

# ПРОЦЕСИ ФОРМУВАННЯ СОЛІТОННИХ КОМПЛЕКСІВ І БРИЗЕРІВ У СЕРЕДОВИЩАХ ІЗ СИЛЬНОЮ ДИСПЕРСІЄЮ

О.В.Чаркіна, М.М.Богдан

Фізико-технічний інститут низьких температур НАН України  
ім. Б.І.Веркіна, просп. Леніна, 47, Харків, 61103  
e-mail: charkina@ilt.kharkov.ua

Аналітично і чисельно досліджено особливості динаміки топологічних солітонів (кінків) та механізми формування їхніх зв'язаних комплексів у межах рівнянь синус-Гордон і подвійний синус-Гордон із четвертою просторово-часовою похідною. Запропоновано анзац колективних координат для опису взаємодії кінків, що утворюють комплекс, із випромінюванням. При зростанні амплітуди це випромінювання трансформується в малоамплітудний бризер. За допомогою чисельного моделювання досліджено взаємодію кінків і воблерів у дисперсійних рівняннях синус-Гордон і знайдено умови формування й стійкості зв'язаних двосолітонних комплексів у таких системах.

## Вступ

У фізиці конденсованого стану дефекти і неоднорідності структури – такі, як дислокації в кристалах, доменні границі в анізотропних магнетиках, флаксони в довгих джозефсонівських контактах, – можуть бути теоретично описані в термінах топологічних солітонів [1-5]. Як відомо, солітони – це локалізовані у просторі нелінійні хвилі, які виникають за рахунок балансу просторової дисперсії і нелінійності. Детальне дослідження динамічних властивостей цих нелінійних збуджень показало, що процеси взаємодії між ними здатні призвести до виникнення зв'язаних станів солітонів. У математичній теорії інтегровних нелінійних рівнянь доведено [1], що солітон-антисолітонна пара (два солітони-кінки з протилежними топологічними зарядами) утворюють динамічний зв'язаний стан – *бризер*, якому відповідає періодичний у часі та локалізований в просторі розв'язок нелінійних рівнянь. У той же час однакові топологічні солітони відштовхуються і тому можуть сформувати рівноважну двосолітонну структуру лише під впли-

вом додаткових зовнішніх полів. Прикладом такої структури є *воблер*, відповідний статичний розв'язок рівняння подвійний синус-Гордон (див. нижче), який описує, зокрема, виникнення у зовнішньому магнітному полі  $360^\circ$  доменної границі у ферромагнетиках [5].

Дослідження ефектів дискретності у решітковій моделі синус-Гордон привело до відкриття нового типу зв'язаних станів ідентичних топологічних солітонів – рухомих багатосолітонних комплексів [6,7]. Подальший аналіз таких комплексів [8-13] виявив універсальність цього явища для нелінійних дискретних і континуальних систем із сильною дисперсією. Саме остання властивість – дисперсія – відіграє принципову роль у формуванні таких зв'язаних солітонних станів. У системах із сильною дисперсією нелінійні хвилі можуть мати складну внутрішню структуру, яка проявляється у здатності солітонів змінювати ефективну ширину під час руху та при взаємодії з іншими солітонами. Ця властивість є результатом наявності внутрішніх ступенів вільності у таких солітонів і можливості збудження їхніх внутрішніх мод коливань [12]. При

цьому може змінюватись сам характер взаємодії солітонів, зокрема, в певній області параметрів стає можливим притягання між ідентичними топологічними солітонами. У роботах [9-11] було показано, що особливості стаціонарної динаміки багатосолітонних комплексів і залежності швидкості їхнього руху від параметру дискретності можуть бути описані в межах дисперсійних диференціальних рівнянь синус-Гордон (СГ) і подвійний синус-Гордон (ПСГ) із додатковою четвертою просторово-часовою похідною. Зауважимо, що такий підхід до урахування сильної дисперсії відомий ще з часів Бусінеска в гідродинаміці. Останнім часом цей підхід знайшов обґрунтування в теорії ґраток [14] і механіці тіл, що деформуються [15]. Внутрішню динаміку солітонів у моделях  $\varphi^4$  і синус-Гордон із сильною дисперсією було досліджено в роботі [12], зокрема знайдено точні вирази для кінків і їхніх внутрішніх мод коливань. Вплив додаткової нелінійної міжатомної взаємодії в таких моделях на динаміку солітонних комплексів було вивчено в роботі [13].

