

Метастабильные бризеры и локальный диамагнетизм в двумерных нелинейных метаматериалах

О.В. Чаркина¹, М.М. Богдан^{1,2}

¹Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина Национальной академии наук Украины
пр. Науки, 47, г. Харьков, 61103, Украина

E-mail: charkina@ukr.net

bogdan@ilt.kharkov.ua

²Харьковский национальный университет им. В.И. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 610022, Украина

Статья поступила в редакцию 20 апреля 2020 г., опубликована онлайн 26 мая 2020 г.

Исследованы динамические свойства двумерных нелинейных магнитных метаматериалов, состоящих из наноразмерных элементов. Предложена модель двумерной решетки емкостно и индуктивно связанных расщепленных прямоугольных нанорезонаторов. Показано, что длинноволновая динамика двумерной решетки описывается регуляризованным нелинейным двумерным уравнением Клейна–Гордона. Асимптотическим методом найдены решения этого уравнения с учетом действия ЭДС, индуцированной электромагнитной волной, в виде двух последовательностей двумерных динамических солитонов на пьедестале однородных вынужденных колебаний. Рассчитан диамагнитный отклик на электромагнитное поле терагерцового диапазона в области метаматериала, в которой возбужден бризер, осциллирующий противофазно однородному фону. Численно исследована эволюция долгоживущих метастабильных бризеров и найдено два сценария, коллапса и распада, развития его неустойчивости в зависимости от параметров наведенной ЭДС и индуктивной связи между нанорезонаторами. На границе этих сценариев обнаружено, что окончательным результатом трансформации бризеров является химерное состояние метаматериала с бризером большой амплитуды, генерирующим стохастические волны.

Ключевые слова: двумерные метаматериалы, наноразмерные резонаторы, нелинейная динамика, метастабильные бризеры.

Введение

Ярким научным и технологическим достижением в начале XXI века стала экспериментальная реализация идеи об искусственных метаматериалах с отрицательным показателем преломления для электромагнитных волн от радио- до микроволнового диапазона [1–3]. Такие метаматериалы обладают уникальными свойствами [4], которые могут быть использованы при создании суперлинз, не ограниченных дифракционной границей, покрытий, огибаемых светом, электромагнитных сенсоров, малогабаритных антенн и других устройств. На макроскопическом уровне двумерные метаматериалы строятся в виде решетки индуктивно связанных расщепленных кольцевых резонаторов, которые обеспечивают отрицательную магнитную проницаемость в соответствующем частотном диапазоне, а дополненные, например, решеткой металлических стержней, которая имеет отрицательную диэлектрическую проницаемость, в со-

вокупности составляют среду с отрицательным показателем преломления.

Усилия исследовательских групп в последние годы направлены на построение метаматериалов с наноразмерными элементами с целью максимально приблизиться к терагерцовому и оптическому диапазону электромагнитных волн. Создание искусственных метаматериалов с наноразмерными структурными элементами и исследование их свойств оформились сегодня как новое направление в нанофизике. Уже реализованные технологически наноструктурные элементы магнитного метаматериала представляют собой металлические разомкнутые квадратные контуры с характерными размерами порядка сотен нанометров, для которых резонансная частота электромагнитных волн находится в терагерцовом диапазоне [5].

Уменьшение размеров элементов метаматериалов при приближении к оптическому диапазону порождает сложности в достижении необходимых величин как

отрицательной диэлектрической, так и магнитной проницаемости. В наноразмерных расщепленных резонаторах линейный магнитный резонанс на волнах с длиной около микрона весьма слабый [6,7], но еще способный обеспечить отрицательную магнитную проницаемость.

В то же время недавно была сформулирована идея, что в одно- и двумерных магнитных метаматериалах могут возникать области с отрицательной магнитной проницаемостью при появлении в них нелинейных возбуждений [8,9]. В частности, было показано, что решетки индуктивно связанных расщепленных кольцевых резонаторов с нелинейными элементами (например, диодами) могут рассматриваться как нелинейные линии передачи типа двумерных сетей. С помощью численного моделирования было найдено, что в них переменное магнитное поле может возбуждать импульсы типа дискретных бризеров, локализованных на нескольких резонаторах, и вызывать их локальный диамагнитный отклик. Нелинейные магнитные метаматериалы могут быть реализованы различными способами [10], начиная от включения в расщепленные резонаторы в качестве нелинейных элементов джозефсоновских контактов [11] и вплоть до построения метаматериалов в виде цепочек магнитных молекулярных кластеров, так называемых магнитных молекул [12,13], или сверхрешеток «ферромагнетик–сверхпроводник» [14].

В работе [16], в отличие от анализа нелинейной динамики метаматериалов в большинстве статей с помощью численных расчетов [9,10,15], предложен аналитический подход для описания эффекта локальной отрицательной магнитной проницаемости в одномерных нелинейных магнитных метаматериалах. Показано, что длинноволновая динамика и магнитные свойства одномерных систем, построенных из индуктивно и емкостно связанных разомкнутых кольцевых резонаторов, описываются дис-

персионным регуляризованным нелинейным уравнением Клейна–Гордона [17]. Асимптотическим методом были найдены его динамические солитонные решения на «пьедестале» — одномерные бризеры, возбуждаемые высокочастотным магнитным полем, которые осциллируют в противофазе по отношению к однородным колебаниям, и таким образом в нелинейном метаматериале возникают протяженные области с отрицательной магнитной восприимчивостью и проницаемостью. Дополненная средой с отрицательной диэлектрической проницаемостью такая система образует «левосторонний» метаматериал, в котором области с бризерными возбуждениями оказываются прозрачными для электромагнитного излучения, что делает возможным их экспериментальное наблюдение. Ниже показано, как этот аналитический подход обобщается на случай двумерных метаматериалов с наноструктурными элементами, для которых построение теории локального диамагнитного отклика представляет не только теоретический, но и практический интерес, поскольку двумерные магнитные метаматериалы способны служить реальными покрытиями, обладающими уникальными свойствами в области электромагнитных волн, близких к терагерцовому и оптическому диапазонам.

Регуляризованные нелинейные уравнения Клейна–Гордона для двумерного нелинейного метаматериала

Теоретически, как электрическая сеть индуктивно взаимодействующих LC-контуров, двумерная система расщепленных кольцевых резонаторов с нелинейными элементами рассмотрена в работе [9]. Для такой двумерной системы дискретные уравнения, описывающие электромагнитные возбуждения в метаматериале, имеют вид

$$\begin{cases} L \frac{dI_{n,m}}{d\tau} + RI_{n,m} + U_{n,m} - L_x \left(\frac{dI_{n-1,m}}{d\tau} + \frac{dI_{n+1,m}}{d\tau} \right) - L_y \left(\frac{dI_{n,m-1}}{d\tau} + \frac{dI_{n,m+1}}{d\tau} \right) = E(\tau), \\ I_{n,m} = \frac{dQ_{n,m}}{d\tau}, \end{cases} \quad (1)$$

где $I_{n,m}$ — переменный ток в контуре с координатами n и m , $Q_{n,m}$ — заряд, L и $L_{x,y}$ — собственная и взаимные индуктивности, R — активное сопротивление, $E(\tau) = E_0 \sin \Omega \tau$ — ЭДС, которая индуцируется переменным магнитным полем $H(\tau) = H_0 \cos(\Omega \tau)$, так что $E_0 = \mu_0 \Omega S H_0$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная проницаемость в вакууме, и S — площадь расщепленного кольцевого резонатора, $U_{n,m} = U(Q_{n,m})$ — емкостное напряжение, нелинейно зависящее от величины заряда.

В настоящей работе рассматривается модификация двумерного метаматериала, состоящего из наноразмерных близко расположенных прямоугольных резонато-

ров, которая включает дополнительную относительно модели (1) эффективную емкостную связь между резонаторами. Ее вид представлен на рис. 1. Она является обобщением на двумерный случай ранее предложенной авторами одномерной модели [16].

