ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В 1969 году Б.Я. Левин организовал в Физико-техническом институте низких температур АН Украины отдел теории функций, который в 80–90-е годы стал одним из ведущих исследовательских центров в мире в области теории функций. В разное время сотрудниками отдела были И.В. Островский, Л.И. Ронкин, В.А. Ткаченко, Г.Р. Белицкий, И.Е. Овчаренко, П.З. Агранович, Г.П. Чистяков, Г.М. Фельдман, Ю.И. Любарский, М.В. Новицкий, А.Е. Фрынтов, А.Э. Еременко, М.Л. Содин, Л.Б. Голинский, А.М. Руссаковский, А.Ю. Рашковский, П.М. Юдицкий, Л.В. Фардигола, А.И. Даниленко. Большинство этих математиков — это или ученики Б.Я. Левина или ученики его учеников. Не претендуя на полноту, ниже будут вкратце описаны основные результаты, полученные в отделе за 40 лет его работы. Будут упомянуты также и некоторые результаты, полученные в то время, когда их авторы еще (или уже) не были сотрудниками отдела.

Математические работы Б.Я. Левина открывали новые подходы и новые направления исследований, которые впоследствии разрабатывались многими математиками. Им (и независимо А. Пфлюгером) была создана теория целых функций вполне регулярного роста. Монография Б.Я. Левина "Распределение корней целых функций" известна математикам во всем мире и до настоящего времени является настольной книгой многих математиков. Она переведена на английский и немецкий языки.

Знаменитая работа Б.Я. Левина и И.В. Островского содержала новый подход к классическим задачам о распределении нулей производных вещественных целых функций, восходящим к Лагерру, А. Виману и Д. Полиа. Эта работа определила направление и методы исследований в этой области в последние полвека. Ее дальнейшее развитие (С. Геллерштейн, Дж. Вильямсон, Т. Шейл–Смол, В. Бергвайлер, В. Фукс, А.Э. Еременко, Дж. Лэнгли и другие) привело в начале 2000-х к полному доказательству главных гипотез о распределении нулей последовательных производных, высказанных А. Виманом (1911) и Д. Полиа (1943).

Б.Я. Левин разработал теорию, которая привела к новому пониманию и к далеким обобщениям классической теоремы С.Н. Бернштейна о производной целой функции экспоненциального типа.

Б.Я. Левин ввел операторы преобразования для уравнения Штурма–Лиувилля, сохраняющие асимптотику решений на бесконечности. Эти операторы являются основным инструментом в теории обратных задач рассеяния.

Развитые Б.Я. Левиным новые методы в теории негармонических рядов Фурье позволили по-новому переосмыслить классические результаты Винера–Пэли и Левинсона и, в конечном счете, привели к полному описанию базисов Рисса из экспонент в $L^2(-\pi,\pi)$. В рамках подхода Б.Я. Левина и под влиянием работы В.А. Марченко–И.В. Островского новый подход к этой проблеме был предложен А.Э. Еременко и М.Л. Содиным. Недавно этот подход привел к параметрическому описанию последовательностей $\{e^{i\lambda_k x}\}$ с вещественными λ_k, которые являются безусловными базисами Рисса.

Б.Я. Левин внес ценный вклад в теорию весовой полноты многочленов и линейных комбинаций экспонент и тесно связанную с ней теорию квазианалитических классов функций. На протяжении многих лет он неоднократно возвращался к этому кругу вопросов. В 90-х годах это направление активно развивалось сотрудниками отдела теории функций. Новые результаты были получены А.Е. Фрынтовым (решение задачи П. Кусиса о весовой полноте многочленов в пространстве $L^2(\mu)$, где мера сосредоточена в точках $\{n^p\}_{n\in\mathbb{N}}, p > 2$, М.Л. Содиным (задача Мергеляна–Эренпрайса о полноте многочленов в весовых пространствах с асимметричным весом), А.А. Боричевым и М.Л. Содиным (исследование канонических решений неопределенной проблемы моментов Гамбургера), П.М. Юдицким (решение задачи К. Берга об устойчивости полноты многочленов в пространстве $L^2(\mu)$ при экспоненциально малых возмущениях меры μ.

