{\sqrt{n}} (x_{jk})_{j,k=1}^n,$$

where x_{jk} are i.i.d. complex random variables such that

$$\mathbf{E}\{x_{jk}\} = \mathbf{E}\{x_{jk}^2\} = 0, \quad \mathbf{E}\{\left|x_{jk}\right|^2\} = 1.$$

In **Subsection 3.1** we obtain an integral representation for the correlation functions of the characteristic polynomials of complex non-Hermitian random matrices with independent entries. The main result of the subsection is Proposition 3.3.

In **Subsection 3.2** we perform an asymptotic analysis of the obtained integral representation for the correlation functions of the characteristic polynomials in the bulk of the spectrum. The main result of the subsection is Theorem 3.1.

Theorem 3.1. *Let the first $2m$ absolute moments of the common distribution of entries of M_n be finite and $z_j = z_0 + \dfrac{\zeta_j}{\sqrt{n}}$, $\zeta_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, m$, $|z_0| < 1$. Then*

(i) the m^{th} correlation function of the characteristic polynomials $\mathsf{f}_m(\check{Z})$ satisfies the asymptotic relation

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{m^2-m}{2}} \frac{\mathsf{f}_m(\check{Z})}{\mathsf{f}_1(\bar{z}_1, z_1)\cdots \mathsf{f}_1(\bar{z}_m, z_m)} = e^{\frac{m^2-m}{2}\left(1-|z_0|^2\right)^2 \kappa_{2,2}} \frac{\det(K_{\mathbb{C}}(\zeta_j, \zeta_k))_{j,k=1}^m}{|\triangle(\mathscr{Z})|^2},$$

where $\check{Z} = \mathrm{diag}\{\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m, z_1, \ldots, z_m\}$, $\kappa_{2,2} = \mathbf{E}\{|x_{11}|^4\} - 2$;
$\mathscr{Z} = \mathrm{diag}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_m\}$ and

$$K_{\mathbb{C}}(z,w) = e^{-|z|^2/2 - |w|^2/2 + z\overline{w}}.$$

(ii) in particular case $\zeta_1 = \cdots = \zeta_m = 0$ we have

$$\mathbf{E}\left\{|\det(M_n - z_0)|^{2m}\right\}$$
$$= (2\pi)^{m/2}\left(\prod_{j=1}^{m-1} j!\right)^{-1} e^{\frac{m^2-m}{2}\left(1-|z_0|^2\right)^2\kappa_{2,2}} n^{\frac{m^2}{2}} e^{mn(|z_0|^2-1)}(1+o(1)).$$

In **Section 4** we study real random matrices with independent entries of the form

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{n}}X = \frac{1}{\sqrt{n}}(x_{jk})_{j,k=1}^n,$$

where x_{jk} are i.i.d. real random variables such that

$$\mathbf{E}\{x_{jk}\} = 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{E}\{x_{jk}^2\} = 1.$$

In **Subsection 4.1** we obtain an integral representation for the correlation functions of the characteristic polynomials of real random matrices with independent entries. The main result of the subsection is Proposition 4.3.

In **Subsection 4.2** we perform an asymptotic analysis of the obtained integral representation for the correlation functions of the characteristic polynomials in the bulk of the spectrum. The main result of the subsection is Theorem 4.2.

Theorem 4.2. *Let the first $2m$ absolute moments of the common distribution of entries of M_n be finite and $z_j = z_0 + \dfrac{\zeta_j}{\sqrt{n}}$, $\zeta_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, m$, $z_0 \in (-1,1)$. Then*

(i) the m^{th} correlation function of the characteristic polynomials $\mathsf{f}_m(\check{Z})$ satisfies the asymptotic relation

$$\lim_{n\to\infty} n^{-m^2+m}\frac{\mathsf{f}_m(\check{Z})}{\mathsf{f}_1(\bar{z}_1, z_1)\cdots\mathsf{f}_1(\bar{z}_m, z_m)} = C_{m,z_0} e^{\frac{m^2-m}{2}\left(1-z_0^2\right)^2\kappa_4}$$
$$\times \int\limits_{V=V^R\in U(2m)} \exp\left\{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\check{\mathscr{Z}}V\check{\mathscr{Z}}^R V^* - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\check{\mathscr{Z}}\check{\mathscr{Z}}^R\right\} d\mu_s(V),$$

where $\check{Z} = \operatorname{diag}\{\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m, z_1, \ldots, z_m\}$, C_{m,z_0} is some constant, which does not depend on the common distribution of entries and on $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$; $\kappa_4 = \mathbf{E}\{x_{11}^4\} - 3$,

$$A^R = -\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix} A^T \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix},$$

$U(k)$ is a unitary group, the probabilistic measure $d\mu_s(V)$ corresponds to the differential form

$$\det{}^{-m+1/2} V \bigwedge_{j,k\le m} dv_{jk} \bigwedge_{j<k\le m} dv_{j,k+m} \wedge dv_{k+m,j}$$

and

$$\check{\mathscr{Z}} = \mathrm{diag}\{\overline{\zeta}_1, \dots, \overline{\zeta}_m, \zeta_1, \dots, \zeta_m\}.$$

(ii) *in the particular case $m = 2$ the integral over self-dual unitary matrices can be computed and we have*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2} \frac{\mathsf{f}_2(\check{Z})}{\mathsf{f}_1(\overline{z}_1, z_1)\mathsf{f}_1(\overline{z}_2, z_2)} = C_{2,z_0} e^{\left(1-|z_0|^2\right)^2 \kappa_4} \frac{\mathrm{Pf}(K_{\mathbb{R}}(\zeta_j, \zeta_k))_{j,k=1}^2}{\triangle(\zeta_1, \zeta_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2)},$$

where

$$K_{\mathbb{R}}(\zeta_j, \zeta_k) = e^{-\frac{|\zeta_j|^2}{2} - \frac{|\zeta_k|^2}{2}} \begin{pmatrix} (\zeta_j - \zeta_k) e^{\zeta_j \zeta_k} & (\zeta_j - \overline{\zeta}_k) e^{\zeta_j \overline{\zeta}_k} \\ (\overline{\zeta}_j - \zeta_k) e^{\overline{\zeta}_j \zeta_k} & (\overline{\zeta}_j - \overline{\zeta}_k) e^{\overline{\zeta}_j \overline{\zeta}_k} \end{pmatrix}.$$

In **Section 5** we briefly discuss the Grassmann integration method. We prove some auxiliary properties of the exterior product of linear operators too.

Key words: Grassmann variables, supersymmetry, random matrix theory, sparse random matrices, adjacency matrices of random graphs, independent entry random matrices, Gininbre ensemble, correlation functions of characteristic polynomials, moments of characteristic polynomials.

Список публікацій здобувача

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Afanasiev, I.: On the Correlation Functions of the Characteristic Polynomials of Real Random Matrices with Independent Entries. Журнал математичної фізики, аналізу, геометрії. **16**(2), 91–118 (2020)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar; Impact Factor: 0.227; квартиль Q3)

Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

2. Afanasiev, I.: On the Correlation Functions of the Characteristic Polynomials of the Sparse Hermitian Random Matrices. J. Stat. Phys. **163**(2), 324–356 (2016)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar, zbMATH; Impact Factor: 1.349; квартиль Q2)

3. Afanasiev, I.: On the Correlation Functions of the Characteristic Polynomials of Non-Hermitian Random Matrices with Independent Entries. J. Stat. Phys. **176**(6), 1561–1582 (2019)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar, zbMATH; Impact Factor: 1.243; квартиль Q2)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

4. Afanasiev, I.: On the second correlation function of characteristic polynomials of sparse hermitian random matrices. In: II International Conference "ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS": Book of abstracts, p. 29. B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv (2014)

5. Afanasiev, I.: Correlation function of two characteristic polynomials of diluted hermitian random matrices near the edge points of the spectrum. In: III International Conference "ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS": Book

of abstracts, p. 16. B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv (2015)

6. Afanasiev, I.: On the Second Mixed Moment of Characteristic Polynomials of Sparse Hermitian Random Matrices. In: Abstracts of Lectures and Talks: Trilateral German-Russian-Ukrainian Summer School "Spectral Theory, Differential Equations and Probability", p. 12. Johannes Gutenberg Universität Mainz, Mainz (2016)

7. Afanasiev, I.: On the Correlation Functions of the Characteristic Polynomials of the Non-Hermitian Random Matrices with Independent Entries. In: International Conference "Geometry, Differential Equations and Analysis": Book of abstracts, p. 39. V.N. Karazin Kharkiv National University and B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv (2019)

Зміст

Перелік умовних позначень

Усюди в роботі малі літери позначають скаляри, напівжирні малі літери — вектори, великі літери — матриці, а напівжирні великі літери — множини матриць. Ми використовуємо таку ж саму літеру для матриці (наприклад, A), її стовпців (a_j) та її елементів (a_{kj}). Крім того, ми ще позначаємо j-ий стовпець матриці A за $(A)_j$ і елемент у k-тому рядку та j-ому стовпці за $(A)_{kj}$.

Терміни «грасманові змінні» та «антикомутуючі змінні» є синонімами. Змінні інтегрування ϕ, φ, θ, ϑ, ρ, ξ, υ та ν позначають грасманові змінні. Всі інші змінні інтегрування, які не визначено областю інтегрування, є або комплексними, або дійсними.

Якщо не написано межі інтегрування, то такий інтеграл позначає одне з двох:

1) або це інтеграл по грасмановим змінним;

2) або це інтеграл по $\mathbb{C}^d$ чи $\mathbb{R}^d$.

Нехай також $d\boldsymbol{t}^*d\boldsymbol{t}$ ($\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_d)^T \in \mathbb{C}^d$) позначає міру $\prod\limits_{j=1}^{d} d\bar{t}_j dt_j$ на просторі $\mathbb{C}^d$. Аналогічно, для векторів з антикомутуючими компонентами $d\boldsymbol{\phi}^+ d\boldsymbol{\phi} = \prod\limits_{j=1}^{d} d\overline{\phi}_j d\phi_j$. Такі ж самі позначення використовуються і для матриць.

Крім цього, C, C_1 позначають різноманітні незалежні від n константи, які можуть бути різними в різних формулах.

$\prec$ – лексикографічний порядок на множині $\mathscr{I}_{n,k}$.

$\triangle(\operatorname{diag}\{y_j\}_{j=1}^k) = \triangle(\{y_j\}_{j=1}^k)$ – визначник Вандермонда чисел $\{y_j\}_{j=1}^k$.

$\triangle(Y)$ – визначник Вандермонда власних значень матриці Y.

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ – стандартний скалярний добуток у лінійному просторі над $\mathbb{R}$ чи $\mathbb{C}$. Для матриць $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr} B^* A$. Для множин матриць $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\rangle = \sum_j \langle A_j, B_j\rangle$.

$\overline{k,l}$ – скорочений запис переліку цілих чисел k, $k+1$, ..., l.

$\mathbf{1}_A$ – характеристична функція множини A.

A^T – матриця, транспонована до матриці A.

A^R – матриця, дуальна до матриці A (див. Означення 4.1).

$\mathbb{A}(x,y)$ – ядро Ейрі.

$Ai(x)$ – функція Ейрі.

$\mathrm{diag}\{y_j\}_{j=1}^k$ – діагональна матриця розміром $k\times k$ з числами $y_1,\ldots,y_k$ на діагоналі.

$\mathrm{End}\,V$ – група лінійних операторів над лінійним простором V.

f_m – кореляційна функція характеристичних поліномів (див. Означення 1.7).

$\mathrm{Gin}(\mathbb{F})$ – ансамбль випадкових матриць з незалежними гаусовими елементами, який задано формулами а) (1.8) і (1.9), якщо $\mathbb{F}=\mathbb{C}$; б) (1.8) і (1.10), якщо $\mathbb{F}=\mathbb{R}$.

GOE – гаусів ортогональний ансамбль.

GUE – гаусів унітарний ансамбль.

$\mathscr{H}_k$ – спрощене позначення для $\mathscr{H}_{k,0}$.

$\mathscr{H}_{k,l}$ – підпростір самоспряжених операторів у $\mathrm{End}\,\Lambda^l\mathbb{C}^k$.

H_m – див. формулу (2.9).

I_k – одинична матриця розміром $k\times k$. Індекс k опускається у випадках, коли розмір матриці впливає з контексту.

$\mathscr{I}_{n,k}$ – множина індексів для нумерації компонентів полівекторів та елементів матриць операторів, що діють у зовнішніх степенях просторів, див. формулу (2.7).

J_k – матриця $\begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}$.

N_n – нормована рахуюча міра власних значень (див. Означення 1.3).

$\mathscr{N}_n[\eta]$ – лінійна статистика власних значень (див. Означення 1.5).

$O(k)$ – група ортогональних матриць розміром $k\times k$.

Pf – Пфафіан.

S_k – група перестановок довжини k.

$U(k)$ – група унітарних матриць розміром $k\times k$.

$\mathrm{USp}(k)$ – група унітарних симплектичних матриць розміром $2k\times 2k$.

Z – див. формулу (3.7).

$\check{Z}$ – див. формулу (1.16).

$\mathscr{Z}$ – див. формулу (1.17).

$\check{\mathscr{Z}}$ – див. формулу (4.5).

$\Lambda^l V$ – l-та зовнішня степінь лінійного простору V.

μ – ймовірнісна міра Хаара (тобто міра всієї групи дорівнює одиниці).

$\mu_s(V)$ – ймовірнісна міра на множині самодуальних ($V = V^R$) унітарних матриць, що відповідає диференціальній формі 4.4.

$\rho_{sc}(\lambda)$ – щільність імовірності напівкругового закону.

$\psi(t_1, t_2)$ – див. формулу (3.18).

див. – дивіться.

НРМ – нормована рахуюча міра.

н. о. р. – незалежні однаково розподілені.

ЦГТ – центральна гранична теорема.

Вступ

Обґрунтування вибору теми дослідження. Метод грасманового інтегрування полягає в застосуванні аналізу з антикомутуючими змінними (або просто супераналізу) до ряду різноманітних задач. Загальна теорія супераналізу вперше була описана Ф. Березіним [24]. Введення інтегралу по антикомутуючим змінним мало великий вплив на розвиток теоретичної фізики, але з математичної точки зору супераналіз застосовувався без достатнього обґрунтування, на фізичному рівні строгості (наприклад, [75, 127]). Тому інтеграл по антикомутуючим змінним тривалий час майже не привертав уваги математиків. Однак, як виявилось, супераналіз можна застосовувати й на математичному рівні строгості до розв'язання деяких задач. Так, у теорії випадкових матриць було отримано низку вагомих результатів із застосуванням супераналізу. Грасманове інтегрування було використано для дослідження гаусового унітарного ансамблю (GUE) [29, 70, 177], гаусового ортогонального ансамблю (GOE) [31, 176], кругового унітарного ансамблю [41], ансамблю Вігнера [159], ансамблю Марченко-Пастура [160], ансамблю полоскових матриць [21, 51, 152–156, 161, 162] та деяких інших ансамблів випадкових матриць.

Зазвичай у теорії випадкових матриць метод грасманового інтегрування використовується для того, щоб отримати зручне для подальшого асимптотичного аналізу інтегральне представлення для добутку відношень детермінантів. Оскільки головні спектральні характеристики, такі як щільність нормованої рахуючої міри власних значень, спектральні кореляційні функції, тощо, часто можна виразити через відношення детермінантів, то застосування супераналізу дозволяє отримати інтегральне представлення і для цих характеристик також. Більш детально про зв'язок між спектральними характеристиками та відношеннями детермінантів можна озайомитись у [28, 91, 168].

На жаль, отримане за допомогою методу грасманового інтегрування інтегральне представлення для добутку відношень детермінантів містить як комутуючі, так і антикомутуючи змінні. Інтеграли такого типу складні, знайти їхню асимптотичну поведінку дуже важко. Тому природним є бажання розглянути простіший і водночас схожий інтеграл для того, щоб хоч трохи пролити світло на стан справ. Шуканий інтеграл можна отримати при дослідженні асимптотичної поведінки кореляційних функцій характеристичних поліномів. Крім того, кореляційні функції характеристичних поліномів як об'єкт дослідження цікаві й самі по собі. В останній час вони активно досліджуються, наприклад, [29, 31, 73, 108, 153, 159, 160], тощо.

Дана дисертаційна робота присвячена дослідженню кореляційних функцій характеристичних поліномів розріджених ермітових випадкових матриць та неермітових випадкових матриць з незалежними елементами (комплексний і дійсний випадки). Перший зі згаданих ансамблів цікавий тим, що ці матриці є матрицями суміжності випадкових вагових графів, спектральні характеристики яких є дуже актуальними для дослідження. Другий ансамбль вирізняється тим, що його матриці не є ермітовими, а наскільки відомо авторові, кореляційні функції характеристичних поліномів неермітових матриць було досліджено тільки в роботах [11, 73, 179].

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є дослідження кореляційних функцій характеристичних поліномів розріджених ермітових випадкових матриць та неермітових випадкових матриць з незалежними елементами.

Об'єкт дослідження — розріджені ермітові випадкові матриці та неермітові випадкові матриці з незалежними елементами.

Предмет дослідження — кореляційні функції характеристичних поліномів розріджених ермітових випадкових матриць та неермітових випадкових матриць з незалежними елементами (комплексний і дійсний випадки).

Завдання дослідження:

- встановити асимптотичну поведінку другої кореляційної функції характеристичних поліномів сильно розріджених ермітових випадкових матриць;
- встановити асимптотичну поведінку всіх кореляційних функцій характеристичних поліномів слабко розріджених ермітових випадкових матриць;
- дослідити залежність встановленої асимптотичної поведінки від ступеню

розрідженості матриць;

- встановити асимптотичну поведінку всіх кореляційних функцій характеристичних поліномів комплексних випадкових матриць з незалежними елементами;
- встановити асимптотичну поведінку всіх кореляційних функцій характеристичних поліномів дійсних випадкових матриць з незалежними елементами;
- порівняти отримані результати з існуючими результатами для спектральних кореляційних функцій та для кореляційних функцій характеристичних поліномів.

Методи дослідження. Для отримання результатів дисертаційної роботи використовуються метод грасманового інтегрування для отримання зручного інтегрального представлення, метод перевала для встановлення асимптотичної поведінки отриманого інтегрального представлення.

Наукова новизна одержаних результатів. В роботі досліджено асимптотичну поведінку кореляційних функцій характеристичних поліномів розріджених ермітових випадкових матриць та неермітових випадкових матриць з незалежними елементами (комплексний і дійсний випадки). Зокрема, отримано такі результати:

- встановлено асимптотичну поведінку другої кореляційної функції характеристичних поліномів сильно розріджених ермітових випадкових матриць всередині спектра, це є новим результатом;
- встановлено асимптотичну поведінку другої кореляційної функції характеристичних поліномів на межі спектра та всіх кореляційних функцій характеристичних поліномів всередині спектра слабко розріджених ермітових випадкових матриць, це є новим результатом;
- встановлено асимптотичну поведінку всіх кореляційних функцій характеристичних поліномів комплексних випадкових матриць з незалежними

елементами; раніше було встановлено лише у випадку комплексного нормального розподілу елементів матриць [11];

- встановлено асимптотичну поведінку всіх кореляційних функцій характеристичних поліномів дійсних випадкових матриць з незалежними елементами у вигляді інтегралу, який обчислено для другої кореляційної функції, це є новим результатом.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати поглиблюють наше уявлення про випадкові матриці. Також важливим аспектом є метод, за допомогою якого проведено дослідження. Метод грасманового інтегрування може застосовуватись для дослідження спектральних характеристик інших ансамблів випадкових матриць.

Особистий внесок здобувача. Постановки задач належать науковому керівникові. Усі результати дисертації отримані автором самостійно. Усі статті автора [3, 5, 7] написані без співавторів. Результати, що належать іншим математикам, згадуються за необхідністю для повноти викладу та супроводжуються відповідними посиланнями.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися й обговорювалися на наступних міжнародних конференціях:

1. II Міжнародна конференція «Аналіз та математична фізика», Харків, 16–20 червня 2014 р.

2. III Міжнародна конференція «Аналіз та математична фізика», Харків, 15–19 червня 2015 р.

3. Тристороння німецько-російсько-українська літня школа «Spectral Theory, Differential Equations and Probability», Майнц (Німеччина), 4–15 вересня 2016 р.

4. Конференція «Random Matrices and Random Graphs», Марсель (Франція), 15–19 квітня 2019 р.

5. Конференція «Geometry, Differential Equations and Analysis», Харків, 17–21 червня 2019 р.

6. Літня школа «Randomness in Physics and Mathematics», Білефельд (Німеччина), 12–24 серпня 2019 р.

Публікації. Усі основні результати дисертації в повній мірі опубліковані у журналах, внесених до міжнародних наукометричних баз та віднесених до другого й третього квартилів (Q2 та Q3) відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, пройшли апробацію на наукових конференціях та семінарах. Результати дисертації знайшли відображення в 7 наукових публікаціях, в тому числі в 3 статтях [3,5,7], написаних без співавторів, і в тезах доповідей [1,2,4,6] на 4 конференціях.

Структура дисертації. Дисертація складається з анотації, змісту, переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків до дисертації, списку використаних джерел, який містить 192 найменування, та додатка. Повний обсяг роботи — 148 сторінок. Обсяг основної частини дисертації — 108 сторінок. Розділ, присвячений огляду літератури, займає 15 сторінок.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано у відділі математичної фізики математичного відділення Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Вєркіна Національної академії наук України у відповідності до тематики пріоритетних досліджень відділу та в рамках державної науково-дослідної роботи за темою «Матричні та диференціальні оператори та їх застосування в квантовій інформатиці, інтегрованих системах та статистичній фізиці» (шифр М24/5, номер держреєстрації 0106U002561).

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1 Основні спектральні характеристики в теорії випадкових матриць

Незважаючи на те, що вперше випадкові матриці з'явилися в статистиці в 30-х роках XX сторіччя, бурхливий розвиток теорії випадкових матриць почався після того, як Вігнер у 50-х роках у своїх роботах [180–184] запропонував використати випадкові матриці для моделювання статистичної поведінки енергетичних рівнів ядер атомів у ядерній фізиці. З того часу теорія випадкових матриць знайшла своє застосування в багатьох областях сучасних математики (теорія інтегровних систем, теорія графів, теорія фінансів, комбінаторика, теорія чисел, теорія нейронних мереж, тощо) та фізики (теоретична фізика невпорядкованих систем, квантова гравітація, квантова хромодинаміка, теорія струн, тощо).

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, Σ, P).

Означення 1.1. *Випадковою матрицею* називається вимірна функція $M\colon \Omega \to \{\text{матриці розміром } n \times k\}$.

Зауважимо, що зазвичай розглядають квадратні матриці $n \times n$ над полем дійсних або комплесних чисел. Надалі всі випадкові матриці будуть саме такими.

Основним завданням теорії випадкових матриць є дослідження власних значень та власних векторів. Якщо ми розглянемо випадкову матрицю фіксованого розміру, то її власні значення є, як правило, сильно залежними випадковими величинами, які мають дуже складну природу. Не зважаючи на це, можна вивчати власні значення випадкових матриць великого розміру (тобто асимптотично, коли розмір матриці прямує до нескінченності). Тому досліджують не окремо взяту випадкову матрицю, а так звані ансамблі випадкових матриць.

Означення 1.2. *Ансамблем* називається послідовність $\{M_n\}$ випадкових матриць розміром $n \times n$.

Власні значення та інші спектральні характеристики ансамблів випадкових матриць в основному вивчаються у двох асимптотичних режимах: глобальному та локальному. У глобальному режимі одним з основних об'єктів дослідження є нормована рахуюча міра (НРМ) власних значень.

Означення 1.3. *Нормованою рахуючою мірою власних значень* ансамблю M_n називається така міра N_n на комплексній площині, що

$$N_n(\Delta) = \frac{1}{n} \cdot \#\{\lambda_j^{(n)} \in \Delta, \, j = 1, \ldots, n\}, \tag{1.1}$$

де Δ — довільна борелівська множина на комплексній площині, а $\left\{\lambda_j^{(n)}\right\}_{j=1}^n$ — власні значення матриці M_n.

Для багатьох ансамблів випадкових матриць відомо, що НРМ має слабку границю при $n \to \infty$, наприклад, [16,83,101,128,136,173,183,191,192], див. також книги [125, 135] та посилання в них. Незважаючи на те, що НРМ є випадковою мірою, гранична міра зазвичай не є випадковою.

Означення 1.4. Носій граничної міри називається *спектром*.

Наступним кроком у дослідженні випдкових матриць у глобальному режимі є вивчення коливань лінійної статистики власних значень.

Нехай $\eta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — довільна тестова функція.

Означення 1.5. *Лінійною статистикою* випадкових величин $\left\{\lambda_j^{(n)}\right\}_{j=1}^n$, визначеною за тестовою функцією η, називається

$$\mathcal{N}_n[\eta] = \sum_{j=1}^n \eta\left(\lambda_j^{(n)}\right) = \operatorname{tr} \eta(M_n).$$

Наскільки відомо авторові, вперше питання дослідження лінійної статистики було піднято в роботі [15] стосовно ансамблю матриць коваріації, тепер більше відомого як ансамбль Марченко-Пастура. Цей напрямок отримав розвиток в роботах Гірко (див. [82] і книги [85, 86, 190] та посилання в них), де було доведено центральну граничну теорему (ЦГТ) для ансамблів Вігнера та

Марченко-Пастура. У більш загальній сутуації ЦГТ для цих ансамблів було доведено в [18, 122, 150]. Крім цього, багато робіт присвячено ЦГТ для інших ансамблів, наприклад, [12, 34, 36, 39, 42, 47, 68, 93, 96, 104, 112, 115, 131, 132, 142, 143, 147, 157, 158, 165, 172].

З піонерських робіт Вігнера [180–184] стало зрозуміло, що з точки зору ядерної фізики є сенс досліджувати власні значення випадкових матриць не лише глобально, а й локально, тобто в малому околі фіксованої точки λ_0 спектру. Порядок радіуса окола вибирається таким чином, щоб в окіл в середньому потрапляло лише $O(1)$ власних значень (при $n \to \infty$). Таких підхід дозволив, зокрема, обґрунтувати явище «відштовхування енергетичних рівнів» важких ядер.

У 60-тих роках XX сторіччя Дайсон висунув гіпотезу універсальності, яка зараз носить ім'я Вігнера–Дайсона. За цією гіпотезою локальна поведінка власних значень не залежить від імовірнісного розподілу матриць ансамблю, а залежить лише від «класу симетрії» матриць (ермітові, симетричні чи дійсно-кватерніонні матриці зі спектром на дійсній осі; унітарні, ортогональні чи симплектичні матриці зі спектром на одиничному колі) та від того, знаходиться точка λ_0 всередині чи на межі спектра.

Нехай $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, якщо матриці M_n ермітові, інакше $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, а $\tilde{\mu}$ — міра Лебега на $\mathbb{F}$. Тепер ми можемо дати визначення одному з основних об'єктів дослідження в локальному режимі, в термінах якого формулюється гіпотеза універсальності — спектральній кореляційній функції.

Означення 1.6. *m-та спектральна кореляційна функція R_m визначається тотожністю*

$$\mathbf{E}\left\{\sum_{1\le j_1\ne\cdots\ne j_m\le n}\eta\left(\lambda_{j_1}^{(n)},\ldots,\lambda_{j_m}^{(n)}\right)\right\}$$
$$=\int\limits_{\mathbb{F}^m}\eta(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)R_m(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)d\tilde{\mu}(\lambda_1)\cdots d\tilde{\mu}(\lambda_m),$$

яка справджується для будь-якої обмеженої неперервної симетричної функції $\eta : \mathbb{F}^m \to \mathbb{C}$.

Гіпотеза універсальності та її застосування привертають значну увагу фізиків, починаючи з моменту висунення гіпотези Дайсоном, див. [33, 55, 92, 95, 105, 125, 127, 129], тощо. Проте з математичної точки зору виявилось, що довести гіпотезу універсальності досить важко, а деяких випадках навіть дуже важко. Тому строгі математичні роботи з'явилися значно пізніше. Перші результати в значній мірі спиралися на інваріантність розподілу ймовірностей випадкових матриць відносно унітарних, ортогональних чи симплектичних перетворень як всередині спектра [14, 19, 23, 25, 44–46, 100, 102, 103, 106, 130, 134, 137, 140, 149, 151, 167], так і на його межі [14, 23, 25, 35, 40, 133, 138, 148, 164, 166, 170, 174].

На початку 10-тих років XXI сторіччя для ансамблів, ймовірнісний розподіл яких не має властивості інваріантності, було запропоновано інший підхід. Новий метод полягає в порівнянні спектрів ансамблю загального виду та «еталонного» ансамблю, локальна поведінка власних значень якого відома. Здебільшого цей метод доволяє доводити гіпотезу універсальності за умови, що перші чотири моменти елементів матриці співпадають з моментами гаусового розподілу, [59–63, 98, 170–172], тощо. Проте в одній з останніх робіт [37] ці обмеження вдалося послабити до двох моментів.

Ще одними цікавими і важливими об'єктами є кореляційні функції характеристичних поліномів.

Означення 1.7. Кореляційною функцією характеристичних поліномів називається

$$\mathsf{f}_m(Y) = \mathbf{E}\left\{ \prod_{j=1}^{m} \det\left(M_n^* - y_j\right)\left(M_n - y_{m+j}\right) \right\}, \tag{1.2}$$

де

$$Y = \mathrm{diag}\{y_1, \ldots, y_{2m}\} \tag{1.3}$$

та $y_1, \ldots, y_{2m}$ — дійсні або комплексні параметри, що можуть залежати від n.

З точки зору методу грасманового інтегрування, кореляційні функції характеристичних поліномів є простішим аналогом спектральних кореляційних функцій. Тому вивчення асимптотичної поведінки кореляційних функцій характеристичних поліномів можна вважати першим кроком у дослідженні спектральних кореляційних функцій. Детальніше про цей зв'язок йтиметеся в підрозділі 1.2.

Крім того, кореляційні функції характеристичних поліномів цікаві й самі по собі. Перш за все, кореляційні функції характеристичних поліномів привернули увагу в 90-тих роках XX сторіччя у зв'язку з деякими питаннями, які виникають при застосуванні теорії випадкових матриць до хаотичних квантових систем [13, 69, 73, 94, 109]. А на початку 2000-них у роботах Кітінга та Снейт [107, 108] та Х'юза, Кітінга й О'Коннелла [99] було втановлено наявність неочікуваного зв'язку між розподілом нулів дзета-функції Рімана та L-функцій Діріхле вздовж критичної вісі $\Re z = \frac{1}{2}$ та кореляційними функціями характеристичних поліномів кругового унітарного й кругового ортогонального ансамблів відповідно. З цього випливає, що локальні статистичні властивості дзета-функції Рімана на критичній вісі (далеко від дійсної вісі) можна спробувати змоделювати відповідними властивостями характеристичних поліномів випадкових унітарних матриць. Виявлення цього факта спричинило справжній вибух цікавості наукової спільноти до характеристичних поліномів випадкових матриць: було досліджено характеристичні поліноми для матричних моделей [8,29,30,80,126,168,175], GUE [78], GOE [31,32,70,72], ансамблю Жинібра [11], кірального GUE [79], тощо. Інтенсивне дослідження характеристичних поліномів продовжується і дотепер. Так, в останні роки велося дослідження моментів та кореляційних функцій характеристичних поліномів для унітарного ансамблю [20, 74], ансамблю Вігнера [90, 116, 117, 159], ансамблю Марченко-Пастура [118,119,160], ансамблю полоскових матриць [153,161,162], ансамблю неермітових матриць з незалежними елементами (зокрема, ансамблю Жинібра) [9, 179], тощо. Можна також відзначити роботу [43], де ядро деяких кореляційних функцій характеристичних поліномів неермітових ансамблів виражено через розв'язки рівнянь Пенлеве. Крім того, не припиняється дослідження зв'язку дзета-функції Рімана та характеристичних поліномів, наприклад, [17,20,71,163].

1.2 Метод грасманового інтегрування

До математики ідея використання антикомутуючих змінних разом зі звичайними прийшла з фізики. Наскільки відомо авторові, мова про антикомутуючі змінні вперше йде у статті Мартіна [123]. З того часу антикомутуючі змінні використовуються майже у всіх областях математики, а об'єкти, які «містять» одночасно комутуючі та антикомутуючі змінні, отримали приставку супер-: супервектори, суперматриці, суперінтеграли, супергрупи, супермноговиди, тощо.

Систематизував знання з суперматематики Березін, написавши книгу [24, 188], яку, на жаль, було видано посмертно.

У цій роботі під методом грасманового інтегрування ми розуміємо застосування інтеграла по грасмановим змінним (необов'язково саме суперінтеграла, звичайні комутуючі змінні можуть бути відсутні). Використати цей метод у теорії випадкових матриць першими запропонували (на фізичному рівні строгості) Вербааршот та Цирнбауер [177] для GUE та Вербааршот, Вайденмюлер та Цирнбауер [176] для GOE. У більш пізніх фізичних роботах також було досліджено кореляційну функцію щільності [187] GUE. Крім того, метод грасманового інтегрування успішно застосовувався для вивчення матриць суміжності випадкових графів [75,127], полоскових матриць [76,77,186], матричних моделей [29,80,95], кругових ансамблів [185] та GOE [31, 70] (всі на фізичному рівні строгості).

Завичай за допомогою методу грасманового інтегрування неважко отримати «зручне» інтегральне представлення для так званої генеруючої функції. Генеруюча функція в залежності від ансамблю може по-різному залежати від параметрів, але спільним залишається те, що вона є математичним сподіванням відношень детермінантів, наприклад, такого вигляду

$$\mathbf{E}\left\{\prod_{j=1}^{m}\frac{\det\left((M_n-z_j)(M_n-z_j)^*+\delta_j\right)}{\det\left((M_n-z_j)(M_n-z_j)^*+\varepsilon_j\right)}\right\}.$$

В свою чергу, спектральні кореляційні функції та інші спектральні характеристики виражаються через похідні генеруючої функції. На жаль, інтегральні представлення генеруючої функції, отримані методом грасманового інтегрування, в багатьох випадках є дуже складними для дослідження. Через це є сенс розглядати кореляційні функції характеристичних поліномів (1.2), які схожі на генеруючу функцію за структурою та за асимптотиною поведінкою (якщо вона відома для обох функцій), проте є значно простішими.

У математичних роботах метод грасманового інтегрування почали використовувати на початку 2000-них років. Наскільки відомо авторові, однією з перших є робота Дізерторі, Пінсера та Спенсера [53], де вони встановили швидкість збіжності НРМ до напівкругового закону для полоскових матриць з широкою полосою. Полоскові матриці інтенсивно досліджуються і дотепер [21, 49, 51, 53, 152–154, 156, 161, 162]. Крім того, метод грасманового інтегрування було використано для дослідження GUE [48], перехідного ансамблю між GUE та GOE [146], ансамблю Марченко-Пастура [141, 160], σ-моделі [52, 54, 155], оператора Шредінгера із випадковим потенціалом [50], ансамблю Жинібра [38], тощо.

1.3 Ансамбль розріджених ермітових випадкових матриць

Розглянемо ансамбль розріджених ермітових випадкових матриць розміром $n \times n$ виду

$$M_n = (d_{jk} w_{jk})_{j,k=1}^{n} \tag{1.4}$$

де

$$d_{jk} = p^{-1/2} \begin{cases} 1 \text{ з ймовірністю } \dfrac{p}{n}; \\ 0 \text{ з ймовірністю } 1 - \dfrac{p}{n}; \end{cases} \tag{1.5}$$
$$w_{jk} = w_{jk}^{(1)} + i w_{jk}^{(2)},\ j \neq k$$

та $\{w_{jk}^{(1)}, w_{jk}^{(2)}, w_{ll} : 1 \leq j < k \leq n, 1 \leq l \leq n\}$ є такими незалежними однаково розподіленими (н. о. р.) випадковими величинами із нульовим середнім, що

$$2\mathbf{E}\{|w_{jk}^{(1)}|^2\} = 2\mathbf{E}\{|w_{jk}^{(2)}|^2\} = \mathbf{E}\{|w_{ll}|^2\} = 1, \quad j \neq k. \tag{1.6}$$

Тут і всюди нижче $\mathbf{E}$ позначає математичне сподівання по всім випадковим величинам. Випадкові величини $\{d_{jk} : j \leq k\}$ також незалежні одна від одної та від величин $w_{jk}^{(1)}, w_{jk}^{(2)}, w_{ll}$.

Ці матриці відомі як «вагові» матриці суміжності випадкових графів Ерде-ша–Реньї $G(n, \frac{p}{n})$. Випадкові величини $\{d_{jk}\}$ є елементами стандартної матриці суміжності, а $\{w_{jk}\}$ — це множина незалежних ваг. Розріджені ермітові випадкові матриці досліджуються широким колом учених в останні роки, оскільки вони є свого роду проміжною ланкою між «сильно розрідженими» матрицями зі скінченним p, які містять лише скінченну кількість ненульових елементів у кожному рядку, і матрицями з $p = n$, які співпадають з матрицями з ансамблю Вігнера. Результати про збіжність НРМ цих матриць було отримано на фізичному рівні строгості у випадку $p \to \infty$ Роджерсом та Бреєм у роботі [144], а у випадку скінченного p Роджерсом та де Домінісісом у роботі [145]. Що стосується математичних робіт, то збіжність НРМ було доведено Хорунжим, Хоруженко, Пастуром та М. Щербиною в роботі [113] при $p \to \infty$, для скінченного p Бауером та Голінеллі в роботі [22] для $w_{jk} = 1$ та Хорунжим, М. Щербиною та Венгеровським у роботі [114] для довільних дійсних $\{w_{jk}\}$, які є незалежними від $\{d_{jk}\}$ та мають чотири моменти. В [113] було показано, що при $p \to \infty$ граничний розподіл власних значень є таким самим, як і для ансамблю Вігнера

$$\lim_{n\to\infty} N_n(\Delta) = \int\limits_{\Delta} \rho_{sc}(\lambda)d\lambda, \qquad \rho_{sc}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-\lambda^2}\cdot \mathbf{1}_{[-2,2]}, \tag{1.7}$$

а в [114] доведено, що слабка границя $N(\lambda)$ нормованої рахуючої міри (1.1) існує, причому перетворення Стілтьєса граничної міри має вигляд

$$g(z) = \frac{i}{\mathbf{E}\{w_{12}^2\}}\cdot \frac{\partial}{\partial u} f(u,iz)\Big|_{u=0},$$

де функція $f(u,z)$ є розв'язком функціонального рівняння

$$f(u,z) = 1 - u^{1/2}e^{-p}\mathbf{E}\left\{ |w_{12}| \int\limits_0^\infty dv \frac{\mathscr{J}_1(2|w_{12}|\sqrt{uv})}{\sqrt{v}} \exp\{-zv + pf(v/p,z)\}\right\},$$

де $\mathscr{J}_1(\zeta)$ — функція Бесселя

$$\mathscr{J}_1(\zeta) = \frac{\zeta}{2}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-\zeta^2/4)^k}{k!(k+1)!}.$$

Також показано, що при скінченному p спектр НРМ — уся дійсна вісь.

ЦГТ для лінійної статистики власних значень матриць суміжності невагових графів (тобто при $w_{jk} = 1$) було доведено в роботах М. Щербини та Тіроцці. В [157] для скінченного фіксованого p та для такої тестової функції η, що має дві похідні, причому

$$\eta,\eta',\eta'' \in L^2(\mathbb{R}, \mathrm{ch}^{-2}(c\lambda)) = \left\{ f\colon \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2\,\mathrm{ch}^{-2}(c\lambda)\,d\lambda < \infty\right\}$$

для деякої константи $c > 0$, доведено, що випадкова величина

$$n^{-1/2}(\mathscr{N}_n[\eta] - \mathbf{E}\{\mathscr{N}_n[\eta]\})$$

збігається за розподілом до нормальної випадкової величини з нульовим середнім та дисперсією $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{Var}\{n^{-1/2}\mathscr{N}_n[\eta]\}$. У роботі [158] для $p \to \infty$ та для тестової функції η, яку можна подати у вигляді $\eta(\lambda) = \mathrm{ch}(c\lambda)\tilde{\eta}(\lambda)$, де $c \geq 0$, а $\tilde{\eta}$ має більше $\dfrac{3}{2}$ похідних, показано, що випадкова величина

$$(p/n)^{1/2}(\mathscr{N}_n[\eta] - \mathbf{E}\{\mathscr{N}_n[\eta]\})$$

збігається за розподілом до нормальної випадкової величини з нульовим середнім та дисперсією

$$V[\eta] = \frac{1}{2\pi^2}\left(\int\limits_{-2}^{2} \eta(x)\frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx\right)^2,$$

якщо $V[\eta] \neq 0$. Точно таке ж твердження, за умови $n^{\varepsilon} \leq p \leq n^{1-\varepsilon}$, нещодавно було доведено Хе [96] для недиференційовних тестових функцій вигляду

$$\eta(\lambda) = \mathbf{1}_{(-\infty,\lambda]}, \qquad \lambda \in (-2,2)\setminus\{0\}.$$

Щодо локального режиму було висунуто гіпотезу, що існує таке критичне значення $p_c > 1$ (див. [64–66]), що для $p > p_c$ власні значення сильно корелюють та характеризуються статистикою матриць GUE, в той час як для $p < p_c$ власні значення не корелюють та мають статистику Пуасона. Цю гіпотезу було підтверджено чисельними обчисленнями [120] та за допомогою супераналізу [75, 127] на фізичному рівні строгості. Зауважимо, що результати даної дисертаційної роботи підтверджують існування схожої точки переходу для другої кореляційної функції характеристичних поліномів. Строгі результати для локальної статистики власних значень було отримано в роботах Ердеша, Ноулза, Яу та Інь [60] та Хуан, Лендона та Яу [98]. Спочатку для $p \gg n^{2/3}$, а потім і для $p \geq n^{\varepsilon}$ при довільному $\varepsilon > 0$ було показано, що для будь-якої нескінченно гладкої тестової функції η з компактним носієм

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\lambda-b}^{\lambda+b}\int\limits_{\mathbb{R}^k}\eta(x_1,\ldots,x_k)\left\{\frac{1}{\rho_{sc}(\lambda)^k}R_k^{(M)}\left(\lambda'+\frac{x_1}{n\rho_{sc}(\lambda)},\ldots,\lambda'+\frac{x_k}{n\rho_{sc}(\lambda)}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\rho_{sc}(\lambda)^k}R_k^{(GUE)}\left(\lambda'+\frac{x_1}{n\rho_{sc}(\lambda)},\ldots,\lambda'+\frac{x_k}{n\rho_{sc}(\lambda)}\right)\right\}dx_1\cdots dx_k\frac{d\lambda'}{2b} = 0,$$

де через $R_k^{(M)}$ та $R_k^{(GUE)}$ позначено k-ті спектральні кореляційні функції ансамблів M_n та GUE відповідно. Щодо межі спектра, Хорунжий у статті [110] довів, що за умови існування момента $\mathbf{E}\left\{\left|w_{jk}\right|^{12+2\alpha}\right\}$ та при $p=n^{2/3(1+\varepsilon)}$ для довільного $\varepsilon>\frac{3}{6+\alpha}$, гранична ймовірність $P\{\max_j \lambda_j^{(n)}>2+x/n^{2/3}\}$ обмежена зверху, причому оцінка є універсальною, в тому сенсі, що вона не залежить від моментів w_{jk} вище другого. З результатів іншої його статті [111] випливає, що при $p\ll n^{1/5}$ гранична ймовірність $P\{\max_j \lambda_j^{(n)}>2+\frac{x}{p(\log n)^{-2}}\}$ дорівнює нулю.

1.4 Ансамбль випадкових матриць з незалежними елементами

У цьому підрозділі ми розглянемо неермітовий аналог ансамблю Вігнера, що є найпростішим неермітовим ансамблем, так звані випадкові матриці з незалежними елементами. Ці матриці складаються з н. о. р. випадкових величин. Точніше, матриці мають вигляд

$$M_n=\frac{1}{\sqrt{n}}X=\frac{1}{\sqrt{n}}(x_{jk})_{j,k=1}^{n}, \tag{1.8}$$

Зазвичай розглядають три випадки: елементи матриць є дійсними числами, комплексними числами чи кватерніонами. У цій роботі ми розглянемо тільки два з них:

1) комплексний випадок: $\{x_{jk}\}$ — такі н. о. р. комплексні випадкові величини, що
$$\mathbf{E}\{x_{jk}\}=\mathbf{E}\{x_{jk}^2\}=0, \quad \mathbf{E}\{\left|x_{jk}\right|^2\}=1; \tag{1.9}$$

2) дійсний випадок: $\{x_{jk}\}$ — такі н. о. р. дійсні випадкові величини, що
$$\mathbf{E}\{x_{jk}\}=0 \quad \text{та} \quad \mathbf{E}\{x_{jk}^2\}=1. \tag{1.10}$$

Зокрема, якщо $\{x_{jk}\}$ мають комплексний або дійсний нормальний розподіл, то ансамбль називається відповідно комплексним або дійсним ансамблем Жинібра. Ми позначимо ці ансамблі як $\mathrm{Gin}(\mathbb{C})$ та $\mathrm{Gin}(\mathbb{R})$ відповідно.

Ансамбль випадкових матриць з незалежними елементами має численні застосування у фізиці, теорії нейронних мереж, економіці, тощо. Для більш докладної інформації про застосування цього ансамблю див. роботу [10] та посилання в ній.

Відомо, що НРМ збігається (як по ймовірності, так і майже напевно) до рівномірного розподілу в одиничному крузі. Цей розподіл називається круговим законом. Цей результат має довгу та багату історію. Вперше його отримав Ме́та у 1967 році для x_{jk}, що мають комплексний норманий розподіл [124]. Доведення суттєво спиралося на точну формулу для спільної щільності ймовірності власних значень

$$P(\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)}) = \left((2\pi)^n \prod_{j=1}^{n} j!\right)^{-1} \prod_{j<k} |\lambda_j - \lambda_k|^2 \exp\{-\sum |\lambda_j|^2\}, \qquad (1.11)$$

яку отримав Жинібр у 1965 році [81]. У набагато складнішому випадку дійсного нормального розподілу теорему про круговий закон довів Едельман у 1997 році [56]. На жаль, у випадку довільного розподілу такої формули як (1.11) не існує. Тому треба використовувати інші підходи. У 1984 році Гірко запропонував метод ермітизації [189], який, як виявилось, є дуже ефективним. Основна ідея цього методу полягає в тому, щоб звести вивчення матриць (1.8) до вивчення ермітових матриць, використовуючи логарифмічний потенціал міри

$$P_\nu(z) = \int_{\mathbb{C}} \log|z - \zeta| \, d\nu(\zeta).$$

У наступній серії робіт [84, 87–89] Гірко успішно розвивав цей підхід. Остаточний результат у найбільш загальному випадку отримали Тао та Ву в 2010 році [169]. Зауважимо, що, крім перелічених вище, є ціла серія часткових результатів. Детальніше з історією питання можна ознайомитися в огляді [26].