Емкостная связь практически всегда существует между такими резонаторами, и она имеет такой же порядок величины, как и индуктивная связь [18]. Локальную нелинейность для каждого наноэлемента в метаматериале можно создать путем введения диэлектрика с керровской нелинейностью в щели расщепленных контуров, как показано на рис. 1. Влияние нелинейности

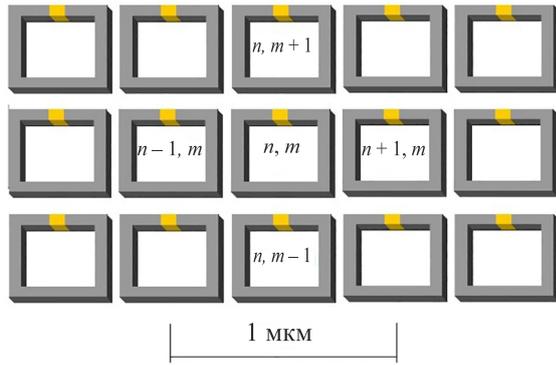


Рис. 1. Модель двумерного метаматериала терагерцового диапазона.

описывается кубическими членами разложения в зависимости $U(Q_{n,m}) = Q_{n,m} \left(1 - \eta(Q_{n,m}/Q_c)^2 \right) / C_0$, где C_0 — линейная емкость расщепленного резонатора как колебательного контура, Q_c — характерный заряд, параметр η — численный коэффициент при кубической нелинейности. Запишем для обобщенной модели, аналогично первому уравнению системы (1), уравнение для напряжения в контуре с координатами n и m , выделив при этом вторые разности в выражениях для емкостной и индуктивной связей и перенормировав коэффициенты при индукции и емкости, относящихся к данному узлу:

$$\begin{aligned} & \tilde{L} \frac{d^2 Q_{n,m}}{d\tau^2} + R \frac{dQ_{n,m}}{d\tau} + \tilde{C}^{-1} Q_{n,m} - \\ & - \frac{\eta}{C_0 Q_c^2} Q_{n,m}^3 - C_x^{-1} (Q_{n-1,m} + Q_{n+1,m} - 2Q_{n,m}) - \\ & - C_y^{-1} (Q_{n,m-1} + Q_{n,m+1} - 2Q_{n,m}) - \\ & - L_x \frac{d^2}{d\tau^2} (Q_{n-1,m} + Q_{n+1,m} - 2Q_{n,m}) - \\ & - L_y \frac{d^2}{d\tau^2} (Q_{n,m-1} + Q_{n,m+1} - 2Q_{n,m}) = E_0 \sin \Omega \tau. \quad (2) \end{aligned}$$

Перенормированные коэффициенты имеют следующий вид: $\tilde{L} = L - 2(L_x + L_y)$ и $\tilde{C}^{-1} = C_0^{-1} - 2(C_x^{-1} + C_y^{-1})$, где C_x и C_y характеризуют емкостную связь между резонаторами в соответствующих направлениях. Заметим, что уравнение (2) в своем первоначальном виде имеет одиннадцать независимых параметров.

В отсутствие ЭДС закон дисперсии линейных колебаний этой дискретной модели имеет вид

$$\Omega(k_x, k_y) = \Omega_0 \sqrt{\frac{1 + v_x^2 s^2(k_x) + v_y^2 s^2(k_y)}{1 + \lambda_x s^2(k_x) + \lambda_y s^2(k_y)}}, \quad (3)$$

где минимальная частота собственных колебаний метаматериала $\Omega_0 = 1/\sqrt{\tilde{L}\tilde{C}}$, параметры $\lambda_{x,y} = L_{x,y}/\tilde{L}$,

$v_{x,y} = \Omega_{x,y}/\Omega_0 = \sqrt{\tilde{C}/C_{x,y}}$, $\Omega_{x,y} = 1/\sqrt{\tilde{L}C_{x,y}}$, $s(k_{x,y}) \equiv 2 \sin\left(\frac{1}{2}k_{x,y}d\right)$, d — расстояние между нанорезонаторами. Очевидно, что спектр (3) ограничен по частотам не только снизу, но и сверху.

Видно, что в уравнении (2) вторая производная по времени от второй разности для заряда является прямой дискретной реализацией четвертой смешанной производной. Поэтому в длинноволновом пределе, когда расстояние между резонаторами d значительно меньше длины волны колебаний, по полной аналогии с одномерным случаем [16], уравнение (2) для заряда $Q_{n,m}$ прямо сводится к регуляризованному двумерному нелинейному уравнению Клейна–Гордона для зарядовой переменной $u_{n,m} = Q_{n,m}/Q_c \rightarrow u(x, y, t)$ с дополнительными членами, описывающими затухание (активное сопротивление) и внешнюю переменную силу (ЭДС):

$$u_{tt} + \gamma u_t - u_{xx} - u_{yy} - \beta^x u_{xxt} - \beta^y u_{yyt} + u - \sigma u^3 = e_0 \sin(\omega t). \quad (4)$$

Переменная $u(x, y, t)$ зависит от безразмерных координат $x = nd/l_x$, $y = md/l_y$ и времени $t = \Omega_0 \tau$, нижние индексы в функции u обозначают соответствующие частные производные, характерные длины $l_{x,y} = v_{x,y}d \equiv d\sqrt{\tilde{C}/C_{x,y}} \gg d$, коэффициент затухания колебаний $\gamma = R\tilde{C}/\tilde{L}$, параметр $\sigma = \eta\tilde{C}/C_0$, $\omega = \Omega/\Omega_0$ и $e_0 = E_0\tilde{C}/Q_c$ — безразмерные частота и амплитуда накачки. Для амплитуды и параметров дисперсии получаем выражения

$$\begin{aligned} e_0 &= \frac{\mu_0 H_0 \Omega S \tilde{C}}{Q_c} = \frac{\mu_0 S}{Q_c} \sqrt{\frac{\tilde{C}}{\tilde{L}}} \omega H_0, \\ \beta^{x,y} &= \frac{L_{x,y} C_{x,y}}{\tilde{L} \tilde{C}} = \frac{L_{x,y}}{\tilde{L}} \left(\frac{d}{l_{x,y}} \right)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Смешанные производные, естественно возникающие благодаря индуктивному взаимодействию между нанорезонаторами, учитывают вклад высшей дисперсии и существенно влияют на спектр линейных возбуждений уравнения (4) в отсутствие внешней накачки, делая его ограниченным как снизу, так и сверху. Его явный вид в размерных переменных очевидно следует из выражения (3), в котором $s(k_{x,y})$ необходимо просто заменить на $k_{x,y}d$.

Параметры дисперсии $\beta^{x,y}$ могут иметь как одинаковые, так и противоположные знаки, определяемые знаками индуктивностей $L_{x,y}$, зависящих от взаимной ориентации соседних резонаторов. Для планарной ориентации, как на рис. 1, они положительные, и спектр модели в безразмерных переменных оказывается ограниченным минимальной частотой $\omega_0 = 1$ и максималь-

ной частотой $\omega_{\max} \propto 1/\sqrt{\beta_{x,y}}$. Для аксиальной ориентации, когда ось проходит через центры соседних контуров, эти параметры отрицательные. В рамках длинноволнового приближения параметры дисперсии $\beta^{x,y}$ являются малыми величинами, и ширина зоны сплошного спектра оказывается большой. Однако благодаря ограниченности спектра возбуждений в регуляризованном уравнении и такому же свойству спектра в дискретной модели, нелинейная динамика в этих системах может обладать одинаковыми особенностями, как это было предсказано и обнаружено в теории кристаллической решетки [19,20]. Поэтому диапазон параметров дисперсии может быть существенно расширен, и полученные при этом результаты в рамках регуляризованного уравнения могут оказаться справедливыми и для исходной дискретной модели метаматериала.

Оказывается, что, несмотря на анизотропию емкостных и индуктивных связей, большое количество параметров и сложность длинноволнового уравнения (3), задача о вынужденных локализованных бризерных колебаниях в магнитных метаматериалах в условиях накачки при частотах, близких к нижнему краю спектра, может быть существенно упрощена и сведена к универсальным зависимостям.