У даній роботі досліджено динамічні властивості топологічних солітонів і особливості формування їхніх зв'язаних комплексів у межах рівнянь СГ і ПСГ із четвертою просторово-часовою похідною. Для цих рівнянь існують точні розв'язки, що відповідають нерухомому кінку і воблеру, а також рухомому двусолітонному комплексу. У роботі запропоновано анзац колективних мод для опису взаємодії кінка та випромінювання, яке в нелінійній стадії зростання може перетворюватись в малоамплітудний бризер. У межах узагальненого анзаца описано взаємодію кінків, що утворюють солітонний комплекс. Показано аналітично й чисельно, як ці колективні, зокрема, внутрішні моди виявляють себе у динаміці одинокого солітона і солітонного комплексу. За допомогою чисельного моделювання досліджено взаємодію кінків і воблерів у рівняннях СГ і ПСГ із сильною дисперсією. В результаті знайдено умови формування зв'язаних

двусолітонних комплексів і досліджено їхню стійкість залежно від швидкості кінків, відстані між ними і величини параметра дисперсії.

### Рівняння синус-Гордон і подвійний синус-Гордон із вищою дисперсією та їхні точні розв'язки

Урахування сильної дисперсії може бути проведено за допомогою додання четвертої змішаної просторово-часової похідної до звичайних рівнянь синус-Гордон

$$u_{tt} - u_{xx} - \beta u_{xxtt} + \sin u = 0 \quad (1)$$

і подвійний синус-Гордон:

$$u_{tt} - u_{xx} - \beta u_{xxtt} + \sin u + 2H \sin(u/2) = 0 \quad (2)$$

У динаміці кристалів в межах моделі Френкеля-Конторової для дислокації рівняння (1) описує поле зміщень  $u(x,t)$  в довгохвильовому граничному випадку з урахуванням вищої дисперсії. Константа  $\beta$  є параметром дисперсії. Рівняння (2) є очевидним узагальненням рівняння (1) і, наприклад, в теорії магнетизму воно описує квазіодновимірний анізотропний феромагнетик. При цьому змінна  $\varphi = u/2$  відповідає азимутальному куту вектора намагніченості в легкій площині, а константа  $H$  має фізичний сенс магнітного поля. Закон дисперсії хвиль суцільного спектру знаходиться з лінеаризованого рівняння (2) і має такий вигляд:

$$\omega(k) = \sqrt{(1 + H + k^2)/(1 + \beta k^2)}, \quad (3)$$

де  $k$  – хвильове число. Особливістю спектру (3) є його обмеженість по частотах не тільки знизу, але й зверху. Із збільшенням параметра  $\beta$  спектральна зона звужується. Спектр вироджується в одну частоту  $\omega_0 = \sqrt{1 + H_0}$  при  $H = H_0 = (1 - \beta)/\beta$ . Очевидно, що для рівняння (1) частота виродження  $\omega_0 = 1$  при  $\beta = 1$ .

При  $\beta = 0$  рівняння (1) і (2) стають Лоренц-інваріантними. Розв'язок для солітона (кінка) рівняння СГ, який рухається зі швидкістю  $V$ , добре відомий:

$$u_{2\pi}(x) = 4\text{arctg}\left\{\exp\left(\frac{x-Vt}{\sqrt{1-V^2}}\right)\right\}. \quad (4)$$

При  $V = 0$  вираз (4) є точним розв'язком рівняння (1) в загальному випадку при довільних значеннях  $\beta$ . Так само, розв'язок для нерухомого воблера звичайного рівняння ПСГ [11,16]:

$$u_w = 4\text{arctg}(\exp(qx + R)) + 4\text{arctg}(\exp(qx - R)), \quad (5)$$

де  $q = \sqrt{1+H}$  і  $\text{sh}(R) = 1/\sqrt{H}$ , є точним розв'язком для рівняння (2).

З іншого боку для рівняння (2) було знайдено розв'язок, який описує зв'язаний стан – двосолітонний комплекс, що рухається зі швидкістю [9]:

$$u_{4\pi}(x) = 8\text{arctg}\left\{\exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}+H} \frac{x-V_0t}{\sqrt{1-V_0^2}}\right)\right\}. \quad (6)$$

Такий комплекс являє собою хвилю стаціонарного профілю, що розповсюджується без випромінювання в середовищі з сильною дисперсією. Швидкість комплексу є заданою функцією параметрів  $\beta$  і  $H$ :

$$V_0 \equiv V_0(\beta, H) = \sqrt{1 + \frac{\beta}{3}(1 + \frac{3}{2}H)^2} - \sqrt{\frac{\beta}{3}(1 + \frac{3}{2}H)}. \quad (7)$$

Зрозуміло, що при  $H = 0$  вирази (6) і (7) переходять у точний розв'язок для дисперсійного рівняння СГ (1).