ЦГТ для лінійної статистики власних значень неермітових випадкових матриць з незалежними елементами вперше довів Форестер [68] у випадку комплексного нормального розподілу для радіально-інваріантних тестових функцій. Дослідження продовжили Райдер та Сільверстейн [142], розглянувши випадок довільного розподілу елементів матриць та аналітичні тестові функції. У іншій роботі [143] Райдер та Віраг розглянули випадок нормального розподілу та довільні тестові функції. У дійсному випадку ЦГТ довели О'Рурк та Ренфрю для аналітичних тестових функцій [131]. У 2015 році Копелю в роботі [115] вдалося послабити більшість умов, причому як у комплексному випадку, так і у дійсному. Стосовно елементів матриць залишилась умова, що $\Re x_{jk}$ та $\Im x_{jk}$ є незалежними випадковими величинами та перші чотири моменти цих величин співпадають з моментами нормального розподілу, а тестові функції мають бути двічі неперервно-диференційовні. Для функцій, що не є неперевними, при тих самих умовах на розподіл елементів Тао й Ву [172] довели, що якщо $n^{-1/2} \ll r \le n^{-1/2+\alpha(n)}$, $\alpha(n) \to 0$ та $|z_0| < 1$, то випадкова величина

$$\frac{\mathcal{N}_n\left[\mathbf{1}_{|z-z_0|<r}\right] - nr^2}{(nr^2/\pi)^{1/4}}$$

збігається за розподілом до нормальної випадкової величини із середнім нуль та дисперсією один. На сьогодні найкращий результат для гладких функцій отримали Чиполлоні, Ердеш та Шредер у роботі [36] для комплексного випадку та у роботі [39] для дійсного випадку. Вони показали, що для тестової функції η, яка має $2+\delta$ похідних, випадкова величина $L_n[\eta] := \mathcal{N}_n[\eta] - \mathbf{E}\{\mathcal{N}_n[\eta]\}$ збігається до нормальної випадкової величини $L[\eta]$ з математичним сподіванням $\mathbf{E}\{L[\eta]\} = 0$, дисперсією $\mathbf{E}\{|L[\eta]|^2\} = C(\eta,\eta)$ та $\mathbf{E}\{L[\eta]^2\} = C(\overline{\eta},\eta)$, де

$$\begin{aligned} C(g,f) &:= \frac{1}{2\pi}\langle \nabla(Pg), \nabla(Pf)\rangle_{L^2(D)} + \langle (Pg),(Pf)\rangle_{\dot{H}^{1/2}(\partial D)} \\ &\quad + \kappa_4\left(\frac{1}{\pi}\int_D \overline{g(z)}\,d\bar{z}dz - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{g(e^{i\theta})}\,d\theta\right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\pi}\int_D f(z)\,d\bar{z}dz - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,d\theta\right), \end{aligned}$$

оператор P діє наступним чином

$$(Pf)(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{\sqrt{2}} & \text{у комплексному випадку,} \\ \frac{f(z)+f(\bar{z})}{2} & \text{у дійсному випадку,} \end{cases}$$

а κ_4 — четвертий кумулянт імовірнісного розподілу елементів матриці, тобто

$$\kappa_4 = \begin{cases} \mathbf{E}\{|x_{11}|^4\} - 2 & \text{у комплексному випадку,} \\ \mathbf{E}\{|x_{11}|^4\} - 3 & \text{у дійсному випадку.} \end{cases}$$

На відміну від глобального режиму, локальний не є настільки добре дослідженим. Асимптотика m-тої спектральної кореляційної функції для ансамблю Жинібра добре відома як для комплексного випадку [81, 124], так і для складнішого дійсного випадку [27, 56, 67]. А саме,

$$\lim_{n\to\infty} R_m^{(n,\mathrm{Gin}(\mathbb{F}))}\left(z_0 + \frac{\zeta_1}{n^{1/2}}, \ldots, z_0 + \frac{\zeta_m}{n^{1/2}}\right) = R_{m,z_0}^{(\infty,\mathrm{Gin}(\mathbb{F}))}(\zeta_1, \ldots, \zeta_m).$$

Зауваження 1.8 (Точне значення границі спектральної кореляційної функції). У комплексному випадку границя спектральної кореляційної функції є детермінантною, тобто

$$R_{m,z_0}^{(\infty,\mathrm{Gin}(\mathbb{C}))}(\zeta_1,\ldots,\zeta_m) = \det\left(K_{z_0}^{(\infty,\mathrm{Gin}(\mathbb{C}))}(\zeta_k,\zeta_j)\right)_{1\le k,j\le m}$$

де для будь-яких комплексних чисел z_0, ζ_1, ζ_2 ядро $K_{z_0}^{(\infty,\mathrm{Gin}(\mathbb{C}))}(\zeta_1,\zeta_2)$ має вигляд

1. При $|z_0| > 1$, $K_{z_0}^{(\infty,\mathrm{Gin}(\mathbb{C}))}(\zeta_1,\zeta_2) = 0$.
2. При $|z_0| < 1$,
$$K_{z_0}^{(\infty,\mathrm{Gin}(\mathbb{C}))}(\zeta_1,\zeta_2) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{|\zeta_1|}{2} - \frac{|\zeta_2|}{2} + \zeta_1\overline{\zeta_2}}.$$
3. При $|z_0| = 1$,
$$K_{z_0}^{(\infty,\mathrm{Gin}(\mathbb{C}))}(\zeta_1,\zeta_2) = \frac{1}{2\pi}\left[1 + \mathrm{erf}\left(-\sqrt{2}(z_0\overline{\zeta_2} + \zeta_1\overline{z_0})\right)\right] e^{-\frac{|\zeta_1|}{2} - \frac{|\zeta_2|}{2} + \zeta_1\overline{\zeta_2}},$$
де
$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\gamma_z} e^{-t^2}\,dt,$$
γ_z — довільний контур, що сполучає 0 та z, $z \in \mathbb{C}$.

Відповідні формули для $R_m^{(\infty,\mathrm{Gin}(\mathbb{R}))}$ є набагато більш громіздкими, тому ми не будемо приводити їх тут. Точні значення границі спектральних кореляційних функцій можна знайти в роботі [27].

У 2015 році Тао й Ву [172] довели, що якщо випадкові величини $\Re x_{jk}$ та $\Im x_{jk}$ є незалежними та перші чотири моменти цих величин співпадають з моментами нормального розподілу, то m-та спектральна кореляційна функція має ту саму слабку границю, що й для ансамблю Жинібра, як всередині спектра, так і на його границі. А саме,

$$\int\limits_{\mathbb{C}^m} F(\zeta)\left[R_m^{(n,\mathrm{Gin}(\mathbb{F}))}\left(\mathbf{z}_0 + \frac{\zeta}{\sqrt{n}}\right) - R_{m,z_0}^{(\infty,\mathrm{Gin}(\mathbb{F}))}(\zeta)\right] d\zeta = O(n^{-c}) \tag{1.12}$$

для деякої константи $c > 0$ та для будь-якої достатньо гладкої функції F з деякого специфічного класу функцій.

У 2019 році Чиполлоні, Ердешу та Шредеру вдалося послабити вимоги на розподіл елементів матриць, але тільки на межі спектра. Вони довели оцінку (1.12) за умови, що число z_0 задовольняє нерівність $\left|1-|z_0|^2\right| \le Cn^{-1/2}$ та матричні елементи x_{jk} мають усі моменти (моменти, старші за другий, можуть не співпадати з моментами нормального розподілу) і щільність ймовірності $g\colon \mathbb{F} \to [0;\infty)$, причому існують такі $\alpha, \beta > 0$, що

$$g \in L^{1+\alpha}(\mathbb{F}), \qquad \|g\|_{L^{1+\alpha}} \le n^{\beta}.$$

Цей результат суттєво спирається на оцінку для найменшого сингулярного числа матриці $M_n - z$ при $|z| = 1 + O(n^{-1/2})$, яку було нещодавно доведено в роботі [38] за допомогою методу грасманового інтегрування.

Кореляційні функції характеристичних поліномів для комплексного ансамблю Жинібра досліджували Акеман та Верніцці. У своїй роботі [11] вони обчислили точні значення кореляційних функцій (1.2) при будь-якому скінченному n

$$\mathbf{E}\left\{\prod_{j=1}^{m} \det\left(X - z_j^{(1)}\right)\left(X^* - \bar{z}_j^{(2)}\right)\right\} = \left(\prod_{l=n}^{n+m-1} l!\right) \frac{\det(K_n(z_j^{(1)}, \bar{z}_k^{(2)}))_{j,k=1}^m}{\triangle(Z^{(1)})\triangle((Z^{(2)})^*)}, \quad (1.13)$$

де

$$K_n(z,w) = \sum_{l=0}^{n+m-1} \frac{(z\overline{w})^l}{l!}.$$

та $Z^{(l)} = \operatorname{diag}\left\{z_1^{(l)}, \ldots, z_m^{(l)}\right\}$, $l = 1,2$, а $\triangle(Y)$ є визначником Вандермонда власних значень матриці Y. Поклавши $z_j^{(1)} = z_j^{(2)} = \sqrt{n} z_j$,

$$z_j = z_0 + \frac{\zeta_j}{\sqrt{n}}, \quad (1.14)$$

$|z_0| < 1$, $\zeta_j \in \mathbb{C}$ у (1.13), можна вивести, що

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{m^2-m}{2}} \frac{\mathsf{f}_m(\check{Z})}{\mathsf{f}_1(\bar{z}_1, z_1)\cdots \mathsf{f}_1(\bar{z}_m, z_m)} = \frac{\det(K_{\mathbb{C}}(\zeta_j, \zeta_k))_{j,k=1}^m}{|\triangle(\mathscr{Z})|^2}, \quad (1.15)$$

де

$$\check{Z} = \operatorname{diag}\{\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m, z_1, \ldots, z_m\}; \quad (1.16)$$

$$\mathscr{Z} = \operatorname{diag}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_m\} \quad (1.17)$$

та

$$K_{\mathbb{C}}(z,w) = e^{-|z|^2/2-|w|^2/2+z\overline{w}}. \tag{1.18}$$

Інший результат про характеристичні поліноми матриць комплексного ансамблю Жинібра було отримано Веббом та Вонгом у роботі [179]. Для будь-якого числа z_0 всередині одиничного круга та для будь-якого комплексного числа γ, дійсна частина якого більша за -2, вони встановили, що

$$\mathbf{E}\left\{|\det(M_n - z_0)|^{\gamma}\right\} = n^{\frac{\gamma^2}{8}} e^{\frac{\gamma}{2}n(|z_0|^2-1)} \frac{(2\pi)^{\frac{\gamma}{4}}}{G(1+\frac{\gamma}{2})}(1+o(1)), \tag{1.19}$$

де G — G-функція Барнса.

РОЗДІЛ 2

КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ПОЛІНОМІВ РОЗРІДЖЕНИХ ЕРМІТОВИХ ВИПАДКОВИХ МАТРИЦЬ

Нас цікавить асимптотична поведінка кореляційних функцій характеристичних поліномів $\mathsf{f}_m(\Lambda)$ (див. (1.2)) для матриць (1.4) при $n \to \infty$ у випадку, якщо параметри λ_j, $j = 1, \ldots, 2m$ мають вигляд

$$\lambda_j = \lambda_0 + \frac{x_j}{n}, \qquad j = \overline{1,2m}, \qquad \text{якщо } \lambda_0 \text{ лежить всередині спектра;} \tag{2.1}$$

$$\lambda_j = \lambda_0 + \frac{x_j}{n^{2/3}}, \qquad j = \overline{1,2m}, \qquad \text{якщо } \lambda_0 \text{ лежить на межі спектра,} \tag{2.2}$$

де λ_0, $\{x_j\}_{j=1}^{2m}$ — дійсні числа, а запис $j = \overline{1,2m}$ означає, що j змінюється від 1 до $2m$.

Покладемо також

$$\lambda_*(p) = \begin{cases} \sqrt{4 - 8/p}, & \text{якщо } p > 2; \\ 0, & \text{якщо } p \leq 2. \end{cases} \tag{2.3}$$

Головним результатом цього розділу є

Теорема 2.1. *Нехай ансамбль сильно розріджених випадкових матриць задано формулами* (1.4)–(1.6) *для скінченного p, і нехай випадкові величини $w_{jk}^{(1)}$, $w_{jk}^{(2)}$ мають нормальний розподіл, а числа λ_j мають вигляд* (2.1). *Тоді кореляційна функція двох характеристичних поліномів* (1.2) *при $m = 1$ задовольняє асимптотичні співвідношення*

(i) при $\lambda_0 \in (-\lambda_*(p), \lambda_*(p))$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{f}_1(\Lambda)}{\sqrt{\mathsf{f}_1(\lambda_1 I)\mathsf{f}_1(\lambda_2 I)}} = \frac{\sin\Big((x_1 - x_2)\sqrt{\lambda_*(p)^2 - \lambda_0^2}/2\Big)}{(x_1 - x_2)\sqrt{\lambda_*(p)^2 - \lambda_0^2}/2};$$

(ii) при $\lambda_0 \notin (-\lambda_*(p), \lambda_*(p))$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{f}_1(\Lambda)}{\sqrt{\mathsf{f}_1(\lambda_1 I)\mathsf{f}_1(\lambda_2 I)}} = 1,$$

де $\lambda_*(p)$ *визначено в* (2.3).

Зауваження 2.2.

1. З Теореми 2.1 випливає, що кореляційна функція другого порядку має так званий «фазовий перехід» при $p = 2$, тобто якщо $p > 2$, то присутні два типи асимптотичної поведінки — випадки (i) та (ii), а якщо $p \le 2$, то тільки один — випадок (ii).

2. Якщо дозволити p залежати від n, то асимптотичні режими (i) та (ii) повністю узгоджуються. Доведення цього факту міститься в підрозділі 2.2.

3. $\lambda_*(p) \to 2$ при $p \to \infty$, і оскільки при $p \to \infty$ граничний спектр завжди $[-2, 2]$ (див. (1.7)), то природньо очікувати, що для $p \to \infty$ асимптотична поведінка буде такою ж як і для GUE для всіх $\lambda_0 \in (-2, 2)$ (тобто для всіх λ_0 з внутрішності граничного спектру). Ми підтверджуємо це у Теоремі 2.3.

Теорема 2.3. *Нехай ансамбль слабко розріджених випадкових матриць задано формулами* (1.4)–(1.6), $p \to \infty$, *і нехай випадкові величини* $w_{jk}^{(1)}$, $w_{jk}^{(2)}$ *мають нормальний розподіл, а числа* λ_j *мають вигляд* (2.1). *Тоді кореляційні функції характеристичних поліномів* (1.2) *для* $\lambda_0 \in (-2, 2)$ *задовольняють асимптотичні співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{f}_m(\Lambda)}{\left(\prod\limits_{j=1}^{2m} \mathsf{f}_m(\lambda_j I)\right)^{1/2m}} = \frac{\hat{s}_{2m}(X)}{\hat{s}_{2m}(I)},$$

де $X = \mathrm{diag}\{x_1, \ldots, x_{2m}\}$ *та*

$$\hat{s}_{2m}(X) = \frac{\det\left\{\dfrac{\sin(\pi\rho_{sc}(\lambda_0)(x_j - x_{m+k}))}{\pi\rho_{sc}(\lambda_0)(x_j - x_{m+k})}\right\}_{j,k=1}^{m}}{\triangle(x_1, \ldots, x_m)\triangle(x_{m+1}, \ldots, x_{2m})}, \tag{2.4}$$

а також $\triangle(y_1, \ldots, y_m)$ *— визначник Вандермонда чисел* $y_1, \ldots, y_m$.

Зауважимо, що $\hat{s}_{2m}(I)$ визначено коректно, тому що різниця рядків j_1 та j_2 у детермінанті у формулі (2.4) має порядок $O(x_{j_1} - x_{j_2})$ при $x_{j_1} \to x_{j_2}$. Те ж саме є вірним і для стовпців.

Для того, щоб сформулювати останній результат цього розділу, ми вводимо ядро Ейрі

$$\mathbb{A}(x,y) = \frac{Ai(x)Ai'(y) - Ai'(x)Ai(y)}{x-y}, \tag{2.5}$$

де $Ai(x)$ — функція Ейрі.

Теорема 2.4. *Нехай ансамбль слабко розріджених випадкових матриць задано формулами* (1.4)–(1.6)*,* $p \to \infty$*, і нехай випадкові величини* $w_{jk}^{(1)}$*,* $w_{jk}^{(2)}$ *мають нормальний розподіл, а числа* λ_j *мають вигляд* (2.2) *при* $\lambda_0 = 2$*. Тоді кореляційна функція двох характеристичних поліномів* (1.2) *при* $m = 1$ *задовольняє асимптотичні співвідношення*

(i) Якщо $\frac{n^{2/3}}{p} \to \infty$*, то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{f}_1(\Lambda)}{\sqrt{\mathsf{f}_1(\lambda_1 I)\mathsf{f}_1(\lambda_2 I)}} = 1;$$

(ii) Якщо $\frac{n^{2/3}}{p} \to c$*, то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{f}_1(\Lambda)}{\sqrt{\mathsf{f}_1(\lambda_1 I)\mathsf{f}_1(\lambda_2 I)}} = \frac{\mathbb{A}(x_1+2c, x_2+2c)}{\sqrt{\mathbb{A}(x_1+2c, x_1+2c)\mathbb{A}(x_2+2c, x_2+2c)}},$$

де $\mathbb{A}$ *визначено в* (2.5)*. Для* $\lambda_0 = -2$ *справджуються аналогічні твердження.*

Зауваження 2.5.

1. Випадок $p \gg n^{2/3}$ відповідає випадку $c = 0$ в (ii).

2. Результати Теореми 2.4 добре узгоджуться з результатами робіт Хорунжего [110, 111] у тому сенсі, що асимптотична поведінка на краю спектра змінюється, коли швидкість росту p стає $n^{2/3}$. Однак, у роботі [111] стверджується, що у випадку $p \ll n^{2/3}$ доречним нормуючим множником у формулі (2.2) є p^{-1} замість $n^{-2/3}$.

2.1 Інтегральне представлення

Для того, щоб сформулювати основне твердження цього підрозділу, введемо наступні позначення. Нехай

- Для довільного набора чисел $\{y_j\}_{j=1}^k$ позначимо за $\triangle(\{y_j\}_{j=1}^k)$ визначник Вандермонда цих чисел. Якщо матриця Y має власні значення $\{y_j\}_{j=1}^k$, то

$$\triangle(Y) = \triangle(\{y_j\}_{j=1}^k). \tag{2.6}$$

Зокрема, для діагональної матриці

$$\triangle(\mathrm{diag}\{y_j\}_{j=1}^k) = \triangle(\{y_j\}_{j=1}^k).$$

- $\mathrm{End}\, V$ — це множина лінійних операторів над лінійним простором V;

- $$\mathscr{I}_{n,k} = \{\alpha \in \mathbb{Z}^k \mid 1 \le \alpha_1 < \ldots < \alpha_k \le n\}. \tag{2.7}$$
  $\mathscr{I}_{n,0}$ покладається рівним $\{\varnothing\}$. Лексикографічний порядок на множині $\mathscr{I}_{n,k}$ позначається через $\prec$;

- $\mathscr{H}_{k,l}$ — це підпростір самоспряжених операторів у $\mathrm{End}\,\Lambda^l\mathbb{C}^k$ (див. визначення $\Lambda^q V$ в [178, Розділ 8.4]), $\mathscr{H}_k := \mathscr{H}_{k,0}$;

- $$dB = dP_l(B) = \prod_{\alpha \in \mathscr{I}_{2m,l}} dB_{\alpha\alpha} \prod_{\alpha \prec \beta} d\Re(B)_{\alpha\beta} d\Im(B)_{\alpha\beta} \tag{2.8}$$
  — це міра на просторі $\mathscr{H}_{2m,l}$. Через $(B)_{\alpha\beta}$ позначається відповідний елемент матриці B у деякому базисі. Легко побачити, що $dP_l(UBU^*) = dP_l(B)$ для будь-якої унітарної матриці U, тому визначення (2.8) корректне.

- $$H_m = \prod_{l=2}^{2m} \mathscr{H}_{2m,l}; \tag{2.9}$$

- Покладемо

$$h_{2m}(G_1, G) = \\ = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+2mk_{2m}=2m \\ k_j \in \mathbb{Z}_+}} (2m)! \prod_{q=1}^{2m} \frac{1}{(q!)^{k_q} k_q!} \bigwedge_{s=1}^{2m} \wedge^{k_s}(b_s G_s - \tilde{b}_s I) \tag{2.10}$$

де $\{b_s\}_{s=1}^\infty$, $\{\tilde{b}_s\}_{s=1}^\infty$ — послідовності деяких чисел, які залежать від n та p, (ці послідовності буде визначено нижче під час доведення Пропозиції 2.6) і

$$G=(G_2,\dots,G_{2m}),\quad G_l\in\operatorname{End}\Lambda^l\mathbb{C}^{2m},\quad l=\overline{1,2m}.$$

Зовнішній добуток $A\wedge B$ операторів визначено в розділі 5. Оскільки $\dim\Lambda^{2m}\mathbb{C}^{2m}=1$, то простір $\operatorname{End}\Lambda^{2m}\mathbb{C}^{2m}$ можна ототожнити з $\mathbb{C}$. Тому в (2.10) під $\bigwedge\limits_{s=1}^{2m}\wedge^{k_s}(b_sG_s-\tilde b_sI)$ розуміється $\Big(\bigwedge\limits_{s=1}^{2m}\wedge^{k_s}(b_sG_s-\tilde b_sI)\Big)_{1\dots n;1\dots n}$.

- $$c_n^{(2m)}(X)=\pi^{m(2m-1)}\left(\tfrac12\right)^{\frac12(2^{2m}-1)}\left(\tfrac{n}{\pi}\right)^{\frac12\left(\binom{4m}{2m}-1\right)}\exp\Big\{\tfrac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2m}x_j^2\Big\}. \tag{2.11}$$

Тепер ми готові сформулювати основне твердження цього розділу — пропозицію про інтегральне представлення для f_m.

Пропозиція 2.6. *Нехай випадкова матриця M_n має вид* (1.4)–(1.6)*, де елементи матриці $w_{jk}^{(1)}$, $w_{jk}^{(2)}$, $j<k$, w_{ll} мають нормальний розподіл. Тоді кореляційна функція* (1.2) *допускає наступне представлення*

$$\mathsf{f}_m(\Lambda)=c_n^{(2m)}(X)\frac{i^{2m^2-m}\exp\Big\{\lambda_0\sum\limits_{j=1}^{2m}x_j\Big\}}{\triangle(X)}\times\int\limits_{H_m}\int\limits_{\mathbb{R}^{2m}}\triangle(T)\exp\Big\{-i\sum_{j=1}^{2m}x_jt_j\Big\}e^{nf_{2m}(T,R)}dT\,dR, \tag{2.12}$$

де $R=(R_2,\dots,R_{2m})$, $R_l\in\mathscr{H}_{2m,l}$, $dR=\prod\limits_{j=2}^{2m}dR_j$, $T=\operatorname{diag}\{t_j\}_{j=1}^{2m}$, $dT=\prod\limits_{j=1}^{2m}dt_j$,

$$f_{2m}(T,R)=\log h_{2m}(T,R)-\frac12\Big(\sum_{j=1}^{2m}(t_j+i\lambda_0)^2+\sum_{l=2}^{2m}\operatorname{tr}R_l^2\Big) \tag{2.13}$$

а всі інші позначення визначено на початку цього підрозділу.

Зауваження 2.7. В окремому важливому випадку $m=1$, представлення (2.12) стає простішим і має вигляд

$$\mathsf{f}_1(\Lambda)=c_n(X)\frac{ie^{\lambda_0(x_1+x_2)}}{x_1-x_2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}(t_1-t_2)\exp\Big\{-i\sum_{j=1}^{2}x_jt_j\Big\}e^{nf(T,s)}dT\,ds, \tag{2.14}$$

де $c_n(X)=c_n^{(2)}(X)$ та

$$f(T,s)=\log(b_2s-t_1t_2)-\frac12\Big(\sum_{j=1}^{2}(t_j+i\lambda_0)^2+s^2\Big). \tag{2.15}$$

У наступному пункті викладено доведення Пропозиції 2.6, що ґрунтується на методі інтегрування за грасмановими змінними. Усі необхідні підготовчі відомості про грасманові змінні містяться в розділі 5.

2.1.1 Доведення Пропозиції 2.6

Спочатку перетворимо $\mathsf{f}_m(\Lambda)$, застосовуючи (5.3)

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_m(\Lambda) &= \mathbf{E}\Big\{\prod_{j=1}^{2m}\det(M-\lambda_j)\Big\}\\ &= \mathbf{E}\Big\{\int\exp\Big\{-\sum_{l=1}^{2m}\Big(\sum_{1\le j,k\le n} d_{jk}w_{jk}\overline{\varphi}_{jl}\varphi_{kl}-\sum_{j=1}^{n}\lambda_l\overline{\varphi}_{jl}\varphi_{jl}\Big)\Big\}\prod_{l=1}^{2m}\prod_{j=1}^{n}d\overline{\varphi}_{jl}d\varphi_{jl}\Big\}.\end{aligned}$$

Тепер усереднимо по $\{w_{jk}\}$. Отримуємо, що

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_m(\Lambda) = \mathbf{E}\Big\{\int\exp\Big\{&\sum_{j<k} d_{jk}^2\chi_{jk}\chi_{kj}\\ &+\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{1}{2}d_{jj}^2\chi_{jj}^2+\sum_{l=1}^{2m}\lambda_l\overline{\varphi}_{jl}\varphi_{jl}\Big)\Big\}\prod_{l=1}^{2m}\prod_{j=1}^{n}d\overline{\varphi}_{jl}d\varphi_{jl}\Big\},\end{aligned}$$

де для того, щоб спростити формули нижче, ми ввели позначення

$$\chi_{jk} = \sum_{l=1}^{2m}\overline{\varphi}_{jl}\varphi_{kl}.$$

З цього визначення відразу випливає, що $\chi_{jk}^{2m+1}=0$, тому

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big\{e^{d_{jk}^2\chi_{jk}\chi_{kj}}\Big\} &= \mathbf{E}\Big\{1+\sum_{l=1}^{2m}\frac{1}{l!}d_{jk}^{2l}(\chi_{jk}\chi_{kj})^l\Big\}\\ &= 1+\sum_{l=1}^{2m}\frac{1}{l!}\cdot\frac{1}{p^{l-1}n}(\chi_{jk}\chi_{kj})^l, \quad j>k,\end{aligned} \tag{2.16}$$

а також

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big\{e^{\frac{1}{2}d_{jj}^2\chi_{jj}^2}\Big\} &= \mathbf{E}\Big\{1+\sum_{l=1}^{2m}\frac{1}{2^l l!}d_{jj}^{2l}\chi_{jj}^{2l}\Big\}\\ &= 1+\sum_{l=1}^{2m}\frac{1}{l!}\cdot\frac{1}{p^{l-1}n}\Big(\frac{\chi_{jj}^2}{2}\Big)^l.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Для подальших переворень дуже зручно подати ліві частини (2.16) та (2.17) у вигляді експонент. Для цього візьмемо послідовність чисел $\{a_l\}_{l=1}^{2m}$, яка визначається тотожністю

$$\exp\left\{\sum_{l=1}^{2m} a_l(\chi_{jk}\chi_{kj})^l\right\} = 1 + \sum_{l=1}^{2m} \frac{1}{l!}\cdot\frac{1}{p^{l-1}n}(\chi_{jk}\chi_{kj})^l.$$

Надалі нам знадобляться точні значення перших двох членів цієї послідовності

$$a_1 = \frac{1}{n}, \quad a_2 = \frac{n-p}{2pn^2},$$

а також той факт, що

$$a_l \sim \frac{C}{p^{l-1}n}, n\to\infty. \tag{2.18}$$

Крім того, зауважимо, що у окремому випадку $p = n$ усі члени послідовності, крім першого, дорівнюють нулю.

Використовуючи щойно введені позначення, можна подати $\mathsf{f}_m(\Lambda)$ у вигляді

$$\mathsf{f}_m(\Lambda) = \int \exp\left\{\sum_{j<k}\sum_{l=1}^{2m} a_l(\chi_{jk}\chi_{kj})^l + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{2^l}a_l\chi_{jj}^{2l} + \sum_{l=1}^{2m}\lambda_l\overline{\varphi}_{jl}\varphi_{jl}\right)\right\} \times \prod_{l=1}^{2m}\prod_{j=1}^{n} d\overline{\varphi}_{jl}d\varphi_{jl}. \tag{2.19}$$

Для того, щоб полегшити сприйняття наступних кроків доведення, ми спочатку розглянемо простіший випадок $m = 1$ і тільки потім загальний випадок.

2.1.1.1 Випадок $m = 1$

Перепишемо вираз в експоненті в (2.19).

$$\chi_{jk}\chi_{kj} = \sum_{\alpha,\beta\in\mathscr{I}_{2,1}} \overline{\varphi}_{j\alpha_1}\varphi_{k\alpha_1}\overline{\varphi}_{k\beta_1}\varphi_{j\beta_1} = -\sum_{\alpha,\beta\in\mathscr{I}_{2,1}} \overline{\varphi}_{j\alpha_1}\varphi_{j\beta_1}\overline{\varphi}_{k\beta_1}\varphi_{k\alpha_1},$$

$$(\chi_{jk}\chi_{kj})^2 = 4\prod_{l=1}^{2}\overline{\varphi}_{jl}\varphi_{kl}\overline{\varphi}_{kl}\varphi_{jl} = 4\prod_{l=1}^{2}\overline{\varphi}_{jl}\varphi_{jl}\overline{\varphi}_{kl}\varphi_{kl} = 4\prod_{l=1}^{2}\overline{\varphi}_{jl}\varphi_{jl}\prod_{q=1}^{2}\overline{\varphi}_{kq}\varphi_{kq},$$

де $\mathscr{I}_{2,1}$ визначено формулою (2.7). Оскільки $\varphi_{jl}^2 = \overline{\varphi}_{jl}^2 = 0$, маємо

$$\sum_{j<k}\chi_{jk}\chi_{kj} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\chi_{jj}^2 = -\sum_{l=1}^{2}\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{\varphi}_{jl}\varphi_{jl}\right)^2 - \left(\sum_{j}\overline{\varphi}_{j1}\varphi_{j2}\right)\left(\sum_{j}\overline{\varphi}_{j2}\varphi_{j1}\right).$$

$$\sum_{j<k}(\chi_{jk}\chi_{kj})^2 = 2\left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{l=1}^{2}\overline{\varphi}_{jl}\varphi_{jl}\right)^2.$$

Тепер, застосовуючи до (2.19) перетворення Хабарда–Стратоновича, тобто формулу (5.1) в зворотньому напрямку, ми отримуємо

$$\exp\left\{a_1\left(\sum_{j<k}\chi_{jk}\chi_{kj}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\chi_{jj}^2\right)\right\}=\frac{n^2}{2\pi^2}\int\limits_{\mathscr{H}_2}\exp\left\{-\frac{n}{2}\left(\sum_{j=1}^{2}t_j^2+2(u^2+v^2)\right)\right\}$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\exp\left\{i\sum_{l=1}^{2}t_l\overline{\varphi}_{jl}\varphi_{jl}+i(u-iv)\overline{\varphi}_{j2}\varphi_{j1}+i(u+iv)\overline{\varphi}_{j1}\varphi_{j2}\right\}dQ;$$

$$\exp\left\{a_2\sum_{j<k}(\chi_{jk}\chi_{kj})^2\right\}=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\left\{-\frac{n}{2}s^2\right\}$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\exp\left\{-s\sqrt{4na_2}\cdot\overline{\varphi}_{j1}\varphi_{j1}\overline{\varphi}_{j2}\varphi_{j2}\right\}ds,$$

де $\mathscr{H}_2$ — простір самоспряжених операторів з $\operatorname{End}\mathbb{C}^2$ та

$$Q=\begin{pmatrix} t_1 & u+iv\\ u-iv & t_2\end{pmatrix};$$

$$dQ=dt_1dt_2dudv.$$

Покладемо $b_2=-\sqrt{4na_2}=-\sqrt{\frac{2(n-p)}{pn}}$. Тепер ми можемо проінтегрувати по грасмановим змінним

$$\mathsf{f}_1(\Lambda)=2\left(\frac{n}{2\pi}\right)^{5/2}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-\frac{n}{2}s^2}\int\limits_{\mathscr{H}_2}(b_2s-\det(Q-i\Lambda))^n e^{-\frac{n}{2}\operatorname{tr}Q^2}dQds.$$

Зробимо заміну змінних $t_j\to t_j+i\lambda_j$. При цьому контур інтегрування зміститься з осі дійсних чисел, але його можна пересунути назад. Дійсно, розглянемо контур у виляді прямокутника з вершинами в точках $(-r,0)$, $(r,0)$, $(r,-i\lambda_j)$ і $(-r,-i\lambda_j)$. Оскільки підінтегральна функція є цілою, то за теоремою Коші інтеграл по цьому контуру дорівнює нулю. Далі, з того, що підінтегральна функція являє собою поліном, помножений на експоненту, випливає, що інтеграл по вертикальним сторонам прямокутника прямує до нуля при $r\to\infty$. Таким чином, приймаючи до уваги, що $\lambda_j=\lambda_0+x_j/n$, ми маємо

$$\mathsf{f}_1(\Lambda)=\frac{c_n(X)}{\pi}\cdot e^{\lambda_0(x_1+x_2)}$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-\frac{n}{2}s^2}\int\limits_{\mathscr{H}_2}(b_2s-\det Q)^n e^{-\frac{n}{2}\operatorname{tr}(Q+i\Lambda_0)^2}\exp\{-i\operatorname{tr}XQ\}dQds,$$

де
$$c_n(X)=n\left(\frac{n}{2\pi}\right)^{3/2}e^{\frac{1}{2n}(x_1^2+x_2^2)}. \qquad (2.20)$$

Зробимо ще одну заміну змінних $Q\to U^*TU$, де U — унітарна матриця, а $T=\mathrm{diag}\{t_1,t_2\}$. Тоді міра dQ змінюється на $\frac{\pi}{2}(t_1-t_2)^2dt_1dt_2$, і отже

$$\mathsf{f}_1(\Lambda)=\frac{1}{2}c_n(X)e^{\lambda_0(x_1+x_2)}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-\frac{n}{2}s^2}\int(t_1-t_2)^2(b_2s-t_1t_2)^n$$
$$\exp\Big\{-\frac{n}{2}\sum_{j=1}^{2}(t_j+i\lambda_0)^2\Big\}\int\limits_{U(2)}e^{-i\,\mathrm{tr}\,(XU^*TU)}d\mu(U)dTds,$$

де $U(2)$ — група унітарних матриць розміром 2×2, $d\mu(U)$ — нормована міра Хаара ($\mu(U(2))=1$), dT визначено у формулюванні Пропозиції 2.6. Залишається взяти інтеграл по унітарній групі, користуючись відомою формулою Харіш-Чандра/Іциксона–Зубера.

Пропозиція 2.8 (Формула Харіш-Чандра/Іциксона–Зубера)**.** *Нехай A і B — нормальні матриці розміром $d\times d$ з попарно різними власними значеннями $\{a_j\}_{j=1}^d$ та $\{b_j\}_{j=1}^d$ відповідно. Тоді*

$$\int\limits_{U(d)}\exp\{z\,\mathrm{tr}AU^*BU\}d\mu(U)=\left(\prod_{j=1}^{d-1}j!\right)\frac{\det\{\exp(za_jb_k)\}_{j,k=1}^d}{z^{(d^2-d)/2}\triangle(A)\triangle(B)},$$

де z — деяка константа. Більше того, якщо матриця B є діагональною, то для будь-якої симетричної області Ω в $\mathbb{R}^d$ та будь-якої симетричної функції $f(B)$ від змінних $\{b_j\}_{j=1}^d$

$$\int\limits_{U(d)}\int\limits_{\Omega}\exp\{z\,\mathrm{tr}AU^*BU\}\triangle^2(B)f(B)d\mu(U)dB$$
$$=\left(\prod_{j=1}^{d}j!\right)\frac{z^{-(d^2-d)/2}}{\triangle(A)}\int\limits_{\Omega}\exp\Big\{z\sum_{j=1}^{d}a_jb_j\Big\}\triangle(B)f(B)dB, \qquad (2.21)$$

де $dB=\prod\limits_{j=1}^{d}db_j$.

Доведення Пропозиції 2.8 див., наприклад, у [125, Appendix 5].

У нашому випадку ми застосовуємо (2.21) і безпосередньо отримуємо твердження Зауваження 2.7.

2.1.1.2 Загальний випадок $m > 1$

Перепишемо вираз в експоненті в (2.19).

$$(\chi_{jk}\chi_{kj})^l = (l!)^2 \sum_{\alpha,\beta\in\mathscr{I}_{2m,l}} \prod_{q=1}^{l} \overline{\varphi}_{j\alpha_q}\varphi_{k\alpha_q}\overline{\varphi}_{k\beta_q}\varphi_{j\beta_q}$$
$$= (-1)^l(l!)^2 \sum_{\alpha,\beta\in\mathscr{I}_{2m,l}} \prod_{q=1}^{l} \overline{\varphi}_{j\alpha_q}\varphi_{j\beta_q} \prod_{q=1}^{l} \overline{\varphi}_{k\beta_q}\varphi_{k\alpha_q}.$$

Оскільки $\varphi_{jl}^2 = \overline{\varphi}_{jl}^2 = 0$, маємо

$$\sum_{j<k}(\chi_{jk}\chi_{kj})^l + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\chi_{jj}^{2l} = (-1)^l(l!)^2\Bigg(\sum_{j<k}\sum_{\alpha,\beta\in\mathscr{I}_{2m,l}}\prod_{q=1}^{l}\overline{\varphi}_{j\alpha_q}\varphi_{j\beta_q}\prod_{q=1}^{l}\overline{\varphi}_{k\beta_q}\varphi_{k\alpha_q}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\prod_{q=1}^{l}\overline{\varphi}_{j\alpha_q}\varphi_{j\beta_q}\prod_{q=1}^{l}\overline{\varphi}_{j\beta_q}\varphi_{j\alpha_q}\Bigg)$$
$$=\frac{1}{2}(-1)^l(l!)^2\sum_{\alpha,\beta\in\mathscr{I}_{2m,l}}\sum_{j,k}\prod_{q=1}^{l}\overline{\varphi}_{j\alpha_q}\varphi_{j\beta_q}\prod_{q=1}^{l}\overline{\varphi}_{k\beta_q}\varphi_{k\alpha_q}$$
$$=\frac{1}{2}(-1)^l(l!)^2\sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_{j}\prod_{q=1}^{l}\overline{\varphi}_{j\alpha_q}\varphi_{j\beta_q}\right)\left(\sum_{k}\prod_{q=1}^{l}\overline{\varphi}_{k\beta_q}\varphi_{k\alpha_q}\right)$$
$$=(-1)^l(l!)^2\Bigg(\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{q=1}^{l}\overline{\varphi}_{j\alpha_q}\varphi_{j\alpha_q}\right)^2$$
$$+\sum_{\alpha\prec\beta}\left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{q=1}^{l}\overline{\varphi}_{j\alpha_q}\varphi_{j\beta_q}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{q=1}^{l}\overline{\varphi}_{j\beta_q}\varphi_{j\alpha_q}\right)\Bigg).$$

Як і в попередньому підпункті, застосуємо перетворення Хабарда–Стратоновича, тобто (5.1) в зворотньому напрямку

$$\exp\left\{(-1)^l(l!)^2\frac{a_l}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{q=1}^{l}\overline{\varphi}_{j\alpha_q}\varphi_{j\alpha_q}\right)^2\right\}$$
$$=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int\exp\left\{b_l(Q_l)_{\alpha\alpha}\left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{q=1}^{l}\overline{\varphi}_{j\alpha_q}\varphi_{j\alpha_q}\right)-\frac{n}{2}(Q_l)_{\alpha\alpha}^2\right\}d(Q_l)_{\alpha\alpha},$$

а також

$$\exp\left\{(-1)^l(l!)^2a_l\left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{q=1}^{l}\overline{\varphi}_{j\alpha_q}\varphi_{j\beta_q}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{q=1}^{l}\overline{\varphi}_{j\beta_q}\varphi_{j\alpha_q}\right)\right\}$$

$$= \frac{n}{\pi} \int \exp\{-n|(Q_l)_{\alpha\beta}|^2\} \exp\left\{ b_l \left(\sum_{j=1}^{n} \prod_{q=1}^{l} \overline{\varphi}_{j\alpha_q} \varphi_{j\beta_q} \right) (Q_l)_{\alpha\beta} \right.$$
$$\left. + b_l \left(\sum_{j=1}^{n} \prod_{q=1}^{l} \overline{\varphi}_{j\beta_q} \varphi_{j\alpha_q} \right) \overline{(Q_l)_{\alpha\beta}} \right\} d\Re(Q_l)_{\alpha\beta} d\Im(Q_l)_{\alpha\beta},$$

де

$$b_l = i^l l! \sqrt{n a_l}. \tag{2.22}$$

Після всіх цих перетворень експонента з формули (2.19) набуде вигляду

$$\exp\left\{ a_l \left(\sum_{j<k} (\chi_{jk}\chi_{kj})^l + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \chi_{jj}^{2l} \right) \right\} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}\binom{2m}{l}} \left(\frac{n}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}\binom{2m}{l}^2}$$
$$\times \int\limits_{\mathscr{H}_{2m,l}} \exp\left\{ -\frac{n}{2} \operatorname{tr} Q_l^2 \right\} \prod_{j=1}^{n} \exp\left\{ b_l \sum_{\alpha,\beta} (Q_l)_{\alpha\beta} \prod_{q=1}^{l} \overline{\varphi}_{j\alpha_q} \varphi_{j\beta_q} \right\} dQ_l, \tag{2.23}$$

де $\mathscr{H}_{2m,l}$ — підпростір самоспряжених лінійних операторів в $\operatorname{End} \Lambda^l \mathbb{C}^{2m}$, а dQ_l визначено в (2.8). Підставимо (2.23) у (2.19). Маємо

$$\mathsf{f}_m(\Lambda) = z_n^{(2m)} \int\limits_{\mathscr{H}_{2m,1} \times H_m} \prod_{l=1}^{2m} \prod_{j=1}^{n} \exp\left\{ b_l \sum_{\alpha,\beta} (Q_l)_{\alpha\beta} \prod_{q=1}^{l} \overline{\varphi}_{j\alpha_q} \varphi_{j\beta_q} \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^l} \right) a_l \chi_{jj}^{2l} + \lambda_l \overline{\varphi}_{jl} \varphi_{jl} \right\} \exp\left\{ -\frac{n}{2} \operatorname{tr} Q_l^2 \right\} d\overline{\varphi}_{jl} d\varphi_{jl} dQ_l, \tag{2.24}$$

де H_m визначено в (2.9) та

$$z_n^{(2m)} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}(2^{2m}-1)} \left(\frac{n}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}\left(\binom{4m}{2m}-1\right)}.$$

Тепер, для того щоб проінтегрувати по грасмановим змінним, розкладемо експоненту з (2.24) у ряд

$$\exp\left\{ \sum_{l=1}^{2m} \left(b_l \sum_{\alpha,\beta} (Q_l)_{\alpha\beta} \prod_{q=1}^{l} \overline{\varphi}_{j\alpha_q} \varphi_{j\beta_q} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^l} \right) a_l \chi_{jj}^{2l} + \lambda_l \overline{\varphi}_{jl} \varphi_{jl} \right) \right\}$$
$$= \exp\left\{ \sum_{l=1}^{2m} \sum_{\alpha,\beta} (\widetilde{Q}_l)_{\alpha\beta} \prod_{q=1}^{l} \overline{\varphi}_{j\alpha_q} \varphi_{j\beta_q} \right\} \tag{2.25}$$
$$= \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k!} \left(\sum_{l=1}^{2m} \sum_{\alpha,\beta} (\widetilde{Q}_l)_{\alpha\beta} \prod_{q=1}^{l} \overline{\varphi}_{j\alpha_q} \varphi_{j\beta_q} \right)^k,$$

де
$$\widetilde{Q}_1 = b_1 Q_1 + \Lambda, \qquad \widetilde{Q}_l = b_l Q_l - \tilde{b}_l I,$$
$$\tilde{b}_{2l} = (2^{-1} - 2^{-l}) a_l, \qquad \tilde{b}_{2l-1} = 0. \tag{2.26}$$
Має сенс слідкувати лише за тими членами, які містять усі $4m$ грасманові змінні $\{\varphi_{js}, \overline{\varphi}_{js}\}_{s=1}^{2m}$, тому що інші члени після інтегрування по грасмановим змінним переворюються на нулі. Отже, застосовуючи Лемму 5.5 до розкладу (2.25) та залишаючи лише члени найвищого степеня (по грасмановим змінним), маємо

$$\int \exp\Big\{ \sum_{l=1}^{2m} \sum_{\alpha,\beta} (\widetilde{Q}_l)_{\alpha\beta} \prod_{q=1}^{l} \overline{\varphi}_{j\alpha_q} \varphi_{j\beta_q} \Big\} \prod_{l=1}^{2m} d\overline{\varphi}_{jl} d\varphi_{jl}$$
$$= \int \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+2mk_{2m}=2m \\ k_j \in \mathbb{Z}_+}} \frac{1}{(k_1+\ldots+k_{2m})!} \cdot \frac{(k_1+\ldots+k_{2m})!}{k_1! \ldots k_{2m}!} \cdot \frac{(2m)!}{(1!)^{k_1} \ldots ((2m)!)^{k_{2m}}}$$
$$\times \sum_{\alpha,\beta \in \mathscr{I}_{2m,2m}} \Big(\bigwedge_{s=1}^{2m} \wedge^{k_s} \widetilde{Q}_s \Big)_{\alpha\beta} \prod_{q=1}^{2m} \overline{\varphi}_{j\alpha_q} \varphi_{j\beta_q} \prod_{l=1}^{2m} d\overline{\varphi}_{jl} d\varphi_{jl}.$$

Тут уже можна проінтегрувати по грасмановим змінним та підставити результат до (2.24), отримуючи

$$\mathsf{f}_m(\Lambda) = z_n^{(2m)} \int\limits_{H_m} \int\limits_{\mathscr{H}_{2m,1}} \big(h_{2m}(\hat{Q}_1, Q) \big)^n \exp\Big\{ -\frac{n}{2} \sum_{l=1}^{2m} \operatorname{tr} Q_l^2 \Big\} dQ_1 dQ,$$

де $\hat{Q}_1 = Q_1 + \frac{1}{b_1}\Lambda = Q_1 - i\Lambda$, $Q = (Q_2, \ldots, Q_{2m})$, $dQ = \prod\limits_{l=2}^{2m} dQ_l$ та h_{2m} визначено у формулі (2.10).