Вынужденные бризерные колебания в двумерном магнитном метаматериале

Используя асимптотическую процедуру Косевича–Ковалева [16,17] в бездиссипативном случае, т.е. предполагая решение уравнения (4) в виде ряда по временным гармоникам с частотой накачки и малому параметру отщепления частоты от края спектра $\kappa = \sqrt{1-\omega^2} \ll 1$,

$$u(x, y, t) = A(x, y) \left\{ \left[1 + \kappa^2 B(x, y) \right] \sin \omega t + \kappa^2 C(x, y) \sin 3\omega t + \dots \right\}, \quad (6)$$

получим для амплитуды основной гармоники нелинейное уравнение:

$$(1 - \beta^x \omega^2) A_{xx} + (1 - \beta^y \omega^2) A_{yy} - (1 - \omega^2) A + \frac{3}{4} \sigma A^3 + e_0 = 0. \quad (7)$$

После введения новых координат и перенормировки амплитуд гармоники и силы

$$X = \sqrt{\frac{1-\omega^2}{1-\beta^x \omega^2}} x, \quad Y = \sqrt{\frac{1-\omega^2}{1-\beta^y \omega^2}} y, \quad (8)$$

$$A = a \cdot f \equiv \sqrt{\frac{4}{3\sigma}} (1-\omega^2) f, \quad e_0 = \sqrt{\frac{4}{3\sigma}} (1-\omega^2)^{3/2} p \quad (9)$$

окончательно получим уравнение

$$\Delta f - f + f^3 + p = 0, \quad (10)$$

где Δ — двумерный лапласиан в новых координатах. У такого уравнения есть три однородных решения, наименьшее из которых задает устойчивый однородный фон колебаний вдали от центра системы:

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{\gamma}{3} - \sin \frac{\gamma}{3}, \quad \gamma = \arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} p \right). \quad (11)$$

Как видно, параметр p может меняться от нуля и до максимального значения $p_c = 2/3^{3/2}$.

После выделения в решении однородного фона $f(X, Y) = f_0 + f_s(X, Y)$ солитонная его часть $f_s(X, Y)$ должна удовлетворять нулевым граничным условиям. Будем интересоваться радиально-симметричным решением уравнения (10), которое сводится теперь к следующему:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - f + f^3 + p = 0, \quad (12)$$

где $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$. На бесконечности функция $f(r)$ выходит на постоянное значение f_0 , и поскольку в этом пределе можно пренебречь первой производной в уравнении (12), то асимптотика $f(r)$ совпадает с асимптотикой решения уравнения для одномерного метаматериала, найденного в [16]. При приближении к нулю решение выходит на константу, имея нулевую производную.

Анализ возможных солитонных решений, удовлетворяющих указанным граничным условиям, удобно провести, используя интерпретацию уравнения (12) как уравнения движения частицы в нелинейном потенциале (рис. 2).

Если переписать уравнение (12), опустив член с первой производной, в виде

$$\ddot{f} - f + f^3 + p = 0, \quad (13)$$

где точки означают дифференцирование по некоторому эффективному времени \tilde{t} , то легко видеть, что это

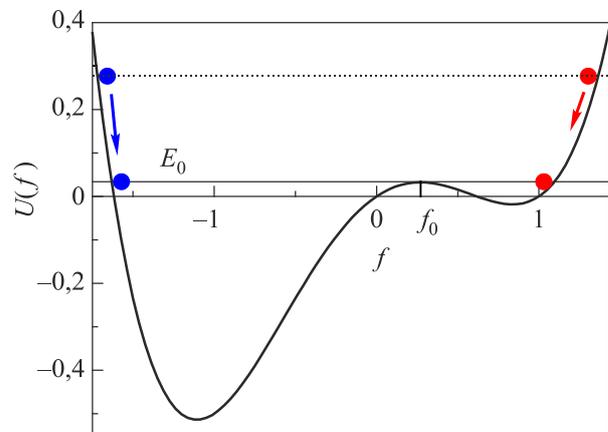


Рис. 2. Движение частицы в нелинейном потенциале.

уравнение движения частицы имеет следующий интеграл энергии E с потенциальной энергией $U(f)$, приведенной на рис. 2,

$$E = \frac{1}{2} \dot{f}^2 + U(f), \quad U(f) = -\frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{4} f^4 + pf. \quad (14)$$

Благодаря интегралу движения оба солитонные решения уравнения (13) находятся в явном виде и описывают амплитуды основных гармоник двух единственно возможных бризеров на пьедестале в одномерном метаматериале [16]. Как видно на рис. 2, интеграл E выбирается равным E_0 , чтобы удовлетворить необходимым граничным условиям — выходу амплитуды на постоянное значение f_0 или в терминах динамики частицы — ее бесконечно долгому приближению к локальному максимуму потенциальной энергии.

В двумерном случае необходимость учета первой производной в уравнении (12) интерпретируется как влияние эффективного трения на динамику частицы. После домножения на первую производную это уравнение может быть переписано как $\dot{E} = -2F \equiv -\dot{f}^2 / \tilde{t}$. Положительность диссипативной функции F ведет к убыванию энергии, поэтому начальные значения энергии частицы очевидно выбираются больше значения E_0 . Легко понять, что существует две последовательности соответственно положительных и отрицательных начальных амплитуд, стартуя с которых с нулевой начальной скоростью, координата частицы будет выходить на постоянную асимптотику f_0 . Из рис. 2 очевидно следует, что есть два главных решения, амплитуды которых полностью находятся по одну из сторон барьера. С последующим ростом начальной амплитуды частица обязательно преодолевает барьер и может выходить на максимум как с положительной, так и с отрицательной производной. Таким образом, одну и вторую последовательность можно характеризовать в соответствии с данным критерием. Заметим, что в случае, когда внешняя сила отсутствует и потенциал является симметричным, задача о последовательности солитонных состояний в двумерном случае была решена более полувека назад [21]. В этом пределе обе найденные в настоящей работе последовательности вырождаются в одну, поскольку решения в симметричном случае определены с точностью до знака.

Результаты численного интегрирования уравнения (12) с указанными выше граничными условиями представлены на рис. 3–5, где параметр $p = 0,35$ выбран близким к p_c — границе существования трех однородных решений. В двумерном метаматериале главными модами солитонов на пьедестале являются, как и в одномерном случае [16], полностью положительное решение (линия 1, рис. 3), или «плюс-мода», и имеющая отрицательную часть амплитуды в начале координат (линия 2, рис. 3), или «минус-мода». Именно последняя и соответствует колебанию, в котором центральная об-

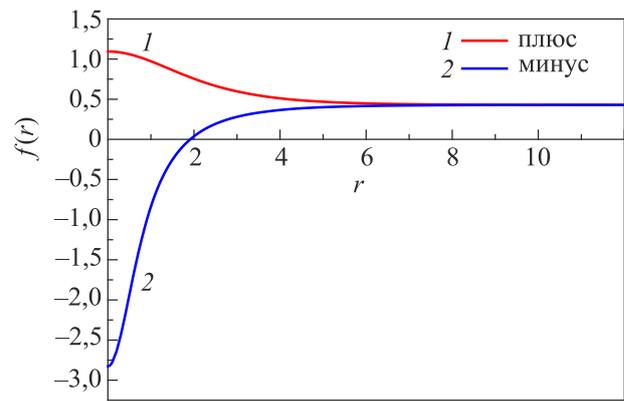


Рис. 3. Главные моды колебаний 2D солитонов на пьедестале.

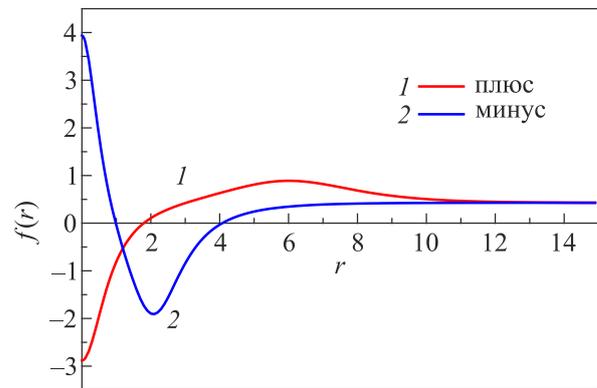


Рис. 4. Первые «возбужденные» моды 2D солитонов.

