АКАДЕМИЯ НАУК УССР
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

В ы п у с к III

Харьков - 1972

Адрес редакционной коллегии:
г. Харьков, 86, пр. Ленина, 47, ФТИНТ АН УССР

7 июля 1972 года исполнилось 50 лет замечательному советскому математику, академику АН УССР Владимиру Александровичу МАРЧЕНКО.

Фундаментальные исследования В.А. Марченко в различных областях математики приобрели мировую известность и признание. Им получены важнейшие результаты в спектральной теории дифференциальных операторов, теории функций, математической теории дифракции. За работы по обратной задаче теории рассеяния В.А. Марченко в 1962 году была присуждена Ленинская премия.

Много сил и времени В.А. Марченко отдает научно-педагогической деятельности. Его многочисленные ученики успешно работают в различных областях математики.

Коммунистическая партия и Советское правительство высоко оценили научные достижения В.А. Марченко, наградив его орденом Трудового Красного Знамени.

Харьковчане знают Владимира Александровича не только как выдающегося ученого, но и как чуткого, отзывчивого человека, активного общественного деятеля.

В.А. Марченко находится в расцвете духовных сил, полон научных замыслов и планов.

Редакция сборника "Математическая физика и функциональный анализ" горячо поздравляет Владимира Александровича с пятидесятилетним юбилеем, желает ему новых творческих успехов, здоровья, счастья и многих лет плодотворного и радостного труда.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1972 выпуск Ш

ЗАМЕЧАНИЕ О СУЩЕСТВОВАНИИ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С ЗАДАННЫМ КРУГОВЫМ ИНДИКАТОРОМ ПРИ УТОЧНЕННОМ ПОРЯДКЕ

П.З. Агранович

Круговым индикатором целой функции $f(z)$ при уточненном порядке $\rho(z)$ *) ($\rho(z) \to \rho \geqslant 0$ при $z \to \infty$) называется (см. Лелон [1]) функция

$$\mathcal{L}_c^*(z;\rho(z)) = \mathrm{reg}\,\overline{\lim_{|u|\to\infty}}\frac{\ln|f(uz)|}{|u|^{\rho(|u|)}}\,, \quad u\in\mathbb{C}\,,\ z\in\mathbb{C}^n.$$

Круговой индикатор является плюрисубгармонической функцией в $\mathbb{C}^n$ и удовлетворяет условию

$$\mathcal{L}_c^*(uz) = |u|^{\rho}\mathcal{L}_c^*(z) \tag{I}$$

для любого $u\in\mathbb{C}$. В случае $\rho=0$ круговой индикатор, очевидно, равен константе.

Лелон показал, что при $\rho(z)=1$ для любой плюрисубгармонической функции, удовлетворяющей условию (I), существует целая функция,такая что ее круговой индикатор равен заданной плюрисубгармонической функции.

В статье Генгартнера [2] утверждается, что если $\rho(z)\neq\rho$, то, вообще говоря, не существует целая функция с заданным индикатором, и приведен пример

$$\rho(z)=\frac{\ln\ln z}{\ln z}\;; \qquad \mathcal{L}_c^*(z;\rho(z))=\frac{1}{2}\,.$$

В данной заметке показано, что пример Генгартнера является исключением. Это вытекает из следующих теорем.

Т Е О Р Е М А I. Для любой плюрисубгармонической в $\mathbb{C}^n$ функции $V(z)$, удовлетворяющей условию (I) при $\rho\neq 0$, и любого уточненного порядка $\rho(z)$ ($\rho(z)\to\rho$ при $z\to\infty$) существует хотя бы одна целая функция конечного порядка $f(z)$ такая, что

$$\mathcal{L}_c^*(z;\rho(z)) = V(z).$$

Т Е О Р Е М А 2. Для любого нулевого уточненного порядка $\rho(z)$($\rho(z)\to 0$ при $z\to\infty$), удовлетворяющего условию

$$\frac{\rho'(z)}{\rho(z)}\,z\ln z \to 0 \quad \text{при} \quad z\to\infty, \tag{2}$$

существует целая функция нулевого порядка, круговой индикатор которой $\mathcal{L}_c^*(z;\rho(z))$ равен произвольно заданной константе A .

Доказательство теоремы I в существенном повторяет доказательство П.Лелона упомянутого

*) Определение и свойства уточненного порядка см. Левин [3] .

вначале утверждения и основано на следующей лемме.

Л Е М М А. Плюрисубгармоническая функция $V(z)$, удовлетворяющая равенству (I), обладает тем свойством, что для нее существует последовательность однородных полиномов $P_m(z)$, (степень $P_m(z)$ равна m), таких, что функции

$$V_m(z) = \frac{1}{m} \ln |P_m(z)|$$

ограничены сверху на каждом компакте и

$$\frac{1}{\rho} \ln V(z) = \operatorname{reg} \overline{\lim_{m\to\infty}} \; V_m(z).$$

Эта лемма при $\rho = 1$ приведена в [I, предложение IO].

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О теоремы I. Известно [3], что функция $z^{\rho(z)}$ монотонно возрастает, начиная с некоторого достаточно большого z_0. Обозначим через $\varphi(t)$ единственное решение уравнения $t = z^{\rho(z)}$ при $t > t_0 = z_0^{\rho(z_0)}$.

Искомой целой функцией является функция

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^{\frac{m}{\rho}}}{[\Gamma(\varphi(m)^{\rho}+1)]^{\frac{1}{\rho}}} P_m(z),$$

где $P_m(z)$ - полиномы, построенные согласно лемме для функции $V(z)$, фигурирующей в условии теоремы. Нетрудно видеть, что функция $f(z)$ целая, так как последовательность функций $\{\frac{1}{m} \ln |P_m(z)|\}_{m=0}^{\infty}$ ограничена сверху на каждом компакте.

Далее,

$$f(uz) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^m \rho^{\frac{m}{\rho}}}{[\Gamma(\varphi(m)^{\rho}+1)]^{\frac{1}{\rho}}} P_m(z),$$

и согласно известной формуле, связывающей тип целой функции одного переменного при уточненном порядке $\rho(z)$ с коэффициентами ее степенного разложения *), имеем:

$$\frac{1}{\rho} \ln \mathcal{L}_c^*(z) = \operatorname{reg} \overline{\lim_{m\to\infty}} \Big[\ln \varphi(m) + \frac{1}{m} \ln |P_m(z)| -$$
$$- \frac{1}{\rho} \ln \Gamma(\varphi(m)^{\rho}+1) + \frac{1}{\rho} \ln \rho\Big] - \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} \ln \rho =$$
$$= \operatorname{reg} \overline{\lim_{m\to\infty}} \Big[\frac{1}{m} \ln |P_m(z)|\Big] = V(z).$$

Теорема доказана.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О теоремы 2. Согласно теореме Гришина [4] при условии (2) существует целая функция $\tilde{f}(u)$ одной переменной u, индикатор которой (радиальный) при заданном уточненном порядке $\rho(z)$ равен A.

Легко видеть, что функция

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_n) = \tilde{f}(z_1 + \dots + z_n)$$

является искомой.

Теорема доказана.

З А М Е Ч А Н И Е. Условие (2) можно ослабить, заменив его двумя следующими условиями:

$$\frac{\rho'(z)}{\rho(z)} z \ln z \Big[1 + \frac{1}{\rho(z) \ln z}\Big] \underset{\infty}{\geq} -1 \tag{3}$$

---

*) Формула имеет вид $(\mathcal{L}_c^*(z) e\rho)^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim_{m\to\infty}} \varphi(m) \sqrt[m]{|a_m|}$.

(см. Левин [3]).

и

$$\frac{z^{\rho(z)}}{\ln z} \longrightarrow \infty. \qquad (4)$$

Если $\rho(z) = \frac{\ln \ln z}{\ln z}$, то условие (3) выполняется, а (4) нет.

В заключение автор благодарит Л.И. Ронкина за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

I. P.Lelong, Fonctions entiers(n variables) et fonctions plurisousharmoniques de type exponentiel applications a l'analyse fonctionnelle , Современные проблемы теории аналитических функций, Изд-во "Наука", 1966.

2. W.Hengarther, Famille des trace sur les droites complexes d'une fonction plurisousharmonique on entie're dans C^n, Comment.math.helv.T. C-43, стр. 358-377, 1968.

3. Б.Я. Левин, Распределение корней целых функций, ГИТТЛ, 1956.

4. А.Ф. Гришин, О функциях, голоморфных внутри угла и имеющих там нулевой порядок, Сб. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. I, стр.4I-56,1965.

REMARK ON EXISTENCE OF ENTIRE FUNCTION WITH GIVEN CIRCLE INDICATOR AT SPECIFIED ORDER

P.Z.Agranovich

It has been proved that for any plurisubharmonic function V(z) given in C^n and satisfying the condition

$$V(uz) = |u|^{\rho} V(z), \quad u \in \mathbf{C}, \quad z \in \mathbf{C}$$

with $\rho \neq 0$ and for any specified order $\rho(z)$ ($\rho(z) \to \rho$ with $z \to \infty$) there exists at least one entire function of the finite order ρ such that its circle indicator is equal to the function V(z).

The case of $\rho = 0$ has been considered.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1972 выпуск III

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ БЕЗМОМЕНТНЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ ОБОЛОЧЕК

В.И. Бабенко

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается неустойчивость безмоментного равновесного состояния T_o линейно упругой оболочки, находящейся под действием консервативной нагрузки. Предполагается, что форма F_o деформированной оболочки в состоянии T_o достаточно близка к форме F недеформированной оболочки, а напряженное состояние T_o описывается линейной безмоментной теорией оболочек. Кроме того мы предполагаем, что потеря устойчивости оболочки, находящейся в равновесном состоянии T_o, связана с возможностью существования другого смежного с T_o равновесного состояния T^*.

В работе [I] показано, что вариационный принцип "В" А.В. Погорелова [4] сводится к некоторому критерию неустойчивости безмоментного равновесного состояния оболочек. В данной работе этот критерий мы получаем, исходя из более общих соображений, чем в [I]. Именно, будем предполагать, что форма F^* оболочки в состоянии T^* состоит из ряда областей F_i^*, отделенных друг от друга достаточно узкими областями F_{ik}^*. Последние таковы, что величины, описывающие напряженно-деформированное состояние T^* оболочки, претерпевают значительные изменения только при переходе через области F_{ik}^* из F_i^* в F_k^*. Идеализируя эту схему, *считаем, что в основном приближении* F^* *близка к некоторой разрывной форме* $\tilde{F}$, состоящей из достаточно гладких областей $\tilde{F}_i$, каждая из которых может быть непрерывно деформирована в соответствующий ей образ F_i на F. Взаимно однозначное соответствие поверхностей F и $\tilde{F}$ нарушается только на границах γ_i областей F_i, так что можно говорить о деформации F в $\tilde{F}$ с образованием малых разрывов вдоль γ_i. Предполагается также, что $\tilde{F}$ и F^* достаточно близки всюду, кроме малых окрестностей $O(\gamma_i)$ линий разрывов γ_i, а деформацию поверхности $\tilde{F}$ в F^* в основном приближении можно воспроизвести смещениями точек P поверхности F из $O(\gamma)$ в плоскости, ортогональной той линии γ_i, в окрестности которой находятся точки P.

Пусть u^*, u_o, $\tilde{u}$ – векторы смещений точек срединной поверхности F при ее деформации соответственно в F^*, F_o, $\tilde{F}$; $\Delta\tilde{u}$ – вектор, описывающий разрывы смещений $\tilde{u}$ на линиях разрывов γ_i. Введем вектор смещений u так, чтобы в рассматриваемом приближении имело место равенство

$$u^* = u_o + \tilde{u} + u. \tag{I}$$

Тогда из сделанных выше предположений вытекает, что смещения u существенно отличны от нуля лишь в $O(\gamma_i)$. Они исчезают вместе с вектором разрывов $\Delta\tilde{u}$. Компоненты вектора смещений u в $O(\gamma_i)$ в направлении γ_i равны нулю. Отсюда, в частности, следует, что вектор $\Delta\tilde{u}$ не должен иметь отличную от нуля составляющую в направлении γ_i. При выводе принципа "В" А.В. Погорелов предполагал к тому же, что $\tilde{F}$ и F изометричны. Мы от этого априорного предположения отказываемся.

2. О ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ $\tilde{F}$ В F^*.

Смещения u мы определяем из условия стационарности полной энергии деформации оболочки

W при фиксированных разрывных смещениях $\tilde{u}$ и данном безмоментном равновесном состоянии T_o. При этом мы исходим из следующего выражения для полной энергии деформации оболочки:

$$W = \frac{1}{2} \iint_F (T^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + \mathcal{M}^{\alpha\beta} \varkappa_{\alpha\beta}) dF - \Pi.$$

Здесь и в дальнейшем греческие индексы принимают значения I,2; $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\varkappa_{\alpha\beta}$ – изменение коэффициентов I и II квадратичных форм поверхности F при деформации оболочки; $T^{\alpha\beta}$ и $\mathcal{M}^{\alpha\beta}$ – тензоры усилий и моментов, определяемые по формулам

$$T^{\alpha}_{\beta} = \frac{E\delta}{1-\nu^2}\left[(1-\nu)\varepsilon^{\alpha}_{\beta} + \nu\varepsilon^{\lambda}_{\lambda}\,\delta^{\alpha}_{\beta}\right],$$

$$\mathcal{M}^{\alpha}_{\beta} = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}\left[(1-\nu)\varkappa^{\alpha}_{\beta} + \nu\varkappa^{\lambda}_{\lambda}\,\delta^{\alpha}_{\beta}\right],$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, δ – толщина оболочки. Относительно потенциала П внешних сил предполагается, что его плотность изменяется достаточно плавно соответственно на F и ее границе. Поверхность F отнесена к криволинейной системе координат x^1, x^2.

Выпишем выражение для полной энергии деформации оболочки на смещениях u^*, ограничиваясь при этом линейными членами разложения W по $\tilde{u}$,

$$W = \iint_F T_o^{\alpha\beta} e^*_{\alpha\beta}\, dF - \Pi^*_o + \iint_F \left[T^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + \mathcal{M}^{\alpha\beta}\varkappa_{\alpha\beta} + 2T_o^{\alpha\beta}(\varepsilon_{\alpha\beta} - e_{\alpha\beta})\right] dF. \tag{2}$$

Здесь Π^*_o – работа на смещениях u^* внешних сил, действующих на оболочку в состоянии T_o; величины, вычисленные на смещениях u^* и u_o, отмечены соответственно $*$ и o; остальные же величины вычислены на смещениях u; $e_{\alpha\beta}$ и $e^*_{\alpha\beta}$ – линейные части выражений $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon^*_{\alpha\beta}$ соответственно относительно смещений, на которых они вычисляются. В формуле (2) опущены слагаемые, не зависящие от смещений $\tilde{u}$, а также слагаемые, малые по сравнению с выписанными.

В силу уравнений равновесия оболочки в состоянии T_o разность первых двух слагаемых в выражении (2) равна нулю. Подынтегральное же выражение последнего слагаемого существенно отлично от нуля лишь в $O(\gamma_i)$.

Введем в окрестности $O(\gamma_i)$ каждой линии γ_i локальную полугеодезическую параметризацию (x^1, x^2) поверхности F на базе линии γ_i, приняв в качестве координат x^1 и x^2 соответственно длины дуг s и s_γ геодезических и линии γ_i. Координатную линию $s=0$ совместим с γ_i.

Чтобы получить в $O(\gamma_i)$ выражение для компонент тензоров $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\varkappa_{\alpha\beta}$ через отличную от нуля касательную $u_1(s)$ и нормальную $w(s)$ составляющие вектора смещений u, воспользуемся соотношениями теории пологих оболочек [3]. Имеем:

$$\varepsilon_{11} = u_1' + \frac{1}{2}w'^2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{w\cdot\sin\alpha + u_1\cdot\cos\alpha}{\rho},$$
$$\varkappa_{11} = -w'', \quad \varkappa_{22} = -\frac{\cos\alpha}{\rho}w', \quad \varepsilon_{12} = \varkappa_{12} = 0. \tag{3}$$

Здесь ρ – радиус кривизны линии γ_i, α – угол между нормалью к F и бинормалью к γ_i.

Будем предполагать для определенности, что угол α не близок к $\frac{\pi}{2}$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$. Вместо компонент u_1 и w введем безразмерные величины согласно формулам

$$\bar{v} = \frac{w'}{c}, \quad \bar{u} = \frac{w\cdot\sin\alpha + u_1\cos\alpha}{c\,\varepsilon\,\rho\sin\alpha},$$
$$\bar{s} = \frac{s}{\rho\varepsilon}, \quad \varepsilon^2 = \frac{\delta}{\rho\sin\alpha\sqrt{12(1-\nu^2)}}. \tag{4}$$

Здесь c – малый нормирующий множитель, определяющий порядок смещений u и исчезающий вместе с вектором разрыва $\Delta\tilde{u}$; ε – малый параметр, определяющий ширину окрестности $O(\gamma_i)$.

Величина ε вычисляется из условия существования искомых функций $\bar{v}$ и $\bar{u}$, сообщающих стационарное значение функционалу W, что фактически сводится к требованию, чтобы в $O(\gamma_i)$ энергия деформации в срединной поверхности F и энергия изгиба были величинами одного порядка малости. В дальнейших выкладках величинами порядка ε по сравнению с единицей будем пренебрегать.

Воспользовавшись формулами (3) и (4), представим выражение (2) для энергии в виде функционала, определенного на функциях $\bar{v}$ и $\bar{u}$. Функции $\bar{v}$ и $\bar{u}$ должны сообщать стационарное значение функционалу W. При фиксированных граничных значениях условие стационарности сводится к следующим уравнениям Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{gathered} \bar{u} - \psi' + \nu\varepsilon\psi \cos\alpha = 0, \\ -\bar{v}'' + t\bar{v} + \varepsilon^2 \bar{v} - \psi(1-\beta\bar{v}) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь

$$\psi = \frac{\bar{u}' - \bar{v} + \beta\frac{\bar{v}^2}{2} + \nu\varepsilon\cos\alpha}{\varepsilon^2(1-\nu^2)\cos^2\alpha} \tag{6}$$

- величина, пропорциональная усилию T^{11},

$$t = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{E\delta^2 K_\gamma} T_0^{11}, \qquad \beta = \frac{c}{tg\,\alpha},$$

T_0^{11} - нормальное усилие в оболочке на площадке, параллельной линии γ_i, действующее в состоянии T_0, $K_\gamma = \frac{\sin\alpha}{\rho}$ - нормальная кривизна поверхности F в направлении линии γ_i. Параметр β мал, что следует из предположения о близости $\tilde{F}$ и F (β сравним с единицей при развитых закритических деформациях).

При $\varepsilon \to 0$ уравнения (5), (6) упрощаются и сводятся к следующим:

$$\begin{gathered} \bar{u} = \psi', \\ \bar{v}'' - t\bar{v} + \psi(1-\beta\bar{v}) = 0, \\ \psi'' - \bar{v}' + \beta\frac{\bar{v}^2}{2} = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Интересующие нас решения системы (5), (6) существенно отличны от нуля лишь для $\bar{s} \sim 1$. При удалении от линии γ_i они должны стремиться к нулю. Это значит, что если линии γ_i не подходят близко друг к другу и к краю поверхности F (что мы и предполагаем), то систему (7) можно рассматривать на всей оси $(-\infty, \infty)$, требуя при этом от искомого решения, чтобы при $\bar{s} = \pm\infty$

$$\bar{u} = \bar{v} = 0. \tag{8}$$

При построении равновесного состояния T^*, отличного от T_0, мы в системе (7) сохраняем нелинейные члены (хотя они и малы вместе с β). Это приводит нас к следующему дополнительному ограничению:

$$\frac{\Delta\tilde{u}_1}{c^2\rho\varepsilon} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{v}^2\, d\bar{s} = 0, \tag{9}$$

которое вытекает из третьего уравнения системы (7). В формуле (9) через $\Delta\tilde{u}_1$ обозначена касательная компонента вектора $\Delta\tilde{u}$. Считая, что условие (9) является определяющим при построении состояния T^*, потребуем, чтобы $c^2 \sim |\Delta\tilde{u}_1|$, а коэффициент пропорциональности выберем так, чтобы

$$\frac{\Delta\tilde{u}_1}{c^2\rho\varepsilon} = -1. \tag{10}$$

Тогда условие (9) упростится и примет вид

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{v}^2 \, d\bar{s} = 1. \qquad (II)$$

При $\bar{s}=0$ искомое решение системы (7) должно удовлетворять условиям, вытекающим из требования гладкости смещений u^*, что сводится к следующим соотношениям:

$$\bar{u}(+0) - \bar{u}(-0) = \beta\left(1+\frac{tg\,\alpha}{tg\,\gamma}\right), \qquad (I2)$$

$$\bar{v}(+0) - \bar{v}(-0) \sim \varepsilon\beta\frac{tg\,\alpha}{tg\,\gamma}, \qquad (I3)$$

где $tg\,\gamma = \frac{\Delta\tilde{u}_1}{\Delta\tilde{w}}$, $\Delta\tilde{w}$ – нормальная компонента вектора $\Delta\tilde{u}$.

Вектор разрыва $\Delta\tilde{u}$ смещений $\tilde{u}$ не может быть нормальным к F, так как $\Delta\tilde{u}_1 < 0$, что следует из условия (9). Относительно направления линии разрыва мы будем предполагать, что оно не близко к нормальному (например, полагая $|tg\,\gamma| \sim \beta$, мы придем к равновесному состоянию, не связанному с неустойчивостью состояния T_0). Мы полагаем, что

$$|tg\,\gamma| \gtrsim tg\,\alpha. \qquad (I4)$$

Тогда условие (I3) упрощается и сводится к следующему:

$$\bar{v}(+0) - \bar{v}(-0) = 0. \qquad (I5)$$

Решение системы (7) при условиях (8), (II), (I2), (I5) ищем среди четных функций $\bar{v}$ и ψ. Тогда условие (I5) будет выполняться автоматически и наша задача сведется к отысканию решений системы (7) на полуоси $(0, \infty)$ с граничными условиями (8) при $s=\infty$ и условиями

$$\int_{0}^{\infty} \bar{v}^2 \, d\bar{s} = 1, \qquad (I6)$$

$$\bar{u}(0) = \frac{1}{2}\beta\left(1+\frac{tg\,\alpha}{tg\,\gamma}\right). \qquad (I7)$$

Решение этой задачи, содержащей малый параметр β, строим, используя метод асимптотического интегрирования уравнений [2].

С учетом уравнений (3)-(6) выражение (2) для W упрощается и при $\varepsilon \to 0$ принимает следующий вид:

$$W = -\int_{\gamma_i} \frac{E\delta^2 K_\gamma}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\, \Delta\tilde{u}_1 \left[\int_0^{\infty} (\bar{v}'^2 + \bar{u}^2)\, d\bar{s} + t\right] ds_\gamma .$$

Подставив в эту формулу решение $\bar{v}$, $\bar{u}$ задачи (7), (8), (I6), (I7), в основном приближении получим следующее выражение для линейной части энергии относительно смещений:

$$W = -\int_{\gamma_i} \frac{E\delta^2 K_\gamma}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\, (2+t)\, \Delta\tilde{u}_1 \, ds_\gamma . \qquad (I9)$$

К этому же выражению для энергии мы придем и тогда, когда угол α близок к $\pi/2$ (плоскость линии γ_i совпадает с нормальной к F или близка к ней). В этом случае вместо функций $\bar{v}$, $\bar{u}$ удобнее ввести безразмерные величины

$$\bar{u}_1 = \frac{u_1}{c\rho\varepsilon\sin\alpha}, \qquad \bar{w} = \frac{w}{\varepsilon c\rho}.$$

3. КРИТЕРИЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Так же как и в [I], из условия стационарности W (I9) на смещениях $\tilde{u}$ и отрицательности касательной компоненты вектора разрыва $\Delta \tilde{u}$ получаем следующие утверждения.

Если данное безмоментное равновесное состояние T_0 и рассматриваемая оболочка таковы, что либо гауссова кривизна срединной поверхности F оболочки строго положительна, либо величина

$$t = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{E\,\delta^2\,K_\gamma}\,T_0^{11} \tag{20}$$

не зависит ни от расположения точки P на F, ни от направления линии γ_i в P, где вычисляется t, то в первом случае состояние T_0 устойчиво, если во всех точках поверхности F

$$\sqrt{Z^2 + 4K(T_{02}^1\ T_{01}^2 - T_{01}^1\ T_{02}^2)} - Z < \frac{2E\,\delta^2 K_\gamma}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}, \tag{21}$$

во втором случае оно устойчиво, если

$$t > -2. \tag{22}$$

Оболочка, находящаяся в данном состоянии T_0, теряет устойчивость в первом случае, если или в неравенстве (21) достигается знак равенства, или левая часть неравенства (21) превысит правую на сколь угодно малую положительную величину. Во втором случае оболочка теряет устойчивость, если $t=-2$.

В неравенстве (21) через Z обозначена нормальная компонента внешней поверхностной нагрузки, через $T_{0\alpha}^{\beta}$ обозначены смешанные компоненты тензора усилий $T_0^{\alpha\beta}$. В формуле (20) через T_0^{11} обозначено нормальное усилие, действующее в оболочке в состоянии T_0 на площадке, параллельной линии γ_i.

4. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ T^*.

Для более полного описания напряженно деформированного равновесного состояния T^* можно воспользоваться асимптотическим методом Л.А. Люстерника и М.И. Вишика интегрирования дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. При этом построение асимптотических представлений решений уравнений теории оболочек производится так, чтобы головная система первого итерационного процесса описывала безмоментное состояние T_0 и форму поверхности $\tilde{F}$. Граничные условия, не соблюденные I итерационным процессом, удовлетворяются с помощью II итерационного процесса, головная система которого совпадает с уравнениями (7). Некоторыми особенностями обладают задачи об асимптотическом определении критических нагрузок для оболочки, выпучивание которой начинается у ее края. Это связано с условиями закрепления края оболочки. Проиллюстрируем это на примере пологой, достаточно тонкой, строго выпуклой оболочки F с краем L, свободным от напряжений и шарнирно опертым относительно нормальных смещений. Случай тангенциальной заделки края рассмотрен в [I].

Систему уравнений теории пологих оболочек запишем в следующей безразмерной форме:

$$\begin{aligned} &\bar{\varepsilon}^3 \Delta\Delta W - c^{\alpha\bar{\alpha}} c^{\beta\bar{\beta}} [b_{\alpha\beta} + \bar{\varepsilon} W_{,\alpha\beta}]\,\Psi_{,\bar{\alpha}\bar{\beta}} - Z = 0, \\ &\bar{\varepsilon}\,\Delta\Delta\Psi + c^{\alpha\bar{\alpha}} c^{\beta\bar{\beta}} [(W b_{\alpha\beta})_{,\alpha\beta} + \frac{\bar{\varepsilon}}{2} W_{,\alpha\beta} W_{,\bar{\alpha}\bar{\beta}}] = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

с краевыми условиями

$$\Psi\Big|_L = \frac{\partial\Psi}{\partial n}\Big|_n = W\Big|_L = \left[\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \nu\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - \varkappa\frac{\partial W}{\partial n}\right)\right]\Big|_L = 0. \tag{24}$$

Здесь

$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{\delta}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}$, $\Delta(\ ) = a^{\alpha\beta}(\ )_{\alpha\beta}$–лапласиан,

$$c^{11}=c^{22}=0, \qquad c^{12}=-c^{21}=\frac{1}{\sqrt{a}}, \quad a=|a_{\alpha\beta}|,$$

$a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ – коэффициенты I и II квадратичных форм поверхности F, n – нормаль, а τ – касательная к L; функция напряжений Ψ и усилия $T^{\alpha\beta}$ связаны формулой $T^{\alpha\beta}=E\delta\bar{\varepsilon}^2 c^{\alpha\bar{\alpha}} c^{\beta\bar{\beta}}\Psi_{,\bar{\alpha}\bar{\beta}}$, $\bar{\varepsilon}W$ – нормальная компонента смещений u^*; индекс после запятой означает ковариантное дифференцирование по соответствующей координате на F. Характерный размер оболочки принят равным единице.

Асимптотическое представление для решений системы (23) строим в виде рядов

$$W\simeq\sum_{k=0}^{n-1} W_k\bar{\varepsilon}^k+z(P)\sum_{k=0}^{n}\bar{W}_k\bar{\varepsilon}^k,$$
$$\Psi\simeq\sum_{k=0}^{n}\Psi_k\bar{\varepsilon}^k+z(P)\sum_{k=0}^{n}\bar{\Psi}_k\bar{\varepsilon}^{k+1}. \tag{25}$$

Систему уравнений для определения функций W_k, Ψ_k получаем при помощи I итерационного процесса, подставляя в (23) первые суммы из (25) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\bar{\varepsilon}$:

$$c^{\alpha\bar{\alpha}}c^{\beta\bar{\beta}}b_{\alpha\beta}\Psi_{k,\bar{\alpha}\bar{\beta}}+z\delta_k^0=\Delta\Delta W_{k-3}-c^{\alpha\bar{\alpha}}c^{\beta\bar{\beta}}\sum_{m+\bar{m}=k-1}W_{m,\alpha\beta}\Psi_{\bar{m},\bar{\alpha}\bar{\beta}},$$
$$\Psi_k|_L=-\bar{\Psi}_{k-1}|_L \qquad (k=0,1,\ldots,n), \tag{26}$$

$$c^{\alpha\bar{\alpha}}c^{\beta\bar{\beta}}(W_k b_{\alpha\beta})_{,\bar{\alpha}\bar{\beta}}=-\Delta\Delta\Psi_{k-1}-\frac{1}{2}c^{\alpha\bar{\alpha}}c^{\beta\bar{\beta}}\sum_{m+\bar{m}=k-1}W_{m,\alpha\beta}W_{\bar{m},\bar{\alpha}\bar{\beta}},$$
$$W_k|_L=-\bar{W}_k|_L \qquad (k=0,1,\ldots,n-1), \tag{27}$$

где
$$\delta_k^0=\begin{cases}1 & \text{при } k=0\\ 0 & \text{при } k\neq 0\end{cases}, \qquad \bar{\Psi}_{-1}\equiv 0.$$

Систему уравнений для определения функций типа погранслоя $\bar{W}_k$, $\bar{\Psi}_k$ получим при помощи II итерационного процесса. Для этого, рассматривая систему (23) в окрестности края L, подставим в нее (25) при $z(P)=1$ и, учитывая (26), (27), упростим полученные уравнения. После этого в (23) перейдем к полугеодезической системе координат, построенной на базе кривой L так, как это делалось в пункте 2, сохраняя прежними соответствующие обозначения пункта 2, кроме $s=\bar{s}\bar{\varepsilon}$. Разложим в преобразованной системе (23) коэффициенты при $\bar{W}_k(\bar{s})$, $\bar{\Psi}_k(\bar{s})$ в ряды Тейлора по $\bar{s}\bar{\varepsilon}$ в окрестности $s=0$. Искомую систему получим, приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\bar{\varepsilon}$,

$$\frac{d^2v}{d\tilde{s}^2}+\varphi-tv-v\varphi=0,$$
$$\frac{d^2\varphi}{d\tilde{s}^2}-v+\frac{v^2}{2}=0, \tag{28}$$
$$\frac{dv}{d\tilde{s}}\Big|_{\tilde{s}=0}=v\Big|_{\tilde{s}=\infty}=\varphi\Big|_{\tilde{s}=\infty}=0, \qquad \varphi|_{\tilde{s}=0}=-t,$$

где
$$v=\frac{\varkappa}{b_{22}}\frac{d\bar{W}_0}{d\bar{s}}, \quad \varphi=\frac{\varkappa}{b_{22}}\frac{d\bar{\Psi}_0}{d\bar{s}}, \quad t=\frac{\Psi_{0,22}}{-b_{22}}, \quad \tilde{s}=\bar{s}\sqrt{-b_{22}},$$

$\varkappa=-\frac{\cos\alpha}{\rho}$ – геодезическая кривизна L, $\frac{b_{22}}{\varkappa}=\sin\alpha$.

Система уравнений для определения $\bar{W}_k$, $\bar{\Psi}_k$ $(k\geqslant 1)$ линейна, неоднородна. Эта система не выписана ввиду ее громоздкости.

Сглаживающая функция $z(P)$ $(P \in F)$ равна нулю всюду, кроме окрестности L, где $s < \frac{1}{2} \min_L \rho$. При $s = \frac{1}{4} \min_L \rho$ функция $z(P) \equiv 1$.

Итак, процесс построения асимптотики сводится к следующему. Находим решение Ψ_0 эллиптического уравнения (26) (определяем напряженное состояние T_0). Решаем задачу (28) (уравнения из (28) совпадают с (7)). Затем из эллиптического уравнения (27) (уравнения изгибания $F\_$) определяем W_0 (находим форму $\tilde{F}$). Далее, последовательно находим Ψ_1 из (26); $\bar{\Psi}_1$, $\bar{W}_1$ из неоднородных уравнений вида (28); W_1 из (27) и т.д. Отметим, что фактически асимптотики строятся здесь не по малому параметру $\bar{\varepsilon}$, а по малому параметру $\sqrt{\frac{\delta}{H}}$, где H - высота оболочки.

Задача (28)имеет неединственное решение. Значение параметра t, при котором оба решения совпадают, определяет критическую нагрузку t_e. При решении задачи (28) приближенным методом ([4], стр. 56-60) получено, что $t_e = -\frac{2}{5}$.

Отсюда, в частности, следует, что пологий эллиптический параболоид при внешнем давлении P с условиями закрепления края (24) начинает выпучиваться у края при критической нагрузке, в 5 раз меньшей той нагрузки ([I], [4]), при которой происходит выпучивание внутри оболочки (с образованием ребра γ вдали от края).

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. В.И. Бабенко, Геометрическое исследование неустойчивости безмоментных оболочек, Укр. геометр. сб., вып.I2, Изд-во ХГУ, Харьков, I972.

2. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, I958.

3. Х.М. Муштари, К.З. Галимов, Нелинейная теория упругих оболочек, Таткнигиздат, Казань, I957.

4. А.В. Погорелов, Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек, Изд-во "Наука", М., I967.

INSTABILITY OF MOMENTLESS CONSERVATIVE SHELLS

V.I.Babenko

It is shown that the criterion of the instability of shells deduced earlier by the author from Pogorelov's "B" variation principle may be obtained from the general variation principle of the theory of shells without the assumption that in a main approximation a deformed form of the shell is isometric to an undeformed one.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1972 выпуск III

ОБ АСИМПТОТИКЕ МОМЕНТОВ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. ДИСКРЕТНОЕ ВРЕМЯ

М.М. Бендерский

Рассмотрим линейную систему, которая описывается разностным уравнением

$$\eta_{k+1} = A_{k+1}\eta_k, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{I}$$

где η_k – последовательность из R^n, A_k – случайная последовательность $n \times n$ матриц. Как и в случае непрерывного времени, представляет интерес вопрос о влиянии флуктуации параметров такой системы на поведение ее решений. В настоящей заметке изучается асимптотика моментов решений системы (I) при $A_k = A(\xi_k)$, где $\xi_0, \xi_1, \dots$ – однородная цепь Маркова в пространстве X и $A \in \mathcal{B} = \{X \to N(n)\}$, $N(n)$ – множество $n \times n$ матриц.

I. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

Определение математического ожидания вектора η_k при заданном начальном условии сводится к вычислению

$$M\{A_k \ A_{k-1} \dots A_1\}. \tag{2}$$

Обозначим через M_x усреднение по мере P_x в пространстве последовательностей рассматриваемой марковской цепи с начальной точкой $\xi_0 = x$, и пусть оператор $T: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ определяется равенством

$$(TA)(x) = M_x A(\xi_1) \tag{3}$$

на тех A, для которых правая часть определена при каждом x из X. Предположим, что существует

$$M_x\{A(\xi_n)\dots A(\xi_1)\} \overset{\text{опр.}}{=} \mathcal{B}(n, x). \tag{4}$$

Тогда

$$\begin{aligned} B(n,x) &= M_x\{M[A(\xi_n)\dots A(\xi_2)|\xi_1]\cdot A(\xi_1)\} = \\ &= M_x\{B(n-1,\xi_1)A(\xi_1)\} = T\{B(n-1,\cdot)A\}(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь использованы известные свойства условного математического ожидания [I] и однородность процесса ξ_k. Из определения оператора T следует, что $TA^* = (TA)^*$. Поэтому (5) можно переписать в виде

$$B^*(n,x) = T\{A^* B^*(n-1,\cdot)\} = (TA^*)^n(x)$$

$$B(n,x) = (TA)^n(x). \tag{6}$$

Равенство (6) утверждает, что отыскание $B(n,x)$ сводится к определению степеней оператора TA. Оно является основой дальнейших вычислений.

З А М Е Ч А Н И Е. В некоторых случаях, однако, удобнее использовать другой вариант усреднения произведения рассматриваемых матриц. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ – не только однородная, но и стационарная марковская последовательность и M – усреднение по соответствующей мере. Тогда

$$\begin{aligned} D(n,x) &\overset{\text{опр.}}{=} M\{A(\xi_n)\ldots A(\xi_1)/\xi_{n+1}=x\} = \\ &= M\{M[A(\xi_n)\ldots A(\xi_1)/\xi_n]/\xi_{n+1}=x\} = \\ &= M\{A(\xi_n)D(n-1,\xi_n)\} = Q\{AD(n-1,\cdot)\}(x), \end{aligned} \tag{7}$$

где Q определяется равенством

$$(QA)(x) = M\{A(\xi_n)/\xi_{n+1}=x\}.$$

Поэтому

$$D(n,x) = (QA)^n(x). \tag{8}$$

2. МОМЕНТЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Для вычисления моментов более высоких порядков удобно использовать кронекеровское произведение матриц. Если A – $r\times\ell$ матрица, B – $m\times n$ матрица, то кронекеровским произведением $A\times B$ называется $mr\times n\ell$ матрица вида

$$\{a_{ij}B\}_{i=\overline{1,r};\ j=\overline{1,\ell}}.$$

Следующие свойства кронекеровского произведения (см., например, [2]) будут использованы ниже:

1. $AB\times CD = (A\times C)\cdot(B\times D)$;

2. произведение $A\times A\times\ldots\times A$ не зависит от порядка, в котором перемножаются матрицы, и обозначается $A^{[\ell]}$, ℓ – число сомножителей.

Так как координаты вектора $\eta^{[\ell]}$ есть произведения (по ℓ множителей в каждом) координат вектора η, то определение моментов порядка ℓ решений (1) сводится к определению математического ожидания $\eta_k^{[\ell]}$. Нетрудно, однако, показать, что

$$\eta_{k+1}^{[\ell]} = A_{k+1}^{[\ell]}\cdot\eta_k^{[\ell]} \tag{9}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \eta_{k+1}^{[\ell]} &= \eta_{k+1}\times\ldots\times\eta_{k+1} = A_{k+1}\eta_k\times\ldots\times A_{k+1}\eta_k = \\ &= (A_{k+1}\times\ldots\times A_{k+1})(\eta_k\times\ldots\times\eta_k) = A_{k+1}^{[\ell]}\cdot\eta_k^{[\ell]}. \end{aligned}$$

Таким образом, если η_k ($k = 0,1,2\ldots$) – решение (1), то $\eta_k^{[\ell]} \in R^{n\ell}$ является решением системы такого же вида с матрицей $A_{k+1}^{[\ell]}$. Поэтому для определения $M_x\eta_k^{[\ell]}$ достаточно применить (6) к уравнению (9).

3. МОМЕНТЫ РЕШЕНИЙ В СЛУЧАЕ КОНЕЧНОЗНАЧНОЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ ξ_i. МАЛЫЕ ФЛУКТУАЦИИ

Пусть X - конечное множество $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $P = \{P_{ij}\}_{i,j=\overline{1,m}}$ - матрица перехода марковской цепи ξ_i и $A_i = A(x_i)$. Тогда

$$(TA)_i = M_{x_i} A(\xi_1) = \sum_{k=1}^{m} p_{ik} A_k .$$

Займемся спектром оператора TA, так как именно он определяет асимптотику $B(n,x)$. Если $B \in \{X \to N(n)\}$, то можно рассматривать B как вектор-столбец с элементами $B_i \in N(n)$. Оператор TA действует на B следующим образом:

$$B_i \longrightarrow \Big(\sum_{j=1}^{m} P_{ij} A_j\Big) B_i .$$

Поэтому спектр оператора TA состоит из собственных значений блочной матрицы

$$\begin{pmatrix} P_{11}A_1 & P_{12}A_2 & \cdots & P_{1m}A_m \\ P_{21}A_1 & P_{22}A_2 & \cdots & P_{2m}A_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{m1}A_1 & P_{m2}A_2 & \cdots & P_{mm}A_m \end{pmatrix} . \tag{I0}$$

Пусть $\mu_1 = 1$ - простое собственное значение матрицы P, а остальные собственные значения по модулю меньше единицы, т.е. рассматриваемая цепь $\xi_0, \xi_1, \dots$ предполагается эргодической. Обозначим через $p^* = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$ инвариантную меру этой цепи. Вектор-строка p^* определяется из уравнения $p^* P = p^*$ и условия нормировки $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Чтобы изучить влияние малых флуктуаций матрицы системы (I) на асимптотику математического ожидания ее решений, положим

$$A_i = A_0 + \gamma A_i' , \tag{II}$$

где матрицы A_i' удовлетворяют равенству $\sum_{i=1}^{m} p_i A_i' = 0$. Таким образом, $A_0 = MA_i$ (усреднение по эргодической мере). Если $\gamma = 0$, то матрицу (I0) можно записать в виде

$$P \times A_0 .$$

Поэтому собственные значения этой матрицы есть $\mu_i \cdot \lambda_j$, где μ_i, λ_j - собственные значения P и A_0 соответственно. Вопрос об асимптотике математического ожидания решений (I) сводится к изучению зависимости от большего по модулю собственного значения матрицы (I0). Последняя в рассматриваемом случае имеет вид

$$P \times A_0 + \gamma B', \tag{I2}$$

$$B' = \begin{pmatrix} P_{11}A_1' & \cdots & P_{1m}A_m' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{m1}A_1' & \cdots & P_{mm}A_m' \end{pmatrix}$$

При малых γ можно воспользоваться теорией возмущений и получить следующий результат

Т Е О Р Е М А. Пусть λ_1 - простое собственное значение матрицы A_0 и $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_i|$, а $\lambda_1(\gamma)$ - собственное значение матрицы (I2), которое определяется условием $\lambda_1(0) = \lambda_1$. Тогда

$$\lambda_1(\gamma) = \lambda_1 + \lambda_1^{(2)} \gamma^2 + \dots .$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, приведем один известный в теории возмущений результат [3].