Зробимо заміну змінних $(Q_1)_{jj} \to (Q_1)_{jj} + i\lambda_j$. Користуючись теоремою Коші аналогічно до випадку $m = 1$, можна повернути інтегрування з контуру $\Im(Q_1)_{jj} = -\lambda_j$ назад до осі дійсних чисел. Отже,

$$\mathsf{f}_m(\Lambda) = \frac{c_n^{(2m)}(X)}{\pi^{m(2m-1)}} \cdot \exp\Big\{ \lambda_0 \sum_{j=1}^{2m} x_j \Big\} \int\limits_{H_m} \int\limits_{\mathscr{H}_{2m,1}} \big(h_{2m}(Q_1, Q) \big)^n$$
$$\times \exp\Big\{ -\frac{n}{2} \Big(\operatorname{tr}(Q_1 + i\Lambda_0)^2 + \sum_{l=2}^{2m} \operatorname{tr} Q_l^2 \Big) \Big\} e^{-i \operatorname{tr} X Q_1} dQ_1 dQ,$$

де $c_n^{(2m)}(X)$ визначено в (2.11). Знову зробимо заміну змінних $Q_1 = U^* T U$, де U — унітарний оператор, а $T = \operatorname{diag}\{t_j\}_{j=1}^{2m}$. Якобіан цієї заміни обчислено в монографії [97]. У нашому випадку маємо, що $dQ = \frac{\pi^{m(2m-1)}}{\prod_{j=1}^{2m} j!} \triangle(T)^2 dT$, тому

$$\mathsf{f}_m(\Lambda) = \frac{c_n^{(2m)}(X)}{\prod_{j=1}^{2m} j!} \cdot \exp\left\{\lambda_0 \sum_{j=1}^{2m} x_j\right\} \int\limits_{H_m} \int\limits_{\mathbb{R}^{2m}} \triangle(T)^2 \left(h_{2m}(Q_1, Q)\right)^n$$
$$\times \exp\left\{ -\frac{n}{2}\left(\sum_{j=1}^{2m} (t_j + i\lambda_0)^2 + \sum_{l=2}^{2m} \operatorname{tr} Q_l^2\right)\right\} \int\limits_{U_{2m}} e^{-i \operatorname{tr} XU^*TU} d\mu(U) dT dQ. \quad (2.27)$$

Тепер переворимо доданки, що входять у $h_{2m}(Q_1, Q)$. Маємо

$$\wedge^{k_1}(b_1 Q_1) \wedge \bigwedge_{s=2}^{2m} \wedge^{k_s}(b_s Q_s - \tilde{b}_s I)$$
$$= \wedge^{k_1}(U^* b_1 T U) \wedge \bigwedge_{s=2}^{2m} \wedge^{k_s}\{[\wedge^s(U^*U)]\,(b_s Q_s - \tilde{b}_s I)\,[\wedge^s(U^*U)]\}.$$

З властивості (iv) зовнішнього добутку операторів (див. Пропозицію 5.6) випливає, що

$$\wedge^{k_1}(U^* b_1 T U) \wedge \bigwedge_{s=2}^{2m} \wedge^{k_s}\{[\wedge^s(U^*U)]\,(b_s Q_s - \tilde{b}_s I)\,[\wedge^s(U^*U)]\}$$
$$= \wedge^{2m} U^* \left(\wedge^{k_1}(b_1 T) \wedge \bigwedge_{s=2}^{2m} \wedge^{k_s}\left\{ b_s(\wedge^s U) Q_s (\wedge^s U^*) - \tilde{b}_s I \right\} \right) \wedge^{2m} U$$
$$= \wedge^{k_1}(b_1 T) \wedge \bigwedge_{s=2}^{2m} \wedge^{k_s}\{ b_s(\wedge^s U) Q_s (\wedge^s U^*) - \tilde{b}_s I \}.$$

Зробимо ще одну заміну змінних $Q_l = (U^*)^{\wedge l} R_l U^{\wedge l}$, $l = \overline{2, 2m}$. Оскільки $U^{\wedge l}$ є унітарним оператором, то dQ змінюється на $dR = \prod_{l=2}^{2m} dR_l$. Тоді (2.27) тягне за собою, що

$$\mathsf{f}_m(\Lambda) = \frac{c_n^{(2m)}(X)}{\prod_{j=1}^{2m} j!} \cdot \exp\left\{\lambda_0 \sum_{j=1}^{2m} x_j\right\} \int\limits_{H_m} \int\limits_{\mathbb{R}^{2m}} \triangle(T)^2 \left(h_{2m}(T, R)\right)^n$$
$$\times \exp\left\{ -\frac{n}{2}\left(\sum_{j=1}^{2m} (t_j + i\lambda_0)^2 + \sum_{l=2}^{2m} \operatorname{tr} R_l^2\right)\right\} \int\limits_{U_{2m}} e^{-i \operatorname{tr} XU^*TU} d\mu(U) dT dR,$$

де $R = (R_2, \ldots, R_{2m})$. Зауважимо, що

$$\int\limits_{H_m} \left(h_{2m}(T, R)\right)^n \exp\left\{ -\frac{n}{2}\left(\sum_{j=1}^{2m} (t_j + i\lambda_0)^2 + \sum_{l=2}^{2m} \operatorname{tr} R_l^2\right)\right\} dR \quad (2.28)$$

є симетричною функцією від $\{t_j\}_{j=1}^{2m}$. Дійсно, якщо поміняти місцями t_{j_1} і t_{j_2} та зробити заміну змінних $R_l \to (\mathsf{M}^*_{j_1 j_2})^{\wedge l} R_l \mathsf{M}^{\wedge l}_{j_1 j_2}$, де $\mathsf{M}_{j_1 j_2}$ — це одинична матриця, в якій переставлено рядки j_1 та j_2, то підінтегральний вираз у (2.28) залишиться незмінним. Отже, умови Пропозиції 2.8 виконано, і ми можемо проінтегрувати по унітарній групі, користуючись формулою Харіш-Чандра/Іциксона–Зубера (2.21). Застосування цієї формули відразу дає нам (2.12), тобто Пропозицію 2.6 доведено.

2.2 Доведення Теореми 2.1

Для того, щоб обчислити асимптотичну поведінку кореляційної функції $\mathsf{f}_1(\Lambda)$, ми застосуємо метод перевала для інтегрального представлення (2.14). Як зазвичай, ключова технічна складність методу перевала полягає в тому, щоб правильно вибрати «гарний» контур інтегрування (У нашому випадку «контур» — це тривимірний многовид з координатами (t_1, t_2, s)), якому належить стаціонарна точка (t_1^*, t_2^*, s^*) функції f, і довести, що для будь-якої точки (t_1, t_2, s) обраного «контура»

$$\Re f(t_1, t_2, s) \leq \Re f(t_1^*, t_2^*, s^*). \tag{2.29}$$

Розглянемо функцію $\omega_\alpha \colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, яку визначено наступним чином

$$\omega_\alpha(t_1, t_2, s, b_2, \lambda_0) = \frac{1}{2}\left(\log \tilde{h} - \sum_{j=1}^{2} t_j^2 - s^2 - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 b_2^2 - 2\alpha(1-\alpha)\lambda_0^2\right), \tag{2.30}$$

де

$$\tilde{h} = \left(b_2 s - t_1 t_2 + \alpha^2 \lambda_0^2\right)^2 + \alpha^2 \lambda_0^2 (t_1 + t_2)^2. \tag{2.31}$$

Тоді дійсна частина функції f на нашому «контурі» (ми опишемо обраний «контур» пізніше) має вигляд

$$\Re f(T, s) = \omega_\alpha(\Re t_1, \Re t_2, s, b_2, \lambda_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 b_2^2 + (1-\alpha)\lambda_0^2$$

для деякого α. Для того, щоб довести (2.29), нам знадобиться наступна лема.

Лема 2.9. *Нехай ω_α визначено у формулах* (2.30) *та* (2.31). *Тоді для будь-якого $\alpha \in [1/2, 1)$ і для будь-яких дійсних t_1, t_2, s, b_2 та λ_0 виконується нерівність*

$$\omega_\alpha(t_1, t_2, s, b_2, \lambda_0) \leq \frac{1}{2}\log\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2 - 1. \tag{2.32}$$

Більше того, рівність досягається тоді й тільки тоді, коли виконується хоча б одна з наступних умов

(a) $\alpha = 1/2,\ t_1 = -t_2 = \pm\sqrt{4-4b_2^2-\lambda_0^2}/2,\ s = b_2$;

(b) $\alpha = 1/2,\ t_1 = t_2 = \pm\sqrt{4-4b_2^2-\lambda_0^2}/2,\ s = -b_2,\ b_2\lambda_0 = 0$;

(c) $t_1 = t_2 = 0,\ s = b_2\frac{1-\alpha}{\alpha},\ \alpha(1-\alpha)\lambda_0^2 + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 b_2^2 = 1$;

(d) $t_1 = t_2 = 0,\ s = -b_2\frac{1-\alpha}{\alpha},\ b_2 = \pm\frac{\alpha}{1-\alpha},\ \lambda_0 = 0.$

Доведення. Перепишемо нерівність (2.32) у вигляді

$$\log\frac{1-\alpha}{\alpha}\tilde{h}^{1/2} + 1 \le \frac{1}{2}\left(t_1^2 + t_2^2 + s^2 + d^2 + 2\alpha(1-\alpha)\lambda_0^2\right),$$

де $d = \frac{1-\alpha}{\alpha}b_2$. З опуклості логарифма випливає, що

$$\log\frac{1-\alpha}{\alpha}\tilde{h}^{1/2} \le \frac{1-\alpha}{\alpha}\tilde{h}^{1/2} - 1. \tag{2.33}$$

Тому достатньо довести, що

$$\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2\tilde{h} \le \frac{1}{4}\left(t_1^2 + t_2^2 + s^2 + d^2 + 2\alpha(1-\alpha)\lambda_0^2\right)^2. \tag{2.34}$$

З визначення $\tilde{h}$ (див. (2.31)) маємо

$$\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2\tilde{h} = s^2d^2 + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 t_1^2t_2^2 + \alpha^2(1-\alpha)^2\lambda_0^4$$
$$- 2\frac{1-\alpha}{\alpha}sdt_1t_2 + 2\alpha(1-\alpha)\lambda_0^2 sd + (1-\alpha)^2\lambda_0^2(t_1^2+t_2^2). \tag{2.35}$$

Підстановка (2.35) в (2.34) дає

$$\begin{aligned} s^2d^2 + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 t_1^2t_2^2 - 2\frac{1-\alpha}{\alpha}sdt_1t_2 + 2\alpha(1-\alpha)\lambda_0^2 sd \\ + (1-\alpha)^2\lambda_0^2(t_1^2+t_2^2) \le \frac{1}{4}(t_1^2+t_2^2)^2 + \frac{1}{4}(s^2+d^2)^2 \\ + \frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)(s^2+d^2) + \alpha(1-\alpha)\lambda_0^2(t_1^2+t_2^2) + \alpha(1-\alpha)\lambda_0^2(s^2+d^2). \end{aligned}$$

Остання нерівність є сумою наступних очевидних нерівностей, які виконуються при $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$,

$$(1-\alpha)^2\lambda_0^2(t_1^2+t_2^2) \le \alpha(1-\alpha)\lambda_0^2(t_1^2+t_2^2), \tag{2.36}$$

$$s^2d^2 \le \frac{1}{4}(s^2+d^2)^2, \tag{2.37}$$

$$\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 t_1^2t_2^2 \le t_1^2t_2^2 \le \frac{1}{4}(t_1^2+t_2^2)^2, \tag{2.38}$$

$$-2\frac{1-\alpha}{\alpha}sdt_1t_2 \le 2|sdt_1t_2| \le \frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)(s^2+d^2), \tag{2.39}$$

$$2\alpha(1-\alpha)\lambda_0^2 sd \le \alpha(1-\alpha)\lambda_0^2(s^2+d^2). \tag{2.40}$$

Отже, нерівність (2.32) доведено. Залишається встановити умови, за яких у нерівності (2.32) досягається рівність. Вона досягається тоді й тільки тоді, коли досягаються рівності в нерівностях (2.33), (2.36)–(2.40). Позначимо за (n') рівність, що є відповідною до нерівності (n). Тоді

$$(2.33') \Leftrightarrow \tilde{h}^{1/2} = \frac{\alpha}{1-\alpha}, \tag{2.41}$$

$$(2.37') \Leftrightarrow s^2 = d^2,$$

$$(2.38') \Rightarrow t_1^2 = t_2^2.$$

Усюди нижче до кінця доведення леми ми припускаємо, що $s^2 = d^2$ та $t_1^2 = t_2^2$. Тоді

$$(2.36') \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 1/2; \\ \lambda_0 t_1 = 0; \end{array}\right.$$

$$(2.38') \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 1/2; \\ t_1 = 0; \end{array}\right.$$

$$(2.39') \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha = 1/2; \\ sdt_1t_2 \le 0; \end{cases} \\ t_1 s = 0; \end{array}\right.$$

$$(2.40') \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} sd \ge 0; \\ \lambda_0 = 0. \end{array}\right.$$

Розглянемо декілька випадків

1. $t_1 = 0$.

   1.1. $\lambda_0 = 0$. Тоді з (2.41) випливає, що $(b_2 s)^2 = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2$. Приймаючи до уваги, що $s^2 = d^2$, ми отримуємо, що $b_2 = \pm\frac{\alpha}{1-\alpha}$. Отже, у цьому випадку виконано умову (d).

1.2. $sd \geq 0$. У цьому випадку (2.41) еквівалентно $\alpha^2\lambda_0^2 + \frac{1-\alpha}{\alpha}b_2^2 = \frac{\alpha}{1-\alpha}$, тобто виконується умова (c).

2. $t_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha = 1/2$.

2.1. $s = 0$. Тоді (2.41) приймає вигляд $\lambda_0^2/4 + t_1^2 = 1$, що, в свою чергу, тягне за собою умову (b).

2.2. $s \neq 0 \Rightarrow dst_1t_2 < 0$.

2.2.1. $sd > 0$. У цьому випадку з (2.41) випливає $\lambda_0^2/4 + b_2^2 + t_1^2 = 1$. Легко бачити, що виконується умова (a).

2.2.2. $sd < 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$. Тоді (2.41) перетворюється на $b_2^2 + t_1^2 = 1$. У цьому випадку виконано умову (b).

Насамкінець неважко переконатись, що у точках, які задовольняють хоча б одну з умов (a)–(d), значення функції ω_α співпадає з правою частиною нерівності (2.32). $\square$

Тепер ми можемо перейти до доведення Теореми 2.1, яке ми розбили на декілька лем. Розпочнемо з наступної леми

Лема 2.10. *Нехай виконуються всі умови Теореми 2.1, а також нехай λ_0 належить інтервалу $(\lambda_*(p), \lambda_*(p))$. Тоді кореляційна функція $\mathsf{f}_1(\Lambda)$ задовольняє асимптотичне співвідношення*

$$\mathsf{f}_1(\Lambda) = 2n\exp\{n(\lambda_0^2 + b_2^2 - 2)/2 + \lambda_0(x_1 + x_2)/2\} \times \frac{\sin((x_1 - x_2)\sqrt{4 - 4b_2^2 - \lambda_0^2}/2)}{(x_1 - x_2)}(1 + o(1)), \quad (2.42)$$

де b_2 визначено в (2.22).

Доведення. Нехай

$$\begin{aligned} t_\eta^* &= \frac{(-1)^\eta}{2}\sqrt{4 - 4b_2^2 - \lambda_0^2}; \\ T_*^{(\eta\nu)} &= \operatorname{diag}\left\{t_\eta^*, t_\nu^*\right\} - i\Lambda_0/2, \end{aligned} \quad (2.43)$$

де η та ν приймають значення 1 та 2.

Розглянемо контур, що задається умовами $\Im t_1 = \Im t_2 = -\lambda_0/2$, $s \in \mathbb{R}$. На ньому лежать точки $(t_1^* - i\lambda_0/2, t_2^* - i\lambda_0/2, b_2)$ і $(t_2^* - i\lambda_0/2, t_1^* - i\lambda_0/2, b_2)$, що є стаціонарними точками функції f. На контурі можуть лежати інші стаціонарні точки f, але це не впливає на доведення, окрім випадку $\lambda_0 = 0$, в якому ми також враховуємо точки $(t_1^*, t_1^*, -b_2)$ і $(t_2^*, t_2^*, -b_2)$. Спочатку розглянемо випадок $\lambda_0 \neq 0$.

Зробимо заміну змінних $t_\eta \to t_\eta - i\lambda_0/2$ в (2.14) та звузимо область інтегрування до множини

$$B_r = \Big\{ (t_1, t_2, s) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|t_1|, |t_2|, |s|\} \leq r \Big\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mathsf{f}_1(\Lambda) = c_n(X) \frac{ie^{\lambda_0(x_1+x_2)/2}}{(x_1 - x_2)} \int\limits_{B_r} g(T,s) e^{nf\left(T - \frac{i}{2}\Lambda_0, s\right)} dT ds \\ + O(e^{-nr^2/4}),\ n \to \infty, \end{aligned} \tag{2.44}$$

де f позначає функцію, яку визначено в (2.15) та

$$g(T,s) = (t_1 - t_2) \exp\Big\{ -i \sum_{\eta=1}^{2} x_\eta t_\eta \Big\}.$$

Незважаючи на те, що функція g в дійсності не залежить від s, ми використовуємо запис $g(T,s)$ для того, щоб градієнт g був тривимірним. Це потрібно для більш зручного запису формул нижче.

Тепер обчислимо похідні функції f в обраних стаціонарних точках. Неважко побачити, що для $\eta \neq \nu$ ми маємо

$$f''(T_*^{(\eta\nu)}, b_2) = -\begin{pmatrix} (t_\nu^* - i\lambda_0/2)^2 + 1 & b_2^2 & -b_2(t_\nu^* - i\lambda_0/2) \\ b_2^2 & (t_\eta^* - i\lambda_0/2)^2 + 1 & -b_2(t_\eta^* - i\lambda_0/2) \\ -b_2(t_\nu^* - i\lambda_0/2) & -b_2(t_\eta^* - i\lambda_0/2) & b_2^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\det f''(T_*^{(\eta\nu)}, b_2) = -(4 - 4b_2^2 - \lambda_0^2) < -(\lambda_*(p)^2 - \lambda_0^2);$$

$$\Re f''(T_*^{(\eta\nu)}, b_2) = -\begin{pmatrix} (t_\nu^*)^2 - \lambda_0^2/4 + 1 & b_2^2 & -b_2 t_\nu^* \\ b_2^2 & (t_\eta^*)^2 - \lambda_0^2/4 + 1 & -b_2 t_\eta^* \\ -b_2 t_\nu^* & -b_2 t_\eta^* & b_2^2 + 1 \end{pmatrix};$$

$$\det \Re f''(T_*^{(\eta\nu)}, b_2) = -\left(1 - \lambda_0^2/4\right)(4 - 4b_2^2 - \lambda_0^2) < -(\lambda_*(p)^2 - \lambda_0^2)^2/4,$$

де $T_*^{(\eta\nu)}$ визначено в (2.43). Крім того, нам знадобиться значення функції f у стаціонарних точках

$$f(T_*^{(\eta\nu)}, b_2) = \frac{1}{2}b_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_0^2 - 1.$$

Зауважимо, що

$$\Re f\left(T - \frac{i}{2}\Lambda_0, s\right) = \omega_{1/2}(t_1, t_2, s, b_2, \lambda_0) + \frac{1}{2}b_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_0^2,$$

де ω_α визначено в (2.30). Згідно Леми 2.9, $\Re f\left(T - \frac{i}{2}\Lambda_0, s\right)$, як функція дійсних змінних t_1, t_2, s, досягає свого максимального значення в точках $(T_*^{(\eta\nu)}, b_2)$. Звідси маємо, що матриця $\Re f''(T_*^{(\eta\nu)}, b_2)$ недодатно-означена. Більше того, оскільки $\det \Re f''(T_*^{(\eta\nu)}, b_2) < 0$, то матриця $\Re f''(T_*^{(\eta\nu)}, b_2)$ є від'ємно-означеною.

Нехай $V_n^{(\eta\nu)}$ — це $n^{-1/2}\log n$-окіл точки $(T_*^{(\eta\nu)}, b_2)$, а V_n усюди до кінця розділу нехай позначає об'єднання таких околів усіх стаціонарних точок, що є наразі під розглядом, допоки не сказано інакше. Тоді для $(T, s) \notin V_n$ та достатньо великих n ми маємо, що

$$\begin{aligned}
&\Re f(T_*^{(\eta\nu)}, b_2) - \Re f\left(T - \frac{i}{2}\Lambda_0, s\right) \\
&\qquad \geq \min_{\eta\neq\nu} \min_{\left(T - \frac{i}{2}\Lambda_0, s\right) \in \partial V_n^{(\eta\nu)}} \left\{\Re f(T_*^{(\eta\nu)}, b_2) - \Re f\left(T - \frac{i}{2}\Lambda_0, s\right)\right\} \geq C\frac{\log^2 n}{n}.
\end{aligned}$$

Отже, можна звузити область інтегрування до V_n.

Покладемо $q = (t_1, t_2, s)$, та $q^* = (t_\eta^*, t_\nu^*, b_2)$. Тоді, розкладаючи f та g за формулою Тейлора й роблячи заміну змінних $q \to n^{-1/2}q + q^*$, ми отримуємо

$$\begin{aligned}
\mathsf{f}_1(\Lambda) &= n^{-3/2}c_n(X) \cdot \frac{i\exp\{n(\lambda_0^2 + b_2^2 - 2)/2 + \lambda_0(x_1 + x_2)/2\}}{(x_1 - x_2)} \\
&\quad \times \left(\sum_{\eta\neq\nu} \int\limits_{[-\log n, \log n]^3} g(\Re T_*^{(\eta\nu)}, b_2) \exp\left\{\frac{1}{2}qf''(T_*^{(\eta\nu)}, b_2)q^T\right\} dq + o(1)\right).
\end{aligned}$$

Остання формула є вірною, тому що $g(\Re T_*^{(\eta\nu)}, b_2) \neq 0$. Візьмемо інтеграл, користуючись формулою Гауса. Тоді

$$\begin{aligned}
\mathsf{f}_1(\Lambda) &= \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{3/2} c_n(X) \cdot \frac{i\exp\{n(\lambda_0^2 + b_2^2 - 2)/2 + \lambda_0(x_1 + x_2)/2\}}{(x_1 - x_2)} \\
&\quad \times \left(\sum_{\eta\neq\nu} g(\Re T_*^{(\eta\nu)}, b_2) \det{}^{-1/2}\{-f''(T_*^{(\eta\nu)}, b_2)\} + o(1)\right). \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

Оскільки

$$g(\Re T_*^{(\eta\nu)}, b_2) = 2t_\eta^* e^{-it_\eta^*(x_1-x_2)}, \quad \eta \neq \nu,$$

та c_n має вигляд (2.20), то (2.45) тягне (2.42).

У випадку, якщо $\lambda_0 = 0$, доведення майже ідентичне. Повторюючи вищенаведені кроки, ми отримаємо формулу, аналогічну до (2.45). Єдина відмінність полягає в тому, що в сумі буде на два доданки більше, тобто доданків стільки ж, скільки й стаціонарних точок. Оскільки функція g перетворюється на нуль при $t_1 = t_2$, ми маємо в точності (2.45), і тому асимптотичне співвідношення (2.42) теж справджується. □

Відмітимо, що твердження (i) теореми випливає безпосередньо з Леми 2.10.

Лема 2.11. *Нехай виконуються всі умови Теореми 2.1, а також* $\lambda_0^2 > 4 - 4b_2^2 + \varepsilon$ *для деякого* $\varepsilon > 0$. *Тоді* $\mathsf{f}_1(\Lambda)$ *має наступну асимптотичну поведінку*

(i) при $\lambda_0 \neq 0$

$$\mathsf{f}_1(\Lambda) = \frac{\alpha^2 \exp\{n\hat{f}_* + (1-\alpha)\lambda_0(x_1+x_2)\}}{(2\alpha-1)^{3/2}(2-\alpha(1-\alpha)(3-2\alpha)\lambda_0^2)^{1/2}}(1+o(1)), \tag{2.46}$$

де α *та* $\hat{f}_*$ *визначаються співвідношеннями*

$$\alpha \in (1/2, 1), \qquad \alpha(1-\alpha)\lambda_0^2 + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 b_2^2 - 1 = 0, \tag{2.47}$$

$$\hat{f}_* = f\left(-i\alpha\Lambda_0, \frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\right). \tag{2.48}$$

(ii) при $\lambda_0 = 0$

$$\mathsf{f}_1(\Lambda) = b_2^n e^{-n/2} \frac{b_2^2}{(b_2^2-1)^{3/2}} \left(b_2 + 1 + (-1)^n(b_2-1)\right)(1+o(1)). \tag{2.49}$$

Доведення. Виберемо в якості контура інтегрування той, що задається рівняннями $\Im t_1 = \Im t_2 = -\alpha\lambda_0$, $\Im s = 0$. На цьому контурі вклад у асимптотику при $\lambda_0 \neq 0$ дає лише стаціонарна точка $\left(-i\alpha\lambda_0, -i\alpha\lambda_0, \frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\right)$, де α задовольняє умову (2.47). Існування та єдиність такого α випливає з того, що ліва частина співвідношення (2.47) є функцією від α, вона монотонно спадає та має значення різних знаків у точках $\alpha = 1/2$ і $\alpha = 1$. Усюди до кінця розділу ми позначаємо за α єдиний розв'язок (2.47). Якщо ж $\lambda_0 = 0$, то ми маємо дві стаціонарні точки на контурі — $(0,0,\pm 1)$.

Спочатку розглянемо випадок $\lambda_0 > \varepsilon$. Роблячи заміну змінних $t_j \to t_j - i\alpha\lambda_0$, аналогічно до (2.44) ми отримуємо

$$\mathsf{f}_1(\Lambda) = c_n(X)\frac{ie^{(1-\alpha)\lambda_0(x_1+x_2)}}{(x_1-x_2)}\int\limits_{B_r} g(T,s)e^{nf(T-i\alpha\Lambda_0,s)}dTds + O(e^{-nr^2/4}). \tag{2.50}$$

Тепер обчислимо значення в стаціонарній точці функції f

$$f\left(-i\alpha\Lambda_0, \frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 b_2^2 + (1-\alpha)\lambda_0^2 + \log\frac{\alpha}{1-\alpha} - 1, \tag{2.51}$$

матриці її других похідних

$$f''\left(-i\alpha\Lambda_0, \frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\right) = -\begin{pmatrix} 1-(1-\alpha)^2\lambda_0^2 & \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^3 b_2^2 & ib_2\lambda_0\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \\ \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^3 b_2^2 & 1-(1-\alpha)^2\lambda_0^2 & ib_2\lambda_0\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \\ ib_2\lambda_0\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} & ib_2\lambda_0\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} & 1+b_2^2\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 \end{pmatrix},$$

її гессіана

$$\begin{aligned}\det f''\left(-i\alpha\Lambda_0, \frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\right) = -\frac{2\alpha-1}{\alpha^2}\Bigg(&\alpha(1-\alpha)(2\alpha-1)\lambda_0^2 \\ &+ 2b_2^2\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2\Bigg) < 0;\end{aligned} \tag{2.52}$$

та визначника $\Re f''$

$$\begin{aligned}\det\Re f''\left(-i\alpha\Lambda_0, \frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\right) = -\frac{2\alpha-1}{\alpha^2}&\left(1+b_2^2\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2\right) \\ &\times\left(\alpha(1-\alpha)(2\alpha-1)\lambda_0^2 + b_2^2\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2\right) < 0.\end{aligned}$$

Крім того,

$$\Re f(T - i\alpha\Lambda_0, s) = \omega_\alpha(t_1,t_2,s,b_2,\lambda_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 b_2^2 + (1-\alpha)\lambda_0^2$$

де ω_α має вигляд (2.30). Діючи аналогічно до доведення Леми 2.10, можна показати, що

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_1(\Lambda) = c_n(X)&\frac{ie^{n\hat{f}_*+(1-\alpha)\lambda_0(x_1+x_2)}}{(x_1-x_2)} \\ &\times\left(\int\limits_{V_n} g(T,s)e^{n(f(T-i\alpha\Lambda_0,s)-\hat{f}_*)}dTds + O\left(e^{-C\log^2 n}\right)\right),\end{aligned} \tag{2.53}$$

де V_n — це $n^{-1/2}\log n$-окіл точки $\left(0, \frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\right)$, а $\hat{f}_*$ визначено в (2.48).

Повторюючи ті ж самі міркування та використовуючи ті ж самі позначення, що й при доведенні Леми 2.10, ми отримуємо

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_1(\Lambda) = n^{-3/2}c_n(X)\cdot\frac{i\exp\{n\hat{f}_* + (1-\alpha)\lambda_0(x_1+x_2)\}}{(x_1-x_2)}(1+o(1))\\ \times\int\limits_{[-\log n,\log n]^3}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\left\langle g'\left(0,\frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\right),q\right\rangle + \frac{1}{2\sqrt{n}}qg''\left(0,\frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\right)q^T\right)\\ \times e^{n(f(T-i\alpha\Lambda_0,s)-\hat{f}_*)}dq,\end{aligned}$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначає скалярний добуток у $\mathbb{R}^3$. Розкриємо дужки під інтегралом та проінтегруємо кожний доданок окремо. Переший з двох интегралів дорівнює нулю, бо функція f є симетричною функцією від t_1 та t_2, а також $\frac{\partial g}{\partial t_1}\left(0,\frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\right) = -\frac{\partial g}{\partial t_2}\left(0,\frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\right) = 1$. У другому інтегралі ми розкладемо експоненту в ряд Тейлора. Тоді

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_1(\Lambda) = n^{-5/2}c_n(X)\cdot\frac{i\exp\{n\hat{f}_* + (1-\alpha)\lambda_0(x_1+x_2)\}}{(x_1-x_2)}(1+o(1))\\ \times\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}qg''\left(0,\frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\right)q^T\exp\left\{\frac{1}{2}qf''\left(-i\alpha\Lambda_0,\frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\right)q^T\right\}dq.\end{aligned}\quad(2.54)$$

Зауваживши, що

$$g''\left(0,\frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\right) = \begin{pmatrix}-2ix_1 & i(x_1-x_2) & 0\\ i(x_1-x_2) & 2ix_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

ми обчислюємо гаусів інтеграл у (2.54) та отримуємо (2.46).

Залишається розглянути випадок $\lambda_0 = 0$. Як було згадано вище, в цьому випадку маємо дві стаціонарні точки на контурі, околи яких дають вклад у асимптотику інтеграла (2.50). Вклад від околу точки $(0,0,1)$ вже обчислено, бо якщо $\lambda_0 = 0$, то $\alpha = \frac{b_2}{b_2+1}$ і $\left(-i\alpha\lambda_0, -i\alpha\lambda_0, \frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\right) = (0,0,1)$. Вклад від околу другої точки (тобто $(0,0,-1)$) обчислюється аналогічно, і (2.46) приймає вигляд (2.49). $\square$

Твердження (ii) теореми випливає безпосередньо з (2.46) та (2.49).

Тепер ми покажемо, що випадки (i) та (ii) Теореми 2.1 добре узгоджуються між собою.

Лема 2.12. *Нехай виконуються всі умови Теореми 2.1, а також* $\lambda_0^2 = 4 - 4b_2^2 - \delta_n$, $\delta_n \to 0$. *Тоді* $\mathsf{f}_1(\Lambda)$ *має наступну асимптотичну поведінку*

$$\mathsf{f}_1(\Lambda) = y_n \exp\{n(2-3b_2^2-\delta_n)/2 + \lambda_0(x_1+x_2)/2\}(1+o(1)). \tag{2.55}$$

де

$$y_n = \begin{cases} n\delta_n^{1/2}, & \text{якщо } \delta_n > 0,\ n\delta_n^2 \to \infty; \\ Cn^{3/4}, & \text{якщо } n\delta_n^2 \to const; \\ C(-\delta_n)^{-3/2}, & \text{якщо } \delta_n < 0,\ n\delta_n^2 \to \infty. \end{cases}$$

Доведення. Почнемо з випадку $\delta_n \geq 0$. Виберемо такий самий контур, як і при доведенні Леми 2.10. Стаціонарні точки візьмемо ті ж самі.

Зробимо заміну змінних $\tau = t_1 + t_2$, $\sigma = t_1 - t_2$. Тоді

$$\mathsf{f}_1(\Lambda) = c_n(X)\frac{ie^{\lambda_0(x_1+x_2)}}{2(x_1-x_2)}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \sigma e^{-i((x_1+x_2)\tau+(x_1-x_2)\sigma)/2}e^{n\tilde{f}(\tau,\sigma,s)}d\tau d\sigma ds,$$

де $\tilde{f}(\tau,\sigma,s) = f(T,s)$. Покладемо

$$\begin{aligned} &\tau^* = -i\lambda_0; \\ &\sigma_\eta^* = t_\eta^* - t_{3-\eta}^* = (-1)^\eta\sqrt{4-4b_2^2-\lambda_0^2} = (-1)^\eta\delta_n^{1/2}. \end{aligned}$$

Як і при доведенні попередніх лем, нам потрібні значення функції $\tilde{f}$ та її других похідних у стаціонарних точках

$$\begin{aligned} &\tilde{f}(\tau^*,\sigma_\eta^*,b_2) = 1 - \frac{3}{2}b_2^2 - \frac{1}{2}\delta_n; \\ &\tilde{f}''(\tau^*,\sigma_\eta^*,b_2) = -\begin{pmatrix} b_2^2+\delta_n/4 & (-1)^\eta i\lambda_0\delta_n^{1/2}/4 & ib_2\lambda_0/2 \\ (-1)^\eta i\lambda_0\delta_n^{1/2}/4 & \delta_n/4 & (-1)^\eta b_2\delta_n^{1/2}/2 \\ ib_2\lambda_0/2 & (-1)^\eta b_2\delta_n^{1/2}/2 & b_2^2+1 \end{pmatrix}; \\ &\det\tilde{f}''(\tau^*,\sigma_\eta^*,b_2) = -\delta_n/4. \end{aligned}$$

Окрім цього, знадобляться також третя й четверта частинні похідні функції $\tilde{f}$ по σ

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^3\tilde{f}}{\partial\sigma^3}(\tau^*,\sigma_\eta^*,b_2) = \frac{(-1)^{\eta+1}}{4}\delta_n^{1/2}(\delta_n-3); \\ &\frac{\partial^4\tilde{f}}{\partial\sigma^4}(\tau^*,\sigma_\eta^*,b_2) = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Позначимо за V_n об'єднання прямого добутка околів точок τ^*, σ_1^*, b_2 та прямого добутка околів точок τ^*, σ_2^*, b_2, причому околи, що відповідають змінним τ та s мають радіус $\dfrac{\log n}{\sqrt{n}}$, у той час як окіл, що відповідає змінній σ, має радіус $\dfrac{\log n}{\sqrt{n\delta_n}}$, якщо $n\delta_n^2 \to \infty$, та $\dfrac{\log n}{n^{1/4}}$ в усіх інших випадках. Аналогічно доведенню Леми 2.10 можна показати, що для точок контуру (τ, σ, s) поза множиною V_n і при достатньо великих n справджується нерівність

$$\Re\tilde{f}(\tau^*, \sigma_\eta^*, b_2) - \Re\tilde{f}(\tau, \sigma, s) \geq C\frac{\log^2 n}{n}, \tag{2.56}$$

Нехай $n\delta_n^2 \to \infty$. Далі діємо таким же чином, як і раніше, тільки з однією відмінністю, яка полягає в тому, що для змінної σ ми робимо заміну $\sigma \to (n\delta_n)^{-1/2}\sigma + \sigma_\eta^*$, а не $\sigma \to n^{-1/2}\sigma + \sigma_\eta^*$. Ми отримуємо

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_1(\Lambda) = n^{-3/2}c_n(X) \cdot \frac{i\exp\{n(2-3b_2^2-\delta_n)/2 + \lambda_0(x_1+x_2)/2\}}{2(x_1-x_2)}(1+o(1)) \\ \times \sum_{\eta=1}^{2} \int\limits_{[-\log n, \log n]^3} \left((-1)^\eta + i(x_1-x_2)\delta_n^{1/2}/2 + \frac{\sigma}{\delta_n\sqrt{n}}\right) \\ \times e^{\frac{1}{2}a_{\tilde{f}}^{(\eta)}(\tau,\sigma,s)} d\tau d\sigma ds,\end{aligned} \tag{2.57}$$

де $a_{\tilde{f}}^{(\eta)}$ позначає квадратичну форму, причому її матрицю отримано з матриці $\tilde{f}''(\tau^*, \sigma_\eta^*, b_2)$ шляхом ділення на $\delta_n^{1/2}$ всіх елементів другої строки та другого сповпця, тобто

$$a_{\tilde{f}}^{(\eta)}(\tau, \sigma, s) = (\tau, \delta_n^{-1/2}\sigma, s)\tilde{f}''(\tau^*, \sigma_\eta^*, b_2)(\tau, \delta_n^{-1/2}\sigma, s)^T.$$

Отже, ми маємо (2.55).

Тепер нехай $n\delta_n^2 \to 0$. Тоді, роблячи заміну змінних $\sigma^2 = \tilde{\sigma}$, ми отримуємо

$$\mathsf{f}_1(\Lambda) = c_n(X)\frac{e^{\lambda_0(x_1+x_2)}}{2(x_1-x_2)} \int\limits_0^{+\infty} d\tilde{\sigma} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \sin((x_1-x_2)\sqrt{\tilde{\sigma}}/2)e^{-i(x_1+x_2)\tau/2}e^{n\tilde{f}(\tau,\sqrt{\tilde{\sigma}},s)}d\tau ds.$$

Нехай $\tilde{V}_n$ — це прямий добуток $\dfrac{\log n}{\sqrt{n}}$-околів точок 0 та b_2. Тоді ми можемо зробити заміну змінних $\tau \to \tau - i\lambda_0$ та з огляду на (2.56) звузити область інтегрування до множини $\left[0, \frac{\log^2 n}{\sqrt{n}}\right] \times \tilde{V}_n$

$$\mathsf{f}_1(\Lambda) = c_n(X) \frac{e^{\lambda_0(x_1+x_2)/2}}{2(x_1-x_2)} \int\limits_0^{\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}}} (1+o(1)) d\tilde{\sigma}$$
$$\times \int\limits_{\tilde{V}_n} \sin((x_1-x_2)\sqrt{\tilde{\sigma}}/2) e^{-i(x_1+x_2)\tau/2} e^{n\tilde{f}(\tau - i\lambda_0, \sqrt{\tilde{\sigma}}, s)} d\tau ds.$$

Далі розкладемо $\tilde{f}$ та синус по формулі Тейлора навколо точок $(-i\lambda_0, 0, b_2)$ та 0 відповідно та зробимо заміну змінних $\tau \to n^{-1/2}\tau$, $\tilde{\sigma} \to n^{-1/2}\tilde{\sigma}$, $s \to n^{-1/2}s + b_2$. Тоді

$$\mathsf{f}_1(\Lambda) = n^{-3/2} c_n(X) \frac{\exp\{n(2-3b_2^2-\delta_n)/2 + \lambda_0(x_1+x_2)/2\}}{2(x_1-x_2)}$$
$$\times \int\limits_0^{\log^2 n} (1+o(1)) d\tilde{\sigma} \int\limits_{[-\log n, \log n]^2} (x_1-x_2) \frac{\sqrt{\tilde{\sigma}}}{2\sqrt[4]{n}} e^{\frac{1}{2}\hat{a}_{\tilde{f}}(\tau,\tilde{\sigma},s)} d\tau ds, \quad (2.58)$$

де $\hat{a}_{\tilde{f}}$ — це квадратична форма, що задається матрицею

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \tau^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \tilde{f}}{\partial \tau \partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \tau \partial s} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \tilde{f}}{\partial \tau \partial \sigma^2} & \frac{1}{12}\frac{\partial^4 \tilde{f}}{\partial \sigma^4} & \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \tilde{f}}{\partial \sigma^2 \partial s} \\ \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \tau \partial s} & \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \tilde{f}}{\partial \sigma^2 \partial s} & \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial s^2} \end{pmatrix} (-i\lambda_0, 0, b_2) = -\begin{pmatrix} b_2^2 & i\lambda_0/8 & ib_2\lambda_0/2 \\ i\lambda_0/8 & 1/16 & b_2/4 \\ ib_2\lambda_0/2 & b_2/4 & 1+b_2^2 \end{pmatrix}$$
$$+ o(1)P,$$

де P — матриця, яка складається з одних лише одиниць. Беручи інтеграл за формулою Гауса, ми отримуємо

$$\mathsf{f}_1(\Lambda) = \frac{2\pi}{n^{3/2}} \cdot \frac{c_n(X)}{4\sqrt[4]{n}} \cdot \exp\{n(2-3b_2^2-\delta_n)/2 + \lambda_0(x_1+x_2)/2\}$$
$$\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\tilde{\sigma}} \exp\left\{-\frac{\tilde{\sigma}^2}{32}\right\} d\tilde{\sigma} (1+o(1)),$$

звідки одразу випливає (2.55).

У випадку, якщо $n\delta_n^2 \to \mathrm{const}$, в останній експоненті у формулі (2.58) замість $\hat{a}_{\tilde{f}}$ буде деякий поліном третього степеня. Отже, асимптотична поведінка кореляційної функції $\mathsf{f}_1(\Lambda)$ буде відрізнятися від (2.55) тільки мультиплікативною константою, що не залежить від n. Ця константа ввійде в константу C у визначенні y_n. У випадку від'ємного δ_n, якщо $n\delta_n^2 \to 0$, усі зміни у формулах вище виражаються в додаткових множниках, кожен з яких дорівнює $1+o(1)$. Тому (2.55) не змінюється в цьому випадку. Якщо $n\delta_n^2 \to \infty$, то тоді з поєднання міркувань, що наводились у випадку $\delta_n \geq 0$ та при доведенні Леми 2.11, випливає (2.57) з деякими змінами. Ці зміни впливають лише на y_n, тобто ми маємо, що $y_n = C(-\delta_n)^{-3/2}$ у формулі (2.55) . □

2.3 Доведення Теореми 2.3

Як і у випадку Теореми 2.1, доведення Теореми 2.3 ґрунтується на застосуванні методу перевала до інтегрального представлення кореляційної функції f_m, яке було отримано в підрозділі 2.1. Для цього необхідно вибрати «гарний контур» та стаціонарні точки функції f_{2m}, яка визначена в (2.13). Ми почнемо з вибору стаціонарних точок.

Якщо $p=n$, то $b_l = \tilde{b}_{2k} = 0$ при $l>1$, і правильними стаціонарними точками є

$$t_j = t_j^* = \begin{cases} t^* \\ -\overline{t^*} \end{cases}, \; j=\overline{1,2m}, \quad R_l = 0,$$

де

$$t^* = \frac{1}{2}\left(-i\lambda_0 + \sqrt{4-\lambda_0^2}\right).$$

Покладемо

$$\widetilde{T} = \mathrm{diag}\{t_j^*\}_{j=1}^{2m}, \tag{2.59}$$
$$b = (b_2, b_3, \ldots, b_{2m}, \tilde{b}_4, \tilde{b}_6, \ldots, \tilde{b}_{2m}).$$

Оскільки матриця

$$\left(h_{2m}(T,R)f'_{2m}(T,R)\right)'\Big|_{\substack{T=\widetilde{T}\\R=0\\b=0}}$$
$$= (-1)^{m-1}\mathrm{diag}\{1+\overline{t_1^*}^2, \ldots, 1+\overline{t_{2m}^*}^2, e_1, \ldots, e_{\binom{4m}{2m}-4m^2-1}\}, \quad e_j = 1 \text{ або } 2$$

є невиродженою при $\lambda_0 \in (-2,2)$, то за теоремою про неявну функцію при достатньо малому b існує єдиний розв'язок

$$T = T(b), R = R(b) \tag{2.60}$$

рівняння

$$h_{2m}(T,R)f'_{2m}(T,R)=0 \tag{2.61}$$

такий, що $T(0)=\widetilde{T}$, $R(0)=0$, і цей розв'язок неперервно залежить від b та λ_0. Коли $p\to\infty$, то з (2.18), (2.22) та (2.26) випливає, що $b\to 0$. Тому ми вибираємо точки (2.60) як ті стаціонарні точки, що, скоріше за все, будуть давати вклад у асимптотику інтеграла, і будемо прововодити «гарний контур» через ці точки.

Лема 2.13. *Розв'язок* (2.60) *має наступні властивості*

(1) $(T)_{j_1j_1}(b)=(T)_{j_2j_2}(b)$, $(T)_{k_1k_1}(b)=(T)_{k_2k_2}(b)$ *для всіх* $j_1,j_2\in I_+$, $k_1,k_2\in I_-$, *де* $I_+=\{j,t_j^*=t^*\}$, $I_-=\{j,t_j^*=-\overline{t^*}\}$;

(2) $(R_l)_{\alpha\beta}(b)=0$, $l=\overline{2,2m}$, $\alpha\neq\beta$.

Доведення. Покладемо

$$\pi T=\mathrm{diag}\{t_{\pi(j)}\},\quad \pi R=(\pi R_2,\dots,\pi R_{2m}),\quad \pi\in S_{2m},$$

де S_k — група перестановок довжини k, πR_l — це така матриця, що $(\pi R_l)_{\alpha\beta}=(R_l)_{\alpha_\pi\beta_\pi}$, α_π — елемент $\mathscr{I}_{2m,l}$, компонентами якого є $\alpha_{\pi(1)},\dots,\alpha_{\pi(l)}$ у неспадаючому порядку. Тоді $f_{2m}(\pi T,\pi R)=f_{2m}(T,R)$ для будь-якої перестановки $\pi\in S_{2m}$. Отже, достатньо довести лему тільки для тих стаціонарних точок, для яких $t_1^*=\ldots=t_k^*=-\overline{t_{k+1}^*}=\ldots=-\overline{t_{2m}^*}=t^*$. Для того, щоб це зробити, ми покажемо, що існує розв'язок рівняння (2.61), який задовольняє умови (1) та (2) і для якого $T(0)=\widetilde{T}$, $R(0)=0$. Це твердження еквівалентне існуванню розв'язку системи

$$\begin{cases} h_{2m}(T,R)\frac{\partial}{\partial t_j}f_{2m}(T,R)=0, & j=1,2m;\\ h_{2m}(T,R)\frac{\partial}{\partial (R_l)_{\alpha\alpha}}f_{2m}(T,R)=0, & \alpha\in\mathscr{I}_{2m,l},\, l=\overline{2,2m}, \end{cases} \tag{2.62}$$

де T задовольняє умову (1), тобто

$$T=\mathrm{diag}\{\underbrace{t_1,\dots,t_1}_{k\text{ разів}},\underbrace{t_{2m},\dots,t_{2m}}_{2m-k\text{ разів}}\},$$

а R задовольняє умову (2). Невідомі системи (2.62) — це t_1, t_{2m}, $(R_l)_{\alpha\alpha}$. Оскільки похідна лівої частини системи (2.62) в точці $T=\widetilde{T}$, $R=0$, $b=0$ є невиродженою, то розв'язок цієї системи існує. З огляду на єдиність розв'язку системи (2.61), розв'язок системи (2.62) співпадає з (2.60). □

Наступним кроком треба вибрати «контур». У нашому випадку «контур» — це d_{2m}-вимірний многовид $\hat{M}_{2m}$, де $d_{2m} = \left(\binom{4m}{2m} - 4m^2 - 1 + 2m\right)$. Для кожної змінної ми розглянемо деякий контур, прямий добуток яких і буде тим многовидом $\hat{M}_{2m}$, що ми потребуємо. Візьмемо довільну змінну і впорядкуємо відповідні компоненти стаціонарних точок за зростанням їхніх дійсних частин. Якщо декілька компонент мають однакові дійсні частини, то впорядкуємо їх за зростанням уявних частин. Тоді контуром буде ламана, що сполучає точки в порядку, який описано вище. Нескінченні ланки ламаної паралельні дійсній осі та направлені з першої точки ліворуч, а з останньої точки праворуч.