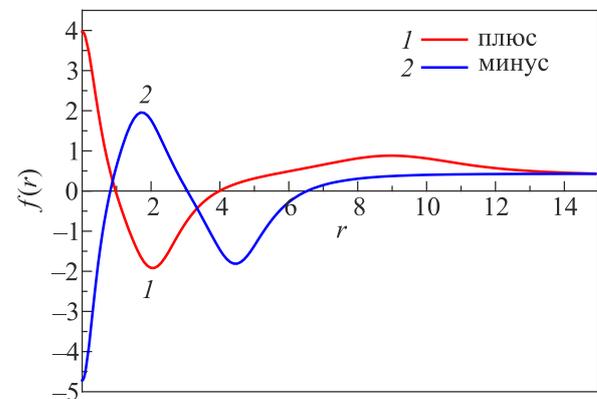


Рис. 5. Вторые «возбужденные» моды 2D солитонов.

ласть осциллирует в противофазе к однородному фону и обеспечивает локальный диамагнитный отклик метаматериала. В соответствии с проведенным ранее анализом, в отличие от одномерного метаматериала, в двумерном одновременно с главными бризерными модами существуют более сложные по форме радиально-симметричные солитоны на пьедестале, которые можно классифицировать, помимо указанного выше критерия, еще и по количеству нулей (рис. 4 и 5), поэтому их можно условно называть «возбужденными» модами колебаний.

Отметим, что при данном выборе параметра p минус-бризер на рис. 4 и плюс-бризер на рис. 5 оказываются очень близкими по форме, но отличаются по основному критерию — знаку производной на бесконечности.

Локальный диамагнетизм в двумерном метаматериале

Имея численно определенное решение для двумерного динамического солитона на «пьедестале» с отрицательной амплитудой в центре, можно найти магнитную проницаемость метаматериала, содержащего такое бризерное возбуждение. Это решение зависит только от одного параметра p , поэтому оно является достаточно универсальным, чтобы, возвращаясь к размерным характеристикам метаматериала и параметрам накачки, можно было проанализировать различные предельные случаи аналитических зависимостей. В частности, решение остается одинаково справедливо как для изотропной, так и для сильно анизотропной емкостной и индуктивной связи, а также для противоположных по знакам индуктивностей L_x и L_y , которым соответствует метаматериал с аксиальной в одном направлении ориентацией расщепленных резонаторов.

Расчет магнитной проницаемости проводится по стандартной схеме [9,16]. Выражение для магнитной индукции имеет вид

$$B = \mu_0 \cdot (H(\tau) + M(x, y, \tau)), \quad (15)$$

где $M(x, y, \tau)$ — намагниченность метаматериала в точке с координатами (x, y) , которая определяется через силу тока $I(x, y, \tau)$ в контуре и равна $M(x, y, \tau) = Sd^{-3} \partial Q(x, y, \tau) / \partial \tau$. После подстановки решения $Q(x, y, \tau) = Q_c A(x, y) \sin \Omega \tau$ для индукции получаем выражение

$$B = \mu_0 \mu_r(x, y, \Omega) H_0 \cos \Omega \tau \quad (16)$$

с относительной магнитной проницаемостью и восприимчивостью

$$\mu_r(x, y, \Omega) = 1 + \chi(x, y, \Omega), \quad (17)$$

$$\chi(x, y, \Omega) = \rho A(x, y, \Omega) = \rho a f(x, y, \Omega), \quad (18)$$

где безразмерный параметр ρ и оценка амплитуды a имеют вид

$$\rho \equiv \frac{S\Omega}{H_0 d^3} Q_c, \quad a \approx \mu_0 H_0 \Omega S / Q_c \tilde{L} (\Omega_0^2 - \Omega^2). \quad (19)$$

После оценки площади резонатора по формуле $S \approx d^2$ получим окончательно:

$$\chi(x, y, \Omega) = \rho A(x, y, \Omega) \approx \frac{\Omega^2}{\Omega_0^2 - \Omega^2} \frac{\mu_0 d}{\tilde{L}} f(x, y, \Omega). \quad (20)$$

Магнитные метаматериалы терагерцового диапазона ($\Omega_0 \geq 10^{12}$ Гц) имеют характерные наноразмеры структурных элементов, как и расстояния между ними, порядка $d \approx 4 \cdot 10^{-7}$ м и индуктивность $\tilde{L} \approx 10^{-12}$ Гн. Откуда имеем, что величина $\mu_0 d / \tilde{L} \approx 0,5$, и в конце концов оказывается, что $\rho a \gg 1$ благодаря большой близости Ω к Ω_0 . Таким образом, знак магнитной проницаемости полностью определяется зависимостью $A(x, y, \Omega)$, причем диамагнитный отклик в области локализации бризера существенно превышает положительный отклик однородного фона (рис. 6).

На рис. 6 представлен солитонный вклад в колебания намагниченности, которые в центре двумерного метаматериала локально противофазны по отношению к однородному фону. Эволюция бризера на пьедестале рассчитана для системы размерами 300×300 из резонансных контуров с параметрами $\beta_{x,y} = 0,25$, находящейся в поле электромагнитной волны терагерцового диапазона с частотой $\Omega = 0,997 \Omega_0$ и периодом $T_\Omega = 2\pi / \Omega$, и амплитудой накачки, которая характеризуется безразмерным параметром $p = 0,25$. Два профиля бризера приведены для времени после 150 периодов колебаний с интервалом в полупериод. За все время осцилляций бризер практически не изменился, и его амплитуда фактически не отличается от начального профиля, который был выбран в виде аналитически найденного решения. Как видно из рисунка, центральная область отрицательной магнитной проницаемости в диаметре насчитывает до сотни резонаторов и действительно является макроскопической характеристикой магнитного метаматериала.

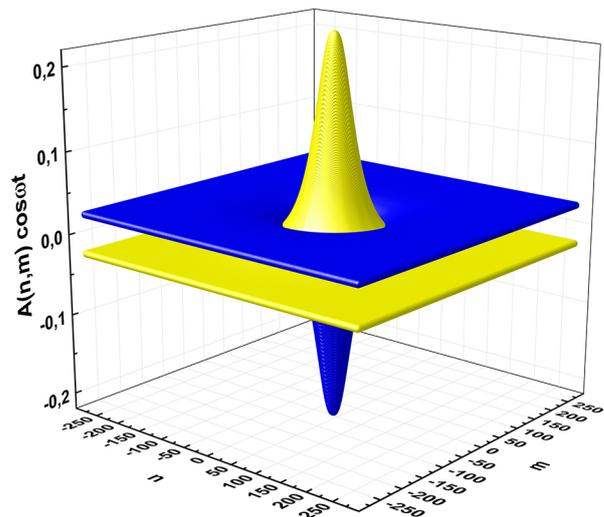


Рис. 6. (Онлайн в цвете) Вклад найденного бризера на пьедестале в осцилляции намагниченности, которые демонстрируют области с положительной и отрицательной проницаемостью, т.е. нелинейный диамагнитный отклик в центре решетки расщепленных прямоугольных резонаторов.

Метастабильность двумерных бризеров и сценарии развития их неустойчивости

Для наблюдения эффекта локального диамагнетизма в двумерных метаматериалах важным обстоятельством является время жизни найденных бризерных возбуждений. Полученные приближенные решения регуляризованного нелинейного уравнения Клейна–Гордона описывают стационарные колебания. В то же время известно, что в двумерных нелинейных уравнениях только лишь со вторыми пространственными производными, в частности в двумерном уравнении синус–Гордон, бризеры не являются устойчивыми [22], и поиск параметров их стабилизации составляет отдельную проблему [23]. В некоторых магнитных моделях [24] учет высших пространственных производных может стабилизировать солитоны, поскольку сильная дисперсия может компенсировать влияние нелинейности в таких уравнениях и предотвратить коллапс локализованных состояний. Поэтому индуктивную связь в метаматериале, которая порождает четвертые смешанные производные, следует полностью учитывать даже при малых значениях параметров дисперсии. С другой стороны, следует отметить, что если эти параметры не малые, то спектральная зона линейных колебаний будет узкой. Тогда частота третьей гармоники солитона на пьедестале будет находиться над зоной, что гарантирует отсутствие прямого возбуждения бризером линейных волн и потерю им энергии через излучение. Из сказанного понятно, что устойчивость двумерных бризеров в условиях накачки зависит от многих факторов и практически от всех параметров исходной задачи.