Л Е М М А. Пусть матрица A имеет базис, состоящий из собственных векторов, и $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n$,- соответствующие собственные значения.

Тогда матрица

$$A+\varepsilon B$$

имеет собственные значения

$$\lambda_i(\varepsilon)=\lambda_i+\varepsilon\lambda_i^{(1)}+\varepsilon^2\lambda_i^{(2)}+\ldots, \tag{I3}$$

где
$$\lambda_i^{(1)}=(Be_i\,,e_i')\,, \tag{I4}$$

$$\lambda_i^{(2)}=\sum_{\kappa\neq i}\frac{(Be_i\,,e_\kappa')(Be_\kappa\,,e_i')}{\lambda_i-\lambda_\kappa}\ ; \tag{I5}$$

$e_1, e_2, \ldots, e_n$- нормированные собственные векторы матрицы A , а e_1' ,..., e_n' - соответствующие нормированные собственные векторы A^*.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Если $\lambda_i(\varepsilon)=\lambda_i+\lambda_i^{(1)}\varepsilon+\lambda_i^{(2)}\varepsilon+\ldots$
и
$$e_i(\varepsilon)=e_i+e_i^{(1)}\varepsilon+e_i^{(2)}\varepsilon^2+\ldots,$$
то из уравнения

$$(A+\varepsilon B)e_i(\varepsilon)=\lambda_i(\varepsilon)e_i(\varepsilon)$$

следует, что

$$Ae_i^{(1)}+Be_i=\lambda_i e_i^{(1)}+\lambda_i^{(1)}e_i\,, \tag{I6}$$

$$Ae_i^{(2)}+Be_i^{(1)}=\lambda_i e_i^{(2)}+\lambda_i^{(1)}e_i^{(1)}+\lambda_i^{(2)}e_i\,. \tag{I7}$$

Умножив скалярно обе части (I6) на e_i' , приходим к равенству (I4). Здесь нужно учесть, что для каждого f $(A-\lambda_i I)f\perp e_i'$. Умножив теперь на e_i' обе части равенства (I7), получим:

$$\lambda_i^{(2)}=(Be_i^{(1)},\,e_i')\,-\,\lambda_i^{(1)}(e_i^{(1)},e_i').$$

Если разложить $e_i^{(1)}$ по базису e_i , то отсюда получим:

$$\lambda_i^{(2)}=\sum_{\kappa\neq i}c_\kappa(Be_\kappa\,,e_i'). \tag{I8}$$

Но из (I6) легко найти, что

$$c_\kappa=\frac{(Be_i\,,e_\kappa')}{\lambda_i-\lambda_\kappa}\,,\quad i\neq\kappa.$$

Подставив эти значения в (I8), получим равенство (I5). Лемма доказана.

З А М Е Ч А Н И Е I. Если система координат выбрана так, что матрица A_o диагональна, то

$$\lambda_i^{(1)}=b_{ii}\qquad\text{и}\qquad\lambda_i^{(2)}=\sum_{\kappa\neq i}\frac{b_{i\kappa}b_{\kappa i}}{\lambda_i-\lambda_\kappa}\,.$$

З А М Е Ч А Н И Е 2. Если λ_1 - простое собственное значение, то формула

$$\lambda_1(\varepsilon)=\lambda_1+\lambda_1^{(1)}\varepsilon+\lambda_1^{(2)}\varepsilon^2+\ldots\ ,\quad\lambda_1^{(1)}=(Be_1\,,e_1')$$

остается справедливой для произвольной матрицы A .

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О   Т Е О Р Е М Ы. Из условия теоремы следует, что λ_1 – простое собственное значение матрицы $P \times A_0$ и $|\lambda_1| \geq |\lambda_j \cdot \mu_i|$, так как $|\mu_i| \leq 1$. Пусть f_1 – собственный вектор матрицы A_0 и вектор-столбец $b = (1, \ldots, 1)$ – отвечающий $\mu = 1$ собственный вектор P, а f_1' и $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ – соответствующие векторы матриц A_0^* и P^*. Тогда $b \times f_1$ есть собственный вектор матрицы $P \times A_0$, отвечающий собственному значению λ_1, а $p \times f_1'$ – соответствующий вектор $(P \times A_0)^*$. Применяя лемму, находим:

$$\lambda_1^{(1)} = (p^* \times f_1^{*\prime}) B' (b \times f_1).$$

Матрицу B' можно представить в виде суммы $\sum_1^m P^{(k)} \times A_k'$, где $P^{(k)}$ – матрица, у которой k-ый столбец совпадает с соответствующим столбцом матрицы P, а остальные элементы равны нулю. Поэтому

$$\lambda_1^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} (p^* \times f_1^{*\prime})(P^{(k)} \times A_k')(b \times f_1)$$

или

$$\lambda_1^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} (p^* P^{(k)} b)(f_1^{*\prime} A_k' f_1) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{i,j=1}^{m} p_i p_{ij}^{(k)} \Big) \cdot (f_1^{*\prime} A_k' f_1) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} p_k (f_1^{*\prime} A_k' f_1) = f_1^{*\prime} \Big(\sum_{k=1}^{m} p_k A_k' \Big) f_1 = 0.$$

Теорема доказана.

Пусть $\|A\| = \max |\lambda_i|$ – операторная норма матрицы. Если $\Lambda = \|A_0\| = \|A_0 \times P\|$, а $\Lambda(\gamma) = \|A_0 \times P + \gamma B'\|$ и все собственные значения A_0, совпадающие по модулю с $\|A_0\|$, простые, то, как следует из доказанной теоремы, при достаточно малых γ имеет место разложение

$$\Lambda(\gamma) = \Lambda + \Lambda_1 \gamma^2 + \ \ldots \ . \tag{19}$$

Естественно считать $\Lambda(\gamma)$ показателем асимптотического поведения математического ожидания решений системы (I).

Формула (I9) показывает, что при замене случайной матрицы системы (I) ее средним значением изменение показателя $\Lambda(\gamma)$ при малых возмущениях имеет порядок дисперсии возмущения.

4. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Рассмотрим теперь вопрос о влиянии флуктуации коэффициентов на асимптотику решений в случае, когда система описывается линейным конечно-разностным уравнением, а коэффициенты зависят от значений двузначной марковской цепи $\xi_0, \xi_1, \ldots$ с возможными значениями ± I и матрицей перехода

$$P = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}, \quad u > 0, \ v > 0.$$

Соответствующие вопросы для уравнения с непрерывным временем изучались многими авторами [4].

Пусть в R^1 задано уравнение

$$\zeta_{k+1} = (p + \gamma \xi_{k+1}) \zeta_k + q \zeta_{k-1} \qquad (k = 0, 1, \ldots). \tag{20}$$

Обозначим через η_k вектор-столбец (ζ_k, ζ_{k-1}) и запишем (20) в виде системы

$$\eta_{k+1}=\begin{pmatrix} p+\gamma\xi_{k+1} & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\eta_k. \tag{21}$$

Характеристическое уравнение матрицы (10) в применении к системе (21) имеет вид

$$(\lambda^2-p\lambda-q)(\lambda^2-p(u-v)\lambda-q(u-v)^2)=\frac{u-v}{2}\gamma^2\cdot\lambda^2. \tag{22}$$

Асимптотика $M\zeta_n$ определяется величиной $\Lambda(\gamma^2)=max|\lambda_i|$(λ_i - корни уравнения (22)). Пусть $\Lambda(\gamma^2)=\Lambda+\Lambda_1\gamma^2+\dots$. Знак Λ_1 показывает, увеличивают или уменьшают рост решений малые случайные изменения коэффициентов.

Зависимость $sgn\,\Lambda_1$ от параметров системы (p,q) и параметров возмущения (v или u) описывается следующим равенством $(uv\neq 0)$:

$$sgn\,\Lambda_1=sgn\left\{\left(\frac{p^2}{4}+q\right)(u-v)\right\}. \tag{23}$$

Докажем, что (23) справедливо. Пусть $Q(\lambda)$ - многочлен, стоящий в левой части (22), λ_1 - больший по модулю корень этого многочлена и $\lambda_1(\gamma^2)$ - корень уравнения (22), удовлетворяющий равенству $\lambda_1(0)=\lambda_1$.

Из (22) следует, что

$$\lambda_1'(0)=\frac{(u-v)\lambda_1^2}{2Q'(\lambda_1)}.$$

Так как $\Lambda(\gamma^2)=|\lambda_1(\gamma^2)|$, то

$$\Lambda_1=\frac{\lambda_1^*\cdot\lambda_1'(0)}{|\lambda_1|}=Re\,\frac{(u-v)\lambda_1^*\lambda_1^2}{2|\lambda_1|Q'(\lambda_1)}.$$

С учетом соотношения $sgn\,Re\,z=sgn\,Re\,\frac{1}{z}$ приходим к равенству

$$sgn\,\Lambda_1=sgn\left\{(u-v)Re\,\frac{Q'(\lambda_1)}{\lambda_1}\right\}. \tag{24}$$

Но при $\frac{p^2}{4}+q<0$

$$Re\,\frac{Q'(\lambda_1)}{\lambda_1}=Re\,\frac{(2\lambda_1-p)(\lambda_1^2-p(u-v)\lambda_1-q(u-v)^2)}{\lambda_1}=8uv\left(\frac{p^2}{4}+q\right), \tag{25}$$

а при $\frac{p^2}{4}+q>0$ имеет место неравенство $\frac{Q'(\lambda_1)}{\lambda_1}>0$. Из (24) с учетом последних соотношений и следует равенство (23).

В заключение рассмотрим уравнение в R^1

$$\zeta_{k+1}=\zeta_k+\gamma\xi_{k+1}\zeta_{k-s+1} \qquad (k=0,1,\dots). \tag{26}$$

Переходя к системе для $\eta_k=(\zeta_k,\dots,\zeta_{k-s+1})$, получим:

$$\begin{aligned}&\eta_{k+1}=A(\xi_{k+1})\cdot\eta_k,\\ &\eta_k\in R^s,\quad A(\xi_{k+1})=A_0+\gamma A'\xi_{k+1},\end{aligned} \tag{27}$$

где

$$
A_0 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Матрица (I0) в данном случае имеет вид

$$
P \times A_0 + \gamma \begin{pmatrix} -uA' & vA' \\ -vA' & uA' \end{pmatrix}. \tag{28}
$$

Так как спектр матрицы не изменяется, если одновременно поменять местами две какие-либо строки и затем два соответствующих столбца, то характеристическое уравнение матрицы (28) можно записать в виде

$$
\begin{gathered} \det(A_0 \times P + \gamma A' \times P' - \lambda I) = 0, \\ P' = \begin{pmatrix} -u & v \\ -v & u \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{29}
$$

Последнее уравнение имеет вид

$$
\lambda^{2s-2}(\lambda^2 - 2u\lambda + u^2 - v^2) = \gamma^2 (u-v)^s. \tag{30}
$$

Вопрос о влиянии флуктуаций на асимптотику решений сводится к изучению функции $\Lambda(\gamma^2) = \max|\lambda_i|$, где λ_i – корни уравнения (30). Прежде всего заметим, что $\Lambda(0) = 1$. При $u = v$ показатель $\Lambda(\gamma^2) = 1$, что естественно, ибо это случай, когда значения ξ_i фактически независимы. Если $u > v$, то, как следует из (30), функция $\Lambda(\gamma^2)$ монотонно возрастает. Наконец, при $u < v$ поведение $\Lambda(\gamma^2)$ существенно зависит от четности s. Если при четном s $\Lambda(\gamma^2)$ по-прежнему возрастает при увеличении γ^2, то для нечетного s, по крайней мере, малые возмущения уменьшают $\Lambda(\gamma^2)$. С этим обстоятельством связана возможность улучшения устойчивости системы вида (26) за счет случайных изменений ее параметров. Уравнение (30) позволяет исследовать зависимость асимптотического показателя $\Lambda(\gamma^2)$ и от других параметров. Например, при фиксированном γ как при $u - v \to 0$, так и $s \to \infty$ величина $\Lambda(\gamma^2) \to 1$.

ЛИТЕРАТУРА

I. И.И. Гихман, А.В. Скороход, Теория случайных процессов, "Наука", М., I97I.

2. Р. Беллман, Введение в теорию матриц, "Наука", М., I969.

3. М.И. Вишик, Л.А. Люстерник, Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений, УМН I5, № 3 (93), 3-80, I960.

4. Р.З. Хасьминский, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, "Наука", М., I969.

ON ASIMPTOTICS OF SOLUTION MOMENTS FOR LINEAR SYSTEM WITH RANDOM COEFFICIENTS DISCRETE TIME

M.M.Benderskii

The linear difference system with the matrix depending on a homogeneous Markov chain is considered in R^n. To determine the moments of the solutions for the given system a method is devised which is the basis for the study of the solution moments. It has been proved that the replacement of the matrix of the system by its mean value at small perturbations changes the asymptotic exponent for the mathematical expectation of the solution by the value of the order of perturbation variance. The dependence of the asymptotic exponent on the fluctuation parameters is studied on the basis of concrete systems.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1972 выпуск Ш

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МОДУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В.Я. Голодец

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Для неймановской алгебры M с точным нормальным состоянием ω можно определить согласно работе М. Такесаки [9] обобщенную гильбертову алгебру $\mathfrak{A}_\omega$ и модулярный оператор Δ_ω (см. § I, п. 3). Задача исследования модулярных операторов возникла, в основном, для изучения факторов типа Ш. Важное применение модулярные операторы (или, точнее, автоморфизмы алгебры M, определяемые ими) находят в статистической физике в связи с так называемыми граничными условиями Кубо-Мартина-Швингера [9].

В настоящей работе исследуются общие спектральные свойства семейства самосопряженных операторов Δ_ω, где ω пробегает все точные нормальные состояния фиксированной неймановской алгебры M. Такие операторы Δ_ω в этой работе называются эквивалентными модулярными операторами (сокращенно ЭМО). В предположении, что M – фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве, в работе установлена связь между ЭМО и найдены общие точки спектра ЭМО, инвариантные относительно выбора точного нормального состояния ω (см. § 2). Эти общие точки спектра ЭМО, которые мы обозначаем через $S(M)$, образуют замкнутую подгруппу мультипликативной группы вещественных чисел и являются алгебраическим инвариантом фактора M. Таким образом, если у двух факторов M_1 и M_2 соответствующие $S(M_1)$ и $S(M_2)$ различны, то M_1 и M_2 алгебраически не изоморфны (примеры рассмотрены в § 3, пп. 2,3).

Статья состоит из трех параграфов. В § I изложены вспомогательные результаты, в § 2 исследуются общие спектральные свойства ЭМО. В п. I § 3 модулярные операторы вычисляются для неймановской конструкции скрещенных произведений, а в п п. 2-3 рассматриваются алгебраически не изоморфные факторы типа Ш.

Автор благодарен Дюзе Макдуфф, познакомившей его с работой М. Такесаки [9].

§ I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе изложены сведения о гильбертовом пространстве нормируемых операторов, присоединенных к фактору (п. I), и приведено понятие модулярного оператора (п. 2). Предполагаются известными сведения об алгебрах фон Неймана в объеме гл. VII [I].

I. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА НОРМИРУЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ. Пусть M – фактор, элементы которого являются операторами в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если ξ – вектор из H, то через M_ξ обозначим линейное многообразие, порожденное векторами $m\xi$, где $m \in M$, а через $[M_\xi]$ условимся обозначать замыкание M_ξ в H.

В дальнейшем будем рассматривать лишь такие представления M в пространстве H, для которых существует вектор ξ, являющийся циклическим одновременно для M и для M', т.е.

$[M\xi]=[M'_\xi]=H$. Для всякой неймановской алгебры в сепарабельном гильбертовом пространстве существует подобное представление, а для алгебр типа Ш всякое представление в сепарабельном гильбертовом пространстве обладает подобным свойством (см.теорему I.3 § 2).

Л Е М М А I.I. Пусть для фактора M в сепарабельном гильбертовом пространстве H существует вектор ξ , для которого $[M\xi]=[M'\xi]=H$. Тогда функционал $\omega(x)=(x\xi,\xi)$ $(x\in M)$ на M является точным, т.е. если x - эрмитовый позитивный оператор из M , для которого $\omega(x)=0$, то $x=0$. Более того, равномерно ограниченная по норме последовательность операторов (x_n) из M тогда и только тогда сильно сходится к нулю, когда

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\xi\|=0.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть P - проектор из M и пусть $(P\xi,\xi)=0$. В силу неравенства Шварца для всякого $x'\in M'$ выполнено неравенство $(Px'\xi,x'\xi)=(P\xi,x'^*x'\xi)\leqslant \|P\xi\|\cdot\|x'^*x'\xi\|$. Но $\|P\xi\|^2=(P\xi,P\xi)=(P^2_\xi,\xi)=(P\xi,\xi)=0$. Следовательно, $(Px'\xi,x'\xi)=0$ для любого $x'\in M'$. Поскольку $M'\xi$ плотно в H , то из непрерывности скалярного произведения вытекает, что $(P\eta,\eta)=0$ для всякого вектора $\eta\in H$. Но тогда $P=0$. Первая часть леммы доказана. Доказательство второй части основано на тех же соображениях. Доказательство закончено.

Будем предполагать, что неймановская алгебра M имеет в пространстве H такое представление, что существует вектор $\xi_0\in H$, для которого $[M\xi_0]=[M'\xi_0]=H$. Линейный оператор t в H (необязательно ограниченный) называется присоединенным к M , если он коммутирует со всяким оператором из M' . Линейный оператор t в H , присоединенный к M , назовем, ξ_0 - нормируемым, если

$$\|t\xi_0\|^2=(t\xi_0,t\xi_0)<\infty.$$

Изучим свойства нормируемых операторов. Во-первых, всякий оператор из M является ξ_0 - нормируемым. Во-вторых, поскольку ξ_0 принадлежит области определения всякого ξ_0 -нормируемого оператора t , то из перестановочности t с любым оператором из M' следует, что векторы $x'\xi_0$, где $x'\in M'$, также принадлежат области определения t .

Введем на множестве всех ξ_0 - нормируемых операторов ξ_0 -норму, положив для всякого ξ_0 - нормируемого оператора t

$$\|t\|_2=\|t\xi_0\|. \tag{I.I}$$

Л Е М М А I.2. Пусть неймановская алгебра M в сепарабельном гильбертовом пространстве H имеет такое представление, что существует вектор ξ_0 из H , для которого $[M\xi_0]=[M'\xi_0]=H$. Тогда множество всех ξ_0 - нормируемых операторов замкнуто относительно ξ_0 - нормы (см. (I.I)).

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть (x_n) - фундаментальная последовательность ξ_0 - нормируемых операторов относительно ξ_0 - нормы и пусть $x'\in M'$. Тогда в силу неравенства

$$\|x'(x_n-x_m)\xi_0\|\leqslant\|x'\|\cdot\|(x_n-x_m)\xi_0\|$$

последовательность $(x'x_n)$ также является фундаментальной относительно ξ_0 - нормы для каждого $x'\in M'$. Таким образом, для каждого $x'\in M'$ последовательность векторов $x'x_n\xi_0$ из H сходится к вектору $x'\eta$, где $\eta=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\xi_0$. Но $x'x_n\xi_0=x_nx'\xi_0$, поэтому последовательность операторов (x_n) сходится на векторах из $M'\xi_0$ к линейному оператору x , действующему следующим образом:

$$x(x'\xi_0)=x'\eta, \tag{I.2}$$

где $x'\in M'$, а $\eta=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\xi_0$. Поскольку $\eta\in H$, то из (I.2) следует, что $(x\xi_0,x\xi_0)=(\eta,\eta)$. Далее, из (I.2) легко вытекает, что x перестановочен с каждым оператором y' из M' . Следовательно, x- ξ_0 - нормируемый оператор. Лемма доказана.

Л Е М М А I.3. Пусть выполнены предположения леммы I.2 относительно M,H и ξ_0 , тогда для всякого вектора $\eta \in H$ существует ξ_0 - нормируемый оператор x, присоединенный к M, для которого

$$x\xi_0 = \eta . \tag{I.3}$$

Оператор однозначно определен на $M'\xi_0$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Поскольку $\eta \in H$ и поскольку $M\xi_0$ всюду плотно в H, то существует последовательность векторов $x_n \xi_0$, где $x_n \in M$, сходящаяся к η. Но тогда последовательность операторов (x_n) из M является фундаментальной относительно ξ_0 - нормы. Из леммы I.2 вытекает, что последовательность сходится к некоторому ξ_0 -нормируемому оператору x, присоединенному к M, для которого выполнено (I.3).

Пусть существует еще один ξ_0 - нормируемый оператор y, присоединенный к M, для которого $y\xi_0 = x\xi_0 = \eta$. Тогда для всякого оператора x' из M' выполнено равенство

$$x'y\xi_0 = x'x\xi_0 ,$$

или

$$yx'\xi_0 = xx'\xi_0 .$$

Следовательно, ξ_0 - нормируемые операторы y и x совпадают на $M'\xi_0$. Лемма доказана.

2. ПОНЯТИЕ О МОДУЛЯРНОМ ОПЕРАТОРЕ. Пусть неймановская алгебра имеет в сепарабельном гильбертовом пространстве H такое представление, что в H существует вектор ξ со свойством $[M\xi] = [M'\xi] = H$. Определим на элементах $x\xi$ линейного многообразия $M\xi$ оператор инволюции S_ξ, положив

$$S_\xi x\xi = x^*\xi \qquad (x \in M), \tag{2.I}$$

а на элементах $x'\xi$ многообразия $M'\xi$ определим оператор инволюции F_ξ, положив

$$F_\xi x'\xi = (x')^*\xi . \tag{2.2}$$

Тогда

$$(S_\xi x\xi , x'\xi) = (x^*\xi , x'\xi) = (F_\xi x'\xi , x\xi)$$

для любых $x \in M$ и $x' \in M'$.

Рассмотрим оператор $\Delta_\xi = F_\xi S_\xi$, который, следуя [9], назовем модулярным оператором. В [9] доказано, что Δ_ξ является положительно определенным самосопряженным (быть может, неограниченным) обратимым оператором, действующим в пространстве H, а операторы F_ξ и S_ξ имеют следующее полярное разложение:

$$S_\xi = j_\xi \Delta_\xi^{\frac{1}{2}} = \Delta_\xi^{-\frac{1}{2}} j_\xi , \tag{2.3}$$

$$F_\xi = \Delta_\xi^{\frac{1}{2}} j_\xi = j_\xi \Delta_\xi^{-\frac{1}{2}} , \tag{2.4}$$

где j_ξ - антилинейный изометрический оператор в H, для которого $j_\xi^2 = I$, $j_\xi \Delta_\xi j_\xi = \Delta_\xi^{-1}$ и $j_\xi M j_\xi = M'$.

Поскольку всякий фактор M типа Ш в сепарабельном гильбертовом пространстве H обладает вектором ξ, для которого $[M\xi] = [M'\xi] = H$, то M имеет в H стандартное представление, т.е. существует в H антилинейный изометрический оператор j, для которого $jMj = M'$, $j^2 = I$.

Важно отметить, что из определения F_ξ и S_ξ следует инвариантность вектора ξ относительно Δ_ξ и j_ξ, т.е. $\Delta_\xi \xi = \xi$ и $j_\xi \xi = \xi$.

В [9] доказано, что модулярному оператору Δ отвечает однопараметрическая группа σ_t, где $-\infty < t < \infty$, * - автоморфизмов M, которая определяется следующим образом:

$$\sigma_t(x) = \Delta^{it} x \Delta^{-it} \qquad (x \in M).$$

Более того, алгебра M тогда и только тогда обладает полуконечным следом, когда для всех

$t\ (-\infty<t<\infty)$ автоморфизм σ_t является внутренним автоморфизмом M .

§ 2. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ МОДУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В п. I изучение ЭМО (см.Введение) для $*$ - изоморфных неймановских алгебр сводится к изучению ЭМО для одной и той же алгебры. Затем (в п.2) получена еще одна полезная формула для модулярного оператора. В п. 3 исследуются центральные последовательности в факторе, а в п. 4 - некоторые спектральные свойства модулярных операторов. Наконец, в п. 5 изложены основные результаты параграфа об общих спектральных свойствах ЭМО.

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ МОДУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ. Начнем со следующего определения.

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е I.I. Пусть M - неймановская алгебра в сепарабельном гильбертовом пространстве H и пусть ξ - вектор из H , для которого $[M\xi]=[M'\xi]=H$. Через $\widetilde{M}$ обозначим $*$ - изоморфную M неймановскую алгебру в сепарабельном гильбертовом пространстве $\widetilde{H}$, а через $\widetilde{\xi}$ - вектор из $\widetilde{H}$, для которого $[\widetilde{M}\widetilde{\xi}]=[\widetilde{M}'\widetilde{\xi}]=\widetilde{H}$. Построим для алгебр M и $\widetilde{M}$ в пространствах H и $\widetilde{H}$ соответственно модулярные операторы Δ и $\widetilde{\Delta}$ согласно п. 3 § I по векторам ξ и $\widetilde{\xi}$ соответственно.

Условимся модулярные операторы Δ и $\widetilde{\Delta}$ называть эквивалентными.

Л Е М М А I.2. Пусть выполнены предположения определения I.I относительно M, H, ξ и Δ , а также относительно $\widetilde{M},\widetilde{H},\widetilde{\xi}$ и $\widetilde{\Delta}$. Предположим, более того, что M и $\widetilde{M}$ - пространственно изоморфные факторы и что унитарный оператор U , осуществляющий изоморфизм, удовлетворяет условию

$$U\xi=\widetilde{\xi}. \tag{I.I}$$

Тогда $\widetilde{\Delta}=U\Delta U^*$.

Доказательство опустим.

Т Е О Р Е М А I.3. Пусть выполнены предположения определения I.I относительно M,H,ξ,Δ и относительно $\widetilde{M},\widetilde{H},\widetilde{\xi},\widetilde{\Delta}$. Предположим, что M и $\widetilde{M}$ - факторы. Тогда в пространстве H существует вектор η со свойством $[M\eta]=[M'\eta]=H$,причем модулярный оператор Δ_η для алгебры M , построенный по вектору η , унитарно эквивалентен $\widetilde{\Delta}$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Для доказательства достаточно установить, что факторы M и $\widetilde{M}$ в пространствах H и $\widetilde{H}$ соответственно пространственно изоморфны. Если U - унитарный оператор из $\widetilde{H}$ в H , осуществляющий этот изоморфизм, то положим $\eta=U\xi$. Тогда из леммы I.2 следует, что $\Delta_\eta=U\widetilde{\Delta}U^*$.

Итак, докажем, что при выполнении предположений теоремы факторы M и $\widetilde{M}$ пространственно изоморфны. Если M и $\widetilde{M}$ - факторы типа II_1 , то этот факт - следствие результатов [3] , поэтому будем предполагать, что M и $\widetilde{M}$ - факторы типа II_∞ или III .

Так как факторы M и $\widetilde{M}$ $*$ - изоморфны, то существует взаимно однозначное отображение φ фактора M на $\widetilde{M}$, сохраняющее инволюцию и алгебраические операции. В гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}=H\oplus\widetilde{H}$ рассмотрим неймановскую алгебру $\mathfrak{M}$, элементами которой будут операторы $x\oplus\varphi(x)$, где $x\in M$. Понятно, что $\mathfrak{M}$ - фактор, $*$ - изоморфный M (или $\widetilde{M}$), а коммутант $\mathfrak{M}'$ - фактор того же типа, что и $\mathfrak{M}$. Обозначим через P' и $\widetilde{P}'$ проекторы на подпространства H и $\widetilde{H}$, соответственно. Легко видеть, что $P',\widetilde{P}'\in\mathfrak{M}'$ и, более того, P' и $\widetilde{P}'$ - бесконечные проекторы из $\mathfrak{M}'$. Но тогда в $\mathfrak{M}'$ существует частично изометрический оператор u' , для которого $u'u'^*=P'$ и $u'^*u'=\widetilde{P}'$ (см. §I, п.I). Рассмотрим в пространствах H и $\widetilde{H}$ факторы $P'\mathfrak{M}P'=P'\mathfrak{M}=\mathfrak{M}P'=M$ и $\widetilde{P}'\mathfrak{M}\widetilde{P}'=\widetilde{M}=\varphi(M)$, коммутанты которых есть факторы $P'\mathfrak{M}'P'=M'$ и $\widetilde{P}'\mathfrak{M}'\widetilde{P}'=\widetilde{M}'$ соответственно (см. [I] , § 38). Поскольку $u'\in\mathfrak{M}'$, то

$$u'\widetilde{M}u'^*=u'\widetilde{P}\mathfrak{M}u'^*=u'\widetilde{P}'u'^*\mathfrak{M}=P'\mathfrak{M}=M;$$

следовательно, факторы M и $\widetilde{M}$ пространственно изоморфны. Теорема доказана.

2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ МОДУЛЯРНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ. Пусть M - фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H , а ξ и η - бициклические векторы из H для M , т.е.

$[M\eta]=[M'\eta]=H=[M\xi]=[M'\xi]$. Построим для M по векторам ξ и η модулярные операторы Δ_ξ и Δ_η согласно п. 3 § I. Теорема I.3 сводит изучение связи между произвольными эквивалентными модулярными операторами к изучению связи между операторами вида Δ_ξ и Δ_η .

ЛЕММА 2.I. Пусть M – фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H , ξ,η – бициклические векторы из H для M . Тогда существует ξ – нормируемый обратимый оператор a , присоединенный к M , удовлетворяющий условию:

$$a\xi=\eta. \tag{2.I}$$

Далее, a однозначно определен на $M'\xi$ и имеет следующее полярное разложение:

$$a=uk, \tag{2.2}$$

где u – унитарный оператор из M , а k – самосопряженный ξ – нормируемый положительно определенный обратимый оператор, присоединенный к M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование и однозначность a на $M'\xi$ доказаны в лемме I.3 § I. Докажем обратимость a . Если a не обратим, то замыкание области значений a в H не совпадает с H . Тем более $[aM'\xi]\neq H$. Но тогда $[M'\eta]=[M'a\xi]=[aM'\xi]\neq H$, что противоречит предположению леммы о векторе η .

Докажем (2.2). Рассмотрим на M' состояние $\omega(x')=\frac{1}{2}((x'\xi,\xi)+(x'\eta,\eta))$, где $x'\in M'$. Понятно, что $\omega(x')$ – точное нормальное состояние на M' . Согласно теореме I.3 существует бициклический вектор ς из H для M' такой, что

$$\omega(x')=(x'\varsigma,\varsigma).$$

Долее, на основании теоремы Фридрихса о расширении полуограниченных симметрических операторов [I2] заключаем, что существует обратимый ограниченный самосопряженный оператор h^2 , для которого

$$(x'\xi,\ y'\xi)=(h^2x'\varsigma,\ y'\varsigma) \qquad (x',\ y'\in M') \tag{2.3}$$

и

$$2(h^2)^{-1}\supseteq 1+a^*a. \tag{2.4}$$

Пусть u' – унитарный оператор из M' , тогда из (2.3) следует, что

$$(h^2u'x'\varsigma,\ u'y'\varsigma)=(u'x'\xi,\ u'y'\xi)=(x'\xi,y'\xi)=(h^2x'\varsigma,y'\varsigma).$$

Таким образом, поскольку $[M\varsigma]=[M'\varsigma]=H$, то из полученного равенства выводим, что $u'^*h^2u'=h^2$. В силу произвольности $u'\in M'$ отсюда вытекает, что $h^2\in M$. Теперь из (2.4) делаем заключение о справедливости (2.2). Лемма доказана.

Введем новые понятия. Если x – ξ – нормируемый оператор, действующий в H и присоединенный к M , то согласно лемме I.3 § I существует ξ – нормируемый оператор $\pi'_\xi(x)$, присоединенный к M' и однозначно определенный на $M\xi$, для которого

$$x\xi=\pi'_\xi(x)\xi. \tag{2.5}$$

Заметим, что если $y\in M$, то

$$\pi'_\xi(yx)=\pi'_\xi(x)\pi'_\xi(y).$$

Аналогично, если x' – ξ – нормируемый оператор, присоединенный к M' , то существует ξ – нормируемый оператор $\pi_\xi(x')$, однозначно определенный на $M'\xi$ и присоединенный к M , для которого

$$x'\xi=\pi_\xi(x')\xi, \tag{2.6}$$

причем,если $y'\in M'$, то

$$\pi_\xi(y'x')=\pi_\xi(x')\pi_\xi(y').$$

Воспользуемся теперь отображением $x\to\pi'_\xi(x)$ для того, чтобы представить действие оператора Δ_ξ . Если $x\xi\in D(\Delta_\xi)$, где $D(\Delta_\xi)$ – область определения Δ_ξ , то

$$S_\xi x_\xi = x^*\xi = \pi'_\xi(x^*)\xi$$

и

$$\Delta_\xi x\xi = F_\xi S_\xi x\xi = F_\xi \pi'_\xi(x^*)\xi = \pi'_\xi(x^*)^*\xi. \tag{2.7}$$

Установим теперь связь между модулярными операторами Δ_ξ и Δ_η, где ξ и η – произвольные бициклические векторы из H для M. Все выкладки проведем формально, их обоснование не вызывает труда.

Пусть $\eta = k\xi$, где k – ξ – нормируемый сомосопряженный оператор, присоединенный к M см.(2.2).

Тогда

$$S_\eta x\eta = x^*\eta = x^*k\xi = k(k^{-1}x^*k)\xi = \pi'_\xi(k^{-1}x^*k)\eta.$$

Поскольку

$$\Delta_\eta(x\eta) = F_\eta S_\eta x\eta = \pi'_\eta(x^*)^*\eta,$$

то

$$\Delta_\eta(x\eta) = \pi'_\xi(k^{-1}x^*k)^*\eta = k\Delta_\xi(kxk^{-1})\xi. \tag{2.8}$$

Из (2.8) легко получить явную формулу, связывающую Δ_ξ и Δ_η, однако поскольку она, впрочем как и (2.8), нам не понадобится, то вывод ее мы приводить не будем.

3. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРОВ В ФАКТОРЕ

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е 3.I. Пусть M – фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Последовательность операторов (x_n) из M называется центральной, если множество чисел $(\|x_n\|)$ ограничено и если для всякого $x \in M$ и любого $\eta \in H$

$$\lim_{n\to\infty} \|[x, x_n]\eta\| = 0, \tag{3.I}$$

где $[x, x_n] = xx_n - x_n x$. Центральная последовательность (x_n) (сокращенно ЦП) называется вполне тривиальной (или нулевой), если сильный предел (x_n) равен 0. Две ЦП (x_n) и (y_n) называются эквивалентными, если для любого $\eta \in H$

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_n - y_n)\eta\| = 0. \tag{3.2}$$

ЦП (x_n) называется тривиальной, если она эквивалентна $(\lambda_n I)$, где λ_n – комплексные числа.

Л Е М М А 3.2. Пусть M – фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, ξ – вектор из H, для которого $[M\xi] = [M'\xi] = H$. Пусть D – плотное подмножество M относительно сильной топологии, а (x_n) – ограниченная по норме последовательность операторов из M такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \|[x_n, d]\eta\| = 0 \tag{3.3}$$

для всякого $\eta \in H$ и любого $d \in D$. Если множество $(\|\pi'_\xi(x_n)\|)$ ограничено, то (x_n) и $(\pi'_\xi(x_n))$ – ЦП в M и M' соответственно.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $x \in M$, тогда существует такое $d \in D$, что

$$\|(x-d)\xi\| < \frac{\varepsilon}{4C},$$

где $C \geqslant \sup_n \|x_n\|, \sup_n \|\pi'_\xi(x_n)\|$, а ε – произвольное положительное число. Заметим, что

$$\|[x, x_n]\xi\| \leqslant \|[x-d, x_n]\xi\| + \|[d, x_n]\xi\|. \tag{3.4}$$

Поскольку

$$\|[x-d, x_n]\xi\| \leqslant 2C\,\|(x-d)\xi\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а при достаточно больших n в силу (3.3)

$$\|[d, x_n]\xi\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

то из (3.4) заключаем, что при достаточно больших n

$$\|[x, x_n]\xi\| < \varepsilon .$$

Но это доказывает, что (x_n) - ЦП в M (см. лемму I.I § I). Поскольку

$$[\pi'_\xi(x_n) \ , \ \pi'_\xi(x)]\xi = \pi'_\xi([x, x_n])\xi = [x, x_n]\xi ,$$

то утверждение относительно $(\pi'_\xi(x_n))$ есть следствие предыдущих рассуждений и плотности M_ξ в H . Доказательство закончено.

Л Е М М А 3.3. Пусть выполнены предположения леммы 3.2 относительно M, H и ξ, а (x_n) и $(\pi'_\xi(x_n))$ - ЦП операторов в M и M' соответственно. Если $k - \xi$ -нормируемый оператор, присоединенный к M , то

$$\lim_{n\to\infty} \|[x_n, k]\xi\| = 0 . \tag{3.5}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Доказательство (3.5) проводится точно так же,как и доказательство того, что (x_n) - ЦП,в лемме 3.2 (см. также § I, п.2).

Л Е М М А 3.4. Пусть выполнены предположения леммы 3.2 относительно M, H и ξ , а (x_n) - ЦП в M . Тогда для всякого $x \in M$

$$\lim_{n\to\infty} \{(x_n x\xi, \xi) - (x_n\xi, \xi)(x\xi, \xi)\} = 0. \tag{3.6}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О *). Пусть x_{n_k} - подпоследовательность x_n , для которой

$$|(x_{n_k} x\xi, \xi) - (x_{n_k}\xi, \xi)(x\xi, \xi)| > 1 . \tag{3.7}$$

Поскольку последовательность $\|x_n\|$ $(n=1,2,\dots)$ ограничена, то в (x_{n_k}) $(k=1,2,\dots)$ существует подпоследовательность, слабо сходящаяся к $y \in M$. Так как (x_n) - ЦП, то y принадлежит центру M , а поскольку M - фактор, то $y = \lambda I$, где λ - число. Теперь, с одной стороны, $y = \lambda I$ должно удовлетворять (3.7), так как (x_{n_k}) удовлетворяет (3.7). С другой стороны, очевидно, что для $y = \lambda I$ (3.7) не выполнено. Полученное противоречие доказывает лемму.

4. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА МОДУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ. Начнем настоящий пункт со следующего определения.

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е 4.I. Пусть M - фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H , а ξ - вектор из H , для которого $[M\xi] = [M'\xi] = H$. Соответствующий модулярный оператор (см. § I,п. 3) обозначим через Δ_ξ . Не вполне тривиальную ЦП операторов $(x_n)_1^\infty$ из M назовем λ - спектральной последовательностью (сокращенно λ - СП) для Δ_ξ , если $x_n\xi \in D(\Delta_\xi)$ и для некоторого числа $\lambda \geqslant 0$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to 0} \|(\Delta_\xi - \lambda) x_n \xi\| = 0. \tag{4.I}$$

Ясно, что λ (а также λ^{-1} при $0 < \lambda < \infty$) принадлежит спектру Δ_ξ (Δ_ξ^{-1}) , поскольку в силу того, что (x_n) не вполне тривиальна, случай $\lim_{n\to 0} \|x_n\xi\| = 0$ исключается (см. лемму 2.I § I)**).

Л Е М М А 4.2. Пусть выполнены предположения определения 4.I относительно M, H, ξ, Δ_ξ , (x_n) и λ $(0 < \lambda < \infty)$.Если $(\pi'_\xi(x_n^*)^*)$ - ЦП, то $(j_\xi \pi'_\xi(x_n^*)^* j_\xi) - \lambda^{-1}$-СП для Δ_ξ .

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Поскольку $\Delta_\xi x_n \xi = \pi'_\xi(x_n^*)^*\xi$, то из (4.I) следует, что $\pi'_\xi(x_n^*)^*$ - не вполне тривиальная ЦП из M' .