Застосовуючи теорему Коші до (2.12), маємо

$$\mathsf{f}_m(\Lambda) = c_n^{(2m)}(X) \frac{i^{2m^2-m} \exp\left\{\lambda_0 \sum_{j=1}^{2m} x_j\right\}}{\triangle(X)} \int_{\hat{M}_{2m}} g_{2m}(T) e^{nf_{2m}(T,R)} dT dR,$$

де

$$g_{2m}(T) = \triangle(T) \exp\left\{-i \sum_{j=1}^{2m} x_j t_j\right\}.$$

Більше того,

$$\mathsf{f}_m(\Lambda) = c_n^{(2m)}(X) \frac{i^{2m^2-m} \exp\left\{\lambda_0 \sum_{j=1}^{2m} x_j\right\}}{\triangle(X)} \left(\int_{\hat{M}_{2m}^N} g_{2m}(T) e^{nf_{2m}(T,R)} dT dR + r(n,N)\right),$$

де

$$\hat{M}_{2m}^N = \{\zeta \in \hat{M}_{2m} \mid \max_j \Re(\zeta)_j \le N\},$$
$$|r(n,N)| < Ce^{-nN^2/4}, N \to \infty.$$

Візьмемо довільне додатне число $\varepsilon > 0$. Тоді, оскільки $(T(b), R(b)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\widetilde{T}, 0)$, то для достатньо великих n та для будь-якого $(T,R) \in \hat{M}_{2m}^N$ ми маємо

$$\left|\Re f_{2m}^0\left(\Re T - \frac{i}{2}\Lambda_0, \Re R\right) - \Re f_{2m}^0(T,R)\right| < \varepsilon,$$

де $f_{2m}^0(T,R) = f_{2m}(T,R)|_{b=0}$. Крім того, на будь-якому компакті K функція $f_{2m}(T,R)$ рівномірно збігається до $f_{2m}^0(T,R)$ при $n \to \infty$. Так як $\hat{M}_{2m}^N$ — компакт, то для достатньо великих n

$$|\Re f_{2m}(T,R) - \Re f_{2m}^0(T,R)| < \varepsilon, \quad (T,R) \in \hat{M}_{2m}^N.$$

Розглянемо таку точку $(T^0, R^0) \in \hat{M}_{2m}^N$, що $\Re T^0 = \Re \widetilde{T}$ та $\Re R^0 = 0$. Тоді з вищесказаного випливає, що $\Re f_{2m}(T^0, R^0) > \Re f_{2m}^0(\widetilde{T}, 0) - 2\varepsilon$. Отже,

$$\max_{(T,R)\in \hat{M}_{2m}^N} \Re f_{2m}(T,R) > \Re f_{2m}^0(\widetilde{T}, 0) - 2\varepsilon = \max_{\substack{\Im T = \Lambda_0/2 \\ |\Re t_j| \le N}} \Re f_{2m}^0(T, 0) - 2\varepsilon.$$

Тому, якщо максимум дійсної частини функції $f_{2m}(T,R)$ на множині $\hat{M}_{2m}^N$ досягається в точці (T^1, R^1), то

$$\begin{aligned}(T^1,R^1) \in \{(T,R) \in \hat{M}_{2m}^N | \Re f_{2m}(T,R) > \Re f_{2m}^0(\widetilde{T}, 0) - 2\varepsilon\} \\ \subset \{(T,R) \in \hat{M}_{2m}^N | \Re f_{2m}^0(\Re T - \frac{i}{2}\Lambda_0, \Re R) > \Re f_{2m}^0(\widetilde{T}, 0) - 4\varepsilon\}.\end{aligned}$$

Таким чином, останнє співвідношення ясно показує, що $(T^1, R^1) \to (\widetilde{T}, 0)$ при $n \to \infty$ для деякого $\widetilde{T}$, що має вигляд (2.59).

Позначимо за $V_n(T(b), R(b))$ окіл стаціонарної точки $(T(b), R(b))$, який містить відповідну точку максимума функції $\Re f_{2m}$ зі своїм $\dfrac{\log n}{\sqrt{n}}$-околом, причому $\operatorname{diam} V_n(T(b), R(b)) \to 0$. Можна вважати, що об'єднання цих околів інваріантне відносно відображення $(T,R) \to (\pi T, \pi R)$ для всіх $\pi \in S_{2m}$. Тоді, за тими самими міркуваннями, що були наведені при доведенні Теореми 2.1, ми можемо звузити область інтегрування до об'єднання околів V_n. Роблячи заміну змінних $T \to T + \Im T(b)$, $R \to R + \Im R(b)$ в кожному околі та розкладаючи функцію g_{2m} за формулою Тейлора, ми отримуємо

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_m(\Lambda) &= c_n^{(2m)}(X) \frac{i^{2m^2-m} \exp\left\{\lambda_0 \sum\limits_{j=1}^{2m} x_j\right\}}{\triangle(X)} (1 + o(1)) \\ &\times \sum e^{n f_{2m}(T(b),R(b))} \int\limits_{\hat{V}_n(T(b),R(b))} \Bigg(\sum_{|\alpha| \le 2m(m-1)} n^{-|\alpha|/2} D^\alpha g_{2m}(T(b)) t^\alpha \\ &\qquad + r_{g_{2m}}^{(2m(m-1))}(T) \Bigg) e^{n f_{2m}(T + \Im T(b), R + \Im R(b))} dT dR, \quad (2.63)\end{aligned}$$

де сума береться по всіх стаціонаних точках, які ми вибрали, та

$$\hat{V}_n(T(b),R(b)) = V_n(T(b),R(b)) - \Im(T(b),R(b));$$
$$|r_{g_{2m}}^{(2m(m-1))}(T)| \le C \sum_j |t_j|^{2m(m-1)+1}.$$

Зауважимо, що в (2.63) ми використовуємо найменшу можливу кількість доданків формули Тейлора, яка дозволяє нам отримати перший ненульовий член асимптотики.

Зафіксуємо стаціонарну точку $(T(b),R(b))$ та мультиіндекс α. Візьмемо також такий мультиіндекс $\beta \le \alpha$, що $\beta_{j_1} = \beta_{j_2}$ для деяких $j_1 \ne j_2$, $j_1, j_2 \in I_+$ або $j_1, j_2 \in I_-$, де $\beta \le \alpha \Leftrightarrow \forall j\ \beta_j \le \alpha_j$. Тоді

$$\int\limits_{\hat{V}_n(T(b),R(b))} \left(D^{\alpha-\beta} \triangle(T) D^{\beta} \exp\left\{ -i\sum_{j=1}^{2m} x_j t_j \right\}\Bigg|_{T=T(b)} t^{\alpha} \right.$$
$$\left. + D^{\hat{\alpha}-\beta} \triangle(T) D^{\beta} \exp\left\{ -i\sum_{j=1}^{2m} x_j t_j \right\}\Bigg|_{T=T(b)} t^{\hat{\alpha}} \right)$$
$$\times e^{nf_{2m}(T+\Im T(b), R+\Im R(b))} dT dR = 0,$$

де мультиіндекс $\hat{\alpha}$ відрізняється від α лише перестановкою α_{j_1} та α_{j_2}. Звідси випливає, що в сумі в (2.63) можна залишити лише ті доданки, для яких $|\alpha| = 2m(m-1)$.

Роблячи заміну змінних $T \to n^{-1/2}T$, $R \to n^{-1/2}R$, ми отримуємо

$$\mathsf{f}_m(\Lambda) = n^{-d_{2m}/2} c_n^{(2m)}(X) \frac{i^{2m^2-m} \exp\left\{ \lambda_0 \sum_{j=1}^{2m} x_j \right\}}{\triangle(X)} (1+o(1)) \sum \left[e^{nf_{2m}(T(b),R(b))} \right.$$
$$\times \int\limits_{\mathscr{V}_n(T(b),R(b))} \left(n^{-m(m-1)} \sum_{|\alpha|=2m(m-1)} D^{\alpha} g_{2m}(T(b)) t^{\alpha} + r_{g_{2m}}^{(2m(m-1))}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} T \right) \right)$$
$$\left. \times \exp\left\{ \frac{1}{2} q f_{2m}''(T(b),R(b)) q^T \right\} \left(1 + \frac{r_1(q)}{\sqrt{n}} \right) dq \right], \quad (2.64)$$

де q — це вектор, що містить усі змінні, по яким проводиться інтегрування в (2.63), $dq = dT dR$, $\mathscr{V}_n(T(b),R(b)) = \sqrt{n}\hat{V}_n(T(b),R(b))$ та $|r_1(q)| \le C\sum_j |q_j|^3$.

З (2.62) випливає, що при $n \to \infty$

$$(R_l)_{\alpha\alpha} = o(b_2), \quad l = \overline{3, 2m};$$
$$(R_2)_{\alpha\alpha} = \frac{b_2}{T_{\alpha_1\alpha_1}(0) T_{\alpha_2\alpha_2}(0)} + o(b_2);$$
$$T_{jj}(b) = T_{jj}(0) - \frac{(2m-\chi(j))T_{jj}(0) + \chi(j) - 1}{T_{jj}(0)^3 + T_{jj}(0)^5} b_2^2 + o(b_2^2),$$

де

$$\chi(j)=\begin{cases}\#I_+, & \text{якщо } j\in I_+;\\ \#I_-, & \text{якщо } j\in I_-.\end{cases}$$

Тепер обчислимо значення функції $\Re f_{2m}$ у стаціонарних точках

$$\Re f_{2m}(T(b),R(b))=(-1)^m+\chi(j)(2m-\chi(j))\cdot\frac{\lambda_0^2(4-\lambda_0^2)}{2}b_2^2+o(b_2^2).$$

Звідси стає зрозуміло, що значення функції $\Re f_{2m}$ у стаціонарних точках вигляду (2.60) з $\#I_+=m$ більше, ніж значення в інших стаціонарних точках такого вигляду при $\lambda_0\in(-2,2)\backslash\{0\}$. Це означає, що в сумі в (2.64) можна залишити лише ті доданки, що відповідають стаціонарним точкам з $\#I_+=m$. У випадку, якщо $\lambda_0=0$, значення функції $\Re f_{2m}$ у стаціонарних точках рівні, тому що (2.60) неперервно залежить від λ_0. Однак, всеодно можна залишити лише ті доданки, що відповідають стаціонарним точкам з $\#I_+=m$, оскільки всі інші доданки матимуть менший порядок по n. Остаточно ми маємо

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_m(\Lambda)&=n^{-d_{2m}/2-m(m-1)}c_n^{(2m)}(X)\frac{i^{2m^2-m}\exp\Big\{\lambda_0\sum\limits_{j=1}^{2m}x_j\Big\}}{\triangle(X)}(1+o(1))\\&\times\Bigg(\sum_{\#I_+=m}e^{nf_{2m}(T(b),R(b))}\int\limits_{\mathbb{R}^{d_{2m}}}\sum_{|\alpha|=2m(m-1)}D^\alpha g_{2m}(T(b))t^\alpha\\&\qquad\times\exp\Big\{\frac{1}{2}qf''_{2m}(T(b),R(b))q^T\Big\}\,dq\Bigg).\end{aligned}$$

Розглянемо доданок, який відповідає $I_+=\{1,2,\dots,m\}$. Інтегрування за формулою Гаусса дасть нам

$$\begin{aligned}&Cn^{m^2}i^{3m^2-2m}\frac{\triangle(x_1,\dots,x_m)\triangle(x_{m+1},\dots,x_{2m})}{\triangle(X)}\exp\Big\{\frac{mn}{2}(\lambda_0^2-2)+\frac{\lambda_0}{2}\sum_{j=1}^{2m}x_j\Big\}\\&\times\exp\Big\{-\frac{i\sqrt{4-\lambda_0^2}}{2}\sum_{j=1}^{m}(x_j-x_{m+j})\Big\}(1+o(1))=Cn^{m^2}(-1)^{m(m+1)/2}\\&\times\frac{\exp\Big\{-\frac{i\sqrt{4-\lambda_0^2}}{2}\sum\limits_{j=1}^{m}(x_j-x_{m+j})\Big\}}{i^m\prod\limits_{j,k=1}^{m}(x_j-x_{m+k})}\exp\Big\{\frac{mn}{2}(\lambda_0^2-2)+\frac{\lambda_0}{2}\sum_{j=1}^{2m}x_j\Big\}(1+o(1)),\end{aligned}$$

де C — це деяка дійсна константа, що не залежить від n.

З іншої сторони,

$$\hat{s}_{2m}(X) = \frac{\det\left\{\dfrac{e^{i\pi\rho_{sc}(\lambda_0)(x_j - x_{m+k})} - e^{-i\pi\rho_{sc}(\lambda_0)(x_j - x_{m+k})}}{(x_j - x_{m+k})}\right\}_{j,k=1}^{m}}{(2i\pi\rho_{sc}(\lambda_0))^m \triangle(x_1,\dots,x_m)\triangle(x_{m+1},\dots,x_{2m})}, \tag{2.65}$$

де $\hat{s}_{2m}$ визначено в (2.4). Визначник у правій частині (2.65) можна подати у вигляді суми експонент $\exp\left\{i\pi\rho_{sc}(\lambda_0)\sum\limits_{j=1}^{m}\varepsilon_j x_j\right\}$ з деякими коефіцієнтами по всім наборам $\{\varepsilon_j\}$, які складаються з m елементів $+1$ та з m елементів -1. Оскільки (див. [139, Problem 7.3])

$$(-1)^{m(m-1)/2}\frac{\prod\limits_{j<k}(u_j - u_k)(v_j - v_k)}{\prod\limits_{j,k=1}^{m}(u_j - v_k)} = \det\left\{\frac{1}{u_j - v_k}\right\}_{j,k=1}^{m},$$

то коефіцієнт при $\exp\left\{-i\pi\rho_{sc}(\lambda_0)\sum\limits_{j=1}^{m}(x_j - x_{m+j})\right\}$ дорівнює

$$\frac{\det\left\{\dfrac{1}{(x_{m+j} - x_k)}\right\}_{j,k=1}^{m}}{(2i\pi\rho_{sc}(\lambda_0))^m \triangle(x_1,\dots,x_m)\triangle(x_{m+1},\dots,x_{2m})} = \frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{(2i\pi\rho_{sc}(\lambda_0))^m \prod\limits_{j,k=1}^{m}(x_j - x_{m+k})}.$$

Інші коефіцієнти обчислюються аналогічно. Отже,

$$\mathsf{f}_m(\Lambda) = Cn^{m^2}\exp\left\{\frac{mn}{2}(\lambda_0^2 - 2) + \frac{\lambda_0}{2}\sum_{j=1}^{2m}x_j\right\}\hat{s}_{2m}(X)(1 + o(1)),$$

звідки миттєво випливає твердження Теореми 2.3.

2.4 Доведення Теореми 2.4

У цьому розділі ми розглянемо випадок $p \to \infty$. Як і в доведенні Леми 2.11, ми візьмемо в якості «гарного» контура контур $\Im t_1 = \Im t_2 = -\alpha\lambda_0$, $s \in \mathbb{R}$ зі стаціонарною точкою $\left(-i\alpha\lambda_0, -i\alpha\lambda_0, \frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\right)$, де α задовольняє умову (2.47).

Покладемо $\beta = 2\alpha - 1$. Тоді (2.47) переписується в вигляді

$$b_2 = \beta(1+\beta)(1-\beta)^{-1},$$

а отже $\beta = \sqrt{\frac{2}{p}}(1+o(1))$. Підставляючи $\lambda_0 = \pm 2$, $\alpha = \frac{1+\beta}{2}$ та $b_2 = \beta(1+\beta)(1-\beta)^{-1}$ до (2.51)-(2.52), отримуємо

$$
\begin{aligned}
& f''\Big(-i\alpha\Lambda_0, \frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\Big) \\
& \qquad = -\begin{pmatrix} \beta(2+\beta) & \beta^2(1-\beta)(1+\beta)^{-1} & \pm i\beta(1-\beta) \\ \beta^2(1-\beta)(1+\beta)^{-1} & \beta(2+\beta) & \pm i\beta(1-\beta) \\ \pm i\beta(1-\beta) & \pm i\beta(1-\beta) & 1+\beta^2 \end{pmatrix}; \\
& \det f''\Big(-i\alpha\Lambda_0, \frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\Big) = -\frac{4\beta}{(1+\beta)^2}\cdot(2-(1+\beta)(1-\beta)(2-\beta)) \\
& \qquad\qquad = -\frac{4\beta^2(1+2\beta-\beta^2)}{(1+\beta)^2}.
\end{aligned}
$$

Крім того,

$$
\frac{\partial^3 f}{\partial t_j^3}\left(-i\alpha\Lambda_0, \frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\right) = -2i\,\mathrm{sign}(\lambda_0)(1-\beta)^3.
$$

У випадку (i), тобто при $\frac{n^{2/3}}{p} \to \infty$, за V_n ми позначаємо прямий добуток околів точок 0, 0 та $\frac{1-\alpha}{\alpha}b_2$, причому радіуси околів, що відповідають t_1 та t_2 дорівнюють $\frac{\log n}{\sqrt{n\beta}}$, а радіус окола, що відповідає s дорівнює $\frac{\log n}{\sqrt{n}}$. Формула (2.53) також справджується в цьому випадку.

Зробимо заміну змінних $T \to (n\beta)^{-1/2}T$, $s \to n^{-1/2}s + \frac{1-\alpha}{\alpha}b_2$ і повторимо міркування з доведення Леми 2.11. Тоді

$$
\mathsf{f}_1(2I+n^{-2/3}X) = Cp\exp\{n\hat{f}_* + n^{1/3}\lambda_0(x_1+x_2)/2\}(1+o(1)),
$$

де C — деяка абсолютна константа, а $\hat{f}_* = f\left(-i\alpha\Lambda_0, \frac{1-\alpha}{\alpha}b_2\right)$. Звідси й випливає твердження (i) теореми.

Тепер розглянемо другий випадок (ii) $\frac{n^{2/3}}{p} \to c$. Виберемо множину V_n такою ж, як і у випадку (i), тільки змінимо радіуси околів, що відповідають t_1 та t_2 — тепер вони будуть дорівнювати $\frac{\log n}{\sqrt[3]{n}}$. Тоді формула (2.53) все ще залишається справедливою. За теоремою Коші маємо

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}_1(2I+n^{-2/3}X) = c_n(X)&\frac{ie^{n\hat{f}_*+2n^{1/3}(1-\alpha)(x_1+x_2)}}{n^{1/3}(x_1-x_2)} \\
&\times\left(\int\limits_{W_n} g(T,s)e^{n(f(T-2i\alpha I,s)-\hat{f}_*)}dT\,ds + O\left(e^{-C\log^2 n}\right)\right),
\end{aligned}
$$

де область інтегрування для s не змінюється, а для t_j, $j=1,2$, стає

$$\{|z| \le n^{-1/3} \log n \mid \arg z = -\pi/6 \text{ або } \arg z = -5\pi/6\}.$$

Роблячи заміну змінних $T \to n^{-1/3}T$, $s \to n^{-1/2}s + \frac{1-\alpha}{\alpha}b_2$, ми отримуємо

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_1(2I+n^{-2/3}X) = n^{-11/6}c_n(X)\cdot \frac{i\exp\{n\hat{f}_* + 2n^{1/3}(1-\alpha)(x_1+x_2)\}}{(x_1-x_2)} \\ \times \int\limits_{\gamma\times\gamma} (t_1-t_2)\exp\Big\{-\sum_{j=1}^{2}\Big(\frac{i}{3}(1-\beta)^3 t_j^3 + \frac{(2+\beta)\sqrt{c}}{\sqrt{2}}t_j^2 + ix_jt_j\Big)\Big\}dT \\ \times \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1+\beta^2}{2}s^2}ds(1+o(1)),\end{aligned}$$

де

$$\gamma = \{\arg z = -\pi/6 \text{ або } \arg z = -5\pi/6\}.$$

Зробимо ще заміну змінних $\tau_j = t_j + i\sqrt{2c}$ і скористаємось теоремою Коші. Тоді

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_1(2I+n^{-2/3}X) = Cn^{2/3}\cdot \frac{i\exp\{n\hat{f}_* + (2n^{1/3}(1-\alpha)+\sqrt{2c})(x_1+x_2)\}}{(x_1-x_2)}(1+o(1)) \\ \times \int\limits_{\gamma\times\gamma} (\tau_1-\tau_2)\exp\Big\{-\sum_{j=1}^{2}\Big(\frac{i}{3}\tau_j^3 + i(x_j+2c)\tau_j\Big)\Big\}d\tau_1 d\tau_2,\end{aligned}$$

де C — деяка абсолютна константа. Приймаючи до уваги (2.5) та (2.20), маємо

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_1(2I+n^{-2/3}X) = Cn^{2/3}\exp\{n\hat{f}_* + (2n^{1/3}(1-\alpha)+\sqrt{2c})(x_1+x_2)\} \\ \times \mathbb{A}(x_1+2c, x_2+2c)(1+o(1)),\end{aligned}$$

що завершує доведення твердження (ii).

2.5 Висновки до Розділу 2

У Розділі 2 ми дослідили кореляційні функції характеристичних поліномів розріджених випадкових ермітових матриць. Було встановлено асмптотичну поведінку другої кореляційної функції характеристичних поліномів всередині спектра у випадку, коли середня кількість p ненульових елементів у кожному рядку та стовпці є скінченною. Виявилось, що друга кореляційна функція характеристичних поліномів має так званий «фазовий перехід» при $p=2$, тобто при $p < 2$ друга кореляційна функція характеристичних поліномів має один вид асимптотичної поведінки, а при $p > 2$ — інший. Більше того, було досліджено другу кореляційну функцію характеристичних поліномів у перехідному режимі між цими двома видами асимптотичної поведінки й показано, що обидва види асимптотичної поведінки повністю узгоджуються між собою.

Також було обчислено асимптотичну поведінку другої кореляційної функції характеристичних поліномів на межі спектра коли p прямую до нескінченності разом з розміром матриці n. Доволі несподіваним виявився той факт, що за цих умов друга кореляційна функція характеристичних поліномів також має так званий «фазовий перехід» при $p \sim Cn^{2/3}$. А саме, при $p \gg n^{2/3}$ нормована границя другої кореляційної функції характеристичних поліномів виражається через ядро Ейрі, в той час як при $p \ll n^{2/3}$ ця ж границя дорівнює одиниці.

Крім другої кореляційної функції характеристичних поліномів було також досліджено кореляційні функції вищих порядків. Було встановлено, що асимптотична поведінка кореляційних функцій характеристичних поліномів парного порядку всередині спектра при $p \to \infty$ співпадає з асимптотичною поведінкою кореляційних функцій характеристичних поліномів матриць ансамблю Вігнера, для яких $p = n$.

До основних результатів цього розділу належать:

- Теорема 2.1, в якій встановлено асимптотичну поведінку другої кореляційної функції характеристичних поліномів сильно розріджених випадкових матриць всередині спектра;
- Теорема 2.3, в якій встановлено асимптотичну поведінку всіх кореляційних функцій характеристичних поліномів слабко розріджених випадкових матриць всередині спектра;
- Теорема 2.4, в якій встановлено асимптотичну поведінку другої кореляційної функції характеристичних поліномів слабко розріджених випадкових матриць на межі спектра.

Нерозв'язаною задачею залишається обчислення асимптотичної поведінки старших кореляційних функцій характеристичних поліномів сильно розріджених випадкових матриць.

Результати досліджень даного розділу наведено в публікації автора [3].

РОЗДІЛ 3

КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ПОЛІНОМІВ КОМПЛЕКСНИХ ВИПАДКОВИХ МАТРИЦЬ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Нас цікавить асимптотична поведінка кореляційних функцій характеристичних поліномів $\mathsf{f}_m(Y)$ (див. Означення 1.7) для комплексних матриць (1.8) при $n \to \infty$ у випадку, якщо параметри y_j, $j = 1, \ldots, 2m$ мають вигляд

$$\overline{y}_j = y_{m+j} = z_j, \qquad j = \overline{1,m}, \tag{3.1}$$

де z_j визначені в (1.14).

Результатом цього розділу є

Теорема 3.1. *Нехай ансамбль неермітових випадкових матриць M_n задано формулами* (1.8) *та* (1.9). *Нехай також перші $2m$ абсолютних моментів спільного розподілу елементів матриць M_n є скінченними, і числа z_j, $j = 1, \ldots, m$, мають вигляд* (1.14), *причому $|z_0| < 1$. Тоді*

(i) m-та кореляційна функція характеристичних поліномів (1.2) *задовольняє асимптотичне співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{m^2-m}{2}} \frac{\mathsf{f}_m(\check{Z})}{\mathsf{f}_1(\overline{z}_1, z_1)\cdots \mathsf{f}_1(\overline{z}_m, z_m)} = C^{(i)}_{m,z_0} e^{\frac{m^2-m}{2}\left(1-|z_0|^2\right)^2 \kappa_{2,2}} \frac{\det(K_{\mathbb{C}}(\zeta_j,\zeta_k))_{j,k=1}^m}{|\triangle(\mathscr{Z})|^2},$$

де $\check{Z}$ визначено в (1.16), *$C^{(i)}_{m,z_0}$ — деяка константа, яка не залежить ані від спільного розподілу елементів матриці, ані від $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$; $\kappa_{2,2} = \mathbf{E}\{|x_{11}|^4\} - 2$; $K_{\mathbb{C}}(z,w)$ визначено в* (1.18) *та $\mathscr{Z}$ визначено в* (1.17);

(ii) у окремому випадку $\zeta_1 = \cdots = \zeta_m = 0$ ми маємо

$$\mathbf{E}\left\{|\det(M_n - z_0)|^{2m}\right\}$$
$$= C^{(ii)}_{m,z_0} e^{\frac{m^2-m}{2}\left(1-|z_0|^2\right)^2 \kappa_{2,2}} n^{\frac{m^2}{2}} e^{mn(|z_0|^2-1)}(1+o(1)), \quad (3.2)$$

де $C^{(ii)}_{m,z_0}$ — деяка константа, яка не залежить від спільного розподілу елементів матриці.

Зауваження 3.2. Слідкуючи за константами підчас доведення Теореми 3.1, можна знайти константи $C^{(i)}_{m,z_0}$ та $C^{(ii)}_{m,z_0}$. Вони мають наступні значення

$$C^{(i)}_{m,z_0} = 1, \qquad C^{(ii)}_{m,z_0} = (2\pi)^{m/2}\left(\prod_{j=1}^{m-1} j!\right)^{-1}.$$

Звертаємо увагу на те, що у випадку нормального розподілу елементів матриць $\kappa_{2,2} = 0$, і результат Теореми 3.1 повністю узгоджується із відповідним результатом для $\mathrm{Gin}(\mathbb{C})$ (див. (1.15), (1.19) для порівняння). Теорема 3.1 також показує, що асимптотика f_m[1] та асимптотика m-тої спектральної кореляційної функції є дуже схожими (див. [172]).

3.1 Інтегральне представлення для f_m

У цьому підрозділі ми отримаємо зручне інтегральне представлення для кореляційної функції характеристичних поліномів f_m, яку визначено формулою (1.2).

Пропозиція 3.3. *Нехай ансамбль M_n задано формулами* (1.8) *та* (1.9)*. Тоді m-ту кореляційну функцію характеристичних поліномів f_m, яку визначено формулою* (1.2)*, можна подати в наступному вигляді*

$$\mathsf{f}_m = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{c_m} \int g(\boldsymbol{Q}) e^{(n-c_m)f(\boldsymbol{Q})} d\boldsymbol{Q}, \quad (3.3)$$

де $c_m = 2^{2m-1}$, $\boldsymbol{Q} = (Q_{p,s})^m_{p,s=0}$ з парним $p+s$, $Q_{p,s}$ — комплексна матриця

[1]Тут і нижче ми опускаємо аргумент функції $\mathsf{f}_m(Y)$ тільки якщо він доівнює $\check{Z}$.

розміром $\binom{m}{p} \times \binom{m}{s}$, $d\boldsymbol{Q} = \prod\limits_{\substack{p+s \text{ парне} \\ 0 \le p,s \le m}} dQ_{p,s}^* dQ_{p,s}$ *та*

$$f(\boldsymbol{Q}) = -\sum_{\substack{p+s \text{ парне} \\ 0 \le p,s \le m}} \operatorname{tr} Q_{p,s}^* Q_{p,s} + \log h(\boldsymbol{Q}); \tag{3.4}$$

$$g(\boldsymbol{Q}) = (h(\boldsymbol{Q})^{c_m} + n^{-1/2}\mathrm{p}_a(\boldsymbol{Q}))\exp\Big\{-c_m \sum_{\substack{p+s \text{ парне} \\ 0 \le p,s \le m}} \operatorname{tr} Q_{p,s}^* Q_{p,s}\Big\};$$

$$h(\boldsymbol{Q}) = \det A + n^{-1/2}\tilde{h}(Q_2) + n^{-1}\mathrm{p}_c(\hat{\boldsymbol{Q}}); \tag{3.5}$$

$$A = A(Q_1) = \begin{pmatrix} -Z & Q_1 \\ -Q_1^* & -Z^* \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

$$Z = \operatorname{diag}\{z_1, \dots, z_m\}, \tag{3.7}$$

а також $\mathrm{p}_a(\boldsymbol{Q})$, $\mathrm{p}_c(\hat{\boldsymbol{Q}})$ *та* $\tilde{h}(Q_2)$ *— деякі поліноми, точне означення яких буде наведено нижче під час доведення цієї пропизиції. Крім того,* $\hat{\boldsymbol{Q}}$ *містить усі матриці* $Q_{p,s}$*, крім* Q_1.

Зауваження 3.4. Нехай $Q_1 = U\Lambda V^*$ — сингулярний розклад матриці Q_1, тобто $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_j\}_{j=1}^m, \lambda_j \ge 0, U, V \in U(m)$. Для того, щоб провести дослідження асимптотичної поведінки, ми робимо заміну змінних $Q_1 = U\Lambda V^*$ у формулі (3.3). Оскільки якобіан такої заміни дорівнює $\frac{2^m \pi^{m^2}}{m!\left(\prod_{j=1}^{m-1} j!\right)^2} \triangle^2(\Lambda^2) \prod\limits_{j=1}^m \lambda_j$ (див., наприклад [97]), то ми отримуємо

$$\begin{aligned} \mathsf{f}_m = C n^{c_m} \int\limits_{\mathscr{D}} \triangle^2(\Lambda^2) \prod_{j=1}^m \lambda_j \left[g_0(\Lambda, \hat{\boldsymbol{Q}}) + \frac{1}{\sqrt{n}} g_r(U\Lambda V^*, \hat{\boldsymbol{Q}}) \right] \\ \times \exp\left\{ (n - c_m) \left[f_0(\Lambda, \hat{\boldsymbol{Q}}) + \frac{1}{\sqrt{n}} f_r(U\Lambda V^*, \hat{\boldsymbol{Q}}) \right] \right\} d\mu(U) d\mu(V) d\Lambda d\hat{\boldsymbol{Q}}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

де $\mathscr{D} = \{(\Lambda, U, V, \hat{\boldsymbol{Q}}) \mid \lambda_j \ge 0,\ j = 1, \dots, m,\ U, V \in U(m)\}$, μ — міра Хаара, $d\Lambda = \prod\limits_{j=1}^m d\lambda_j$ та

$$f_0(\boldsymbol{Q}) = -\sum_{\substack{p+s \text{ парне} \\ 0 \le p,s \le m}} \operatorname{tr} Q_{p,s}^* Q_{p,s} + \log h_0(Q_1); \tag{3.9}$$

$$g_0(\boldsymbol{Q}) = h_0(Q_1)^{c_m} \exp\Big\{-c_m \sum_{\substack{p+s \text{ парне} \\ 0 \le p,s \le m}} \operatorname{tr} Q_{p,s}^* Q_{p,s}\Big\} = e^{c_m f_0(\boldsymbol{Q})};$$

$$h_0(Q_1) = \det\left(A + \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} \mathscr{Z} & 0 \\ 0 & \mathscr{Z}^* \end{pmatrix}\right) = \prod_{j=1}^{m}(|z_0|^2 + \lambda_j^2); \tag{3.10}$$

$$f_r(\boldsymbol{Q}) = \sqrt{n}(f(\boldsymbol{Q}) - f_0(\boldsymbol{Q})); \tag{3.11}$$
$$g_r(\boldsymbol{Q}) = \sqrt{n}(g(\boldsymbol{Q}) - g_0(\boldsymbol{Q})).$$

Зауважимо, що $f_0(U\Lambda V^*, \hat{\boldsymbol{Q}}) = f_0(\Lambda, \hat{\boldsymbol{Q}})$ та аналогічно для g_0.

Зауваження 3.5. В окремому випадку $m = 1$ ми маємо

$$\mathsf{f}_1(z) = \frac{n}{\pi}\int \exp\left\{n(-|q|^2 + \log(|z|^2 + |q|^2))\right\} d\bar{q}dq.$$

Переходячи до полярних координат та користуючись методом Лапласа, ми отримуємо асимптотику $\mathsf{f}_1(z)$

$$\begin{aligned} \mathsf{f}_1(z) &= 2n\int_0^{+\infty} r\exp\left\{n(-r^2 + \log(|z|^2 + r^2))\right\} dr \\ &= \sqrt{2\pi n}\, e^{n(|z|^2-1)}(1 + o(1)). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Зауваження 3.6. У випадку, якщо елементи матриці мають нормальний розподіл, обидва представлення (3.3) та (3.8) стають набагато простішими та мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathsf{f}_m &= \left(\frac{n}{\pi}\right)^{m^2}\int e^{nf(Q_1)}dQ_1^*dQ_1 \\ &= Cn^{m^2}\int\limits_{(\mathbb{R}_+)^m}\int\limits_{U(m)}\int\limits_{U(m)} \triangle^2(\Lambda^2)\prod_{j=1}^{m}\lambda_j \times e^{nf(U\Lambda V^*)}d\mu(U)d\mu(V)d\Lambda, \end{aligned} \tag{3.13}$$

де

$$f(Q_1) = -\operatorname{tr} Q_1^*Q_1 + \log\det A. \tag{3.14}$$

3.1.1 Доведення Пропозиції 3.3

Перетворимо вираз (1.2) для f_m, використовуючи формули (5.3) та (1.8)

$$\mathsf{f}_m = \mathbf{E}\left\{\int \exp\left\{-\sum_{j=1}^{m}\phi_j^+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}X - z_j\right)\phi_j - \sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{\theta}_j^+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}X - z_j\right)^*\boldsymbol{\theta}_j\right\}d\Phi d\Theta\right\},$$

де $\boldsymbol{\phi}_j$, $\boldsymbol{\theta}_j$, $j = 1, \ldots, m$ є n-вимірними векторами з компонентами ϕ_{kj} та θ_{kj} відповідно, $d\Phi = \prod_{j=1}^{m} d\boldsymbol{\phi}_j^+ d\boldsymbol{\phi}_j$ та $d\Theta = \prod_{j=1}^{m} d\boldsymbol{\theta}_j^+ d\boldsymbol{\theta}_j$. Члени в експоненті можна переписати наступним чином

$$
\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\phi}_j^+ X \boldsymbol{\phi}_j &= -\operatorname{tr}\Phi^+ X\Phi = \operatorname{tr}\Phi\Phi^+ X = \sum_{k,l=1}^{n} (\Phi\Phi^+)_{lk} x_{kl}, \\
-\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\theta}_j^+ X^* \boldsymbol{\theta}_j &= -\operatorname{tr}\Theta^+ X^*\Theta = \operatorname{tr}\Theta\Theta^+ X^* = \sum_{k,l=1}^{n} (\Theta\Theta^+)_{kl} \bar{x}_{kl}, \\
\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\phi}_j^+ z_j \boldsymbol{\phi}_j &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \overline{\phi_{kj}} z_j \phi_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \overline{\phi_{kj}} z_j \phi_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\varphi}_k^+ Z \boldsymbol{\varphi}_k, \\
\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\theta}_j^+ \bar{z}_j \boldsymbol{\theta}_j &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \overline{\theta_{kj}} \bar{z}_j \theta_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \overline{\theta_{kj}} \bar{z}_j \theta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\vartheta}_k^+ Z^* \boldsymbol{\vartheta}_k,
\end{aligned}
$$

де за Θ та Φ позначено матриці, що складаються зі стовпців $\boldsymbol{\theta}_1, \ldots, \boldsymbol{\theta}_m$ та $\boldsymbol{\phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\phi}_m$ відповідно, $\boldsymbol{\varphi}_k = (\Phi^T)_k$, $\boldsymbol{\vartheta}_k = (\Theta^T)_k$, Z визначено в (3.7). Отже

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}_m = \mathbf{E}\Bigg\{ \int \exp\Bigg\{ &\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\varphi}_k^+ Z \boldsymbol{\varphi}_k + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\vartheta}_k^+ Z^* \boldsymbol{\vartheta}_k \\
&+ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k,l=1}^{n} (\Phi\Phi^+)_{lk} x_{kl} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k,l=1}^{n} (\Theta\Theta^+)_{kl} \bar{x}_{kl} \Bigg\} d\Phi d\Theta \Bigg\}. \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Для того, щоб полегшити сприйняття наступних кроків доведення, ми спочатку розглянемо окремий випадок, коли елементи матриці X є нормальними випадковими величинами.

3.1.1.1 Випадок нормального розподілу

Візьмемо математичне сподівання у формулі (3.15)

$$
\mathsf{f}_m = \int \exp\Bigg\{ \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\varphi}_k^+ Z \boldsymbol{\varphi}_k + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\vartheta}_k^+ Z^* \boldsymbol{\vartheta}_k + \sum_{k,l=1}^{n} \frac{1}{n} (\Phi\Phi^+)_{lk} (\Theta\Theta^+)_{kl} \Bigg\} d\Phi d\Theta.
$$

Зауважимо, що

$$
\sum_{k,l=1}^{n} (\Phi\Phi^+)_{lk} (\Theta\Theta^+)_{kl} = \operatorname{tr}\Phi\Phi^+\Theta\Theta^+ = -\operatorname{tr}\Theta^T (\Phi^T)^+ \Phi^T (\Theta^T)^+.
$$

Тепер застосуємо перетворення Хабарда–Стратоновича. Нагадаємо, що для звичайних змінних (не грасманових) це переворення суть застосування формули (5.1) у зворотньому напрямі. Маємо

$$\begin{aligned} \mathsf{f}_m = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{m^2} \int \exp\Bigg\{ \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^+ Z \varphi_k + \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k^+ Z^* \vartheta_k + \operatorname{tr} \Theta^T (\Phi^T)^+ Q_1 \\ - \operatorname{tr} Q_1^* \Phi^T (\Theta^T)^+ - n \operatorname{tr} Q_1^* Q_1 \Bigg\} d\Phi d\Theta dQ_1^* dQ_1, \end{aligned} \tag{3.16}$$

де Q_1 — матриця розміром $m \times m$. Перетворюючи члени в експоненті

$$\operatorname{tr} \Theta^T (\Phi^T)^+ Q_1 = -\operatorname{tr} (\Phi^T)^+ Q_1 \Theta^T = -\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^+ Q_1 \vartheta_k,$$

$$\operatorname{tr} Q_1^* \Phi^T (\Theta^T)^+ = -\operatorname{tr} (\Theta^T)^+ Q_1^* \Phi^T = -\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k^+ Q_1^* \varphi_k,$$

можна подати (3.16) у вигляді

$$\mathsf{f}_m = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{m^2} \int dQ_1^* dQ_1 e^{-n \operatorname{tr} Q_1^* Q_1} \prod_{k=1}^{n} \int e^{-\rho_k^+ A \rho_k} d\varphi_k^+ d\varphi_k d\vartheta_k^+ d\vartheta_k,$$

де A визначено в (3.6) та

$$\rho_k = \begin{pmatrix} \varphi_k \\ \vartheta_k \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Насамкінець, інтегрування за формулою (5.3) приводить нас до (3.13).

3.1.1.2 Загальний випадок

Для того, щоб розібрати загальний випадок, ми введемо позначення для функції, яка є свого роду «перетворенням Лапласа–Фур'є»,

$$\psi(t_1, t_2) := \mathbf{E}\left\{ e^{t_1 x_{11} + t_2 \bar{x}_{11}} \right\}. \tag{3.18}$$

Тоді математичне сподівання в (3.15) можна переписати в наступній формі

$$\begin{aligned} \mathsf{f}_m = \int \prod_{k,l=1}^{n} \psi\left(\frac{1}{\sqrt{n}} (\Phi\Phi^+)_{lk}, \frac{1}{\sqrt{n}} (\Theta\Theta^+)_{kl} \right) \\ \times \exp\left\{ \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^+ Z \varphi_k + \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k^+ Z^* \vartheta_k \right\} d\Phi d\Theta \end{aligned}$$

$$= \int \exp\left\{ \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^+ Z \varphi_k + \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k^+ Z^* \vartheta_k \right.$$
$$\left. + \sum_{k,l=1}^{n} \log\psi\left(\frac{1}{\sqrt{n}} (\Phi\Phi^+)_{lk}, \frac{1}{\sqrt{n}} (\Theta\Theta^+)_{kl} \right) \right\} d\Phi d\Theta.$$

Розкладання $\log\psi$ у ряд дає нам

$$\mathsf{f}_m = \int \exp\left\{ \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^+ Z \varphi_k + \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k^+ Z^* \vartheta_k \right.$$
$$\left. + \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{p,s=0}^{m} \frac{\kappa_{p,s}}{p!s!} \frac{1}{n^{(p+s)/2}} \left((\Phi\Phi^+)_{lk} \right)^p \left((\Theta\Theta^+)_{kl} \right)^s \right\} d\Phi d\Theta, \quad (3.19)$$

де

$$\kappa_{p,s} = \frac{\partial^{p+s}}{\partial^p t_1 \partial^s t_2} \log\psi(t_1, t_2) \Big|_{t_1=t_2=0}. \quad (3.20)$$

Зокрема,

$$\begin{aligned} &\kappa_{0,0} = 0; \\ &\kappa_{1,0} = \overline{\kappa_{0,1}} = \mathbf{E}\{x_{11}\} = 0; \\ &\kappa_{2,0} = \overline{\kappa_{0,2}} = \mathbf{E}\{x_{11}^2\} - \mathbf{E}^2\{x_{11}\} = 0; \\ &\kappa_{1,1} = \mathbf{E}\{|x_{11}|^2\} - |\mathbf{E}\{x_{11}\}|^2 = 1. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Знову перетворимо члени в експоненті

$$\begin{aligned} &\sum_{k,l=1}^{n} \left((\Phi\Phi^+)_{lk} \right)^p \left((\Theta\Theta^+)_{kl} \right)^s \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \phi_{lj} \overline{\phi_{kj}} \right)^p \left(\sum_{j=1}^{m} \theta_{kj} \overline{\theta_{lj}} \right)^s \\ &= p!s! \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{\substack{\alpha \in \mathscr{I}_{m,p} \\ \beta \in \mathscr{I}_{m,s}}} \prod_{q=1}^{p} \phi_{l\alpha_q} \overline{\phi_{k\alpha_q}} \prod_{r=1}^{s} \theta_{k\beta_r} \overline{\theta_{l\beta_r}} \quad (3.22) \\ &= (-1)^{p^2} p!s! \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{\substack{\alpha \in \mathscr{I}_{m,p} \\ \beta \in \mathscr{I}_{m,s}}} \prod_{r=s}^{1} \theta_{k\beta_r} \prod_{q=p}^{1} \overline{\phi_{k\alpha_q}} \prod_{q=1}^{p} \phi_{l\alpha_q} \prod_{r=1}^{s} \overline{\theta_{l\beta_r}} \\ &= p!s! \sum_{\substack{\alpha \in \mathscr{I}_{m,p} \\ \beta \in \mathscr{I}_{m,s}}} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^p \prod_{r=s}^{1} \theta_{k\beta_r} \prod_{q=p}^{1} \overline{\phi_{k\alpha_q}} \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \prod_{q=1}^{p} \phi_{k\alpha_q} \prod_{r=1}^{s} \overline{\theta_{k\beta_r}} \right). \end{aligned}$$

Як і в попередньому підпункті, застосуємо перетворення Хабарда–Стратоновича. Для парного $p+s$ маємо

$$\begin{aligned}
&\exp\left\{\kappa_{p,s}n^{-(p+s)/2}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^p\prod_{r=s}^{1}\theta_{k\beta_r}\prod_{q=p}^{1}\overline{\phi_{k\alpha_q}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\prod_{q=1}^{p}\phi_{k\alpha_q}\prod_{r=1}^{s}\overline{\theta_{k\beta_r}}\right)\right\}\\
&\quad=\frac{n}{\pi}\int\exp\left\{-n^{-\frac{p+s-2}{4}}\sum_{k=1}^{n}\tilde{y}_{\beta\alpha}^{(k,p,s)}q_{\alpha\beta}^{(p,s)}-n^{-\frac{p+s-2}{4}}\sum_{k=1}^{n}\overline{q}_{\alpha\beta}^{(p,s)}y_{\alpha\beta}^{(k,p,s)}\right. \qquad (3.23)\\
&\qquad\left.-n\left|q_{\alpha\beta}^{(p,s)}\right|^2\right\}d\overline{q}_{\alpha\beta}^{(p,s)}dq_{\alpha\beta}^{(p,s)},
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_{\beta\alpha}^{(k,p,s)}&=\sqrt{\kappa_{p,s}}(-1)^p\prod_{r=s}^{1}\theta_{k\beta_r}\prod_{q=p}^{1}\overline{\phi_{k\alpha_q}};\\
y_{\alpha\beta}^{(k,p,s)}&=\sqrt{\kappa_{p,s}}\prod_{q=1}^{p}\phi_{k\alpha_q}\prod_{r=1}^{s}\overline{\theta_{k\beta_r}}.
\end{aligned}\qquad (3.24)$$

Тут та нижче ми вибираємо гілку квадратного кореня так, щоб його аргумент був у проміжку $[0,\pi)$. Аналогічно, для непарного $p+s$ ми маємо

$$\begin{aligned}
&\exp\left\{\kappa_{p,s}n^{-(p+s)/2}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^p\prod_{r=1}^{s}\theta_{k\beta_r}\prod_{q=1}^{p}\overline{\phi_{k\alpha_q}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\prod_{q=1}^{p}\phi_{k\alpha_q}\prod_{r=1}^{s}\overline{\theta_{k\beta_r}}\right)\right\}\\
&\quad=\int\exp\left\{-n^{-\frac{p+s}{4}}\sum_{k=1}^{n}\tilde{y}_{\beta\alpha}^{(k,p,s)}\xi_{\alpha\beta}^{(p,s)}-n^{-\frac{p+s}{4}}\sum_{k=1}^{n}\overline{\left(\xi_{\alpha\beta}^{(p,s)}\right)}y_{\alpha\beta}^{(k,p,s)}\right.\\
&\qquad\left.-\overline{\left(\xi_{\alpha\beta}^{(p,s)}\right)}\xi_{\alpha\beta}^{(p,s)}\right\}d\overline{\left(\xi_{\alpha\beta}^{(p,s)}\right)}d\xi_{\alpha\beta}^{(p,s)}.
\end{aligned}\qquad (3.25)$$

Тепер, підставляючи (3.22) до (3.19) та застосовуючи до результата (3.23) і (3.25), ми маємо

$$\begin{aligned}
\mathsf{f}_m=\left(\frac{n}{\pi}\right)^{c_m}\int\prod_{k=1}^{n}\mathsf{j}_k&\prod_{\substack{p+s\text{ непарне}\\0\le p,s\le m}}e^{-\operatorname{tr}\Xi_{p,s}^{+}\Xi_{p,s}}d\Xi_{p,s}^{+}d\Xi_{p,s}\\
&\times\prod_{\substack{p+s\text{ парне}\\0\le p,s\le m}}e^{-n\operatorname{tr}Q_{p,s}^{*}Q_{p,s}}dQ_{p,s}^{*}dQ_{p,s}
\end{aligned}\qquad (3.26)$$

де

$$\begin{aligned}
\mathsf{j}_k=\int\exp\Big\{&b_{k,2}+n^{-1/2}b_{k,4}+n^{-3/4}\mathrm{p}_a^{(1)}(\Xi,\Phi,\Theta)\\
&+n^{-1}\mathrm{p}_c^{(1)}(\hat{Q},\Phi,\Theta)\Big\}d\varphi_k^{+}d\varphi_k d\vartheta_k^{+}d\vartheta_k,
\end{aligned}\qquad (3.27)$$

$$
\begin{aligned}
b_{k,2} &= -\left(\operatorname{tr}\tilde{Y}_{k,1,1}Q_{1,1} + \operatorname{tr}Q_{1,1}^{*}Y_{k,1,1}\right) + \varphi_k^{+}Z\varphi_k + \vartheta_k^{+}Z^{*}\vartheta_k, \\
b_{k,4} &= -\sum_{p+s=4}\left(\operatorname{tr}\tilde{Y}_{k,p,s}Q_{p,s} + \operatorname{tr}Q_{p,s}^{*}Y_{k,p,s}\right), \qquad (3.28)\\
\mathrm{p}_a^{(1)}(\Xi,\Phi,\Theta) &= -\sum_{j=2}^{m} n^{-(j-2)/2}\sum_{p+s=2j-1}\left(\operatorname{tr}\tilde{Y}_{k,p,s}\Xi_{p,s} + \operatorname{tr}\Xi_{p,s}^{+}Y_{k,p,s}\right),\\
\mathrm{p}_c^{(1)}(\hat{Q},\Phi,\Theta) &= -\sum_{j=3}^{m} n^{-(j-3)/2}\sum_{p+s=2j}\left(\operatorname{tr}\tilde{Y}_{k,p,s}Q_{p,s} + \operatorname{tr}Q_{p,s}^{*}Y_{k,p,s}\right).
\end{aligned}
$$

У вищенаведених формулах $\Xi_{p,s}$, $Q_{p,s}$, $\tilde{Y}_{k,p,s}$ та $Y_{k,p,s}$ позначають матриці з елементами $\xi_{\alpha\beta}^{(p,s)}$, $q_{\alpha\beta}^{(p,s)}$, $\tilde{y}_{\beta\alpha}^{(k,p,s)}$ та $y_{\alpha\beta}^{(k,p,s)}$ відповідно. Рядки та стовбці нумеруються елементами множини $\mathscr{I}_{m,p}$ (або $\mathscr{I}_{m,s}$) у лексикографічному порядку. Також звертаємо увагу на те, що поліноми $\mathrm{p}_a^{(1)}$ та $\mathrm{p}_c^{(1)}$ є однорідними поліномами першого степеня від елементів матриць множин Ξ та $\hat{Q}$ відповідно, де $\hat{Q}$ містить усі матриці $Q_{p,s}$, крім Q_1. Ще одна річ, яка нам знадобиться, полягає в тому, що всі одночлени полінома $\mathrm{p}_a^{(1)}$ мають непарний степінь по φ_k та ϑ_k, а всі одночлени полінома $\mathrm{p}_c^{(1)}$ мають парний степінь по φ_k та ϑ_k.