Созданная Б.Я. Левиным теория субгармонических мажорант позволила решить ряд экстремальных задач в различных классах целых функций и ряд задач о квазианалитичности. С помощью этой техники А.Ю. Рашковским было дано полное описание радиальных проекций гармонических мер ограниченных звездных областей, что позволило усилить классические теоремы Левинсона–Сьоберга.

Для Б.Я. Левина было характерно умение увидеть связь между различными разделами математики. Его результаты были использованы в теории обобщенных функций, в теории операторов, в теории банаховых алгебр.

Б.Я. Левиным была создана в Харькове научная школа. Много оригинальных и глубоких математических проблем было найдено им и предложено для исследования своим ученикам.

И.В. Островским были получены фундаментальные результаты в арифметике вероятностных законов. Ему удалось значительно развить метод Ю.В. Линника и получить существенное продвижение в проблеме описания класса I_0 вероятностных распределений, не имеющих неразложимых компонент. Опубликованная на эту тему им, совместно с Ю.В. Линником, монография "Разложения случайных величин и векторов"получила широкое международное признание.

Исследования разрешимости периодической задачи Коши для уравнения КдФ привели к необходимости нового подхода к решению обратной задачи спектрального анализа для уравнения Хилла, что и было сделано в совместных работах В.А. Марченко и И.В. Островского 1975 года. В частности, в этих работах была получена эффективная и естественная параметризация спектральных данных в терминах конформного отображения верхней полуплоскости на верхнюю полуплоскость с вертикальными разрезами (“гребенку”), соответствующего квазиимпульсу уравнения Хилла. В рамках этого отображения была впервые охарактеризована геометрия спектра оператора Хилла, предложен минимальный набор независимых спектральных данных и решена обратная задача спектрального анализа.

Новая параметризация спектральных данных оператора Хилла позволила доказать важный и имеющий многочисленные применения результат об аппроксимации произвольных периодических потенциалов заданной гладкости конечнозонными. В приложениях теоремы о плотности множества конечнозонных потенциалов часто оказывается небходимым дать явную конструкцию последовательности конечнозонных потенциалов, сходящихся к данному периодическому потенциалу, и оценить скорость сходимости. Ответы на эти вопросы вместе с эффективными оценками скорости сходимости в терминах высоты зубьев “гребенки” были даны в работе В.А. Марченко и И.В. Островского 1980 года.

Дальнейшее развитие метода обратной спектральной задачи для периодического оператора Хилла позволило Л.А. Пастуру и В.А. Ткаченко построить спектральную теорию операторов Шредингера с предельно-периодическим по Степанову потенциалом, допускающим сверхэкспоненциально быструю аппроксимацию периодическими функциями. Было получено полное описание независимых спектральных данных, однозначно определяющих потенциал, доказана абсолютная непрерывность спектра, квазиблоховский характер собственных функций, описана геометрия спектра в ситуации общего положения являющегося канторовским множеством положительной меры. В дальнейшем Л. Пастуром и В. Ткаченко была построена спектральная теория опера- тора Шредингера с комплексным периодическим потенциалом, отрицательные коэффициенты ряда Фурье которого равны нулю. Была дана характеризация множества независимых спектральных данных и решена обратная спектральная задача. Одним из приложений периодической спектральной теории, развитой В.А. Марченко и И.В. Островским, явились результаты М.В. Новицкого по описаниям спектров оператора Хилла с потенциалом, принадлежащим некоторому классу Карлемана, в котором были получены точные оценки связи между скоростью убывания длин лакун в спектре и ростом интегралов движения. Используя эти оценки он доказал, что спектр такого оператора может быть однозначно восстановлен по полиномиальным законам сохранения для уравнения КдФ тогда и только тогда, когда этот класс квазианалитичен.

В цикле работ 80-х годов И.В. Островским (совместно с А.А. Гольдбергом и рядом своих учеников) подробно исследовано асимптотическое поведение целых характеристических функций и распределение их корней. В частности, получено описание индикаторов целых характеристических функций конечного порядка и нулевых множеств целых характеристических функций.