Заметим, что $\Delta_\xi^{-1}(\pi'_\xi(x_n^*)^*)\xi = \pi'_\xi(x_n)\xi$, и перепишем (4.I) в виде

$$\lim_{n\to\infty} \|(\Delta_\xi^{-1} - \lambda^{-1})\pi'_\xi(x_n^*)^*\xi\| = 0 .$$

---

*) Аналогично можно доказать, что при $x \in M$

$$\lim_{n\to\infty} \{(x_n^* x_n x\xi, \xi) - (x_n\xi, x_n\xi)(x\xi, \xi)\} = 0 .$$

**) Если (x_n) - λ- СП для Δ_ξ и $\lambda \neq 1$, то (x_n) - не тривиальная ЦП (это следует из теоремы 5.I)

Так как $\Delta_\xi = j_\xi \Delta_\xi^{-1} j_\xi$ (см.§ I, п.3), где j_ξ - антилинейный изометрический оператор со свойствами $j_\xi^2 = I$, $j_\xi \xi = \xi$, то последнее равенство эквивалентно такому соотношению:

$$\lim_{n\to\infty} \|(\Delta_\xi - \lambda^{-1}) j_\xi \pi'_\xi (x_n^*)^* j_\xi \xi\| = 0.$$

Лемма доказана.

Л Е М М А 4.3. Пусть выполнены предположения определения 4.I относительно $M, H, \xi, \Delta_\xi, (x_n)$ и λ $(0<\lambda<\infty)$, а (y_n) - μ-СП $(0<\mu<\infty)$ для Δ_ξ. Предположим также, что для (x_n) и (y_n) выполнены условия леммы 4.2. Тогда, если $\check{S}$ - подгруппа мультипликативной группы вещественных чисел, порожденная λ и μ, то всякое $\alpha \in \check{S}$ принадлежит спектру Δ_ξ, если же $\alpha \in \check{S}$ и $\alpha = \lambda^k \mu^\ell$ $(k,\ell = 0,1,2\ldots)$, то существует α-СП для Δ_ξ.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $k(n)$ - целочисленная функция на (I,2,...), для которой $\lim_{n\to\infty} k(n) = \infty$. Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \|(\Delta_\xi - \lambda\mu) x_{k(n)} y_n \xi\| = 0. \tag{4.2}$$

Заметим для этого, что

$$\Delta_\xi x_{k(n)} y_n \xi = \pi'_\xi ((x_{k(n)} y_n)^*)^* \xi = \pi'_\xi (y_n^*)^* \pi'_\xi (x_{k(n)}^*)^* \xi \tag{4.3}$$

и что в силу предположений леммы 4.2

$$\sup_n (\|\pi'_\xi (x_n^*)^*\|, \|\pi'_\xi (y_n^*)^*\|) < C, \tag{4.4}$$

где C - конечная постоянная, не зависящая от n.

Учитывая (4.3), получаем, что

$$\|(\Delta_\xi - \lambda\mu) x_{k(n)} y_n \xi\| = \|\pi'_\xi (y_n^*)^* \pi'_\xi (x_{k(n)}^*)^* \xi - \lambda\mu x_{k(n)} y_n \xi\| \le$$

$$\le \|\pi'_\xi (y_n^*)^*\| \cdot \|(\pi'_\xi (x_{k(n)}^*)^* - \lambda x_{k(n)}) \xi\| + \lambda \|x_{k(n)}\| \cdot \|(\pi'_\xi (y_n^*)^* - \mu y_n) \xi\|.$$

Отсюда, принимая во внимание (4.4) и тот факт, что (x_n), y_n - λ и μ-СП для Δ_ξ, находим, что выполнено (4.2).

Чтобы закончить доказательство леммы, нужно доказать, что существует такая функция $k(n)$, для которой $(x_{k(n)} y_n)$ - не вполне тривиальная ЦП из M. Фиксируем число n, тогда, поскольку (x_k) - ЦП, то при достаточно больших k

$$|(x_k y_n \xi, \ x_k y_n \xi) - (x_k^* x_k y_n^* y_n \xi, \xi)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\varepsilon > 0$ - наперед заданное малое число. Далее, в силу леммы 3.4 (вернее, ее аналога) при достаточно больших k

$$|(x_k^* x_k y_n^* y_n \xi, \xi) - (x_k \xi, x_k \xi)(y_n \xi, y_n \xi)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, при достаточно больших k

$$|\|x_k y_n \xi\|^2 - \|x_k \xi\|^2 \|y_n \xi\|^2| < \varepsilon. \tag{4.5}$$

Так как (x_k) и (y_k) - не вполне тривиальные ЦП, то из (4.5) вытекает, что можно построить функцию $k(n)$, для которой $(x_{k(n)} y_n)$ - также не вполне тривиальная ЦП. Доказательство закончено.

С Л Е Д С Т В И Е 4.4. Пусть выполнены предположения леммы 4.3 относительно $\check{S}$ и пусть S - замыкание $\check{S}$ в $[0,\infty)$. Тогда всякая точка S принадлежит спектру Δ_ξ и, более того, S является одним из следующих множеств $[0,\infty)$, $(x^n;\ n = 0, \pm 1, \ldots)$, где $0 < x \le 1$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Так как спектр Δ_ξ (коротко $Sp\Delta_\xi$) - замкнутое подмножество $[0,\infty]$, то $S\in Sp\Delta_\xi$. Легко проверить, что $S\backslash 0$ есть замкнутая подгруппа группы $(0,\infty)$. Отсюда вытекает последнее утверждение следствия.

Т Е О Р Е М А 4.5. Пусть выполнены предположения 4.I относительно $M, H, \xi, \Delta_\xi, (x_n)$ и λ $(0<\lambda<\infty)$, а (x_n^*)-μ- СП для Δ_ξ . Если

$$\sup_n (\|\pi'_\xi(x_n)\|, \|\pi'_\xi(x_n^*)\|) < C, \tag{4.6}$$

где C - конечная постоянная, то $\mu=\lambda^{-1}$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Положим (см. § I, п.3)

$$\sigma_t(x) = \Delta_\xi^{it} x \Delta_\xi^{-it} \qquad (-\infty<t<\infty).$$

Тогда, как легко проверить,

$$\sigma_t(\pi'_\xi(x)) = \pi'_\xi(\sigma_t(x)).$$

Следовательно, из (4.6) заключаем, что

$$\sup_n \|\pi'_\xi(\sigma_t(x_n^*))\| < C. \tag{4.6'}$$

Теперь согласно предположению

$$\lim_{n\to\infty} \|(\Delta_\xi^{it}-\mu^{it})x_n^*\xi\| = 0 \qquad (-\infty<t<\infty). \tag{4.7}$$

С другой стороны, в силу неравенства Шварца и (4.6')

$$\|(\Delta_\xi^{it}-\lambda^{-it})x_n^*\xi\|^2 = ((\Delta_\xi^{it}-\lambda^{it})x_n\xi, \ (\pi'_\xi(\sigma_t(x_n^*))^* - \lambda^{it}\pi'_\xi(x_n^*)^*)\xi) \le$$
$$\le \|(\Delta_\xi^{it}-\lambda^{it})x_n\xi\|\cdot\|(\pi'_\xi(\sigma_t(x_n^*))^* - \lambda^{it}\pi'_\xi(x_n^*)^*)\xi\| \le$$
$$\le 2C\|(\Delta_\xi^{it}-\lambda^{it})x_n\xi\| \qquad (-\infty<t<\infty).$$

Так как согласно предположению $\lim\limits_{n\to\infty}\|(\Delta_\xi^{it}-\lambda^{it})x_n\xi\|=0$, то отсюда заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \|(\Delta_\xi^{it}-\lambda^{-it})x_n^*\xi\| = 0 \qquad (-\infty<t<\infty). \tag{4.7'}$$

Сравнивая (4.7) и (4.7'), находим, что $\mu=\lambda^{-1}$. Теорема доказана.

Т Е О Р Е М А 4.6. Пусть выполнены предположения определения 4.I относительно M, H, ξ, Δ_ξ , (x_n) и λ $(0<\lambda<\infty)$. Предположим также, что выполнено (4.6),

$$\sup_n (\|\pi_\xi(\pi'_\xi(x_n^*)^*)\|, \ \|\pi_\xi(\pi'_\xi(x_n)^*)\|) < C \tag{4.8}$$

(C - конечная постоянная) и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n^*\xi\| > 0. \tag{4.9}$$

Тогда (x_n^*) - λ^{-1} - СП для Δ_ξ.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Докажем сначала, что (x_n^*) -ЦП из M . Во-первых, так как $\|x_n^*\|=\|x_n\|$, то $\sup_n\|x_n^*\|<C$. Далее, так как $\Delta_\xi x^*\xi - \pi'_\xi(x)^*\xi$, то множество $x\in M$, для которых $\pi'_\xi(x)^* - \xi$ - нормируемый оператор, присоединенный к M' , плотно в M [9]. Для всякого такого x имеем:

$$\|[x, x_n^*]\xi\|^2 = ([x^*, x_n]\xi, \ [\pi'_\xi(x_n^*)^*, \ \pi'_\xi(x)^*]\xi) \le$$
$$\le \|[x^*, x_n]\xi\|\cdot\|[\pi'_\xi(x_n^*)^*, \ \pi'_\xi(x)^*]\xi\|.$$

Но поскольку (x_n) - ЦП, то с учетом (4.6) и (4.8) получаем, что для плотного множества x в M

$$\lim_{n\to\infty} \|[x, x_n]\xi\| = 0. \tag{4.10}$$

Так как в силу (4.6) $\sup_n \|\pi'_\xi(x_n^*)\| < C$, то из леммы 3.2 заключаем, что (4.10) верно для любого $x \in M$. Отсюда и из (4.9) делаем вывод, что (x_n^*) - не вполне тривиальная ЦП из M.

Перейдем к доказательству того, что (x_n^*) - λ^{-1} - СП для Δ_ξ

$$\|(\pi'_\xi(x_n)^* - \lambda^{-1}\pi'_\xi(x_n^*))\xi\|^2 =$$
$$= ((\lambda^{-1}\pi'_\xi(x_n^*)^* - \pi'_\xi(x_n))\xi, \pi_\xi(\pi'_\xi(x_n)^*)^*\xi - \lambda^{-1}x_n\xi) \leq$$
$$\leq \lambda^{-1}\|(\pi'_\xi(x_n^*)^* - \lambda\pi'_\xi(x_n))\xi\| \cdot (\|\pi_\xi(\pi'_\xi(x_n)^*)\| + \lambda^{-1}\|x_n\|).$$

Поскольку x_n - λ - СП, то из этого неравенства с учетом (4.6) и (4.8) заключаем, что (x_n^*) - λ^{-1} -СП для Δ_ξ. Теорема доказана.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕЙ ЧАСТИ СПЕКТРА ЭМО. В этом пункте мы изложим основные результаты статьи об общих спектральных свойствах ЭМО.

Т Е О Р Е М А 5.I. Пусть M - фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, ξ - бициклический вектор для M, т.е. $[M\xi]=[M'\xi]=H$. Предположим, что (x_n) и (x_n^*) - λ и λ^{-1} - СП соответственно из M для модулярного оператора Δ_ξ $(0<\lambda<\infty)$ (см. § I, п.3 и определение 4.I), причем последовательности (x_n) и (x_n^*) удовлетворяют условию (4.6). Тогда λ и λ^{-1} принадлежат спектру МО Δ_η, где η - произвольный бициклический вектор из H для фактора M. Более того,

$$\lim_{n\to\infty} \|(\Delta_\eta - \lambda)(1+\Delta_\eta)^{-1}x_n\eta\| = \lim_{n\to\infty} \|(\Delta_\eta - \lambda^{-1})(1+\Delta_\eta)^{-1}x_n^*\eta\| = 0$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|(I+\Delta_\eta)^{-1}x_n\eta\| > 0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \|(I+\Delta_\eta)^{-1}x_n^*\eta\| > 0.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. В силу леммы I.2 настоящего параграфа можно предполагать, что

$$\eta = k\xi, \tag{5.1}$$

где k - ξ - нормируемый самосопряженный обратимый оператор, присоединенный к M. Так как (x_n) - λ -СП, то (x_n) удовлетворяет (4.I). Перепишем (4.I) в виде

$$\lim_{n\to\infty} \|(\pi'_\xi(x_n^*)^* - \lambda\pi'_\xi(x_n))\xi\| = 0. \tag{5.2}$$

В силу (4.6) и леммы I.I § I соотношение (5.2) эквивалентно соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \|(\pi'_\xi(x_n^*)^* - \lambda\pi'_\xi(x_n))\eta\| = 0. \tag{5.3}$$

Исследуем более подробно это выражение. Учитывая результаты п. 3 §I и то, что $\pi'_\xi(x_n^*) \in M'$, получаем

$$\begin{aligned} \pi'_\xi(x_n^*)^*\eta &= F_\eta\,\pi'_\xi(x_n^*)\eta = F_\eta\,k x_n^* k^{-1}\eta = \\ &= j_\eta\,\Delta_\eta^{-\frac{1}{2}}(k x_n^* k^{-1})\eta. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Далее, поскольку $\pi'_\xi(x_n)\eta = k x_n \xi$, то в силу леммы 3.3 находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\pi'_\xi(x_n)\eta - x_n\eta\| = 0. \tag{5.5}$$

Но
$$x_n\eta = S_\eta x_n^*\eta = j_\eta \Delta_\eta^{\frac{1}{2}} x_n^*\eta, \tag{5.6}$$

поэтому,учитывая (5.4), (5.5) и (5.6), получаем, что из (5.3) вытекает следующее равенство:
$$\lim_{n\to\infty} \| \Delta_\eta^{-\frac{1}{2}} k x_n^* k^{-1}\eta - \lambda \Delta_\eta^{\frac{1}{2}} x_n^*\eta \| = 0. \tag{5.7}$$

Так как Δ_η - самосопряженный положительно определенный оператор в H, то
$$\|(I+\Delta_\eta)^{-1}\|, \quad \|\Delta_\eta(I+\Delta_\eta)^{-1}\|, \quad \|\Delta_\eta^{\frac{1}{2}}(1+\Delta_\eta)^{-1}\| \leq 1.$$

Но тогда из (5.7) получаем, что
$$\lim_{n\to\infty} \| \Delta_\eta^{\frac{1}{2}} (I+\Delta_\eta)^{-1} \{ \Delta_\eta^{-\frac{1}{2}} k x_n^* k^{-1}\eta - \lambda \Delta_\eta^{\frac{1}{2}} x_n^*\eta \} \| = \tag{5.8}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \| (\Delta_\eta - \lambda^{-1})(I+\Delta_\eta)^{-1} x_n^*\eta \| = 0,$$

где мы воспользовались соотношением
$$\lim_{n\to\infty} \| (1+\Delta_\eta)^{-1} (k x_n^* k^{-1}\eta - x_n^*\eta) \| = 0,$$
которое является следствием леммы 3.3 и ограниченности оператора $(1+\Delta_\eta)^{-1}$.

Из (5.8) вытекает, что λ^{-1} принадлежит спектру Δ_η (коротко $Sp\,\Delta_\eta$), если
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| (I+\Delta_\eta)^{-1} x_n^*\eta \| > 0. \tag{5.9}$$

Если это, однако, не выполнено, то из (5.8) следует, что одновременно
$$\lim_{n\to\infty} \| \Delta_\eta (I+\Delta_\eta)^{-1} x_n^*\eta \| = \lim_{n\to\infty} \| (1+\Delta_\eta)^{-1} x_n^*\eta \| = 0.$$

Так как (x_n^*) - не вполне тривиальная ЦП из M, то нетрудно сообразить, что эти два соотношения не могут быть удовлетворены одновременно. Итак, из (5.8) и (5.9) следует, что $\lambda^{-1} \in Sp\,\Delta_\eta$. Аналогично доказывается, что $\lambda \in Sp\,\Delta_\eta$. Теорема доказана.

Т Е О Р Е М А 5.2. Пусть выполнены предположения теоремы 5.I относительно M, H. Через $S_0(M)$ обозначим общие точки спектра ЭМО, а через $\check{S}(M)$ - подмножество $S_0(M)$, обладающее следующими свойствами.

I. Если $\lambda \in \check{S}(M)$ $(0<\lambda<\infty)$, то $\lambda^{-1} \in \check{S}(M)$.

2. Для всякого $\lambda \in \check{S}(M)$ существует бициклический вектор ξ в H такой, что λ и λ^{-1}-СП (x_n) и (x_n^*) из M соответственно для Δ_ξ, удовлетворяющие (4.6).

Тогда,если $S(M)$ является замыканием $\check{S}(M)$, то $S(M)$ есть замкнутая подгруппа группы вещественных мультипликативных чисел, поэтому $S(M) \subset S_0(M)$ и есть одно из следующих множеств: $[0,\infty)$ $(x^n,\ n=0,\pm1,\ldots)$, где $0<x\leq 1$. $S(M)$ - алгебраический инвариант фактора M.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $\lambda, \mu \in S(M)\,(0<\lambda,\mu<\infty)$, а (x_n) и (y_n)-λ и μ -СП последовательности для $\Delta_1 = \Delta_{\xi_1}$ и $\Delta_2 = \Delta_{\xi_2}$, соответственно, где $\xi_i\ (i=1,2)$- бициклический вектор для M в H. Пусть η - произвольный бициклический вектор для M в H. Тогда согласно теореме 5.I точки $\lambda, \mu \in Sp\,\Delta_\eta$, впрочем, как и $\lambda^{-1}, \mu^{-1} \in Sp\,\Delta_\eta$.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\lambda^{-1}\mu^{-1} \in Sp\,\Delta_\eta$ (см. лемму 4.3 и следствие к ней). Приступим к решению этой задачи.

Из предположения, применяя соображения, использованные при доказательстве теоремы 5.I,находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \|(\pi'_{\xi_1}(x_n^*)^* - \lambda x_n)\eta\| = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \|(\pi'_{\xi_2}(y_n^*)^* - \mu y_n)\eta\| = 0.$$

Отсюда с помощью стандартных оценок легко получаем, что (см. доказательство леммы 4.3)

$$\lim_{n\to\infty} \|(\pi'_{\xi_2}(y_n^*)^* \pi'_{\xi_1}(x_n^*)^* - \lambda\mu x_n y_n)\eta\| = 0. \tag{5.10}$$

Заметим теперь, что

$$\pi'_{\xi_1}(x_n^*) = \pi'_\eta(k_1 x_n^* k_1^{-1}), \tag{5.11}$$

где $\eta = k_1 \xi_1$. Действительно, поскольку $\pi'_{\xi_1}(x_n^*) \in M'$, и поскольку

$$\pi'_{\xi_1}(x_n^*)\eta = k_1 x_n^* \xi_1 = \pi'_\eta(k_1 x_n^* k_1^{-1})\eta,$$

то из леммы 1.3 § 1 делаем вывод о справедливости (5.11). Аналогично доказывается равенство

$$\pi'_{\xi_2}(y_n^*) = \pi'_\eta(k_2 y_n^* k_2^{-1}). \tag{5.12}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\pi'_{\xi_2}(y_n^*)^* \pi'_{\xi_1}(x_n^*)^*\eta &= \pi'_\eta(k_2 y_n^* k_2^{-1})^* \pi'_\eta(k_1 x_n^* k_1^{-1})^*\eta = \\ &= F_\eta(k_2 y_n^* k_2^{-1})(k_1 x_n^* k_1^{-1})\eta = \\ &= J_\eta \Delta_\eta^{-\frac{1}{2}}(k_2 y_n^* k_2^{-1})(k_1 x_n^* k_1^{-1})\eta.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Заметим, далее, что

$$\lim_{n\to\infty} \|(k_2 y_n^* k_2^{-1})(k_1 x_n^* k_1^{-1})\eta - y_n^* x_n^* \eta\| = 0. \tag{5.14}$$

Действительно, так как $\eta_i = k_i \xi_i$ $(i=1,2)$, то

$$k_2 y_n^* k_2^{-1} k_1 x_n^* k_1^{-1}\eta = \pi'_{\xi_1}(x_n^*) k_2 y_n^* \xi_2.$$

Принимая во внимание условие (4.6) и лемму 3.3, находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\pi'_{\xi_1}(x_n^*)[k_2, y_n^*]\xi_2\| = 0. \tag{5.15}$$

Но

$$\pi'_{\xi_1}(x_n^*) y_n^* k_2 \xi_2 = y_n^* \pi'_{\xi_1}(x_n^*)\eta = y_n^* k_1 x_n^* \xi_1,$$

поэтому,повторяя только что проведенные рассуждения применительно к $y_n^* k_1 x_n^* \xi_1$, найдем, что

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n^* [k_1, x_n^*]\xi_1\| = 0. \tag{5.16}$$

Из (5.15) и (5.16) следует справедливость (5.14).

Так как $x_n y_n \eta = S_\eta y_n^* x_n^* \eta = J_\eta \Delta_\eta^{\frac{1}{2}} y_n^* x_n^* \eta$, то с учетом (5.13) соотношение (5.10) можно переписать следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} \|(\Delta_\eta^{-\frac{1}{2}}(k_2 y_n^* k_2^{-1})(k_1 x_n^* k_1^{-1})\eta - \lambda\mu \Delta_\eta^{\frac{1}{2}} y_n^* x_n^* \eta\| = 0.$$

Принимая во внимание (5.[illegible]) и ограниченность $\Delta_\eta^{\frac{1}{2}}(I+\Delta_\eta)$, получаем из этого равенства, что

$$\lim_{n\to\infty} \|(\Delta_\eta - \lambda^{-1}\mu^{-1})(I+\Delta_\eta)^{-1} y_n^* x_n^* \eta\| = 0. \tag{5.17}$$

Учитывая соображения, использованные при доказательстве леммы 4.3, можно, не умаляя общности, считать, что $y_n^* x_n^*$ – не вполне тривиальная ЦП из M. Но тогда из (5.17) заключаем точно так же, как и при доказательстве теоремы 5.1, что $\lambda^{-1}\mu^{-1} \in Sp\,\Delta_\eta$.

Итак, $S(M)$ – замкнутая подгруппа мультипликативной группы вещественных чисел. Из теоремы 1.3 следует, что $S(M)$ – алгебраический инвариант фактора M. Доказательство закончено.

З А М Е Ч А Н И Е 5.3. Из теоремы 5.2 следует, что наши инварианты для факторов типа Ш, являющихся бесконечными тензорными произведениями факторов типа I (сокращенно БТПФI), совпадают с асимптотическим отношением, инвариантом, найденным Х. Араки и Е. Дж. Вудсом [13].

В следующем параграфе мы покажем, что наши инварианты имеют более широкую область применения, чем асимптотическое отношение. А именно, мы рассмотрим примеры факторов типа Ш, различающихся с помощью наших инвариантов. Непосредственно методы Араки и Вудса для различения этих факторов не применимы. Вопрос о том, возможно ли их применить, остается открытым и представляется довольно трудным.

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОДУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

В этом параграфе (в п. 1) мы вычислим МО для факторов, построенных с помощью неймановской конструкции скрещенных произведений [4]. В п. 2 мы получим в качестве следствия известный результат Р.Т. Пауэрса [8] о существовании континуума гиперфинитных факторов типа Ш. А в п. 3 мы в качестве иллюстрации наших методов расклассифицируем еще одну серию факторов типа Ш, являющихся скрещенными произведениями, которая ранее не рассматривалась.

1. МОДУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В СКРЕЩЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ. Пусть X – множество, в котором выделена σ – алгебра S подмножеств со счетной базой, и на элементах S определена вероятностная мера μ. Пусть, далее, Γ – группа автоморфизмов X, переводящая S в себя и оставляющая μ квазиинвариантной, т.е. для любого $\alpha\in\Gamma$ меры $\mu(x)$ и $\mu(x\alpha)$ эквивалентны.

Будем также предполагать, что группа Γ действует свободно. т.е. для всякого $\alpha\in\Gamma$ $(\alpha\neq e)$ и любого подмножества $F\subset X$, для которого $\mu(F)>0$, существует подмножество $Q\subset F$, для которого $0<\mu(Q)<\mu(F)$ и $Q\alpha\cap Q=\emptyset$. Будем предполагать, что Γ является эргодической, т.е. что всякое множество $F\subset X$, инвариантное относительно Γ, имеет меру, равную либо нулю, либо единице.

В гильбертовом пространстве H, элементами которого являются функции $f(x,\alpha)$ $(x\in X, \alpha\in\Gamma)$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{\alpha\in\Gamma}\int_X |f(x,\alpha)|^2 d\mu(x) < \infty,$$

рассмотрим семейство операторов

$$(U_{\alpha_0} f)(x,\alpha) = \left[\frac{d\mu(x\alpha_0)}{d\mu(x)}\right]^{\frac{1}{2}} f(x\alpha_0, \alpha\alpha_0), \tag{1.1}$$

$$(L_{\varphi(x)} f)(x,\alpha) = \varphi(x) f(x,\alpha),$$

где $\varphi(x)$-μ – измеримая ограниченная функция на X, и семейство операторов

$$(V_{\alpha_0} f)(x,\alpha) = f(x, \alpha_0^{-1}\alpha), \tag{1.2}$$

$$(M_{\varphi(x)} f)(x,\alpha) = \varphi(x\alpha^{-1}) f(x,\alpha).$$

Легко проверяется, что эти операторы ограничены, а U_α и $V_\alpha (\alpha\in\Gamma)$ унитарны. Обозначим через M неймановскую алгебру, порожденную операторами (1.1), легко видеть, что $V_\alpha, M_\varphi \in M'$. В [4] доказано, что M – фактор, а M' порождено операторами (1.2).

Далее, рассмотрим оператор

$$(Wf)(x,\alpha) = \left[\frac{d\mu(x\alpha^{-1})}{d\mu(x)}\right]^{\frac{1}{2}} \overline{f(x\alpha^{-1}, \alpha^{-1})}. \tag{1.3}$$

Легко видеть, что W - антилинейный изометрический оператор, удовлетворяющий условиям: $W^2=I, WMW = M'$ (более конкретно, $WU_{\alpha}W = V_{\alpha}$, $WL_{\varphi}W = M_{\bar\varphi}$).

Рассмотренная конструкция факторов впервые была предложена фон Нейманом [4] и является в теории факторов стандартной. С алгебраической точки зрения эта конструкция есть скрещенное произведение коммутативного кольца, порожденного ограниченными μ - измеримыми функциями на X , на его группу автоморфизмов Γ .

Воспользовавшись формулами п. 3 § I, вычислим для M модулярный оператор. Во-первых, ясно, что вектор $f_0(x,\alpha)=\delta_e(\alpha)$ (e - единица Γ , а $\delta_e(\alpha)$ - символ Кронекера) является циклическим вектором для M и M', более того, $Wf_0=f_0$. Рассмотрим теперь вектор

$$f=L_{\varphi}U_{\alpha_0}f_0=\varphi(x)\left[\frac{d\mu(x\alpha_0)}{d\mu(x)}\right]^{\frac{1}{2}}\delta_e(\alpha\alpha_0). \qquad (I.4)$$

Тогда (см. § I,(2.I))

$$Sf = S(L_{\varphi}U_{\alpha_0}f_0) = U_{\alpha_0^{-1}}L_{\bar\varphi}f_0 .$$

Поскольку согласно (2.3) § I $\Delta^{\frac{1}{2}}=WS$, то

$$\Delta^{\frac{1}{2}}f = WSf = W(U_{\alpha_0^{-1}}L_{\bar\varphi}f_0) = WU_{\alpha_0^{-1}}W\,WL_{\bar\varphi}Wf_0 =$$

$$= V_{\alpha_0^{-1}}M_{\varphi}f_0 = \varphi(x)\delta_e(\alpha_0\alpha).$$

Сравнивая это выражение с (I.4), находим, что

$$\Delta^{\frac{1}{2}}(L_{\varphi}U_{\alpha_0}f_0)=\left[\frac{d\mu(x\alpha_0)}{d\mu(x)}\right]^{-\frac{1}{2}}(L_{\varphi}U_{\alpha_0}f_0).$$

Иными словами, если $f=\varphi(x)\delta_{\alpha_0}(\alpha)$, где $\int\limits_X|\varphi(x)|^2d\mu(x)<\infty$, то

$$\Delta^{\frac{1}{2}}f=\left[\frac{d\mu(x\alpha^{-1})}{d\mu(x)}\right]^{-\frac{1}{2}}f. \qquad (I.5)$$

Согласно построению гильбертово пространство H есть прямая сумма счетного числа подпространств H_{α} , $\alpha\in\Gamma$, каждое из которых является пространством функций на X , суммируемых с квадратом модуля относительно μ . Из (I.5) следует, что Δ умножает каждый вектор из H_{α} на функцию $\left(d\mu(x\alpha^{-1})/d\mu(x)\right)^{-1}$.

В [4] доказано, что фактор M , порожденный операторами (I.I), тогда и только тогда имеет тип Ш, когда μ не эквивалентна Γ - инвариантной мере на X .

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИ НЕ ИЗОМОРФНЫХ ФАКТОРОВ С ПОМОЩЬЮ МОДУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ. Возьмем теперь в качестве множества X, рассмотренного в предыдущем пункте, множество всех последовательностей $x=x_1x_2\ldots$, где $x_i=0$ или I. Тогда X можно рассматривать как бесконечное тензорное произведение двухточечных множеств $X_k=(0,1)$. Зададим на каждом X_k вероятностную меру μ_k , для которой $\mu_k(0)=q$ и $\mu_k(1)=p$, где $0<p<1$ и $p+q=1$. Тогда на X можно определить меру μ , являющуюся произведением мер μ_k (по поводу определения произведения мер см. [6]).

Заметим, что X можно рассматривать как абелеву группу, если для последовательностей $x=x_1x_2\ldots$ ввести покомпонентное сложение по $\mathrm{mod}\,2$. В качестве группы Γ , рассмотренной в п. I, возьмем подгруппу X , элементами которой являются подпоследовательности, содержащие лишь конечное число единиц. Образующими Γ являются последовательности δ_k $(k=1,2,\ldots)$, у которых все компоненты, кроме k -ой, равны нулю. Тогда, если $\alpha\in\Gamma$, то

$$\alpha=\delta_{k_1}+\ldots+\delta_{k_n} \qquad (n<\infty). \qquad (2.I)$$

Γ переводит компоненту X_k в себя, причем

$$\frac{d\mu_k(x+\delta_k)}{d\mu_k(x)}=\frac{q}{p}x_k+\frac{p}{q}(1-x_k)=\left(\frac{p}{q}\right)^{(-1)^{x_k}} \qquad (x_k=0,1),$$

где через x_k мы обозначили характеристическую функцию множества $1 \in X_k$. Отсюда следует, что

$$\frac{d\mu(x+\delta_k)}{d\mu(x)} = \left(\frac{p}{q}\right)^{(-1)^{x_k}} \qquad (x_k = 0 \text{ или } 1) \tag{2.2}$$

и в силу (2.I) μ - квазиинвариантна относительно Γ. Легко видеть, что Γ действует свободно и что мера μ является эргодической относительно Γ.

Согласно (I.I) построим фактор M_p, зависящий от числа p, где $0 < p < 1$. Хорошо известно [7,8], что M_p - фактор типа Ш при $p \neq \frac{1}{2}$ и M_p - типа II_1 при $p = \frac{1}{2}$. Модулярный оператор для M_p, построенный как указано в п.I, обозначим через Δ_p. Тогда из (I.5), (2.I) и (2.2) легко следует, что при $f \in H_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$ $(\alpha = \delta_{k_1} + \ldots + \delta_{k_n})$

$$\Delta_p f = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{q}{p}\right)^{(-1)^{x_{k_i}}} f. \tag{2.3}$$

Следовательно, предельный спектр Δ_p есть подгруппа мультипликативной группы вещественных чисел с одной образующей q/p. Таким образом, общая часть спектра эквивалентных модулярных операторов, если она существует, также есть группа с образующей q/p (см. теорему 5.2 § 2).

Для доказательства того, что q/p принадлежит общей части спектра ЭМО рассмотрим последовательность операторов $(x_k U_{\delta_k})_1^\infty$, где x_k - характеристическая функция множества $(x : x_k = 1)$, а U_{δ_k} определен согласно (I.I). Ясно, что $\| x_k U_{\delta_k} \| = 1$, простой подсчет показывает, что

$$\| x_k U_{\delta_k} f_0 \| = p,$$

где $f_0(x,\alpha) = \delta_e(\alpha)$ (см. п.I). Из построения видно, что $(x_k U_{\delta_k})$ - не вполне тривиальная ЦП в M_p, для которой, как легко проверить, выполнены соотношения

$$\Delta_p (x_k U_{\delta_k} f_0) = \frac{q}{p} (x_k U_{\delta_k} f_0) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Поскольку $((x_k + \delta_k) U_{\delta_k}) = (x_k U_{\delta_k})^*$, а $((x_k + \delta_k) U_{\delta_k})$ - также не вполне тривиальная ЦП в M_p, то из следствия 4.7 следует, что $(x_k U_{\delta_k})$ есть q/p - СП, удовлетворяющая условиям теоремы 5.I. Но тогда в силу (2.3) из теоремы 5.2 следует, что $S_0(M_p) = S(M_p) = ((\frac{q}{p})^n$, $n = 0, \pm 1, \ldots)$, а, следовательно, факторы M_p $(0 < p \leq \frac{1}{2})$ алгебраически не изоморфны.

Приведенные результаты впервые обнаружил Р.Т. Пауэрс с помощью других соображений [8]. Теперь легко построить фактор M, у которого $S_0(M) = S(M) = [0, \infty)$. Пусть p_1 - число такое, что $0 < p_1 \leq \frac{1}{2}$ и $(p_1/1-p_1)^n \neq (p/1-p)^m$ $(n, m = 0, \pm 1, \ldots)$. Тогда $M = M_{p_1} \otimes M_p$ - фактор типа Ш (см. [10]), у которого согласно теореме 5.2 $S_0(M) = S(M) = [0, \infty)$.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИ НЕ ИЗОМОРФНЫХ ФАКТОРОВ (продолжение). Рассмотренные в п. 2 факторы типа Ш являлись бесконечными тензорными произведениями факторов типа I_n (БТПФ I). Такие факторы подробно исследовались в [13] с помощью асимптотического отношения введенного в [13] инварианта. Рассмотрим теперь примеры факторов М типа Ш, для которых непосредственное применение теории [13] затруднительно, даже если оно и возможно, тогда как вычисление нашего инварианта $S(M)$ (см. теорему 5.2) довольно просто. Ограничимся рассмотрением наиболее элементарных примеров.

Пусть X - пространство всех двоичных последовательностей $x = (x_i)$, где $i = 0, \pm 1, \ldots$, а $x_i = 0$ или I. В качестве Γ возьмем счетную группу, образующими которой являются последовательности δ_k (см. п.2) и автоморфизм Бернулли σ :

$$\sigma : \quad x = (x_i) \longrightarrow \sigma x = (x_{i+1}).$$

Пусть p - число, для которого $0 < p < \frac{1}{2}$. Построим на X меру μ, являющуюся произведением мер, точно такую, как и в п.2, для которой выполнено (2.2). Пусть теперь $\mathfrak{M}_p$ - фактор, построенный согласно п.I для данных X, Γ, μ. Учитывая (I.5) и (2.2), легко видеть, что спектр модулярного оператора Δ для $\mathfrak{M}_p$, построенного согласно п.I, содержит лишь числа $(q/p)^n$, где $q=1-p$, а $n=0,\pm 1,\dots$. Далее, нетрудно проверить, что последовательность операторов

$$\frac{1}{n(I_i)}\left(\sum_{k\in I_i} x_k U_{\delta_k}\right),$$

где $x_k U_{\delta_k}$ определены в п.2, а I_i - попарно не пересекающиеся конечные подмножества (I,2,...) (причем $\lim n(I_i)=\infty$, где $n(I_i)$ - число элементов в I_i, и если $k\in I_i$, $\ell\in I_{i+1}$, то $k<\ell$ $^{i\to\infty}$) является (q/p) - СП для Δ. Но тогда $S_0(\mathfrak{M}_p)=S(\mathfrak{M}_p)=((\frac{q}{p})^n, n=0,\pm 1,\dots)$ и факторы $\mathfrak{M}_p$ $(0<p<\frac{1}{2})$ алгебраически не изоморфны для различных p.

Заметим, что вопрос о применимости теории Кригера [I5] для различения факторов $\mathfrak{M}_p$ остается открытым, поскольку не выяснено, является ли группа Γ автоморфизмов (X,μ) аппроксимативно конечной.

Рассмотрим другой пример. В качестве X возьмем пространство всех двоичных последовательностей $x=(x_g)$, где $g\in G_2$, а G_2 - свободная группа с двумя образующими. В качестве Γ возьмем счетную группу с образующими δ_g (см. п.2) и $G_h\ (h\in G)$

$$G_h:\ x=(x_g)\longrightarrow G_h x=(x_{gh}).$$

Пусть p - число, для которого $0<p<\frac{1}{2}$. Построим на X меру μ, являющуюся произведением мер, как и в п. 2, для которой выполнено (2.2). Пусть $\mathfrak{N}_p$ - фактор, построенный согласно п. I для данных X,Γ,μ. Если Δ - модулярный оператор для $\mathfrak{N}_p$, построенный согласно п. I, то ясно, что спектр Δ содержит лишь числа $(\frac{q}{p})^n, n=0,\pm 1,\dots$). Обозначим теперь через R_p $(0<p<\frac{1}{2})$ факторы вида $\bigotimes_{i=1}^{\infty}\mathfrak{N}_p^i$, где $\mathfrak{N}_p^i=\mathfrak{N}_p$. Применяя наши инварианты (см. теорему 5.2), легко находим, что факторы R_p для различных p алгебраически не изоморфны. Применение методов [I3] для различения R_p затруднительно.

ЛИТЕРАТУРА

I. М.А. Наймарк, Нормированные кольца, М., издание второе, I969.

2. J.Dixmier, Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, I957.

3. F.J.Murray, J.von Neumann, On rings of operators IV, Ann.Math.4I, 7I6-808,I943.

4. J.von Neumann, On rings of operators III, 4I, I, 94-I6I, I940.

5. I. Segal, A non-commutative extension of abstract integration, Ann.Math. 57, 40I-457, I953.

6. A.Guichardet, Produits tensoriels infinis et représentations des relations d'anticommutation, Ann.Scient. Ec.Norm.Sup 83, I-52, I966.

7. J. von Neumann, On infinite direct products, Compositio Math.6, I-77, I938.

8. R.T.Powers, Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings, Ann. Math. 86, I, I38-I7I, I967.

9. M.Takesaki, Tomita's theory of modular hilbert algebras and its applications (preprint).

IO. В.Я. Голодец, Тензорные и скрещенные произведения факторов типа Ш, Функциональный анализ и его приложение (в печати).

II. В.Я. Голодец, О гиперфинитных факторах типа П и типа Ш,Функциональный анализ и его приложение, т. 5, вып. 2, 39-46, I97I.

12. Ф.Рисс, Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, Москва, ИЛ, 1954.

13. H.Araki, E.J.Woods, A classification of factors, Publ.RIMS, Kyoto Univ., Ser.A, 3, 51-130, 1968.

14. H.Araki, A classification of factors, Publ.RIMS, Kyoto Univ., Ser.A, 4, 585-593, 1969.

15. W.Krieger, On the Araki-Woods asymptotic ratio set and non-singular transformations of measure space, Lecture Notes in Math., vol.160, 158-177, Berlin-Heidelberg-New-York, Springer, 1970.

EQUIVALENT MODULAR OPERATORS

V.Ya.Golodets.

The general spectral properties for the family of modular operators Δ_ω (see M.Takesaki, Tomita's theory of modular hilbert algebras and its applications, Lecture Notes in Math.,128,Berlin,1970) where ω runs along all the precise normal states of factor M in a separable hilbert space have been found in this paper. The results obtained are used to distinguish algebraically non-isomorphic factors.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1972 выпуск III

ОБ УРАВНЕНИЯХ УПРУГОЙ СРЕДЫ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ МЕЛКИХ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

В.П. Котляров, Е.Я.Хруслов

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается математическая модель однородной и изотропной упругой среды с большим числом мелких абсолютно твердых включений и изучается вопрос о приближенном описании этой системы. Оказывается, что при определенных условиях такая система может быть описана как сплошная упругая среда с новыми параметрами, эффективно учитывающими наличие инородных включений. Аналогичный вопрос изучался в заметке авторов [I] для среды с большим числом пустот. Было показано, что наличие большого числа мелких пустот в упругой среде приводит к изменению ее реологических параметров. Отметим, что формулы для параметров среды, выведенные в [I] и в настоящей работе для случая сферических включений (соответственно пустот и твердых тел), совпадают с формулами Мекензи и Хашина [2], полученными на физическом уровне строгости.