На щастя, інтеграл по Φ and Θ у формулі (3.26) факторизується. Тому можна проінтегрувати по φ_k та ϑ_k для кожного k окремо. Відповідний результат наведено в Лемі 3.7.

Лема 3.7. *Нехай* j_k *визначено в* (3.27). *Тоді*

$$
\mathrm{j}_k = \det A + n^{-1/2}\tilde{h}(Q_2) + n^{-1}\mathrm{p}_c(\hat{Q}) + n^{-3/2}\mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi,Q), \qquad (3.29)
$$

де A *визначено в* (3.6),

$$
\tilde{h}(Q_2) = -\int\left(\operatorname{tr}\tilde{Y}_{k,2,2}Q_2 + \operatorname{tr}Q_2^{*}Y_{k,2,2}\right)e^{b_{k,2}}d\varphi_k^{+}d\varphi_k d\vartheta_k^{+}d\vartheta_k, \qquad (3.30)
$$

а $\mathrm{p}_c(\hat{Q})$ *та* $\mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi,Q)$ *— такі поліноми, що*

(i) $\mathrm{p}_c(0)=0$*;*

(ii) будь-який одночлен $\mathrm{p}_a^{(2)}$ *має хоча б другий степінь по* Ξ.

Доведення. Ми отримаємо розклад (3.29) інтеграла j_k поступово розкладаючи експоненту в ряд та користуючись означенням інтеграла по грасмановим змінним. Розпочнемо з наступного

$$\mathrm{j}_k = \int \left(1 + \sum_{1\le l\le 4m/3} n^{-3l/4}\left(\mathrm{p}_a^{(1)}(\Xi,\Phi,\Theta)\right)^l\right) e^{b_{k,2}+n^{-1/2}b_{k,4}+n^{-1}\mathrm{p}_c^{(1)}(\hat{\boldsymbol{Q}},\Phi,\Theta)} \times d\varphi_k^+ d\varphi_k d\vartheta_k^+ d\vartheta_k, \tag{3.31}$$

де члени, степінь яких по φ_k та ϑ_k вище $4m$, перетворюються на нуль, тому що будь-яка змінна, що антикомутує, в квадраті дорівнює нулю. Одночлени непарного степеня по φ_k та ϑ_k у сукупності також перетворюються на нуль після інтегрування. Дійсно, для будь-якого однородного полінома непарного степеня $\tilde{\mathrm{p}}$ розклад функції $\tilde{\mathrm{p}}\left(\varphi_k,\vartheta_k\right)e^{b_{k,2}+n^{-1/2}b_{k,4}+n^{-1}\mathrm{p}_c(\hat{\boldsymbol{Q}},\Phi,\Theta)}$ в ряд містить тільки члени непарного степеня. Оскільки ми маємо парну кількість грасманових змінних, то в розкладі не буде одночленів найвищого степеня, а отже інтеграл дорівнюватиме нулю. Такми чином, (3.31) спрощується до

$$\mathrm{j}_k = \int \left(1 + n^{-3/2}\mathrm{p}_a^{(3)}(\Xi,\Phi,\Theta)\right) e^{b_{k,2}+n^{-1/2}b_{k,4}+n^{-1}\mathrm{p}_c^{(1)}(\hat{\boldsymbol{Q}},\Phi,\Theta)} \times d\varphi_k^+ d\varphi_k d\vartheta_k^+ d\vartheta_k, \tag{3.32}$$

де $\mathrm{p}_a^{(3)}(\Xi,\Phi,\Theta)$ — поліном, кожний одночлен якого має щонайменше другий степінь по Ξ та щонайменше другий степінь по φ_k та ϑ_k. Зауважимо, що

$$\int \mathrm{p}_a^{(3)}(\Xi,\Phi,\Theta)e^{b_{k,2}+n^{-1/2}b_{k,4}+n^{-1}\mathrm{p}_c^{(1)}(\hat{\boldsymbol{Q}},\Phi,\Theta)}d\varphi_k^+ d\varphi_k d\vartheta_k^+ d\vartheta_k = \mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi,\boldsymbol{Q}), \tag{3.33}$$

де поліном $\mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi,\boldsymbol{Q})$ задовольняє умову (ii). Підставимо (3.33) до (3.32). Тоді

$$\mathrm{j}_k = \int e^{b_{k,2}+n^{-1/2}b_{k,4}+n^{-1}\mathrm{p}_c^{(1)}(\hat{\boldsymbol{Q}},\Phi,\Theta)}d\varphi_k^+ d\varphi_k d\vartheta_k^+ d\vartheta_k + n^{-3/2}\mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi,\boldsymbol{Q}).$$

Подальше розкладання експоненти дає нам

$$\mathrm{j}_k = \int \left(1 + n^{-1/2}b_{k,4} + n^{-1}\mathrm{p}_c^{(2)}(\hat{\boldsymbol{Q}},\Phi,\Theta)\right) e^{b_{k,2}}d\varphi_k^+ d\varphi_k d\vartheta_k^+ d\vartheta_k + n^{-3/2}\mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi,\boldsymbol{Q}),$$

де $\mathrm{p}_c^{(2)}(\hat{\boldsymbol{Q}},\Phi,\Theta)$ — поліном, причому $\mathrm{p}_c^{(2)}(0,\Phi,\Theta) = 0$. Аналогічно до (3.33), ми отримуємо

$$\mathrm{j}_k = \int \left(1 + n^{-1/2}b_{k,4}\right) e^{b_{k,2}}d\varphi_k^+ d\varphi_k d\vartheta_k^+ d\vartheta_k + n^{-1}\mathrm{p}_c(\hat{\boldsymbol{Q}}) + n^{-3/2}\mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi,\boldsymbol{Q}),$$

де $\mathrm{p}_c(\hat{\boldsymbol{Q}})$ задовольняє умову (i).

Розглянемо вираз (3.28) для $b_{k,4}$ більш детально. Кожний доданок у формулі (3.28), індекси якого одночасно не дорівнюють двійці, має різну кількість «неспряжених» (без риски) та «спряжених» (з рискою) грасманових змінних. Проте кожен член $b_{k,2}$ має однакову кількість «неспряжених» та «спряжених» грасманових змінних. Те ж саме можна сказати про розклад експоненти $e^{b_{k,2}}$ та про одночлени найвищого степеня від φ_k та ϑ_k. Отже, для $(p,s) \neq (2,2)$ з умовою $p+s=4$ маємо

$$\int \left(\operatorname{tr}\tilde{Y}_{k,p,s}Q_{p,s} + \operatorname{tr}Q^*_{p,s}Y_{k,p,s}\right) e^{b_{k,2}} d\boldsymbol{\varphi}^+_k d\boldsymbol{\varphi}_k d\boldsymbol{\vartheta}^+_k d\boldsymbol{\vartheta}_k = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} \mathrm{j}_k = &\int \left(1 - n^{-1/2}\left(\operatorname{tr}\tilde{Y}_{k,2,2}Q_2 + \operatorname{tr}Q^*_2 Y_{k,2,2}\right)\right) e^{b_{k,2}} d\boldsymbol{\varphi}^+_k d\boldsymbol{\varphi}_k d\boldsymbol{\vartheta}^+_k d\boldsymbol{\vartheta}_k \\ &+ n^{-1}\mathrm{p}_c(\hat{\boldsymbol{Q}}) + n^{-3/2}\mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi, \boldsymbol{Q}). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Згадуючи означення $y^{(k,p,s)}_{\alpha\beta}$ (3.24) та значення $\kappa_{p,s}$ (3.21), можна подати $b_{k,2}$ у вигляді

$$b_{k,2} = -\boldsymbol{\rho}^+_k A \boldsymbol{\rho}_k, \tag{3.35}$$

де A визначено в (3.6) та $\boldsymbol{\rho}_k$ визначено в (3.17). Застосовуючи (5.3) до (3.34) ми отримуємо (3.29). □

Підставимо (3.29) у (3.26). Тоді

$$\begin{aligned} \mathsf{f}_m = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{c_m} \int (h(\boldsymbol{Q}) + n^{-3/2}\mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi,\boldsymbol{Q}))^n \prod_{\substack{p+s \text{ непарне} \\ 0\le p,s\le m}} e^{-\operatorname{tr}\Xi^+_{p,s}\Xi_{p,s}} d\Xi^+_{p,s} d\Xi_{p,s} \\ \times \prod_{\substack{p+s \text{ парне} \\ 0\le p,s\le m}} e^{-n \operatorname{tr} Q^*_{p,s}Q_{p,s}} dQ^*_{p,s} dQ_{p,s}, \end{aligned}$$

де $h(\boldsymbol{Q})$ визначено в (3.5). Далі

$$(h(\boldsymbol{Q}) + n^{-3/2}\mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi,\boldsymbol{Q}))^n = \sum_{k=0}^{c_m} \binom{n}{k} n^{-3k/2} h(\boldsymbol{Q})^{n-k} (\mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi,\boldsymbol{Q}))^k.$$

Верхня межа підсумовування дорівнює c_m, тому що всього $2c_m$ антикомутуючих змінних, та кожний одночлен полінома $\mathrm{p}_a^{(2)}$ має хоча б другий степінь по Ξ. Отже,

$$\begin{aligned} \mathsf{f}_m = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{c_m} \int (h(\boldsymbol{Q})^{c_m} + n^{-1/2}\mathrm{p}_a^{(3)}(\Xi,\boldsymbol{Q})) \prod_{\substack{p+s \text{ непарне} \\ 0\le p,s\le m}} e^{-\operatorname{tr}\Xi^+_{p,s}\Xi_{p,s}} d\Xi^+_{p,s} d\Xi_{p,s} \\ \times e^{nf(\boldsymbol{Q}) - c_m \log h(\boldsymbol{Q})} d\boldsymbol{Q}, \end{aligned} \tag{3.36}$$

де $\mathrm{p}_a^{(3)}$ — поліном, а $f(\boldsymbol{Q})$ визначено в (3.4). Приймаючи до уваги (5.3) та означення інтеграла по антикомутуючим змінним, можна проінтегрувати (3.36) по Ξ і отримати (3.3).

3.2 Асимптотичний аналіз

Мета цього підрозділу полягає в досліженні асимптотичної поведінки інтегрального представлення (3.8). Для цього застосовується метод перевалу. Як і зазвичай, найскладніша частина цього методу — це вибрати стаціонарні точки функції $f(\boldsymbol{Q})$ та провести через ці точки N-вимірний (дійсний) многовид $M_* \subset \mathbb{C}^N$ так, що для будь-якої вибраної стаціонарної точки $\boldsymbol{Q}_* \in M_*$

$$\Re f(\boldsymbol{Q}) < \Re f(\boldsymbol{Q}_*), \quad \forall \boldsymbol{Q} \in M_*,\ \boldsymbol{Q} \text{ не вибрано.}$$

Зауважимо, що N дорівнює кількості дійсних змінних, по яким проводиться інтегрування, тобто в нашому випадку $N = 2^{2m}$.

Представлене доведення проводиться по трохи іншій, але теж доволі стандартній схемі для випадку, коли функція $f(\boldsymbol{Q})$ має вигляд

$$f(\boldsymbol{Q}) = f_0(\boldsymbol{Q}) + n^{-1/2} f_r(\boldsymbol{Q}),$$

де $f_0(\boldsymbol{Q})$ не залежить від n, у той час як $f_r(\boldsymbol{Q})$ може залежати від n. Ми вибираємо стаціонарні точки функції $f_0(\boldsymbol{Q})$ у вигляді $Q_1 = U\lambda_0 V^*$, $\hat{\boldsymbol{Q}} = 0$, де λ_0 — фіксоване дійсне число, а U та V пробігають $U(m)$. Після цього метод перевалу застосовується до інтеграла по Λ та $\hat{\boldsymbol{Q}}$. В цей час ми розглядаємо U й V як параметри, причому всі оцінки, що ми робимо, є рівномірними по U та V. Як тільки ми перейшли до інтегрування по малому околу стаціонарних точок, ми згадуємо, що U та V не параметри, а змінні інтегрування. Після декількох замін змінних ми остаточно обчислюємо інтеграл.

Розпочнемо з дослідження функції f_0.

Лема 3.8. *Нехай функцію* $f_0\colon \mathbb{R}^{2^{2m}} \to [-\infty, +\infty)$ *задано формулою* (3.9). *Тоді* $f_0(\Lambda, \hat{\boldsymbol{Q}})$ *досягає свого глобального максимуму тільки в точці*

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = \lambda_0, \quad \hat{\boldsymbol{Q}} = 0,$$

де $\lambda_0 = \sqrt{1-|z_0|^2}$. *Більше того, матриця других похідних по* Λ *та* $\hat{Q}$ *функції* f_0 *у цій точці від'ємно-означена.*

Доведення. З (3.9) та (3.10) очевидно, що функція $f_0(\Lambda, \hat{Q})$ має вигляд

$$f_0(\Lambda, \hat{Q}) = \sum_{j=1}^{m} f_*(\lambda_j) - \sum_{(p,s)\neq(1,1)} \operatorname{tr} Q_{p,s}^* Q_{p,s}, \tag{3.37}$$

де

$$f_*(\lambda) = -\lambda^2 + \log(|z_0|^2 + \lambda^2).$$

Спираючись на той факт, що $f_*'(\lambda) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $\lambda = \lambda_0$, а також що $\lim\limits_{\lambda\to\infty} f_*(\lambda) = -\infty$, ми можемо сказати, що $f_*(\lambda)$ досягає свого глобального максимуму тільки при $\lambda = \lambda_0$. Більше того, $f_*''(\lambda_0) = -4\lambda_0^2$. Звідси та з (3.37) негайно випливає, що матриця других похідних від'ємно-означена. □

Як і в попередньому підрозділі, ми спочатку розглянемо випадок нормального розподілу, а потім загальний випадок.

3.2.1 Випадок нормального розподілу

Перейдемо до оцінок інтегралів. У стандартний спосіб область інтегрування в (3.13) можна звузити наступним чином

$$\mathsf{f}_m = Cn^{m^2} \int\limits_{\Sigma_r} \triangle^2(\Lambda^2) \prod_{j=1}^{m} \lambda_j \times e^{nf(U\Lambda V^*)} d\mu(U) d\mu(V) d\Lambda + O(e^{-nr/2}),$$

де

$$\Sigma_r = \left\{(\Lambda, U, V) \mid \|\Lambda\| \leq r\right\}.$$

Наступний крок — звузити область інтегрування до

$$\Omega_n = \left\{(\Lambda, U, V) \mid \|\Lambda - \Lambda_0\| \leq \frac{\log n}{\sqrt{n}}\right\}, \tag{3.38}$$

де $\Lambda_0 = \lambda_0 I$, I — одинична матриця. Для цього нам потрібна оцінка на $\Re f$, яку подано в наступних лемах.

Лема 3.9. *Нехай $\tilde\Lambda$ — діагональна матриця розміром $m\times m$ така, що $\|\tilde\Lambda\|\le\log n$. Тоді рівномірно по U та V*

$$\begin{aligned} &f(U(\Lambda_0+n^{-1/2}\tilde\Lambda)V^*)\\ &\quad=-m\lambda_0^2+n^{-1/2}\operatorname{tr}(\bar z_0\mathscr{Z}+z_0\mathscr{Z}^*)+n^{-1}\operatorname{tr}\mathscr{Z}_U\mathscr{Z}_V^*\\ &\qquad-n^{-1}\operatorname{tr}(2\lambda_0\tilde\Lambda+\bar z_0\mathscr{Z}_U+z_0\mathscr{Z}_V^*)^2/2+O\big(n^{-3/2}\log^3 n\big), \end{aligned} \tag{3.39}$$

де

$$\mathscr{Z}_B=B^*\mathscr{Z}B. \tag{3.40}$$

Доведення. Якщо $Q_1=U(\Lambda_0+n^{-1/2}\tilde\Lambda)V^*$, то тоді A має вигляд

$$A=\begin{pmatrix}U&0\\0&V\end{pmatrix}\left(A_0+\frac{1}{\sqrt n}A_1\right)\begin{pmatrix}U^*&0\\0&V^*\end{pmatrix},$$

де

$$A_0=\begin{pmatrix}-z_0I&\Lambda_0\\-\Lambda_0&-\bar z_0I\end{pmatrix},\quad A_1=\begin{pmatrix}-\mathscr{Z}_U&\tilde\Lambda\\-\tilde\Lambda&-\mathscr{Z}_V^*\end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

Приймаючи до уваги, що

$$\det A_0=\left[\det\begin{pmatrix}-z_0&\lambda_0\\-\lambda_0&-\bar z_0\end{pmatrix}\right]^m=1,$$

ми отримуємо, що

$$\begin{aligned}\log\det A&=\log\det A_0^{-1}A=\operatorname{tr}\log(1+n^{-1/2}A_0^{-1}A_1)\\ &=\frac{1}{\sqrt n}\operatorname{tr}A_0^{-1}A_1-\frac{1}{2n}\operatorname{tr}(A_0^{-1}A_1)^2+O\left(\frac{\log^3 n}{\sqrt{n^3}}\right)\end{aligned} \tag{3.42}$$

рівномірно по U і V. Більше того,

$$A_0^{-1}A_1=\begin{pmatrix}\bar z_0\mathscr{Z}_U+\lambda_0\tilde\Lambda&-\bar z_0\tilde\Lambda+\lambda_0\mathscr{Z}_V^*\\-\lambda_0\mathscr{Z}_U+z_0\tilde\Lambda&\lambda_0\tilde\Lambda+z_0\mathscr{Z}_V^*\end{pmatrix}. \tag{3.43}$$

Поєднуючи (3.42), (3.43) і (3.14), ми маємо

$$\begin{aligned} &f(U(\Lambda_0+n^{-1/2}\tilde\Lambda)V^*)\\ &\quad=\operatorname{tr}\Big[-\Lambda_0^2-2n^{-1/2}\lambda_0\tilde\Lambda-n^{-1}\tilde\Lambda^2+n^{-1/2}(2\lambda_0\tilde\Lambda+\bar z_0\mathscr{Z}_U+z_0\mathscr{Z}_V^*)\\ &\qquad-n^{-1}\big\{(\lambda_0^2-|z_0|^2)\tilde\Lambda^2+2\bar z_0\lambda_0\mathscr{Z}_U\tilde\Lambda+2z_0\lambda_0\mathscr{Z}_V^*\tilde\Lambda\\ &\qquad+\frac12(\bar z_0\mathscr{Z}_U+z_0\mathscr{Z}_V^*)^2-\mathscr{Z}_U\mathscr{Z}_V^*\big\}\Big]+O\big(n^{-3/2}\log^3 n\big). \end{aligned}$$

З останнього розкладу випливає (3.39), що й треба було довести. □

Лема 3.10. *Нехай* $\tilde{f}(Q_1) = f(Q_1) - f(\Lambda_0)$. *Тоді для достатньо великих* n

$$\max_{\frac{\log n}{\sqrt{n}} \le \|\Lambda - \Lambda_0\| \le r} \Re \tilde{f}(U\Lambda V^*) \le -C\frac{\log^2 n}{n}$$

рівномірно по U *і* V.

Доведення. Спочатку ми перевіримо, що перша та друга похідні функції f_r обмежені в δ-околі точки Λ_0, де f_r визначено в (3.11), а δ не задлежить від n. Дійсно, h та h_0 — поліноми, а, крім того, h збігається рівномірно до h_0 на компактах при $n \to \infty$. Тому

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial \Re f_r}{\partial \lambda_j} \right| \le \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial f_r}{\partial \lambda_j} \right| = \left| \frac{\partial (f - f_0)}{\partial \lambda_j} \right| = \left| \frac{\partial (\log h - \log h_0)}{\partial \lambda_j} \right|$$
$$\le \left| \frac{1}{h_0} \cdot \frac{\partial h_0}{\partial \lambda_j} - \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial h}{\partial \lambda_j} \right| \le \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Для довільної діагональної матриці $E = \mathrm{diag}\{e_j\}$ позначимо за $v(E)$ вектор з компонентами e_j. Тоді для будь-якої діагональної матриці E одиничної норми та для $\frac{\log n}{\sqrt{n}} \le t \le \delta$ ми маємо

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \Re \tilde{f}(U(\Lambda_0 + tE)V^*) &= \langle \nabla_\Lambda f_0(U(\Lambda_0 + tE)V^*), v(E) \rangle \\ &\quad + n^{-1/2} \langle \nabla_\Lambda \Re f_r(U(\Lambda_0 + tE)V^*), v(E) \rangle \\ &= \langle \nabla_\Lambda f_0(\Lambda_0 + tE), v(E) \rangle + O(n^{-1/2}),\end{aligned}$$

Розкладаючи скалярний добуток по формулі Тейлора в точці $t = 0$ та зважаючи на те, що $\nabla_\Lambda f_0(\Lambda_0) = 0$, ми отримуємо

$$\frac{d}{dt} \Re \tilde{f}(U(\Lambda_0 + tE)V^*) = t \langle f_0''(\Lambda_0) v(E), v(E) \rangle + r_1 + O(n^{-1/2}),$$

де f_0'' — матриця других похідних функції f_0 по Λ та $|r_1| \le Ct^2$. $f_0''(\Lambda_0)$ від'ємно-означена згідно Леми 3.8. Отже, можна вибрати δ так, що похідна $\frac{d}{dt} \Re \tilde{f}(U(\Lambda_0 + tE)V^*)$ є від'ємною, і

$$\max_{\frac{\log n}{\sqrt{n}} \le \|\Lambda - \Lambda_0\| \le \delta} \Re \tilde{f}(U\Lambda V^*) = \max_{\|\Lambda - \Lambda_0\| = \frac{\log n}{\sqrt{n}}} \Re \tilde{f}(U\Lambda V^*)$$
$$\le f(U\Lambda_0 V^*) - C\frac{\log^2 n}{n} - f(\Lambda_0). \quad (3.44)$$

Зауважимо, що f_r обмежена зверху рівномірно по n. З цього та з Леми 3.8 випливає, що δ в (3.44) можна замінити на r

$$\max_{\frac{\log n}{\sqrt{n}}\le\|\Lambda-\Lambda_0\|\le r}\Re\tilde{f}(U\Lambda V^*)\le f(U\Lambda_0 V^*)-f(\Lambda_0)-C\frac{\log^2 n}{n}.$$

Залишається вивести з Леми 3.9, що $f(U\Lambda_0 V^*)-f(\Lambda_0)=O(n^{-1})$ рівномірно по U і V. $\square$

З Леми 3.10 випливає, що

$$\mathsf{f}_m=Cn^{m^2}e^{nf(\Lambda_0)}\left(\int\limits_{\Omega_n}\triangle^2(\Lambda^2)\prod_{j=1}^m\lambda_j\times e^{n\tilde{f}(U\Lambda V^*)}d\mu(U)d\mu(V)d\Lambda+O(e^{-C_1\log^2 n})\right),$$

де Ω_n визначено в (3.38). Роблячи заміну знінних $\Lambda=\Lambda_0+\frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{\Lambda}$ та розкладаючи функцію f по Лемі 3.9, ми отримуємо

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_m=C\mathsf{k}_n\int\limits_{\sqrt{n}\Omega_n}\triangle^2(\tilde{\Lambda})\exp\Big\{-\operatorname{tr}(2\lambda_0\tilde{\Lambda}+\bar{z}_0\mathscr{Z}_U+z_0\mathscr{Z}_V^*)^2/2+\operatorname{tr}\mathscr{Z}_U\mathscr{Z}_V^*\Big\}\\ \times d\mu(U)d\mu(V)d\tilde{\Lambda}(1+o(1)),\end{aligned}\tag{3.45}$$

де

$$\mathsf{k}_n=n^{m^2/2}e^{-mn\lambda_0^2+\sqrt{n}\operatorname{tr}(\bar{z}_0\mathscr{Z}+z_0\mathscr{Z}^*)}.\tag{3.46}$$

Тепер зробимо заміну $V=WU$. Приймаючи до уваги, що міра Хаара інварінтна відоносно зсувів, ми маємо

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_m&=C\mathsf{k}_n\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{U(m)}\int\limits_{U(m)}\exp\Big\{-\operatorname{tr}(2\lambda_0\tilde{\Lambda}+U^*(\bar{z}_0\mathscr{Z}+z_0\mathscr{Z}_W^*)U)^2/2+\operatorname{tr}\mathscr{Z}W^*\mathscr{Z}^*W\Big\}\\ &\qquad\times\triangle^2(\tilde{\Lambda})d\mu(U)d\mu(W)d\tilde{\Lambda}(1+o(1))\\ &=C\mathsf{k}_n\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{U(m)}\int\limits_{U(m)}\exp\Big\{-\operatorname{tr}(2\lambda_0U\tilde{\Lambda}U^*+(\bar{z}_0\mathscr{Z}+z_0\mathscr{Z}_W^*))^2/2+\operatorname{tr}\mathscr{Z}W^*\mathscr{Z}^*W\Big\}\\ &\qquad\times\triangle^2(\tilde{\Lambda})d\mu(U)d\mu(W)d\tilde{\Lambda}(1+o(1)).\end{aligned}$$

Наступний крок — заміна змінних $H=U\tilde{\Lambda}U^*$. Якобіан цієї заміни дорівнює $\frac{\prod_{j=1}^m j!}{\pi^{m(m-1)/2}}\triangle^{-2}(\tilde{\Lambda})$ (див., наприклад, [97]). Отже,

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_m=C\mathsf{k}_n\int\limits_{\mathscr{H}_m}\int\limits_{U(m)}\exp\Big\{-\operatorname{tr}(2\lambda_0H+(\bar{z}_0\mathscr{Z}+z_0\mathscr{Z}_W^*))^2/2+\operatorname{tr}\mathscr{Z}W^*\mathscr{Z}^*W\Big\}\\ \times d\mu(W)dH(1+o(1)),\end{aligned}$$

де dH визначено в (2.8). Проінтегруємо по H по формулі Гауса

$$\mathsf{f}_m = C\mathsf{k}_n \int\limits_{U(m)} \exp\{\operatorname{tr} \mathscr{Z} W^* \mathscr{Z}^* W\} d\mu(W)(1+o(1)). \tag{3.47}$$

У випадку, якщо $\mathscr{Z} = 0$, (3.2) випливає безпосередньо з (3.47). Інакше, для обчислення інтеграла по унітарній групі ми скористуємось формулою Харіш-Чандра/Іциксона–Зубера, наведеної в Пропозиції 2.8. Ми отримуємо

$$\mathsf{f}_m = C\mathsf{k}_n \frac{\det\{e^{\zeta_j \overline{\zeta}_k}\}_{j,k=1}^m}{|\triangle(\mathscr{Z})|^2}(1+o(1)),$$

що разом з (3.12) доводить Теорему 3.1.

3.2.2 Загальний випадок

У загальному випадку доведення в цілому повторює доведення у випадку нормального розподілу з деякими уточненнями. У цьому пункті ми сконцентруємося на суттєвих відмінностях від випадку нормального розподілу й зробимо уточнення відповідних тверджень попереднього пункту. Покладемо

$$\left\|\hat{Q}\right\| = \sum_{\substack{p+s \text{ парне} \\ 0\le p,s\le m \\ (p,s)\neq(1,1)}} \left\|Q_{p,s}\right\|.$$

Узагальненням Леми 3.9 слугує

Лема 3.11. *Нехай* $\|\tilde{\Lambda}\| + \left\|\hat{\tilde{Q}}\right\| \le \log n$. *Тоді рівномірно по* U *i* V

$$\begin{aligned} &f(U(\Lambda_0 + n^{-1/2}\tilde{\Lambda})V^*, n^{-1/2}\hat{\tilde{Q}}) \\ &\quad = -m\lambda_0^2 + n^{-1/2}\operatorname{tr}(\bar{z}_0\mathscr{Z} + z_0\mathscr{Z}^*) + n^{-1}\operatorname{tr}\mathscr{Z}_U\mathscr{Z}_V^* \\ &\qquad - n^{-1}\operatorname{tr}(2\lambda_0\tilde{\Lambda} + \bar{z}_0\mathscr{Z}_U + z_0\mathscr{Z}_V^*)^2/2 + n^{-1}\lambda_0^2\sqrt{\kappa_{2,2}}\operatorname{tr}(\wedge^2[VU^*])\tilde{Q}_2 \\ &\qquad + n^{-1}\lambda_0^2\sqrt{\kappa_{2,2}}\operatorname{tr}\tilde{Q}_2^*(\wedge^2[UV^*]) - n^{-1}\sum_{\substack{p+s \text{ парне} \\ 0\le p,s\le m \\ (p,s)\neq(1,1)}} \operatorname{tr}\tilde{Q}_{p,s}^*\tilde{Q}_{p,s} \\ &\qquad + O\big(n^{-3/2}\log^3 n\big), \end{aligned} \tag{3.48}$$

де $\mathscr{Z}_B$ *визначено в* (3.40), *а* $\wedge^2 B$ *— друга зовнішня степінь лінійного оператора* B *(див. Означення 5.4).*

Доведення. На відміну від випадку нормального розподілу, функція f має додаткові члени виду $\operatorname{tr} Q^*_{p,s} Q_{p,s}$ і додатковий член $n^{-1/2}\tilde{h}(Q_2) + n^{-1}\mathrm{p}_c(\hat{\boldsymbol{Q}})$ під логарифмом (див. (3.4) та (3.14)), де $\tilde{h}$ та p_c визначені у формулюванні Леми 3.7. Внесок членів $\operatorname{tr} Q^*_{p,s} Q_{p,s}$ у розклад (3.48) очевидний. Далі, $n^{-1}\mathrm{p}_c(n^{-1/2}\hat{\hat{\boldsymbol{Q}}}) = O\big(n^{-3/2}\log^3 n\big)$, тому що p_c — поліном з нульовим вільним членом. Отже, залишається визначити внесок члена $n^{-1/2}\tilde{h}(Q_2)$.

Для того, щоб спостити позначення, ми опустимо індекс k у формулі (3.30). Тобто тепер $\boldsymbol{\varphi}$ та $\boldsymbol{\vartheta}$ позначають вектори

$$\begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \vdots \\ \phi_{km} \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{pmatrix} \theta_{k1} \\ \vdots \\ \theta_{km} \end{pmatrix}$$

відповідно. Тоді (3.30) перепишеться наступним чином

$$\tilde{h}(Q_2) = -\int \left(\operatorname{tr} \tilde{Y}_{2,2} Q_2 + \operatorname{tr} Q_2^* Y_{2,2}\right) e^{b_2} d\boldsymbol{\varphi}^+ d\boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{\vartheta}^+ d\boldsymbol{\vartheta},$$

де $\tilde{Y}_{2,2}$ та $Y_{2,2}$ визначені в (3.24), а b_2 має вигляд (3.35). Звідси

$$\begin{aligned} n^{-1/2}\tilde{h}(n^{-1/2}\tilde{Q}_2) = n^{-1}\tilde{h}(\tilde{Q}_2) = -\frac{\sqrt{\kappa_{2,2}}}{n} \int d\boldsymbol{\varphi}^+ d\boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{\vartheta}^+ d\boldsymbol{\vartheta}\, e^{-\boldsymbol{\rho}^+ A \boldsymbol{\rho}} \\ \times \sum_{\alpha,\beta \in \mathscr{I}_{m,2}} \left(\theta_{k\beta_1}\theta_{k\beta_2}\overline{\phi_{k\alpha_1}\phi_{k\alpha_2}}\tilde{q}^{(2)}_{\alpha\beta} + \bar{\tilde{q}}^{(2)}_{\alpha\beta}\phi_{k\alpha_1}\phi_{k\alpha_2}\overline{\theta_{k\beta_1}\theta_{k\beta_2}}\right), \end{aligned} \tag{3.49}$$

де $\boldsymbol{\rho}$ визначено в (3.17). Зробимо заміну змінних $\tilde{\boldsymbol{\phi}} = U^*\boldsymbol{\varphi}$, $\tilde{\boldsymbol{\phi}}^+ = \boldsymbol{\varphi}^+ U$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = V^*\boldsymbol{\vartheta}$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^+ = \boldsymbol{\vartheta}^+ V$. Ми маємо

$$\begin{aligned} \theta_{k\beta_1}\theta_{k\beta_2}\overline{\phi_{k\alpha_1}\phi_{k\alpha_2}} &= (V\tilde{\boldsymbol{\theta}})_{\beta_1}(V\tilde{\boldsymbol{\theta}})_{\beta_2}(\tilde{\boldsymbol{\phi}}^+U^*)_{\alpha_1}(\tilde{\boldsymbol{\phi}}^+U^*)_{\alpha_2} \\ &= \sum_{\gamma_1,\gamma_2=1}^{m}\sum_{\delta_1,\delta_2=1}^{m} v_{\beta_1\gamma_1}\tilde{\theta}_{k\gamma_1}v_{\beta_2\gamma_2}\tilde{\theta}_{k\gamma_2}\overline{\tilde{\phi}_{k\delta_1}}\bar{u}_{\alpha_1\delta_1}\overline{\tilde{\phi}_{k\delta_2}}\bar{u}_{\alpha_2\delta_2} \\ &= \sum_{\gamma,\delta\in\mathscr{I}_{m,2}} (v_{\beta_1\gamma_1}v_{\beta_2\gamma_2} - v_{\beta_1\gamma_2}v_{\beta_2\gamma_1})\tilde{\theta}_{k\gamma_1}\tilde{\theta}_{k\gamma_2}\overline{\tilde{\phi}_{k\delta_1}\tilde{\phi}_{k\delta_2}} \\ &\qquad\qquad \times (\bar{u}_{\alpha_1\delta_1}\bar{u}_{\alpha_2\delta_2} - \bar{u}_{\alpha_1\delta_2}\bar{u}_{\alpha_2\delta_1}) \\ &= \sum_{\gamma,\delta\in\mathscr{I}_{m,2}} (\wedge^2 V)_{\beta\gamma}\tilde{\theta}_{k\gamma_1}\tilde{\theta}_{k\gamma_2}\overline{\tilde{\phi}_{k\delta_1}\tilde{\phi}_{k\delta_2}}(\wedge^2 U^*)_{\delta\alpha}, \end{aligned} \tag{3.50}$$

де $u_{jk} = (U)_{jk}$, $v_{jk} = (V)_{jk}$. Аналогічно

$$\phi_{k\alpha_1}\phi_{k\alpha_2}\overline{\theta_{k\beta_1}\theta_{k\beta_2}} = \sum_{\gamma,\delta\in\mathscr{I}_{m,2}} (\wedge^2 U)_{\alpha\gamma}\tilde{\phi}_{k\gamma_1}\tilde{\phi}_{k\gamma_2}\overline{\tilde{\theta}_{k\delta_1}\tilde{\theta}_{k\delta_2}}(\wedge^2 V^*)_{\delta\beta}. \tag{3.51}$$

Крім того,
$$\boldsymbol{\rho}^{+}A\boldsymbol{\rho}=\tilde{\boldsymbol{\rho}}^{+}\tilde{A}\tilde{\boldsymbol{\rho}}=\tilde{\boldsymbol{\rho}}^{+}A_0\tilde{\boldsymbol{\rho}}+O(n^{-1/2}\log n), \tag{3.52}$$
де A_0 визначено в (3.41) і
$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}=\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{\phi}}\\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}\end{pmatrix},\qquad \tilde{A}=\begin{pmatrix}U^* & 0\\ 0 & V^*\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}U & 0\\ 0 & V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-U^*ZU & \Lambda\\ -\Lambda & -V^*Z^*V\end{pmatrix}.$$
«Діфференціали» змінюються наступним чином
$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\varphi}&=\det{}^{-1}U d\tilde{\boldsymbol{\phi}},\\ d\boldsymbol{\varphi}^{+}&=\det{}^{-1}U^* d\tilde{\boldsymbol{\phi}}^{+},\end{aligned} \tag{3.53}$$
і аналогічно для $d\boldsymbol{\vartheta}$. Врешті, підставимо (3.50)–(3.53) до (3.49). Маємо
$$\begin{aligned} n^{-1}\tilde{h}(\tilde{Q}_2)=-\frac{\sqrt{\kappa_{2,2}}}{n}\sum_{\gamma,\delta\in\mathscr{I}_{m,2}}\int\Big(&\tilde{\theta}_{k\gamma_1}\tilde{\theta}_{k\gamma_2}\overline{\tilde{\phi}_{k\delta_1}\tilde{\phi}_{k\delta_2}}\Big((\wedge^2U^*)\tilde{Q}_2(\wedge^2V)\Big)_{\delta\gamma}\\ &+\Big((\wedge^2V^*)\tilde{Q}_2^*(\wedge^2U)\Big)_{\delta\gamma}\tilde{\phi}_{k\gamma_1}\tilde{\phi}_{k\gamma_2}\overline{\tilde{\theta}_{k\delta_1}\tilde{\theta}_{k\delta_2}}\Big)\\ &\times e^{-\tilde{\rho}^{+}A_0\tilde{\rho}}d\tilde{\boldsymbol{\phi}}^{+}d\tilde{\boldsymbol{\phi}}d\overline{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}d\tilde{\boldsymbol{\theta}}+O\big(n^{-3/2}\log^3 n\big)\end{aligned} \tag{3.54}$$
рівномірно по U та V. Зважаючи на структуру матриці A_0, ми можемо проінтегрувати по $\tilde{\phi}_{kj}$, $\tilde{\theta}_{kj}$ для кожного j окремо. Зауважимо, що
$$\int \upsilon\exp\big\{-\boldsymbol{\nu}^{+}A'\boldsymbol{\nu}\big\}d\overline{\tilde{\phi}_{kj}}d\tilde{\phi}_{kj}d\overline{\tilde{\theta}_{kj}}d\tilde{\theta}_{kj}=0,$$
де υ позначає одну зі змінних $\overline{\tilde{\phi}_{kj}}$, $\tilde{\phi}_{kj}$, $\overline{\tilde{\theta}_{kj}}$ або $\tilde{\theta}_{kj}$ і
$$\boldsymbol{\nu}=\begin{pmatrix}\tilde{\phi}_{kj}\\ \tilde{\theta}_{kj}\end{pmatrix},\quad A'=\begin{pmatrix}-z_0 & \lambda_0\\ -\lambda_0 & -\bar{z}_0\end{pmatrix}.$$
Отже, у формулі (3.54) члени, для яких $\gamma\neq\delta$, насправді дорівнюють нулю. Далі, розкладаючи експоненту в ряд, можна побачити, що
$$\int\tilde{\theta}_{kj}\overline{\tilde{\phi}_{kj}}e^{-\boldsymbol{\nu}^{+}A'\boldsymbol{\nu}}d\overline{\tilde{\phi}_{kj}}d\tilde{\phi}_{kj}d\overline{\tilde{\theta}_{kj}}d\tilde{\theta}_{kj}=-\int\tilde{\phi}_{kj}\overline{\tilde{\theta}_{kj}}e^{-\boldsymbol{\nu}^{+}A'\boldsymbol{\nu}}d\overline{\tilde{\phi}_{kj}}d\tilde{\phi}_{kj}d\overline{\tilde{\theta}_{kj}}d\tilde{\theta}_{kj}=\lambda_0.$$
Звідси випливає, що
$$\begin{aligned} n^{-1}\tilde{h}(\tilde{Q}_2)&=n^{-1}\lambda_0^2\sqrt{\kappa_{2,2}}(\mathrm{tr}(\wedge^2U^*)\tilde{Q}_2(\wedge^2V)+\mathrm{tr}(\wedge^2V^*)\tilde{Q}_2^*(\wedge^2U))+o(n^{-1})\\ &=n^{-1}\lambda_0^2\sqrt{\kappa_{2,2}}(\mathrm{tr}(\wedge^2[VU^*])\tilde{Q}_2+\mathrm{tr}\,\tilde{Q}_2^*(\wedge^2[UV^*]))+O\big(n^{-3/2}\log^3 n\big).\end{aligned}$$
Враховуючи останнє співвідношення та результат Леми 3.9, ми отримуємо (3.48). □

Аналогом Леми 3.10 є

Лема 3.12. *Нехай* $\tilde f(Q) = f(Q) - f(\Lambda_0, 0)$. *Тоді для достатньо великих* n

$$\max_{\frac{\log n}{\sqrt{n}} \le \|\Lambda - \Lambda_0\| + \|\hat Q\| \le r} \Re \tilde f(U\Lambda V^*, \hat Q) \le -C\frac{\log^2 n}{n}$$

рівномірно по U *та* V.

Доведення потребує лише косметичних змін через те, що з'являються додаткові змінні $\hat Q$. Повторюючи кроки доведення для випадку нормального розподілу, замість (3.45) ми отримуємо

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_m = C\mathsf{k}_n \int\limits_{\sqrt{n}\Omega_n} & \triangle^2(\tilde\Lambda) \exp\Big\{ -\operatorname{tr}(2\lambda_0\tilde\Lambda + \bar z_0 \mathscr{Z}_U + z_0 \mathscr{Z}_V^*)^2/2 + \operatorname{tr} \mathscr{Z}_U \mathscr{Z}_V^* \\ & + \lambda_0^2 \sqrt{\kappa_{2,2}} \operatorname{tr}(\wedge^2 V U^*)\tilde Q_2 + \lambda_0^2 \sqrt{\kappa_{2,2}} \operatorname{tr} \tilde Q_2^* (\wedge^2 U V^*) \\ & - \sum_{\substack{p+s \text{ парне} \\ 0 \le p,s \le m \\ (p,s) \ne (1,1)}} \operatorname{tr} \tilde Q_{p,s}^* \tilde Q_{p,s} \Big\} d\mu(U) d\mu(V) d\tilde\Lambda d\hat Q (1 + o(1)),\end{aligned}$$

де k_n визначено в (3.46). Проінтегруємо по $\hat Q$, користуючись формулою Гауса

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_m = C\mathsf{k}_n \exp\Big\{ \frac{m^2 - m}{2} \lambda_0^4 \kappa_{2,2} \Big\} \int \int\limits_{U(m)} & \triangle^2(\tilde\Lambda) d\mu(U) d\mu(V) d\tilde\Lambda (1 + o(1)) \\ \times \exp\Big\{ -\operatorname{tr}(2\lambda_0\tilde\Lambda + \bar z_0 \mathscr{Z}_U + z_0 \mathscr{Z}_V^*)^2/2 + \operatorname{tr} \mathscr{Z}_U \mathscr{Z}_V^* \Big\}&.\end{aligned} \tag{3.55}$$

Порівнюючи (3.55) з (3.45), ми бачимо, що далі доведення не матимете відмінностей, крім множника $\exp\Big\{\frac{m^2 - m}{2}\lambda_0^4 \kappa_{2,2}\Big\}$, який не залежить від вищих моментів.