Из результатов моделирования динамики бризера на пьедестале, полученных в рамках дискретной схемы интегрирования и приведенных на рис. 6, следует, что существует область значений параметров, вполне допустимых в построенной теории, где долгоживущие вынужденные колебания реализуют локальную отрицательную

магнитную проницаемость и диамагнитный отклик двумерного метаматериала. Вместе с тем, поскольку регуляризованное уравнение (4) с накачкой не является интегрируемым, то следует ожидать, что его солитонные решения являются метастабильными. Для решения этого вопроса методом численного моделирования была исследована эволюция радиально-симметричных бризеров на пьедестале в рамках уравнения (4) в зависимости от параметров дисперсии $\beta_{x,y} = \beta$, амплитуды и частоты накачки. В качестве начального условия бралась основная гармоника решения (6) и ее временная производная с амплитудами, удовлетворяющими уравнению (12). Разница между точным и приближенным решением служила начальным возмущением, эволюция которого позволяла судить об устойчивости точного решения. В силу радиальной симметрии решений именно радиально-симметричные экспоненциально растущие добавки являются источником неустойчивости таких солитонов. Этот факт подтверждается и результатом интегрирования исходного уравнения на квадратной решетке (рис. 6), в результате которого решение всегда сохраняет радиально-симметричную форму. Это позволяет изучать эволюцию бризеров в рамках «радиального» регуляризованного нелинейного уравнения Клейна–Гордона с периодической внешней силой:

$$u_{tt} - \Delta_r(u + \beta u_{tt}) + u - \sigma u^3 = e_0 \sin(\omega t), \quad (21)$$

где Δ_r — радиальная часть двумерного лапласиана.

Численный счет подтвердил, что чем ближе частота ω к частоте однородного резонанса ω_0 , тем большим становится время жизни бризера и тем ближе аналитическое выражение для основной гармоники к точному решению. С ростом амплитуды бризера время начала неустойчивости быстро сокращается, потому основные расчеты проводились для значения частоты $\omega = 0,997$ и, соответственно, периода осцилляций $T = 2\pi / \omega \cong 6,302$.

Результаты численного моделирования динамики бризеров представлены на рис. 7–13. На рис. 7(а)

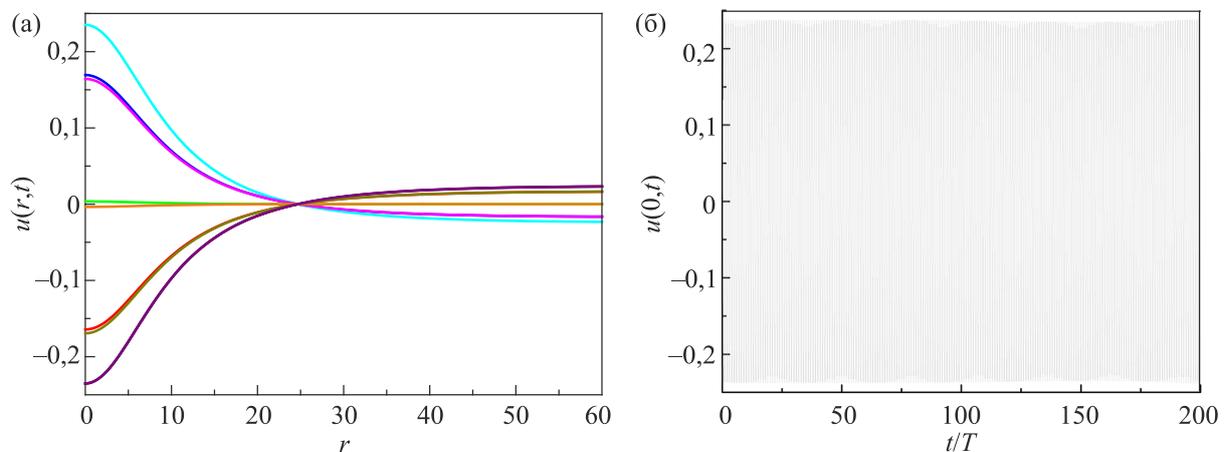


Рис. 7. (Онлайн в цвете) (а) Профили минус-бризера через 1/8 периода после $t = 150T$ и (б) временная серия осцилляций амплитуды этого бризера в начале координат. ($\beta = 0,25$ и $p = 0,25$).

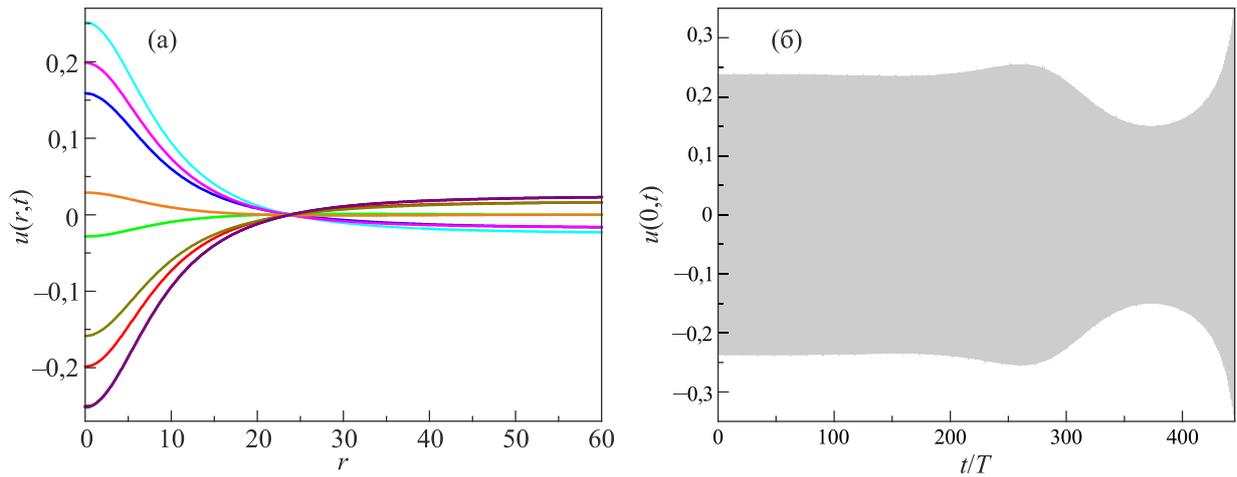


Рис. 8. (Онлайн в цвете) (а) Профили минус-бризера с модой неустойчивости после $t = 250T$ и (б) временная серия осцилляций амплитуды этого бризера в начале координат. ($\beta = 0,25$ и $p = 0,25$).

приведены профили минус-бризера на пьедестале однородных колебаний как решения радиального уравнения после 150 периодов колебаний. Фактически они воспроизводят бризерное решение на квадратной решетке (рис. 6). Однако на этом же рисунке, где представлена радиальная зависимость бризерных профилей на одном периоде колебаний через интервал в $1/8$ периода видно появление моды неустойчивости. Как следует из рис. 7а, в момент, когда решение, пропорциональное $\sin(\omega t)$, должно обращаться в нуль, имеется отличная от нуля, маленькая добавка, пропорциональная $\cos(\omega t)$, которая вместе с малой добавкой, пропорциональной $\sin(\omega t)$, составляет радиально-симметричную моду неустойчивости. Амплитуда такой моды неустойчивости растет экспоненциально с достаточно малым инкрементом. На временной серии осцилляций амплитуды бризера в начале координат на рис. 7б можно заметить начало этого роста. Хотя в целом визуально бризер остается практически неизменным и, как видно, обладает большим временем жизни.

В ходе дальнейшей эволюции мода неустойчивости растет, и сам бризер растет по амплитуде (рис. 8а), и, как показывает временная серия (рис. 8б), после переходного периода с падением амплитуды окончательно теряет устойчивость, что сопровождается бесконечным ростом амплитуды, т.е. коллапсом. Дальнейшее исследование зависимости процесса развития неустойчивости от значения параметра дисперсии объясняет этот результат.