§ I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть в трехмерном пространстве R_3 задано замкнутое множество $F^{(s)}=\bigcup\limits_{\alpha=1}^{S} F_\alpha^{(s)}$, состоящее из большого числа мелких связных компонент $F_\alpha^{(s)}$, ограниченных гладкими поверхностями $\partial F_\alpha^{(s)}$. В области $\Omega^{(s)}=R_3\setminus F^{(s)}$ рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения линейной теории упругости:

$$A\vec{u}^{(s)}(x)\equiv-\mu\Delta\vec{u}^{(s)}(x)-(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{u}^{(s)}(x)=\vec{K}(x),\quad x\in\Omega^{(s)}, \tag{I.I}$$

$$\vec{u}^{(s)}(x)=\vec{a}_\alpha^{(s)}+\vec{\omega}_\alpha^{(s)}\times\vec{r}(x),\quad x\in\partial F_\alpha^{(s)},\quad \alpha=1,2,\dots,S, \tag{I.2}$$

$$\int\limits_{\partial F_\alpha}\vec{t}\,(\vec{u}^{(s)}(x))\,dS_x=0, \tag{I.3}$$

$$\int\limits_{\partial F_\alpha}\vec{r}(x)\times\vec{t}\,(\vec{u}^{(s)}(x))\,dS_x=0, \tag{I.4}$$

$$\vec{u}^{(s)}(x)\to 0,\quad |x|\to\infty, \tag{I.5}$$

где $\vec{K}(x)$ – заданный вектор объемных сил,

$\vec{a}_\alpha^{(s)},\vec{\omega}_\alpha^{(s)}$ – постоянные векторы,

$\vec{r}(x)$ – радиус -вектор точки x,

$$\vec{t}(\vec{u})=\left[\lambda\,\mathrm{div}\,\vec{u}\,\delta_{ik}+\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right]\cos(\vec{n},\vec{x}_i)\,\vec{x}_k^{\circ}\ -$$

вектор напряжений на границе $\partial F^{(s)}$ множества $F^{(s)}$,

$\vec{n}$ – внешняя нормаль к области $\Omega^{(s)}$,

$\vec{x}_k^{\circ}$ -орт оси $\vec{x}_k$.Как всегда, по повторяющимся индексам проводится суммирование от I до 3.

Решение $\vec{u}^{(s)}(x)$ задачи (I.I)- (I.5) описывает равновесие упругой среды с твердыми включениями, находящейся под действием объемных сил $\vec{K}(x)$. Условие (I.2) означает, что включения $F_\alpha^{(s)}$ могут перемещаться только как твердые тела, а условия (I,3) и (I.4) показывают, что главный вектор сил, действующих на каждое включение, и их главный момент равны нулю.

Имеет место следующая теорема (см. § I):

Т Е О Р Е М А I. При любом фиксированном s решение краевой задачи (I.I)-(I.5) существует и единственно.

Будем изучать асимптотическое поведение решения задачи (I.I)-(I.5), когда число s включений $F_\alpha^{(s)}$ неограниченно возрастает, тогда как диаметры их уменьшаются так, что суммарный объем $\tau^{(s)}$ включений $F_\alpha^{(s)}$ стремится к нулю. При этом предполагается, что при любом s множество $F^{(s)}$ принадлежит некоторой ограниченной области $D \subset R_3$. Для простоты всюду в дальнейшем предположим, что $\vec{K}(x)$ - финитный и гладкий вектор с носителем вне D .

Для характеристики влияния множеств $F_\alpha^{(s)}$ на решение задачи (I.I)-(I.5) введем такие величины:

$$b_{ik\ell m}(F_\alpha^{(s)}) = \int_{R_3 \setminus F_\alpha} W(\vec{\psi}_\alpha^{ik}, \vec{\psi}_\alpha^{\ell m})\,dx, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, s, \tag{I.6}$$

где

$$W(u, v) = c_{pqrt} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \frac{\partial v_r}{\partial x_t},$$

$c_{pqrt} = c_{qprt} = c_{rtpq}$ - коэффициенты упругости, которые в рассматриваемом случае выражаются через коэффициенты Ляме по формулам

$$c_{iiii} = \lambda + 2\mu, \quad c_{iikk} = \lambda, \quad c_{ikik} = \mu, \quad i \neq k, \tag{I.7}$$

все остальные $c_{ik\ell m}$ равны нулю. Векторы $\vec{\psi}_\alpha^{ik}$ являются решениями таких задач:

$$A\vec{\psi}_\alpha^{ik}(x) = 0, \quad x \in R_3 \setminus F_\alpha^{(s)}, \quad i, k = 1, 2, 3, \tag{I.8}$$

$$\vec{\psi}_\alpha^{ik}(x) = \frac{1}{2}(x_i \vec{x}_k^{\circ} + x_k \vec{x}_i^{\circ}) + \vec{a}_\alpha^{ik} + \vec{\omega}_\alpha^{ik} \times \vec{r}(x), \quad x \in \partial F_\alpha^{(s)}, \tag{I.9}$$

$$\int_{\partial F_\alpha} \vec{t}(\vec{\psi}_\alpha^{ik}(x))\,ds_x = 0, \quad \int_{\partial F_\alpha} \vec{r}(x) \times \vec{t}(\vec{\psi}_\alpha^{ik}(x))\,dS_x = 0, \tag{I.10}$$

$$\vec{\psi}_\alpha^{ik}(x) \to 0, \quad x \to \infty, \tag{I.11}$$

где $\vec{a}_\alpha^{ik}, \omega_\alpha^{ik}$ - постоянные векторы, определяемые условиями (I.I0). Нетрудно проверить, что $b_{ik\ell m}(F_\alpha^{(s)})$ являются компонентами тензора, обладающего симметрией

$$b_{ik\ell m} = b_{ki\ell m} = b_{\ell m ik}.$$

Обозначим:
$\tau_\alpha^{(s)}$ - объем множества $F_\alpha^{(s)}$, $\tau^{(s)} = \sum_{\alpha=1}^{s} \tau_\alpha^{(s)}$,
$\sigma_\alpha^{(s)}$ - площадь поверхности $\partial F_\alpha^{(s)}$,
$d_\alpha^{(s)}$ - диаметр множества $F_\alpha^{(s)}$,
$R_\alpha^{(s)}$ - расстояние от $F_\alpha^{(s)}$ до множества $\bigcup_{\beta \neq \alpha} F_\beta^{(s)}$,
$R_{\alpha\beta}^{(s)}$ - расстояние между множествами $F_\alpha^{(s)}$ и $F_\beta^{(s)}$.
Введем интегральный оператор

$$[L_\alpha^{(s)}\vec{\rho}](x)=\int_{\partial F_\alpha}\Phi(x,y)\vec{\rho}(y)dS_y,$$

где $\Phi(x,y)$ – силовой тензор влияния [3], и будем рассматривать его как оператор, действующий из пространства $\hat{C}(\partial F_\alpha)$ на $\hat{C}(\partial F_\alpha)$. Пространство $\hat{C}(\partial F_\alpha)$ представляет собой подпространство векторов из $C(\partial F_\alpha)$, ортогональных любому вектору вида $\vec{a}+\vec{\omega}\times\vec{z}(x)$, где $\vec{a},\vec{\omega}$ – произвольные постоянные векторы. Оказывается, что при любом фиксированном S существует ограниченный оператор $(\frac{1}{2}I+L_\alpha^{(s)})^{-1}$ (см. § I). Однако его норма, вообще говоря, зависит от вида поверхности $\partial F_\alpha^{(s)}$. Всюду в дальнейшем относительно $\partial F_\alpha^{(s)}$ будем предполагать, что они представляют собой диффеоморфные образы единичной сферы, причем соответствующие отображения $\vec{z}_\alpha^{(s)}(Q)$ удовлетворяют условиям

$$\left|\frac{\partial\vec{z}_\alpha^{(s)}(Q)}{\partial q_i}\right|\leq Cd_\alpha^{(s)},\qquad \left|\frac{\partial^2\vec{z}_\alpha^{(s)}(Q)}{\partial q_i\partial q_j}\right|\leq Cd_\alpha^{(s)},$$
$$|\vec{z}_\alpha^{(s)}(Q')-\vec{z}_\alpha^{(s)}(Q'')|\geq c\,d_\alpha^{(s)}\rho(Q',Q''), \tag{I.I2}$$

где $\rho(Q',Q'')$ – расстояние между точками Q',Q'' на единичной сфере, а постоянные от α и S не зависят. При этих условиях можно показать, что имеют место такие неравенства

$$G_\alpha^{(s)}\leq C_1[d_\alpha^{(s)}]^2,\quad \|(\tfrac{1}{2}I+L_\alpha^{(s)})^{-1}\|\leq C_2, \tag{I.I3}$$

где постоянные C_1 и C_2 от α и S не зависят.

Основной результат работы содержится в следующей теореме.

Т Е О Р Е М А 2. Пусть при $S\to\infty$ выполняются условия:

I. Для любой области $G\subset D$ существуют пределы

а) $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{1}{\tau^{(s)}}\sum\limits_{(G)}\tau_\alpha^{(s)}=\int\limits_G\tau(x)dx,$

б) $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{1}{\tau^{(s)}}\sum\limits_{(G)}b_{iklm}(F_\alpha^{(s)})=\int\limits_G b_{iklm}(x)dx,$

где $\tau(x)$ и $b_{iklm}(x)$ – дифференцируемые в $\bar{D}$ функции, $\sum\limits_{(G)}$ – суммирование по тем значениям α, для которых множества $F_\alpha^{(s)}\subset G$.

2. $d_\alpha^{(s)}=o(R_\alpha^{(s)})$ и

$$\max_{1\leq\beta\leq S}\frac{1}{2\pi}\sum_{\alpha\neq\beta}[d_\alpha^{(s)}]^2[R_{\alpha\beta}^{(s)}]^{-2}\leq\delta C_1^{-1}C_2^{-1},$$

где $\delta<1$, а постоянные C_1 и C_2 из неравенства (I.I3).

Тогда решение задачи (I.I)-(I.5) в точках x, находящихся на положительном расстоянии от области D, может быть представлено в виде

$$\vec{u}^{(s)}(x)=\vec{u}(x)+\tau^{(s)}\vec{v}(x)+o(\tau^{(s)}), \tag{I.I4}$$

где вектор $\vec{u}(x)$ есть решение уравнения упругости во всем пространстве, т.е.

$$A\vec{u}(x)=\vec{K}(x),\quad x\in R_3,$$
$$\vec{u}(x)\to 0,\quad |x|\to\infty, \tag{I.I5}$$

а вектор $\vec{v}(x)$ определен формулами:

$$\vec{v}(x)=-\int_D V(x,y)B\vec{u}(y)dy-\int_{\partial D}V(x,y)\vec{t}_B(\vec{u}(y))dS_y, \tag{I.I6}$$

$$B\vec{u}(y)=-\frac{\partial}{\partial y_i}\left\{\left[\tau(y)c_{iklm}+b_{iklm}(y)\right]\frac{\partial u_l}{\partial y_m}\right\}\vec{y}_k^\circ, \tag{I.I7}$$

$$\vec{t}_B(\vec{u}(y))=\left[\tau(y)c_{iklm}+b_{iklm}(y)\right]\frac{\partial u_l}{\partial y_m}\cos(\vec{n},\vec{y}_i)\vec{y}_k^\circ, \tag{I.I8}$$

где $V(x,y)$ – тензор Сомильяна [3], коэффициенты $c_{ik\ell m}$ заданы формулами [9], а $\vec{n}$ – внешняя нормаль к области D.

СЛЕДСТВИЕ. Из формул (I.I4)-(I.I8) вытекает, что решение задачи (I.I)-(I.5) можно представить в виде

$$\vec{u}^{(s)}(x) = \vec{u}_o^{(s)}(x) + o(\tau^{(s)}), \tag{I.I9}$$

где $\vec{u}_o^{(s)}(x)$ есть решение следующей задачи сопряжения:

$$A\vec{u}_o^{(s)}(x) = K(x), \qquad x \in R_3 \setminus \overline{D}, \tag{I.20}$$

$$A^{(s)}\vec{u}_o^{(s)}(x) \equiv (A + \tau^{(s)}B)\vec{u}_o^{(s)}(x) = 0, \quad x \in D, \tag{I.2I}$$

$$\vec{u}_{oi}^{(s)}(x) = \vec{u}_{oe}^{(s)}(x), \quad x \in \partial D, \tag{I.22}$$

$$\vec{t}^{\,i}_{A^{(s)}}(\vec{u}_o^{(s)}(x)) = \vec{t}^{\,e}_{A^{(s)}}(\vec{u}_o^{(s)}(x)), \quad x \in \partial D, \tag{I.23}$$

$$\vec{u}_o^{(s)}(x) \to 0, \quad |x| \to \infty. \tag{I.24}$$

Индексами i (e) обозначены предельные значения векторов изнутри (извне) области D соответственно.

Коэффициенты оператора $A^{(s)}$, имеющие вид

$$c_{ik\ell m}^{(s)}(x) = c_{ik\ell m} + \tau^{(s)}[\tau(x)c_{ik\ell m} + b_{ik\ell m}(x)],$$

указывают на то, что наличие в упругой среде большого числа мелких абсолютно твердых включений приводит к изменению ее реологических параметров.

Рассмотрим случай сферических включений. Пусть $F_\alpha^{(s)}$ есть шары диаметра $d_\alpha^{(s)}$. Тогда коэффициенты $b_{ik\ell m}(x)$ могут быть вычислены по формулам

$$b_{iiii}(x) = \frac{10(1-\nu)}{4-5\nu}\mu\cdot\tau(x), \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)},$$

$$b_{iikk}(x) = \frac{3-5\nu}{4-5\nu}\mu\cdot\tau(x), \qquad i \neq k,$$

$$b_{ikik}(x) = \frac{7-5\nu}{2(4-5\nu)}\mu\cdot\tau(x), \qquad i \neq k;$$

остальные коэффициенты $b_{ik\ell m}(x)$ равны нулю.

Если шары расположены так, что $\tau(x) = const$ в области D, то оператор $A^{(s)}$ принимает вид

$$A^{(s)}\vec{u}_o^{(s)} \equiv -\mu^{(s)}\Delta\vec{u}_o^{(s)} - (\lambda^{(s)} + \mu^{(s)})\,grad\,div\,\vec{u}_o^{(s)},$$

где

$$\mu^{(s)} = \mu\left[1 + \frac{15}{2}\,\frac{1-\nu}{4-5\nu}\,\tau^{(s)}\tau\right],$$

$$\lambda^{(s)} = \lambda\left[1 + \frac{3}{2}\,\frac{1-\nu}{(4-5\nu)\nu}\,\tau^{(s)}\tau\right].$$

Таким образом, равномерное распределение сферических включений приводит к простому изменению коэффициентов Ляме в исходном уравнении. Последние формулы для $\mu^{(s)}$ и $\lambda^{(s)}$ совпадают с формулами Хашина [2].

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

I. Для доказательства основного результата нам понадобится тензор Грина $\Gamma^{(s)}(x,y)$ краевой задачи (I.I)-(I.5). Рассмотрим краевую задачу

$$A\Gamma_{\kappa}^{(s)}(x,y) = \delta(x,y)\vec{x}_{\kappa}^{\circ}, \qquad x\in\Omega^{(s)}, \quad y\in\Omega^{(s)}, \tag{2.1}$$

$$\Gamma_{\kappa}^{(s)}(x,y) = \vec{a}_{\alpha}^{\kappa}(y) + \vec{\omega}_{\alpha}^{\kappa}(y)\times\vec{z}(x), \quad x\in\partial F_{\alpha}^{(s)}, \tag{2.2}$$

$$\int_{\partial F_{\alpha}} \vec{t}\,(\Gamma_{\kappa}^{(s)}(x,y))\,dS_x = 0, \quad \int_{\partial F_{\alpha}} \vec{z}(x)\times\vec{t}\,(\Gamma_{\kappa}^{(s)}(x,y))\,dS_x = 0, \tag{2.3}$$

$$\Gamma_{\kappa}^{(s)}(x,y) \to 0; \quad x\to\infty. \tag{2.4}$$

Решение $\Gamma_{\kappa}^{(s)}(x,y)$ есть к-тая строка тензора Грина $\Gamma^{(s)}(x,y)$.

Вектор $\Gamma_{\kappa}^{(s)}(x,y)$ будем искать в виде

$$\Gamma_{\kappa}^{(s)}(x,y) = V_{\kappa}(x,y) - \sum_{\alpha=1}^{s}\int_{\partial F_{\alpha}} V(x,\xi)\,\vec{\rho}_{\alpha}^{\kappa}(\xi,y)\,dS_{\xi}, \tag{2.5}$$

где $V_{\kappa}(x,y)$ – к-тая строка тензора Сомильяна, а векторы $\vec{\rho}_{\alpha}^{\kappa}(x,y)$ удовлетворяют такой системе интегральных уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\vec{\rho}_{\alpha}^{\kappa}(x,y) + \int_{\partial F_{\alpha}} \Phi(x,\xi)\,\vec{\rho}_{\alpha}^{\kappa}(\xi,y)\,dS_{\xi} + \\ + \sum_{\beta\neq\alpha}\int_{\partial F_{\beta}} T_x\,(V(x,\xi))\,\vec{\rho}_{\beta}^{\kappa}(\xi,y)\,dS_{\xi} = \vec{t}\,(V_{\kappa}(x,y)), \quad x\in\partial F_{\alpha},\end{gathered} \tag{2.6}$$

где $T_x(V(x,\xi))$ – тензор, к-тая строка которого совпадает с $\vec{t}_x(V_{\kappa}(x,\xi))$. Введем пространство векторов $\tilde{C}(\partial F^{(s)})$, являющееся прямым произведением пространств $\tilde{C}(\partial F_{\alpha}^{(s)})$, т.е. таких непрерывных векторов, что

$$\int_{\partial F_{\alpha}} \vec{\rho}_{\alpha}(x)\,dS_x = 0, \quad \int_{\partial F_{\alpha}} \vec{z}(x)\times\vec{\rho}_{\alpha}(x)\,dS_x = 0, \quad \alpha = 1,2,\ldots,s. \tag{2.7}$$

В этом пространстве $\tilde{C}(\partial F^{(s)})$ введем операторы, полагая:

$$[L\vec{\rho}\,]_{\alpha}(x,y) = [L_{\alpha}\vec{\rho}_{\alpha}](x,y) = \int_{\partial F_{\alpha}} \Phi(x,\xi)\,\vec{\rho}_{\alpha}(\xi,y)\,dS_{\xi},$$

$$[M\vec{\rho}\,]_{\alpha}(x,y) = \sum_{\beta\neq\alpha}\int_{\partial F_{\beta}} T_x\,(V(x,\xi))\,\vec{\rho}_{\beta}(\xi,y)\,dS_{\xi}.$$

Тогда система уравнений (2.6) запишется в операторном виде

$$\frac{1}{2}\vec{\rho}^{\,\kappa} + L\vec{\rho}^{\,\kappa} + M\vec{\rho}^{\,\kappa} = \vec{f}^{\,\kappa}, \tag{2.8}$$

где $\vec{f}_{\alpha}^{\,\kappa}(x,y) = \vec{t}\,(V_{\kappa}(x,y))$ при $x\in\partial F_{\alpha}^{(s)}$. Покажем, что уравнение (2.8) имеет единственное решение в $\tilde{C}(\partial F^{(s)})$. Прежде всего, вектор

$$\vec{u}_{\kappa}(x,y) = \sum_{\beta\neq\alpha}\int_{\partial F_{\beta}} V(x,\xi)\,\vec{\rho}_{\beta}^{\kappa}(\xi,y)\,dS_{\xi}$$

удовлетворяет однородному уравнению упругости при $x\in F_{\alpha}$, и потому $M\vec{\rho}_{\kappa}\in\tilde{C}(\partial F^{(s)})$ при любых непрерывных векторах $\vec{\rho}_{\beta}^{\,\kappa}$. Далее, из известных формул (см. [3])

$$\int_{\partial F_{\alpha}} \Phi(x,\xi)\,dS_x = -\frac{1}{2}E, \qquad E \text{ – единичная матрица,}$$

$$\int_{\partial F_{\alpha}} [\vec{z}(x) - \vec{z}(\xi)]\times\Phi(x,\xi)\,dS_x = 0, \qquad \xi\in\partial F_{\alpha}$$

следует, что $L\vec{\rho}^{\,\kappa}\in\tilde{C}(\partial F^{(s)})$, если $\vec{\rho}^{\,\kappa}\in\tilde{C}(\partial F^{(s)})$. Действительно, пусть $\vec{\rho}^{\,\kappa}\in\tilde{C}(\partial F^{(s)})$. Это значит, что для любого α имеют место равенства (2.7). Поэтому

$$\int_{\partial F_\alpha}[L\rho^{\kappa}]_\alpha dS=\int_{\partial F_\alpha}\int_{\partial F_\alpha}\Phi(x,\xi)\rho_\alpha^\kappa(\xi,y)dS_\xi\, dS_x=$$

$$=\int_{\partial F_\alpha}\vec\rho_\alpha^{\,\kappa}(\xi,y)\int_{\partial F_\alpha}\Phi(x,\xi)dS_x\, dS_\xi=-\frac{1}{2}\int_{\partial F_\alpha}\vec\rho_\alpha^{\,\kappa}(\xi,y)dS_\xi=0$$

и

$$\int_{\partial F_\alpha}\vec z(x)\,[L\rho_\alpha^\kappa](x,y)dS_x=\int_{\partial F_\alpha}\vec z(x)\times\int_{\partial F_\alpha}\Phi(x,\xi)\rho_\alpha^\kappa(\xi,y)dS_\xi dS_x=$$

$$=\int_{\partial F_\alpha}\rho_\alpha^\kappa(\xi,y)\int_{\partial F_\alpha}\vec z(\xi)\times\Phi(x,\xi)dS_x\, dS_\xi=-\frac{1}{2}\int_{\partial F_\alpha}\vec z(\xi)\times\rho_\alpha^\kappa(\xi,y)dS_\xi=0.$$

Следовательно, оператор $L+M$ отображает пространство $\tilde C(\partial F^{(s)})$ в $\tilde C(\partial F^{(s)})$. Поскольку $f^\kappa\in\tilde C(\partial F^{(s)})$ и операторы L,M вполне непрерывны, то уравнение (2.8) будет разрешимо в пространстве $\tilde C(\partial F^{(s)})$, если соответствующее однородное уравнение имеет только нулевое решение. Допустим, что однородное уравнение (2.8) имеет ненулевое решение $\vec\rho_0^{\,\kappa}=\{\vec\rho_{0\alpha}^{\,\kappa}\}$. Тогда вектор

$$\vec\varphi^{\,\kappa}(x)=\sum_{\alpha=1}^{s}\int_{\partial F_\alpha}V(x,\xi)\vec\rho_{0\alpha}^{\,\kappa}(\xi)dS_\xi$$

удовлетворяет в области $\Omega^{(s)}$ однородному уравнению (2.I) и условиям (2.2)-(2.4). Но тогда $\vec\varphi^{\,\kappa}(x)\equiv 0$ во всем пространстве ввиду единственности решения однородной задачи (2.I)-(2.4). В самом деле, применяя формулу Бетти, найдем:

$$\int_{R_3}W(\vec\varphi^{\,\kappa}(x))dx=\sum_{\alpha=1}^{s}\int_{\partial F_\alpha}\vec\varphi^{\,\kappa}(x)[\vec t^{\,i}(\vec\varphi^{\,\kappa}(x))-\vec t^{\,e}(\vec\varphi^{\,\kappa}(x))]dS_x=0.$$

Отсюда следует, что $\vec\varphi^{\,\kappa}(x)\equiv\vec a^{\,\kappa}+\vec\omega^{\,\kappa}\times\vec z(x)$, но в силу условия (2.4) на бесконечности $\vec\varphi^{\,\kappa}(x)\equiv 0$. Из теоремы о скачке вектора напряжений первого потенциала заключаем, что и $\vec\rho_0^{\,\kappa}\equiv 0$. Тем самым разрешимость системы уравнений (2.6) в пространстве $\tilde C(\partial F^{(s)})$ установлена.

Таким образом, оператор $\frac{1}{2}I+L+M$ отображает пространство $\tilde C(\partial F^{(s)})$ на себя взаимно однозначно. Поэтому в силу теоремы Банаха об обратном операторе существует ограниченный оператор $(\frac{1}{2}I+L+M)^{-1}$. В частности, существует ограниченный оператор $(\frac{1}{2}I+L_\alpha)^{-1}$, фигурирующий в (I.I3).

Легко видеть, что вектор $\Gamma_\kappa^{(s)}(x,y)$, определенный формулой (2.5), удовлетворяет уравнению (2.I). Из системы уравнений (2.6) вытекает, что предельные значения вектора напряжений на векторе $\Gamma_\kappa^{(s)}(x,y)$ изнутри $\partial F_\alpha^{(s)}$ равны нулю, т.е.

$$\vec t^{\,i}(V_\kappa(x,y)-\sum_{\alpha=1}^{s}\int_{\partial F_\alpha}V(x,\xi)\vec\rho_\alpha^{\,\kappa}(\xi,y)dS_\xi)=0,\quad x\in\partial F_\alpha.$$

Отсюда в силу непрерывности первого потенциала следует, что $\Gamma_\kappa^{(s)}(x,y)$ удовлетворяет условиям (2.2). Условия (2.3) вытекают из принадлежности векторов $\vec\rho_\alpha^{\,\kappa}(\xi,y)$ к пространствам $\tilde C(\partial F_\alpha^{(s)})$ и теоремы о скачке вектора напряжений первого потенциала. Условие (2.4) также, очевидно, выполнено. Тем самым построен тензор Грина $\Gamma^{(s)}(x,y)$ задачи (I.I)-(I.5) и доказана его единственность. Обычным способом проверяется, что тензор Грина симметричен, т.е.

$$\Gamma_{\kappa i}^{(s)}(x,y)=\Gamma_{i\kappa}^{(s)}(y,x).$$

Заметим, что при условиях теоремы 2 можно получить равномерную оценку для вектора плотности $\vec\rho_\alpha^{\,\kappa}(x,y)$. А именно, поскольку оператор $\frac{1}{2}I+L$ имеет диагональный вид и каждый оператор $\frac{1}{2}I+L_\alpha$ имеет ограниченный обратный, то уравнение (2.8) эквивалентно следующему уравнению:

$$\vec\rho^{\,\kappa}+(\tfrac{1}{2}I+L)^{-1}M\vec\rho^{\,\kappa}=(\tfrac{1}{2}I+L)^{-1}\vec f^{\,\kappa}. \tag{2.9}$$

В силу (I.I3) и условия 2) теоремы 2 следует, что

$$\|(\tfrac{1}{2}I + L)^{-1} M\| < 1,$$

и потому уравнение (2.9) разрешимо в пространстве $\tilde{C}(\partial F^{(s)})$, причем

$$\|\vec{\rho}^{\,\kappa}(x,y)\| = \max_{1\le\alpha\le s}\ \max_{x\in\partial F_\alpha^{(s)}} |\vec{\rho}_\alpha^{\,\kappa}(x,y)| < C, \quad \bar{y}\in\bar{D} \qquad (2.I0)$$

и постоянная C не зависит от s и от y, если точка y находится на положительном расстоянии от $\bar{D}$. Этой оценкой мы воспользуемся при доказательстве теоремы 2.

2. Здесь мы рассмотрим краевую задачу (I.8)-(I.II). Прежде всего, отметим, что решение $\vec{\psi}_\alpha^{\,i\kappa}(x)$ такой задачи существует и единственно. Действительно, вводя новый вектор

$$\hat{\vec{\psi}}_\alpha^{\,i\kappa}(x) = \vec{\psi}_\alpha^{\,i\kappa}(x) - \vec{\psi}_\circ^{\,i\kappa}(x)\,\eta_\alpha(x),$$

где $\vec{\psi}_\circ^{\,i\kappa}(x) = \frac{1}{2}(x_i \vec{x}_\kappa^{\,\circ} + x_\kappa \vec{x}_i^{\,\circ})$, а $\eta_\alpha(x)$ – финитная и бесконечно дифференцируемая функция, равная I в некоторой окрестности множества F_α, мы придем к задаче вида (I.I)-(I.5) в случае одного включения, которая имеет единственное решение.

Для дальнейшего нам понадобятся оценки производных от решения $\vec{\psi}_\alpha^{\,i\kappa}(x)$. Мы получим их, используя представление решения $\vec{\psi}_\alpha^{\,i\kappa}(x)$ в виде первого потенциала

$$\vec{\psi}_\alpha^{\,i\kappa}(x) = \int_{\partial F_\alpha} V(x,y)\,\vec{\sigma}_\alpha^{\,i\kappa}(y)\,dS_y$$

с плотностью $\vec{\sigma}_\alpha^{\,i\kappa}(x)$, являющейся решением уравнения

$$(\tfrac{1}{2}I + L_\alpha)\vec{\sigma}_\alpha^{\,i\kappa}(x) = \vec{t}(\vec{\psi}_\circ^{\,i\kappa}(x)), \quad x\in\partial F_\alpha^{(s)} \qquad (2.II)$$

в пространстве $\tilde{C}(\partial F_\alpha^{(s)})$. Поскольку правая часть этого уравнения $\vec{t}(\vec{\psi}_\circ^{\,i\kappa}(x))\in\tilde{C}(\partial F_\alpha^{(s)})$, то, как было показано выше, оно резрешимо и притом единственным образом. Так как написанное уравнение представляет собой интегральное уравнение второй внутренней краевой задачи, то при $x\in F_\alpha$

$$\vec{\psi}_\alpha^{\,i\kappa}(x) \equiv \vec{\psi}_\circ^{\,i\kappa}(x) + \vec{a}_\alpha^{\,i\kappa} + \vec{\omega}_\alpha^{\,i\kappa}\times\vec{z}(x)$$

и ввиду непрерывности первого потенциала $\vec{\psi}_\alpha^{\,i\kappa}(x)$ удовлетворяет нужному условию (I.9). Условия (I.I0) обеспечиваются принадлежностью $\vec{\sigma}_\alpha^{\,i\kappa}(x)$ к $\tilde{C}(\partial F_\alpha^{(s)})$.

Таким образом, при $x\bar{\in}\partial F_\alpha^{(s)}$ имеем:

$$D_x^m \vec{\psi}_\alpha^{\,i\kappa}(x) = \int_{\partial F_\alpha} [D_x^m V(x,y) - D_x^m V(x,y_\circ)]\,\vec{\sigma}_\alpha^{\,i\kappa}(y)\,dS_y.$$

Пусть $z_\alpha(x)$ – расстояние от точки x до ∂F_α. Легко видеть, что

$$|D_x^m V(x,y) - D_x^m V(x,y_\circ)| \le |D_y[D_x^m V(x,y)]_{y=y_\circ}|\,d_\alpha^{(s)} \le C d_\alpha^{(s)}[z_\alpha(x)]^{-(2+m)}.$$

Из (I.I3), ограниченности $\vec{t}(\vec{\psi}_\circ^{\,i\kappa}(x))$ и уравнения (2.II) вытекает:

$$|\vec{\sigma}_\alpha^{\,i\kappa}(x)| < C, \quad x\in\partial F_\alpha^{(s)}.$$

Следовательно,

$$|D_x^m \vec{\psi}_\alpha^{\,i\kappa}(x)| \le C\,[d_\alpha^{(s)}]^3 [z_\alpha(x)]^{-(2+m)}, \quad m = 0,1,2,\dots \qquad (2.I2)$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, через C обозначаем постоянные, от α и s не зависящие.

Отметим еще, что в силу равномерной ограниченности вектора плотности $\vec{\sigma}_{\alpha}^{ik}(x)$

$$|\vec{t}^{e}(\psi_{\alpha}^{ik}(x))| \leqslant |\vec{t}^{i}(\vec{\psi}_{\circ}^{ik}(x))| + |\vec{\sigma}_{\alpha}^{ik}(x)| < C, \qquad (2.13)$$

где индексами $e(i)$ обозначены предельные значения вектора напряжений извне (изнутри) поверхности $\partial F_{\alpha}^{(s)}$.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Решение задачи (I.I)-(I.5) будем искать в виде

$$\vec{u}^{(s)}(x) = \vec{u}(x) - \vec{w}^{(s)}(x) + \vec{v}^{(s)}(x) + \vec{z}^{(s)}(x), \qquad (3.1)$$

где вектор $\vec{u}(x)$ – решение задачи (I.I5),

$$\vec{w}^{(s)}(x) = \sum_{\alpha=1}^{s} \vec{w}_{\alpha}^{(s)}(x) = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(\bar{x}_{\alpha}) \vec{\varphi}_{\alpha}^{ik}(x),$$

$\vec{\varphi}_{\alpha}^{ik}(x) = \vec{\psi}_{\alpha}^{ik}(x)\eta_{\alpha}(x)$, $\quad \bar{x}_{\alpha}$ – фиксированная точка в $F_{\alpha}^{(s)}$. Срезающая функция $\eta_{\alpha}(x)$ определяется следующим образом:

$$\eta_{\alpha}(x) = \eta(z_{\alpha}(x)/R_{\alpha}^{(s)}),$$

где $z_{\alpha}(x)$ – расстояние от точки x до множества $F_{\alpha}^{(s)}$, а $\eta(t)$ – бесконечно дифференцируемая функция, равная I при $0 \leqslant t \leqslant 1/4$ и нулю при $t \geqslant 1/2$. Ввиду того, что носители функций $\eta_{\alpha}(x)$ не пересекаются, получим:

$$\vec{K}(x) = A\vec{u}^{(s)}(x) - \vec{K}(x) - A\vec{w}^{(s)}(x) + A\vec{v}^{(s)}(x) + A\vec{z}^{(s)}(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega^{(s)}, \qquad (3.2)$$

$$u_p^{(s)}(x) = u_p(x) - \frac{\partial u_p}{\partial x_i}(\bar{x}_{\alpha})x_i + z_{pi}(\vec{u}(\bar{x}_{\alpha}))x_i + (\vec{a}_{\alpha} + \vec{\omega}_{\alpha} \times z(x))\vec{x}_p^{\circ} + \qquad (3.3)$$

$$+ \vec{v}_p^{(s)}(x) + z_p^{(s)}(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial F_{\alpha}^{(s)} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s),$$

где $\quad z_{pi}(\vec{u}(\bar{x}_{\alpha})) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_p}\right)\Big|_{x=\bar{x}_{\alpha}}, \quad \vec{a}_{\alpha} = -\frac{\partial u_k}{\partial x_i}(\bar{x}_{\alpha})\vec{a}_{\alpha}^{ik},$

$$\vec{\omega}_{\alpha} = -\frac{\partial u_k}{\partial x_i}(\bar{x}_{\alpha})\vec{\omega}_{\alpha}^{ik}.$$

Имеем: $\quad u_p(x) - \frac{\partial u_p}{\partial x_i}(\bar{x}_{\alpha})x_i = u_p(\bar{x}_{\alpha}) + h_p(x) - \frac{\partial u_p}{\partial x_i}(\bar{x}_{\alpha})\bar{x}_{i\alpha},$

$$(3.4)$$

где $\quad h_p(x) = O(|x - \bar{x}_{\alpha}|^2).$

Введем вектор $\vec{\omega}_{\alpha}'$ с компонентами

$$\omega_{\alpha 1} = z_{32}(\vec{u}(\bar{x}_{\alpha})),$$
$$\omega_{\alpha 2} = z_{13}(\vec{u}(\bar{x}_{\alpha})),$$
$$\omega_{\alpha 3} = z_{21}(\vec{u}(\bar{x}_{\alpha})).$$

Тогда $\quad x_i z_{pi}(\vec{u}(\bar{x}_{\alpha})) = (\vec{\omega}_{\alpha}' \times \vec{z}(x))\vec{x}_p^{\circ}$, и равенство (3.3) принимает вид

$$\vec{u}^{(s)}(x) = \vec{a}_{\alpha}'' + \vec{\omega}_{\alpha}'' \times \vec{z}(x) + \vec{h}_{\alpha}(x) + \vec{v}^{(s)}(x) + \vec{z}^{(s)}(x), \qquad (3.5)$$

где $\quad \vec{a}_{\alpha}'' = \vec{u}(\bar{x}_{\alpha}) - \vec{a}_{\alpha} - \frac{\partial u_p}{\partial x_i}(\bar{x}_{\alpha})\bar{x}_{i\alpha}, \quad \vec{\omega}_{\alpha}'' = \vec{\omega}_{\alpha}' - \vec{\omega}_{\alpha}.$

Из представления (3.I) и условий (3.2), (3.5) с учетом (I.I)-(I.5) и (I.8)-(I.II) для векторов $\vec{v}^{(s)}$ и $\vec{z}^{(s)}$ получаем следующие краевые задачи:

$$\left.\begin{aligned} &A\vec{v}^{(s)}(x) = A\vec{w}^{(s)}(x), \quad x\in\Omega^{(s)},\\ &\vec{v}^{(s)}(x) = \vec{a}_\alpha + \vec{\omega}_\alpha \times \vec{r}(x), \quad x\in\partial F_\alpha^{(s)},\\ &\int_{\partial F_\alpha} \vec{t}(\vec{v}^{(s)}(x))ds_x = 0, \quad \int_{\partial F_\alpha} \vec{r}(x)\times\vec{t}(\vec{v}^{(s)}(x))ds_x = 0,\\ &\vec{v}^{(s)}(x) \to 0, \quad |x|\to\infty; \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

$$\left.\begin{aligned} &A\vec{z}^{(s)}(x) = 0, \quad x\in\Omega^{(s)},\\ &\vec{z}^{(s)}(x) = \vec{a}_\alpha + \vec{\omega}_\alpha \times \vec{r}(x) - \vec{h}_\alpha(x), \quad x\in\partial F_\alpha^{(s)},\\ &\int_{\partial F_\alpha} \vec{t}(z^{(s)}(x))ds_x = 0, \quad \int_{\partial F_\alpha} \vec{r}(x)\times\vec{t}(\vec{z}^{(s)}(x))ds_x = 0,\\ &\vec{z}^{(s)}(x) \to 0, \quad |x|\to\infty. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Отметим, что задачи (3.6) и (3.7) разрешимы и притом единственным образом, поскольку они того же вида, что и задачи (I.I)-(I.5), (I.8)-(I.II) соответственно.

Имеет место следующая

Л Е М М А 3.I. Решение краевой задачи (3.7) допускает оценку

$$\vec{z}^{(s)}(x) = o\,(\tau^{(s)}), \quad x\in\overline{D}.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $\Gamma^{(s)}(x,y)$ - тензор Грина задачи (2.I)-(2.4). Применяя формулу Бетти, получим:

$$z_\kappa^{(s)}(y) = \int_{\partial F_\alpha} \vec{t}^{\,e}(\Gamma_\kappa(y,x))\,\vec{h}_\alpha(x)ds_x .$$

Но так как по построению $\vec{\rho}_\alpha^{\,\kappa}(y,x) = \vec{t}^{\,i}(\Gamma_\kappa(y,x)) - \vec{t}^{\,e}(\Gamma_\kappa(y,x)) = \vec{t}^{\,e}(\Gamma_\kappa(y,x))$, то

$$\vec{z}^{(s)}(y) = -\sum_{\alpha=1}^{S}\int_{\partial F_\alpha} \rho_\alpha(y,x)\,\vec{h}_\alpha(x)ds_x ,$$

где $\rho_\alpha(y,x)$ - матрица плотностей тензора $\Gamma^{(s)}(y,x)$. Отсюда с учетом оценок (2.IO) и (3.4) заключаем, что при $y\in\overline{D}$

$$|\vec{z}^{(s)}(y)| \le C\sum_{\alpha=1}^{S}[d_\alpha^{(s)}]^4 \le C\max_{1\le\alpha\le S} d_\alpha^{(s)}\sum_{\alpha=1}^{S}[d_\alpha^{(s)}]^3 = o(\tau^{(s)}),$$

где постоянная C зависит лишь от расстояния точки y до области D. Лемма доказана.

Л Е М М А 3.2 Решение $\vec{v}^{(s)}(x)$ задачи (3.6) представимо в виде

$$\vec{v}^{(s)}(x) = \tau^{(s)}\vec{v}(x) + o\,(\tau^{(s)}), \quad x\in\overline{D},$$

где вектор $\vec{v}(x)$ определен формулами (I.I6)-(I.I8).