В начале 90-х годов И.В. Островский опубликовал цикл работ, относящихся к созданной Н.В.Говоровым теории краевой задачи Римана с бесконечным индексом. В них существенно ослаблены условия, обеспечивающие ее разрешимость.

Большой цикл работ И.В. Островского посвящен исследованию классов комплекснозначных мер, в которых имеет место однозначная определенность сужениями на полуось. Оказалось, что этот круг вопросов тесно связан со многими классическими задачами теории функций: теоремой Титчмарша о свертке, второй основной теоремой Неванлинны–Картана для аналитических вектор-функций, факторизацией функций в классах Харди и другими.

Другое направление исследований И.В. Островского связано с изучением зависимости между частотой осцилляций вещественной функции или распределения и гладкостью ее преобразования Фурье. Отправной точкой этих исследований явилась гипотеза Дж. Хиггинса и В. Уолкера о том, что в классе функций Винера–Пэли (то есть в классе целых функций экспоненциального типа, суммируемых с квадратом на вещественной оси) нет неосциллирующих, то есть таких функций, все производные которых имеют только конечное число вещественных нулей. В совместных работах И.В. Островского и А.М. Улановского эта гипотеза была опровергнута и класс неосциллирующих функций был подвергнут глубокому изучению. Исследуемый вопрос оказался тесно связанным с известным в аналитической теории вероятностей принципом, согласно которому, если преобразование Фурье положительной интегрируемой функции или конечной (положительной) меры гладко в нуле, то оно гладко на всей вещественной оси. В частности, согласно теореме П. Леви–Д.А. Райкова–Й. Марцинкевича, если преобразование Фурье конечной меры аналитически продолжается на интервал $(0, ir)$ комплексной плоскости, то оно допускает аналитическое продолжение в полосу $\{t : 0 < \operatorname{Im} t < r\}$. И.В. Островским и А.М. Улановским получены далеко идущие обобщения этой теоремы, в частности, на растущие функции и распределения.

Следует отметить также еще несколько из работ И.В.Островского, выполненных им совместно с другими математиками: с С. Коцем, А. Хайфави, М.Б. Эрдоганом об аналитических и асимптотических свойствах плотностей с характеристическими функциями $(1 + |t|^\alpha)^{-1}$ $(0 < \alpha < 2)$, введенных в 1953 г. Ю.В. Линником; с Р. Джонсом и Й. Розенблаттом по эргодической теории; с Ф.Б. Паковичем и М.Г. Зайденбергом о теореме единственности для многочленов; с В.И. Мацаевым и М.Л. Содиным, дающие новые подходы к классическим задачам о преобразовании Гильберта; с А.М. Улановским и С. Гергюн о справедливости представления Пуассона и его обобщений гармонических в полуплоскости функций при условиях на рост в полуплоскости, значительно более слабых, чем в классических теоремах, и, как следствие, о новом варианте теоремы Титчмарша о свертке.

Монография А.А. Гольдберга и И.В. Островского "Распределение значений мероморфных функций"написанная в 1970 году, до сих пор не утратила своей актуальности. Ее перевод опубликован Американским математическим обществом в 2008 году.

Развивая идеи Ю.В. Линника и И.В. Островского, Г.П. Чистяков создал новый аналитический метод получения оценок устойчивости разложений широких классов безгранично делимых законов, В частности им (совместно с Л.Б. Голинским) были найдены точные в смысле порядка оценки устойчивости теоремы Г. Крамера о разложении закона Гаусса, теоремы Д.А. Райкова о разложениях закона Пуассона, теоремы Ю.В. Линника о разложениях свертки законов Гаусса и Пуассона.

Г.П. Чистяков создал новый подход к проблеме описания класса I_0, связанный с использованием оценок устойчивости разложений широких классов безгранично делимых законов. С помощью этого подхода ему удалось решить ряд старых задач об описании класса I_0. В частности, удалось дать полное описание класса I_0 в классе решетчатых законов и законов с гауссовой компонентой и характеристическими функциями аналитическими в окрестности нуля. Как следствие этих результатов, была решена задача Ю.В. Линника, поставленная в 1959 году об условиях принадлежности классу I_0 законов с гауссовой компонентой и целыми характеристическими функциями.