При очень малых значениях параметра дисперсии β , когда смешанными производными можно пренебречь, регуляризованное уравнение стремится к пределу обычного нелинейного уравнения Клейна–Гордона, в котором, как известно, неустойчивость двумерного бризера завершается коллапсом [22]. Именно это видно из рис. 9а, где представлена зависимость амплитуды в центре солитона от времени при $\beta = 0,0075$.

Однако при немалых β учет высшей дисперсии ведет к кардинальному изменению сценария развития неустойчивости (рис. 9б). В этом случае изменение ам-

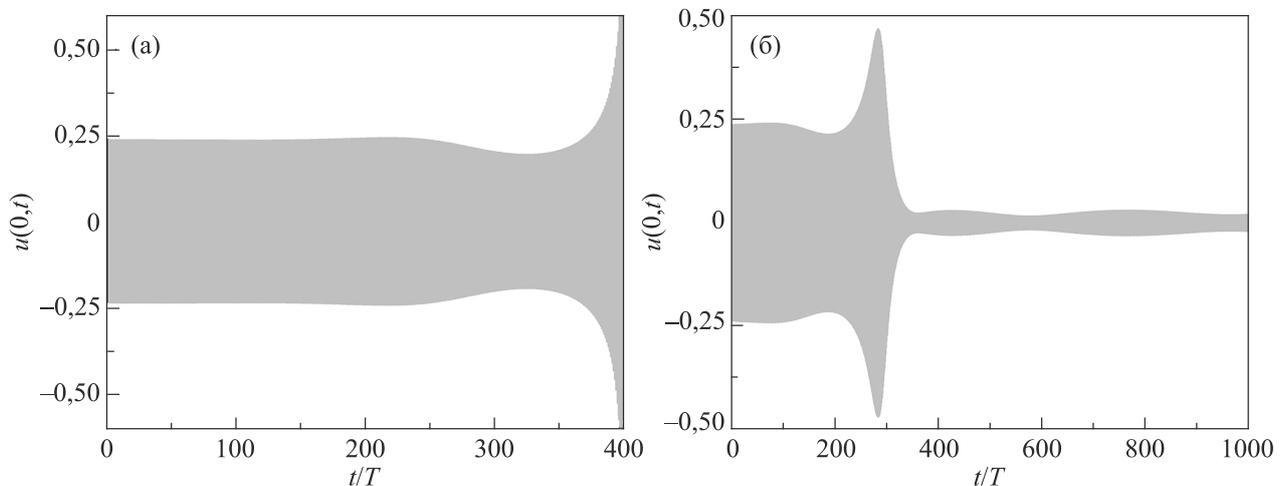


Рис. 9. (а) Временные серии для амплитуды минус-бризера при очень малых $\beta = 0,0075$ и (б) немалых значениях $\beta = 0,75$. (Параметр $p = 0,25$).

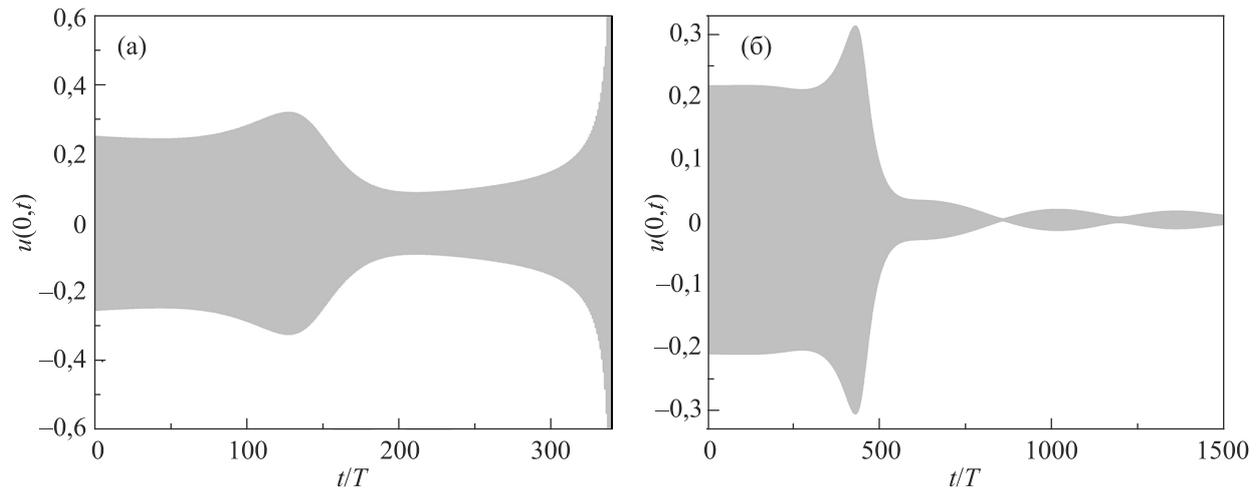


Рис. 10. Временные серии для амплитуды минус-бризера при (а) $p = 0,35$ и (б) $p = 0,1$. (Фиксированный параметр $\beta = 0,25$).

плитуды бризера первоначально идет по сценарию коллапса, но заканчивается резким падением амплитуды трансформированного бризера и дальнейшим его распадом на радиальные волны.

Такой же переход между сценариями наблюдается по параметру накачки p при фиксированном параметре дисперсии β (рис. 10). Видно, что при величине накачки вблизи предельного значения время жизни метастабильного минус-бризера существенно уменьшается, он фактически трансформируется в плюс-бризер, который в конце концов коллапсирует (рис. 10а). Итогом неустойчивости при малых величинах накачки является распад бризера на радиальные волны (рис. 10б).

Заметим, что трансформация минус-бризера в плюс-бризер при приближении амплитуды накачки к максимально возможному значению и последующая некоторая стабилизация плюс-бризера объясняется тем, что в этом пределе он вырождается в однородное нелинейное колебание. При уменьшении амплитуды накачки от ее предельного значения эффект трансформации

минус-бризера в плюс-бризер сохраняется вплоть до границы смены сценариев, которая происходит как по параметру p , так и по параметру β . На этой границе процесс развития неустойчивости плюс-бризера приводит к возникновению хаотических режимов колебаний, которые в конце концов завершаются коллапсом (рис. 11 и 12). Возникновение хаоса не является неожиданным, поскольку даже в одном нелинейном осцилляторе с немалой накачкой он становится возможным [25]. На рис. 11а представлена временная серия эволюции бризера при значениях параметров $\beta = 0,47$ и $p = 0,25$. Из нее следует, что метастабильный минус-бризер с большим временем жизни теряет устойчивость и трансформируется в долгоживущий плюс-бризер, который после потери устойчивости превращается в бризер большой амплитуды с хаотическим спектром колебаний (рис. 11б).

На рис. 12а представлена временная эволюция фазового портрета амплитуды в центре бризера, а на рис. 12б фронтальная проекция портрета. Как видно плюс- и

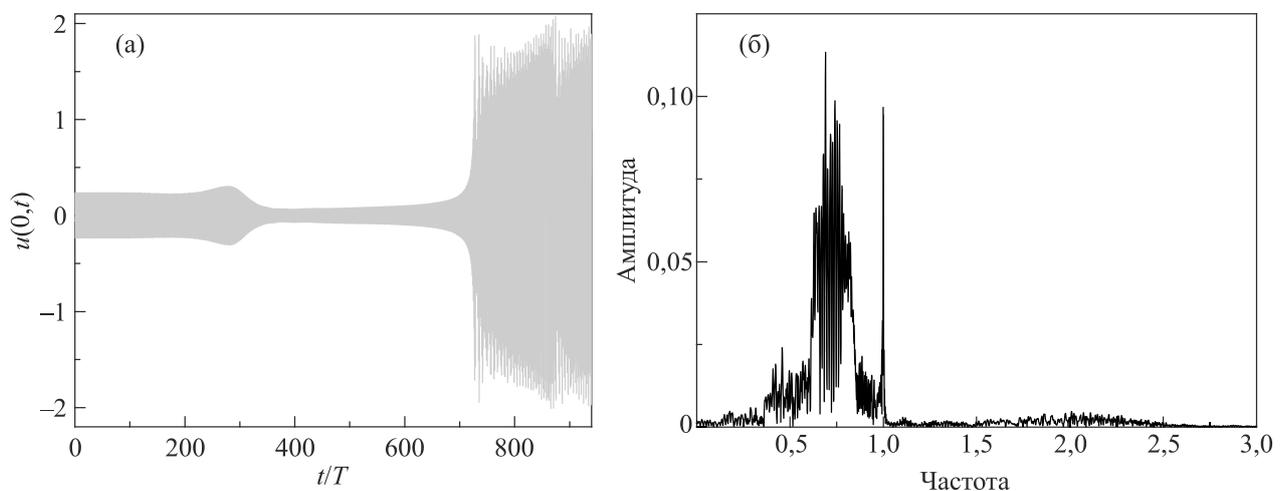


Рис. 11. (а) Временная серия для амплитуды бризера при $\beta = 0,47$ и $p = 0,25$ и (б) ее хаотический частотный спектр.