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $\Gamma^{(s)}(y,x)$ $(y\in\overline{D})$ есть тензор Грина задачи (2.I)-(2.4). Применяя формулу Бетти, из (2.2)-(2.4) и (3.6) получим:

$$\vec{v}^{(s)}(y) = \int_{\Omega^{(s)}} \Gamma^{(s)}(y,x)\,A\vec{w}^{(s)}(x)\,dx. \tag{3.8}$$

Поскольку носители $N_\alpha = \{x : 0 \le r_\alpha(x) \le \frac{R_\alpha}{2}\}$ функций $\eta_\alpha(x)$ не пересекаются, то, учитывая (3.I) и (I.8),

$$\vec{v}^{(s)}(y) = \sum_{\alpha=1}^{S}\int_{N_\alpha\setminus F_\alpha} V(y,x)\,A\vec{w}_\alpha^{(s)}(x)\,dx -$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{s}\int_{N'_\alpha}\sum_{\beta\neq\alpha}\int_{\partial F_\beta} V(x,\xi)\rho^{(s)}(\xi,y)ds_\xi\, A\vec{w}_\alpha^{(s)}(x)dx -$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{s}\int_{N'_\alpha}\int_{\partial F_\alpha} V(x,\xi)\rho^{(s)}(\xi,y)ds_\xi\, A\vec{w}_\alpha^{(s)}(x)dx =$$

$$= S_1(y) + S_2(y) + S_3(y),$$

$$N'_\alpha = N_\alpha \setminus \{x : 0 \leqslant r_\alpha(x) \leqslant \frac{R_\alpha^{(s)}}{4}\}.$$

Используя оценки (2.I2) и тот факт, что производные функции $\eta_\alpha(x)$ допускают оценку

$$|D_x^\ell \eta_\alpha(x)| = O([R_\alpha^{(s)}]^{-\ell}), \quad x\in N'_\alpha,$$

выводим:

$$|A\vec{w}_\alpha^{(s)}(x)| \leqslant C[d_\alpha^{(s)}]^3[R_\alpha^{(s)}]^{-4}, \quad x\in N'_\alpha.$$

Из предложений относительно поверхностей $\partial F_\alpha^{(s)}$ (I.I2) вытекает:

$$\int_{\partial F_\alpha}|V(x,\xi)|dS_\xi \leqslant C\int_{\partial F_\alpha}\frac{dS_\xi}{|x-\xi|} \leqslant C d_\alpha^{(s)}, \quad x\in\partial F_\alpha.$$

Тогда, поскольку матрица $\rho^{(s)}(y,\xi)$ при $y\in\bar{D}$ равномерно ограничена по S, с учетом условий 2) теоремы 2, для $S_3(y)$ имеем:

$$|S_3(y)| \leqslant C\sum_{\alpha=1}^{s}[d_\alpha^{(s)}]^5[R_\alpha^{(s)}]^{-2} \leqslant C\max_{1\leqslant\alpha\leqslant s}[d_\alpha^{(s)}]^2[R_\alpha^{(s)}]^{-2}\tau^{(s)} = o(\tau^{(s)}). \tag{3.9}$$

Далее, так как $\rho^{(s)}(y,\xi)$ ортогональна любому постоянному вектору, то при $x\in F_\alpha^{(s)}$ и $\xi\in\partial F_\beta$ $(\alpha\neq\beta)$ получим:

$$\left|\int_{\partial F_\beta}V(x,\xi)\rho^{(s)}(\xi,y)dS_\xi\right| = \left|\int_{\partial F_\beta}[V(x,\xi)-V(x,\xi_0)]\rho^{(s)}(\xi,y)ds_\xi\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\int_{\partial F_\beta}\frac{|\xi-\xi_0|}{|\xi-x||\xi_0-x|}ds_\xi \leqslant C[d_\beta^{(s)}]^3[R_{\alpha\beta}^{(s)}]^{-2}.$$

Следовательно, величина $S_2(y)$ допускает оценку

$$|S_2(y)| \leqslant C\sum_{\alpha=1}^{s}[d_\alpha^{(s)}]^3[R_\alpha^{(s)}]^{-1}\sum_{\beta\neq\alpha}[d_\beta^{(s)}]^3[R_{\alpha\beta}^{(s)}]^{-2} =$$
$$= C\sum_{\beta=1}^{s}[d_\beta^{(s)}]^3\sum_{\alpha\neq\beta}[d_\alpha^{(s)}]^2[R_{\alpha\beta}^{(s)}]^{-2}\cdot d_\alpha^{(s)}[R_\alpha^{(s)}]^{-1} = o(\tau^{(s)}). \tag{3.I0}$$

Первое же слагаемое $S_1(y)$, в отличие от второго и третьего, имеет порядок суммарного объема $\tau^{(s)}$. Оно и дает основной вклад в асимптотику решения задачи (I.I)-(I.5). Применяя формулу Бетти, получим:

$$S_1(y) = \sum_{\alpha=1}^{s}\int_{\partial F_\alpha}\vec{t}(V_p(y,x))\vec{w}_\alpha(x)dS_x\vec{x}_p^\circ -$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{s}\int_{\partial F_\alpha}V_p(y,x)\vec{t}(\vec{w}_\alpha(x))dS_x\vec{x}_p^\circ = J_1(y)+J_2(y). \tag{3.II}$$

Учитывая условия (I.I0), можем записать:

$$J_2(y) = -\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(\bar{x}_\alpha)\int_{\partial F_\alpha}[V_{p\ell}(y,x)-V_{p\ell}(y,\bar{\bar{x}}_\alpha)]\vec{t}_\ell(\vec{\Psi}_\alpha^{ik}(x))dS_x\vec{x}_p^\circ =$$

$$=-\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(\bar{x}_\alpha)\frac{\partial V_{pe}(y,\bar{\bar{x}}_\alpha)}{\partial x_m}\int_{\partial F_\alpha} x_m t_e(\vec{\Psi}_\alpha^{ik}(x))dS_x\cdot\vec{x}_p^\circ -$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(\bar{x}_\alpha)\int_{\partial F_\alpha} h_{pe}(y,x)\, t_e\,(\vec{\Psi}_\alpha^{ik}(x))dS_x\cdot\vec{x}_p^\circ ,$$

где точка $\bar{x}_\alpha$ фиксирована и принадлежит ∂F_α, а

$$h_{pe}(y,x)=V_{pe}(y,x)-V_{pe}(y,\bar{x}_\alpha)-\frac{\partial V_{pe}(y,x_\alpha)}{\partial x_m}(x_m-\bar{\bar{x}}_m^\alpha)=O((x-\bar{x}_\alpha)^2).$$

В силу (2.I3) второе слагаемое есть величина порядка $o(\tau^{(s)})$. Далее, из условия (I.I0) следует:

$$\int_{\partial F_\alpha} x_m t_e(\vec{\Psi}_\alpha^{ik}(x))dS_x=\int_{\partial F_\alpha} x_e t_m(\vec{\Psi}_\alpha^{ik}(x))dS_x ,$$

и потому с учетом условий (I.9), (I.I0) имеем:

$$J_2(y)=-\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(\bar{x}_\alpha)\frac{\partial V_{pe}(y,\bar{x}_\alpha)}{\partial x_m}\int_{\partial F_\alpha}\vec{\Psi}_\alpha^{em}(x)\,\vec{t}\,(\vec{\Psi}_\alpha^{ik}(x))dS_x\vec{x}_p^\circ +$$

$$+o(\tau^{(s)})=-\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(\bar{x}_\alpha)\frac{\partial V_{pe}(y,\bar{x}_\alpha)}{\partial x_m}\int_{R_3\setminus F_\alpha} W(\vec{\Psi}_\alpha^{em}\vec{\Psi}_\alpha^{ik})dx\,\vec{x}_p^\circ +$$

$$+o(\tau^{(s)}).$$

Наконец, из (I.6) и условия Iб) теоремы 2 заключаем, что

$$J_2(y)=-\tau^{(s)}\int_{D} b_{ikem}(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(x)\frac{\partial V_{pe}(y,x)}{\partial x_m}dx\cdot\vec{x}_p^\circ+o(\tau^{(s)}). \tag{3.I2}$$

Перейдем к вычислению $J_1(y)$. Учитывая, что тензор Сомильяна $V(y,x)$ всюду в области D удовлетворяет однородному уравнению, получим:

$$J_1(y)=\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(\bar{x}_\alpha)\int_{\partial F_\alpha}\vec{t}\,(V_p(y,x))\vec{\Psi}_\circ^{ik}(x)dS_x\cdot\vec{x}_p^\circ .$$

Так как $\vec{t}\,(V_p(y,x))$ непрерывны при переходе через $\partial F_\alpha^{(s)}$, то из формулы Бетти имеем:

$$J_1(y)=-\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(\bar{x}_\alpha)\int_{F_\alpha} c_{ztem}\frac{\partial V_{pe}(y,x)}{\partial x_m}\frac{\partial\vec{\Psi}_{\circ z}^{ik}}{\partial x_t}dx\cdot\vec{x}_p^\circ .$$

Но

$$\frac{\partial\Psi_{\circ z}^{ik}}{\partial x_t}=\frac{1}{2}(\delta_{it}\delta_{kz}+\delta_{kt}\delta_{iz}).$$

Следовательно, из условия Iа) теоремы 2 найдем:

$$\begin{aligned}J_1(y)&=-\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial u_i(\bar{x}_\alpha)}{\partial x_k}\frac{\partial V_{pe}(y,\bar{x}_\alpha)}{\partial x_m}c_{ikem}\tau_\alpha^{(s)}\vec{x}_p^\circ+O(\tau^{(s)})=\\&=-\tau^{(s)}\int_{D}\tau(x)c_{ikem}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(x)\frac{\partial V_{pe}}{\partial x_m}(y,x)dx\cdot\vec{x}_p^\circ+O(\tau^{(s)}).\end{aligned}\tag{3.I3}$$

Таким образом, из (3.8)-(3.I3) получаем:

$$\vec{v}^{(s)}(y) = -\tau^{(s)} \int_D [\tau(x) c_{iklm} + b_{iklm}(x)] \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(x) \frac{\partial V_{pl}(y,x)}{\partial x_m} dx \cdot \vec{x}_p^{\circ} + O(\tau^{(s)}).$$

Наконец, применяя формулу Бетти, заключаем, что

$$\vec{v}^{(s)}(y) = \tau^{(s)} \vec{v}(y) + o(\tau^{(s)}),$$

где $\vec{v}(y)$ определен формулами (I.16)-(I.18). Лемма 3.2 доказана.

Из лемм (3.I), (3.2) и представления (3.I) вытекает представление (I.I4), и тем самым теорема 2 доказана.

Что касается следствия из теоремы 2, то его доказательства мы проводить не будем, а наметим лишь основную схему. Представим вектор $\vec{u}(x) + \tau^{(s)} \vec{v}(x)$ в виде

$$\vec{u}(x) + \tau^{(s)} \vec{v}(x) = \vec{u}_{\circ}^{(s)}(x) + \vec{y}^{(s)}(x),$$

где $\vec{u}_{\circ}^{(s)}(x)$ - решение задачи (I.20)-(I.24). Тогда для вектора $\vec{y}^{(s)}(x)$ из (I.I4)-(I.I8) получим такую задачу сопряжения

$$A^{(s)} \vec{y}^{(s)}(x) = -[\tau^{(s)}]^2 B \vec{v}(x), \quad x \in \partial D,$$

$$\vec{y}_i^{(s)}(x) = \vec{y}_e^{(s)}(x), \qquad x \in \partial D,$$

$$\vec{t}^{\,i}_{A^{(s)}}(\vec{y}^{(s)}(x)) - \vec{t}^{\,e}_{A^{(s)}}(\vec{y}^{(s)}(x)) = -[\tau^{(s)}]^2 \vec{t}^{\,i}_B(\vec{v}(x)), \; x \in \partial D,$$

$$\vec{y}^{(s)}(x) \to 0, \quad |x| \to \infty.$$

Пользуясь методами работы [4], можно показать, что решение такой задачи существует, оно единственно и имеет порядок $O([\tau^{(s)}]^2)$. Тем самым имеет место представление (I.I9).

Здесь был подробно рассмотрен случай, когда правая часть $\vec{K}(x)$ уравнения (I.I) сосредоточена вне области D и на включения $F_{\alpha}^{(s)}$ не действуют никакие внешние силы. Аналогичным методом можно изучить и более общую ситуацию. Рассмотрим краевую задачу

$$A\vec{u}^{(s)}(x) = \vec{K}(x), \qquad x \in \Omega^{(s)},$$

$$\vec{u}^{(s)}(x) = \vec{a}_{\alpha} + \vec{\omega}_{\alpha} \times \vec{z}(x), \quad x \in \partial F_{\alpha}^{(s)}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s,$$

$$\int_{\partial F_{\alpha}} \vec{t}(\vec{u}^{(s)}(x)) dS_x = \int_{F_{\alpha}} \vec{K}'(x) dx,$$

$$\int_{\partial F_{\alpha}} \vec{z}(x) \times \vec{t}(\vec{u}^{(s)}(x)) dS_x = \int_{F_{\alpha}} \vec{z}(x) \times \vec{K}'(x) dx,$$

$$\vec{u}^{(s)}(x) \to 0, \quad |x| \to \infty,$$

где $\vec{K}(x)$ - заданный вектор объемных сил ($\vec{K}(x) \neq 0$ при $x \in D$), $\vec{K}'(x)$ - заданное силовое поле, действующее только на включения. В этом случае имеет место равенство, аналогичное (I.I9)

$$\vec{u}^{(s)}(x) = \vec{u}_{\circ}^{(s)}(x) + o(\tau^{(s)}), \quad x \in \bar{D},$$

где $\vec{u}_{\circ}^{(s)}(x)$ есть решение той же задачи сопряжения (I.20) - (I.24), но в правой части уравнения (I.2I) вместо нуля стоит вектор

$$[1 - \tau^{(s)} \tau(x)] \vec{K}(x) + \tau^{(s)} \tau(x) \vec{K}'(x).$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. В.П. Котляров, Е.Я.Хруслов, Друга крайова задача лІнІйноІ теорІІ пружностІ в областях з дрІбнозернистою границею. ДАН УРСР, сер. А., № 5, I972.

2. М. Рейнер, Реология, М., I74, I965.

3. А.И. Лурье, Теория упругости, М., I970.

4. З.Г. Шефтель, Энергетические неравенства и общие граничные задачи для уравнений с разрывными коэффициентами, СМЖ, т. 6, № 3, I965.

ON EQUATIONS OF ELASTIC MEDIUM WITH GREAT NUMBER OF FINE ABSOLUTELY HARD INCLUSIONS

V.P.Kotlyarov and E.Ja.Hruslov.

The boundary value problem on equilibrium of elastic medium with inclusions of absolutely hard solids has been considered. The asympotic behaviour of the solution of this problem has been studied when the number of solids is unboundly increased and their diameters decrease so that the total volume τ tends to zero. The first and the second terms of the asymptotic expansion of the solution in powers of τ are found. The asymptotics obtained enables to calculate the corrections of rheologic parameters of elastic medium with a great number of fine hard inclusions.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1972 выпуск III

ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ Л.А. СЛОБОЖАНИНА "ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВЕТВЛЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ"

Б.В. Логинов

В работе Л.А. Слобожанина [I] рассмотрена задача о формах равновесия вращающейся вязкой капиллярной жидкости, заключенной между двумя плоскими параллельными пластинами. Жидкость плотности ρ с коэффициентом поверхностного натяжения σ имеет постоянный объем v и вращается в условиях невесомости с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, нормальной к пластинам. Центр масс находится на оси вращения, угол смачивания равен $\frac{\pi}{2}$, расстояние между пластинами – $2h$.

В цилиндрической системе координат (r, θ, z), жестко связанной с пластинами (ось z направлена по оси вращения), формы равновесия $r=f(z,\theta)$ являются решениями следующей задачи:

$$2H - pf^2 + c = 0, \qquad (I)$$

$$f'_z\big|_{z=\pm h} = 0, \qquad \int_{-h}^{h} dz \int_0^{2\pi} f^2 d\theta = 2v,$$

где $p=\frac{\rho\omega^2}{2\sigma}$, c – неизвестная постоянная и H – средняя кривизна поверхности вращающейся жидкости,

$$2H = \frac{f^2+2f_\theta'^2 - ff''_{\theta\theta} + f^2f_z'^2 - ff_z'^2f''_{\theta\theta} - f^3f''_{zz} - ff''_{zz}f_\theta'^2 + 2ff'_zf'_\theta f''_{z\theta}}{(f^2+f_\theta'^2+f^2f_z'^2)^{3/2}}.$$

Круговая цилиндрическая поверхность Σ радиуса $r_0=\left(\frac{v}{2\pi h}\right)^{\frac{1}{2}}$ является решением задачи (I) при всех p.

Критическое равновесное состояние характеризуется следующими значениями параметра p (см. [I] и [2]):

$$p_0 r_0^3 = \frac{3}{2}, \quad 0 \le \delta \le \frac{\pi}{2},$$
$$p_0 r_0^3 = \frac{(\frac{\pi}{\delta})^2 + 1}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \le \delta \le \pi, \qquad \delta = \frac{2h}{r_0}. \qquad (2)$$

В работе [I] остались неисследованными формы равновесия, ответвляющиеся от цилиндрической равновесной формы при $\delta=\frac{2h}{r_0}=\frac{\pi}{2}$. Здесь мы рассматриваем именно этот случай.

Задача (I) сводится в [I] к следующему уравнению на поверхности Σ :

$$R(f,p) \equiv 2H - pf^2 + \frac{1}{S}\left(2pr_0v - \int_\Sigma 2H d\Sigma\right) - \frac{1}{2r_0^3 S}\left(\int_\Sigma f^2 d\Sigma - 2r_0 v\right) = 0, \qquad (3)$$
$$f'_z\big|_{z=\pm h} = 0,$$

где S – площадь Σ.

Необходимые сведения о гильбертовых функциональных пространствах $H_\sigma(V)=W_2^\sigma(V)$ на достаточно гладком компактном многообразии V с краем можно найти, напрмер, в [3]. Дифференциальный оператор класса p и порядка s на n -мерном многообразии V с краем действует ограниченным образом из $H_\sigma(V)$ в $H_{\sigma-s}(V)$, если $0\le\sigma-s\le p$ (предложение 4.5 из [3]). Имеет место теорема вложения (предложение 4.8): при $\sigma>\frac{n}{2}$ каждая функция из $H_\sigma(V)$ почти всюду совпадает с непрерывной функцией, причем оператор вложения $j: H_\sigma(V)\to C_0(V)$ ограничен.

Оператор R в (3) действует из пространства $H_2(\Sigma)=W_2^2(\Sigma)$ в $H_0(\Sigma)=\mathcal{L}_2(\Sigma)$ и является аналитическим. Полагая $f=z_0+g$, $p=p_0+\varepsilon$ и учитывая, что $R(z_0,p_0)=0$, уравнение (3) можно представить в виде (см. [I])

$$Bg=R_{01}\varepsilon+\sum_{i+j\ge2}R_{ij}g^i\varepsilon^j, \tag{4}$$

где B – дифференциальный оператор $g''_{zz}+\frac{1}{z_0^2}g''_{\theta\theta}+(2p_0z_0+\frac{1}{z_0^2})g$ на Σ с граничным условием $g'_z|_{z=\pm h}=0$ и

$$R_{11}g\varepsilon=-2z_0g\varepsilon+\frac{2z_0}{S}\varepsilon\int_\Sigma g\,d\Sigma\,,\qquad R_{0k}=0\,,\quad k\ge1\,,$$

$$R_{20}g^2=\frac{1}{2z_0^3}(2g^2+g_\theta'^2+4gg''_{\theta\theta}-z_0^2g_z'^2)-p_0g^2-\frac{1}{2z_0^3S}\int_\Sigma(3g^2+g_\theta'^2+4gg''_{\theta\theta}-z_0^2g_z'^2)\,d\Sigma\,,$$

$$R_{21}g^2\varepsilon=-g^2\varepsilon+\frac{1}{S}\varepsilon\int_\Sigma g^2d\Sigma\,,\qquad R_{12}g\varepsilon^2=0\,,$$

$$R_{30}g^3=\frac{1}{2z_0^4}(-2g^3-6g^2g''_{\theta\theta}-3gg_\theta'^2+3g_\theta'^2g''_{\theta\theta}+z_0^2gg_z'^2+z_0^2g_z'^2g''_{\theta\theta}+$$

$$+z_0^2g''_{zz}g_\theta'^2+4z_0^2g'_zg'_\theta g''_{z\theta}+3z_0^4g_z'^2g''_{zz})-$$

$$-\frac{1}{2z_0^4S}\int_\Sigma(-2g^3-6g^2g''_{\theta\theta}-3gg_\theta'^2+3g_\theta'^2g''_{\theta\theta}+z_0^2gg_z'^2+z_0^2g_z'^2g''_{\theta\theta}+$$

$$+z_0^2g''_{zz}g_\theta'^2+4z_0^2g'_zg'_\theta g''_{z\theta}+3z_0^4g_z'^2g''_{zz})\,d\Sigma\,,$$

. . . .

Оператор $B: H_2(\Sigma)\to H_0(\Sigma)$ является фредгольмовским, его нулевое и дефектное подпространства $N(B)$ и $N^*(B)$ при $\delta=\frac{\pi}{2}$, $h=\frac{\pi z_0}{4}$ трехмерны и имеют базис $\varphi_0=\cos2\theta$, $\varphi_1=\sin2\theta$, $\varphi_2=\sin\frac{2}{z_0}z$.

Уравнение (4) инвариантно относительно преобразования $z\to-z$ и группы сдвигов по координате θ. Поэтому, применяя результаты [4], [5], можно осуществить редукцию уравнения разветвления, понизив в нем число неизвестных и число уравнений на единицу. Уравнение (4) редуцируется к уравнению

$$B'g=(I-Q_0)\{R_{01}\varepsilon+\sum_{i+j\ge2}R_{ij}g^i\varepsilon^j\}=F(g,\varepsilon) \tag{5}$$

с фредгольмовским оператором B', действующим из $E_1=H_2(\Sigma)\dot-\{\varphi_0\}$ в $E_2=H_0(\Sigma)\dot-\{\varphi_0\}$ и совпадающим с B на E_1. Здесь $Q_0 = (\cdot, \varphi_0)_{H_0(\Sigma)} \gamma_0$, $(g_1, g_2)_{H_0(\Sigma)} = \frac{1}{S}\int_\Sigma g_1 g_2 \, d\Sigma$ и $\{\gamma_i\}_0^2$ – система элементов, биортогональная в $H_0(\Sigma)$ к $\{\varphi_i\}_0^2$, т.е. $\gamma_0 = 2\cos 2\Theta$, $\gamma_1 = 2\sin 2\Theta$, $\gamma_2 = 2\sin\frac{2}{z_0}z$. Соответствующее (5) уравнение разветвления является системой двух уравнений с двумя неизвестными.

Запишем (5) в виде системы

$$\begin{cases} \widetilde{B'}g = F(g,\varepsilon) + \xi_1\gamma_1 + \xi_2\gamma_2, \\ \xi_1 = (g, \gamma_1)_{H_2(\Sigma)}, \quad \xi_2 = (g, \gamma_2)_{H_2(\Sigma)}, \end{cases} \tag{6}$$

где $\widetilde{B'} = B' + (\cdot, \gamma_1)_{H_2(\Sigma)}\gamma_1 + (\cdot\gamma_2)_{H_2(\Sigma)}\gamma_2$. По обобщенной лемме Шмидта ([6] , стр. 340) оператор $\Gamma = \widetilde{B'}^{-1}$ существует и ограничен, причем $\Gamma\gamma_i = \varphi_i$, $i = 1,2$. Разыскивая решение (6) в виде ряда

$$g = \sum_{i+j+k\geq 1} x_{ijk}\,\xi_1^i\,\xi_2^j\,\varepsilon^k,$$

получаем:

$$x_{100} = \sin 2\Theta, \quad x_{010} = \sin\frac{2}{z_0}z, \quad x_{00k} = 0, \quad k \geq 1,$$

$$x_{200} = -\frac{1}{4z_0} - \frac{7}{16z_0}\cos 4\Theta, \qquad x_{110} = \frac{9}{4z_0}\sin 2\Theta \sin\frac{2}{z_0}z,$$

$$x_{020} = -\frac{1}{4z_0} + \frac{1}{16z_0}\cos\frac{4}{z_0}z, \qquad x_{101} = -z_0\sin 2\Theta, \quad x_{011} = -z_0\sin\frac{2}{z_0}z,$$

$$x_{300} = -\frac{135}{64z_0^4}\sin 2\Theta - \frac{15}{32^2z_0^2}\cdot\sin 6\Theta,$$

$$x_{030} = -\frac{183}{64z_0^4}\sin\frac{2}{z_0}z + \frac{161}{32^2z_0^2}\sin\frac{6}{z_0}z,$$

$$x_{210} = -\frac{87}{16z_0^4}\sin\frac{2}{z_0}z - \frac{329}{256z_0^2}\sin\frac{2}{z_0}z\cos 4\Theta,$$

$$x_{120} = -\frac{87}{16z_0^4}\sin 2\Theta + \frac{39}{128z_0^2}\sin 2\Theta\cos\frac{4}{z_0}z,$$

$$x_{201} = \frac{1}{2} + \frac{7}{8}\cos 4\Theta - \frac{11}{96}z_0^2\cos 4\Theta,$$

$$x_{111} = -\frac{9}{2}\sin 2\Theta\sin\frac{2}{z_0}z + \frac{13}{8}z_0^2\sin 2\Theta\sin\frac{2}{z_0}z,$$

$$x_{021} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\cos\frac{4}{z_0}z - \frac{1}{32}z_0^2\cos\frac{4}{z_0}z.$$

Коэффициенты уравнения разветвления вычисляются по формулам ([6] , стр. 365) $L_{ijk}^{(s)} = (F_{ijk}, \gamma_s)_{H_0(\Sigma)}$, $s = 1,2$, где F_{jik} – коэффициенты разложения $F(g,\varepsilon)$ в ряд по ξ_1, ξ_2 и ε. Уравнение разветвления

$$\begin{cases} -z_0\xi_1\varepsilon - \frac{135}{64z_0^4}\xi_1^3 - \frac{87}{16z_0^4}\xi_1\xi_2^2 + \ldots = 0, \\ -z_0\xi_2\xi - \frac{183}{64z_0^4}\xi_2^3 - \frac{87}{16z_0^4}\xi_1^2\xi_2 + \ldots = 0 \end{cases}$$

имеет четыре вещественных решения

$$\xi_1^{(0)} = 0, \quad \xi_2^{(0)} = 0,$$

$$\xi_1^{(1)} = \frac{8 r_0^2 \sqrt{r_0}}{3\sqrt{15}} (-\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \dots, \quad \xi_2^{(1)} = 0,$$

$$\xi_1^{(2)} = 0, \quad \xi_2^{(2)} = \frac{8 r_0^2 \sqrt{r_0}}{\sqrt{183}} (-\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

$$\xi_1^{(3)} = \frac{8\sqrt{55}\, r_0^2 \sqrt{r_0}}{\sqrt{32133}} (-\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \dots, \quad \xi_2^{(3)} = \frac{8\sqrt{71}\, r_0^2 \sqrt{r_0}}{\sqrt{32133}} (-\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \dots .$$

Соответственно этому получаем, что при $h = \frac{\varkappa r_0}{4}$ с точностью до преобразования $z \to -z$ и сдвига по Θ от цилиндрической равновесной формы ответвляется три равновесных формы вида

$$f_s = r_0 + \xi_1^{(s)} \varphi_1 + \xi_2^{(s)} \varphi_2 + \dots, \quad s = 1, 2, 3.$$

Решения f_1 и f_2 совпадают с найденными в [1] для $0 \leqslant \delta \leqslant \pi$, $\delta \neq \frac{\pi}{2}$, форма равновесия f_1 совпадает также с решением плоской задачи о фигурах равновесия вращающегося жидкого цилиндра [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.А.Слобожанин, Об одной задаче ветвления цилиндрического равновесного состояния вращающейся жидкости, ФТИНТ АН УССР, Математическая физика и функциональный анализ, в. 2, стр. 175-181, Харьков, 1971.
2. Л.А. Слобожанин, Об устойчивости цилиндрического равновесного состояния вращающейся жидкости, ФТИНТ АН УССР, Математическая физика и функциональный анализ, в. 2, стр. 169-174, Харьков, 1971.
3. М.С. Агранович, Эллиптические сингулярные интегро - дифференциальные операторы, УМН, т.20, в 5 (125), стр. 3-120, (гл. II, стр. 15-30), 1965.
4. Б.В. Логинов, В.А. Треногин, Об использовании групповых свойств для определения многопараметрических семейств решений нелинейных уравнений, Математический сборник, 85 (127), № 3, 1971.
5. В.И. Юдович, Свободная конвекция и ветвления, ПММ, т. 31, в. 1, стр. 101-111,1967.
6. М.М. Вайнберг, В.А. Треногин, Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., "Наука", 1969.
7. Ю.К. Братухин, Л.Н. Маурин, Равновесные фигуры вращающегося жидкого цилиндра, ПММ, т. 32, в. 4, 1968.

THE SUPPLEMENT TO PAPER "ON PROBLEM IN BRANCHING OF CYLINDRICAL EQUILIBRIUM STATE OF ROTATING FLUID" BY L.A.SLOBOZHANIN

B.V.Loginov.

The problem in the equilibrium forms of rotating capillary viscous fluid placed between two plane parallel plates is considered. The fluid has a constant volume and rotates around the axis normal to the plates in conditions of weightlessness.

A nonlinear functional equation corresponds to the problem. Employing the methods of the branch theory the case of a 3-multiple proper value of the linearized equation has been investigated.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1972 выпуск III

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

Ю.И. Любарский

В этой работе мы занимаемся аппроксимацией целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) с помощью тригонометрических полиномов степени не выше σ, то есть конечных сумм вида

$$s(t)=\sum_{-\sigma\le\lambda\le\sigma} c_\lambda e^{i\lambda t}$$

в различных нормированных пространствах функций, определенных на вещественной оси. (Степенью полинома $s(t)$ мы будем называть $\max\limits_{c_\lambda\neq 0}|\lambda|$). Хорошо известна следующая теорема Б.М. Левитана [I].

Для любой функции $g\in G_\sigma$ множества ц.ф.э.т. σ, ограниченных на вещественной оси, и любых чисел $N,\ \varepsilon>0$ найдется такой тригонометрический полином $s(t)$ степени σ, что

$$\sup_{|t|<N}|s(t)-g(t)|<\varepsilon,\qquad \sup_{-\infty<t<\infty}|s(t)|\le\sup_{-\infty<t<\infty}|g(t)|. \quad ^{*)}$$

В этой теореме речь идет об аппроксимации ограниченных на всей оси ц.ф.э.т. σ. Но можно рассматривать и растущие на вещественной оси ц.ф.э.т. σ, принадлежащие некоторому пространству C°_φ. Это пространство строится по растущей на всей оси функции $\varphi(t)\geq 1$ и состоит из всех таких непрерывных функций $f(t)$, что $f\cdot\varphi^{-1}\to 0$, с нормой

$$\|f\|_\varphi=\sup_t|f(t)\varphi^{-1}(t)|^{**)}.$$

Подпространство пространства C°_φ, состоящее из всех ц.ф.э.т. σ, принадлежащих пространству C°_φ, мы обозначим $\mathfrak{S}_\sigma(C^\circ_\varphi)$. Вопрос об аппроксимации функций из $\mathfrak{S}_\sigma(C^\circ_\varphi)$ изучен лишь для некоторых частных случаев функции $\varphi(t)$. Выбрав $\varphi(t)=1+|t|^n$ (n – натуральное число), Н.И. Ахиезер в 1946г. [2] (см. также [13]) доказал следующее утверждение:

Для любой функции $g\in\mathfrak{S}_\sigma(C^\circ_\varphi)$ и любого числа $\varepsilon>0$ найдется такой тригонометрический полином $s(t)$ степени σ, что

$$\|g(t)-s(t)\|_\varphi\le\varepsilon.$$

Затем В.А. Марченко (1950г.) [3] доказал справедливость аналогичного утверждения при существенно более слабых ограничениях на функцию $\varphi(t)$. В его работе требовалось, чтобы функция была непрерывной, удовлетворяла "условию неквазианалитичности"

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\varphi(t)}{1+t^2}\,dt<\infty \tag{I}$$

и "кольцевому условию" $\varphi(t_1+t_2)\le\varphi(t_1)\varphi(t_2)$.

---

*) Утверждение теоремы остается в силе, если ограничиться лишь тригонометрическими полиномами с рациональными показателями, то есть периодическими тригонометрическими полиномами.

**) Такие пространства не являются, вообще говоря, полными. Условия полноты этого пространства, а также более широкого класса пространств получены Т.Е. Починок [12].

Позднее Л.И. Ронкин [4] доказал такое же утверждение, требуя от непрерывной функции $\varphi(t)$ выполнения условия (I) и заменив "кольцевое условие" условием монотонности *) Он же перенес свой результат на случай функций от многих комплексных переменных. Заметим, наконец, что,используя более поздний результат Берлинга и Майавэна [5] и методы работ [2] - [4], можно доказать более слабое утверждение для любой измеримой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей условию (I):

Для любой функции $g\in\mathfrak{S}_\sigma(C^\circ_\varphi)$ и любых чисел $\varepsilon,\eta>0$ найдется такой тригонометрический полином $s(t)$ степени $\sigma+\eta$, что

$$\| g(t)-s(t)\|_\varphi \leq \varepsilon .$$

В связи с этими результатами Б.Я. Левин поставил следующие два вопроса. Во-первых, нельзя ли аналогичные теоремы получить для более широкого класса пространств, а именно, для класса Φ -пространств (который будет определен ниже)? Во-вторых, в каких пространствах и при каких условиях ц.ф.э.т. σ, принадлежащую пространству, можно аппроксимировать тригонометрическими полиномами той же степени σ так, как это было сделано в [I] - [4] ?

В настоящей статье мы даем ответы на эти вопросы. Прежде всего определим класс Φ - пространств, рассмотренный впервые Б.Я. Левиным в его спецкурсе, прочитанном в ХГУ в 1956г.

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е. Нормированное пространство $\mathfrak{X}$ измеримых или непрерывных функций на вещественной оси называется Φ -пространством, если оно удовлетворяет следующим требованиям:

Φ_1. Если функция $f(t)\in\mathfrak{X}$, а функция $g(t)$ такова, что $|g(t)|\leq|f(t)|$ при всех $t\in(-\infty,\infty)$, то $g\in\mathfrak{X}$ и $\|g\|\leq\|f\|$.

Φ_2. Функция $e(t)$, равная тождественно единице, лежит в пространстве $\mathfrak{X}$.

Φ_3. Линейная оболочка множества функций

$$\left\{ f(t)=(t-z)^{-1};\ \Im m z \neq 0 \right\}$$

плотна в пространстве $\mathfrak{X}$.

П Р И М Е Ч А Н И Е. Свойство Φ_2 здесь подобрано так, чтобы рассматривать аппроксимацию с помощью тригонометрических полиномов. Если бы мы захотели аппроксимировать другими системами функций, то надо было бы потребовать, чтобы эти функции принадлежали пространству $\mathfrak{X}$. Так, для изучения аппроксимации обычными полиномами надо потребовать выполнения условия Φ_2'.

Φ_2'. Функции $t^n\in\mathfrak{X}$ при $n=0,1,2,\ldots$

Класс Φ - пространств весьма широк. К нему, например, кроме пространства C°_φ, принадлежат также пространства L^p_φ измеримых функций с нормой

$$\| f\|_{p,\varphi}=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t)|^p}{\varphi(t)}\,dt\right\}^{\frac{1}{p}},\qquad (p\geq 1),$$

где функция $\varphi(t)>0$ такова, что $[\varphi(t)]^{-1}$ суммируема на $(-\infty,\infty)$.

В этой статье мы показываем, что в любом Φ - пространстве возможна аппроксимация ц.ф.э.т. тригонометрическими полиномами чуть большей степени. При аппроксимации же ц.ф.э.т. с помощью тригонометрических полиномов той же степени картина резко меняется. В работе приводятся примеры пространств, в которых такая аппроксимация, вообще говоря, невозможна и находится (при некоторых дополнительных ограничениях) необходимое и достаточное условие полноты множества тригонометрических полиномов степени σ в подпространстве всех ц.ф.э.т. σ, лежащих в Φ - пространстве $\mathfrak{X}$. Это условие аналогично полученному И.О. Хачатряном условию полноты множества полиномов в пространстве целых функций нулевого экспоненциального типа, принадлежащих C°_φ [6], и доказывается с помощью методов, разработанных в [6] (при этом функция φ выбрана так, чтобы полиномы лежали в пространстве C°_φ и не были плотны там).

---

*) В работах [2] - [4], [I3] было сформулировано более слабое утверждение: любую функцию из $\mathfrak{S}_\sigma(C^\circ_\varphi)$ можно аппроксимировать тригонометрическими полиномами степени, чуть большей, чем σ. Однако позже В.А. Марченко заметил (его замечание приведено в начале § 3 настоящей работы), что отсюда немедленно следует справедливость утверждения, сформулированного нами выше.

При этом существенно то, что задача о приближении тригонометрическими полиномами родственна известной проблеме С.Н. Бернштейна о весовом приближении непрерывных функций многочленами на всей оси. Б.Я. Левин показал, что методы, предложенные С.Н. Мергеляном [7] для решения проблемы С.Н. Бернштейна, применимы в более общей ситуации и, таким образом, обобщил на случай Φ - пространств, удовлетворяющих требованию Φ_2', решения проблемы С.Н. Бернштейна, полученные в 1953г. Н.И. Ахиезером и С.Н. Бернштейном [8] и, год спустя, С.Н. Мергеляном [9]. Эти же методы будут использованы и в нашей работе для изучения аппроксимации с помощью тригонометрических полиномов.

Настоящая работа состоит из трех частей. В первой части приводятся основные факты, относящиеся к полноте системы тригонометрических полиномов степени не выше σ в Φ - пространствах, и приводятся примеры Φ - пространств, в которых невозможна аппроксимация ц.ф.э.т. без увеличения степени. Во второй - доказывается необходимое и достаточное условие полноты множества тригонометрических полиномов степени не выше σ в подпространстве всех ц.ф.э.т. σ, лежащих в пространстве $\mathscr{X}$, и приводятся некоторые сопутствующие теоремы. Наконец, в третьей части проводится проверка выполнения этих условий для некоторых Φ - пространств.

§ I

Вначале отметим одно свойство Φ - пространств. Пусть функция $f \in \mathscr{X}$. Положим $f_N(t) = f(t) \cdot \chi_N(t)$ (χ_N - характеристическая функция интервала $(-N, N)$ *)).

Л Е М М А I. Пусть $\mathscr{X}$ есть Φ - пространство. Тогда для любой функции справедливо утверждение

$$\|f - f_N\| \to 0 \qquad \text{при} \qquad N \to +\infty.$$

Доказательство легко получается, если воспользоваться тем, что функции, стремящиеся к нулю, плотны в пространстве $\mathscr{X}$ (это следует из Φ_3).

В методе С.Н. Мергеляна существенно используется следующее свойство множества полиномов. Если f - полином, то для любой точки z комплексной плоскости функция $[f(t)-f(z)](t-z)^{-1}$ также является полиномом. Множество тригонометрических полиномов степени не выше σ не обладает этим свойством. Мы, однако, обойдем эту трудность, перейдя к аппроксимации функциями из множества B_σ, которое уже обладает нужным свойством. Это можно сделать благодаря следующей лемме.

Л Е М М А 2. В любом Φ - пространстве $\mathscr{X}$ множество тригонометрических полиномов степени не выше σ плотно в множестве B_σ.
Доказательство этой леммы следует из теоремы Б.М. Левитана и леммы I.

Условие С.Н. Мергеляна полноты обычных полиномов в пространстве C_φ° Б.Я. Левин перенес на случай произвольных Φ - пространств. Для того, чтобы его сформулировать, введем следующее обозначение:

$\mathfrak{M}$ - множество ц.ф.э.т. σ таких, что функция $f(t)(t-i)^{-1}$ ограничена на вещественной оси и $\|f(t)(t-i)^{-1}\| \leq 1$. Для любой точки $z \in \mathbf{C}$ положим $\psi(z) = \sup\{|f(z)|;\ f \in \mathfrak{M}\}$. Справедлива следующая теорема:

Т Е О Р Е М А I. Для полноты множества B_σ в $\mathscr{X}$ необходимо, чтобы $\psi(z) = +\infty$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$ и достаточно, чтобы $\psi(z) = +\infty$ хотя бы в одной точке z комплексной плоскости.

Как следует из работ Н.И. Ахиезера, С.Н. Бернштейна и С.Н. Мергеляна, справедливы и другие, эквивалентные этим, условия полноты множества B_σ в Φ - пространстве $\mathscr{X}$. Для этого, например, необходимо и достаточно выполнения любого из двух следующих равенств:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \psi(t)}{1+t^2}\, dt = \infty, \qquad \sup_{f \in \mathfrak{M}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |f(t)|}{1+t^2}\, dt = \infty. \tag{2}$$

Можно рассматривать аппроксимацию и другими системами ц.ф.э.т. (а не только B_σ), для которых имеет место представление с помощью интеграла Пуассона в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. При

---

*) Если мы рассматриваем пространство непрерывных функций, то в качестве χ_N надо взять сглаженную ступеньку.

этом можно, например, показать, что если функция $\varphi(t)$ такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \varphi(t)}{1+t^2}\, dt < \infty,$$

то ни при каком $\sigma > 0$ множество ц.ф.э.т. σ, лежащих в пространстве C°_φ, неплотно в этом пространстве. Ниже мы воспользуемся этим результатом для случая, когда $\varphi(t) \leqslant 1+|t|^\gamma$ $(\gamma > 0)$.

Из условий неполноты (2) следует, что в том случае, когда B_σ неплотно в пространстве $\mathscr{X}$, все функции из $\mathfrak{M}$ имеют в верхней (и аналогично в нижней) полуплоскости положительную гармоническую мажоранту (см., например, [10])

$$u(z) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \psi(t)}{|t-z|^2}\, dt + \sigma|y|, \quad |z = x+iy|,$$

оценивая которую так, как это сделано, например, в [10], мы получим следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2. Если множество B_σ неплотно в пространстве $\mathscr{X}$, то замыкание $\bar{B}_\sigma$ множества B_σ по норме содержится в множестве $\mathfrak{S}_\sigma(\mathscr{X})$ ц.ф.э.т. σ, лежащих в $\mathscr{X}$. При этом для любой функции $q \in \mathfrak{M}$ справедлива оценка

$$|q(z)| \leqslant \psi(z) \leqslant u(z) \leqslant e^{\sigma|y| + o(|z|)}. \tag{3}$$

Совпадает ли в этом случае $\bar{B}_\sigma$ со всем множеством $\mathfrak{S}_\sigma(\mathscr{X})$? Ниже приводятся два примера, показывающие, что это не всегда так.