В 1953 году А.Н. Колмогоров поставил задачу о нахождении точной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена. Эта задача до сих пор не решена. Кроме того он поставил задачу о нахождении асимптотически правильной постоянной в центральной предельной теореме Ляпунова в классах слагаемых с фиксированной дробью Ляпунова. Развивая классические подходы Эссена и Ю.В. Линника, Г.П. Чистякову удалось получить новое асимптотическое разложение в теореме Ляпунова и с его помощью решить задачу Колмогорова об асимптотически правильных постоянных в этой теореме.

В 1973 году Б.Ф. Логан и др. нашли достаточные условия сходимости распределений статистик Стьюдента для повторных выборок размерности, стремящейся к бесконечности. Они же поставили задачу о доказательстве необходимости полученных ими условий. Эта задача была широко известна среди специалистов и долгое время не поддавалась решению. В 2004 году Г.П. Чистяков совместно с Ф. Гетце на базе нового аналитического подхода решили эту задачу.

В последние 20 лет интенсивно развивается так называемая свободная теория вероятностей. Основным понятием этой новой теории является понятие свободы некоммутативных случайных величин, введенное Д.В. Войкулеску. Опираясь на теорию неванлиновских функций, Г.П. Чистякову совместно с Ф. Гетце удалось найти аналоги предельных теорем для не одинаково распределенных свободных случайных величин. Им удалось также доказать основные теоремы арифметики вероятностных мер в полугруппе вероятностных мер относительно операций аддитивной и мультипликативной свободных сверток.

Г.М. Фельдманом (совместно с Ю.И. Любичем и В.И. Мацаевым) в 70-е годы были изучены неквазианалитические представления T локально компактной абелевой группы G в банаховом пространстве B и доказана отделимость спектра $\sigma(T)$ таких представлений. В частности, доказано существование общего инвариантного подпространства у всех операторов представления в случае, если спектр представления содержит более чем одну точку. Г.М. Фельдман обнаружил интересную связь между спектром $\sigma(T)$ и спектром Берлинга семейства функций $\varphi(T_g x),\ x \in B,\ \varphi \in B^*$. Основываясь на этой связи им была доказана полупростота банаховой алгебры, порожденной изометрическим оператором со счетным спектром в банаховом пространстве.

Исследования И.В. Островского по арифметике вероятностных законов были продолжены Г.М. Фельдманом, который построил теорию разложений случайных величин принимающих значения в локально компактной абелевой группе X. В этой области до начала исследований Г.М. Фельдмана имелось лишь небольшое число отдельных результатов. Оказалось, что справедливость на группе X той или иной арифметической теоремы не только зависит от структуры группы X, но и определяет эту структуру. Г.М. Фельдманом, в частности, были полностью описаны группы, на которых справедлив аналог теоремы Крамера о разложении гауссовского распределения; в совместной работе с А.Е. Фрынтовым на группы, связная компонента нуля которых не содержит подгруппы топологически изоморфной бесконечному тору, перенесена теорема Ю.В. Линника о принадлежности классу I_0 свертки гауссовского и пуассоновского распределений; полностью охарактеризованы группы, на которых класс I_0 плотен в классе всех безгранично делимых распределений, и группы, на которых класс I_0 является базисом в классе всех безгранично делимых распределений (аналоги теорем И.В. Островского); получены обобщения теорем Д.А. Райкова, П. Леви, И.В. Островского, Р. Кюппана о принадлежности классу I_0 обобщенного распределения Пуассона.

В 1990–2000-е годы большое внимание уделялось перенесению характеризационных теорем математической статистики на различные алгебраические структуры, такие как локально компактные абелевы группы, группы Ли, квантовые группы, симметрические пространства (Х. Хейер, Ч. Ролл, А.Л. Рухин, Р. Грачик, Ж.–Ж. Лоеб, Д. Ноеншвандер, Шотт и др.). Г.М. Фельдман разработал методы, позволившие ему доказать групповые аналоги классических характеризационных теорем математической статистики (теоремы М. Каца–С.Н. Бернштейна, Д. Полиа, Ю.В. Линника, В.П. Скитовича–Г. Дармуа) в ситуации, когда случайные величины принимают значения в различных классах локально компактных абелевых групп (дискретные, компактные и др.). Ряд важных характеризационных теорем был доказан в совместных работах Г.М. Фельдмана и М.В. Миронюк.