Для хвиль стаціонарного профілю рівняння (2) зводиться до наступного:

$$u_{zz} + \alpha u_{zzzz} - \sin u - H \sin(u/2) = 0, \quad (8)$$

де змінна  $z = (x - Vt)/\sqrt{1-V^2}$  і параметр  $\alpha$ , визначений як

$$\alpha = \frac{\beta V^2}{(1-V^2)^2}, \quad (9)$$

відіграє важливу роль при якісному аналізі динаміки моделей з дисперсією. Здавалося б, що для малих  $\beta$  і  $V$  динамічні властивості солітонів дисперсійних моделей повинні бути близькими до властивостей для Лоренц-інваріантних систем синус-Гордон. Зокрема, розглядаючи  $\alpha$  як малий параметр і використовуючи формальну теорію збурень, для рівняння (8) у випадку  $H = 0$  легко одержати в першому наближенні «покращений» вираз для форми кінка:

$$u_k(z) = u_{2\pi}(z) + \alpha \left( 3 \frac{\text{sh}z}{\text{ch}^2z} - \frac{z}{\text{ch}z} \right) + \dots \quad (10)$$

Виявляється, що асимптотичний ряд (10) не може бути побудований з довільною точністю, оскільки він не є збіжним. Тобто  $2\pi$ -кінк, який рухається з постійною швидкістю і має чисто солітонні асимптотики, при  $\beta \neq 0$  відсутній як точний розв'язок у рівнянні (1) [10, 11]. З іншого боку, крім точного розв'язку, що відповідає солітонному комплексу, рівняння (8) і відповідні рівняння (1) і (2) для СГ і ПСГ-систем мають інші розв'язки, що задовольняють граничні умови  $u = 0$  і  $4\pi$  на нескінченності. Ці конфігурації для «збуджених» зв'язаних станів двох солітонів знаходяться чисельно, причому їм відповідає дискретний набір значень швидкостей [10, 11] при фіксованих  $\beta$  і  $H$ .

### Внутрішня динаміка солітонів і процеси випромінювання

У системах із сильною дисперсією внутрішня динаміка солітонів визначається перш за все наявністю і кількістю внутрішніх мод коливань. У той час, як проблему спектру лінійних збуджень нерухомого кінка рівняння СГ з дисперсією (1) можна розв'язати точно [12] (зокрема,

можуть бути знайдені у явному вигляді частоти внутрішніх мод коливань кінка), аналогічна задача для спектра коливань воблера є набагато складнішою, але і вона може бути повністю проаналізована при малих значеннях параметру  $H$ . В цьому випадку для частоти головної внутрішньої моди воблера, тобто малих проти-фазних коливань кінків, що складають воблер, знаходимо в основному наближенні:

$$\omega_1 \approx \sqrt{2H / (1 + \frac{\beta}{3})}. \quad (11)$$

Зрозуміло, що повний спектр внутрішніх коливань воблера при всіх можливих  $\beta$  і  $H$  може бути розрахований тільки чисельно. Наявність внутрішніх коливань обумовлює резонансний характер непружних взаємодій воблерів у рівнянні ПСГ [16], внаслідок якого виникає періодичний обмін енергією між поступальними і внутрішніми ступенями свободи таких солітонів.

Спектр коливань СГ-кінка, що рухається в середовищі з дисперсією, визначається складним лінеаризованим рівнянням, яке можна детально дослідити у випадку малих значень швидкостей  $V$  і параметра  $\beta$ . У такому середовищі рух кінка призводить до пов'язаних між собою осциляцій його швидкості й ефектної ширини. Навіть у випадку слабкої дисперсії кінк, що рухається, відіграє роль джерела випромінювання і може збуджувати коливання з довжиною хвилі  $\lambda = 2\pi / k_0$ , де хвильовий вектор визначається з рівняння  $\omega(k_0) = V k_0$  [16]. Щоб описати цей ефект аналітично, ми проаналізували лінеаризоване рівняння СГ для випадку малої швидкості і параметра дисперсії і одержали вираз для кінка, що випромінює хвилю в напрямку, зворотному до руху:

$$u_{kr}(z, t) = u_k(z) + a \cdot [1 - \text{th}(z)] \cdot \sin(k_0(z - vt)) \quad (12)$$

Амплітуда хвилі в цьому виразі вважається малою, тобто  $a \ll 1$ , а її швидкість  $v$  відносно кінка залежить від параметра  $\beta$ . У граничному випадку  $\beta \rightarrow 1$  швидкість випромінювання в лабораторній системі відліку прагне до нуля. При зростанні дисперсії вплив внутрішніх мод на динаміку кінка стає все більшим, а внесок станів неперервного спектру зменшується. Для того, щоб описати зв'язування внутрішньої й трансляційної моди та їх взаємодію з випромінюванням, ми використали анзац, що узагальнює вирази (5), (6) і (12)

$$u_{kr}(x, t) = 4\text{arctg}(\exp(\xi + R)) + 4\text{arctg}(\exp(\xi - R)) + a \cdot [1 - \text{th}(\xi)] \cdot \sin(k(\xi - vt)) \quad (13)$$