ПРИМЕР I (с медленно растущим весом). В качестве пространства $\mathscr{X}$ рассмотрим C°_φ, где

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1+t^2 & \text{при} \quad t \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \\ \sqrt{|t|} & \text{при} \quad t = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \end{cases}$$

Построим функционал F, аннулирующий B_π, но отличный от нулевого на $\mathfrak{S}_\pi(C^\circ_\varphi)$. Функционал F в C°_φ определяется, как известно, формулой

$$F[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{\varphi(t)}\, d\mu(t),$$

где $d\mu(t)$ – конечная борелевская мера. Выберем в качестве μ меру, носитель который состоит из всех целых и еще a_1, a_2 – двух фиксированных нецелых точек. При этом $\mu(n) = (-1)^n\sqrt{|n|}[(a_1-n)(a_2-n)]^{-1}$ в каждой целой точке n и $\mu(a_k) = (-1)^k\varphi(a_k)(\sin\pi a_k)^{-1}(a_1-a_2)^{-1}$, где $k=1,2$.

Соответствующий функционал представим в виде

$$F[f] = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{f(n)}{(-1)^n(a_1-n)(a_2-n)} + \frac{f(a_1)}{(a_2-a_1)\sin\pi a_1} + \frac{f(a_2)}{(a_1-a_2)\sin\pi a_2}.$$

Применив теорему о вычетах к интегралу от функции $e^{i\alpha z}[(z-a_1)(z-a_2)\sin\pi z]^{-1}$, взятому по окружности $|z| = K+\frac{1}{2}$ (к – натуральное число), и перейдя к пределу при $\alpha \in [-\pi,\pi]$ и $k \to +\infty$, получим $F[e^{i\alpha t}] = 0$ и, следовательно, (см. лемму 2) $F[B_\pi] = 0$. В то же время функция $h(t) = t\sin\pi t$, очевидно принадлежит множеству $\mathfrak{S}_\pi(C^\circ_\varphi)$ и $F[h] = 1$. Поэтому B_π неплотно в $\mathfrak{S}_\pi(C^\circ_\varphi)$.

Для построения следующего примера нам потребуется лемма.

ЛЕММА 3. Пусть функция $\varphi(t) \geqslant 1$ такова, что множество полиномов входит в C°_φ и плотно там. Пусть функция $\varphi_1(t) = \varphi(t)$ при нецелых значениях t и $\varphi_1(t) \to \infty$ при всех $t \to \infty$. Тогда множество $\mathfrak{S}_\pi(C^\circ_{\varphi_1})$ плотно в $C^\circ_{\varphi_1}$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА I. В силу леммы I нам достаточно доказать возможность приближения всех финитных функций из $C^\circ_{\varphi_1}$ элементами $\mathfrak{S}_\pi(C^\circ_{\varphi_1})$.

2. Любую финитную функцию можно интерполировать во всех целых точках функцией из $\mathfrak{S}_\pi(C^\circ_\varphi)$ (даже из B_π). Поэтому достаточно доказать возможность приближения элементами $\mathfrak{S}_\pi(C^\circ_{\varphi_1})$ функций из $C^\circ_{\varphi_1}$, обращающимися в ноль в целых точках. Их тоже можно считать финитными.

3. Такие функции можно приблизить выражениями вида $P(t)\sin\pi t$, где $P(t)$ – полином. Это завершает доказательство леммы.

П Р И М Е Р 2 (с быстро растущим весом). В условиях предыдущей леммы функцию $\varphi_1(t)$ выберем так, чтобы в целых точках n выполнялось неравенство $\varphi_1(n)\leqslant 1+\sqrt{|n|}$. Тогда, пользуясь интерполяционной формулой для функций из B_π (см. [II])

$$g(z)=\frac{\sin\pi z}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^k g(k)\left\{\frac{1}{z-k}+\frac{1}{k}\right\}+c_g\sin\pi z,$$

легко показать, что B_π неплотно в $C^\circ_{\varphi_1}$. (Если функция $g(z)$ задана этой формулой, то $|g(\frac{1}{2})+g(\frac{3}{2})|\leqslant const$, определяемой только значениями $g(k)$ при $k=0,\pm1,\pm2,\dots$. Поэтому функция $g(z)$ не может хорошо приблизить функцию $f\in C^\circ_\varphi$, у которой модуль суммы $|f(\frac{1}{2})+f(\frac{3}{2})|$ достаточно велик). Отсюда следует, что B_π неплотно и в $\mathfrak{S}_\pi(C^\circ_{\varphi_1})$. Пример построен.

§ 2

Ниже (если явно не оговорено противное) будут рассматриваться Φ – пространства $\mathfrak{X}$, в которых неплотно множество B_σ (при каком-то фиксированном значении σ). При каких условиях $\bar{B}_\sigma=\mathfrak{S}_\sigma(\mathfrak{X})$?

Для того, чтобы сформулировать эти условия, введем следующие обозначения: $\mathfrak{M}_1$ – множество ц.ф.э.т. σ таких, что

$$f(t)(t-i)^{-1}\in\mathfrak{X} \quad \text{и} \quad \|f(t)(t-i)^{-1}\|\leqslant 1,$$

$$\psi_1(z)=\sup\{|f(z)|:\ f\in\mathfrak{M}_1\}.$$

И в этом случае имеет место теорема, аналогичная теореме I: конечность функции $\psi_1(z)$ эквивалентна тому, что $\mathfrak{S}_\sigma(\mathfrak{X})$ неплотно в пространстве $\mathfrak{X}$.

Т Е О Р Е М А 3. Если для некоторого пространства $\mathfrak{X}$ выполнено равенство

$$\bar{B}_\sigma=\mathfrak{S}_\sigma(\mathfrak{X}), \tag{4}$$

то справедливо тождество

$$\psi(z)=\psi_1(z). \tag{5}$$

Доказательство лишь незначительно отличается от доказательства соответствующего факта в работе И.О. Хачатряна [6]. Заметим вначале, что если функции $f,g\in\mathfrak{S}_\sigma(\mathfrak{X})$, то из равенства $\|f-g\|=0$ следует $f=g$, так как в противном случае выполнялось бы равенство $\psi_1(z)=\pm\infty$ для всех точек z, в которых $f(z)\neq g(z)$.

Теперь для произвольных $z_0\in\mathbf{C}$ и $\varepsilon>0$ выберем функцию $f\in\mathfrak{M}_1$ так, чтобы $|f(z_0)|>\psi_1(z_0)-\varepsilon$. Аппроксимируя функцию $[f(t)-f(i)](t-i)^{-1}$ элементами B_σ, можно получить последовательность $\{Q_n\}\subset\mathfrak{M}$, равномерно сходящуюся к $f(z)$ на каждом компакте в $\mathbf{C}$. Отсюда в силу произвольности ε следует $\psi(z_0)\geqslant\psi_1(z_0)$. Теорема доказана.

Для доказательства достаточности равенства (5) на пространство $\mathfrak{X}$ придется наложить дополнительные ограничения. Мы будем говорить, что пространство $\mathfrak{X}$ обладает свойством (A), если

(A) для любого функционала $F\in\mathfrak{X}^*$ справедливо $\|F-F_N\|\to 0$ при $N\to\infty$, где функционал F_N определен равенством $F_N[f]=F[f_N]$ для всех функций $f\in\mathfrak{X}$. Такими пространствами являются, например, пространства L^p_φ при $p>1$ и пространство C°_φ.

Т Е О Р Е М А 4. Если множество B_σ неплотно в пространстве $\mathfrak{X}$, обладающем свойством (A), то выполнение равенства (5) влечет равенство (4).

Доказательство основано на нескольких леммах. Сначала для функционала $F\in\mathfrak{X}^*$ введем функцию

$$\mathcal{F}(z) = F\left[\frac{1}{t-z}\right]. \tag{6}$$

Если F аннулирует множество B_σ, то для любой функции $f \in \mathfrak{M}$ и точки $z \in \mathbf{C}$ функция $g(t) = [f(t) - f(z)](t-z)^{-1} \in B_\sigma$ и, следовательно,

$$F[f(t)(t-z)^{-1}] = f(z)\,\mathcal{F}(z). \tag{7}$$

Л Е М М А 4. Пусть пространство $\mathcal{X}$ обладает свойством (A) и функция $\mathcal{F}(z)$ определена равенством (6). Тогда

$$\mathcal{F}(iy) = o(1)[\psi(iy)]^{-1} \text{ при } y \to \pm\infty. \tag{8}$$

Доказательство этой леммы несущественно отличается от доказательства соответствующего утверждения в работе И.О. Хачатряна [6]. В неравенстве

$$\left|F\left[\frac{f(t)}{t-iy}\right]\right| \leq \|F - F_N\| \left\|\frac{f(t)}{t-iy}\right\| + \|F_N\| \left\|\frac{f(t)}{t-i}\right\| \sup_{|t|<N} \left\{\left|\frac{t-i}{t-iy}\right|\right\},$$

выбрав сначала N так, чтобы первое слагаемое правой части было мало равномерно по всем $f \in \mathfrak{M}$, а потом при этом N выбрав достаточно большое y, обеспечивающее малость второго слагаемого, и воспользовавшись (7), получим, что $\mathcal{F}(iy)f(iy) \to 0$ равномерно по $f \in \mathfrak{M}$ при $y \to \infty$. Отсюда следует утверждение леммы.

П Р И М Е Ч А Н И Е. Если из условий леммы исключить свойство (A) пространства $\mathcal{X}$, то можно доказать лишь более слабое утверждение

$$\mathcal{F}(iy)\psi(iy) = O(1) \text{ при } y \to \pm\infty. \tag{9}$$

По рассматриваемому функционалу F (аннулирующему B_σ) и функции $g \in \mathfrak{M}_1$ построим функцию

$$\Phi(z) = F\left[\frac{g(t) - g(z)}{t-z}\right] = F\left[\frac{g(t)}{t-z}\right] - g(z)\mathcal{F}(z). \tag{10}$$

Легко доказать справедливость следующих утверждений (аналогично тому, как это сделано у И.О. Хачатряна).

Л Е М М А 5. Во введенных выше обозначениях $\Phi(z)$ является целой функцией экспоненциального типа не выше σ.

Л Е М М А 6. При выполнении условий теоремы 4 справедливо равенство

$$\lim_{y \to \pm\infty} \Phi(iy) = 0, \tag{11}$$

где функция $\Phi(z)$ определена равенством (10).

Проверим, что на самом деле функция $\Phi(z)$ имеет нулевой экспоненциальный тип. Если $h_\Phi(\vartheta)$ – индикатор $\Phi(z)$, то из леммы 6 следует, что $h_\Phi(\vartheta) = 0$ при $\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}$. Поэтому достаточно проверить это же равенство еще при двух значениях аргумента $\vartheta_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\vartheta_2 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Но, воспользовавшись формулой (7) при $f(t) = e^{\pm i\sigma t}$, получим:

$$\Phi(z) = F\left[\frac{g(t)}{t-z}\right] + g(z)e^{\mp i\sigma z} F\left[\frac{e^{\pm i\sigma t}}{t-z}\right]. \tag{12}$$

Равенство $h_\Phi(\vartheta_1) = h_\Phi(\vartheta_2) = 0$ следует из этой формулы и из оценки (3). Теперь из леммы 6 следует, что

$$\Phi(z) \equiv 0. \tag{13}$$

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что любой функционал $F\in\mathcal{X}^*$, аннулирующий B_σ, аннулирует и $\mathfrak{S}_\sigma(\mathcal{X})$. Действительно, если F – такой функционал и функция $f\in\mathfrak{S}_\sigma(\mathcal{X})$, то равенство $F[f]=0$ получается из равенства (I3) при $z=i$, где $\Phi(z)$ определена формулой (I0) с функцией $g(t)=(t-i)f(t)$. Теорема доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ I. Легко заметить, что при доказательстве мы пользовались более слабым, чем (5), условием

$$\psi_1(iy)=O(1)\psi(iy), \quad y\to\pm\infty \tag{I4}$$

и тем, что индикаторная диаграмма каждой функции из $\mathfrak{S}_\sigma(\mathcal{X})$ является отрезком мнимой оси. Поскольку это свойство индикаторной диаграммы с помощью формулы (3) легко получается из конечности в каждой точке функции $\psi_1(z)$, то для справедливости равенства (4) достаточно выполнения равенства (I4).

ПРИМЕЧАНИЕ 2. Не используя свойства (A) пространства $\mathcal{X}$, мы могли бы получить вместо равенства (I3) лишь более слабое утверждение $\Phi=const$.

Приведем факты, которые удается получить, не используя свойства (A) пространства $\mathcal{X}$.

ТЕОРЕМА 5. Если множество B_σ неплотно в пространстве $\mathcal{X}$, выполнено условие (5) и функция $f\in\mathfrak{S}_\sigma(\mathcal{X})$ такова, что $yf(iy)=o(\psi_1(iy))$ при $y\to\infty$, то $f\in\bar{B}_\sigma$. В самом деле, из условий теоремы следует, что $g(iy)=o(\psi(iy))$, где $g(z)=(z-i)f(z)$. Из этого утверждения легко получить, что $\Phi(iy)\to 0$ при $y\to\pm\infty$, где функция Φ определена равенством (I0)(функционал F аннулирует множество B_σ). Рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве теоремы 4, показывают, что $F[f]=0$. Теорема доказана.

Можно сформулировать условие на функцию $f\in\mathfrak{S}_\sigma(\mathcal{X})$, достаточное для того, чтобы ее можно было приблизить функциями из $\mathfrak{S}_\sigma(\mathcal{X})$, удовлетворяющими условиям теоремы 5. Для этого через S_α обозначим множество точек $\{z\in\mathbb{C}: |\arg z|>\alpha,\ |\arg z-\pi|>\alpha\}$ $(\alpha>0)$.

ТЕОРЕМА 6. Если функция $f\in\mathfrak{S}_\sigma(\mathcal{X})$ такова, что при некотором $\alpha>0$ функция $|f(z)|$ не стремится равномерно к $+\infty$ при $|z|\to\infty$, $z\in S_\alpha$, то $f(z)$ может быть приближена линейными комбинациями функций из $\mathfrak{S}_\sigma(\mathcal{X})$, удовлетворяющих условиям теоремы 5.

В самом деле, пусть функция f удовлетворяет условиям теоремы и последовательность точек $\{\zeta_k\}\in S_\alpha$ выбрана так, что $|f(\zeta_k)|\le L<\infty$ и $|\zeta_k|\to\infty$ при $k\to\infty$. Тогда можно проверить, что функции

$$f_k(t)=\zeta_k(\zeta_k-t)^{-1}[f(t)-f(\zeta_k)]+f(\zeta_k)$$

стремятся к f при $k\to\infty$ в норме пространства $\mathcal{X}$. При помощи леммы I показывается, что достаточно провести оценку нормы $\|f_{(k)_N}-f_N\|$ (индекс N означает, как и раньше, срезку на $[-N,N]$); затем ζ_k выбирается настолько большим, что при $|t|<N$ множитель $\zeta_k(\zeta_k-t)^{-1}$ близок к единице.

В случае, когда выполнено условие (5), даже если пространство $\mathcal{X}$ не обладает свойством (A), множество $\bar{B}_\sigma$ является по меньшей мере гиперплоскостью в подпространстве $\mathfrak{S}_\sigma(\mathcal{X})$ пространства $\mathcal{X}$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть множество B_σ неплотно в $\mathcal{X}$ и выполнено (5). Тогда коразмерность подпространства B_σ в $\mathfrak{S}_\sigma(\mathcal{X})$ не превышает единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Пусть функция $h\in\mathfrak{S}_\sigma(\mathcal{X})\setminus\bar{B}_\sigma$. Допустим, что можно выбрать последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ вещественных чисел $y_n\to\infty$ так, что если $\mathcal{L}_n$ – подпространство $\mathcal{X}$, натянутое на множество $\bar{B}_\sigma$ и на функцию $(t-iy_n)^{-1}$, то $\rho(h,\mathcal{L}_n)$ – расстояние от h до $\mathcal{L}_n$ – больше, чем некоторое число $\Delta>0$, общее для всех n. Тогда можно построить последовательность функционалов $\{F_n\}_1^\infty\subset\mathcal{X}$ таких, что

А) $\|F_n\|\le C<\infty$; Б) $F_n[\mathcal{L}_n]=0$; В) $F_n[h]=1$.

2. Из примечания 2 к теореме 4 следует, что для любой функции $f_n \in \mathfrak{M}_1$ выполняется равенство $F_n[(f_n(t)-f_n(z))(t-z)^{-1}] = const$. Дифференцируя это равенство по z и подставляя $z = iy_n$, $f_n(t) = h(t)(t-iy_n)$, получим $F_n[h(t)(t-iy_n)^{-1}] = 0$. Следовательно, функция $d_n(t) = iy_n(iy_n-t)^{-1}h(t)$ аннулируется функционалом F_n.

3. Но легко видеть (см. теорему 6), что $d_n(t) \to h(t)$ при $n \to \infty$. Это противоречит либо тому, что $F_n(h) = 1$, либо тому, что $\|F_n\| \leq C$. Поэтому $\rho(h, \mathcal{X}_n) \to 0$ для любой последовательности $\{y_n\}_1^\infty$, $y_n \to \infty$.

4. Учитывая это, легко видеть, что в фактор-пространстве $\mathfrak{S}_\sigma(\mathcal{X})/\bar{B}_\sigma$ нельзя указать два элемента $\hat{g}$ и $\hat{h}$, таких что $\|\hat{g}\| = \|\hat{h}\| = 1$ (здесь $\|\cdot\|$ – уже норма фактор-пространства) и элемент $\hat{g}$ лежит на положительном расстоянии от комплексной прямой, проведенной через $\hat{h}$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Методами, сходными с использованными при доказательстве предыдущих теорем, можно дать ответ и на другой вопрос, поставленный в начале работы.

Т Е О Р Е М А 8. Для любого Φ – пространства $\mathcal{X}$ и числа $\sigma \geq 0$ справедливо включение

$$\mathfrak{S}_\sigma(\mathcal{X}) \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} \bar{B}_{\sigma+\varepsilon}.$$

(В случае когда при некоторых $\tau > \sigma$ множества B_τ неплотны в пространстве $\mathcal{X}$, это включение обращается в равенство).

Для доказательства теоремы достаточно проверить (см. доказательство теоремы 4), что если функция $g \in \mathfrak{M}_1$ и функционал $F \in \mathcal{X}^*$ аннулирует $B_{\sigma+\varepsilon}$ при каком-нибудь $\varepsilon > 0$, то функция $\Phi(z)$, определенная равенством (10), тождественно равна нулю. Это легко следует из равенства

$$\Phi(z) = F\left[\frac{g(t)}{t-z}\right] + \frac{g(z)}{e^{\pm i(\sigma+\varepsilon)z}} F\left[\frac{e^{\pm i(\sigma+\varepsilon)t}}{t-z}\right],$$

полученного аналогично равенству (12).

§ 3

Доказанные выше теоремы дают возможность решать в некоторых случаях вопрос о выполнении равенства

$$\bar{B}_\sigma = \mathfrak{S}_\sigma(\mathcal{X}) \tag{4}$$

для конкретных Φ – пространств. В.А. Марченко обратил наше внимание на то, что из теоремы 8 легко следует справедливость этого равенства для Φ – пространств, обладающих следующим свойством $(\mathcal{B})$:

Для любой функции $f \in \mathfrak{S}_\sigma(\mathcal{X})$ и числа $\vartheta \in (0,1)$ функция $f(\vartheta t)$ принадлежит пространству $\mathcal{X}$ и

$$\lim_{\vartheta \to 1-0} \|f(\vartheta t) - f(t)\| = 0.$$

Равенство (4) следует в этом случае просто из того факта, что функция $f(\vartheta t) \in \bar{B}_\sigma$ при любом $\vartheta \in (0,1)$ (см. теорему 8).

Класс Φ – пространств, обладающих свойством $(\mathcal{B})$, весьма широк. К нему, как легко видеть, принадлежат все пространства C_φ° и L_φ^p ($p \geq 1$), у которых функция $\varphi(t)$ монотонна или удовлетворяет кольцевому условию (см. стр. 56).

Однако существуют Φ – пространства, не обладающие свойством $(\mathcal{B})$, например, пространства, рассмотренные в примерах I,2 §I. Справедливость равенства (4) для таких пространств может быть проверена с помощью теоремы 4. Проверим справедливость равенства (4) для пространства C_φ°, где функция $\varphi(t)$ определена следующим образом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 + |t|^\gamma & \text{при} \quad t \neq \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \\ o(1+|t|^\gamma) & \text{при} \quad t = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots . \end{cases} \tag{15}$$

Из примера I (см. стр. 59) следует, что для таких функций $\varphi(t)$ множество $B_{\frac{\pi}{2}}$, вообще говоря, неплотно в подпространстве $\mathfrak{S}_{\frac{\pi}{2}}(C^{\circ}_{\varphi})$. С увеличением типа ситуация меняется.

ТЕОРЕМА 9. При любых значениях $\sigma > \frac{\pi}{2}$ и $\gamma > 0$ множество B_{σ} плотно в подпространстве $\mathfrak{S}_{\sigma}(C^{\circ}_{\varphi})$ по норме пространства C°_{φ}, где функция $\varphi(t)$ определена соотношениями (I5).

Мы докажем теорему для частного случая $\sigma = \pi$ и $\gamma \in (0,1)$, а потом наметим изменения, которые надо сделать для доказательства теоремы в общей формулировке.

Доказательство проведем в несколько этапов.

I. Используя неравенство Гельдера, легко показать, что ряды

$$f_s(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{1}^{\infty} k^s \left\{ \frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right\}; \tag{I6A}$$

$$g_s(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{1}^{\infty} (2k)^s \left\{ \frac{1}{z-2k} + \frac{1}{2k} \right\}. \tag{I6Б}$$

при любом $s \in (0,1)$ сходятся равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$ к ц.ф.э.т π — f_s и g_s соответственно. Отметим сразу, что

$$g_s(2k+1) = 0 \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

II. Рассмотрим какой-нибудь интервал $\Delta \Subset (0,1)$. Легко получить следующие неравенства, справедливые одновременно для всех $s \in \Delta$:

$$\sum(x) = \frac{|\sin \pi x|}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty}{}' |k|^s \left| \frac{1}{x-k} + \frac{1}{k} \right| \leqslant (1+|x|)^s \left[2\ln(1+|x|) + C_{\Delta} \right]. \tag{I7}$$

$$|f_s(x)| \leqslant C_{\Delta} (1+|x|)^s, \tag{I8A}$$

$$|g_s(x)| \leqslant C_{\Delta} (1+|x|)^s, \tag{I8Б}$$

где C_{Δ} — константа, общая для всех $s \in \Delta$ *). В самом деле, достаточно оценить сумму

$$\sum_{+}(x) = \frac{|\sin \pi x|}{\pi} \sum_{1}^{\infty} k^s \left(\frac{1}{x-k} + \frac{1}{k} \right) \tag{I9}$$

при $x > 0$. Легко видеть, что

$$\sum_{+}(x) \leqslant \int_{0}^{x-1} \eta_x(t)\,dt - \int_{x+1}^{\infty} \eta_x(t)\,dt + S(x), \tag{20}$$

где

$$\eta_x(t) = t^s \left\{ \frac{1}{x-t} + \frac{1}{t} \right\},$$

а $S(x)$ — сумма членов ряда (I9) с номерами $[x]-1, [x], [x]+1, [x]+2$. Оценим интегралы, стоящие в правой части (20). Интеграл

$$I_1(x) = -\int_{x+1}^{\infty} \eta_x(t)\,dt = \int_{x+1}^{\infty} \frac{x t^s}{(t-x)t}\,dt$$

после замены переменных принимает вид

$$I_1(x) = x^s \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\xi+1)^{s-1}}{\xi}\,d\xi + x^s \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{(\xi+1)^{s-1}}{\xi}\,d\xi,$$

второе слагаемое в правой части оценивается величиной $|x|^s\, const$, первое после разложения в ряд и почленного интегрирования дает:

$$\left| \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\xi+1)^{s-1}}{\xi}\,d\xi - \ln(1+|x|) \right| \leqslant const.$$

Окончательно имеем:

$$\left| I_1(x) - (1+|x|)^s \ln(1+|x|) \right| \leqslant C^{(1)}_{\Delta} (1+|x|)^s \tag{2IA}$$

и, аналогично, положив

$$I_2(x) = \int_{0}^{x-1} \eta_x(t)\,dt,$$

---

*) Штрих при знаке суммы означает, что слагаемое, соответствующее $k=0$, опущено.

получим:

$$I_2(x) - (1+|x|)^s \ln(1+|x|) | \leqslant C_\Delta^{(1)} (1+|x|)^s \tag{21Б}$$

для всех $s \in \Delta$.

Из этих неравенств сразу следует оценка (I7), а для получения оценки (I8А) достаточно заметить, что

$$\left| \frac{\sin \pi x}{\pi} \sum_1^\infty k^s \left\{ \frac{1}{x-k} + \frac{1}{k} \right\} + I_1(x) - I_2(x) \right| \leqslant const\,(1+|x|)^s$$

и из неравенств (2I) следует, что $|I_1(x) - I_2(x)| \leqslant const(1+|x|)^s$. Неравенство (I8Б) получается аналогично.

[illegible]. Для рассматриваемого пространства $\mathfrak{X} = C^\circ_\varphi$ определим так же, как и на стр.58, 60, множества $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1$ и их мажоранты $\psi(z), \psi_1(z)$. Для проверки соотношения (I4) оценим функции [illegible] сверху. Нужная оценка легко получается применением принципа Фрагмена-Линделефа к ограниченной и голоморфной в верхней полуплоскости функции $e^{i\pi z} h(z)(z+i)^{-\gamma-1}$, где $h(z)$ – произвольная функция из $\mathfrak{M}_1$. Получаем:

$$\psi_1(iy) \leqslant const\,(1+|y|)^{\gamma+1} e^{\pi|y|}. \tag{22}$$

IУ. Положим $\Delta = (\varepsilon, \gamma)$, где ε – произвольное число из $(0, \gamma)$. Согласно (I8Б) при любом $s \in \Delta$ функция $g_s \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}(C^\circ_\varphi)$ и $\|g_s\|_\varphi \leqslant C^\circ_\Delta$. Легко показать, что

$$|g_s(iy)| > c_\Delta (1+|y|)^s e^{\pi|y|}, \tag{23А}$$

где c_Δ – константа, общая для всех $s \in \Delta$. (Для того, чтобы это проверить, можно, например, рассмотреть при $y \neq 0$ ряды

$$\sum_1^\infty (2k)^s Re\left\{ \frac{1}{iy-2k} + \frac{1}{2k} \right\} = \pi Re\, \frac{g(iy)}{\sin \pi i y},$$

$$\sum_1^\infty (2k)^s Jm\left\{ \frac{1}{iy-2k} + \frac{1}{2k} \right\} = \pi\, Jm\, \frac{g(iy)}{\sin \pi i y}$$

и оценить каждый из них снизу при помощи интеграла, пользуясь тем, что общий член каждого из этих рядов равен значению в целой точке функций

$$(2t)^s Re\left\{ \frac{1}{iy-2t} + \frac{1}{2t} \right\} = (2t)^s \frac{y^2}{2t(y^2+4t^2)},$$

$$(2t)^s Jm\left\{ \frac{1}{iy-2t} + \frac{1}{2t} \right\} = -\frac{(2t)^s y}{[y^2+4t^2]},$$

первая из которых монотонна при $t > 1$, а вторая меняет монотонность лишь в одной точке [illegible]).

Аналогично получается неравенство

$$|g_s(iy)| > c_\Delta (1+|y|)^s e^{\pi|y|}. \tag{23Б}$$

Функции $g_s(iy)$ не могут быть использованы непосредственно для оценки снизу функции [illegible], так как они не ограничены на вещественной оси. Но их можно заменить ограниченными, беря вместо всего ряда (I6Б) его частные суммы. Именно, мы рассмотрим функции

$$g_s^{(m)}(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_1^m (2k)^s \left\{ \frac{1}{z-2k} + \frac{1}{2k} \right\},$$

уже ограниченные на вещественной оси.

У. При всех значениях $s \in \Delta$ функции $g_s^{(m)}$ сходятся по норме пространства C°_φ к g_s при $m \to \infty$. В самом деле, по любому $\eta > 0$ выберем число N такое, что при $|x| > N$

$$(1+|x|)^s \{ 2\ln(1+|x|) + C_\Delta \} \leqslant \eta\,(1+|x|)^\gamma,$$

а затем число $m = m(\eta, s)$ выберем так, что при $n > m$ и $|x| < N$

$$|g_s(x) - g_s^{\langle n \rangle}(x)| < \eta.$$

Так как согласно (I7) при любых значениях n и x выполняется неравенство $|g_s(x) - g_s^{\langle n \rangle}(x)| \leqslant \{2\ln(1+|x|) + C_\Delta\}(1+|x|)^s$, то отсюда следует, что при $n > m(\eta, s)$ $\|g_s^{\langle n \rangle} - g_s\| < \eta$. Поэтому для каждого $s \in \Delta$ можно выбрать такое число m_s, что при $m > m_s$ справедливо неравенство

$$\|g_s^{\langle m \rangle} - g_s\| < C_\Delta + 1.$$

VI. Теперь проверим, что

$$\psi(iy) > c_1(1+|y|)^{\gamma+1} e^{\pi|y|}.$$

Зафиксируем точку $y_0 > 0$ и выберем последовательность чисел $\{s_n\} \subset \Delta$ так, что $s_n \to \gamma$ при $n \to \infty$ и

$$c_\Delta(1+y_0)^{s_n} e^{\pi y_0} \geqslant c_\Delta(1+y_0)^{\gamma} e^{\pi y_0} - \frac{1}{n}.$$

Тогда согласно (23А)

$$|g_{s_n}(iy_0)| \geqslant c_\Delta(1+y_0)^{\gamma} e^{\pi y_0} - \frac{1}{n},$$

и при достаточно большом $m_n > m_{s_n}$ мы получим:

$$|g_{s_n}^{\langle m_n \rangle}(iy_0)| > (1+y_0)^{\gamma} e^{\pi y_0} - \frac{2}{n}.$$

Так как $\|g_{s_n}^{\langle m_n \rangle}\| \leqslant C_\Delta + 1$, то найдется множитель L такой, что последовательность функций

$$d_n(t) = L(t-iy)\, g_{s_n}^{\langle m_n \rangle}(t) \in \mathfrak{M}$$

и, следовательно,

$$\psi(iy_0) \geqslant \underline{\lim}_{n} |d_n(iy_0)| > const\,(1+y_0)^{\gamma+1} e^{\pi y_0}, \tag{24}$$

константа не зависит от выбора точки y_0.

Из этого неравенства и неравенства (22) следует справедливость соотношения (I4). Теорема доказана.

Наметим изменения, которые надо внести в доказательство при произвольных значениях $\sigma > \frac{\pi}{2}$ и $\gamma > 0$.

Определим для множества B_σ в пространстве $\overset{\circ}{C}_\varphi$ и для множества $\mathfrak{I}_\sigma(\overset{\circ}{C}_\varphi)$ семейства функций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$ и их мажоранты $\psi(z)$, $\psi_1(z)$, как на стр. 58, 60. Оценка

$$\psi_1(iy) \leqslant const\,(1+|y|)^{\gamma+1} e^{\sigma|y|} \tag{25}$$

получается аналогично оценке (22). Для оценки снизу функции $\psi(iy)$ предположим вначале, что $\gamma \in (0,1)$. В этом случае нам надо рассмотреть функции

$$d_s(t) = f_s(\alpha t) \sin\frac{\pi}{2}t,$$

где функция f_s определена равенством (I6А), а число $\alpha > 0$ выбрано так, чтобы тип функции $d_s(t)$ был равен σ. Воспользовавшись тем же приемом с заменой ряда, представляющего f_s, его частными суммами, мы получим так же, как и в пункте VI доказательства теоремы, неравенство

$$\psi(iy) \geq const\,(1+|y|)^{\gamma+1} e^{\sigma|y|}. \qquad (26)$$

В случае произвольного $\gamma > 0$ надо выбрать целое число k так, что $\gamma < k$, и последовательность чисел $\{s_n\}$ такую, что $ks_n \to \gamma$ при $n \to \infty$, $s_n < \gamma k^{-1}$, и рассмотреть функции

$$[f_{s_n}(\alpha t)]^k \sin\frac{\pi}{2} t = d_{s_n}(t),$$

где число α по-прежнему выбрано так, чтобы тип функции d_{s_n} равнялся σ. Дальнейшее аналогично случаю $\gamma \in (0,1)$.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю Б.Я. Левину за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

I. Б.М. Левитан, Об одном обобщении неравенств С.Н. Бернштейна и Бора, ДАН СССР I5, № 4, I69-I72, I937.

2. Н.И. Ахиезер, О полиномах Левитана, ДАН СССР, № I, I946.

3. В.А. Марченко, О некоторых вопросах аппроксимации непрерывных функций на всей вещественной оси, Записки математического отделения физ.-мат. ф-та ХГУ и ХМО, т. XXII, сер. 4, I950.

4. Л.И. Ронкин, Об аппроксимации целых функций тригонометрическими полиномами, ДАН СССР, 92, № 5, 887-890, I953.

5. A.Beurling, P.Malliavin, On Fourier transforms of measures with compact support, Acta Math., 107, 291-309, 1962.

6. И.О. Хачатрян, О взвешенном приближении целых функций нулевой степени многочленами на действительной оси, Записки мех.-мат. ф-та ХГУ и ХМО, т.XXIX, сер.4, I964.

7. С.Н. Мергелян, Весовые приближения многочленами, Успехи математических наук, XI 5(7I), I956.

8. Н.И. Ахиезер, С.Н. Бернштейн, Обобщение теоремы о весовых функциях и применение к проблеме моментов, ДАН СССР 92, № 6, II09-III2, I953.

9. С.Н. Мергелян, О весовых приближениях многочленами, ДАН СССР, 97, № 4, 597-600, I954.

I0. Б.Я. Левин, Распределение корней целых функций, Гостехиздат, I956.

II. Б.Я. Левин, Целые функции, изд-во МГУ, I97I.

I2. Т.Е. Починок, Полнота пространства $D^n[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n]$. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 4, 79-86, I967.

I3. Н.И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, Наука, М., I965.

ON APPROXIMATION OF ENTIRE FUNCTIONS OF EXPONENTIAL TYPE BY TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS

Yu.I.Lyubarskii

The paper considers a problem on the approximation of functions given on the real axis, within a broad class of normed spaces containing, for example, spaces L^p_φ with a growing weight. It has been proved that any entire function of exponential type σ (e.f.e.t. σ) belonging to a space of the given class may be approximated in the norm of this space by trigonometric polynomials of the degree $\sigma+\varepsilon$ where ε is an arbitrary positive number. The necessary and sufficient conditions have been found for any e.f.e.t. σ from the space to be approximated by trigonometric polynomials of the degree σ precisely. Thus the results of N.I.Ahiezer, V.A.Marchenko and L.I.Ronkin pertaining to the space of the functions with weights continuous on the real axis have been generalized.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1972 выпуск III

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ХАНКЕЛЯ

А.С. Сохин

В спектральной теории операторов

$$\ell[y] = -y'' + q(x)y - \lambda^2 y, \quad 0 < x < \infty$$

с потенциальной функцией $q(x)$, удовлетворяющей условию

$$\int_x^\infty t|q(t)|dt < \infty, \quad x > 0,$$

большое значение имеют введенные Б.Я. Левиным [2] операторы преобразования

$$y(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt, \tag{1}$$

дающие представление решений уравнения $\ell[y]=0$ через решения $e^{i\lambda x}$ простейшего уравнения $y''+\lambda^2 y = 0$ (см., например, [1]). Если потенциал $q(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_x^\infty t\left|q(t) - \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^2}\right|dt < \infty, \quad x > 0, \tag{2}$$

то решения уравнения $\ell[y]=0$ можно представить в виде

$$y(x,\lambda) = h_\alpha(\lambda x) + \int_x^\infty L_\alpha(x,t)\, h_\alpha(\lambda t)dt,$$

где $h_\alpha(\lambda x)$ – решение простейшего уравнения

$$-y'' + \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2}y - \lambda^2 y = 0, \quad 0 < x < \infty, \tag{3}$$

т.е.

$$h_\alpha(\lambda x) = ie^{\frac{i\pi\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\pi\lambda x}{2}}\, H^{(1)}_{\alpha+\frac{1}{2}}(\lambda x)$$

($H^{(1)}_p(x)$ – функция Ханкеля первого рода). Однако если $\alpha \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, то функцию $h_\alpha(\lambda x)$ можно выразить через $e^{i\lambda x}$ в форме (1). Следовательно, в этом случае и решение уравнения $\ell[y]=0$ также представимо в таком виде. Действительно, из свойств функции Ханкеля вытекает, что при любом фиксированном $x > 0$ функция

$$f_\alpha(\lambda,x) = e^{-i\lambda x}\left[h_\alpha(\lambda x) - e^{i\lambda x}\right], \quad x > 0, \; -\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$$

аналитична при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, непрерывна при $\operatorname{Im}\lambda = 0 \; (\lambda \neq 0)$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda f_\alpha(\lambda,x) \neq \infty$ и $f(\lambda,x) \in L_2(-\infty,\infty)$ (по λ). Поэтому

$$f_\alpha(\lambda,x) = \int_0^\infty M_\alpha(x,s)e^{i\lambda s}ds.$$

Из последнего равенства нетрудно получить, что

$$h_\alpha(\lambda x) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K_\alpha(x,y)e^{i\lambda y}dy, \quad x > 0, \; \operatorname{Im}\lambda \geq 0, \quad 0 < |\alpha| < \frac{1}{2}. \tag{4}$$

В настоящей заметке мы найдем явное выражение для функции $K_\alpha(x,y)$. Подставляя правую часть равенства (4) в уравнение (3) и формально дифференцируя по частям, получим, что функция $K_\alpha(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}K_\alpha + \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2}K_\alpha = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}K_\alpha, \quad 0<x<y \tag{5}$$

и граничным условиям

$$\lim_{y\to\infty} K_\alpha(x,y) = \lim_{y\to\infty}\frac{\partial}{\partial y}K_\alpha(x,y) = 0, \tag{5'}$$

$$2\frac{d}{dx}K_\alpha(x,x) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} = 0. \tag{5''}$$

Обратно, легко видеть, что решение задачи (5)-(5″) при помощи формулы (4) задает решение уравнения (3).

Полагая

$$\xi = \frac{y+x}{2}, \quad \eta = \frac{y-x}{2}, \quad u_\alpha(\xi,\eta) = K_\alpha(\xi-\eta,\ \xi+\eta),$$

получим, что функция $u_\alpha(\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\xi-\eta)^2}u_\alpha = 0, \quad 0<\eta<\xi \tag{6}$$

и граничным условиям

$$\lim_{\xi\to\infty} u_\alpha(\xi,\eta) = 0 \qquad (\eta>0), \tag{6'}$$

$$u_\alpha(\xi,0) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\xi}. \tag{6''}$$

Пусть $R_\alpha(s,t;\xi,\eta)$- функция Римана уравнения (6), т.е. функция, удовлетворяющая по s и t уравнению (6) при $0<t<\eta<\xi<s<\infty$ и граничному условию

$$R_\alpha(s,t;\xi,\eta) = 1$$

на характеристиках $(s=const,\ t=const)$, проведенных через точку (ξ,η). Тогда по формуле Римана имеем:

$$u_\alpha(\xi,\eta) = -\int_\xi^\infty R_\alpha(s,0;\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial s}u_\alpha(s,0)\,ds,$$

т.е.

$$K_\alpha(x,y) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\int_{\frac{x+y}{2}}^\infty R_\alpha\left(s,0;\frac{y+x}{2},\ \frac{y-x}{2}\right)\frac{1}{s^2}\,ds, \quad -\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}. \tag{7}$$

В работе [4] показано, что из результатов Б.М. Левитана [3] вытекает такое равенство:

$$R_\alpha(s,t;\xi,\eta) = (1-w)^{-\alpha}F(-\alpha,-\alpha,1;w), \quad w = \frac{(s-\xi)(\eta-t)}{(s-\eta)(\xi-t)},$$

где

$$F(-\alpha,-\alpha,1;w) = 1+\sum_{n=1}^\infty\left[\frac{(-\alpha)\dots(-\alpha+n-1)}{n!}\right]^2 w^n; \quad 0\leqslant t\leqslant\eta\leqslant\xi\leqslant s\leqslant\infty$$

($F(a,b,c;x)$- гипергеометрическая функция).

Из формулы (7) следует неравенство

$$|K_\alpha(x,y)| \leqslant A_\alpha\frac{1}{x^\alpha(x+y)^{1-\alpha}}, \quad -\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$$

(A_α - постоянная, причем $\lim\limits_{\alpha \to -\frac{1}{2}} A_\alpha = \infty$). Заметим, что функция $K_\alpha(x,y) \in L_1(x,\infty)$ ($x>0$) при $-\frac{1}{2}<\alpha<0$ и является разностью двух монотонно убывающих по y функций при $0<\alpha<\frac{1}{2}$.

Аналогично можно доказать, что функция $h_\alpha(\lambda x)$ имеет еще такое представление:

$$h_\alpha(\lambda x) = -i\lambda \int\limits_x^\infty N_\alpha(x,y)\, e^{i\lambda y}\, dy, \quad x>0,\ \Im m\lambda>0,\ \alpha>-\frac{1}{2}, \tag{8}$$

в котором

$$N_\alpha(x,y) = R_\alpha\left(\infty, 0; \frac{y+x}{2}, \frac{y-x}{2}\right) = \left(\frac{y+x}{2x}\right)^\alpha \left\{1+\sum_{n=1}^\infty \left[\frac{(-\alpha)\ldots(-\alpha+n-1)}{n!}\right]^2 \left(\frac{y-x}{y+x}\right)^n\right\},$$

причем функция $N_\alpha(x,y)$ удовлетворяет уравнению (5) и граничным условиям

$$N_\alpha(x,x)=1, \quad \lim_{x\to\infty} N_\alpha(x,x+h)=1 \qquad (h>0).$$

Если $-\frac{1}{2}<\alpha<0$, то в равенстве (8) можно считать $\Im m\lambda \geqslant 0$.