На основе полученных Г.М. Фельдманом результатов им были написаны две монографии "Arithmetic of probability distributions and characterization problems on Abelian groups"и "Functional equation and characterization problems on locally compact Abelian groups", изданные соответственно Американским математическим обществом в 1993 году и Европейским математическим обществом в 2008 году.

Теория роста и распределения нулей целых функций многих переменных была развита Л.И. Ронкиным. Его книга "Введение в теорию целых функций многих переменных,"переведенная в США, пользуется заслуженным авторитетом среди математиков, работающих в области многомерного анализа.

Л.И. Ронкин получил основополагающие результаты в таких вопросах многомерного комплексного анализа, как квазианалитические классы функций, дискретные множества единственности и полнота систем экспонент, сепаратно-аналитические функции, интерполяция с алгебраических и псевдоалгебраических множеств, комплексные операторы Монжа-–Ампера, многомерная Неванлинновская теория. Предложенный им метод слабой сходимости в пространствах обобщенных функций открыл новый подход к теории функций вполне регулярного роста, который оказался плодотворным для изучения различных классов функций. Результаты, полученные Л.И. Ронкиным, учениками и коллегами из разных стран, составили содержание его книги "Functions of completely regular growth,"изданной в 1992 году в Голландии.

Значительный вклад был внесен Л.И. Ронкиным в теорию аналитических почти- периодических функций и отображений. Им были получены многомерные аналоги классической теоремы Йессена о связи роста почти-периодической функции с распределением ее нулей. Разработанная им теория обобщенных почти-периодических функций оказалась удивительно эффективной и позволила ему и его ученикам А.Ю. Рашковскому и С.Ю. Фаворову исследовать такие общие понятия, как почти периодические потоки, дивизоры и голоморфные цепи. При этом новые результаты общего характера были получены даже в такой хорошо изученной области, как аналитические почти-периодические функции в полосе. Кроме того, в опубликованной в 2001 г. статье Л.И. Ронкиным был введен объект, который впоследствии получил широкую мировую известность под названием "функция Ронкина"и стал базовым инструментом идемпотентного (тропического) анализа.

Часть результатов, относящихся к функциям вполне регулярного роста и интерполяции, были получены Л.И. Ронкиным в сотрудничестве с его учениками П.З. Агранович, А.Ю. Рашковским и А.М. Руссаковским. А.Ю. Рашковским (совместно с Л.И. Ронкиным) была также построена теория роста субгармонических функций конечного порядка в конусе. Кроме того, им были получены глубокие результаты о сингулярностях плюрисубгармонических функций.

Связь между многочленным асимптотическим представлением субгармонической в плоскости функции и функцией распределения ее меры Рисса изучена в серии работ П.З. Агранович.

В 1984 году были опубликованы фундаментальные работы А. Э. Еременко (совместно с М.Ю. Любичем), посвященные изучению динамики трансцендентных функций. Впервые использовав в этой области теорию аппроксимации целыми функциями, они построили ряд патологических примеров. Затем они выделили некоторые подклассы целых функций (которые они называют B и S), в которых основные патологии отсутствуют и доказали основные результаты о динамике функций из этих классов. Все эти результаты были впоследствии подытожены в работе А. Э. Еременко и М.Ю. Любича, которая во многом определила развитие динамики целых функций в последующие годы.

В 1987 году А. Э. Еременко ввел для произвольной целой функции так называемое "убегающее множество"и доказал его основные свойства. С тех пор убегающее множество является одним из основных объектов изучения в исследовании динамики целых функций.

Значительное число недавних работ посвящено исследованию "гипотезы Еременко"об убегающем множестве, которая до сих пор не доказана, несмотря на ряд глубоких результатов в этом направлении. Постепенно становится ясным, что именно это убегающее множество является главным объектом изучения в динамике трансцендентных целых функций, что именно этот этот объект выделяет динамику целых функций из более широкой области голоморфной динамики.