в якому  $\xi = s(x - Vt)$  і параметри  $s(t)$ ,  $V(t)$ ,  $R(t)$ ,  $k(t)$ ,  $v(t)$  і  $a(t)$ , вважаються функціями, що залежать від часу. Це дозволило нам дослідити якісно нестационарні режими руху кінка, воблера і двосолітонних комплексів у середовищі з дисперсією. Виявилось, що у випадку сильної дисперсії її вплив на динамічні властивості солітонів і, зокрема, на можливість збудження їхніх внутрішніх мод, стає принциповою обставиною. В звичайному рівнянні СГ зростання амплітуд хвиль неперервного спектра веде до явища їх самолокалізації і формування рухомого бризера [2]:

$$u_b(x, t) = 4\text{arctg} \left\{ \frac{\varepsilon \sin \omega[\sqrt{1 - V^2}t - Vz]}{\omega \text{ch} \varepsilon z} \right\}, \quad (14)$$

де  $\varepsilon = \sqrt{1 - \omega^2}$ . При малій амплітуді ( $\varepsilon \ll 1$ ) бризер, що рухається з малою швидкістю  $V$  на фоні кінка фактично описує зв'язування його трансляційної і внутрішньої мод коливань:

$$u_b(x, t) \approx 4\varepsilon \left\{ \frac{\sin \omega t}{\text{ch} \varepsilon z} - \frac{Vz \cos \omega t}{\text{ch} \varepsilon z} \right\}. \quad (15)$$

У системі з сильною дисперсією в спектрі кінка виникають внутрішні моди, які за умов швидкого руху кінка збуджуються і при зростанні амплітуди перетворюються в бризери. Такі локалізовані нелінійні хвилі мають симетрію внутрішніх мод і забирають надлишок енергії у кінків, воблерів і солітонних комплексів у початковій стадії їх руху.

Ці передбачення теорії перевірено нами чисельним моделюванням динаміки солітонів, результати якого викладено в наступному розділі.

### Чисельне моделювання динаміки дисперсійних рівнянь

Комп'ютерне моделювання рівнянь СГ і ПСГ із четвертою просторово-часовою похідною виконувалось за допомогою різницевої схеми, що має високу стійкість і аналогічна схемі, запропонованій у роботі [17]. Часовий крок вибирався рівним  $\Delta t = 0,0001$ , а крок по координаті, як правило, рівним  $\Delta x = 0,02$ , при цьому розмір системи звичайно брався рівним  $L = N \cdot \Delta x$ , де  $N = 3000$ . У випадках, коли треба було виключити або мінімізувати граничні ефекти, ми вибирали  $N = 6000$  і  $10000$ . Початкові умови вибиралися відповідно до виразів (4–7) і (10). Типовими значеннями параметра дисперсії були  $\beta = 1/12$ ,  $1/4$  і  $1$ , а початкові швидкості  $V_{in}$  бралися в інтервалі між  $0,1$  і  $0,9$ . Зручно було також визначити характерний параметр  $\alpha_0$  як значення параметра  $\alpha$  в початковий момент часу, поклавши для цього у формулі (9)  $V$  рівним  $V_{in}$ .

У ході моделювання було одержано наступні чисельні результати.

1. *Особливості динаміки одиночного кінка рівняння СГ (1).* Процес зв'язування трансляційної і внутрішньої мод, який веде до корельованих малих осциляцій швидкості і ширини кінка, було детально досліджено раніше [12]. У нашому дослідженні основна увага приділялась процесу трансформації випромінювання кін-

ка в бризерні моди. Було встановлено, що при малих значеннях параметрів  $\beta$  і  $V_{in}$  кінк рухається майже стаціонарно з дуже слабким за амплітудою і нерегулярним за формою випромінюванням, як у напрямку руху, так і у зворотному напрямку. Зокрема, при  $\beta = 1/12$  слабке випромінювання вперед розповсюджується на велику відстань при початковій швидкості кінка  $V_{in} = 0,3$ , в той час як для  $\beta = 1/4$  при тій же швидкості воно вже сильно загасає в передньому напрямку, але сильно зростає в зворотному напрямку. З'ясувалося, що при фіксованих  $\beta$  існують критичні початкові швидкості, при перевищенні яких випромінювання відбувається тільки у зворотному напрямку. Так, при  $\beta = 1/4$  критична швидкість дорівнює  $V_{cr} = 0,577$ .