3.3 Висновки до Розділу 3

У Розділі 3 ми дослідили кореляційні функції характеристичних поліномів комплексних неермітових випадкових матриць з незалежними елементами. Було обчислено асмптотичну поведінку кореляційних функцій характеристичних поліномів всередині спектра у випадку, коли спільний розподіл ймовірностей елементів матриць є довільним розподілом із нульовим математичним сподіванням та одичною дисперсією. Встановлено залежність вищезгаданої асимптотичної поведінки від четвертого кумулянта спільного розподілу елементів матриць, а також показано, що асимптотична поведінка не залежить від п'ятого та вищих моментів спільного розподілу елементів матриць. Крім того, показано, що у випадку нормального розподілу елементів отримана асмптотична поведінка кореляційних функцій характеристичних поліномів співпадає з результатами, отриманими раніше [11, 179]. Більше того, асимптотики кореляційних функцій характеристичних поліномів та спектральних кореляційних функцій схожим чином виражаються через одне й те саме ядро.

До основних результатів цього розділу належать:

- Теорема 3.1, в якій встановлено асимптотичну поведінку кореляційних функцій характеристичних поліномів комплексних неермітових випадкових матриць з незалежними елементами всередині спектра;

- Пропозиція 3.3, в якій отримано інтегральне представлення для m-тої кореляційної функції характеристичних поліномів комплексних неермітових випадкових матриць з незалежними елементами.

Нерозв'язаною задачею залишається обчислення асимптотичної поведінки кореляційних функцій характеристичних поліномів комплексних неермітових випадкових матриць з незалежними елементами на межі спектра.

Результати досліджень даного розділу наведено в публікації автора [5].

РОЗДІЛ 4

КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ПОЛІНОМІВ ДІЙСНИХ ВИПАДКОВИХ МАТРИЦЬ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Для того, щоб сформулювати основний результат цього розділу, ми введемо деякі позначення. Покладемо

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Означення 4.1. Для будь-якої матриці A парного розміру дуальною до неї називається матриця

$$A^R = -JA^T J, \tag{4.2}$$

де A^T — транспонована матриця.

Основним результатом цього розділу є

Теорема 4.2. *Нехай ансамбль дійсних випадкових матриць M_n задано формулами* (1.8) *та* (1.10)*. Нехай також перші $2m$ моментів спільного розподілу елементів матриць M_n є скінченними, і z_j, $j = 1,\dots,m$, мають вигляд* (1.14)*, причому z_0 дійсне та $|z_0| < 1$. Тоді*

(i) m-та кореляційна функція характеристичних поліномів (1.2) *задовольняє асимптотичне співвідношення*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^{-m^2+m} \frac{\mathsf{f}_m(\check{Z})}{\mathsf{f}_1(\bar{z}_1, z_1)\cdots \mathsf{f}_1(\bar{z}_m, z_m)} &= C_{m,z_0} e^{\frac{m^2-m}{2}\left(1-z_0^2\right)^2\kappa_4} \\ \times \int\limits_{V=V^R\in U(2m)} &\exp\left\{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\check{\mathscr{Z}} V \check{\mathscr{Z}}^R V^* - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\check{\mathscr{Z}}\check{\mathscr{Z}}^R\right\} d\mu_s(V),\end{aligned} \tag{4.3}$$

де C_{m,z_0} — деяка константа, яка не залежить ані від спільного розподілу елементів матриці, ані від $\zeta_1, \dots, \zeta_m$; $\kappa_4 = \mathbf{E}\{x_{11}^4\} - 3$, ймовірнісна міра $\mu_s(V)$ відповідає диференціальній формі

$$\det{}^{-m+1/2} V \bigwedge_{j,k\le m} dv_{jk} \bigwedge_{j<k\le m} dv_{j,k+m} \wedge dv_{k+m,j} \tag{4.4}$$

та

$$\check{\mathscr{Z}} = \mathrm{diag}\{\overline{\zeta}_1, \dots, \overline{\zeta}_m, \zeta_1, \dots, \zeta_m\}. \tag{4.5}$$

(ii) в окремому випадку $m = 2$ інтеграл по самодуальним унітарним матрицям можна обчислити, і ми маємо

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2} \frac{\mathsf{f}_2(\check{Z})}{\mathsf{f}_1(\overline{z}_1, z_1)\mathsf{f}_1(\overline{z}_2, z_2)} = C_{2,z_0} e^{\left(1-|z_0|^2\right)^2 \kappa_4} \frac{\mathrm{Pf}(K_{\mathbb{R}}(\zeta_j, \zeta_k))_{j,k=1}^2}{\triangle(\zeta_1, \zeta_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2)},$$

де

$$K_{\mathbb{R}}(\zeta_j, \zeta_k) = e^{-\frac{|\zeta_j|^2}{2} - \frac{|\zeta_k|^2}{2}} \begin{pmatrix} (\zeta_j - \zeta_k)e^{\zeta_j\zeta_k} & (\zeta_j - \overline{\zeta}_k)e^{\zeta_j\overline{\zeta}_k} \\ (\overline{\zeta}_j - \zeta_k)e^{\overline{\zeta}_j\zeta_k} & (\overline{\zeta}_j - \overline{\zeta}_k)e^{\overline{\zeta}_j\overline{\zeta}_k} \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.2 показує, що асимптотика f_2 та асимптотика другої спектральної кореляційної функції є дуже схожими (див. [27]). Крім того, природньо висунути гіпотезу про вид асимптотичної поведінки f_m для будь-якого m.

Гіпотеза. *У тих самих умовах, що й у Теоремі 4.2, ми очікуємо, що для будь-якого m*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-m^2+m} \frac{\mathsf{f}_m(\check{Z})}{\mathsf{f}_1(\overline{z}_1, z_1)\cdots\mathsf{f}_1(\overline{z}_m, z_m)} = C_{m,z_0} e^{\frac{m^2-m}{2}\left(1-z_0^2\right)^2 \kappa_4} \frac{\mathrm{Pf}(K_{\mathbb{R}}(\zeta_j, \zeta_k))_{j,k=1}^m}{\triangle(\zeta_1, \dots, \zeta_m, \overline{\zeta}_1, \dots, \overline{\zeta}_m)}.$$

4.1 Інтегральне представлення для f_m

У цьому підрозділі ми отримаємо зручне інтегральне представлення для кореляційної функції характеристичних поліномів f_m, яку визначено формулою (1.2).

Пропозиція 4.3. *Нехай ансамбль M_n задано формулами* (1.8) *та* (1.10). *Тоді m-ту кореляційну функцію характеристичних поліномів f_m, яку визначено формулою* (1.2), *можна подати в наступному вигляді*

$$\mathsf{f}_m = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{c_m} \int g(\boldsymbol{Q}) e^{(n-c_m)f(\boldsymbol{Q})} d\boldsymbol{Q}, \tag{4.6}$$

де $c_m = 2^{2m-1}$, $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{Q}_j)_{j=0}^m$, $\boldsymbol{Q}_j = \{Q_{p,s} \mid p+s = 2j, 0 \le p,s \le m\}$, $Q_{p,s}$ *— комплексна матриця розміром* $\binom{m}{p} \times \binom{m}{s}$, $d\boldsymbol{Q} = \prod\limits_{\substack{p+s \text{ парне} \\ 0 \le p,s \le m}} dQ^*_{p,s} dQ_{p,s}$ *та*

$$f(\boldsymbol{Q}) = -\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q} \rangle + \log h(\boldsymbol{Q}); \tag{4.7}$$

$$g(\boldsymbol{Q}) = (h(\boldsymbol{Q})^{c_m} + n^{-1/2}\mathrm{p}_a(\boldsymbol{Q})) \exp\{-c_m \langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q} \rangle\};$$

$$h(\boldsymbol{Q}) = \operatorname{Pf} F + n^{-1/2}\tilde{h}(\boldsymbol{Q}_2) + n^{-1}\mathrm{p}_c(\hat{\boldsymbol{Q}}); \tag{4.8}$$

$$F = \begin{pmatrix} B_{2,0} & 0 & -Z & Q_1 \\ 0 & B^*_{0,2} & -Q^*_1 & -Z^* \\ Z & \overline{Q}_1 & B^*_{2,0} & 0 \\ -Q_1^T & Z^* & 0 & B_{0,2} \end{pmatrix}; \tag{4.9}$$

$$(B_{2,0})_{\alpha_1\alpha_2} = -q^{(2,0)}_{\alpha\varnothing}, \quad (B_{0,2})_{\alpha_1\alpha_2} = -q^{(0,2)}_{\varnothing\alpha}, \quad \alpha \in \mathscr{I}_{m,2},$$

а також $\mathrm{p}_a(\boldsymbol{Q})$, $\mathrm{p}_c(\hat{\boldsymbol{Q}})$ *та* $\tilde{h}(\boldsymbol{Q}_2)$ *— деякі поліноми, точне означення яких буде наведено нижче під час доведення цієї пропозиції. Крім того,* $\hat{\boldsymbol{Q}}$ *містить усі набори матриць* $\boldsymbol{Q}_j$, *крім* $\boldsymbol{Q}_1$.

Зауваження 4.4. Розглянемо наступні перетворення

$$\begin{aligned} F = \begin{pmatrix} B_{2,0} & 0 & -Z & Q_1 \\ 0 & B^*_{0,2} & -Q^*_1 & -Z^* \\ Z & \overline{Q}_1 & B^*_{2,0} & 0 \\ -Q_1^T & Z^* & 0 & B_{0,2} \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} Z^* & 0 & B_{0,2} & -Q_1^T \\ 0 & -Z & Q_1 & B_{2,0} \\ B^*_{0,2} & -Q^*_1 & -Z^* & 0 \\ \overline{Q}_1 & B^*_{2,0} & 0 & Z \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} Z^* & 0 & B_{0,2} & -Q_1^T \\ 0 & Z & Q_1 & B_{2,0} \\ -B^*_{0,2} & -Q^*_1 & Z^* & 0 \\ \overline{Q}_1 & -B^*_{2,0} & 0 & Z \end{pmatrix} &=: \begin{pmatrix} \check{Z} & \check{Q} \\ -\check{Q}^* & \check{Z} \end{pmatrix} =: \check{F}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

де $\check{Q}$ та $\check{Z}$ — матриці розміром $2m \times 2m$. Відмітимо, що $\det \check{F} = \det F$, бо перше перетворення в (4.10) — це перестановка рядків та стовпців, а друге — це зміна знака. Більше того, $\frac{1}{2}\operatorname{tr}\check{Q}^*\check{Q} = \operatorname{tr} Q^*_{0,2}Q_{0,2} + \operatorname{tr} Q^*_{1,1}Q_{1,1} + \operatorname{tr} Q^*_{2,0}Q_{2,0}$. Отже, у формулюванні Пропозиції 4.3 можна замінити $\boldsymbol{Q}_1$ на $\check{Q}$ та $\operatorname{Pf} F$ на $\det^{1/2}\check{F}$.

Зауваження 4.5. З лінійної алгебри добре відомо, що будь-яку кососиметричну матрицю можна привести до блочно-діагонального вигляду за допомогою унітарної матриці. У нашому випадку $\check{Q}$ є кососиметричною матрицею, тому $\check{Q} = U\check{\Lambda}U^T$, де

$$\check{\Lambda} = \operatorname{diag}\left\{\lambda_j J_1\right\}_{j=1}^m, \ \lambda_j \geq 0; \quad U \in U(2m).$$

Можна вважати, що $\check{\Lambda}$ має наступний вигляд

$$\check{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ -\Lambda & 0 \end{pmatrix}, \ \Lambda = \operatorname{diag}\left\{\lambda_j\right\}_{j=1}^m.$$

Дійсно, цього можна досягти просто переставляючи рядки та стовпці матриці $\check{\Lambda}$ і змінюючи матрицю U відповідним чином. Для того, щоб встановити асимптотичну поведінку, ми зробимо заміну змінних $\check{Q} = U\check{\Lambda}U^T$ у формулі (4.6). Її якобіан дорівнює $\frac{2^m\pi^{m^2}}{m!\left(\prod_{j=1}^{m-1} j!\right)^2}\triangle^4(\Lambda^2)\prod\limits_{j=1}^m \lambda_j$. Ми отримуємо

$$\begin{aligned} \mathsf{f}_m = Cn^{c_m}\int\limits_{\mathscr{D}} \triangle^4(\Lambda^2)\prod_{j=1}^m \lambda_j \times \left[g_0(\check{\Lambda},\hat{\boldsymbol{Q}}) + \frac{1}{\sqrt{n}}g_r(U\check{\Lambda}U^T,\hat{\boldsymbol{Q}})\right] \\ \times \exp\left\{(n-c_m)\left[f_0(\check{\Lambda},\hat{\boldsymbol{Q}}) + \frac{1}{\sqrt{n}}f_r(U\check{\Lambda}U^T,\hat{\boldsymbol{Q}})\right]\right\} d\mu(U)d\Lambda d\hat{\boldsymbol{Q}}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

де $\mathscr{D} = \{(\Lambda, U, \hat{\boldsymbol{Q}}) \mid \lambda_j \geq 0, \, j = 1,\dots,m, \, U \in U(2m)\}$, $d\Lambda = \prod\limits_{j=1}^m d\lambda_j$ та

$$f_0(\boldsymbol{Q}) = -\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}\rangle + \log h_0(\check{Q}); \tag{4.12}$$

$$g_0(\boldsymbol{Q}) = h_0(\check{Q})^{c_m}\exp\{-c_m\langle \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}\rangle\} = e^{c_m f_0(\boldsymbol{Q})};$$

$$h_0(\check{Q}) = \det{}^{1/2}\begin{pmatrix} z_0 I_{2m} & \check{Q} \\ -\check{Q}^* & z_0 I_{2m}\end{pmatrix} = \prod_{j=1}^m (z_0^2 + \lambda_j^2); \tag{4.13}$$

$$f_r(\boldsymbol{Q}) = \sqrt{n}(f(\boldsymbol{Q}) - f_0(\boldsymbol{Q})); \tag{4.14}$$

$$g_r(\boldsymbol{Q}) = \sqrt{n}(g(\boldsymbol{Q}) - g_0(\boldsymbol{Q})).$$

Зауважимо, що $f_0(U\check{\Lambda}U^T,\hat{\boldsymbol{Q}}) = f_0(\check{\Lambda},\hat{\boldsymbol{Q}})$ та аналогічно для g_0.

Зауваження 4.6. При $m = 1$ аналогічно до комплексного випадку ми маємо

$$\mathsf{f}_1(\bar{z}, z) = \sqrt{2\pi n}\, e^{n(|z|^2-1)}(1+o(1)). \tag{4.15}$$

Зауваження 4.7. У випадку, якщо елементи матриці є дійсними нормальними випадковими величинами, обидва представлення (4.6) та (4.11) стають набагато простішими та мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathsf{f}_m &= \left(\frac{n}{\pi}\right)^{2m^2-m} \int e^{nf(\check{Q})} d\check{Q}^* d\check{Q} \\ &= Cn^{2m^2-m} \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \int\limits_{U(2m)} \triangle^4(\Lambda^2) \prod_{j=1}^m \lambda_j \times e^{nf(U\check{\Lambda}U^T)} d\mu(U) d\Lambda, \end{aligned} \tag{4.16}$$

де

$$f(\check{Q}) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\check{Q}^*\check{Q} + \frac{1}{2}\log\det\check{F}, \tag{4.17}$$

а $\check{Q}$ і $\check{F}$визначені в (4.10).

4.1.1 Доведення Пропозиції 4.3

Перетворимо вираз (1.2) для f_m, використовуючи формули (5.3) та (1.8)

$$\mathsf{f}_m = \mathbf{E}\left\{ \int \exp\left\{ -\sum_{j=1}^m \phi_j^+ \left(\frac{1}{\sqrt{n}}X - z_j\right)\phi_j - \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\theta}_j^+ \left(\frac{1}{\sqrt{n}}X - z_j\right)^* \boldsymbol{\theta}_j \right\} d\Phi d\Theta \right\},$$

де ϕ_j, $\boldsymbol{\theta}_j$, $j = 1, \ldots, m$ є n-вимірними векторами з компонентами ϕ_{kj} та θ_{kj} відповідно, $d\Phi = \prod\limits_{j=1}^m d\phi_j^+ d\phi_j$ та $d\Theta = \prod\limits_{j=1}^m d\boldsymbol{\theta}_j^+ d\boldsymbol{\theta}_j$. Члени в експоненті можна переписати наступним чином

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^m \phi_j^+ X\phi_j &= -\operatorname{tr}\Phi^+X\Phi = \operatorname{tr}\Phi\Phi^+X = \sum_{k,l=1}^n (\Phi\Phi^+)_{lk}x_{kl}, \\ -\sum_{j=1}^m \boldsymbol{\theta}_j^+ X^*\boldsymbol{\theta}_j &= -\operatorname{tr}\Theta^+X^*\Theta = \operatorname{tr}\Theta\Theta^+X^* = \sum_{k,l=1}^n (\Theta\Theta^+)_{kl}\bar{x}_{kl}, \\ \sum_{j=1}^m \phi_j^+ z_j\phi_j &= \sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^n \overline{\phi_{kj}} z_j\phi_{kj} = \sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^m \overline{\phi_{kj}} z_j\phi_{kj} = \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\varphi}_k^+ Z\boldsymbol{\varphi}_k, \\ \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\theta}_j^+ \bar{z}_j\boldsymbol{\theta}_j &= \sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^n \theta_{kj}^*\bar{z}_j\theta_{kj} = \sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^m \theta_{kj}^*\bar{z}_j\theta_{kj} = \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\vartheta}_k^+ Z^*\boldsymbol{\vartheta}_k, \end{aligned}$$

де за Θ та Φ позначено матриці, що складаються зі стовпців $\boldsymbol{\theta}_1, \ldots, \boldsymbol{\theta}_m$ та $\phi_1, \ldots, \phi_m$ відповідно, $\boldsymbol{\varphi}_k = (\Phi^T)_k$, $\boldsymbol{\vartheta}_k = (\Theta^T)_k$, Z визначено в (3.7). Отже

$$\begin{aligned} \mathsf{f}_m = \mathbf{E}\Bigg\{ \int \exp\Bigg\{ &\sum_{k=1}^n \boldsymbol{\varphi}_k^+ Z\boldsymbol{\varphi}_k + \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\vartheta}_k^+ Z^*\boldsymbol{\vartheta}_k \\ &+ \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k,l=1}^n (\Phi\Phi^+)_{lk}x_{kl} + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k,l=1}^n (\Theta\Theta^+)_{kl}\bar{x}_{kl} \Bigg\} d\Phi d\Theta \Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Математичне сподівання в (4.18) можна переписати в наступній формі

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}_m &= \int \prod_{k,l=1}^{n} \psi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(\Phi\Phi^+)_{lk}, \frac{1}{\sqrt{n}}(\Theta\Theta^+)_{kl}\right) \\
&\qquad \times \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^+ Z \varphi_k + \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k^+ Z^* \vartheta_k\right\} d\Phi d\Theta \\
&= \int \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^+ Z \varphi_k + \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k^+ Z^* \vartheta_k\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \sum_{k,l=1}^{n} \log \psi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(\Phi\Phi^+)_{lk}, \frac{1}{\sqrt{n}}(\Theta\Theta^+)_{kl}\right)\right\} d\Phi d\Theta.
\end{aligned}
$$

Розкладання $\log \psi$ у ряд дає нам

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}_m = \int \exp&\left\{\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^+ Z \varphi_k + \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k^+ Z^* \vartheta_k\right. \\
&\left. + \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{p,s=0}^{m} \frac{\kappa_{p,s}}{p!s!} \cdot \frac{1}{n^{(p+s)/2}} \left((\Phi\Phi^+)_{lk}\right)^p \left((\Theta\Theta^+)_{kl}\right)^s \right\} d\Phi d\Theta, \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

де $\kappa_{p,s}$ визначено в (3.20). Зокрема,

$$
\begin{aligned}
&\kappa_{0,0} = 0; \\
&\kappa_{1,0} = \overline{\kappa_{0,1}} = \mathbf{E}\{x_{11}\} = 0; \\
&\kappa_{2,0} = \overline{\kappa_{0,2}} = \mathbf{E}\{x_{11}^2\} - \mathbf{E}^2\{x_{11}\} = \mathbf{E}\{x_{11}^2\}; \\
&\kappa_{1,1} = \mathbf{E}\{|x_{11}|^2\} - |\mathbf{E}\{x_{11}\}|^2 = 1.
\end{aligned} \qquad (4.20)
$$

Знову перетворимо члени в експоненті

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k,l=1}^{n} \left((\Phi\Phi^+)_{lk}\right)^p \left((\Theta\Theta^+)_{kl}\right)^s \\
&\qquad = \sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \phi_{lj} \overline{\phi_{kj}}\right)^p \left(\sum_{j=1}^{m} \theta_{kj} \overline{\theta_{lj}}\right)^s \\
&\qquad = p!s! \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{\substack{\alpha \in \mathscr{I}_{m,p} \\ \beta \in \mathscr{I}_{m,s}}} \prod_{q=1}^{p} \phi_{l\alpha_q} \overline{\phi_{k\alpha_q}} \prod_{r=1}^{s} \theta_{k\beta_r} \overline{\theta_{l\beta_r}} \qquad (4.21) \\
&\qquad = (-1)^{p^2} p!s! \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{\substack{\alpha \in \mathscr{I}_{m,p} \\ \beta \in \mathscr{I}_{m,s}}} \prod_{r=s}^{1} \theta_{k\beta_r} \prod_{q=p}^{1} \overline{\phi_{k\alpha_q}} \prod_{q=1}^{p} \phi_{l\alpha_q} \prod_{r=1}^{s} \overline{\theta_{l\beta_r}}
\end{aligned}
$$

$$= p!s! \sum_{\substack{\alpha\in\mathscr{I}_{m,p}\\ \beta\in\mathscr{I}_{m,s}}} \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^p\prod_{r=s}^{1}\theta_{k\beta_r}\prod_{q=p}^{1}\overline{\phi_{k\alpha_q}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\prod_{q=1}^{p}\phi_{k\alpha_q}\prod_{r=1}^{s}\overline{\theta_{k\beta_r}}\right).$$

Тепер застосуємо перетворення Хабарда–Стратоновича. Як було зазначено вище, це перетворення є просто застосуванням формул (5.1) або (5.3) в зворотньому напрямі. Для парного $p+s$ маємо

$$\exp\left\{\kappa_{p,s}n^{-(p+s)/2}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^p\prod_{r=s}^{1}\theta_{k\beta_r}\prod_{q=p}^{1}\overline{\phi_{k\alpha_q}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\prod_{q=1}^{p}\phi_{k\alpha_q}\prod_{r=1}^{s}\overline{\theta_{k\beta_r}}\right)\right\}$$
$$= \frac{n}{\pi}\int\exp\left\{-n^{-\frac{p+s-2}{4}}\sum_{k=1}^{n}\tilde{y}_{\beta\alpha}^{(k,p,s)}q_{\alpha\beta}^{(p,s)}-n^{-\frac{p+s-2}{4}}\sum_{k=1}^{n}\overline{q}_{\alpha\beta}^{(p,s)}y_{\alpha\beta}^{(k,p,s)}\right.$$
$$\left.-n\left|q_{\alpha\beta}^{(p,s)}\right|^2\right\}d\overline{q}_{\alpha\beta}^{(p,s)}dq_{\alpha\beta}^{(p,s)}, \tag{4.22}$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{\beta\alpha}^{(k,p,s)} &= \sqrt{\kappa_{p,s}}(-1)^p\prod_{r=s}^{1}\theta_{k\beta_r}\prod_{q=p}^{1}\overline{\phi_{k\alpha_q}};\\ y_{\alpha\beta}^{(k,p,s)} &= \sqrt{\kappa_{p,s}}\prod_{q=1}^{p}\phi_{k\alpha_q}\prod_{r=1}^{s}\overline{\theta_{k\beta_r}}.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Тут та нижче ми вибираємо гілку квадратного кореня так, щоб його аргумент був у проміжку $[0,\pi)$. Аналогічно, для непарного $p+s$ ми маємо

$$\exp\left\{\kappa_{p,s}n^{-(p+s)/2}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^p\prod_{r=1}^{s}\theta_{k\beta_r}\prod_{q=1}^{p}\overline{\phi_{k\alpha_q}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\prod_{q=1}^{p}\phi_{k\alpha_q}\prod_{r=1}^{s}\overline{\theta_{k\beta_r}}\right)\right\}$$
$$= \int\exp\left\{-n^{-\frac{p+s}{4}}\sum_{k=1}^{n}\tilde{y}_{\beta\alpha}^{(k,p,s)}\xi_{\alpha\beta}^{(p,s)}-n^{-\frac{p+s}{4}}\sum_{k=1}^{n}\overline{\left(\xi_{\alpha\beta}^{(p,s)}\right)}y_{\alpha\beta}^{(k,p,s)}\right.$$
$$\left.-\overline{\left(\xi_{\alpha\beta}^{(p,s)}\right)}\xi_{\alpha\beta}^{(p,s)}\right\}d\overline{\left(\xi_{\alpha\beta}^{(p,s)}\right)}d\xi_{\alpha\beta}^{(p,s)}. \tag{4.24}$$

Тепер, підставляючи (4.21) до (4.19) та застосовуючи до результата (4.22) і (4.24), ми маємо

$$\mathsf{f}_m = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{c_m}\int\prod_{k=1}^{n}\mathsf{j}_k\prod_{\substack{p+s\text{ непарне}\\0\le p,s\le m}}e^{-\operatorname{tr}\Xi_{p,s}^{+}\Xi_{p,s}}d\Xi_{p,s}^{+}d\Xi_{p,s}$$
$$\times\prod_{\substack{p+s\text{ парне}\\0\le p,s\le m}}e^{-n\operatorname{tr}Q_{p,s}^{*}Q_{p,s}}dQ_{p,s}^{*}dQ_{p,s} \tag{4.25}$$

де

$$
\begin{aligned}
\mathrm{j}_k = \int \exp\Big\{ & b_{k,2} + n^{-1/2} b_{k,4} + n^{-3/4} \mathrm{p}_a^{(1)}(\Xi, \Phi, \Theta) \\
& + n^{-1} \mathrm{p}_c^{(1)}(\hat{\boldsymbol{Q}}, \Phi, \Theta) \Big\} d\boldsymbol{\varphi}_k^+ d\boldsymbol{\varphi}_k d\boldsymbol{\vartheta}_k^+ d\boldsymbol{\vartheta}_k,
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{k,2} &= -\sum_{p+s=2} \left(\operatorname{tr} \tilde{Y}_{k,p,s} Q_{p,s} + \operatorname{tr} Q_{p,s}^* Y_{k,p,s} \right) + \boldsymbol{\varphi}_k^+ Z \boldsymbol{\varphi}_k + \boldsymbol{\vartheta}_k^+ Z^* \boldsymbol{\vartheta}_k, \\
b_{k,4} &= -\sum_{p+s=4} \left(\operatorname{tr} \tilde{Y}_{k,p,s} Q_{p,s} + \operatorname{tr} Q_{p,s}^* Y_{k,p,s} \right), \qquad (4.27) \\
\mathrm{p}_a^{(1)}(\Xi, \Phi, \Theta) &= -\sum_{j=2}^{m} n^{-(j-2)/2} \sum_{p+s=2j-1} \left(\operatorname{tr} \tilde{Y}_{k,p,s} \Xi_{p,s} + \operatorname{tr} \Xi_{p,s}^+ Y_{k,p,s} \right), \\
\mathrm{p}_c^{(1)}(\hat{\boldsymbol{Q}}, \Phi, \Theta) &= -\sum_{j=3}^{m} n^{-(j-3)/2} \sum_{p+s=2j} \left(\operatorname{tr} \tilde{Y}_{k,p,s} Q_{p,s} + \operatorname{tr} Q_{p,s}^* Y_{k,p,s} \right).
\end{aligned}
$$

У вищенаведених формулах $\Xi_{p,s}$, $Q_{p,s}$, $\tilde{Y}_{k,p,s}$ та $Y_{k,p,s}$ позначають матриці з елементами $\xi_{\alpha\beta}^{(p,s)}$, $q_{\alpha\beta}^{(p,s)}$, $\tilde{y}_{\beta\alpha}^{(k,p,s)}$ та $y_{\alpha\beta}^{(k,p,s)}$ відповідно. Рядки та стовбці нумеруються елементами множини $\mathscr{I}_{m,p}$ (або $\mathscr{I}_{m,s}$) у лексикографічному порядку. Також звертаємо увагу на те, що поліноми $\mathrm{p}_a^{(1)}$ та $\mathrm{p}_c^{(1)}$ є однорідними поліномами першого степеня від елементів матриць множин Ξ та $\hat{\boldsymbol{Q}}$ відповідно, де $\hat{\boldsymbol{Q}}$ містить усі матриці $Q_{p,s}$, крім Q_1. Ще одна річ, яка нам знадобиться, полягає в тому, що всі одночлени полінома $\mathrm{p}_a^{(1)}$ мають непарний степінь по $\boldsymbol{\varphi}_k$ та $\boldsymbol{\vartheta}_k$, а всі одночлени полінома $\mathrm{p}_c^{(1)}$ мають парний степінь по $\boldsymbol{\varphi}_k$ та $\boldsymbol{\vartheta}_k$.

На щастя, інтеграл по Φ and Θ у формулі (4.25) факторизується. Тому можна проінтегрувати по $\boldsymbol{\varphi}_k$ та $\boldsymbol{\vartheta}_k$ для кожного k окремо. Відповідний результат наведено в Лемі 4.8.

Лема 4.8. *Нехай* j_k *визначено в* (4.26). *Тоді*

$$
\mathrm{j}_k = \operatorname{Pf} F + n^{-1/2} \tilde{h}(\boldsymbol{Q}_2) + n^{-1} \mathrm{p}_c(\hat{\boldsymbol{Q}}) + n^{-3/2} \mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi, \boldsymbol{Q}), \tag{4.28}
$$

де F *визначено в* (4.9),

$$
\tilde{h}(\boldsymbol{Q}_2) = \int b_{k,4} e^{b_{k,2}} d\boldsymbol{\varphi}_k^+ d\boldsymbol{\varphi}_k d\boldsymbol{\vartheta}_k^+ d\boldsymbol{\vartheta}_k, \tag{4.29}
$$

а $\mathrm{p}_c(\hat{\boldsymbol{Q}})$ *та* $\mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi, \boldsymbol{Q})$ *— такі поліноми, що*

(i) $\mathrm{p}_c(0) = 0$*;*

(ii) будь-який одночлен $\mathrm{p}_a^{(2)}$ *має хоча б другий степінь по* Ξ.

Доведення. Ми отримаємо розклад (4.28) інтеграла j_k поступово розкладаючи експоненту в ряд та користуючись означенням інтеграла по грасмановим змінним. Розпочнемо з наступного

$$\mathrm{j}_k = \int \left(1 + \sum_{1\le k\le 4m/3} n^{-3k/4}\left(\mathrm{p}_a^{(1)}(\Xi,\Phi,\Theta)\right)^k\right) e^{b_{k,2}+n^{-1/2}b_{k,4}+n^{-1}\mathrm{p}_c^{(1)}(\hat{\boldsymbol{Q}},\Phi,\Theta)} \times d\boldsymbol{\varphi}_k^+ d\boldsymbol{\varphi}_k d\boldsymbol{\vartheta}_k^+ d\boldsymbol{\vartheta}_k, \tag{4.30}$$

де члени, степінь яких по $\boldsymbol{\varphi}_k$ та $\boldsymbol{\vartheta}_k$ вище $4m$, перетворюються на нуль, тому що будь-яка змінна, що антикомутує, в квадраті дорівнює нулю. Одночлени непарного степеня по $\boldsymbol{\varphi}_k$ та $\boldsymbol{\vartheta}_k$ у сукупності також перетворюються на нуль після інтегрування. Дійсно, для будь-якого однородного полінома непарного степеня $\tilde{\mathrm{p}}$ розклад функції $\tilde{\mathrm{p}}\left(\boldsymbol{\varphi}_k,\boldsymbol{\vartheta}_k\right)e^{b_{k,2}+n^{-1/2}b_{k,4}+n^{-1}\mathrm{p}_c(\hat{\boldsymbol{Q}},\Phi,\Theta)}$ в ряд містить тільки члени непарного степеня. Оскільки ми маємо парну кількість грасманових змінних, то в розкладі не буде одночленів найвищого степеня, а отже інтеграл дорівнюватиме нулю. Такми чином, (4.30) спрощується до

$$\mathrm{j}_k = \int \left(1 + n^{-3/2}\mathrm{p}_a^{(3)}(\Xi,\Phi,\Theta)\right) e^{b_{k,2}+n^{-1/2}b_{k,4}+n^{-1}\mathrm{p}_c^{(1)}(\hat{\boldsymbol{Q}},\Phi,\Theta)} \times d\boldsymbol{\varphi}_k^+ d\boldsymbol{\varphi}_k d\boldsymbol{\vartheta}_k^+ d\boldsymbol{\vartheta}_k, \tag{4.31}$$

де $\mathrm{p}_a^{(3)}(\Xi,\Phi,\Theta)$ — поліном, кожний одночлен якого має щонайменше другий степінь по Ξ та щонайменше другий степінь по $\boldsymbol{\varphi}_k$ та $\boldsymbol{\vartheta}_k$. Зауважимо, що

$$\int \mathrm{p}_a^{(3)}(\Xi,\Phi,\Theta) e^{b_{k,2}+n^{-1/2}b_{k,4}+n^{-1}\mathrm{p}_c^{(1)}(\hat{\boldsymbol{Q}},\Phi,\Theta)} d\boldsymbol{\varphi}_k^+ d\boldsymbol{\varphi}_k d\boldsymbol{\vartheta}_k^+ d\boldsymbol{\vartheta}_k = \mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi,\boldsymbol{Q}), \tag{4.32}$$

де поліном $\mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi,\boldsymbol{Q})$ задовольняє умову (ii). Підставимо (4.32) до (4.31). Тоді

$$\mathrm{j}_k = \int e^{b_{k,2}+n^{-1/2}b_{k,4}+n^{-1}\mathrm{p}_c^{(1)}(\hat{\boldsymbol{Q}},\Phi,\Theta)} d\boldsymbol{\varphi}_k^+ d\boldsymbol{\varphi}_k d\boldsymbol{\vartheta}_k^+ d\boldsymbol{\vartheta}_k + n^{-3/2}\mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi,\boldsymbol{Q}).$$

Подальше розкладання експоненти дає нам

$$\mathrm{j}_k = \int \left(1 + n^{-1/2}b_{k,4} + n^{-1}\mathrm{p}_c^{(2)}(\hat{\boldsymbol{Q}},\Phi,\Theta)\right) e^{b_{k,2}} d\boldsymbol{\varphi}_k^+ d\boldsymbol{\varphi}_k d\boldsymbol{\vartheta}_k^+ d\boldsymbol{\vartheta}_k + n^{-3/2}\mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi,\boldsymbol{Q}),$$

де $\mathrm{p}_c^{(2)}(\hat{\boldsymbol{Q}},\Phi,\Theta)$ — поліном, причому $\mathrm{p}_c^{(2)}(0,\Phi,\Theta)=0$. Аналогічно до (4.32), ми отримуємо

$$\begin{aligned}\mathrm{j}_k = \int \left(1+n^{-1/2}b_{k,4}\right) e^{b_{k,2}} d\boldsymbol{\varphi}_k^+ d\boldsymbol{\varphi}_k d\boldsymbol{\vartheta}_k^+ d\boldsymbol{\vartheta}_k \\ + n^{-1}\mathrm{p}_c(\hat{\boldsymbol{Q}}) + n^{-3/2}\mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi,\boldsymbol{Q}),\end{aligned} \tag{4.33}$$

де $\mathrm{p}_c(\hat{\boldsymbol{Q}})$ задовольняє умову (i).

Згадуючи означення $y_{\alpha\beta}^{(k,p,s)}$ (4.23) та значення $\kappa_{p,s}$ (4.20), можна подати $b_{k,2}$ у вигляді

$$b_{k,2} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_k^T F \boldsymbol{\rho}_k, \tag{4.34}$$

де F визначено в (4.9) та

$$\boldsymbol{\rho}_k = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\varphi}_k^+)^T \\ (\boldsymbol{\vartheta}_k^+)^T \\ \boldsymbol{\varphi}_k \\ \boldsymbol{\vartheta}_k \end{pmatrix}. \tag{4.35}$$

Тоді твердження леми впливає з (4.33) і (5.4). $\square$

Підставимо (4.28) у (4.25). Тоді

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_m = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{c_m} \int (h(\boldsymbol{Q}) + n^{-3/2}\mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi,\boldsymbol{Q}))^n \prod_{\substack{p+s \text{ непарне} \\ 0\le p,s\le m}} e^{-\operatorname{tr}\Xi_{p,s}^+\Xi_{p,s}} d\Xi_{p,s}^+ d\Xi_{p,s} \\ \times \prod_{\substack{p+s \text{ парне} \\ 0\le p,s\le m}} e^{-n\operatorname{tr}Q_{p,s}^*Q_{p,s}} dQ_{p,s}^* dQ_{p,s},\end{aligned}$$

де $h(\boldsymbol{Q})$ визначено в (4.8). Далі

$$(h(\boldsymbol{Q}) + n^{-3/2}\mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi,\boldsymbol{Q}))^n = \sum_{k=0}^{c_m} \binom{n}{k} n^{-3k/2} h(\boldsymbol{Q})^{n-k} (\mathrm{p}_a^{(2)}(\Xi,\boldsymbol{Q}))^k.$$

Верхня межа підсумовування дорівнює c_m, тому що всього $2c_m$ антикомутуючих змінних, та кожний одночлен полінома $\mathrm{p}_a^{(2)}$ має хоча б другий степінь по Ξ. Отже,

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_m = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{c_m} \int (h(\boldsymbol{Q})^{c_m} + n^{-1/2}\mathrm{p}_a^{(3)}(\Xi,\boldsymbol{Q})) \prod_{\substack{p+s \text{ непарне} \\ 0\le p,s\le m}} e^{-\operatorname{tr}\Xi_{p,s}^+\Xi_{p,s}} d\Xi_{p,s}^+ d\Xi_{p,s} \\ \times e^{nf(\boldsymbol{Q}) - c_m \log h(\boldsymbol{Q})} d\boldsymbol{Q},\end{aligned} \tag{4.36}$$

де $\mathrm{p}_a^{(3)}$ — поліном, а $f(\boldsymbol{Q})$ визначено в (4.7). Приймаючи до уваги (5.3) та означення інтеграла по антикомутуючим змінним, можна проінтегрувати (4.36) по Ξ і отримати (4.6).

4.2 Асимптотичний аналіз

Мета цього підрозділу полягає в дослiженнi асимптотичної поведiнки iнтегрального представлення (4.11). Для цього застосовується метод перевалу. Як i зазвичай, найскладнiша частина цього методу — це вибрати стацiонарнi точки функцiї $f(\boldsymbol{Q})$ та провести через цi точки N-вимiрний (дiйсний) многовид $M_* \subset \mathbb{C}^N$ так, що для будь-якої вибраної стацiонарної точки $\boldsymbol{Q}_* \in M_*$

$$\Re f(\boldsymbol{Q}) < \Re f(\boldsymbol{Q}_*), \quad \forall \boldsymbol{Q} \in M_*, \boldsymbol{Q} \text{ не вибрано.}$$

Зауважимо, що N дорiвнює кiлькостi дiйсних змiнних, по яким проводиться iнтегрування, тобто в нашому випадку $N = 2^{2m}$.

Представлене доведення проводиться по трохи iншiй, але теж доволi стандартнiй схемi для випадку, коли функцiя $f(\boldsymbol{Q})$ має вигляд

$$f(\boldsymbol{Q}) = f_0(\boldsymbol{Q}) + n^{-1/2} f_r(\boldsymbol{Q}),$$

де $f_0(\boldsymbol{Q})$ не залежить вiд n, у той час як $f_r(\boldsymbol{Q})$ може залежати вiд n. Ми вибираємо стацiонарнi точки функцiї $f_0(\boldsymbol{Q})$ у виглядi $\check{Q} = U\check{\Lambda}_0 U^T$, $\hat{\boldsymbol{Q}} = 0$, де

$$\check{\Lambda}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_0 \\ -\Lambda_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_0 I_m \\ -\lambda_0 I_m & 0 \end{pmatrix},$$

λ_0 — фiксоване дiйсне число, а U пробiгає $U(2m)$. Пiсля цього метод перевалу застосовується до iнтеграла по Λ та $\hat{\boldsymbol{Q}}$. В цей час ми розглядаємо U як параметр, причому всi оцiнки, що ми робимо, є рiвномiрними по U. Як тiльки ми перейшли до iнтегрування по малому околу стацiонарних точок, ми згадуємо, що U не параметр, а змiнна iнтегрування. Пiсля декiлькох замiн змiнних iнтеграл приводиться до вигляду (4.3).

Розпочнемо з дослiдження функцiї f_0.

Лема 4.9. *Нехай функцiю* $f_0 \colon \mathbb{R}^{2^{2m}} \to [-\infty, +\infty)$ *задано формулою* (4.12). *Тодi* $f_0(\check{\Lambda}, \hat{\boldsymbol{Q}})$ *досягає свого глобального максимуму тiльки в точцi*

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = \lambda_0, \quad \hat{\boldsymbol{Q}} = 0,$$

де $\lambda_0 = \sqrt{1 - |z_0|^2}$. *Бiльше того, матриця других похiдних по* Λ *та* $\hat{\boldsymbol{Q}}$ *функцiї* f_0 *у цiй точцi вiд'ємно-означена.*

Доведення. З (4.12) та (4.13) очевидно, що функція $f_0(\check{\Lambda},\hat{\boldsymbol{Q}})$ має вигляд

$$f_0(\check{\Lambda},\hat{\boldsymbol{Q}}) = \sum_{j=1}^{m} f_*(\lambda_j) - \langle \boldsymbol{Q}_0,\boldsymbol{Q}_0\rangle - \sum_{j=2}^{m}\langle \boldsymbol{Q}_j,\boldsymbol{Q}_j\rangle, \tag{4.37}$$

де

$$f_*(\lambda) = -\lambda^2 + \log(|z_0|^2+\lambda^2).$$

Спираючись на той факт, що $f_*'(\lambda)=0$ тоді й тільки тоді, коли $\lambda=\lambda_0$, а також що $\lim\limits_{\lambda\to\infty} f_*(\lambda) = -\infty$, ми можемо сказати, що $f_*(\lambda)$ досягає свого глобального максимуму тільки при $\lambda=\lambda_0$. Більше того, $f_*''(\lambda_0) = -4\lambda_0^2$. Звідси та з (4.37) негайно випливає, що матриця других похідних від'ємно-означена. □

Як і в попередньому розділі, ми спочатку розглянемо випадок, коли матриці M_n належать ансамблю $\mathrm{Gin}(\mathbb{R})$, а потім загальний випадок.

4.2.1 Випадок нормального розподілу

Перейдемо до оцінок інтегралів. У стандартний спосіб область інтегрування в (4.16) можна звузити наступним чином

$$\mathsf{f}_m = Cn^{2m^2-m}\int\limits_{\Sigma_r} \triangle^4(\Lambda^2)\prod_{j=1}^{m}\lambda_j \times e^{nf(U\check{\Lambda}U^T)}d\mu(U)d\Lambda + O(e^{-nr/2}),$$

де

$$\Sigma_r = \left\{(\Lambda,U) \mid \|\Lambda\|\le r\right\}.$$

Наступний крок — звузити область інтегрування до

$$\Omega_n = \left\{(\Lambda,U) \mid \|\Lambda-\Lambda_0\| \le \frac{\log n}{\sqrt{n}}\right\}, \tag{4.38}$$

де $\Lambda_0=\lambda_0 I_m$. Для цього нам потрібна оцінка на $\Re f$, яку подано в наступних лемах.

Лема 4.10. *Нехай* $\tilde{\Lambda}$ *— діагональна матриця розміром* $m\times m$ *така, що* $\|\tilde{\Lambda}\|\le \log n$. *Тоді рівномірно по* U

$$\begin{aligned} f(U(\check{\Lambda}_0+n^{-1/2}\check{\tilde{\Lambda}})U^T) = -m\lambda_0^2 + n^{-1/2}z_0\operatorname{tr}\check{\mathscr{Z}} + n^{-1}\operatorname{tr}(\check{\mathscr{Z}}_U\check{\mathscr{Z}}_U^R)/2 \\ - n^{-1}\operatorname{tr}(2\lambda_0\mathscr{L}+z_0\check{\mathscr{Z}}_U+z_0\check{\mathscr{Z}}_U^R)^2/4 \\ + O\big(n^{-3/2}\log^3 n\big), \end{aligned} \tag{4.39}$$

де $\check{\mathscr{Z}}_W = W^*\check{\mathscr{Z}}W$, $\mathscr{L}=\operatorname{diag}\{\tilde{\Lambda},\tilde{\Lambda}\}$.