В 1980-1990-х годах А. Э. Еременко и М. Л. Содин разработали новый теоретико-потенциальный метод в теории распределения значений мероморфных функций и голоморфных кривых в проективном пространстве. В последствии этот метод был далее развит в работах А.Э. Еременко, Дж. Льюиса и И. Холопайнена. Эти авторы также распространили метод на теорию распределения значений квазирегулярных отображений римановых многообразий. Из наиболее важных результатов, полученных методом А. Э. Еременко–М. Л. Содина упомянем следующие:

Доказательство варианта 2-й основной теоремы распределения значений голоморфных кривых, предложенного Б. Шифманом. Окончательная форма 2-й основной теоремы неизвестна до сих пор, однако результат А. Э. Еременко–М. Л. Содина до сих пор не перекрыт, несмотря значительные успехи в этом направлении в последнее время.

Доказательство гипотезы Литтлвуда 1952 года о средних значениях сферической производной многочлена (А. Э. Еременко и М. Л. Содин, 1986, Дж. Льюис–Я.М. Ву, 1988, А.Э. Еременко, 1991).

Доказательство гипотезы Ф. Неванлинны 1932 года о мероморфных функциях конечного порядка с малым количеством критических точек (А.Э. Еременко, 1991).

Опровержение гипотезы А. Картана 1928 года о нормальности семейств голоморфных кривых, а также доказательство модифицированной гипотезы в размерности 3 (А.Э. Еременко, 1995)

Доказательство наиболее общей теоремы "типа Пикара" для квазирегулярных отображений (А.Э. Еременко–Дж. Льюис, 1991, И. Холопайнен–С. Рикман, 1992, Дж. Льюис, 1994)

В рамках вышеупомянутого теоретико-потенциального метода М.Л. Содин разработал версию неванлиновской теории, относящуюся к последовательностям рациональных функций, степени которых стремятся к ∞. В работах А.М. Руссаковского и М.Л. Содина и А.М. Руссаковского и Б. Шифмана был построен многомерный аналог этой версии. Отметим, что работа А.М. Руссаковского и Б. Шифмана сыграла существенную роль в распространении идей харьковской школы (слабая сходимость потенциалов и теоретико-потенциальный метод в целом) на Западе.

А.Е. Фрынтов получил ряд тонких результатов основанных на применении симметризационной теоретико-потенциальной техники. Среди них отметим решение задачи Б.Я. Левина об экстремальных субгармонических мажорантах для относительно плотных подмножеств вещественной оси (одновременно и независимо аналогичный результат получил А. Бернстейн), доказательство гипотезы А. Вайцмана о поведении функции Грина при круговой симметризации плоской области, доказательство гипотезы о "длинных дугах" (совместно с Дж. Росси и А. Вайцманом). А.Е. Фрынтовым были получены важные результаты, относящиеся к поведению лакунарных рядов Тейлора и Дирихле. Отметим также его работу, в которой был дан ответ на давно поставленный известный вопрос о поведении минимума модуля целых функций порядка > 1.

В работе Б.Я.Левина и Ю.И.Любарского были получены новые интерполяционные теоремы в пространствах целых функций экспоненциального типа. Эти исследования были затем продолжены Ю.И.Любарским и привели, среди прочего, к теоремам типа Пэли– Винера для строго выпуклых индикаторных диаграмм и разложениям в ряды экспонент в пространствах Смирнова. В дальнейшем эти методы были использованы Ю.И.Любарским в задачах теории передачи сигналов ("signal analysis"), в частности для описания гауссовых фреймов в пространстве суммируемых с квадратом функций -– эта задача возникла у специалистов в этой области в начале 90-х годов. Ю.И. Любарским был также исследован ряд задач о свойствах (полноте, минимальности, суммируемости) корневых систем аналитических оператор-функций. Получены важные результаты, которые ранее не удавалось доказать чисто операторными методами.