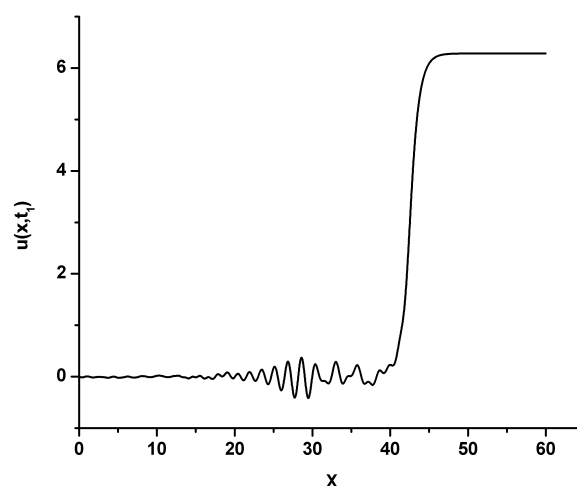


Рис.1.  $2\pi$ -кінк, що рухається, і бризер при  $\beta = 1/12$ ,  $V_{in} = 0,86$  у момент часу  $t_1 = 50$ .

У той же час відбувається формування бризерної моди на зворотному фронті кінка, що рухається. При великих початкових швидкостях кінка бризер утворюється навіть при малих  $\beta$ . Цей процес продемонстровано на Рис.1, де показано кінк, що рухається, і бризерна мода. Якщо параметр  $\beta$  не малий і початкова швидкість досить велика, тоді динаміка кінка на першій стадії стає сильно нестационарною і дисипативною, як у дискретних

системах [7]. При цьому з'являється новий канал майже миттєвої втрати енергії кінка завдяки можливості швидкого формування бризера із збудженої внутрішньої моди на хвості кінка.

2. Процеси взаємодії кінків і утворення ними зв'язаних солітонних комплексів у системах СГ і ПСГ із сильною дисперсією. Перш за все з'ясувалося, що такий процес стає можливим, якщо при фіксованому дисперсійному параметрі  $\beta$  збільшувати початкові швидкості кінків, що мають сформувані комплекс, причому відстань між кінками вибирається нульовою. Починаючи вивчення цього явища, ми насамперед переконалися, що точний розв'язок (6) зі швидкістю (7) є стійким відносно малих збурень як у випадку  $H = 0$ , так і у випадку  $H \neq 0$ , і такий солітонний комплекс розповсюджується без усякого випромінювання.

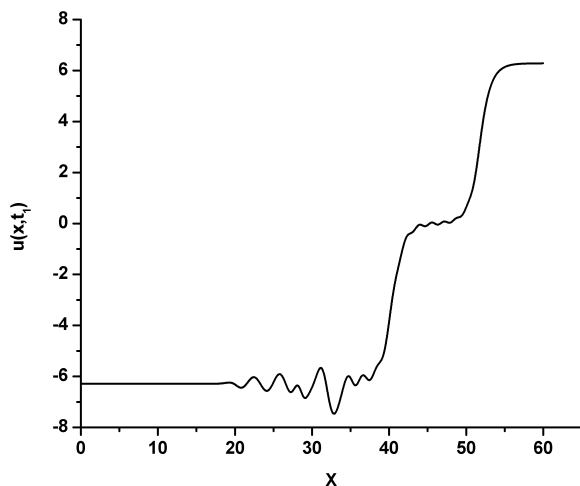


Рис. 2. Метастабільний двосолітонний комплекс при  $\beta = 1$  і  $V_{in} = 0,55$  у момент часу  $t_1 = 90$ .

Якщо зафіксувати  $H = 0$  і початковий профіль у вигляді точного розв'язку (6), але для швидкості вибрати малі значення, то солітонний комплекс розпадеться майже вибухово, як це було продемонстровано в роботі [12]. При цьому через сильне взаємне відштовхування кінки розбігаються в різні боки. Сила відштовхування досить швидко зменшується при зростанні загальної початкової швидкості

комплексу. При наближенні знизу до швидкості стаціонарного руху (7) два кінки проходять стадію формування «збуджених» станів солітонного комплексу, що мали б рухатись також без випромінювання. Але ці стани виявляються метастабільними, тобто нестійкими, хоч і довгоживучими, двосолітонними конфігураціями. Один з таких типових профілів показано на Рис. 2. Нагадаємо, що  $V_0 = 1/\sqrt{3}$  в цьому випадку, що чисельно співпадає з наведеним вище  $V_{cr}$ . Видно, що «збуджений» стан солітонного комплексу поступово дисоціює на два кінки.