В заключение заметим, что представления вида (4) и (8) используются при исследовании обратной задачи рассеяния для уравнений с особенностью.

Автор выражает благодарность В.А. Марченко за замечания к работе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. З.С. Агранович, В.А. Марченко, Обратная задача теории рассеяния, Изд. ХГУ, Харьков, I960.

2. Б.Я. Левин, Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка, ДАН СССР, I06, № 2, 1956.

3. Б.М. Левитан, Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье, УМН, т.6, в.2, I95I.

4. А.С. Сохин, Об одном классе операторов преобразования, Математическая физика и функциональный анализ, в. I, ФТИНТ АН УССР, Харьков, II7-I25, 1969.

ON ONE INTEGRAL REPRESENTATION OF HANKEL FUNCTION

A.S.Sohin.

The paper considers an integral transformation converting the functions $e^{i\lambda x}$ (Im $\lambda \geqslant 0$, x > 0) into Hankel functions.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1972 выпуск III

О РОСТЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.А. Ткаченко

Рассмотрим в комплексной плоскости обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z)+p_{n-2}(z)y^{(n-2)}(z)+\ldots+p_0(z)y(z)=\lambda^n y(z) \qquad (n\geqslant 2), \tag{I}$$

в котором $p_0(z),\ldots,p_{n-2}(z)$ - полиномы степеней $m_0,\ldots,m_{n-2}$ соответственно, а λ - произвольный комплексный параметр. Пусть $y_1(z,\lambda),\ldots,y_n(z,\lambda)$ - фундаментальная система решений уравнения (I), определяемая единичной матрицей начальных условий

$$y_k^{(m)}(0,\lambda)=\delta_{k,m+1} \quad (m=0,1,\ldots,n-1;\ k=1,\ldots,n). \tag{2}$$

Очевидно, функции этой системы - целые по z и λ.

Ж. Валирон показал [I], что всякое трансцендентное решение уравнения (I) при фиксированном значении λ имеет рост не выше нормального типа при конечном порядке. Наибольший возможный порядок роста оказывается одинаковым для всех λ (кроме, быть может, одного) и находится по формуле

$$\rho=\max_{0\leqslant k\leqslant n-2}\frac{m_k-k+n}{n-k}, \tag{3}$$

из которой, между прочим, следует, что $\rho\geqslant 1$.

При изучении спектральных задач, связанных с уравнением (I) [2], этих сведений о росте решений оказывается недостаточно: здесь нужна оценка роста системы $y_1(z,\lambda),\ldots,y_n(z,\lambda)$, равномерная по z и λ. Цель настоящей работы состоит в выводе такой оценки. Будет доказана

Т Е О Р Е М А. Пусть в уравнении (I) $p_0(z),\ldots,p_{n-2}(z)$ - полиномы степеней m_0, $m_1,\ldots,m_{n-2}$ соответственно и пусть число ρ определено равенством (3). Тогда фундаментальная система $\{y_k(z,\lambda)\}_1^n$ уравнения (I), нормированная условиями (2), удовлетворяет при всех достаточно больших значениях $|z|$ и $|\lambda|$ оценкам

$$|y_k(z,\lambda)|\leqslant|\lambda|^{C|z|^\rho}e^{C|\lambda z|},$$

в которых постоянная C не зависит от z и λ.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Примем для определенности $k=n$. Если положить

$$l[y(z)]=-p_{n-2}(z)y^{(n-2)}(z)-\ldots-p_0(z)y(z)+\lambda^n y(z),$$

то из (I) следует

$$y_n(z,\lambda)=K(z)+\int_0^z K(z-\zeta)\,l\,[y_n(\zeta,\lambda)]\,d\zeta, \tag{4}$$

где
$$K(z)=\frac{z^{n-1}}{\Gamma(n)}.$$

Итерируя (4), получаем для $y_n(z,\lambda)$ разложение
$$y_n(z,\lambda)=K(z)+\sum_{m=1}^{\infty}Y_m(z,\lambda),$$
в котором
$$Y_m(z,\lambda)=\int_0^z K(z-\zeta_1)\,d\zeta_1\,\ell\Big[\int_0^{\zeta_1}K(\zeta_1-\zeta_2)\,d\zeta_2\ldots\ell\Big[\int_0^{\zeta_{m-1}}K(\zeta_{m-1}-\zeta_m)\,\ell[K(\zeta_m)]\,d\zeta_m\ldots\Big]. \quad (5)$$

Очевидно, $Y_m(z,\lambda)$ – полином, который представляется в виде
$$Y_m(z,\lambda)=\sum_{r=0}^{m}\mathcal{P}_{r,m}(z)\,\lambda^{2n}.$$

Поэтому
$$y_n(z,\lambda)=K(z)+\sum_{r=0}^{\infty}Q_r(z)\,\lambda^{rn},$$

где
$$Q_r(z)=\sum_{m=r}^{\infty}\mathcal{P}_{r,m}(z).$$

Прежде всего мы займемся оценкой полиномов $\mathcal{P}_{r,m}(z)$. Поскольку операция ℓ содержит производные не выше n-2-го порядка, отсюда следует
$$Y_m(z,\lambda)=\int_0^z K(z-\zeta_1)\,d\zeta_1\int_0^{\zeta_1}\ell[K(\zeta_1-\zeta_2)]\,d\zeta_2\ldots\int_0^{\zeta_{m-1}}\ell[K(\zeta_{m-1}-\zeta_m)]\,\ell[K(\zeta_m)]\,d\zeta_m,$$
причем в каждом из выражений $\ell[K(\zeta_i-\zeta_{i+1})]$ операция ℓ применяется по первому аргументу.

Разобъем множество чисел I,..., m на две части $\{\kappa_j\}_1^r$ и $\{\kappa_j\}_{r+1}^m$, упорядочив каждую из них по возрастанию: $\kappa_1<\kappa_2<\ldots<\kappa_r$; $\kappa_{r+1}<\kappa_{r+2}<\ldots<\kappa_m$. Каждому такому разбиению отвечает слагаемое из (5) вида $(-1)^{m-r}\lambda^{nr}J_m(z;\{\kappa_j\}_1^r)$ при
$$J_m(z;\{\kappa_j\}_1^r)=\int_0^z K(z-\zeta_1)\,d\zeta_1\int_0\ldots\int_0^{\zeta_{m-1}}\prod_{j=1}^{r}K(\zeta_{\kappa_j}-\zeta_{\kappa_j+1})\prod_{j=r+1}^{m}\sum_{i=0}^{n-2}p_i(\zeta_{\kappa_j})\frac{(\zeta_{\kappa_j}-\zeta_{\kappa_j+1})^{n-i-1}}{\Gamma(n-i)}\,d\zeta_2\ldots d\zeta_m,$$

где следует считать $\zeta_{m+1}=0$. Последний интеграл представляет сумму $(n-1)^{m-r}$ слагаемых вида
$$\mathcal{L}_m(z;\{\kappa_j\}_1^r;\{i_j\}_{r+1}^m)=\int_0^z K(z-\zeta_1)\,d\zeta_1\int_0^{\zeta_1}\ldots\int_0^{\zeta_{m-1}}\prod_{j=1}^{r}K(\zeta_{\kappa_j}-\zeta_{\kappa_j+1})\prod_{j=r+1}^{m}p_{i_j}(\zeta_{\kappa_j})\frac{(\zeta_{\kappa_j}-\zeta_{\kappa_j+1})^{n-i_j-1}}{\Gamma(n-i_j)}\,d\zeta_2\ldots d\zeta_m, \quad (6)$$

в каждом из которых набор $\{i_j\}_{r+1}^m$ выбран (быть может с повторениями) из совокупности чисел 0,I,..., n-2. По условию теоремы
$$p_\kappa(z)=\sum_{j=0}^{m_\kappa}A_{\kappa j}z^j \qquad (A_{\kappa j}=const).$$

Благодаря этому выражение (6) представляется в виде суммы некоторого числа интегралов
$$I_m(z;\{\kappa_j\}_1^r;\{i_j\}_{r+1}^m;\{q_j\}_{r+1}^m)= \quad (7)$$
$$=\prod_{j=r+1}^{m}A_{i_jq_j}\int_0^z K(z-\zeta_1)\,d\zeta_1\int_0^{\zeta_1}\ldots\int_0^{\zeta_{m-1}}\prod_{j=1}^{r}\frac{(\zeta_{\kappa_j}-\zeta_{\kappa_j+1})^{n-1}}{(n-1)!}\prod_{j=r+1}^{m}\zeta_{\kappa_j}^{q_j}\frac{(\zeta_{\kappa_j}-\zeta_{\kappa_j+1})^{n-i_j-1}}{\Gamma(n-i_j)}\,d\zeta_2\ldots d\zeta_m,$$

причем каждый из них определяется набором чисел $\{q_j\}_{z+1}^{m}$, для которых $0 \leqslant q_j \leqslant m_{i_j}$ $(j = z+1, \ldots, m)$. Из (3) следует, что $m_\kappa \leqslant (\rho-1)(n-\kappa) \leqslant n\rho$ и, стало быть, количество интегралов (7) не превышает $(n\rho+1)^{m-z}$. Каждый из них легко вычисляется. Действительно, имеем:

$$I_m(z;\{\kappa_j\}_1^z;\{i_j\}_{z+1}^m;\{q_j\}_{z+1}^m) =$$

$$= \prod_{j=z+1}^{m} A_{i_j q_j} \int_0^z \frac{(z-\zeta_1)^{n-1}}{\Gamma(n)} d\zeta_1 \int_0^{\zeta_1} \ldots \int_0^{\zeta_{m-1}} \prod_{j=1}^{m} \frac{(\zeta_j-\zeta_{j+1})^{n-\bar{i}_j-1}}{\Gamma(n-\bar{i}_j)} \zeta_j^{\bar{q}_j} d\zeta_2 \ldots d\zeta_m, \tag{8}$$

где

$$\bar{i}_{\kappa_j} = \begin{cases} 0 \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant z, \\ i_j \text{ при } z < j \leqslant m; \end{cases} \qquad \bar{q}_{\kappa_j} = \begin{cases} 0 \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant z, \\ q_j \text{ при } z \leqslant j \leqslant m. \end{cases}$$

Из (8) следует:

$$I_m(z;\{\kappa_j\}_1^z;\{i_j\}_{z+1}^m;\{q_j\}_{z+1}^m) = \prod_{j=z+1}^{m} A_{i_j q_j} \gamma_m z^{\alpha_m},$$

при
$$\alpha_m = \alpha_m(\{\kappa_j\}_1^z;\{i_j\}_{z+1}^m;\{q_j\}_{z+1}^m) = n + \sum_{j=1}^{m}(n-\bar{i}_j+\bar{q}_j) = n(z+1) + \sum_{j=z+1}^{m}(n-i_j-q_j)$$

и

$$\gamma_m = \gamma_m(\{\kappa_j\}_1^z;\{i_j\}_{z+1}^m;\{q_j\}_{z+1}^m) = \frac{\Gamma(\alpha_m+1)\,\Gamma(\sum_{j=2}^{m}(n-\bar{i}_j+\bar{q}_j)+q_1+1)}{\Gamma(n+\alpha_m+1)\,\Gamma(\sum_{j=1}^{m}(n-\bar{i}_j+\bar{q}_j)+1)} \cdots$$

$$\cdots \frac{\Gamma(n-\bar{i}_m+\bar{q}_m+\bar{q}_{m-1}+1)\,\Gamma(\bar{q}_m+1)}{\Gamma(\sum_{j=m-1}^{m}(n-\bar{i}_j+\bar{q}_j)+1)\,\Gamma(n-\bar{i}_m+\bar{q}_m+1)}.$$

Так как $q_j \leqslant m_{i_j} \leqslant (\rho-1)(n-i_j)$, то $\alpha_m \leqslant n(z+1) + \rho\sum_{j=z+1}^{m}(n-i_j)$.
Далее,

$$\gamma_m \leqslant (\alpha_m+1)^n \left(\sum_{j=2}^{m}(n-\bar{i}_j+\bar{q}_j)+\bar{q}_1+1\right)^{-(n-\bar{i}_1)} \cdot$$
$$\cdot \left(\sum_{j=3}^{m}(n-\bar{i}_j+\bar{q}_j)+\bar{q}_2+1\right)^{-(n-\bar{i}_2)} \ldots (n-\bar{i}_m+\bar{q}_m+\bar{q}_{m-1}+1)^{-(n-\bar{i}_{m-1})}.$$

Поскольку $0 \leqslant \bar{i}_j \leqslant n-2$ и $\bar{q}_j \geqslant 0$, отсюда следует:*)

$$\gamma_m \leqslant C^m (m-2)^{-(n-\bar{i}_1)}(m-3)^{-(n-\bar{i}_2)} \ldots 2^{-(n-\bar{i}_{m-1})}.$$

Нетрудно проверить, что

*) Здесь и всюду в дальнейшем мы используем букву C для обозначения различных положительных постоянных.

$$\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\dots\left(1-\frac{m-2}{m}\right) \geq C^m \qquad (C>0).$$

Поэтому

$$\gamma_m \leq C^m m^{-\sum_{j=1}^{m}(n-i_j)} = C^m m^{-nz-\sum_{j=z+1}^{m}(n-i_j)}.$$

Следовательно,

$$\left|\mathcal{L}_m\left(z;\{k_j\}_1^z;\{i_j\}_{z+1}^m\right)\right| \leq \sum_{\{q_j\}} \left|I_m\left(z;\{k_j\}_1^z;\{i_j\}_{z+1}^m;\{q_j\}_{z+1}^m\right)\right| \leq$$

$$\leq C^m m^{-nz-\sum_{j=z+1}^{m}(n-i_j)} |z|^{n(z+1)+\rho\sum_{j=z+1}^{m}(n-i_j)}$$

и

$$\left|\mathcal{J}_m\left(z;\{k_j\}_1^z\right)\right| \leq \sum_{\{i_j\}} \left|\mathcal{L}_m\left(z;\{k_j\}_1^z;\{i_j\}_{z+1}^m\right)\right| \leq$$

$$\leq C^m m^{-nz} |z|^{n(z+1)} \sum_{\{i_j\}} \left(\frac{|z|^\rho}{m}\right)^{\sum_{j=z+1}^{m}(n-i_j)}.$$

Возьмем в качестве параметра суммирования в последней сумме $s=\sum_{j=z+1}^{m}(n-i_j)$. Очевидно, $2(m-z) \leq s \leq n(m-z)$. Всякое натуральное число s допускает представление в виде суммы $m-z$ слагаемых, каждое из которых выбирается из чисел $2,3,\dots,n$ не более чем $(n-2)^{m-z}$ способами. Значит,

$$\left|\mathcal{J}_m\left(z;\{k_j\}_1^z\right)\right| \leq C^m m^{-nz} |z|^{n(z+1)} \sum_{s=2(m-z)}^{n(m-z)} \left(\frac{|z|^\rho}{m}\right)^s.$$

Поскольку

$$\mathcal{P}_{z,m}(z) = \sum_{\{k_j\}} (-1)^{m-z} \mathcal{J}_m\left(z;\{k_j\}_1^z\right)$$

и количество слагаемых здесь не более чем 2^m, получаем:

$$\left|\mathcal{P}_{z,m}(z)\right| \leq C^m m^{-nz} |z|^{n(z+1)} \sum_{s=2(m-z)}^{n(m-z)} \left(\frac{|z|^\rho}{m}\right)^s.$$

с некоторой постоянной $C>0$. Возьмем теперь $\delta\,(0<\delta<1)$ настолько малым, что $C\delta^2<\frac{1}{2}$. Тогда

$$|\mathcal{P}_{z,m}(z)| \leq \begin{cases} C^z 2^{-m} m^{-nz} |z|^{n(z+1)} & \text{при} \quad m^{-1}|z|^\rho \leq \delta, \\ C^m |z|^n & \text{при} \quad \delta < m^{-1}|z|^\rho \leq \delta^{-1}, \\ C^m |z|^n m^{-nm} |z|^{\rho n m} & \text{при} \quad \delta^{-1} < m^{-1}|z|^\rho. \end{cases}$$

Теперь мы можем оценить функции $Q(z)\ (z \geq 0)$. Если $z^{-1}|z|^\rho \leq \delta$, то

$$|Q_r(z)| \le \sum_{m=r}^{\infty} |\mathcal{P}_{r,m}(z)| \le \sum_{m=r}^{\infty} C^r 2^{-m} m^{-nr} |z|^{n(r+1)} =$$
$$= C^r |z|^{n(r+1)} \sum_{m=r}^{\infty} 2^{-m} m^{-nr} \le C^r |z|^{n(r+1)} r^{-nr}.$$

Далее,

$$\sum_{\delta^{-1} \ge m^{-1}|z|^\rho > \delta} |\mathcal{P}_{r,m}(z)| \le \sum_{\delta^{-1} \ge m^{-1}|z|^\rho > \delta} C^m |z|^n \le C^{\delta^{-1}|z|^\rho} |z|^{\rho+n} \delta^{-1} \le e^{C|z|^\rho}$$

и, следовательно, при $\delta^{-1} > r^{-1}|z|^\rho > \delta$ получаем:

$$|Q_r(z)| \le \sum_{\delta^{-1} \ge m^{-1}|z|^\rho > \delta} |\mathcal{P}_{r,m}(z)| + \sum_{m^{-1}|z|^\rho \le \delta} |\mathcal{P}_{r,m}(z)| \le C^r |z|^{n(r+1)} r^{-nr} + e^{C|z|^\rho}.$$

Кроме того,

$$\sum_{m^{-1}|z|^\rho \ge \delta^{-1}} |\mathcal{P}_{r,m}(z)| \le \sum_{m \le \delta|z|^\rho} C^m |z|^n \left(\frac{|z|^\rho}{m}\right)^{nm} \le$$
$$\le C^{\delta|z|^\rho} |z|^n \delta |z|^\rho \max_{m \ge 1} \left(\frac{|z|^\rho}{m}\right)^{nm}.$$

Последний максимум достигается для $m = e^{-1}|z|^\rho$, откуда

$$\sum_{m^{-1}|z|^\rho \ge \delta^{-1}} |\mathcal{P}_{r,m}(z)| \le e^{C|z|^\rho}$$

при подходящем выборе постоянной $C > 0$. Отсюда при $r^{-1}|z|^\rho > \delta^{-1}$ следует:

$$|Q_r(z)| \le \Big(\sum_{m^{-1}|z|^\rho > \delta^{-1}} + \sum_{\delta < m^{-1}|z|^\rho \le \delta^{-1}} + \sum_{m^{-1}|z|^\rho \le \delta} \Big) |\mathcal{P}_{r,m}(z)| \le$$
$$\le C^r |z|^{n(r+1)} r^{-nr} + e^{C|z|^\rho}.$$

Итак, мы получили оценки

$$|Q_r(z)| \le \begin{cases} C^r |z|^{n(r+1)} r^{-nr} & \text{при} \quad r^{-1}|z|^\rho \le \delta, \\ C^r |z|^{n(r+1)} r^{-nr} + e^{C|z|^\rho} & \text{при} \quad r^{-1}|z|^\rho > \delta. \end{cases}$$

Теперь имеем:

$$|y_n(z,\lambda)| \le |K(z)| + \sum_{r=0}^{\infty} |Q_r(z)| |\lambda|^{rn} \le \frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} C^r |z|^{n(r+1)} r^{-nr} |\lambda|^{nr} + \sum_{r^{-1}|z|^\rho > \delta} e^{C|z|^\rho} |\lambda|^{nr} \le$$

$$\le \frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!} + |z|^n \sum_{r=0}^{\infty} C^r \left|\frac{\lambda z}{r}\right|^{nr} + e^{C|z|^\rho} |\lambda|^{n\delta^{-1}|z|^\rho} <$$

$$\le e^{C|\lambda z|} + e^{C|z|^\rho} |\lambda|^{C|z|^\rho} \le e^{C|\lambda z|} |\lambda|^{C|z|^\rho}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Валирон, Аналитические функции, ГИТТЛ, М., 1957.
2. В.А. Ткаченко, О разложении целой функции конечного порядка по корневым функциям одного дифференциального оператора. Математический сборник.

ON THE GROWTH OF THE SOLUTIONS OF THE LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH POLYNOMIAL COEFFICIENTS

V.A.Tkachenko

The ordinary differential equation

$$y^{(n)}(z) + P_{n-2}(z)\, y^{(n-2)}(z) + \dots + P_0(z)\, y(z) = \lambda^n y(z)$$

is considered where $P_0(z), \dots, P_{n-2}(z)$ are polynomials of the degrees $m_0, \dots, m_{n-2}$ correspondenly and λ is a complex parameter. It is proved that the fundamental system of the equation solution normed by a unit matrix of the initial conditions for $z = 0$ is satisfying the estimations

$$|y_k(z,\lambda)| \le |\lambda|^{C|z|^{\rho}} \exp C|\lambda z|,$$

for all sufficiently large values of $|\lambda|$ and $|z|$. The value of ρ is defined by

$$\rho = \max_{0 \le k \le n-2} \frac{m_k - k + n}{n-k}$$

and C is some positive constant.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1972 выпуск III

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ИЗОМЕТРИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Г.М. Фельдман

Пусть G – сепарабельная локально компактная абелева группа, G^* – ее группа характеров, T – сильно непрерывное изометрическое ($\|T_g\|=1$) представление*) группы G в банаховом пространстве X, $\sigma(T)$ – спектр представления T в смысле Ю.И. Любича [1], т.е. множество таких характеров $\chi\in G^*$, для каждого из которых существует нормированная последовательность векторов $\{x_n\}_1^\infty\subset X$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty}(T_g x_n-\chi(g)x_n)=0$$

для всех $g\in G$.

Из результатов работ [1] и [2] следует, что спектр представления не пуст и замкнут в G^*.

Характер χ мы будем называть собственным для представления T, если существует вектор $x_\chi\neq 0$ ("собственный вектор представления"), на котором

$$T_g x_\chi=\chi(g)x_\chi .$$

Множество собственных характеров мы будем называть дискретным спектром представления и обозначать через $\sigma_d(T)$ (очевидно, что $\sigma_d(T)\subset\sigma(T)$).

Предположим, что пространство X слабо полно и спектр $\sigma(T)$ счетен. Используя [3], можно показать, что в этом случае система собственных векторов представления полна, что в свою очередь влечет почти-периодичность всех функций $\varphi(T_g x)$ $(x\in X,\varphi\in X^*)$ на группе G. Пусть ряд Фурье-Бора функции $\varphi(T_g x)$ имеет вид

$$\varphi(T_g x)\sim\sum_\chi a_\chi(x,\varphi)\,\chi(g), \tag{1}$$

где

$$a_\chi(x,\varphi)=M\{\bar\chi(g)\,\varphi(T_g x)\}.$$

Для каждого $x\in X$ существует слабый предел

$$P_\chi x=M\{\bar\chi(g)T_g x\},$$

причем линейные операторы P_χ обладают следующими свойствами:

1) $\|P_\chi\|=1$, 2) $P_\chi^2=P_\chi$, т.е. P_χ – проектор, 3) $T_gP_\chi=P_\chi T_g$, 4) если $P_\chi\neq 0$, то P_χ проектирует на собственное подпространство, отвечающее характеру χ, 5) если $\chi_1\neq\chi_2$, то $P_{\chi_1}P_{\chi_2}=0$, 6) $a_\chi(x,\varphi)=\varphi(P_\chi x)$. Сопоставим каждому $x\in X$ формальный ряд

$$x\sim\sum_\chi P_\chi x. \tag{2}$$

---

*) Предположение об изометричности мы сохраняем на протяжении всей статьи, специально не оговаривая этого.

Основной вопрос, который нас будет интересовать, состоит в выяснении условий, при которых ряд (2) безусловно сходится. Вначале отметим следующее. Если предположить, что спектр представления $\sigma(T)$ является независимым множеством над кольцом целых чисел *), то, применяя известную теорему Хартмана и Рыль-Нардзевского [4], мы получим, что

$$\varphi(T_g x) = \sum_{\chi} a_{\chi}(x, \varphi)\, \chi(g), \tag{3}$$

причем ряд справа сходится абсолютно. Так как для числовых рядов абсолютная и безусловная сходимость эквивалентны,то, полагая в (3) $g = 0$ и учитывая произвольность $\varphi \in X^*$, получим, что ряд (2) сходится безусловно.

Для дальнейшего нам понадобится следующее определение.

Множеством Хелсона называется такое компактное подмножество группы характеров G^*, что любая непрерывная на нем функция является сужением преобразования Фурье некоторой функции из $L(G)$. Известно, что всякое независимое над кольцом целых чисел счетное множество характеров является множеством Хелсона [5].

Т Е О Р Е М А. Пусть пространство представления X слабо полно. Тогда, если спектр представления $\sigma(T)$ является счетным множеством Хелсона, то ряд (2) сходится безусловно.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Как уже было отмечено выше, из слабой полноты пространства и счетности спектра следует полнота системы собственных векторов представления. Для доказательства безусловной сходимости ряда (2) мы построим систему проекторов $\{P_J\}$ (J - конечное подмножество множества натуральных чисел N), обладающую следующими свойствами: I) $P_J x_{\chi_i} = x_{\chi_i}$, если $i \in J$, 2) $P_J x_{\chi_i} = 0$, если $i \bar{\in} J$, 3) $\| P_J \| \leqslant C$ для всех J. Из I) и 2) следует, что $P_J = \sum_{i \in J} P_{\chi_i}$, поэтому 3) обеспечивает безусловную сходимость ряда (2).

Обозначим через $C(\sigma(T))$ пространство непрерывных функций на спектре $\sigma(T)$. По определению множества Хелсона отображение $A: L(G) \to C(\sigma(T))$, определяемое как сужение преобразования Фурье функции $f \in L(G)$ на $\sigma(T)$, является отображением на все пространство $C(\sigma(T))$ и не увеличивает норму. Поэтому $C(\sigma(T))$ изоморфно фактор-пространству $L(G)/I$, где I - идеал всех функций из $L(G)$, преобразование Фурье которых равно нулю на $\sigma(T)$. Если ввести в фактор-пространстве $L(G)/I$ обычным образом норму

$$\| [f] \| = \inf_{\psi \in I} \| f + \psi \|,$$

то $L(G)/I$ становится банаховым пространством и A порождает взаимно однозначный не увеличивающий норму оператор из $L(G)/I$ на $C(\sigma(T))$. По теореме Банаха такой оператор имеет ограниченный обратный. Это означает, что существует такая константа $C > 0$, что если $\alpha(\chi) \in C(\sigma(T))$ и $\| \alpha(\chi) \| \leqslant 1$, то в $L(G)$ найдется такая функция f, что $Af = \alpha$ и

$$\| f \| \leqslant C. \tag{4}$$

Обозначим преобразование Фурье функции $f \in L(G)$ через $\tilde{f}(\chi)$, т.е.

$$\tilde{f}(\chi) = \int_G f(g)\, \chi(g)\, dg,$$

и определим "преобразование Фурье по представлению" $\tilde{f}_T$ следующим образом:

$$\tilde{f}_T = \int_G f(g)\, T_g\, dg.$$

Заметим теперь, что если на спектре $\sigma(T)$ $\tilde{f}_1(\chi) = \tilde{f}_2(\chi)$, то $(\tilde{f}_1)_T = (\tilde{f}_2)_T$. Действительно, пусть $\tilde{f}(\chi) = 0$ на $\sigma(T)$. Зафиксируем произвольный вектор $x \in X$ и произвольный функционал $\varphi \in X^*$. Тогда

$$\varphi(\tilde{f}_T x) = \int_G f(g)\, \varphi(T_g x)\, dg.$$

---

*) Т.е. из $\chi_1^{n_1}(g) \ldots \chi_k^{n_k}(g) = 1$ следует, что $n_1 = \ldots n_k = 0$.

Так как функция $\varphi(T_g x)$ почти-периодическая, то она равномерно аппроксимируется характерами, входящими в ее ряд Фурье-Бора. Легко видеть, что все такие характеры содержатся в $\sigma(T)$, и поэтому $\varphi(\tilde f_T x)=0$. Значит $\tilde f_T=0$. Это замечание позволяет нам корректно определить любую непрерывную функцию $a(\chi)$, заданную на спектре, от представления. А именно: положим $a(T)=\tilde f_T$, где $Af=a$. Учитывая (4), можно считать, что

$$\| a(T) \| = \| \tilde f_T \| \leq \| f \| \leq C \sup_{\chi\in\sigma(T)} |\tilde f(\chi)| = C\| a \|. \tag{5}$$

Пусть теперь $\{\chi_i\}_{i\in J}$ – конечный набор характеров из $\sigma(T)$. Рассмотрим последовательность замкнутых подмножеств $\{Q_n\}$ в $\sigma(T)$, обладающих следующими свойствами: I) $Q_{n+1}\subset Q_n$, 2) $\bigcap_n Q_n=\{\chi_i\}_{i\in J}$, 3) $\sigma(T)\setminus Q_n$ и Q_n имеют непересекающиеся окрестности. В силу счетности спектра такие подмножества всегда найдутся. Положим

$$a_n(\chi)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad \chi\in Q_n, \\ 0 & \text{при} \quad \chi\in\sigma(T)\setminus Q_n. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $a_n(\chi)$ непрерывна на спектре $\sigma(T)$. По построению последовательность операторов $a_n(T)$ сходится на каждом собственном векторе к проектору $P_J=\sum_{i\in J} P_{\chi_i}$. Из полноты системы собственных векторов и (5) следует, что сходимость имеет место на любом векторе $x\in X$. Из (5) следует также, что $\| P_J \| \leq C$. Теорема доказана.

Полученная теорема точна в следующем смысле. Если компактное счетное множество E не является множеством Хелсона, то можно построить представление группы G в некотором банаховом пространстве такое, что его спектр совпадает с E, система собственных векторов полна, но собственные подпространства не образуют безусловного базиса.

Для доказательства рассмотрим на группе G^* меру $d\mu$ с носителем в E и две нормы

$$\| d\mu \|_1 = \int_E |d\mu(\chi)|$$

и

$$\| d\mu \|_2 = \sup_{g\in G} \left| \int_G \chi(g)\, d\mu(\chi) \right|.$$

Оказывается, имеет место следующий результат. Для того чтобы множество E являлось множеством Хелсона, достаточно, чтобы для всякой меры $d\mu$ с носителем в E нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ были эквивалентны [5]. Так как $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$, то в случае, если E не множество Хелсона, можно указать такую последовательность мер $\{d\mu_n\}$ с носителями в E, что $\| d\mu_n \|_2 = 1$, а $\lim_{n\to\infty} \| d\mu_n \|_1 = \infty$. Положим $f_n(g)=\int_G \chi(g) d\mu_n(\chi)$. Если E счетно, то $f_n(g)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(n)} \chi_k(g)$, причем $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k^{(n)}| = \| d\mu_n \|_1 < \infty$. Пусть X – множество всех почти-периодических функций, характеры ряда Фурье которых содержатся в E. Относительно равномерной нормы X является банаховым пространством. Из сказанного следует, что X содержит функцию f_0, ряд Фурье-Бора которой не является абсолютно сходящимся. Действительно, если допустить противное, то в X можно ввести новую норму, а именно, для каждой функции $f\in X$ ее сумму модулей коэффициентов ряда Фурье-Бора. Очевидно, что в новой норме X также является банаховым пространством. Так как обе нормы сравнимы, то они эквиваленты. Но это противоречит существованию последовательности $\{f_n(g)\}$.

Рассмотрим теперь в X представление группы G сдвигами

$$(T_g f)(h) = f(g+h).$$

Очевидно, что $\sigma_d(T)=E$ и система собственных векторов представления полна. Нетрудно показать также, что $\sigma(T)=E$. Для каждой функции $f\in X$ ряд (2) представляет собой ее ряд Фурье-Бора. Если бы он всегда безусловно сходился, то, следовательно, для любой функции $f\in X$ ее ряд Фурье-Бора сходился бы абсолютно, что, как показано, невозможно.

В заключение я благодарю Ю.И. Любича и В.Э. Кацнельсона за полезные обсуждения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Ю.И. Любич, О спектре представления топологической абелевой группы, ДАН СССР, т. 200, № 4, 777-780, I97I.

2. Ю.И. Любич, В.И. Мацаев, Г.М. Фельдман, Об отделимости спектра представления локально компактной абелевой группы, ДАН СССР, т. 20I, № 6, 1282-I284, I97I.

3. Г.М. Фельдман, К спектральной теории представлений локально компактных абелевых групп, Функциональный анализ, т. 6, вып. I, 89, I972.

4. S. Hartman, C. Ryll-Nardzewski, Théorémes abstraits de Kronecker et les fonctions presque périodiques, Studia math., 13, n°2, 296-310, 1953.

5. I.P. Kahane, Transformées de Fourier des fonctions sommables, "Proc. Internat. Congr. Math. Aug. I962, Djursholm", Uppsala, II4-I3I, 1963.

ON BASIS PROPERTY FOR THE SYSTEM OF PROPER SUBSPACES OF ISOMETRIC REPRESENTATION

G.M. Feldman.

It is proved that if the spectrum of the representation of the locally compact Abelian group in a weakly complete space is a countable Helson set, the proper subspaces constitute an absolute basis.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1972 выпуск Ш

О СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ НЕКВАЗИАНАЛИТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Г.М. Фельдман

§ I. Эквивалентность различных определений спектрального подпространства.

Линейный ограниченный оператор T в банаховом пространстве X называется неквазианалитическим [I], если

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln \|T^n\|}{1+n^2} < \infty .$$

Спектр неквазианалитического оператора лежит на единичной окружности C. В работе Ю.И.Любича и В.И. Мацаева [I] было установлено, что каждому компакту $K \subset C$ отвечает подпространство $L(K)$, спектральное в том смысле, что I. $L(K)$ инвариантно относительно T, 2. $\sigma(T|L(K)) \subset \sigma(T) \cap K$, 3. $Int\,(\sigma(T)\cap K) \subset \sigma(T|L(K))$, 4. Если L инвариантно относительно T и $\sigma(T|L) \subset K$, то $L \subset L(K)$.

В заметке автора [2] было дано другое, эквивалентное, описание спектральных подпространств, использующее понятие спектра Берлинга. Спектром Берлинга ограниченной последовательности $a=\{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ называется множество $\sigma(a)$ тех точек $\lambda \in C$, для которых последовательность $\{\lambda^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ принадлежит ℓ' - замкнутому подпространству пространства ℓ^{∞} — порожденному последовательностью a и всеми ее сдвигами. Аналогично можно определить спектр Берлинга последовательности, ограниченной относительно некоторого веса.

Пусть T - неквазианалитический оператор. Для каждого вектора $x \in X$ и каждого линейного функционала $\varphi \in X^*$ рассмотрим спектр Берлинга $\sigma_{\varphi,x}$ последовательности $\{\varphi(T^n x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Т Е О Р Е М А I. [2]. Имеет место равенство

$$L(K) = \{ x \mid \bigcup_{\varphi} \sigma_{\varphi,x} \subset K \} .$$

Это равенство можно рассматривать как новое определение спектрального подпространства, эквивалентное прежнему.

Еще одно определение, широко распространенное в литературе (см., например, [3], [4]), таково: спектральное подпространство $\hat{L}(K)$ состоит из тех $x \in X$, для которых функция $R_\lambda(T)x$ ($R_\lambda(T)$ - резольвента оператора T) аналитически продолжается через точки дополнения $C\setminus K$. Оказывается, что это определение также эквивалентно сформулированным выше определениям.

Т Е О Р Е М А 2. Имеет место равенство

$$L(K) = \hat{L}(K).$$

Для доказательства мы используем теорему I и следующий результат В.П. Гурария [5]. Пусть p_n $(n=0,\pm1,\dots)$ - вес, удовлетворяющий условиям $p_n \geqslant 1$, $p_{n+m} \leqslant p_n \cdot p_m$ и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln p_n}{1+n^2} < \infty .$$

Тогда для любой последовательности $\{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ из пространства ℓ_ρ^∞ ее спектр Берлинга совпадает с множеством особенностей аналитической функции

$$A(\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda^n\alpha_{-(n+1)} & \text{при} \quad |\lambda|<1,\\ -\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\lambda^n\alpha_{-(n+1)} & \text{при} \quad |\lambda|>1.\end{cases}$$

Для наших целей следует положить $\rho_n=\|T^n\|$, $\alpha_n=\varphi(T^n x)\ (x\in X, \varphi\in X^*)$. Тогда $A(\lambda)=\varphi(R_\lambda(T)x)$, поскольку

$$R_\lambda(T)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda^n T^{-(n+1)} & \text{при} \quad |\lambda|<1,\\ -\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\lambda^n T^{-(n+1)} & \text{при} \quad |\lambda|>1.\end{cases} \qquad (I)$$

Если функция $R_\lambda(T)_x$ аналитически продолжается через $C\setminus K$, то этим свойством обладает и $A(\lambda)$. Следовательно, $\sigma_{\varphi,x}\subset K$. Ввиду произвольности функционала $\varphi\in X^*$, имеет место включение $\hat{L}(K)\subset L(K)$. Обратное включение вытекает непосредственно из условия 2, входящего в определение спектрального подпространства $L(K)$.

Отметим, что несколько иной подход к понятию спектрального подпространства был предложен Фояшем [6] (см. также [7]). Этот подход также эквивалентен изложенному в классе неквазианалитических операторов.

§ 2. Спектральные подпространства изометрических операторов в ℓ^1.

Линейный ограниченный оператор T в банаховом пространстве X мы будем называть изометрическим, если для любого вектора $x\in X$ норма $\|Tx\|=\|x\|$. Очевидно, что это условие эквивалентно следующему: норма $\|T^n\|=1\quad(n=0,\pm1,\dots)$. Поэтому изометрический оператор является неквазианалитическим, и для него имеет смысл понятие спектрального подпространства. Представляет интерес следующий вопрос: каким должен быть компакт K, чтобы спектральное подпространство $L(K)=0$. В работе [4] А.К. Китовер изучил спектральные подпространства $\hat{L}(K)$ изометрического оператора в пространстве $C_{[0,1]}$ непрерывных функций на отрезке [0,I]. Ограничиваясь случаем, когда у оператора T отсутствуют собственные векторы, мы сформулируем полученный им результат. Для того, чтобы спектральное подпространство $\hat{L}(K)=0$, необходимо и достаточно, чтобы компакт K являлся множеством единственности для тригонометрических рядов [8].

Общая теорема Ю.И. Любича и В.И. Мацаева [I] гарантирует нетривиальность спектрального подпространства $L(K)$ для произвольного неквазианалитического оператора T в случае,если пересечение $\sigma(T)\cap K$ имеет внутреннюю точку относительно спектра $\sigma(T)$. Результат А.К. Китовера показывает, что это достаточное условие является весьма грубым. На наш взгляд, представляет интерес тот факт, что для изометрического оператора в пространстве суммируемых последовательностей ℓ^1 условие Ю.И. Любича и В.И. Мацаева нетривиальности спектрального подпространства является по существу необходимым.

Как известно ([9] , стр. I52), любой изометрический оператор T в ℓ^1 имеет вид

$$T\{C_k\}_{k=-\infty}^{\infty}=\{\lambda_k C_{\rho(k)}\}_{k=-\infty}^{\infty},$$

где $|\lambda_k|=1$, а ρ -некоторое взаимно однозначное отображение множества Z целых чисел на себя.

Зафиксируем произвольное целое число k и рассмотрим его орбиту в Z, т.е. множество $\rho^n(k)\quad(n=0,\pm1,\dots)$. Очевидно, что любые две орбиты либо не пересекаются, либо совпадают. Тем самым множество Z представляется в виде объединения непересекающихся орбит. Орбиты, состоящие из конечного числа элементов, мы будем обозначать через A_i, а состоящие из бесконечного числа элементов - через B_j. Пусть $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ - естественный базис в ℓ^1. Для каждого базисного вектора e_k можно рассмотреть его орбиту, т.е. множество $e_{\rho^n(k)}$ $(n=0,\pm1,\dots)$. Если эта орбита конечна, то естественный проектор на подпространство, натянутое на базисные векторы, входящие в орбиту, обозначим через $P(A_i)$, а если орбита бесконечна, то – через $P(B_j)$. Обозначим также через X_i образ проектора $P(A_i)$ и через Y_j образ проектора $P(B_j)$. По построению проекторы $P(A_i)$ и $P(B_j)$ перестановочны с оператором T. Поэтому подпространства X_i и Y_j инвариантны относительно T. Отметим также, что по построению проекторов $P(A_i)$ и $P(B_j)$ система подпространств X_i и Y_j полна в ℓ^1.