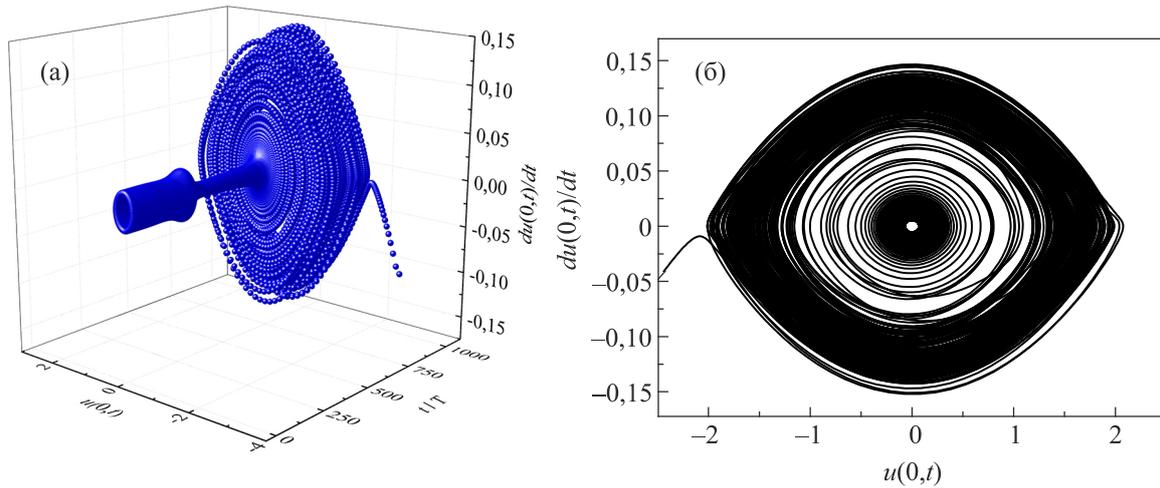


Рис. 12. (а) Эволюция фазового портрета для амплитуды в начале координат при $\beta = 0,47$ и $p = 0,25$ и (б) ее фронтальная проекция.

минус-бризеру отвечают почти устойчивые циклы, а большому бризеру соответствуют фазовые траектории, характерные для стохастического слоя вблизи сепаратрисы для нелинейного осциллятора с гамильтоновым хаосом [25].

На рис. 13а приведены вполне пространственно-когерентные профили большого бризера после 850 периодов осцилляции, а на рис. 13б в увеличенном масштабе показана генерация им стохастических волн. Передний фронт регулярных волн порожден метастабильным минус-бризером, которые продолжают свое движение спустя много периодов осцилляций после его исчезновения.

Хаотические колебания на рис. 13 граничат с пространственно-когерентным локализованным нелинейным возбуждением — бризером и регулярными волнами, представляя собой пример химерного состояния в динамике двумерного нелинейного метаматериала [26].

Наконец следует отметить, что остальные бризеры

на пьедестале («возбужденные» моды) по мере усложнения их структуры обладают все меньшим временем жизни по сравнению с основной бризерной модой, имеющей достаточно долгое время жизни, которое измеряется сотнями периодов колебаний, для того чтобы проявить себя в эксперименте по обнаружению диамагнитного отклика метаматериала на электромагнитное поле терагерцового диапазона.

Заключение

Перечислим полученные результаты настоящего рассмотрения:

1. Аналитически и численно исследованы нелинейные магнитные возбуждения в двумерной системе наноразмерных резонаторов с индуктивными и емкостными связями при приложении электромагнитного поля терагерцового диапазона. Показано, что динамические уравнения для переменной заряда, описывающие эту систему,

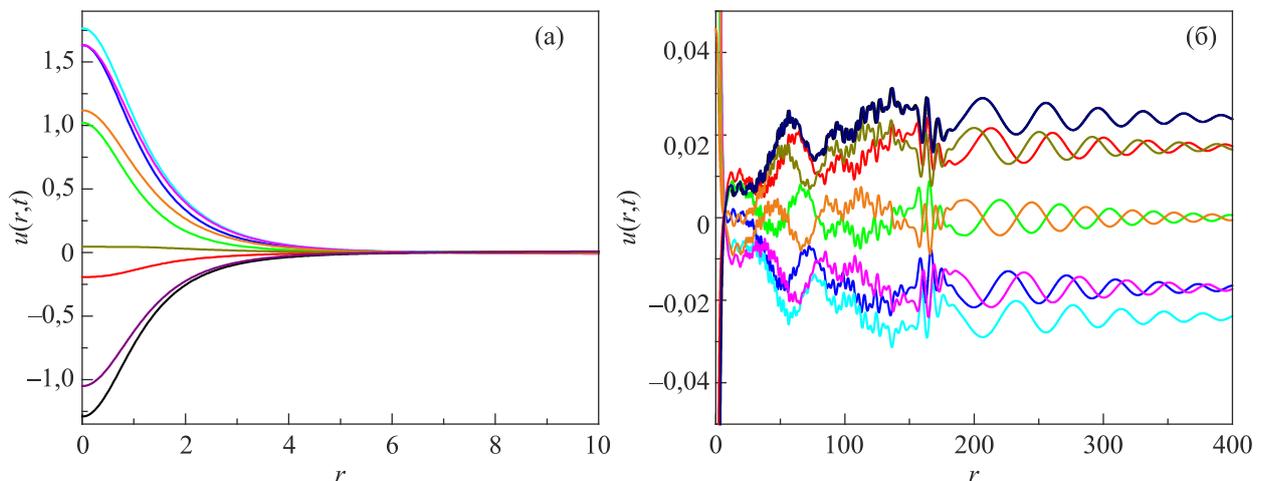


Рис. 13. (Онлайн в цвете) (а) Профили бризера большой амплитуды после 850 периодов осцилляций и (б) генерация им хаотических колебаний. ($\beta = 0,47$, $p = 0,25$).

в длинноволновом пределе сводятся к двумерному регулярному нелинейному уравнению Клейна–Гордона со смешанными четвертыми производными, имеющему дополнительный член накачки в качестве внешней силы.

2. Асимптотическим методом построены радиально-симметричные бризероподобные решения такого уравнения. Для амплитуды основной гармоники выведено двумерное нелинейное уравнение и найдены две последовательности динамических солитонов на пьедестале — двумерных бризеров, существующих на фоне однородных колебаний. Одно из них имеет большую отрицательную амплитуду в центральной области при положительной амплитуде фона, что соответствует локальному диамагнитному отклику метаматериала на электромагнитное поле и обеспечивает ему локальные отрицательные магнитные восприимчивость и проницаемость.

3. Численно исследована устойчивость основных бризероподобных мод в зависимости от параметров дисперсии (величины индуктивной связи), частоты и амплитуды накачки. Установлено, что все найденные нелинейные возбуждения метастабильны, но их время жизни может достигать сотен периодов колебаний. Бризер с отрицательной амплитудой является наиболее долгоживущим, и в случае, когда его частота близка к нижней границе непрерывного спектра, время его жизни может достигать нескольких сотен периодов колебаний.