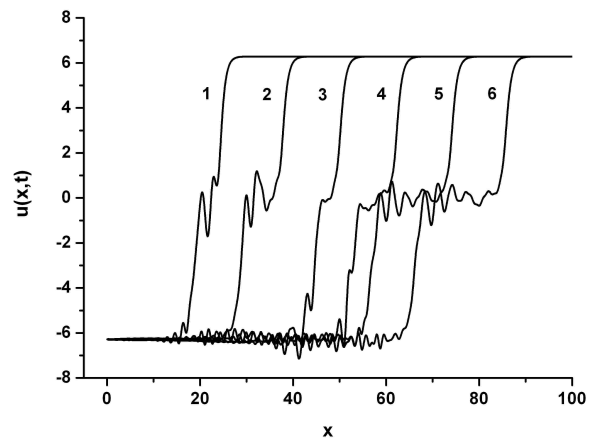


Рис. 3. Розпад солітонного комплексу при  $\beta = 1/12$ ,  $V_{in} = 0,85$  і  $R = 2$ . Кожна крива з номером  $m$  відповідає моменту часу  $t_m = 20 \cdot m$ .

3. Залежність взаємодії між кінками від відстані між ними. Ми знайшли, що, як і передбачалося теорією [11], на малих відстанях (при  $R \leq 1$ ) між центрами мас кінків, що швидко рухаються, має місце притягання. При більших відстанях кінки відштовхуються при тих же самих значеннях швидкостей. Результати чисельного моделювання для обох випадків показано на Рис. 3 і Рис. 4. Наприклад, солітонний комплекс дисоціює при  $R = 2$  для  $\beta$  й  $V_{in}$ , узятих у всьому вказаному вище діапазоні. Послідовність профілів розв'язку для типового процесу розпаду комплексу показано на Рис.3 для  $\beta = 1/12$  і  $V_{in} = 0,85$ . На противагу цьому, ево-

люція для початкової відстані  $R=1$  веде до утворення стійкого комплексу, наприклад при  $\beta=1$  і  $V_{in}=0.6$  та  $\beta=1/12$  і  $V_{in}=0,9$  (останній випадок показано на Рис. 4). У цих випадках початкові швидкості обрано близькими до швидкості стаціонарного руху  $V_0(\beta)$  і запас надлишкової кінетичної енергії виявляється малим. У зворотному випадку можлива дисоціація комплексу.

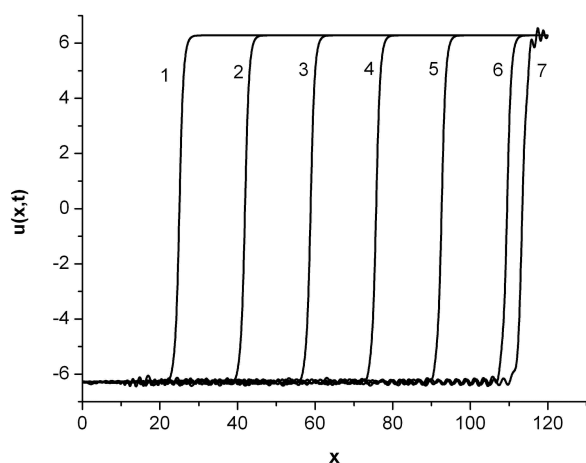


Рис. 4. Розповсюдження стійкого солітонного комплексу. Кожна крива з номером  $m$  відповідає моменту часу  $t_m = 20 \cdot m$ .

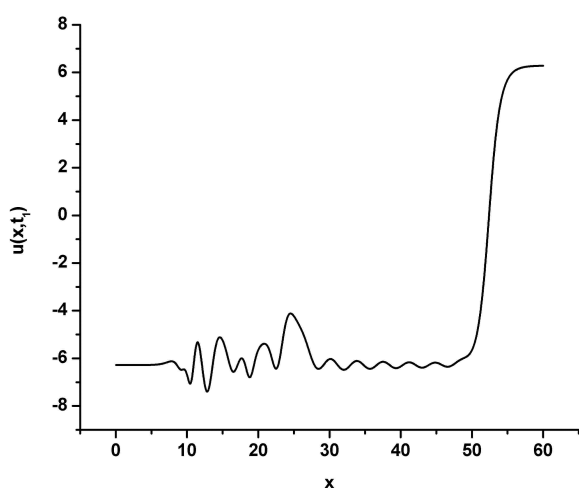


Рис. 5. Солітонний комплекс і бризерні моди при  $\beta=1$  і  $V_{in}=0,86$  в момент часу  $t_1=70$ .

Коли параметр  $\alpha_0 > 1$  завдяки початковій швидкості, близькій до одиниці, то солітонний комплекс виживає в ході ево-

люції, скидаючи велику надлишкову енергію через збудження внутрішніх мод, які трансформуються у бризери на нелінійній стадії розвитку (цей випадок показано на Рис. 5 для  $\beta=1$  і  $V_{in}=0,86$ ).