Доведення. Якщо $\check{Q} = U(\check{\Lambda}_0 + n^{-1/2}\check{\tilde{\Lambda}})U^T$, то тоді $\check{F}$ має вигляд

$$\check{F} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \overline{U} \end{pmatrix} \left(\check{F}_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} \check{F}_1 \right) \begin{pmatrix} U^* & 0 \\ 0 & U^T \end{pmatrix},$$

де

$$\check{F}_0 = \begin{pmatrix} z_0 I_{2m} & \check{\Lambda}_0 \\ \check{\Lambda}_0 & z_0 I_{2m} \end{pmatrix}, \quad \check{F}_1 = \begin{pmatrix} \check{\mathscr{Z}}_U & \check{\tilde{\Lambda}} \\ \check{\tilde{\Lambda}} & \check{\mathscr{Z}}_U^T \end{pmatrix}. \tag{4.40}$$

Приймаючи до уваги, що

$$\det \check{F}_0 = \left[\det \begin{pmatrix} z_0 & \lambda_0 \\ -\lambda_0 & z_0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} z_0 & -\lambda_0 \\ \lambda_0 & z_0 \end{pmatrix} \right]^m = 1,$$

ми отримуємо, що

$$\begin{aligned} \log\det \check{F} &= \operatorname{tr} \log(1 + n^{-1/2} \check{F}_0^{-1} \check{F}_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{tr} \check{F}_0^{-1} \check{F}_1 - \frac{1}{2n} \operatorname{tr} (\check{F}_0^{-1} \check{F}_1)^2 + O\left(\frac{\log^3 n}{\sqrt{n^3}} \right) \end{aligned} \tag{4.41}$$

рівномірно по U. Більше того,

$$\check{F}_0^{-1} \check{F}_1 = \begin{pmatrix} z_0 \check{\mathscr{Z}}_U + \lambda_0 \mathscr{L} & z_0 \check{\tilde{\Lambda}} - \check{\Lambda}_0 \check{\mathscr{Z}}_U^T \\ -\check{\Lambda}_0 \check{\mathscr{Z}}_U + z_0 \check{\tilde{\Lambda}} & \lambda_0 \mathscr{L} + z_0 \check{\mathscr{Z}}_U^T \end{pmatrix}. \tag{4.42}$$

Поєднуючи (4.41), (4.42), (4.17) і те, що $\check{\Lambda}_0 \check{\tilde{\Lambda}} = \check{\tilde{\Lambda}} \check{\Lambda}_0 = -\lambda_0 \mathscr{L}$, ми маємо

$$\begin{aligned} & f(U(\check{\Lambda}_0 + n^{-1/2}\check{\tilde{\Lambda}})U^T) \\ &\quad = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \Big[\check{\Lambda}_0^2 - 2n^{-1/2} \lambda_0 \mathscr{L} - n^{-1} \mathscr{L}^2 + n^{-1/2} (2\lambda_0 \mathscr{L} + z_0 \check{\mathscr{Z}}_U + z_0 \check{\mathscr{Z}}_U^T) \\ &\qquad - n^{-1} \big\{ (\lambda_0^2 - z_0^2) \mathscr{L}^2 + 2 z_0 \lambda_0 \check{\mathscr{Z}}_U \mathscr{L} + 2 z_0 \lambda_0 \check{\mathscr{Z}}_U^T \mathscr{L} \\ &\qquad + \frac{1}{2} z_0^2 \big(\check{\mathscr{Z}}_U^2 + \big(\check{\mathscr{Z}}_U^T \big)^2 \big) + \check{\Lambda}_0 \check{\mathscr{Z}}_U \check{\Lambda}_0 \check{\mathscr{Z}}_U^T \big\} \Big] + O\big(n^{-3/2} \log^3 n \big). \end{aligned} \tag{4.43}$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \check{\mathscr{Z}}_U^T &= \operatorname{tr} \check{\mathscr{Z}}_U = \operatorname{tr} \check{\mathscr{Z}}, \\ \operatorname{tr} \check{\mathscr{Z}}_U^T \mathscr{L} &= \operatorname{tr} \left(\left(\check{\mathscr{Z}}_U^T \mathscr{L} \right)^T \right)^R = \operatorname{tr} \check{\mathscr{Z}}_U^R \mathscr{L}, \\ \operatorname{tr} \big(\check{\mathscr{Z}}_U^T \big)^2 &= \operatorname{tr} \big(\check{\mathscr{Z}}_U^R \big)^2, \\ \operatorname{tr} \check{\Lambda}_0 \check{\mathscr{Z}}_U \check{\Lambda}_0 \check{\mathscr{Z}}_U^T &= \lambda_0^2 \operatorname{tr} \check{\mathscr{Z}}_U J \check{\mathscr{Z}}_U^T J = -\lambda_0^2 \operatorname{tr} \check{\mathscr{Z}}_U \check{\mathscr{Z}}_U^R. \end{aligned}$$

Таким чином, з (4.43) випливає (4.39), що й треба було довести. □

Лема 4.11. *Нехай $\tilde{f}(\check{Q}) = f(\check{Q}) - f(\check{\Lambda}_0)$. Тоді для достатньо великих n*

$$\max_{\frac{\log n}{\sqrt{n}} \le \|\Lambda - \Lambda_0\| \le r} \Re \tilde{f}(U\check{\Lambda}U^T) \le -C\frac{\log^2 n}{n}$$

рівномірно по U.

Доведення. Спочатку ми перевіримо, що перша та друга похідні функції f_r обмежені в δ-околі точки Λ_0, де f_r визначено в (4.14), а δ не задлежить від n. Дійсно, h та h_0 — поліноми, а, крім того, h збігається рівномірно до h_0 на компактах при $n \to \infty$. Тому

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial \Re f_r}{\partial \lambda_j}\right| \le \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial f_r}{\partial \lambda_j}\right| = \left|\frac{\partial (f - f_0)}{\partial \lambda_j}\right| = \left|\frac{\partial (\log h - \log h_0)}{\partial \lambda_j}\right| \\ \le \left|\frac{1}{h_0}\cdot\frac{\partial h_0}{\partial \lambda_j} - \frac{1}{h}\cdot\frac{\partial h}{\partial \lambda_j}\right| \le \frac{C}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Для довільної діагональної матриці $E = \mathrm{diag}\{e_j\}$ одиничної норми та для $\frac{\log n}{\sqrt{n}} \le t \le \delta$ ми маємо

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Re \tilde{f}(U(\check{\Lambda}_0 + t\check{E})U^T) &= \langle \nabla_\Lambda f_0(U(\check{\Lambda}_0 + t\check{E})U^T), v(E)\rangle \\ &\quad + n^{-1/2}\langle \nabla_\Lambda \Re f_r(U(\check{\Lambda}_0 + t\check{E})U^T), v(E)\rangle \\ &= \langle \nabla_\Lambda f_0(\check{\Lambda}_0 + t\check{E}), v(E)\rangle + O(n^{-1/2}),\end{aligned}$$

де $\check{E} = \mathrm{diag}\{E, E\}$, а $v(E)$ позначає вектор з компонентами e_j. Розкладаючи скалярний добуток по формулі Тейлора в точці $t = 0$ та зважаючи на те, що $\nabla_\Lambda f_0(\check{\Lambda}_0) = 0$, ми отримуємо

$$\frac{d}{dt}\Re \tilde{f}(U(\check{\Lambda}_0 + t\check{E})U^T) = t\langle f_0''(\check{\Lambda}_0)v(E), v(E)\rangle + r_1 + O(n^{-1/2}),$$

де f_0'' — матриця других похідних функції f_0 по Λ та $|r_1| \le Ct^2$. Матриця $f_0''(\check{\Lambda}_0)$ від'ємно-означена згідно Леми 4.9. Отже, можна вибрати δ так, що похідна $\frac{d}{dt}\Re \tilde{f}(U(\check{\Lambda}_0 + t\check{E})U^T)$ є від'ємною, і

$$\begin{aligned}\max_{\frac{\log n}{\sqrt{n}} \le \|\Lambda - \Lambda_0\| \le \delta} \Re \tilde{f}(U\check{\Lambda}U^T) &= \max_{\|\Lambda - \Lambda_0\| = \frac{\log n}{\sqrt{n}}} \Re \tilde{f}(U\check{\Lambda}U^T) \\ &\le f(U\check{\Lambda}_0U^T) - C\frac{\log^2 n}{n} - f(\check{\Lambda}_0).\end{aligned} \tag{4.44}$$

Зауважимо, що f_r обмежена зверху рівномірно по n. З цього та з Леми 4.9 випливає, що δ в (4.44) можна замінити на r

$$\max_{\frac{\log n}{\sqrt{n}}\le\|\Lambda-\Lambda_0\|\le r}\Re\tilde{f}(U\check{\Lambda}U^T)\le f(U\check{\Lambda}_0U^T)-f(\check{\Lambda}_0)-C\frac{\log^2 n}{n}.$$

Залишається вивести з Леми 4.10, що $f(U\check{\Lambda}_0U^T)-f(\check{\Lambda}_0)=O(n^{-1})$ рівномірно по U. □

З Леми 4.11 випливає, що

$$\mathsf{f}_m=Cn^{2m^2-m}e^{nf(\check{\Lambda}_0)}\left(\int\limits_{\Omega_n}\triangle^4(\Lambda^2)\prod_{j=1}^m\lambda_j\times e^{n\tilde{f}(U\check{\Lambda}U^T)}d\mu(U)d\Lambda+O(e^{-C_1\log^2 n})\right),$$

де Ω_n визначено в (4.38). Роблячи заміну знінних $\Lambda=\Lambda_0+\frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{\Lambda}$ та розкладаючи функцію f по Лемі 4.10, ми отримуємо

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_m=C\mathsf{k}_n\int\limits_{\sqrt{n}\Omega_n}\triangle^4(\tilde{\Lambda})\exp\left\{-\frac{1}{4}\operatorname{tr}(2\lambda_0\mathscr{L}+z_0\check{\mathscr{Z}}_U+z_0\check{\mathscr{Z}}_U^R)^2+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\check{\mathscr{Z}}_U\check{\mathscr{Z}}_U^R\right\}\\ \times d\mu(U)d\tilde{\Lambda}(1+o(1)),\end{aligned}\tag{4.45}$$

де

$$\mathsf{k}_n=n^{m^2-m/2}e^{-mn\lambda_0^2+\sqrt{n}z_0\operatorname{tr}\check{\mathscr{Z}}}.\tag{4.46}$$

Зробимо декілька замін змінних. Перша з них — $U=O\check{D}S^*$, де O — дійсна ортгональна матриця, S — унітарна симплектична, та

$$\check{D}=\operatorname{diag}\{D,D\},\qquad D=\operatorname{diag}\{e^{i\eta_j}\}_{j=1}^m.$$

Приймаючи до уваги, що $d\mu(U)$ змінюється на $Cd\mu(O)d\mu(S)d\eta$, де

$$d\eta=\triangle^2(D^4)\prod_{j=1}^m e^{-(4m-4)i\eta_j}d\eta_j,$$

ми отримуємо

$$\begin{aligned}\mathsf{f}_m=C\mathsf{k}_n\int\limits_{\mathbb{R}^m}\triangle^4(\tilde{\Lambda})d\tilde{\Lambda}\int\limits_{[0,\pi]^m}d\eta\int\limits_{O(2m)}d\mu(O)\int\limits_{\mathrm{USp}(m)}d\mu(S)(1+o(1))\\ \times\exp\left\{-\frac{1}{4}\operatorname{tr}(2\lambda_0\mathscr{L}+S^*(z_0\check{\mathscr{Z}}_{O\check{D}}+z_0\check{\mathscr{Z}}^R_{O\check{D}})S)^2\right.\\ \left.+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\check{\mathscr{Z}}O\check{D}^2O^R\check{\mathscr{Z}}^R\left(O\check{D}^2O^R\right)^*\right\},\end{aligned}$$

де $O(2m)$ — група ортогональних матриць розміром $2m\times 2m$ та $\mathrm{USp}(m)$ — група унітарних симплектичних матриць розміром $2m\times 2m$. Оскільки $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}SAS^*$, то

$$\mathsf{f}_m = C\mathsf{k}_n \int\limits_{\mathbb{R}^m} \triangle^4(\tilde\Lambda)d\tilde\Lambda \int\limits_{[0,\pi]^m} d\eta \int\limits_{O(2m)} d\mu(O) \int\limits_{\mathrm{USp}(m)} d\mu(S)(1+o(1))$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(2\lambda_0 S\mathscr{L}S^* + z_0\check{\mathscr{Z}}_{O\check{D}} + z_0\check{\mathscr{Z}}^R_{O\check{D}})^2 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\check{\mathscr{Z}}V\check{\mathscr{Z}}^RV^*\right\},$$

де $V=O\check{D}^2O^R$. Зробимо другу заміну змінних $H=S\mathscr{L}S^*$. Тоді H пробігає множину ермітових самодуальних матриць, а якобіан заміни дорівнює $C\triangle^{-4}(\tilde\Lambda)$. Отже,

$$\mathsf{f}_m = C\mathsf{k}_n \int\limits_{H=H^*=H^R} dH \int\limits_{[0,\pi]^m} d\eta \int\limits_{O(2m)} d\mu(O)(1+o(1))$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(2\lambda_0 H + z_0\check{\mathscr{Z}}_{O\check{D}} + z_0\check{\mathscr{Z}}^R_{O\check{D}})^2 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\check{\mathscr{Z}}V\check{\mathscr{Z}}^RV^*\right\},$$

де

$$dH=\prod_{j=1}^m d(H)_{jj}\prod_{j<k\le m} d\Re(H)_{jk}d\Im(H)_{jk}d\Re(H)_{j,k+m}d\Im(H)_{j,k+m}.$$

Проінтегруємо по H по формулі Гауса

$$\mathsf{f}_m = C\mathsf{k}_n \int\limits_{[0,\pi]^m} d\eta \int\limits_{O(2m)} d\mu(O)\exp\left\{\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\check{\mathscr{Z}}V\check{\mathscr{Z}}^RV^*\right\}(1+o(1)).$$

Нарешті, зробимо останню заміну змінних $V=O\check{D}^2O^R$. Вона переводить область інтегрування у множину всіх унітарних самодуальних матриць розміром $2m\times 2m$. Міра $d\eta d\mu(O)$ перетворюється на міру $Cd\mu_s(V)$, що відповідає диференціальній формі (4.4). Ми маємо

$$\mathsf{f}_m = C\mathsf{k}_n \int\limits_{V=V^R\in U(2m)} \exp\left\{\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\check{\mathscr{Z}}V\check{\mathscr{Z}}^RV^*\right\}d\mu_s(V)(1+o(1)). \tag{4.47}$$

Остаточно твердження (i) Теореми 4.2 випливає з (4.47) та (4.15). Для того, щоб довести твердження (ii), обчислимо інтеграл (4.47) при $m=2$.

Лема 4.12. *Візьмемо довільну діагональну матрицю* $A=\mathrm{diag}\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$. *Тоді*

$$\int\limits_{V=V^R\in U(4)} \exp\left\{\frac{1}{2}\mathrm{tr}AVA^RV^*\right\}d\mu_s(V) = C\frac{\mathrm{Pf}((a_j-a_k)e^{a_ja_k})^4_{j,k=1}}{\triangle(A)}. \tag{4.48}$$

Доведення. Помітимо, що ліва частина формули (4.48) є аналітичною функцією від a_1, a_2, a_3, a_4. Тому достатньо розкласти підінтегральну функцію в ряд Тейлора в точці $A = 0$ та проінтегрувати почленно. Обчислення «в лоб» дає нам, що

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}AVA^RV^* = a_1a_3 + a_2a_4 - (a_1 - a_2)(a_3 - a_4)\,|v_{12}|^2 - (a_2 - a_3)(a_4 - a_1)\,|v_{14}|^2.$$

Задамо числову послідовність $\{\mathtt{c}_{jk}\}$ рівністю

$$e^{-b_0}\int\limits_{V=V^R\in U(4)} \exp\left\{\frac{1}{2}\mathrm{tr}AVA^RV^*\right\} d\mu_s(V) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \mathtt{c}_{jk} b_1^j b_2^k, \tag{4.49}$$

де

$$\begin{aligned} b_0 &= a_1a_3 + a_2a_4, \\ b_1 &= (a_1 - a_2)(a_3 - a_4), \\ b_2 &= (a_2 - a_3)(a_4 - a_1). \end{aligned} \tag{4.50}$$

Далі,

$$\begin{aligned} \mathtt{c}_{jk} &= \int\limits_{V=V^R\in U(4)} \frac{(-1)^{j+k}}{j!k!}\,|v_{12}|^{2j}\,|v_{14}|^{2k}\,d\mu_s(V) \\ &= \int\limits_{V=V^R\in U(4)} \frac{(-1)^k}{j!k!} \times \frac{v_{12}^j v_{21}^j}{\mathrm{Pf}^j VJ} \times \frac{v_{14}^k v_{32}^k}{\mathrm{Pf}^k VJ} d\mu_s(V). \end{aligned} \tag{4.51}$$

Для того, щоб обчислити останній інтеграл, ми використовуємо так звану формулу супербозонізації (див. [121, Theorem 4.11])

$$\begin{aligned} &\int \mathtt{f}\left(\begin{pmatrix} \Upsilon^+\Upsilon & \Upsilon^+(\Upsilon^+)^T \\ -(\Upsilon)^T\Upsilon & -(\Upsilon)^T(\Upsilon^+)^T \end{pmatrix}\right) d\Upsilon^+ d\Upsilon \\ &\qquad = (2\pi)^{qn}2^q \frac{\mathrm{vol}[O(n)]}{\mathrm{vol}[O(n+2q)]} \int\limits_{V=V^R\in U(2q)} \mathtt{f}(V)\det{}^{-n/2} V d\mu_s(V), \end{aligned} \tag{4.52}$$

де матриця Υ має розміри $n \times q$, її елементи є антикомутуючими змінними, $\mathtt{f}$ — аналітична функція й vol позначає об'єм.

Застосуємо (4.52) до (4.51) для $n = j + k$ та $q = 2$. Приймаючи до уваги, що $\operatorname{vol}[O(n)] = \frac{2^n \pi^{\frac{n(n+1)}{4}}}{\prod_{p=1}^{n} \Gamma(p/2)}$, ми отримуємо

$$\begin{aligned}\mathsf{c}_{jk} = C&\frac{(-1)^k}{j!k!(j+k+2)!(j+k)!}\\ &\times \int \left(\sum_{l=1}^{j+k} \overline{\upsilon_{l1}}\upsilon_{l2}\right)^j \left(\sum_{l=1}^{j+k} \overline{\upsilon_{l2}}\upsilon_{l1}\right)^j \left(\sum_{l=1}^{j+k} \overline{\upsilon_{l1}\upsilon_{l2}}\right)^k \left(-\sum_{l=1}^{j+k} \upsilon_{l1}\upsilon_{l2}\right)^k d\Upsilon^+ d\Upsilon,\end{aligned}$$

де C не залежить ані від j, ані від k. Провівши нескладні комбінаторні міркування, можна побачити, що підінтегральна функція дорівнює

$$(-1)^j (j+k)!j!k! \prod_{l=1}^{j+k} \overline{\upsilon_{l1}}\upsilon_{l1}\overline{\upsilon_{l2}}\upsilon_{l2}.$$

Отже,

$$\mathsf{c}_{jk} = C\frac{(-1)^{j+k}}{(j+k+2)!}.$$

Беручи суму по j та k, ми маємо

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=0}^{\infty} \mathsf{c}_{jk} b_1^j b_2^k &= C\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+2)!} \sum_{j+k=l} b_1^j b_2^k\\ &= C\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+2)!} \frac{b_1^{l+1} - b_2^{l+1}}{b_1 - b_2} = C\frac{\frac{e^{-b_1}-1}{b_1} - \frac{e^{-b_2}-1}{b_2}}{b_1 - b_2}.\end{aligned} \tag{4.53}$$

Зауважимо, що $b_1 - b_2 = (a_1 - a_3)(a_2 - a_4)$. Тоді з (4.49), (4.50) та (4.53) випливає, що

$$\begin{aligned}\int\limits_{V=V^R\in U(4)} \exp\left\{\frac{1}{2}\operatorname{tr} AVA^R V^*\right\} d\mu_s(V) &= Ce^{b_0}\frac{b_2 e^{-b_1} - b_1 e^{-b_2} + (b_1 - b_2)}{b_1 b_2 (b_1 - b_2)}\\ = \frac{C}{-\triangle(A)}\Big[(a_2 - a_3)(a_4 - a_1)e^{a_1a_4+a_2a_3} &- (a_1 - a_2)(a_3 - a_4)e^{a_1a_2+a_3a_4}\\ &+ (a_1 - a_3)(a_2 - a_4)e^{a_1a_3+a_2a_4}\Big].\end{aligned}$$

Для того, щоб завершити доведення, залишається помітити, що вираз у квадратних дужках дорівнює саме $-\operatorname{Pf}((a_j - a_k)e^{a_j a_k})_{j,k=1}^4$. □

Застосовуючи лему до (4.47), ми отримуємо

$$\mathsf{f}_2 = C\mathsf{k}_n \frac{\operatorname{Pf}\begin{pmatrix} (\zeta_j - \zeta_k)e^{\zeta_j\zeta_k} & (\zeta_j - \overline{\zeta}_k)e^{\zeta_j\overline{\zeta}_k} \\ (\overline{\zeta}_j - \zeta_k)e^{\overline{\zeta}_j\zeta_k} & (\overline{\zeta}_j - \overline{\zeta}_k)e^{\overline{\zeta}_j\overline{\zeta}_k} \end{pmatrix}^2_{j,k=1}}{\triangle(\zeta_1, \zeta_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2)}(1 + o(1)),$$

що в поєднанні з (4.15) тягне твердження (ii) Теореми 4.2.

4.2.2 Загальний випадок

У загальному випадку доведення в цілому повторює доведення у випадку нормального розподілу з деякими уточненнями. У цьому пункті ми сконцентруємося на суттєвих відмінностях від випадку нормального розподілу й зробимо уточнення відповідних тверджень попереднього пункту.

Для того, щоб сформулювати уточнення Леми 4.10, введемо трохи нових позначень. Покладемо

$$\|\hat{Q}\| = \sqrt{\langle \hat{Q}, \hat{Q} \rangle}.$$

Через те, що x_{11} дійсне, $\kappa_{p,s}$ залежить тільки від $p+s$ (див. (3.20) та (3.18)). Ми позначимо спільне значення кумулянтів $\kappa_{4-s,s}$ через κ_4. Також буде зручно змінити індекси елементів Q_2. Для будь-якого $\delta \in \mathscr{I}_{2m,4}$ знайдемо такий номер s, що $\delta_s \le m < \delta_{s+1}$. Тоді покладемо $\tilde{q}^{(2)}_{\delta} = \tilde{q}^{(4-s,s)}_{\alpha\beta}$, де

$$\begin{aligned}\alpha &= (\delta_{s+1} - m, \dots, \delta_4 - m);\\ \beta &= (\delta_1, \dots, \delta_s).\end{aligned}$$

Крім того, нехай $\mathscr{I}'_{2m,4}$ — множина таких індексів δ, що $s = 2$ та $\alpha = \beta$.

Тепер ми готові узагальнити Лему 4.10.

Лема 4.13. *Нехай $\|\tilde{\Lambda}\| + \big\|\hat{\tilde{Q}}\big\| \le \log n$. Тоді рівномірно по U*

$$\begin{aligned} f(U(\check{\Lambda}_0 &+ n^{-1/2}\check{\tilde{\Lambda}})U^T, n^{-1/2}\hat{\tilde{Q}}) \\ &= -m\lambda_0^2 + n^{-1/2} z_0 \operatorname{tr} \check{\mathscr{Z}} - n^{-1} \operatorname{tr}(2\lambda_0 \mathscr{L} + z_0 \check{\mathscr{Z}}_U + z_0 \check{\mathscr{Z}}_U^R)^2/4 \\ &\quad + n^{-1}\lambda_0^2 \sqrt{\kappa_4} \sum_{\delta \in \mathscr{I}_{2m,4}} \sum_{\gamma \in \mathscr{I}'_{2m,4}} ((\wedge^4 \overline{U})_{\delta\gamma} \tilde{q}^{(2)}_{\delta} + \overline{\tilde{q}}^{(2)}_{\delta} (\wedge^4 U^T)_{\gamma\delta}) \\ &\quad + n^{-1} \operatorname{tr}(\check{\mathscr{Z}}_U \check{\mathscr{Z}}_U^R)/2 - n^{-1}\langle \hat{\tilde{Q}}, \hat{\tilde{Q}} \rangle + O\big(n^{-3/2}\log^3 n\big), \end{aligned} \tag{4.54}$$

де ми використовуємо позначення з Леми 4.10, а всі нові позначення описано безпосередньо перед цією лемою.

Доведення. На відміну від випадку нормального розподілу, функція f має додатковий член $\langle \hat{Q}, \hat{Q} \rangle$, а також додатковий член $n^{-1/2}\tilde{h}(Q_2) + n^{-1}\mathrm{p}_c(\hat{Q})$ під логарифмом (див. (4.7) та (4.17)), де $\tilde{h}$ та p_c визначені у формулюванні Леми 4.8. Внесок члена $\langle \hat{Q}, \hat{Q} \rangle$ у розклад (4.54) очевидний. Далі, $n^{-1}\mathrm{p}_c(n^{-1/2}\hat{\tilde{Q}}) = O\big(n^{-3/2}\log^3 n\big)$, тому що p_c — поліном з нульовим вільним членом. Отже, залишається визначити внесок члена $n^{-1/2}\tilde{h}(Q_2)$.

Для того, щоб спостити позначення, ми опустимо індекс k у формулі (4.29). Тобто тепер $\boldsymbol{\varphi}$ та $\boldsymbol{\vartheta}$ позначають вектори

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_m \end{pmatrix}$$

відповідно. Тоді (4.29) перепишеться наступним чином

$$\tilde{h}(\boldsymbol{Q}_2) = \int b_4 e^{b_2} d\boldsymbol{\varphi}^+ d\boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{\vartheta}^+ d\boldsymbol{\vartheta},$$

де b_2 має вигляд (4.34), а b_4 визначено в (4.27). Звідси

$$n^{-1/2}\tilde{h}(n^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{Q}}_2) = n^{-1}\tilde{h}(\tilde{\boldsymbol{Q}}_2) = -\frac{1}{n}\int d\boldsymbol{\varphi}^+ d\boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{\vartheta}^+ d\boldsymbol{\vartheta}\, e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}^T F \boldsymbol{\rho}} \\ \times \sum_{p+s=4} \left(\operatorname{tr}\tilde{Y}_{p,s}\tilde{Q}_{p,s} + \operatorname{tr}\tilde{Q}^*_{p,s} Y_{p,s}\right), \quad (4.55)$$

де $\boldsymbol{\rho}$ визначено в (4.35), F визначено в (4.9), $\tilde{Y}_{p,s}$ та $Y_{p,s}$ визначено в (4.23). Для того, щоб зробити запис подальших перетворень більш лаконічним і зрозумілим, ми покладемо

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\vartheta} \\ (\boldsymbol{\varphi}^+)^T \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\rho}_1^+ = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\vartheta}^+ & -\boldsymbol{\varphi}^T \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

Зробимо заміну змінних $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1 = U^T \boldsymbol{\rho}_1$, $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1^+ = \boldsymbol{\rho}_1^+ \overline{U}$. Ми маємо

$$\kappa_4^{-1/2} y_{\alpha\beta}^{(p,s)} = \prod_{q=1}^{p} \phi_{\alpha_q} \prod_{r=1}^{s} \overline{\theta_{\beta_r}} = (-1)^p \prod_{q=1}^{p} \left(\boldsymbol{\rho}_1^+\right)_{m+\alpha_q} \prod_{r=1}^{s} \left(\boldsymbol{\rho}_1^+\right)_{\beta_r} \\ = (-1)^p (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}+\frac{s(s-1)}{2}} \prod_{r=p+s}^{1} \left(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1^+ U^T\right)_{\delta_r},$$

де

$$\delta = (\beta_1, \ldots, \beta_s, m+\alpha_1, \ldots, m+\alpha_p) \in \mathscr{I}_{2m,4}.$$

Приймаєчи до уваги, що $p+s=4$ та що

$$p + \frac{p(p-1)}{2} + \frac{s(s-1)}{2} = p(p-3)+6$$

парне число, ми отримуємо

$$\kappa_4^{-1/2} y_{\alpha\beta}^{(p,s)} = \sum_{\gamma \in ([1,2m]\cap\mathbb{Z})^4} \prod_{r=4}^{1} \left(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1^+\right)_{\gamma_r} u_{\delta_r \gamma_r} = \sum_{\gamma \in \mathscr{I}_{2m,4}} \det\left\{U^T\right\}_{\gamma\delta} \prod_{r=4}^{1} \left(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1^+\right)_{\gamma_r} \\ = \sum_{\gamma \in \mathscr{I}_{2m,4}} (\wedge^4 U^T)_{\gamma\delta} \prod_{r=4}^{1} \left(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1^+\right)_{\gamma_r}, \quad (4.57)$$

де $u_{jk} = (U)_{jk}$ та $\{U^T\}_{\gamma\delta}$ — підматриця матриці U^T, побудована як перетин рядків $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$ зі стовпцями $\delta_1, \ldots, \delta_4$. Аналогічно

$$\kappa_4^{-1/2} \tilde{y}_{\beta\alpha}^{(p,s)} = \sum_{\gamma \in \mathscr{I}_{2m,4}} (\wedge^4 \overline{U})_{\delta\gamma} \prod_{r=1}^{4} (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1)_{\gamma_r}. \tag{4.58}$$

Крім того,

$$\boldsymbol{\rho}^T F \boldsymbol{\rho} = -\boldsymbol{\rho}_*^+ \check{F} \boldsymbol{\rho}_* = -\tilde{\boldsymbol{\rho}}_*^+ \check{F}_0 \tilde{\boldsymbol{\rho}}_* + O(n^{-1/2} \log n), \tag{4.59}$$

де $\check{F}_0$ визначено в (4.40) та

$$\boldsymbol{\rho}_* = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\rho}_1^+)^T \\ \boldsymbol{\rho}_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho}_*^+ = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\rho}_1^T & \boldsymbol{\rho}_1^+ \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\rho}} = \begin{pmatrix} (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1^+)^T \\ \tilde{\boldsymbol{\rho}}_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\rho}}_*^+ = \begin{pmatrix} -\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1^T & \tilde{\boldsymbol{\rho}}_1^+ \end{pmatrix}.$$

«Міра» змінюється наступним чином

$$d\boldsymbol{\varphi}^+ d\boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{\vartheta}^+ d\boldsymbol{\vartheta} = \det{}^{-1} U^T \det{}^{-1} \overline{U} d\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1^+ d\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1 = d\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1^+ d\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1. \tag{4.60}$$

Зрештою, підставимо (4.57)–(4.60) до (4.55). Тоді маємо

$$\begin{aligned} n^{-1} \tilde{h}(\tilde{\boldsymbol{Q}}_2) = -\frac{1}{n} & \sum_{\delta \in \mathscr{I}_{2m,4}} \sum_{\gamma \in \mathscr{I}_{2m,4}} \sqrt{\kappa_4} \int e^{\frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_*^+ \check{F}_0 \tilde{\boldsymbol{\rho}}_*} d\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1^+ d\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1 \\ & \times \left((\wedge^4 \overline{U})_{\delta\gamma} \prod_{r=1}^{4} (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1)_{\gamma_r} \tilde{q}_{\delta}^{(2)} + \overline{\tilde{q}}_{\delta}^{(2)} (\wedge^4 U^T)_{\gamma\delta} \prod_{r=4}^{1} (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1^+)_{\gamma_r} \right) \\ & + O\big(n^{-3/2} \log^3 n\big) \end{aligned} \tag{4.61}$$

рівномірно по U.

Позначимо компоненти векторів $\boldsymbol{\rho}_1$ та $\boldsymbol{\rho}_1^+$ таким же чином, як і у формулі (4.56), тільки з тільдами. Тоді, дякуючи тому, що $\check{F}_0$ має блочну структуру, можна взяти інтеграл у формулі (4.61) по $\tilde{\phi}_j$, $\tilde{\theta}_j$ окремо для кожного j. Отже, залишається обчислити інтеграл

$$\int \prod_{r=1}^{4} (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_1)_{\gamma_r} \exp\left\{ z_0 \tilde{\theta}_j \overline{\tilde{\theta}}_j + \lambda_0 \tilde{\theta}_j \overline{\tilde{\phi}}_j + z_0 \tilde{\phi}_j \overline{\tilde{\phi}}_j - \lambda_0 \tilde{\phi}_j \overline{\tilde{\theta}}_j \right\} d\overline{\tilde{\phi}}_j d\tilde{\phi}_j d\overline{\tilde{\theta}}_j d\tilde{\theta}_j$$

і ще один такий же з $\boldsymbol{\rho}_1^+$ замість $\boldsymbol{\rho}_1$. Розкладаючи експоненту в ряд, можна помітити, що інтеграл буде відмінним від нуля тоді й тільки тоді, коли $\gamma \in \mathscr{I}'_{2m,4}$. Більше того,

$$\begin{aligned} \int \tilde{\theta}_j \overline{\tilde{\phi}}_j e^{z_0 \tilde{\theta}_j \overline{\tilde{\theta}}_j + \lambda_0 \tilde{\theta}_j \overline{\tilde{\phi}}_j + z_0 \tilde{\phi}_j \overline{\tilde{\phi}}_j - \lambda_0 \tilde{\phi}_j \overline{\tilde{\theta}}_j} d\overline{\tilde{\phi}}_j d\tilde{\phi}_j d\overline{\tilde{\theta}}_j d\tilde{\theta}_j &= \lambda_0, \\ \int \tilde{\phi}_j \overline{\tilde{\theta}}_j e^{z_0 \tilde{\theta}_j \overline{\tilde{\theta}}_j + \lambda_0 \tilde{\theta}_j \overline{\tilde{\phi}}_j + z_0 \tilde{\phi}_j \overline{\tilde{\phi}}_j - \lambda_0 \tilde{\phi}_j \overline{\tilde{\theta}}_j} d\overline{\tilde{\phi}}_j d\tilde{\phi}_j d\overline{\tilde{\theta}}_j d\tilde{\theta}_j &= -\lambda_0, \\ \int e^{z_0 \tilde{\theta}_j \overline{\tilde{\theta}}_j + \lambda_0 \tilde{\theta}_j \overline{\tilde{\phi}}_j + z_0 \tilde{\phi}_j \overline{\tilde{\phi}}_j - \lambda_0 \tilde{\phi}_j \overline{\tilde{\theta}}_j} d\overline{\tilde{\phi}}_j d\tilde{\phi}_j d\overline{\tilde{\theta}}_j d\tilde{\theta}_j &= 1. \end{aligned}$$

З вищенаведеного випливає, що

$$n^{-1}\tilde{h}(\tilde{\boldsymbol{Q}}_2) = n^{-1}\lambda_0^2\sqrt{\kappa_4}\sum_{\delta\in\mathscr{I}_{2m,4}}\sum_{\gamma\in\mathscr{I}'_{2m,4}}((\wedge^4\overline{U})_{\delta\gamma}\tilde{q}_{\delta}^{(2)} + \bar{\tilde{q}}_{\delta}^{(2)}(\wedge^4 U^T)_{\gamma\delta})$$
$$+ O\big(n^{-3/2}\log^3 n\big).$$

Останнє співвідношення завершує доведення (4.54). $\square$

Аналогом Леми 4.11 є

Лема 4.14. *Нехай* $\tilde{f}(\boldsymbol{Q}) = f(\boldsymbol{Q}) - f(\check{\Lambda}_0, 0)$. *Тоді для достатньо великих* n

$$\max_{\frac{\log n}{\sqrt{n}} \le \|\check{\Lambda}-\check{\Lambda}_0\| + \|\hat{\boldsymbol{Q}}\| \le r} \Re\tilde{f}(U\check{\Lambda}U^T, \hat{\boldsymbol{Q}}) \le -C\frac{\log^2 n}{n}$$

рівномірно по U.

Доведення потребує лише косметичних змін через те, що з'являються додаткові змінні $\hat{\boldsymbol{Q}}$. Повторюючи кроки доведення для випадку нормального розподілу, замість (4.45) ми отримуємо

$$\mathsf{f}_m = C\mathsf{k}_n \int\limits_{\sqrt{n}\Omega_n} \triangle^4(\tilde{\Lambda})\exp\Big\{-\frac{1}{4}\operatorname{tr}(2\lambda_0\mathscr{L} + z_0\check{\mathscr{Z}}_U + z_0\check{\mathscr{Z}}_U^R)^2 + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\check{\mathscr{Z}}_U\check{\mathscr{Z}}_U^R$$
$$+ \lambda_0^2\sqrt{\kappa_4}\sum_{\delta\in\mathscr{I}_{2m,4}}\sum_{\gamma\in\mathscr{I}'_{2m,4}}((\wedge^4\overline{U})_{\delta\gamma}\tilde{q}_{\delta}^{(2)} + \bar{\tilde{q}}_{\delta}^{(2)}(\wedge^4 U^T)_{\gamma\delta})$$
$$- \langle\hat{\tilde{\boldsymbol{Q}}}, \hat{\tilde{\boldsymbol{Q}}}\rangle\Big\} d\mu(U)d\tilde{\Lambda}d\hat{\tilde{\boldsymbol{Q}}}(1+o(1)),$$

де k_n визначено в (4.46). Проінтегруємо по $\hat{\tilde{\boldsymbol{Q}}}$, користуючись формулою Гауса

$$\mathsf{f}_m = C\mathsf{k}_n \int \triangle^4(\tilde{\Lambda})\exp\Big\{-\frac{1}{4}\operatorname{tr}(2\lambda_0\mathscr{L} + z_0\check{\mathscr{Z}}_U + z_0\check{\mathscr{Z}}_U^R)^2 + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\check{\mathscr{Z}}_U\check{\mathscr{Z}}_U^R$$
$$+ \lambda_0^4\kappa_4\sum_{\delta\in\mathscr{I}_{2m,4}}\sum_{\gamma\in\mathscr{I}'_{2m,4}}(\wedge^4 U^T)_{\gamma\delta}(\wedge^4\overline{U})_{\delta\gamma}\Big\} d\mu(U)d\tilde{\Lambda}(1+o(1)).$$

Зауважимо, що матриці $\wedge^4 U^T$ та $\wedge^4\overline{U}$ взаємно обернені. Отже,

$$\sum_{\delta\in\mathscr{I}_{2m,4}}(\wedge^4 U^T)_{\gamma\delta}(\wedge^4\overline{U})_{\delta\gamma} = (\wedge^4 U^T\wedge^4\overline{U})_{\gamma\gamma} = 1.$$

Тому

$$
\begin{aligned}
\mathsf{f}_m = C\mathsf{k}_n \exp\left\{\frac{m^2-m}{2}\lambda_0^4\kappa_4\right\} \int \triangle^4(\tilde{\Lambda}) d\mu(U) d\tilde{\Lambda}(1+o(1)) \\
\times \exp\left\{-\frac{1}{4}\operatorname{tr}(2\lambda_0\mathscr{L} + z_0\check{\mathscr{Z}}_U + z_0\check{\mathscr{Z}}_U^R)^2 + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\check{\mathscr{Z}}_U\check{\mathscr{Z}}_U^R\right\}.
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

Порівнюючи (4.62) з (4.45), ми бачимо, що далі доведення не матимете відмінностей, крім множника $\exp\left\{\frac{m^2-m}{2}\lambda_0^4\kappa_{2,2}\right\}$, який не залежить від вищих моментів.

4.3 Висновки до Розділу 4

У Розділі 4 ми дослідили кореляційні функції характеристичних поліномів дійсних несиметричних випадкових матриць з незалежними елементами. У випадку, коли спільний розподіл ймовірностей елементів матриць є довільним розподілом із нульовим математичним сподіванням та одичною дисперсією, було показано, що нормована границя m-тої кореляційної функції харатеристичних поліномів всередині спектра дорівнює деякому інтегралу по множині матриць скінченного розміру. Встановлено залежність вищезгаданої нормованої границі від четвертого кумулянта спільного розподілу елементів матриць, а також показано, що ця границя не залежить від п'ятого та вищих моментів спільного розподілу елементів матриць. Для другої кореляційної функції характеристичних поліномів вдалося обчислити отриманий інтеграл по множині матриць. Спираючись на цей результат, було показано, що асимптотики другої кореляційної функції характеристичних поліномів та спектральних кореляційних функцій (для нормального розподілу) подаються у вигляді пфафіану матриць, які мають дуже схожу структуру. Крім того, на основі встановленої асимптотичної поведінки другої кореляційної функції характеристичних поліномів висунуто гіпотезу про вигляд асимптотичної поведінки старших кореляційних функцій характеристичних поліномів.

До основних результатів цього розділу належать:

- Теорема 4.2, в якій подано асимптотичну поведінку кореляційних функцій характеристичних поліномів дійсних несиметричних випадкових матриць з незалежними елементами всередині спектра у вигляді інтеграла по скінченновимірним матрицям, а також встановлено асимптотичну поведінку другої кореляційної функції;

- Пропозиція 4.3, в якій отримано інтегральне представлення для m-тої кореляційної функції характеристичних поліномів випадкових матриць з незалежними елементами.

- Лема 4.12, в якій при $m = 2$ обчислено інтеграл, отриманий у Теоремі 4.2.

Нерозв'язаною задачею залишається обчислення асимптотичної поведінки старших кореляційних функцій характеристичних поліномів дійсних несиметричних випадкових матриць з незалежними елементами всерелині та на межі спектра.

Результати досліджень даного розділу наведено в публікації автора [7].

РОЗДІЛ 5

ГРАСМАНОВІ ЗМІННІ

У цьому розділі ми опишемо властивості грасманових змінних і функцій від них, на яких ґрунтується метод грасманового інтегрування. Також ми введемо поняття зовнішнього добутку операторів, яке нам знабиться для дослідження асимптотичної поведінки кореляційних функцій у розділі 2, і доведемо декілька допоміжних лем про властивості зовнішнього добутку операторів. Більше про грасманові змінні можна дізнатися в [57] або [58]. Ґрунтовніший вступ до суперсиметрії взагалі можна знайти в книзі [24].

Нехай задано множину формальних змінних $\{\varphi_j, \overline{\varphi}_j\}_{j=1}^n$, які задовольняють співвідношення антикомутації, тобто

$$\varphi_j\varphi_k + \varphi_k\varphi_j = \overline{\varphi}_j\varphi_k + \varphi_k\overline{\varphi}_j = \overline{\varphi}_j\overline{\varphi}_k + \overline{\varphi}_k\overline{\varphi}_j = 0.$$

Ця множина змінних породжує градуйовану алгебру $\mathscr{A}$, яка називається грасмановою. Через те, що $\varphi_j^2 = \overline{\varphi}_j^2 = 0$, всі елементи алгебри $\mathscr{A}$ є поліномами від $\{\varphi_j, \overline{\varphi}_j\}_{j=1}^n$.

Означення 5.1. Твірна $\overline{\varphi}_j$ називається *«спряженою»* до змінної φ_j.

Означення 5.2. Елемент алгебри $\chi \in \mathscr{A}$ називається *парним (непарним)*, якщо всі його одночлени мають парний (непарний) степінь.

Тепер дамо визначення функцій від грасманових змінних.

Означення 5.3. Візьмемо довільний елемент χ грасманової алгебри $\mathscr{A}$. Для аналітичної функції f під $f(\chi)$ ми розуміємо елемент алгебри $\mathscr{A}$, що отриманий підстановкою $\chi - z_0$ у ряд Тейлора функції f в точці z_0, де z_0 є вільним членом χ.

Оскільки $\chi - z_0$ є поліномом від $\{\varphi_j, \overline{\varphi}_j\}_{j=1}^n$ із нульовим вільним членом, то існує таке $l \in \mathbb{N}$, що $(\chi - z_0)^l = 0$, а отже після підстановки в ряді Тейлора залишиться лише скінченна кількість ненульових членів.

Інтеграл по грасмановим змінним — це лінійний функціонал, який задається на базисі наступними співвідношеннями

$$\int d\varphi_j = \int d\overline{\varphi}_k = 0, \qquad \int \varphi_j d\varphi_j = \int \overline{\varphi}_k d\overline{\varphi}_k = 1.$$

Кратний інтеграл визначається як повторний інтеграл. Більше того, «диференціали» $\{d\varphi_j, d\overline{\varphi}_j\}_{j=1}^n$ антикомутують один з одним та зі змінними $\{\varphi_j, \overline{\varphi}_j\}_{j=1}^n$. Отже, для функції f

$$f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j + \ldots + a_{1,\ldots,n} \prod_{j=1}^n \varphi_j$$

ми за означенням маємо

$$\int f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) d\varphi_n \ldots d\varphi_1 = a_{1,\ldots,n}.$$

Також на знадобляться матриці з грасманових змінних. Якщо $\Phi = (\varphi_{jk})$ — це матриця з грасманових змінних, то Φ^+ — це матриця $(\overline{\varphi}_{kj})$. d-вимірні вектори ми ототожнюємо з матрицями розміром $d \times 1$.

Важливу роль відіграє формула гаусового інтегрування (нижче подано два її варіанти: комплексний та дійсний)

$$\int_{\mathbb{C}^n} \exp\{-\boldsymbol{t}^* A \boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}^* \boldsymbol{h}_2 - \boldsymbol{h}_1^* \boldsymbol{t}\} d\boldsymbol{t}^* d\boldsymbol{t} = \pi^n \det{}^{-1} A \exp\{\boldsymbol{h}_1^* A^{-1} \boldsymbol{h}_2\}, \tag{5.1}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}^T A \boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}^T \boldsymbol{h}_2 - \boldsymbol{h}_1^T \boldsymbol{t}\right\} d\boldsymbol{t} = (2\pi)^{n/2} \det{}^{-1/2} A \exp\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{h}_1^T A^{-1} \boldsymbol{h}_2\right\}, \tag{5.2}$$

яка виконується для будь-якої додатно-означеної матриці A та векторів $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$, компоненти яких є парними елементами грасманової алгебри. Не менш важливі грасманові аналоги цих формул

$$\int \exp\{-\boldsymbol{\varphi}^+ A \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}^+ \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1^+ \boldsymbol{\varphi}\} d\boldsymbol{\varphi}^+ d\boldsymbol{\varphi} = \det A \exp\{\boldsymbol{v}_1^+ A^{-1} \boldsymbol{v}_2\}, \tag{5.3}$$

$$\int \exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^T A \boldsymbol{\varphi}\right\} d\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{Pf} A. \tag{5.4}$$

Формула (5.3) виконується для довільної комплексної матриці A та векторів $\boldsymbol{v}_1^+$, $\boldsymbol{v}_2$, компоненти яких є непарними елементами грасманової алгебри, у той час як формула (5.4) виконується для будь-якої кососиметричної матриці A.

Навединих вище означень та властивостей цілком достатньо для отримання інтегрального представлення кореляційних функцій у більшості випадків. Тільки в підпункті 2.1.1.2 нам знадобляться додаткові факти, пов'язані із зовнішнім (або антисиметичним тензорним) добутком.

5.1 Грасманові змінні й зовнішній добуток

Поняття зовнішнього добутку векторів добре відоме, так як і поняття зовнішнього добутку кососиметричних полілінійних функцій (див. [178, Chapter 8.4]). Проте, для того, щоб довести Пропозицію 2.6, нам знадобиться поняття зовнішнього добутку лінійних операторів. Визначимо його наступним чином.

Означення 5.4. Нехай лінійний оператор A діє на просторі $\Lambda^q\mathbb{C}^n$, а лінійний оператор B — на просторі $\Lambda^r\mathbb{C}^n$. Тоді *зовнішнім добутком* $A\wedge B$ цих операторів називається обмеження лінійного оператора $\mathrm{Alt}\circ(A\otimes B)$ на просторі $\Lambda^{q+r}\mathbb{C}^n$. Тут Alt — це оператор альтернування, тобто

$$\mathrm{Alt}(t) = \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}\operatorname{sgn}\pi f_\pi(t), \quad t\in\Lambda^k V,$$

де $\operatorname{sgn}\pi$ — знак перестановки π; f_π — канонічний автоморфізм простору $\bigotimes\limits_{j=1}^{k} V$, що переводить $v_1\otimes\ldots\otimes v_k$ в $v_{\pi(1)}\otimes\ldots\otimes v_{\pi(k)}$, $v_j\in V$; V — скінченновимірний лінійний простір.