В.А. Ткаченко внес значительный вклад в спектральную теорию классических и обобщенных дифференциальных операторов в линейных и нормированных пространствах. Им получен критерий разрешимости неоднородных уравнений типа свертки в пространствах аналитических функционалов в терминах регулярности роста их характеристических функций. В начале 90-х годов ему удалось параметризовать дискриминанты Хилла несамосопряженных операторов Хилла с помощью специального класса римановых поверхностей и тем самым найти адекватную замену гребенчатой функции из теории В.А. Марченко-–И.В. Островского.

В серии совместных работ М.Г. Крейна и И.Е. Овчаренко в 70-е годы было получено аналитическое описание совокупности sc-резольвент эрмитовых сжатий, аналитически описана совокупность ΠZ резольвент положительных эрмитовых операторов и решены обратные задачи для экстремальных функций положительного эрмитового оператора.

В 90-х годах М.Л. Содин и П.М Юдицкий нашли новое далеко идущее обобщение классической теории конечнозонных самосопряженных дифференциальных и разностных операторов 2-го порядка. Развитый ими подход основан на применении методов теории классов Харди в бесконечносвязных областях. Этот подход нашед дальнейшее применение в работе Ф. Пехерсторфера и П.М Юдицкого, посвященной асимптотике ортогональных многочленов.

П.М. Юдицкий решил ряд комплексных задач Чебышевского типа для рациональных и целых функций. Среди них комплексная версия наиболее известной задачи Чебышева о наименьшем уклонении от нуля многочлена данной степени на интервале вещественной оси имеющего данное значение в фиксированной (комплексной в версии П.М. Юдицкого) точке. Величина уклонения найдена в эллиптических функциях. Опубликованный в журнале "Алгебра и анализ"обзор М.Л. Содина и П.М. Юдицкого сыграл заметную роль в распространении (возрождении на данном этапе) идей Чебышева и его последователей, в особенности Н.И. Ахиезера, связанных с привлечением геометрической теории функций. Обзор содержал ряд важных новых результатов: наиболее общую теорему о параметризации целых функций данного экспоненциального типа, наименее уклоняющихся от нуля на замкнутом подмножестве вещественной оси и алгебраическое решение задач Золотарева и Н.И. Ахиезера о многочленах наименьшего уклонения.

Работы Л.Б. Голинского 1990–2000-х годов внесли значительный вклад в теорию ортогональных многочленов на единичной окружности, созданную Г. Сеге в 20-х годах. Им предложен новый подход к теории, основанный на спектральной теории одного класса матричных разностных уравнений (уравнений Сеге), для которого построена теория подчиненных решений. В работе Л.Б. Голинского 2006г. теория ортогональных многочленов на окружности служит основным аппаратом исследования гранично-начальной задачи для одной нелинейной системы дифференциально-разностных уравнений, известной как поток Шура. Основным результатом является разрешимость задачи Коши для произвольных допустимых начальных данных, а также асимптотические свойства решений при $t \to \infty$.

Связь теории ортогональных полиномов на окружности и теории аналитических функций в единичном круге, более точно, функций из единичного шара алгебры Харди H^∞ (функций Шура) была обнаружена Я.Л. Геронимусом в 40-х годах. Л.Б. Голинским построена конструктивная теория функций Шура, в которой изучается связь между гладкостью граничных значений функции Шура и скоростью убывания ее параметров Шура (прямые и обратные теоремы).

В цикле совместных работ Л.Б. Голинского и И.Е. Егоровой развита спектральная теория несамосопряженных (комплексных) матриц Якоби с быстро убывающим потенциалом (дискретный вариант теории Б. С. Павлова). Исследована структура дискретного спектра таких операторов, получены точные в смысле порядка условия конечности дискретного спектра, описаны области, содержащие такой спектр.

В работе Л.Б. Голинского и С.Ю. Фаворова введены новые классы голоморфных (субгармонических) функций в единичном круге, растущих определенным образом "в направлении"заданного замкнутого множества на окружности. Полученные условия типа Бляшке для нулевых множеств таких голоморфных функций применяются в спектральной теории сжатий, близких к унитарным операторам.