Але в цьому граничному випадку існує друга критична швидкість, вище від якої комплекс дисоціює на два кінки. Такий розпад «високоенергетичного» солітонного комплексу відбувається, наприклад, при  $\beta=1$  й  $V_{in}=0,9$  (Рис. 6).

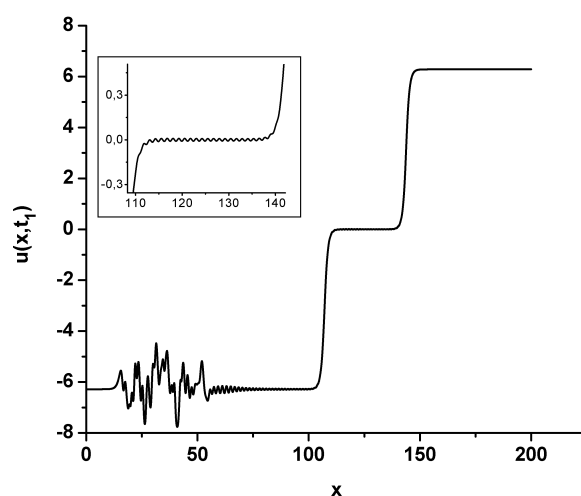


Рис. 6. Розпад солітонного комплексу при великих значеннях  $\alpha_0$ . Перший кінк рухається з постійною швидкістю  $V_{K1}=0,152\dots$ . На вставці показано в збільшеному масштабі просторову модуляцію поля між кінками.

При цьому виявляється цілий ряд цікавих явищ. Комплекс скидає енергію в початковій стадії, залишаючи в кінцевій області простору локалізовані бризерні моди, колективні коливання яких характеризуються практично хаотичним спектром. Далі комплекс розпадається на два кінки, причому передній з них швидко виходить на рух з постійною швидкістю  $V_{K1}=0,152\dots$ . Другий кінк рухається майже стаціонарно з меншою швидкістю, що прагне до значення  $V_{K2} \approx 0,127$ . Щоб переконатися в існуванні  $2\pi$ -кінка, який рухається з постійною швидкістю  $V_{K1}$ , було проведено детальне моделювання динаміки одинокого кінка. Було знайдено,

що таке збудження складається з кінка, що рухається, і статичного модульованого в просторі фону на задньому фронті з довжиною хвилі  $\lambda = 2\pi V_{K1}$  (такий же періодичний фон показано на вставці Рис.6, але його довжина хвилі залежить від швидкостей обох кінків, між якими це випромінювання виявляється запертим.

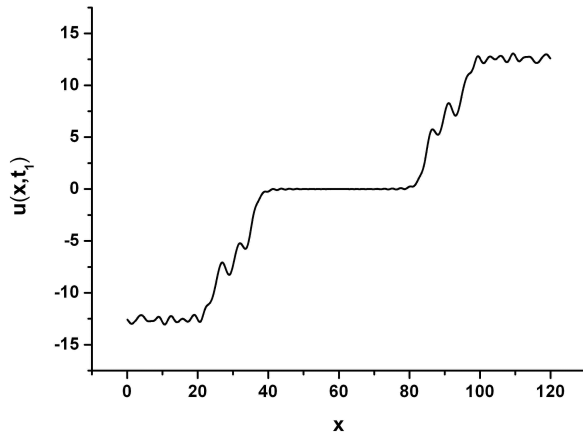


Рис. 7. Зіткнення і розпад солітонних комплексів у рівнянні ПСГ із вищою дисперсією.

4. Взаємодія самих солітонних комплексів із вищою дисперсією на базі рівнянь СГ і ПСГ. Виявилось, що при лобовому зіткненні двох комплексів, що рухаються спочатку стаціонарно зі швидкостями  $V_0(\beta, H)$  і  $-V_0(\beta, H)$ , такі солітонні стани практично не відчують один одного до моменту максимального зближення, коли їхні швидкості стають рівними нулю. В ході подальшої еволюції між розбіжними комплексами виникає випромінювання, а потім збуджуються і їхні внутрішні ступені вільності. Після відбиття від границь і при повторному зближенні солітонні комплекси виглядають так, як показано на Рис. 7 для рівняння ПСГ із параметрами  $H = 0,01$  і  $\beta = 1/12$ . Як видно, дисоціація комплексів у результаті прямого їх зіткнення відбувається за сценарієм складної резонансної взаємодії поступальних і внутрішніх мод таких солітонів.