Зауважимо, що для $A\in\operatorname{End}V$ зовнішній добуток $A\wedge A\wedge\cdots\wedge A$ співпадає з добре відомим поняттям зовнішнього степеня лінійного оператора A.

Зафіксуємо деякий базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ простору $\mathbb{C}^n$. Нехай $A\in\operatorname{End}\Lambda^k\mathbb{C}^n$ та $\alpha,\beta\in\mathscr{I}_{n,k}$, де $\mathscr{I}_{n,k}$ визначено в (2.7). За $A_{\alpha\beta}$ ми позначимо відповідний елемент матриці оператора A в базисі $\{e_{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge e_{\alpha_k},\ \alpha\in\mathscr{I}_{n,k}\}$.

Лема 5.5. *Нехай лінійні оператори A та B діють на просторах $\Lambda^q\mathbb{C}^n$ та $\Lambda^r\mathbb{C}^n$ відповідно. Тоді*

$$\sum_{\alpha,\beta\in\mathscr{I}_{n,q}} A_{\alpha\beta}\prod_{j=1}^{q}\overline{\varphi}_{\alpha_j}\varphi_{\beta_j}\cdot\sum_{\gamma,\delta\in\mathscr{I}_{n,r}} B_{\gamma\delta}\prod_{j=1}^{r}\overline{\varphi}_{\gamma_j}\varphi_{\delta_j}
= \binom{q+r}{q}\sum_{\alpha,\beta\in\mathscr{I}_{n,q+r}}(A\wedge B)_{\alpha\beta}\prod_{j=1}^{q+r}\overline{\varphi}_{\alpha_j}\varphi_{\beta_j}.$$

Доведення. Нехай $S_{q,r}$ — це множина таких перестановок $\pi \in S_{q+r}$, що задовольняють нерівності $\pi(1) < \ldots < \pi(q)$ та $\pi(q+1) < \ldots < \pi(q+r)$. Тоді

$$\sum_{\alpha,\beta\in\mathscr{I}_{n,q}} A_{\alpha\beta} \prod_{j=1}^{q} \overline{\varphi}_{\alpha_j}\varphi_{\beta_j} \cdot \sum_{\gamma,\delta\in\mathscr{I}_{n,r}} B_{\gamma\delta} \prod_{j=1}^{r} \overline{\varphi}_{\gamma_j}\varphi_{\delta_j}$$
$$= \sum_{\alpha,\beta\in\mathscr{I}_{n,q+r}} \sum_{\pi,\sigma\in S_{q,r}} \operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}\sigma A_{\alpha'_\pi\beta'_\sigma} B_{\alpha''_\pi\beta''_\sigma} \prod_{j=1}^{q+r} \overline{\varphi}_{\alpha_j}\varphi_{\beta_j},$$

де

$$\alpha_\pi = (\alpha_{\pi(1)}, \ldots, \alpha_{\pi(q+r)}),$$
$$\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \in \mathscr{I}_{n,q},$$
$$\alpha'' = (\alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_{q+r}) \in \mathscr{I}_{n,r}.$$

З іншої сторони,

$$(A\otimes B)(e_{\beta'}\wedge e_{\beta''}) = (A\otimes B)\left(\frac{1}{(q+r)!}\sum_{\sigma\in S_{q+r}} \operatorname{sgn}\sigma f_\sigma(e_{\beta'}\otimes e_{\beta''})\right)$$
$$= \frac{q!r!}{(q+r)!}(A\otimes B)\left(\sum_{\sigma\in S_{q,r}} \operatorname{sgn}\sigma f_\sigma(e_{\beta'}\otimes e_{\beta''})\right)$$
$$= \frac{q!r!}{(q+r)!} \sum_{\substack{\alpha\in\mathscr{I}_{n,q}\\ \gamma\in\mathscr{I}_{n,r}}} \left(\sum_{\sigma\in S_{q,r}} \operatorname{sgn}\sigma A_{\alpha\beta'_\sigma} B_{\gamma\beta''_\sigma}\right) e_\alpha\otimes e_\gamma,$$

де $e_\alpha = e_{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge e_{\alpha_q}$, $\alpha\in\mathscr{I}_{n,q}$. Звідси випливає, що

$$\operatorname{Alt}((A\otimes B)(e_{\beta'}\wedge e_{\beta''})) = \frac{q!r!}{(q+r)!} \sum_{\substack{\alpha\in\mathscr{I}_{n,q}\\ \gamma\in\mathscr{I}_{n,r}}} \left(\sum_{\sigma\in S_{q,r}} \operatorname{sgn}\sigma A_{\alpha\beta'_\sigma} B_{\gamma\beta''_\sigma}\right) e_\alpha\wedge e_\gamma$$
$$= \frac{q!r!}{(q+r)!} \sum_{\alpha\in\mathscr{I}_{n,q+r}} \sum_{\pi,\sigma\in S_{q,r}} \operatorname{sgn}\sigma A_{\alpha'_\pi\beta'_\sigma} B_{\alpha''_\pi\beta''_\sigma} e_{\alpha'_\pi}\wedge e_{\alpha''_\pi}$$
$$= \frac{q!r!}{(q+r)!} \sum_{\alpha\in\mathscr{I}_{n,q+r}} \sum_{\pi,\sigma\in S_{q,r}} \operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}\sigma A_{\alpha'_\pi\beta'_\sigma} B_{\alpha''_\pi\beta''_\sigma} e_{\alpha'}\wedge e_{\alpha''}.$$

Отже,

$$(A\wedge B)_{\alpha\beta} = \frac{q!r!}{(q+r)!} \sum_{\pi,\sigma\in S_{q,r}} \operatorname{sgn}\pi\operatorname{sgn}\sigma A_{\alpha'_\pi\beta'_\sigma} B_{\alpha''_\pi\beta''_\sigma},$$

що й завершує доведення леми. □

Нам також знадобляться наступні властивості зовнішнього добутку операторів.

Пропозиція 5.6 (Властивості зовнішнього добутку операторів)**.** *Нехай задано оператори* $A_j \in \operatorname{End}\Lambda^{q_j}\mathbb{C}^n,\ j=\overline{1,k}$, *та* $B \in \operatorname{End}\mathbb{C}^n$. *Тоді*

(i) $A_1 \wedge A_2 = A_2 \wedge A_1$;

(ii) $(A_1 \wedge A_2) \wedge A_3 = A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3)$;

(iii) $\bigwedge\limits_{j=1}^{k} A_j = \Big(\operatorname{Alt}\circ \bigotimes\limits_{j=1}^{k} A_j\Big)\Big|_{\Lambda^q\mathbb{C}^n}$;

(iv) $\bigwedge\limits_{j=1}^{k} A_j \wedge^{q_j} B = \Big(\bigwedge\limits_{j=1}^{k} A_j\Big) \wedge^q B$ *та* $\bigwedge\limits_{j=1}^{k} (\wedge^{q_j} B) A_j = \wedge^q B \Big(\bigwedge\limits_{j=1}^{k} A_j\Big)$;

де $q = \sum\limits_{j=1}^{k} q_j$.

Доведення. Твердження (i) та (ii) випливають з Леми 5.5 та з того, що множення грасманових змінних антикомутативне та асоціативне.

(iii) Розглянемо спочатку випадок $k=3$.

$$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 = \operatorname{Alt}\circ((I\circ A_1)\otimes(\operatorname{Alt}\circ(A_2\otimes A_3)))$$
$$= \operatorname{Alt}\circ(I\otimes \operatorname{Alt})\circ(A_1\otimes A_2\otimes A_3) = \operatorname{Alt}\circ(A_1\otimes A_2\otimes A_3),$$

де I — одиничний оператор.

Загальний випадок доводиться по індукції.

(iv) За визначенням, ми маємо

$$\bigwedge_{j=1}^{k} (\wedge^{q_j} B) A_j = \operatorname{Alt}\circ \bigotimes_{j=1}^{k} (\wedge^{q_j} B) A_j.$$

Розглянемо $\Big(\operatorname{Alt}\circ \bigotimes\limits_{1}^{q_j} B\Big)(v_1\otimes\ldots\otimes v_{q_j}),\ v_l \in \mathbb{C}^n$

$$\Big(\operatorname{Alt}\circ \bigotimes_{1}^{q_j} B\Big)(v_1\otimes\ldots\otimes v_{q_j}) = \frac{1}{q_j!}\sum_{\pi\in S_{q_j}} \operatorname{sgn}\pi\, f_\pi(Bv_1\otimes\ldots\otimes Bv_{q_j})$$
$$= \frac{1}{q_j!}\sum_{\pi\in S_{q_j}} \operatorname{sgn}\pi\, Bv_{\pi(1)}\otimes\ldots\otimes Bv_{\pi(q_j)}$$
$$= \frac{1}{q_j!}\sum_{\pi\in S_{q_j}} \operatorname{sgn}\pi \bigotimes_{1}^{q_j} B(f_\pi(v_1\otimes\ldots\otimes v_{q_j})) = \Big(\bigotimes_{1}^{q_j} B\circ \operatorname{Alt}\Big)(v_1\otimes\ldots\otimes v_{q_j}).$$

Тому $\mathrm{Alt}\circ\bigotimes_1^{q_j} B = \bigotimes_1^{q_j} B\circ\mathrm{Alt}$, зокрема, $\wedge^{q_j}B = \bigotimes_1^{q_j} B\Big|_{\Lambda^{q_j}\mathbb{C}^n}$. Отже,

$$\bigwedge_{j=1}^{k}(\wedge^{q_j}B)A_j = \mathrm{Alt}\circ\bigotimes_{j=1}^{k}\left(\bigotimes_1^{q_j}B\right)A_j = \mathrm{Alt}\circ\bigotimes_1^{q}B\circ\left(\bigotimes_{j=1}^{k}A_j\right)$$
$$= \bigotimes_1^{q}B\circ\mathrm{Alt}\circ\left(\bigotimes_{j=1}^{k}A_j\right) = \wedge^q B\left(\bigwedge_{j=1}^{k}A_j\right).$$

Доведення другої формули аналогічне. $\square$

Висновки

Дисертаційна робота присвячена дослідженню кореляційних функцій характеристичних поліномів розріджених ермітових випадкових матриць та неермітових випадкових матриць з незалежними елементами (комплексний і дійсний випадки). Ми встановили асимптотичну поведінку другої кореляційної функції характеристичних поліномів розріджених ермітових випадкових матриць як всередині спектра, так і на його межі та дослідили залежність встановленої асимптотичної поведінки від ступеню розрідженості матриць. Також ми обчислили асимптотичну поведінку всіх кореляційних функцій характеристичних поліномів слабко розріджених ермітових випадкових матриць всередині спектра. Крім того, встановлено асимптотичну поведінку всіх кореляційних функцій характеристичних поліномів комплексних та дійсних випадкових матриць з незалежними елементами.

У дисертації отримано такі нові результати:

- встановлено асимптотичну поведінку другої кореляційної функції характеристичних поліномів сильно розріджених ермітових випадкових матриць всередині спектра;
- встановлено асимптотичну поведінку другої кореляційної функції характеристичних поліномів слабко розріджених ермітових випадкових матриць на межі спектра;
- встановлено асимптотичну поведінку всіх кореляційних функцій характеристичних поліномів слабко розріджених ермітових випадкових матриць всередині спектра;
- досліджено залежність встановленої асимптотичної поведінки від ступеню розрідженості матриць;
- встановлено асимптотичну поведінку всіх кореляційних функцій характеристичних поліномів комплексних випадкових матриць з незалежними

елементами;

- встановлено асимптотичну поведінку всіх кореляційних функцій характеристичних поліномів дійсних випадкових матриць з незалежними елементами у вигляді інтеграла по деякій множині матриць скінченного розміру, причому цей інтеграл було точно обчислено для другої кореляційної функції.

Всі основні результати дисертації наведені з повними і строгими доведеннями. Отримані результати мають теоретичний характер. Зауважимо, що використаний метод грасманового інтегрування може застосовуватись для дослідження спектральних характеристик інших ансамблів випадкових матриць.

Список використаних джерел

1. Afanasiev, I.: On the second correlation function of characteristic polynomials of sparse hermitian random matrices. In: II International Conference "ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS": Book of abstracts, p. 29. B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv (2014)

2. Afanasiev, I.: Correlation function of two characteristic polynomials of diluted hermitian random matrices near the edge points of the spectrum. In: III International Conference "ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS": Book of abstracts, p. 16. B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv (2015)

3. Afanasiev, I.: On the Correlation Functions of the Characteristic Polynomials of the Sparse Hermitian Random Matrices. J. Stat. Phys. **163**(2), 324–356 (2016)

4. Afanasiev, I.: On the Second Mixed Moment of Characteristic Polynomials of Sparse Hermitian Random Matrices. In: Abstracts of Lectures and Talks: Trilateral German-Russian-Ukrainian Summer School "Spectral Theory, Differential Equations and Probability", p. 12. Johannes Gutenberg Universität Mainz, Mainz (2016)

5. Afanasiev, I.: On the Correlation Functions of the Characteristic Polynomials of Non-Hermitian Random Matrices with Independent Entries. J. Stat. Phys. **176**(6), 1561–1582 (2019)

6. Afanasiev, I.: On the Correlation Functions of the Characteristic Polynomials of the Non-Hermitian Random Matrices with Independent Entries. In: International Conference "Geometry, Differential Equations and Analysis": Book of abstracts, p. 39. V.N. Karazin Kharkiv National University and B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv (2019)

7. Afanasiev, I.: On the Correlation Functions of the Characteristic Polynomials of Real Random Matrices with Independent Entries. Журнал математичної фізики, аналізу, геометрії **16**(2), 89–116 (2020)

8. Akemann, G., Fyodorov, Y.V.: Universal random matrix correlations of ratios of characteristic polynomials at the spectral edges. Nucl. Phys. B **664**, 457–476 (2003)

9. Akemann, G., Götze, F., Neuschel, T.: Characteristic polynomials of products of Wigner matrices: finite-N results and Lyapunov universality (2020). Preprint arXiv:2006.15180 [math.PR]

10. Akemann, G., Kanzieper, E.: Integrable structure of Ginibre's ensemble of real random matrices and a Pfaffian integration theorem. J. Stat. Phys. **129**(5-6), 1159–1231 (2007)

11. Akemann, G., Vernizzi, G.: Characteristic polynomials of complex random matrix models. Nucl. Phys. B **660**(3), 532–556 (2003)

12. Anderson, G.W., Zeitouni, O.: A CLT for a band matrix model. Probab. Theory Relat. Fields **134**(2), 283–338 (2006)

13. Andreev, A.V., Simons, B.D.: Correlator of the Spectral Determinants in Quantum Chaos. Phys. Rev. Lett. **75**, 2304 (1995)

14. Aptekarev, A., Bleher, P., Kuijlaars, A.: Large n limit of Gaussian random matrices with external source, part II. Commun. Math. Phys. **25**, 367–389 (2005)

15. Arharov, L.V.: Limit theorems for the characteristic roots of a sample covariance matrix. Dokl. Akad. Nauk SSSR **199**, 994–997 (1971)

16. Arnold, L.: On Wigner's semicircle law for the eigenvalues of random matrices. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw Gebiete **19**(3), 191–198 (1971)

17. Assiotis, T., Keating, J.P., Warren, J.: On the joint moments of the characteristic polynomials of random unitary matrices (2020). Preprint arXiv:2005.13961v1 [math.PR]

18. Bai, Z.D., Silverstein, J.: CLT for linear spectral statistics of large-dimensional sample covariance matrices. Ann. Probab. **32**(1A), 553–605 (2004)

19. Baik, J., Ben Arous, G., Péché, S.: Phase transition of the largest eigenvalue for nonnull complex sample covariance matrices. Ann. Probab. **33**(5), 1643–1697 (2005)

20. Bailey, E.C., Bettin, S., Blower, G., Corney, J.B., Prokhorov, A., Rubinstein, M.O., Snaith, N.C.: Mixed moments of characteristic polynomials of random unitary matrices. J. Math. Phys. **60**, 083509 (2019)

21. Bao, Z., Erdős, L.: Delocalization for a class of random block band matrices. Probab. Theory Relat. Fields **167**, 673–776 (2017)

22. Bauer, M., Golinelli, O.: Random incidence matrices: moments and spectral density. J. Stat. Phys. **103**, 301–337 (2001)

23. Ben Arous, G., Péché, S.: Universality of local eigenvalue statistics for some sample covariance matrices. Commun. Pure Appl. Math. **58**(10), 1316–1357 (2005)

24. Berezin, F.A.: Introduction to superanalysis. No. 9 in Math. Phys. Appl. Math. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht (1987). Edited and with a foreword by A.A. Kirillov. With an appendix by V.I. Ogievetsky. Translated from the Russian by J. Niederle and R. Kotecký. Translation edited by Dimitri Leĭtes.

25. Bleher, P., Kuijlaars, A.: Large n limit of Gaussian random matrices with external source, part I. Commun. Math. Phys. **252**, 43–76 (2004)

26. Bordenave, C., Chafaï, D.: Around the circular law. Probab. Surv. **9**, 1–89 (2012)

27. Borodin, A., Sinclair, C.D.: The Ginibre Ensemble of Real Random Matrices and its Scaling Limits. Commun. Math. Phys. **291**, 177–224 (2009)

28. Borodin, A., Strahov, E.: Averages of characteristic polynomials in random matrix theory. Comm. Pure Appl. Math. **59**(2), 161–253 (2006)

29. Brézin, E., Hikami, S.: Characteristic polynomials of random matrices. Comm. Math. Phys. **214**, 111–135 (2000)

30. Brezin, E., Hikami, S.: Charcteristic polynomials of random matrices at edge singularities. Phys. Rev. E **62**(3), 3558–3567 (2000)

31. Brézin, E., Hikami, S.: Characteristic polynomials of real symmetric random matrices. Comm. Math. Phys. **223**, 363–382 (2001)

32. Brezin, E., Hikami, S.: New correlation functions for random matrices and integrals over supergroups. J. Phys. A: Math. Gen. **36**(3), 711–751 (2003)

33. Brezin, E., Zee, A.: Universality of the correlations between eigenvalues of large random matrices. Nucl. Phys. B **402**, 613–627 (1993)

34. Cabanal-Duvillard, T.: Fluctuations de la loi empirique de grandes matrices aléatoires. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **37**(3), 373–402 (2001)

35. Capitaine, M., Donati-Martin, C., Feral, D.: The largest eigenvalues of finite rank deformation of large Wigner matrices: convergence and nonuniver-sality of the fluctuations. Ann. Probab. **37**(1), 1–47 (2009)

36. Cipolloni, G., Erdős, L., Schröder, D.: Central limit theorem for linear eigenvalue statistics of non-Hermitian random matrices (2019). Preprint arXiv:1912.04100 [math.PR]

37. Cipolloni, G., Erdős, L., Schröder, D.: Edge universality for non-Hermitian random matrices (2019). Preprint arXiv:1908.00969v2 [math.PR]

38. Cipolloni, G., Erdős, L., Schröder, D.: Optimal lower bound on the least singular value of the shifted Ginibre ensemble (2019). Preprint arXiv:1908.01653v3 [math.PR]

39. Cipolloni, G., Erdős, L., Schröder, D.: Fluctuation around the circular law for random matrices with real entries (2020). Preprint arXiv:2002.02438v1 [math.PR]

40. Claeys, T., Kuijlaars, A.: Universality of the double scaling limit in random matrix models. Commun. Pure Appl. Math. **59**(11), 1573–1603 (2006)

41. Corney, J.B., Farmer, D.W., Zirnbauer, M.R.: Howe pairs, supersymmetry, and ratios of random characteristic polynomials for the unitary groups $U(N)$ (2005). Preprint arXiv:math-ph/0511024

42. Costin, O., Lebowitz, J.: Gaussian fluctuations in random matrices. Phys. Rev. Lett. **75**(1), 69–72 (1995)

43. Deaño, A., Simm, N.: Characteristic polynomials of complex random matrices and Painlevé transcendents. International Mathematics Research Notices, rnaa111 (2020)

44. Deift, P., Gioev, D., Kriecherbauer, T., Vanlessen, M.: Universality for orthogonal and symplectic Laguerre-type ensembles. J. Stat. Phys. **129**, 949–1053 (2007)

45. Deift, P., Kriecherbauer, T., McLaughlin, K.: Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory. Commun. Pure Appl. Math. **52**(11), 1335–1425 (1999)

46. Diaconis, P.: Patterns in eigenvalues. Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 155–178 (2003)

47. Diaconis, P., Evans, S.: Linear functionals of eigenvalues of random matrices. Trans. Amer. Math. Soc. **353**(7), 2615–2633 (2001)

48. Disertori, M.: Density of states for GUE through supersymmetric approach. Rev. Math. Phys. **16**(9), 1191–1225 (2004)

49. Disertori, M., Lager, M.: Density of States for Random Band Matrices in Two Dimensions. Ann. Henri Poincaré **18**, 2367–2413 (2017)

50. Disertori, M., Lager, M.: Supersymmetric Polar Coordinates with applications to the Lloyd model. Math. Phys. Anal. Geom. **23**(1), Paper No. 2, 21 pp. (2020)

51. Disertori, M., Lohmann, M., Sodin, S.: The density of states of 1D random band matrices via a supersymmetric transfer operator (2018). Preprint arXiv:1810.13150v1 [math.PR]

52. Disertori, M., Merkl, F., Rolles, S.: Localization for a Nonlinear Sigma Model in a Strip Related to Vertex Reinforced Jump Processes. Commun. Math. Phys. **332**, 783–825 (2014)

53. Disertori, M., Pinson, H., Spencer, T.: Density of states of random band matrices. Commun. Math. Phys. **232**, 83–124 (2002)

54. Disertori, M., Spencer, T., Zirnbauer, M.R.: Quasi-diffusion in a 3D supersymmetric hyperbolic sigma model. Comm. Math. Phys. **300**(2), 435–486 (2010)

55. Dyson, F.J.: A class of matrix ensembles. J. Math. Phys. **13**, 90–107 (1972)

56. Edelman, A.: The probability that a random real Gaussian matrix has k real eigenvalues, related distributions, and the circular law. J. Multivariate Anal. **60**(2), 203–232 (1997)

57. Efetov, K.: Supersymmetry in disorder and chaos. Cambridge University Press, Cambridge (1997)

58. Efetov, K.B.: Supersymmetry and theory of disordered metals. Adv. in Physics **32**(1), 53–127 (1983)

59. Erdős, L.: Universality of Wigner random matrices: a survey of recent results. Uspekhi Mat. Nauk. **66**(3), 67–198 (2011)

60. Erdős, L., Knowles, A., Yau, H.T., Yin, J.: Spectral statistics of Erdős–Rényi Graphs II: Eigenvalue spacing and the extreme eigenvalues. Commun. Math. Phys. **314**(3), 587–640 (2012)

61. Erdős, L., Péché, S., Ramírez, J., Schlein, B., Yau, H.T.: Bulk universality for Wigner matrices. Commun. Pure Appl. Math. **63**(7), 895–925 (2010)

62. Erdős, L., Ramírez, J., Schlein, B., Tao, T., Vu, V., Yau, H.T.: Bulk universality for Wigner hermitian matrices with subexponential decay. Math. Res. Lett. **17**(4), 667–674 (2010)

63. Erdős, L., Schlein, B., Yau, H.T., Yin, J.: The local relaxation flow approach to universality of the local statistics for random matrices. Annales de l'institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics **48**(1), 1–46 (2012)

64. Evangelou, S.N.: Quantum percolation and the Anderson transition in "dilute systems". Phys. Rev. B **27**, 1397–1400 (1983)

65. Evangelou, S.N.: A numerical study of sparse random matrices. J. Stat. Phys. **69**, 361–383 (1992)

66. Evangelou, S.N., Economou, E.N.: Spectral density singularities, level statistics, and localization in sparse random matrices. Phys. Rev. Lett **68**, 361–364 (1992)

67. Forrester, P., Nagao, T.: Eigenvalue statistics of the real Ginibre ensemble. Phys. Rev. Lett. **99**, 050603 (2007)

68. Forrester, P.J.: Fluctuation formula for complex random matrices. J. Phys. A **32**(13), L159–L163 (1999)

69. Fyodorov, Y.V.: Spectra of Random Matrices Close to Unitary and Scattering Theory for Discrete-Time systems. In: P. Sollich, et al. (eds.) Disordered and Complex Systems, *AIP Conference Proceedings*, vol. 553. Melville NY (2001)

70. Fyodorov, Y.V.: Negative moments of characteristic polynomials of random matrices: Ingham–Siegel integral as an alternative to Hubbard–Stratonovich transformation. Nucl. Phys. B **621**(3), 643–674 (2002)

71. Fyodorov, Y.V., Keating, J.: Freezing transitions and extreme values: random matrix theory, $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ and disordered landscape. Phil. Trans. R. Soc. A **372**, 20120503 (2014)

72. Fyodorov, Y.V., Keating, J.P.: Negative moments of characteristic polynomials of random GOE matrices and singularity-dominated strong fluctuations. J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 4035–4046 (2003)

73. Fyodorov, Y.V., Khoruzhenko, B.A.: Systematic Analytical Approach to Correlation Functions of Resonances in Quantum Chaotic Scattering. Phys. Rev. Lett. **83**(1), 65–68 (1999)

74. Fyodorov, Y.V., Khoruzhenko, B.A.: On absolute moments of characteristic polynomials of a certain class of complex random matrices. Commun. Math. Phys. **273**, 561–599 (2007)

75. Fyodorov, Y.V., Mirlin, A.D.: Localization in ensemble of sparse random matrices. Phys. Rev. Lett. **67**, 2049–2052 (1991)

76. Fyodorov, Y.V., Mirlin, A.D.: Scaling properties of localization in random band matrices: A σ-model approach. Phys. Rev. Lett. **67**, 2405–2409 (1991)

77. Fyodorov, Y.V., Mirlin, A.D.: Statistical properties of eigenfunctions of random quasi 1d one-particle Hamiltonians. Int. J. Mod. Phys. B **8**(27), 3795–3842 (1994)

78. Fyodorov, Y.V., Strahov, E.: Characteristic polynomials of random Hermitian matrices and Duistermaat-Heckman localisation on non-compact Kähler manifolds. Nucl. Phys. B **630**(3), 453–491 (2002)

79. Fyodorov, Y.V., Strahov, E.: On correlation functions of characteristic polynomials for chiral Gaussian unitary ensemble. Nucl. Phys. B **647**(3), 581–597 (2002)

80. Fyodorov, Y.V., Strahov, E.: An exact formula for general spectral correlation function of random Hermitian matrices. Random matrix theory. J. Phys. A **36**(12), 3203–3214 (2003)

81. Ginibre, J.: Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices. J. Mathematical Phys. **6**, 440–449 (1965)

82. Girko, V.L.: Asymptotics of the distribution of the spectrum of random matrices. Russ. Math. Surv. **44**, 3–36 (1989)

83. Girko, V.L.: Theory of random determinants. Kluwer: Academic Publishers Group, Dordrecht (1990)

84. Girko, V.L.: The circular law: ten years later. Random Oper. Stochastic Equations **2**(3), 235–276 (1994)

85. Girko, V.L.: Theory of stochastic canonical equations, vol. I. Kluwer: Academic Publishers Group, Dordrecht (2001)

86. Girko, V.L.: Theory of stochastic canonical equations, vol. II. Kluwer: Academic Publishers Group, Dordrecht (2001)

87. Girko, V.L.: The strong circular law. Twenty years later. I. Random Oper. Stochastic Equations **12**(1), 49–104 (2004)

88. Girko, V.L.: The strong circular law. Twenty years later. II. Random Oper. Stochastic Equations **12**(3), 255–312 (2004)

89. Girko, V.L.: The circular law. Twenty years later. III. Random Oper. Stochastic Equations **13**(1), 53–109 (2005)

90. Götze, F., Kösters, H.: On the second-order correlation function of the characteristic polynomial of a Hermitian Wigner matrix. Commun. Math. Phys. **285**, 1183–1205 (2008)

91. Guhr, T.: Supersymmetry. In: G. Akemann, J. Baik, P.D. Francesco (eds.) The Oxford Handbook of Random Matrix Theory, chap. 7, pp. 135–154. Oxford university press (2015)

92. Guhr, T., Müller-Groeling, A., Weidenmüller, H.A.: Random-matrix theories in quantum physics: common concepts. Phys. Rep. **299**, 189–425 (1998)

93. Guionnet, A.: Large deviations upper bounds and central limit theorems for non-commutative functionals of Gaussian large random matrices. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **38**(3), 341–384 (2002)

94. Haake, F., Kus, M., Sommers, H.J., Schomerus, H., Zyckowski, K.: Secular determinants of random unitary matrices. J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 3641–3658 (1996)

95. Hackenbroich, G., Weidenmüller, H.: Universality of random-matrix results for non-Gaussian ensembles. Phes. Rev. Lett. **74**(21), 4118–4122 (1995)

96. He, Y.: Bulk eigenvalue fluctuations of sparse random matrices (2019). Preprint arXiv:1904.07140 [math.PR]

97. Hua, L.K.: Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains. American Mathematical Society, Providence, RI (1963)

98. Huang, J., Landon, B., Yau, H.T.: Bulk universality of sparse random matrices. J. Math. Phys. **56**, 123301, 91pp. (2015)

99. Hughes, C.P., Keating, J.P., O'Connell, N.: Random matrix theory and the derivative of the Riemann zeta function. Proc. Math. Phys. Eng. Sci. **456**, 2611 (2000)

100. Johansson, K.: The longest increasing subsequence in a random permutation and a unitary random matrix model. Math. Res. Lett. **5**, 63–82 (1998)

101. Johansson, K.: On fluctuations of eigenvalues of random Hermitian matrices. Duke Math. J. **91**(1), 151–204 (1998)

102. Johansson, K.: Universality of the local spacing distribution in certain ensembles of hermitian Wigner matrices. Commun. Math. Phys. **215**(3), 683–705 (2001)

103. Johansson, K.: Univesality for certain hermitian Wigner matrices under weak moment conditions. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **48**(1), 47–79 (2012)

104. Jonsson, D.: Some limit theorems for the eigenvalues of a sample covariance matrix. J. Multivar. Anal. **12**(1), 1–38 (1982)

105. Kamien, R.D., Politzer, H.D., Wise, M.B.: Universality of random-matrix predictions for the statistics of energy levels. Phys. Rev. Lett. **60**(20), 1995–1998 (1988)

106. Katz, N., Sarnak, P.: Patterns in eigenvalues. American Mathematical Soc., Prividence, RI (1999). 419 p.

107. Keating, J.P., Snaith, N.C.: Random matrix theory and L-functions at s=1/2. Commun. Math. Phys. **214**, 91 (2000)

108. Keating, J.P., Snaith, N.C.: Random matrix theory and $\zeta(1/2+it)$. Commun. Math. Phys. **214**, 57–89 (2000)

109. Ketteman, S., Klakow, D., Smilansky, U.: Characterization of quantum chaos by the autocorrelation function of spectral determinants. J. Phys. A: Math. Gen. **30**, 3643 (1997)

110. Khorunzhiy, O.: On high moments and the spectral norm of large dilute Wigner random matrices. Журнал математичної фізики, аналізу, геометрії **10**(1), 64–125 (2014)

111. Khorunzhiy, O.: On high moments of strongly diluted large Wigner random matrices. Séminaire de Probabilités XLVIII, Lecture Notes in Mathematics **2168**, 347–399 (2016)

112. Khorunzhy, A., Khoruzhenko, B., Pastur, L.: On the 1/N corrections to the Green functions of random matrices with independent entries. J. Phys. A: Math. Gen. **28**(1), 31–35 (1995)

113. Khorunzhy, A., Khoruzhenko, B., Pastur, L., Shcherbina, M.: The Large-n Limit in Statistical Mechanics and Spectral Theory of Disordered Systems. In: Phase Transitions and Critical Phenomena, vol. 15, p. 73. Academic, New York (1992)

114. Khorunzhy, O., Shcherbina, M., Vengerovsky, V.: Eigenvalue distribution of large weighted random graphs. J. Math. Phys. **45**(4), 1648–1672 (2004)

115. Kopel, P.: Linear Statistics of Non-Hermitian Matrices Matching the Real or Complex Ginibre Ensemble to Four Moments (2015). Preprint arXiv:1510.02987v1 [math.PR]

116. Kösters, H.: On the second-order correlation function of the characteristic polynomial of a real symmetric Wigner matrix. Electron. Commun. Prob. **13**, 435–447 (2008)

117. Kösters, H.: Asymptotics of characteristic polynomials of Wigner matrices at the edge of the spectrum. Asymptot. Anal. **69**(3-4), 233–248 (2010)

118. Kösters, H.: Characteristic polynomials of sample covariance matrices: The non-square case. Centr. Eur. J. Math. **8**, 763–779 (2010)

119. Kösters, H.: Characteristic Polynomials of Sample Covariance Matrices. J. Theor. Probab. **24**, 545–576 (2011)

120. Kühn, R.: Spectra of sparse random matrices. J. Phys. A **41**(29), 295002, 21 (2008)

121. Littelmann, P., Sommers, H.J., Zirnbauer, M.: Superbosonization of invariant random matrix ensembles. Commun. Math. Phys. **283**, 343–395 (2008)

122. Lytova, A., Pastur, L.: Central limit theorem for linear eigenvalue statistics of random matrices with independent entries. Ann. Prob. **37**(5), 1778–1840 (2009)

123. Matrin, J.L.: Generalized classical dynamics, and the 'classical analogue' of a Fermi oscillator. Proc. Math. Phys. Eng. Sci. **251**(1267), 536–642 (1959)

124. Mehta, M.L.: Random matrices and the statistical theory of energy levels. Academic Press, New York–London (1967)

125. Mehta, M.L.: Random Matrices, second edn. Academic Press Inc., Boston (1991)

126. Mehta, M.L., Normand, J.M.: Moments of the characteristic polynomial in the three ensembles of random matrices. J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 4627–4639 (2001)

127. Mirlin, A.D., Fyodorov, Y.V.: Universality of level correlation function of sparse random matrices. J. Phys. A **24**, 2273–2286 (1991)

128. de Monvel, A.B., Pastur, L., Shchrbina, M.: On the statistical mechanics approach to the random matrix theory: the integrated density of states. J. Stat. Phys. **79**(3-4), 585–611 (1995)

129. Moore, G.: Matrix models of 2D gravity and isomonodromic deformation. Progr. Theor. Phys. Suppl. **102**, 255–285 (1991)

130. Nagao, T., Wadati, M.: Correlation functions of random matrix ensembles related to classical orthogonal polynomials. J. Phys. Soc. Japan **60**(10), 3298–3322 (1991)

131. O'Rourke, S., Renfrew, D.: Central limit theorem for linear eigenvalue statistics of elliptic random matrices. J. Theoret. Probab. **29**, 1121–1191 (2016)

132. Pastur, L.: Limiting laws of linear eigenvalue statistics for hermitian matrix models. J. Math. Phys. **47**(10), 103303 (2006). URL `https://doi.org/10.1063/1.2356796`

133. Pastur, L., Shcherbina, M.: On the edge universality of the local eigenvalue statistics of matrix models. Математическая физика, анализ, геометрия **10**(3), 335–365 (2003)

134. Pastur, L., Shcherbina, M.: Bulk Universality and related properties of Hermitian matrix model. J. Stat. Phys. **130**(2), 205–250 (2007)

135. Pastur, L., Shcherbina, M.: Eigenvalue Distribution of Large Random Matrices, *Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 171. American mathematical sociaty (2011)

136. Pastur, L.A.: A simple approach to the global regime of Gaussian ensembles of random matrices. Український математичний журнал **57**(6), 790–817 (2005)

137. Pastur, L.A., Shcherbina, M.: Universality of the local eigenvalue statistics for a class of unitary invariant random matrix ensembles. J. Stat. Phys. **86**, 109–147 (1997)

138. Péché, S.: The largest eigenvalue of small rank perturbations of Hermitian random matrices. Probab. Theory Relat. Fields **134**, 127–173 (2006)

139. Pólya, G., Szegő, G.: Problems and theorems in analysis II. Theory of functions, zeros, polynomials, determinants, number theory, geometry, *Springer Study Edition*. Springer-Verlag, New York–Heidelberg (1976)

140. Poplavskyi, M.: Bulk universality for unitary matrix models. Журнал математичної фізики, аналізу, геометрії **5**(3), 245–274 (2009)

141. Recher, C., Kieburg, M., Guhr, T., Zirnbauer, M.R.: Supersymmetry approach to Wishart correlation matrices: Exact results. J. Stat. Phys. **148**(6), 981–998 (2012)

142. Rider, B., Silverstein, J.: Gaussian fluctuations for non-Hermitian random matrix ensembles. Ann. Probab. **34**(6), 2118–2143 (2006)

143. Rider, B., Virag, B.: The noise in the circular law and the Gaussian free field. Int. Math. Res. Not. IMRN **2**, Art. ID rnm006, 33 pp (2007)

144. Rodgers, G.J., Bray, A.J.: Density of states of a sparse random matrix. Phys. Rev. B **37**, 3557–3562 (1988)

145. Rodgers, G.J., De Dominicis, C.: Density of states of sparse random matrices. J. Phys. A: Math. Gen. **23**, 1567–1573 (1990)

146. Shamis, M.: Density of states for Gaussian unitary ensemble, Gaussian orthogonal ensemble, and interpolating ensembles through supersymmetric approach. J. Math. Phys. **54**, 113505 (2013)

147. Shcherbina, M.: Central limit theorem for linear eigenvalue statistics of orthogonally invariant matrix models. Журнал математичної фізики, аналізу, геометрії **4**(1), 171–195 (2008)

148. Shcherbina, M.: Edge universality for orthogonal ensembles of random matrices. J. Stat. Phys. **136**(1), 35–50 (2009)

149. Shcherbina, M.: On universality for orthogonal ensembles of random matrices. Commun. Math. Phys. **285**, 957–974 (2009)

150. Shcherbina, M.: Central Limit Theorem for Linear Eigenvalue Statistics of the Wigner and Sample Covariance Random Matrices. Журнал математичної фізики, аналізу, геометрії **7**(2), 176–192 (2011)

151. Shcherbina, M.: Orthogonal and Symplectic Matrix Models: Universality and Other Properties. Commun. Math. Phys. **307**, 761 (2011). `http://dx.doi.org/10.1007/s00220-011-1351-5`

152. Shcherbina, M., Shcherbina, T.: Transfer matrix approach to 1d random band matrices: density of states. J. Stat. Phys. **164**(6), 1233–1260 (2016)

153. Shcherbina, M., Shcherbina, T.: Characteristic polynomials for 1D random band matrices from the localization side. Comm. Math. Phys. **351**(3), 1009–1044 (2017)

154. Shcherbina, M., Shcherbina, T.: Transfer operator approach to 1d random band matrices. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018, vol. 3, pp. 2687–2707. World Sci. Publ., Hackensack, NJ (2018)

155. Shcherbina, M., Shcherbina, T.: Universality for 1d random band matrices: sigma-model approximation. J. Stat. Phys. **172**(2), 627–664 (2018)

156. Shcherbina, M., Shcherbina, T.: Universality for 1 d random band matrices (2019). Preprint arXiv:1910.02999 [math-ph]

157. Shcherbina, M., Tirozzi, B.: Central limit theorem for fluctuations of linear eigenvalue statistics of large random graphs. J. Math. Phys. **51**(2), 023523, 20 pp. (2010)

158. Shcherbina, M., Tirozzi, B.: Central limit theorem for fluctuations of linear eigenvalue statistics of large random graphs: diluted regime. J. Math. Phys. **53**(4), 043501, 18 pp. (2012)

159. Shcherbina, T.: On the correlation function of the characteristic polynomials of the Hermitian Wigner ensemble. Comm. Math. Phys. **308**, 1–21 (2011)

160. Shcherbina, T.: On the correlation functions of the characteristic polynomials of the Hermitian sample covariance matrices. Probab. Theory Relat. Fields **156**, 449–482 (2013)

161. Shcherbina, T.: On the second mixed moment of the characteristic polynomials of 1D band matrices. Commun. Math. Phys. **328**(1), 45–82 (2014)

162. Shcherbina, T.: Universality of the second mixed moment of the characteristic polynomials of the 1d band matrices: real symmetric case. J. Math. Phys. **56**, 063303, 23 pp. (2015). DOI 10.1063/1.4922621

163. Sodin, S.: On the critical points of random matrix characteristic polynomials and of the riemann ζ-function. Q. J. Math. **69**(1), 183–210 (2017)

164. Soshnikov, A.: Universality at the edge of the spectrum in Wigner random matrices. Commun. Math. Phys. **207**(3), 697–733 (1999)

165. Soshnikov, A.: The central limit theorem for local linear statistics in classical compact groups and related combinatorial identities. Ann. Probab. **28**(3), 1353–1370 (2000)

166. Soshnikov, A.: A note on universality of the distribution of the largest eigenvalues in certain sample covariance matrices. J. Stat. Phys. **108**, 1033–1056 (2002)

167. Stojanovic, A.: Universality in orthogonal and symplectic invariant matrix models with quatric potentials. Math. Phys. Anal. Geom. **3**(4), 339–373 (2002)

168. Strahov, E., Fyodorov, Y.V.: Universal results for correlations of characteristic polynomials: Riemann-Hilbert approach. Comm. Math. Phys. **241**(2-3), 343–382 (2003)

169. Tao, T., Vu, V.: Random matrices: universality of ESDs and the circular law. Ann. Probab. **38**(5), 2023–2065 (2010). With an appendix by Manjunath Krishnapur

170. Tao, T., Vu, V.: Random matrices: universality of local eigenvalue statistics up to the edge. Commun. Math. Phys. **298**(2), 549–572 (2010)

171. Tao, T., Vu, V.: Random matrices: universality of local eigenvalue statistics. Acta Math. **206**, 127–204 (2011)

172. Tao, T., Vu, V.: Random matrices: universality of local spectral statistics of non-Hermitian matrices. Ann. Probab. **43**(2), 782–874 (2015)

173. Tieplova, D.: Distribution of Eigenvalues of Sample Covariance Matrices with Tensor Product Samples. Журнал математичної фізики, аналізу, геометрії **13**(1), 82–98 (2017)

174. Tracy, C., Widom, H.: Level spacing distributions and the Airy kernel. Commun. Math. Phys. **159**(1), 151–174 (1994)

175. Vanlessen, M.: Universal Behavior for Averages of Characteristic Polynomials at the Origin of the Spectrum. Commun. Math. Phys. **253**, 535–560 (2005)

176. Verbaarschot, J.J.M., Weidenmüller, H.A., Zirnbauer, M.R.: Grassmann integration in stochastic quantum physics: The case of compound-nucleus scattering. Phys. Rep. **129**(6), 367–438 (1985)

177. Verbaarschot, J.J.M., Zirnbauer, M.R.: Critique of the replica trick. J. Phys. A: Math. Gen. **18**(7), 1093 (1985)

178. Vinberg, E.B.: A Course in Algebra. American Mathematical Society, Providence, RI (2003)

179. Webb, C., Wong, M.D.: On the moments of the characteristic polynomial of a Ginibre random matrix. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **118**(5), 1017–1056 (2019)

180. Wigner, E.: On the statistical distribution of the widths and spacings of nuclear resonance levels. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **47**(4), 790–798 (1951)

181. Wigner, E.: Characteristic vectors of bordered matrices of infinite dimensions II. Annals of Mathematics **65**(2), 203–207 (1955)

182. Wigner, E.: Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. Annals of Mathematics **62**, 548–564 (1955)

183. Wigner, E.: On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. Annals of Mathematics **67**, 325–327 (1958)

184. Wigner, E.: Random matrices in physics. SIAM Reviews **9**, 1–23 (1967)

185. Zirnbauer, M.R.: Supersymmetry for systems with unitary disorder: circular ensembles. J. Phys. A: Math. Gen. **29**(22), 7113–7136 (1996). DOI 10.1088/0305-4470/29/22/013. URL `https://doi.org/10.1088%2F0305-4470%2F29%2F22%2F013`

186. Zirnbauer, M.R.: The supersymmetry method of random matrix theory. In: Encyclopedia of mathematical physics, vol. 5, pp. 151–160. Elsevier (2006). arXiv:math-ph/0404057

187. Zuk, J.A.: Introduction to the Supersymmetry Method for the Gaussian Random-Matrix Ensembles (1994). arXiv:cond-mat/9412060

188. Березин, Ф.А.: Алгебра и анализ с антикоммутирующими переменными. Издательство МГУ, Москва (1983)

189. Гирко, В.Л.: Круговой закон. Теория вероятн. и её примен. **29**(4), 669–679 (1984)

190. Гирко, В.Л.: Случайные матрицы. Вища школа, Киев (1975)

191. Марченко, В.А., Пастур, Л.А.: Распределение собственных значений в некоторых ансамблях случайных матриц. Математический сборник **72(114)**(4), 507–536 (1984)

192. Пастур, Л.А.: О спектре случайных матриц. Теоретическая и математическая физика **10**(1), 102–112 (1972)

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Afanasiev, I.: On the Correlation Functions of the Characteristic Polynomials of Real Random Matrices with Independent Entries. Журнал математичної фізики, аналізу, геометрії. **16**(2), 91–118 (2020)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar; Impact Factor: 0.227; квартиль Q3)

Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

2. Afanasiev, I.: On the Correlation Functions of the Characteristic Polynomials of the Sparse Hermitian Random Matrices. J. Stat. Phys. **163**(2), 324–356 (2016)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar, zbMATH; Impact Factor: 1.349; квартиль Q2)

3. Afanasiev, I.: On the Correlation Functions of the Characteristic Polynomials of Non-Hermitian Random Matrices with Independent Entries. J. Stat. Phys. **176**(6), 1561–1582 (2019)

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar, zbMATH; Impact Factor: 1.243; квартиль Q2)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

4. Afanasiev, I.: On the second correlation function of characteristic polynomials of sparse hermitian random matrices. In: II International Conference "ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS": Book of abstracts, p. 29. B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv (2014)

5. Afanasiev, I.: Correlation function of two characteristic polynomials of diluted hermitian random matrices near the edge points of the spectrum. In: III International Conference "ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS": Book of abstracts, p. 16. B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv (2015)

6. Afanasiev, I.: On the Second Mixed Moment of Characteristic Polynomials of Sparse Hermitian Random Matrices. In: Abstracts of Lectures and Talks: Trilateral German-Russian-Ukrainian Summer School "Spectral Theory, Differential Equations and Probability", p. 12. Johannes Gutenberg Universität Mainz, Mainz (2016)

7. Afanasiev, I.: On the Correlation Functions of the Characteristic Polynomials of the Non-Hermitian Random Matrices with Independent Entries. In: International Conference "Geometry, Differential Equations and Analysis": Book of abstracts, p. 39. V.N. Karazin Kharkiv National University and B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv (2019)