Г.Р. Белицкий внес значительный вклад в классификацию формальных и локальных отображений относительно различных групп преобразований координат. Сюда относятся задачи описания критических точек функций, исследование особенностей отображений и положений равновесия динамических систем. Формальные аспекты содержат большинство классификационных задач линейной алгебры, как например, "дикая" по определению И.М. Гельфанда задача подобия пар матриц. Для локальных задач требуется техника решения функциональных уравнений различного типа. Г.Р. Белицким были получены следующие основные результаты.

Построен общий алгоритм приведения к нормальной форме формальных отображений относительно групп преобразований координат, естественно возникающих в упомянутых задачах. Этот алгоритм позволяет по заданному объекту (функции, отображению, динамической системе, паре матриц) продуцировать ее нормальную форму.

Развиты локальные методы решения функциональных уравнений, которые позволяют локальные, а не только формальные преобразования к нормальной форме. Были получены точные оценки гладкости таких преобразований.

Была доказана локальная эквивалентность динамических систем с "малой размерностью центрального многообразия" (это решение известной проблемы, поставленной В.И. Арнольдом и Ю.С. Ильяшенко).

М.В. Новицким в серии работ 70-х годов изучались L-супергармонические функции в области $D \subset \mathbb{R}^N$, т.е. функции, удовлетворяющие системе неравенств $(-1)^n (L)^{(n)} u(x) \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ и получено интегральное представление для таких функций. Эти исследования являются обобщением классических результатов С.Н. Бернштейна о вполне монотонных функциях на интервале.

В 90-е годы совместно с С.А. Молчановым М.В.Новицкий доказал полноту системы спектральных инвариантов оператора Шредингера на двумерном торе, что позволило описать спектры одномерных операторов Шредингера, полученных из данных усреднением вдоль геодезических.

В совместной работе с С.А. Молчановым и Б. Вайнбергом М.В. Новицкий изучил абсолютно непрерывную компоненту спектра одномерного оператора Шредингера на полуоси с медленно убывающим потенциалом. Было показано, что при некоторых условиях на потенциал, связанных с первыми интегралами движения уравнения КдФ, абсолютно непрерывный спектр такого оператора совпадает с положительной полуосью.

Используя методы функционального анализа и теории функций (в частности, распределение нулей квазиполиномов и полиномов нескольких переменных, теорема Тарского-Зайденберга и ее приложения, проблема моментов Маркова) Л.В.Фардигола получила ряд важных результатов, относящихся к математической теории управления системами с распределенными параметрами: условия стабилизируемости (в т.ч. и для систем с запаздыванием) и условия управляемости в случае, когда управления ограничены наперед заданной константой.

Ряд важных результатов в классической эргодической теории был получен А.И. Даниленко. Им изучена структура централизатора локально компактных расширений эргодических динамических систем, исследован вопрос о наличии в нем необратимых элементов и обратимых элементов с нетривиальными коэффициентами растяжения, а также о типичности (по Беру) этих свойств. Развивая подход Рудольфа–Вайса (2000) к условной энтропии, А.И. Даниленко построил новую аксиоматику энтропийной теории для действий аменабельных групп, исходными понятиями которой являются отношение эквивалентности и его коцикл со значениями в группе автоморфизмов пространства с мерой. Совместно с К.К.Парк он доказывает существование конечных условных и абсолютных генераторов у действий с конечной энтропией, наличие 3 бернуллиевских факторов, исчерпывающих всю s-алгебру и упрощает многие известные теоремы энтропийной теории для аменабельных действий. В цикле работ А.И. Даниленко (некоторые в соавторстве с Ц. Сильвой, Д. Рудольфом, А. дель Хунко, А. Дули) классический метод построения преобразований разрезанием и стыковкой обобщен на произвольные локально компактные группы. Это позволило "конструктивно"ответить на известные вопросы в эргодической теории, а именно: явно построены а) преобразования с произвольным однородным спектром (проблема Рохлина), б) квазипростые преобразования, дизъюнктные со всеми простыми, в) преобразование нулевой энтропии Кренгеля, чье произведение с автоморфизмом нулевой энтропии Колмогорова-Синая имеет бесконечную энтропию (вопрос Кренгеля), г) слабо перемешивающее преобразование ранга один, изоморфное своему квадрату, д) перемешивающие действия ранга один для локально нормальных групп и т.д.