4. Исследована дальнейшая эволюция двумерного метастабильного бризера и найдены два сценария развития его неустойчивости в зависимости от параметров дисперсии и амплитуды накачки. Если параметр дисперсии меньше критического, бризер после небольшого увеличения, а затем уменьшения его амплитуды в конечном итоге демонстрирует коллапсоподобное поведение. Если параметр дисперсии больше критического, бризер после небольшого интервала роста амплитуды окончательно распадается на расходящиеся регулярные волны. При критическом значении параметра дисперсии долгоживущий бризер большой амплитуды внезапно превращается в долгоживущий бризер малой положительной амплитуды, который затем также резко превращается в химерное состояние, в котором пространственно-когерентный бризер большой амплитуды порождает расходящиеся от него стохастические волны.

Таким образом, показано, что в двумерных магнитных метаматериалах в условиях действия электромагнитного поля терагерцового диапазона благодаря возбуждению долгоживущих бризерных колебаний может возникать диамагнитный отклик, который соответствует локальной отрицательной магнитной проницаемости. Построена теория этого эффекта для метаматериалов как с изотропной, так и с анизотропной индуктивной и емкостной связью между расщепленными прямоугольными резона-

торами, формирующими двумерный метаматериал. Описанный эффект делает возможным наблюдение двумерных магнитных бризерных возбуждений. Если двумерную систему наноразмерных расщепленных резонаторов дополнить, например, решеткой проводящих наноэлементов, которая в терагерцовом частотном диапазоне имеет отрицательную диэлектрическую проницаемость, то показатель преломления окажется отрицательным в области локализации магнитного бризера и чисто мнимым повсюду за пределами этой области. В результате область метаматериала с возбужденным бризером оказывается прозрачной для прохождения электромагнитной волны и может быть обнаружена экспериментально. Заметим, что установленная возможность зависимости солитонного типа в пространственном распределении отрицательной магнитной проницаемости в предложенной модели метаматериала приближает реализацию идеи покрытий, огибаемых светом, для создания которых необходимы именно пространственно зависимые отрицательные показатели преломления.

Настоящая работа выполнена с использованием вычислительных ресурсов грид-кластера Физико-технического института низких температур им. Б.И. Веркина Национальной академии наук Украины, Харьков.

1. В.Г. Веселаго, *УФН* **92**, 517 (1967).
2. J.B. Pendry, A.J. Holden, D.J. Robbins, and W.J. Stewart, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **47**, 2075 (1999).
3. D.R. Smith, W. Padilla, D. Vier, S.C. Nemat-Nasser, and S. Schultz, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4184 (2000).
4. S.A. Ramakrishna and T.M. Grzegorzczak, *Physics and Applications of Negative Refractive Index Materials*, SPIE Press & CRC Taylor & Francis Group, Boca Raton London New York (2009).
5. T.J. Yen, W.J. Padilla, N. Fang, D.C. Vier, D.R. Smith, J.B. Pendry, D.N. Basov, and X. Zhang, *Science* **303**, 1494 (2004).
6. S. Linden, C. Enkrich, M. Wegener, J. Zhou, T. Koschny, and C.M. Soukoulis, *Science* **306**, 1351 (2004).
7. C.M. Soukoulis, *Optics Photonics News* **17**, 16 (2006).
8. N. Lazarides, M. Eleftheriou, and G.P. Tsironis, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 157406 (2006).
9. M. Eleftheriou, N. Lazarides, and G.P. Tsironis, *Phys. Rev. E* **77**, 036608 (2008).
10. M. Lapine, I.V. Shadrivov, and Yu.S. Kivshar, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 1093 (2014).
11. N. Lazarides and G.P. Tsironis, *Appl. Phys. Lett.* **90**, 163501 (2007).
12. О.В. Чаркина, М.М. Богдан, *ФНТ* **44**, 824 (2018) [*Low Temp. Phys.* **44**, 644 (2018)].
13. М.М. Богдан, В.И. Белан, О.В. Чаркина, *ФНТ* **44**, 1700 (2018) [*Low Temp. Phys.* **44**, 1331 (2018)].
14. A. Pimenov, A. Loidl, P. Przytlupski, and B. Dabrowski, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 247009 (2005).
15. Н.Н. Розанов, Н.В. Высотина, А.Н. Шацев, И.В. Шадривов, Ю.С. Кившарь, *Письма в ЖЭТФ* **93**, 826 (2011).

16. М.М. Богдан, О.В. Чаркіна, *ФНТ* **40**, 303 (2014) [*Low Temp. Phys.* **40**, 234 (2014)].
17. M.M. Bogdan and O.V. Charkina, *ФНТ* **34**, 713 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 564 (2008)].
18. P. Gay-Balmaz and O.J.F. Martin, *J. Appl. Phys.* **92**, 2929 (2002).
19. P. Rosenau, *Phys. Rev. B* **36**, 5868 (1987).
20. M.M. Bogdan, A.M. Kosevich, and G.A. Maugin, *Wave Motion* **34**, 1 (2001).
21. R.Y. Chiao, E. Garmire, and C.H. Townes, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 479 (1964).
22. V.G. Makhankov, *Phys. Rep.* **35**, 1 (1978).
23. B. Piette and W.J. Zakrzewski, *Nonlinearity* **11**, 1103 (1998).
24. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983).
25. Ю.И. Неймарк, П.С. Ланда, *Стохастические и хаотические колебания*, Наука, Москва (1987).
26. Y. Kuramoto and D. Battogtokh, *Nonlinear Phenom. Complex Syst.* **5**, 380 (2002).

Метастабільні бризери та локальний діамagnetизм в двовимірних нелінійних метаматеріалах

О.В. Чаркіна, М.М. Богдан

Досліджено динамічні властивості двовимірних нелінійних магнітних метаматеріалів, які складаються з нанорозмірних елементів. Запропоновано модель двовимірної ґратки ємнісно та індуктивно зв'язаних розщеплених прямокутних нанорезонаторів. Показано, що довгохвильова динаміка двовимірної ґратки описується регуляризованим нелінійним двовимірним рівнянням Клейна–Гордона. Асимптотичним методом знайдено розв'язки цього рівняння з урахуванням дії ЕРС, яка індукована електромагнітною хвилею, у вигляді двох послідовностей двовимірних динамічних солітонів на п'єдесталі однорідних вимушених коливань. Розраховано діамagnetний відгук на електромагнітне поле терагерцового діапазону в області метаматеріалу, в якій збуджено бризер, що осцилює протифазно однорідному фону. Чисельно досліджено еволюцію довгоживучих метастабільних бризерів та знайдено два сценарії, колапсу й розпаду, розвитку його нестійкості в залежності від параметрів наведеної ЕРС та індуктивного зв'язку між нанорезонаторами. На межі цих сценаріїв виявлено, що остаточним результатом трансформації бризерів є химерний стан метаматеріалу з бризером великої амплітуди, який генерує стохастичні хвилі.

Ключові слова: двовимірні метаматеріали, нанорозмірні резонатори, нелінійна динаміка, метастабільні бризери.

Metastable breathers and local diamagnetism in two-dimensional nonlinear metamaterials

O.V. Charkina and M.M. Bogdan

The dynamic properties of two-dimensional nonlinear magnetic metamaterials consisting of nanoscale elements are investigated. A model of a two-dimensional lattice of capacitively and inductively coupled rectangle nanoresonators is proposed, and it is shown that its long-wave dynamics is described by the regularized nonlinear two-dimensional Klein–Gordon equation. The asymptotic method found solutions of this equation, taking into account the action of the emf induced by an electromagnetic wave, in the form of two sequences of two-dimensional dynamic solitons on a pedestal of homogeneous forced oscillations. The diamagnetic response to the electromagnetic field of the terahertz range in the metamaterial region, in which a breather is excited, oscillating in antiphase to a uniform background, is calculated. The evolution of long-lived metastable breathers is numerically studied and two scenarios, collapse, and decay are found in the development of its instability, depending on the parameters of the induced emf and inductive coupling between nanoresonators. At the boundary of these scenarios, it has been found that the final result of the transformation of the breathers is the chimera state of the metamaterial with a large-amplitude breather that generates stochastic waves.

Keywords: two-dimensional metamaterials, nanoscale resonators, nonlinear dynamics, metastable breathers.