## Висновки

У результаті проведеного аналітичного і чисельного дослідження динамічних властивостей топологічних солітонів у рівняннях синус-Гордон і подвійний синус-Гордон з четвертою просторово-часовою похідною можна зробити такі висновки:

1. Зазначені рівняння з вищою дисперсією дозволяють моделювати цілий ряд особливостей нелінійної динаміки, властивий динаміці солітонів дискретних моделей [6, 7]. Зокрема, можна знайти у явному вигляді розв'язки, що відповідають зв'язаним станам кінків – солітонним комплексам, може бути аналітично описана складна внутрішня структура кінків і воблерів у моделях синус-Гордон з сильною дисперсією, що проявляє себе в наявності внутрішніх мод коливань таких солітонів.

2. У роботі запропоновано аналітичний вираз – анзац, що описує взаємодію колективних координат – трансляційних і внутрішніх мод кінків між собою і з випромінюванням, що ними генерується. У рамках такого наближення якісно описано процеси розпаду і формування солітонних комплексів в нелінійному середовищі із сильною дисперсією.

3. За допомогою комп'ютерного моделювання детально досліджено розповсюдження кінків і солітонних комплексів у дисперсійних моделях синус-Гордон. З'ясовано умови утворення двосолітонного комплексу завдяки притяганням між кінками на малих відстанях і показано його стійкість відносно малих збурень. Вивчено механізми розпаду солітонних комплексів, що включають резонансне збудження внутрішніх мод і наступну їхню трансформацію в нелінійні бризерні моди. Останні є першочерговим каналом втрат енергії солітонним комплексом в умовах сильної дисперсії. Продемонстровано нестійкість комплексів при взаємних зіткненнях у дисперсійних рівняннях синус-Гордон і подвійний синус-Гордон.



4. Одержані результати можуть бути використані для пояснення й опису нових ефектів у динаміці топологічних солітонів у середовищах з сильною дисперсією,

зокрема, дислокацій у неідеальних ґратках, флаксонів у системах джозефсонівських контактів і магнітних доменних стінок в анізотропних магнетиках.

### Література

1. В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский, Теория солитонов: метод обратной задачи (Наука, Москва, 1980).
2. А.М.Косевич, А.С.Ковалев, Введение в нелинейную физическую механику (Наукова Думка, Киев, 1989).
3. N.Flytzanis, S.Crowley, V.Celli, Phys. Rev. Lett. 39, 891 (1977).
4. A.V.Ustinov, B.A.Malomed, S.Sakai, Phys. Rev. B 57, 11691 (1998).
5. A.M.Kosevich, B.A.Ivanov, A.S.Kovalev, Phys. Rep. 194, 118 (1990).
6. M.Peyrard, M.D.Kruskal, Physica D 14, 88 (1984).
7. M.Peyrard, Physica D 123, 403 (1998).
8. M.M.Bogdan, A.M.Kosevich, In: Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology (New York: Plenum Press., 1994, NATO ASI Series B: Physics.), V. 329, p. 373-376.
9. M.M.Bogdan, A.M.Kosevich, Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. 46, 14 (1997).
10. M.M.Bogdan, A.M.Kosevich, G.A.Maugin, Cond. Matt. Phys., 2, 255 (1999).
11. M.M.Bogdan, A.M.Kosevich, G.A.Maugin, Wave Motion 34, 1 (2001).
12. O.V.Charkina, M.M.Bogdan, Uzhgorod Univ. Sci. Herald. Series Physics 17, 30 (2005).
13. O.V.Charkina, M.M.Bogdan, SIGMA, 2, 047-1 (2006).
14. P.Rosenau, Phys. Rev. B 36, 5868 (1987).
15. А.М.Самсонов. ДАН, 299, 1083 (1988).
16. D.K.Campbell, M.Peyrard, P.Sodano, Physica D 19, 165 (1986).
17. A.R.Champneys, B.A.Malomed, J.Yang, D.J.Kaup, Physica D 152–153, 340 (2001).
18. G.L.Alfimov, V.M.Eleonskii, N.E.Kulagin, N.N.Mitskevich, Chaos 3, 405 (1993).

## PROCESSES OF FORMATION OF SOLITON COMPLEXES AND BREATHERS IN HIGHLY DISPERSIVE MEDIA

**O.V.Charkina, M.M.Bogdan**

B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering,  
Ukr. Nat. Acad. Sci., 47 Lenin Ave., Kharkiv, 61103  
e-mail: charkina@ilt.kharkov.ua

Peculiarities of dynamics of topological solitons (kinks) and mechanisms of formation of their bound complexes are investigated analytically and numerically in the framework of the sine-Gordon and double sine-Gordon equations with the fourth-order spatial-temporal derivative. An Ansatz of collective variables is proposed for the description of interaction of kinks forming a complex with the radiation which is transformed into a low-amplitude breather with the amplitude growth. Interactions of kinks and wobblers in dispersive sine-Gordon equations are investigated by numerical simulation, the conditions of formation and the stability of twosoliton bound complexes in such systems are found.