Пространство X_i конечномерно. Положим $n_i = dim\, X_i$. Легко видеть, что базис в можно выбрать следующим образом:

$$\{e_k, e_{\rho(k)}, \dots, e_{\rho^{n_i-1}(k)}\}.$$

Оператор T в этом базисе имеет вид

$$Te_k = \lambda_k e_{\rho(k)};$$
$$Te_{\rho(k)} = \lambda_{\rho(k)} e_{\rho^2(k)};$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$Te_{\rho^{n_i-1}(k)} = \lambda_{\rho^{n_i-1}(k)} e_k.$$

Несложный подсчет показывает, что оператор T/X_i имеет n_i различных собственных значений $\gamma_i, \gamma_i\omega, \dots, \gamma_i\omega^{n_i-1}$, где $|\gamma_i|=1$ и ω – первообразный корень степени n_i из 1. Отметим, что система собственных векторов оператора T/X_i полна.

Подпространство Y_i бесконечномерно. В нем можно выбрать естественный базис $\{e_{\rho^n(k)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Оператор T в этом базисе имеет вид

$$Te_{\rho^n(k)} = \lambda_{\rho^n(k)} e_{\rho^{n+1}(k)} \qquad (n=0, \pm 1, \dots).$$

Мы видим, что T/Y_j является так называемым оператором взвешенного сдвига ([10], стр.53). Нетрудно проверить, что спектр $\sigma(T/Y_j)$ совпадает с единичной окружностью C и у оператора T/Y_j отсутствуют собственные векторы. Изучение оператора T/Y_j можно свести к изучению оператора сдвига S в ℓ^1 $(Se_k = e_{k+1})$, однако мы не будем этим пользоваться, так как это по существу не вносит никаких упрощений.

Для дальнейшего нам понадобится следующая общая

Л Е М М А I. Пусть T – неквазианалитический оператор в банаховом пространстве X. Если оператор H перестановочен с T, то каждое спектральное подпространство $L(K)$ оператора T инвариантно относительно H.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Рассмотрим последовательность $\{\varphi(T^n Hx)\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Имеем:

$$\varphi(T^n Hx) = \varphi(HT^n x) = (H^*\varphi)(T^n x).$$

Поэтому

$$\sigma_{\varphi, Hx} = \sigma_{H^*\varphi, x}. \tag{2}$$

Если $x \in L(K)$, то из теоремы следует, что $\sigma_{H^*\varphi,x} \subset K$ для всех $\varphi \in X^*$. Отсюда, учитывая (2), получаем, что $\sigma_{\varphi,Hx} \subset K$ для всех $\varphi \in X^*$. Из теоремы I тогда следует, что $Hx \in L(K)$. Лемма доказана.

Мы будем говорить, что изометрический оператор T в ℓ^1 имеет тип I, если все проекторы $P(B_j)=0$, тип II, если все проекторы $P(A_i)=0$, тип III, если при некоторых j_0 и i_0 проекторы $P(B_{j_0}) \neq 0$ и $P(A_{i_0}) \neq 0$.

Каждый изометрический оператор T в ℓ^1 является оператором одного из указанных трех типов.

Т Е О Р Е М А 3. Пусть изометрический оператор T в ℓ^1 имеет тип I. Для того чтобы спектральное подпространство $L(K)$ оператора T было не нулевым, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одно собственное значение оператора T содержалось в K.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть μ – собственное значение оператора T и $\mu \in K$. Тогда соответствующий μ собственный вектор, как следует, например, из теоремы I, лежит в

$L(K)$. Пусть теперь вектор $x \in L(K)$, $x \neq 0$. Проекцию $P(A_i)x$ вектора x обозначим через x_i . По лемме I все проекции x_i лежат в $L(K)$. Поскольку система подпространств X_i полна в ℓ^1 , то хотя бы при одном $i = i_0$ проекция $x_{i_0} \neq 0$. Спектр сужения $\sigma(T/X_{i_0}) = \{\gamma_{i_0}, \gamma_{i_0}\omega, \dots, \gamma_{i_0}\omega^{n_{i_0}-1}\}$. Легко видеть, что имеет место включение $\sigma_{\varphi, x_{i_0}} \subset \sigma(T/X_{i_0})$ . . Значит спектр Берлинга $\sigma_{\varphi, x_{i_0}}$ состоит из собственных значений оператора T . Но по теореме I имеет место включение $\sigma_{\varphi, x_{i_0}} \subset K$. Поэтому хотя бы одно собственное значение оператора T принадлежит K .

В следующей теореме дано описание спектральных подпространств изометрического оператора T типа II в ℓ^1 .

Т Е О Р Е М А 4. Пусть изометрический оператор T в ℓ^1 имеет тип П. Для того, чтобы спектральное подпространство $L(K)$ оператора T было не нулевым, необходимо и достаточно, чтобы компакт K содержал внутреннюю точку.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Так как спектр $\sigma(T)$ оператора T типа П совпадает с , то достаточность следует из теоремы Ю.И. Любича и В.И. Мацаева [I] . Для доказательства необходимости рассмотрим вектор $y = \{C_\kappa\}_{\kappa=-\infty}$ из подпространства $L(K)$. Хотя бы при одном $j = j_0$ проектор $P(B_{j_0}) \neq 0$. По лемме 2 все проекции $y_j = P(B_j)y$ лежат в $L(K)$. Рассмотрим в ℓ^1 семейство функционалов $\{\varphi_i\}$ $(j = 0, \pm 1, \dots)$.

$$\varphi_j \{C_\kappa\}_{\kappa=-\infty}^{\infty} = C_j .$$

Пусть $\ell \in B_{j_0}$, тогда легко видеть, что

$$\varphi_\ell (T^{-(n+1)} P(B_{j_0}) y) = C_{\rho^{(n+1)}(\ell)} \Delta_{n,\ell} ,$$

где $\Delta_{n,\ell} = \begin{cases} \lambda^{-1}_{\rho^n(\ell)} \cdots \lambda^{-1}_{\rho(\ell)} \lambda^{-1}_{\ell} & \text{при } n \geqslant 0, \\ \lambda_{\rho^{n+1}(\ell)} \cdots \lambda_{\rho^{-2}(\ell)} \lambda_{\rho^{-1}(\ell)} & \text{при } n \leqslant -1 \end{cases}$ имеем:

$$\varphi_\ell (R_\lambda(T) y_{j_0}) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n C_{\rho^{(n+1)}(\ell)} \Delta_{n,\ell} & \text{при } |\lambda| < 1, \\ -\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} \lambda^n C_{\rho^{(n+1)}(\ell)} \Delta_{n,\ell} & \text{при } |\lambda| > 1. \end{cases}$$

Так как $\ell \in B_{j_0}$ и орбита B_{j_0} бесконечна, то все целые числа $\rho^n(\ell)$ различны, и поэтому последовательность $\{C_{\rho^{(n+1)}(\ell)}\}_{n=-\infty}$ суммируема. В окрестности каждой точки дополнения функции $\varphi_\ell(R_\lambda(T)y_{j_0})$ аналитичны, Значит на $C \setminus K$

$$\Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{\rho^{(n+1)}(\ell)} \Delta_{n,\ell} e^{int} = 0 .$$

Если у компакта K нет внутренних точек, то

$$\Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{\rho^{(n+1)}(\ell)} \Delta_{n,\ell} e^{int} \equiv 0 ,$$

так как функция $\Phi(t)$ непрерывна на окружности . Отсюда следует, что $C_{\rho^n(\ell)} = 0$ $(n = 0, \pm 1, \dots)$, т.е. $y_{j_0} = 0$ вопреки предположению. Теорема 4 доказана.

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы спектральное подпространство $L(K)$ оператора T типа Ш было не нулевым, легко следует из теорем 3 и 4.

§ 3. Изометрический оператор с максимальным набором спектральных подпространств.

Пусть T - изометрический оператор в банаховом пространстве X . Спектр T совпадает с единичной окружностью C , и T не имеет собственных векторов. Каждому компакту $K \subset C$ отвечает спектральное подпространство $L(K)$. Мы хотим, чтобы множество тех компактов K , которым отвечают нетривиальные спектральные подпространства, было максимальным из возможных. Отметим, что если подпространство $L(K) \neq 0$, то компакт K не может состоять из счетного множества точек, так как тогда (см.,например, [II]) в подпространстве $L(K)$ нашелся бы собственный вектор оператора T. Это показывает, что при отсутствии у оператора собственных векторов, для того чтобы спектральное подпространство $L(K)$ было нетривиальным, необходимо, чтобы компакт содержал не пустое совершенное подмножество. Поэтому нам кажется интересной следующая

Т Е О Р Е М А 5. Существует оператор T в банаховом пространстве X, не имеющий собственных векторов, для которого любое спектральное подпространство $L(K)$ нетривиально, если K содержит непустое совершенное подмножество.

Для построения указанного в теореме 5 оператора T нам понадобится ряд предварительных результатов.

Рассмотрим в пространстве ℓ^∞ всех ограниченных последовательностей оператор сдвига S

$$Sg = S\{g_K\}_{K=-\infty}^{\infty} = \{g_{K+1}\}_{K=-\infty}^{\infty}.$$

Л Е М М А 2. Спектральные подпространства $L_S(K)$ оператора S имеют следующий вид:

$$L_S(K) = \{g \in \ell^\infty / \sigma(g) \subset K\},$$

где $\sigma(g)$ - спектр Берлинга последовательности g.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть последовательность $g = \{g_K\}_{K=-\infty}^{\infty}$ лежит в $L_S(K)$. Рассмотрим в пространстве ℓ^∞ семейство функционалов $\{\varphi_j\}$ $(j = 0, \pm 1, \ldots)$

$$\varphi_j \{g_K\}_{K=-\infty}^{\infty} = g_j.$$

По теореме I имеет место включение $\sigma_{\varphi_j, g} \subset K$. Но

$$\varphi_j(T^n g) = g_{j+n}. \tag{3}$$

Поэтому спектр Берлинга $\sigma_{\varphi_0, g_\infty} = \sigma(g) \subset K$. Пусть теперь известно, что спектр Берлинга последовательности $g = \{g_K\}_{K=-\infty}$ принадлежит $L(K)$. Рассмотрим представление (I) резольвенты $R_\lambda(S)$ оператора S. Учитывая (3), имеем:

$$\varphi_j(R_\lambda(S)g) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n g_{j-(n+1)} & \text{при} \quad |\lambda| < 1, \\ -\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} \lambda^n g_{j-(n+1)} & \text{при} \quad |\lambda| > 1. \end{cases} \tag{4}$$

Так как спектр Берлинга $\sigma(g) \subset K$, то из цитированной теоремы В.П. Гурария следует, что все функции $\varphi_j(R_\lambda(S)g)$ аналитичны в дополнении $C \setminus K$. Предположим пока, что функция $R_\lambda(S)g$ непрерывна. Тогда из аналитичности семейства скалярных функций $\varphi_j(R_\lambda(S)g)$ обычным образом будет следовать, что и векторозначная функция $R_\lambda(S)g$ аналитична в $C \setminus K$. Поэтому по теореме 2 $g \in L_S(K)$. Таким образом, для завершения доказательства леммы 2 нам остается установить, что функция $R_\lambda(S)g$ непрерывна. Для семейства функций $\varphi_j(R_\lambda(S)g)$ $(j = 0, \pm 1, \ldots)$ из (4) следует оценка

$$|\varphi_j(R_\lambda(S)g)| \leqslant \frac{\|g\|}{|1 - |\lambda||} \qquad (j = 0, \pm 1, \ldots). \tag{5}$$

Зафиксируем произвольную точку $e^{it_0} \in C \setminus K$. Окрестность этой точки, в которой все функции $\varphi_j(R_\lambda(S)g)$ аналитичны, обозначим через $\mathcal{U}$. Из (5) по теореме Левинсона [I2] следует *), что существует такая окрестность $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ точки e^{it_0}, в которой выполняется неравенство

$$|\varphi_j(R_\lambda(S)g)| < C_1 \qquad (j = 0, \pm 1, \ldots)$$

(C_1 - некоторая постоянная). Тогда в некоторой окрестности $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$ точки e^{it_0} равномерно

---

*) А также легко может быть доказано непосредственно.

ограничены производные

$$|(\varphi_j(R_\lambda(S)g))'| < C_2 \qquad (j=0,\pm 1,\dots).$$

Поэтому для точек $\lambda \in \mathcal{U}_2$ имеем:

$$\left|\frac{\varphi_j(R_{\lambda+\Delta\lambda}(S)g) - \varphi_j(R_\lambda(S)g)}{\Delta\lambda}\right| < C_3 \qquad (j=0,\pm 1,\dots).$$

Поэтому

$$\|R_{\lambda+\Delta\lambda}(S)g - R_\lambda(S)g\| < C_3\,|\Delta\lambda|,$$

т.е. функция $R_\lambda(S)g$ непрерывна в точках $\lambda \in \mathcal{U}_2$, и, таким образом, лемма 2 полностью доказана.

Рассмотрим подпространство AP в ℓ^∞, состоящее из всех почти -периодических последовательностей. Это подпространство инвариантно относительно оператора S. Оператор, который индуцирует S в фактор пространстве ℓ^∞/AP, обозначим через T.

Л Е М М А 3. Оператор T не имеет собственных векторов.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Элементы фактор-пространства ℓ^∞/AP мы будем обозначать через $[g]$. Предположим, что

$$T[g] = \lambda[g], \quad [g] \neq 0. \tag{6}$$

Пусть $g = \{g_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in [g]$.

Тогда из (6) имеем:

$$g_{k+1} - \lambda g_k = f_k,$$

где $f = \{f_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ – некоторая почти- периодическая последовательность. Делая замену $g_k = \lambda^k \nu_k$, получаем для последовательности $\nu = \{\nu_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ уравнение

$$\nu_{k+1} - \nu_k = \delta_k, \tag{7}$$

где $\delta_k = \dfrac{f_k}{\lambda^{k+1}}$. Из (7) легко следует, что

$$\nu_k = \begin{cases} \nu_0 + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta_i & \text{при} \quad k > 0, \\ \nu_0 - \sum\limits_{i=-1}^{k} \delta_i & \text{при} \quad k < 0. \end{cases}$$

Отсюда по дискретному аналогу теоремы Бора [13] получим, что $\nu = \{\nu_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ – почти-периодическая последовательность. Значит и $g = \{g_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ – почти-периодическая последовательность. Поэтому $[g] = 0$, что противоречит (6).

ЗАМЕЧАНИЕ.*) Для изометрического оператора T в банаховом пространстве X подпространство X_0, порожденное собственными векторами, является инвариантным. Можно было бы ожидать, что у оператора $\hat{T}$, индуцированного в фактор-пространстве X/X_0, нет собственных векторов. Вообще говоря, это предположение не верно. Приведем соответствующий пример.

Пусть T – оператор в пространстве всех сходящихся последовательностей, определенный следующим образом:

$$T\{C_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e^{\frac{i}{k}} C_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Очевидно, что T – изометрический оператор, а подпространство, порожденное его собственными

*) Этим замечанием я обязан Ю.И. Любичу и В.А. Ткаченко.

векторами, совпадает с пространством всех сходящихся к нулю последовательностей. Фактор-пространство одномерно и поэтому индуцированный в нем оператор имеет собственный вектор. Отметим, впрочем, что из результатов де Леу и Гликсберга [14] следует, что в рефлексивном пространстве соответствующий пример невозможен.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О Т Е О Р Е М Ы 5. Покажем, что построенный нами оператор T в пространстве ℓ^{∞}/AP является искомым. По лемме 3 у T нет собственных векторов. Пусть K -компакт в C и K_0 - совершенное подмножество в K. Известно (см., например, [13]), что существует такая ограниченная не почти-периодическая последовательность $q=\{q_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, для которой ее спектр Берлинга $\sigma(q)=K_0$. Тогда $[q]\neq 0$. Покажем, что $[q]$ лежит в спектральном подпространстве $L(K)$ оператора T. По лемме 2 $q\in L_s(K)$. Значит, функция $R_\lambda(S)q$ аналитична в $C\setminus K$. Но тогда и функция $R_\lambda(T)[q]$ аналитична в $C\setminus K$. Поэтому по теореме 2 $[q]\in L(K)$. Теорема доказана.

В заключение я благодарю Ю.И. Любича за полезные обсуждения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ю.И. Любич, В.И. Мацаев, Об операторах с отделимым спектром, Математический сборник, 56 98, № 4, 433-468, 1962.
2. Г.М. Фельдман, К спектральной теории представлений локально компактных абелевых групп, Функциональный анализ и его приложения, т. 6, вып. I, 1972.
3. J.Wermer, The existence of invariant subspaces, Duke Math J., 19, n°4, 615-622, 1952.
4. А.К. Китовер, Спектральные свойства унитарных операторов в C, Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, т. 22, 47-64, 1971.
5. В.П. Гурарий, О спектре растущих функций, ДАН СССР, 121, № 5, 782-785, 1958.
6. C.Foias, Spectral maximal spaces and decomposable operators in Banach Space, Archiv der Math. 14, n°415, 341-349, 1963.
7. J.Colojara, Elemente de teorie spectrala, Bucurest, 1968.
8. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. I, Мир, М., 1965.
9. С. Банах, Курс функцIонального аналIзу, Ки в, 1948.
10. П. Халмош, Гильбертово пространство в задачах, Мир, М., 1970.
11. А.С. Маркус, Л.Н. Никольская, Н.К. Никольский, Об унитарном спектре сжатия в банаховом пространстве, Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, т. 22, 65-74, 1971.
12. N.Levinson, Gap and Density Theorems, Amer. Math. Soc., Collogu Publ. Vol, XXVI, 1940.
13. L.H.Loomis, The spectral characterization of a class of almost periodic functions, Ann.Math., 72, n°2, 362-368, 1960.
14. De Leeuw K, Glicksberg I, Applications of almost periodic compactifications, Acta Math, 105, n°1:2, 63-97, 1961.

ON SPECTRAL SUBSPACES OF NONQUASI-ANALYTIC OPERATOR

G.M.Feldman

The equivalence for the different definitions of the spectral subspace is proved. Isometric ($\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$) operators with minimal and maximal sets of spectral subspaces are constructed.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1972 выпуск III

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ В ОБЛАСТЯХ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ

В.Н. Фенченко

В трехмерном пространстве R_3 рассмотрим замкнутое множество $F^{(N)}$, состоящее из N односвязных компонент $F_i^{(N)}$, ограниченных гладкими поверхностями $\partial F_i^{(N)}$. Поставим в области $\Omega^{(N)} = R_3 \setminus F^{(N)}$ следующую краевую задачу:

$$\Delta u(x) = -4\pi f(x), \quad x \in \Omega^{(N)}, \tag{1}$$

$$u(x) = C_i^{(N)}, \quad x \in \partial F_i^{(N)}, \tag{2}$$

$$\int_{\partial F_i^{(N)}} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} d\Gamma_x = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, N), \tag{3}$$

$$u(x) \to 0, \quad |x| \to \infty, \tag{4}$$

где $f(x)$ – заданная функция, $C_i^{(N)}$ – некоторые постоянные, ν – внешняя нормаль к границе области $\Omega^{(N)}$.

Эта задача имеет единственное решение, которое будем обозначать через $u^{(N)}(x)$ [1]. Как известно, функция $u^{(N)}(x)$ является потенциалом электростатического поля, создаваемого зарядами с плотностью распределения $f(x)$ в среде, содержащей проводящие включения $F_i^{(N)}$.

Нас интересует приближенное описание решения $u^{(N)}(x)$, когда количество компонент множества $F^{(N)}$ возрастает, а их диаметры $a_i^{(N)}$ и расстояния между ними $R_{ij}^{(N)}$ уменьшаются так, что объем $\tau^{(N)}$ множества $F^{(N)}$ стремится к нулю. Будем при этом предполагать, что функция $f(x)$ финитна и ее носитель лежит вне множества $F^{(N)}$ при любом N.

Обозначим через $C_1(\partial F_i^{(N)})$ пространство непрерывных на $\partial F_i^{(N)}$ функций $\rho(x)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\partial F_i^{(N)}} \rho(x)\, d\Gamma_x = 0.$$

Введем операторы $K_{ij}^{(N)}$, определяемые формулой

$$K_{ij}^{(N)} \rho \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial F_i^{(N)}} \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x-\xi|}\, \rho(\xi)\, d\Gamma_\xi \qquad (i, j = 1, 2, \dots, N).$$

Легко видеть, что оператор $K_{ij}^{(N)}$ отображает пространство $C_1(\partial F_i^{(N)})$ в пространство $C_1(\partial F_j^{(N)})$.

Рассмотрим оператор $I + K_{ii}^{(N)}$ и убедимся, что он отображает пространство $C_1(\partial F_i^{(N)})$ на себя взаимно однозначно и, следовательно, в силу теоремы Банаха имеет ограниченный обратный оператор. Действительно, так как ядро интегрального оператора $K_{ii}^{(N)}$ имеет слабую особенность, то он вполне непрерывен. Следовательно, достаточно показать, что в пространтсве $C_1(\partial F_i^{(N)})$ уравнение $\rho + K_{ii}^{(N)} \rho = 0$ имеет лишь тривиальное решение. Но, как известно, любое непрерывное решение этого уравнения имеет вид $c \cdot \rho_2^{i,N}$, где $\rho_2^{i,N}$ – плотность потенциала Робэна, и так как $\rho_{z}^{i,N} > 0$, то $c \cdot \rho_{z}^{i,N} \in C_1(\partial F_i^{(N)})$ только при $c = 0$.

Норма оператора $(I + K_{ii}^{(N)})^{-1}$, вообще говоря, зависит от вида поверхности $\partial F_i^{(N)}$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что поверхности $\partial F_i^{(N)}$ таковы, что имеют место неравенства

$$\|(I + K_{ii}^{(N)})^{-1}\| \le C_1, \tag{5}$$

$$\sigma_i^{(N)} \le C_2 \, a_i^{(N)2}, \tag{6}$$

где $\sigma_i^{(N)}$ - площадь поверхности $\partial F_i^{(N)}$, а постоянные C_1 и C_2 от i, N не зависят. Эти неравенства, в частности, выполняются, если поверхности $\partial F_i^{(N)}$ получены преобразованием подобия из одной или из конечной системы фиксированных поверхностей.

Для оценки влияния множества $F^{(N)}$ на решение задачи введем в качестве характеристики его компонент $F_i^{(N)}$ величины

$$A_{\kappa,\ell}^{i,N} = \delta_{\kappa,\ell} \cdot \tau_i^{(N)} + \int\limits_{R_3 \setminus F_i^{(N)}} (\nabla v_\kappa^{i,N}, \nabla v_\ell^{i,N}) \, dx, \quad \kappa, \ell = 1, 2, 3,$$

где $\delta_{\kappa,\ell}$ - символ Кронекера, $\tau_i^{(N)}$ - объем множества $F_i^{(N)}$, а $v_\kappa^{i,N}$ - решение в области $\Omega_i^{(N)} = R_3 \setminus F_i^{(N)}$ следующей краевой задачи:

$$\Delta v_\kappa^{i,N}(x) = 0, \quad x \in \Omega_i^{(N)}, \tag{7}$$

$$v_\kappa^{i,N}(x) = x_\kappa + c_\kappa^{i,N}, \quad x \in \partial F_i^{(N)}, \tag{8}$$

$$\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \frac{\partial v_\kappa^{i,N}(x)}{\partial \nu_x} \, d\Gamma_x = 0, \tag{9}$$

$$v_\kappa^{i,N}(x) \to 0, \quad |x| \to \infty, \tag{10}$$

где $c_\kappa^{i,N}$ - некоторая постоянная, а x_κ - к-я компонента вектора x.

Отметим, что величины

$$P_{\kappa,\ell}^{i,N} = \int\limits_{R_3 \setminus F_i^{(N)}} (\nabla v_\kappa^{i,N}, \nabla v_\ell^{i,N}) \, dx, \quad \kappa, \ell = 1, 2, 3$$

образуют так называемый тензор поляризации множества $F_i^{(N)}$ [2].

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. Пусть при $N \to \infty$ выполняются такие условия:

I. Для любого N множество $F^{(N)}$ содержится в некоторой ограниченной области D с гладкой границей ∂D.

2. Имеют место соотношения

$$a_i^{(N)} = o(R_{ij}^{(N)}), \quad \max_{1 \le j \le N} \sum_{i \ne j} \frac{a_i^{(N)2}}{R_{ij}^{(N)2}} \le \alpha \, C_1^{-1} C_2^{-1},$$

где $\alpha < 1$ - постоянная, не зависящая от N, а постоянные C_1 и C_2 из неравенств (5), (6).

3. Для любой области $G \subset D$ существует предел

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{\tau^{(N)}} \sum_G A_{\kappa,\ell}^{i,N} = \int\limits_G A_{\kappa,\ell}(y) \, dy,$$

где $A_{\kappa,\ell}(y)$ - дифференцируемая в D функция, а $\sum\limits_G$ обозначает суммирование по тем значениям i, для которых множество $F_i^{(N)} \subset G$.

Тогда решение задачи (I) - (4) $u^{(N)}(x)$ в точках x, находящихся вне области D, может быть представлено в виде

$$u^{(N)}(x) = u^{(0)}(x) + \tau^{(N)} v(x) + O(\tau^{(N)}), \quad N \to \infty. \tag{II}$$

Здесь $u^{(o)}(x)$ во всем пространстве R_3 удовлетворяет уравнению $\Delta u^{(o)}(x) = -4\pi f(x)$, а функция $V(x)$ определяется формулой

$$V(x) = \int_D -\frac{\partial}{\partial y_k}\left\{ A_{k,e}(y)\frac{\partial u^{(o)}}{\partial y_e}(y)\right\}\frac{1}{4\pi|x-y|}\,dy + \tag{12}$$

$$+\int_{\partial D} A_{k,e}(y)\frac{\partial u^{(o)}}{\partial y_e}(y)\cos(\nu y_k)\frac{1}{4\pi|x-y|}\,d\Gamma_y ,$$

где по повторяющимся индексам ведется суммирование от I до 3.

С Л Е Д С Т В И Е. Из теоремы вытекает, что решение задачи (I)-(4) $u^{(N)}(x)$ может быть представлено в виде

$$u^{(N)}(x) = u_o^{(N)}(x) + O(\tau^{(N)}), \quad N \to \infty, \tag{13}$$

где $u_o^{(N)}(x)$ есть решение следующей задачи:

$$\Delta u_o^{(N)}(x) = -4\pi f(x), \qquad x \in R_3 \setminus D,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) u_o^{(N)}(x) = 0, \quad x \in D,$$

$$u_{o_-}^{(N)}(x) = u_{o_+}^{(N)}(x), \qquad x \in \partial D,$$

$$\frac{\partial u_o^{(N)}}{\partial \nu_-}(x) = \frac{\partial u_o^{(N)}}{\partial N_+}(x), \quad x \in \partial D .$$

Здесь $a_{ij}(x) = \delta_{ij} + \tau^{(N)} A_{ij}(x)$, знаками "+", "-" обозначены соответственно предельные значения изнутри и извне области D , а

$$\frac{\partial}{\partial N} = a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\cos(\nu x_i)$$

- производная по нормали.

Иными словами, наличие проводящих включений в среде может быть эффективно учтено путем соответствующего изменения ее диэлектрической проницаемости.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О Т Е О Р Е М Ы. Рассмотрим в качестве вспомогательной задачу (I)-(4), считая, что множество $F^{(N)}$ состоит лишь из одной компоненты $F_i^{(N)}$. Представим ее решение в виде

$$u_i^{(N)}(x) = u^{(o)}(x) + W_i^{(N)}(x), \tag{14}$$

где

$$W_i^{(N)}(x) = \int_{\partial F_i^{(N)}} \frac{1}{4\pi|x-\xi|}\,\rho_i^{(N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi ,$$

а $\rho_i^{(N)}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho_i^{(N)}(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial F_i^{(N)}} \frac{\partial}{\partial \nu_x}\frac{1}{|x-\xi|}\,\rho_i^{(N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi = 2\frac{\partial}{\partial \nu_x}u^{(o)}(x), \quad x \in \partial F_i^{(N)}.$$

Это уравнение является интегральным уравнением внутренней задачи Неймана, и в пространстве $C_1(\partial F_i^{(N)})$ оно запишется в операторной форме так:

$$\rho_i^{(N)}(x) + [K_{ii}^{(N)}\rho_i^{(N)}](x) = 2\frac{\partial}{\partial \nu_x}u^{(o)}(x), \quad x \in \partial F_i^{(N)} . \tag{15}$$

Уравнение (I5) имеет решение, так как носитель функции $f(x)$ лежит вне $F_i^{(N)}$ и, следовательно, $\frac{\partial}{\partial \nu_x}u^{(o)}(x) \in C_1(\partial F_i^{(N)})$.

Легко видеть, что функция $u_i^{(N)}(x)$, определенная формулой (I4), удовлетворяет уравнению (I). Из уравнения (I5) следует, что предельное значение нормальной производной функции

$u_i^{(N)}(x)$ изнутри поверхности $\partial F_i^{(N)}$ равно $\frac{\partial u_i^{(N)}}{\partial \nu_+}(x)=0$. Следовательно, функция $u_i^{(N)}(x) = const$ в области, ограниченной поверхностью $\partial F_i^{(N)}$, и так как она непрерывна, то выполняется условие (2). Поскольку предельное значение нормальной производной функции $u_i^{(N)}(x)$ извне поверхности $\partial F_i^{(N)}$ равно

$$\frac{\partial u_i^{(N)}}{\partial \nu_-}(x) = \frac{\partial u_i^{(N)}}{\partial \nu_+}(x) + \rho_i^{(N)}(x) = \rho_i^{(N)}(x)$$

и $\rho_i^{(N)}(x) \in C_1(\partial F_i^{(N)})$, то выполняется условие (3). Условие (4) также, очевидно, выполнено. Тем самым доказано, что функция $u_i^{(N)}(x)$ действительно есть решение вспомогательной задачи.

Решение основной задачи (I)-(4) будем искать в виде

$$u^{(N)}(x) = u^{(0)}(x) + \sum_{i=1}^{N} w_i^{(N)}(x) + z^{(N)}(x), \tag{I6}$$

где

$$z^{(N)}(x) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial F_i^{(N)}} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \rho_{i,z}^{(N)}(\xi)\, d\Gamma_\xi ,$$

а $\rho_{i,z}^{(N)}(x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\rho_{i,z}^{(N)}(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial F_i^{(N)}} \frac{\partial}{\partial \nu_x}\frac{1}{|x-\xi|}\rho_{i,z}^{(N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi = \sum_{j\neq i}\frac{1}{2\pi}\int_{\partial F_j^{(N)}}\frac{\partial}{\partial \nu_x}\frac{1}{|x-\xi|}\rho_{j,z}^{(N)}(\xi)\,d\Gamma_\xi +$$
$$+ 2\sum_{j\neq i}\frac{\partial}{\partial \nu_x} w_j^{(N)}(x), \quad x\in\partial F_i^{(N)} \quad (i=1,2,\dots,N).$$

Эта система уравнений в пространстве $C_1(\partial F^{(N)})$, которое является прямым произведением пространств $C_1(\partial F_i^{(N)})$, запишется в операторном виде так:

$$\rho_z^{(N)}(x) + [K^{(N)}\rho_z^{(N)}](x) = [M^{(N)}\rho_z^{(N)}](x) + 2\frac{\partial}{\partial \nu_x} w^{(N)}(x). \tag{I7}$$

Здесь

$$[\rho_z^{(N)}(x)]_i = \rho_{i,z}^{(N)}(x), \quad [w^{(N)}(x)]_i = \sum_{j\neq i} w_j^{(N)}(x), \qquad x\in\partial F_i^{(N)},$$

а операторы $K^{(N)}, M^{(N)}$ определены формулами

$$[K^{(N)}\rho_z^{(N)}]_i = K_{ii}^{(N)}\rho_{i,z}^{(N)}, \quad [M^{(N)}\rho_z^{(N)}]_i = -\sum_{j\neq i} K_{ij}^{(N)}\rho_{j,z}^{(N)}.$$

Аналогично предыдущему можно показать, что уравнение (I7) действительно имеет решение и функция $u^{(N)}(x)$, определенная формулой (I6), есть решение задачи (I)-(4).

Оценим теперь $z^{(N)}(x)$. Поскольку оператор $I+K^{(N)}$ имеет диагональный вид и так как каждый оператор $I+K_{ii}^{(N)}$ имеет ограниченный обратный, то уравнение (I7) эквивалентно следующему:

$$\rho_z^{(N)}(x) = [(I+K^{(N)})^{-1} M^{(N)}\rho_z^{(N)}](x) + [(I+K^{(N)})^{-1} 2\frac{\partial}{\partial \nu_x} w^{(N)}](x).$$

В силу неравенств (5), (6) и условия 2) теоремы получаем, что

$$\|\rho_z^{(N)}\| = \max_{1\le i\le N}\, \max_{x\in\partial F_i^{(N)}} |\rho_{i,z}^{(N)}(x)| \le c \max_{1\le i\le N}\, \max_{x\in\partial F_i^{(N)}} \Big|\sum_{j\neq i}\frac{\partial}{\partial \nu_x} w_j^{(N)}(x)\Big| ,$$

где постоянная c от N не зависит.

Из уравнения (I5) в силу неравенства (5) получаем также, что

$$\| \rho_i^{(N)} \| = \max_{x \in \partial F_i^{(N)}} | \rho_i^{(N)}(x) | \le c',$$

где постоянная c' от i и N не зависит. Замечая, что $\rho_{i,z}^{(N)}$, $\rho_i^{(N)} \in \mathbf{C}_1(\partial F_i^{(N)})$, для точек x, лежащих вне области D, имеем:

$$|z^{(N)}(x)| \le \sum_{i=1}^{N} \Big| \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \Big(\frac{1}{4\pi|x-\xi|} - \frac{1}{4\pi|x-\xi_o^i|} \Big) \rho_{i,z}^{(N)}(\xi) d\Gamma_\xi \Big| \le$$

$$\le c' \sum_{i=1}^{N} a_i^{(N)3} \cdot \max_{1 \le i \le N} \cdot \max_{x \in \partial F_i^{(N)}} \sum_{j \ne i} \Big| \int\limits_{\partial F_j^{(N)}} \Big(\frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x-\xi|} - \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x-\xi_o^j|} \Big) \rho_j^{(N)}(\xi) d\Gamma_\xi \Big| \le$$

$$\le c''' \sum_{i=1}^{N} a_i^{(N)3} \cdot \max_{1 \le i \le N} \sum_{j \ne i} \frac{a_j^{(N)3}}{R_{ij}^{(N)2}} = o(\tau^{(N)}).$$

Здесь ξ_o^i – некоторая фиксированная точка на поверхности $\partial F_i^{(N)}$, а постоянные c'', c''' от N не зависят.

Преобразуем теперь $\sum\limits_{i=1}^{N} w_i^{(N)}(x)$. Для этого запишем уравнение (I5) в следующем виде:

$$\rho_i^{(N)}(x) + [K_{ii}^{(N)} \rho_i^{(N)}](x) = 2 \frac{\partial}{\partial x_\ell} u^{(o)}(x_o^i) \cos(\nu x_\ell) + O(|x - x_o^i|), \quad x \in \partial F_i^{(N)}.$$

Так как $\cos(\nu x_\ell) \in C_1(\partial F_i^{(N)})$, то и $O(|x-x_o^i|) \in C_1(\partial F_i^{(N)})$, и, следовательно,

$$\rho_i^{(N)}(x) = \frac{\partial}{\partial x_\ell} u^{(o)}(x_o^i) \rho_i^{\ell(N)}(x) + \rho_i^{o(N)}(x).$$

Здесь $\rho_i^{o(N)}$, $\rho_i^{\ell(N)}$ есть решения уравнений

$$\rho_i^{o(N)}(x) + [K_{ii}^{(N)} \rho_i^{o(N)}](x) = O(|x - x_o^i|), \quad x \in \partial F_i^{(N)}, \tag{I8}$$

$$\rho_i^{\ell(N)}(x) + [K_{ii}^{(N)} \rho_i^{\ell(N)}](x) = 2\cos(\nu x_\ell), \quad x \in \partial F_i^{(N)}. \tag{I9}$$

Итак, имеем:

$$\sum_{i=1}^{N} w_i^{(N)}(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u^{(o)}}{\partial x_\ell}(x_o^i) \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \rho_i^{\ell(N)}(\xi) d\Gamma_\xi + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \rho_i^{o(N)}(\xi) d\Gamma_\xi. \tag{20}$$

В силу неравенства (5) из уравнения (I8) следует, что $\| \rho_i^{o(N)} \| = O(a_i^{(N)})$. Так как $\rho_i^{o(N)} \in C_1(\partial F_i^{(N)})$, а точка x лежит вне области D, то аналогично предыдущему получим:

$$\Big| \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \rho_i^{o(N)}(\xi) d\Gamma_\xi \Big| = o(\tau^{(N)}).$$

Разложим функцию $\dfrac{1}{|x-\xi|}$ в ряд Тейлора, тогда из (20)

$$\sum_{i=1}^{N} w_i^{(N)}(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u^{(o)}}{\partial x_\ell}(x_o^i) \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x-\xi_o^i|} \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \xi_k \rho_i^{\ell(N)}(\xi) d\Gamma_\xi + o(\tau^{(N)}). \tag{2I}$$

Рассмотрим теперь функцию $v_\kappa^{i,N}(x)$, определенную формулой

$$v_\kappa^{i,N}(x) = \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \rho_i^{\kappa(N)}(\xi)\, d\Gamma_\xi . \tag{22}$$

Покажем, что она является решением задачи (7)-(10). Действительно, она удовлетворяет уравнению (7). Из уравнения (19) следует, что

$$\frac{\partial v_\kappa^{i,N}}{\partial \nu_+}(x) = \frac{\partial x_\kappa}{\partial \nu} , \qquad x \in \partial F_i^{(N)} .$$

Следовательно, $v_\kappa^{i,N}(x) \equiv x_\kappa + const$ в области, ограниченной поверхностью $\partial F_i^{(N)}$, и в силу непрерывности функции $v_\kappa^{i,N}(x)$ выполнено условие (8). Поскольку

$$\frac{\partial v_\kappa^{i,N}}{\partial \nu_-}(x) = \frac{\partial v_\kappa^{i,N}}{\partial \nu_+}(x) + \rho_i^{\kappa(N)}(x) = \cos(\nu x_\kappa) + \rho_i^{\kappa(N)}(x)$$

и так как $\rho_i^{\kappa(N)}(x) \in C_1(\partial F_i^{(N)})$, то выполняется условие (9). Условие (10) также, очевидно, выполняется. Итак, функция $v_\kappa^{i,N}(x)$, определенная формулой (22), есть решение задачи (7)-(10).

В таком случае

$$\int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \xi_\kappa \rho_i^{\ell(N)}(\xi)\, d\Gamma_\xi = \int\limits_{\partial F_i^{(N)}} \xi_\kappa \left(\frac{\partial v_\ell^{i,N}}{\partial \nu_-}(\xi) - \frac{\partial v_\ell^{i,N}}{\partial \nu_+}(\xi) \right) d\Gamma_\xi =$$

$$= \int\limits_{F_i^{(N)}} (\nabla \xi_\kappa . \nabla \xi_\ell)\, d\xi + \int\limits_{R_3 \setminus F_i^{(N)}} (\nabla v_\kappa^{i,N}(\xi), \nabla v_\ell^{i,N}(\xi))\, d\xi = A_{\kappa,\ell}^{i,N} .$$

Следовательно, учитывая условия 1), 3) теоремы, получим из (21):

$$\sum_{i=1}^{N} W_i^{(N)}(x) = \tau^{(N)} \int\limits_{D} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y_\kappa}(y) \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y_\ell} \frac{1}{|x-y|} A_{\kappa,\ell}(y)\, dy + o(\tau^{(N)}) .$$

Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно проинтегрировать это выражение по частям.

Аналогично можно рассмотреть задачу, описывающую электростатическое поле в случае диэлектрических включений:

$$\Delta u(x) = -4\pi f(x) , \qquad x \in \Omega^{(N)},$$
$$\Delta u(x) = 0 , \qquad x \in F_i^{(N)},$$
$$u_+(x) = u_-(x) , \qquad x \in \partial F_i^{(N)},$$
$$c_i^{(N)} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_+} = \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_-} , \qquad x \in \partial F_i^{(N)} \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$
$$u(x) \to 0 , \qquad |x| \to \infty .$$

Решение этой задачи при аналогичных требованиях представляется в виде (11), где величины $A_{\kappa,\ell}^{i,N}$ равны

$$A_{\kappa,\ell}^{i,N} = (1 - c_i^{(N)})\, \delta_{\kappa,\ell}\, \tau_i^{(N)} + c_i^{(N)} \int\limits_{F_i^{(N)}} (\nabla v_\kappa^{i,N}, \nabla v_\ell^{i,N})\, dx + \int\limits_{R_3 \setminus F_i^{(N)}} (\nabla v_\kappa^{i,N}, \nabla v_\ell^{i,N})\, dx .$$

Здесь $v_\kappa^{i,N}(x)$ - решение следующей задачи:

$$\Delta v_\kappa^{i,N}(x) = 0 , \qquad x \in \Omega_i^{(N)} .$$

$$\Delta v_{\kappa}^{i,N}(x)=0, \qquad x\in F_i^{(N)},$$

$$v_{\kappa_+}^{i,N}(x)=v_{\kappa_-}^{i,N}(x), \quad x\in\partial F_i^{(N)},$$

$$c_i^{(N)}\frac{\partial v_{\kappa}^{i,N}}{\partial\nu_+}(x)-\frac{\partial v_{\kappa}^{i,N}}{\partial\nu_-}(x)=(1-c_i^{(N)})\cos(\nu x_\kappa), \quad x\in\partial F_i^{(N)},$$

$$v_{\kappa}^{i,N}(x)\to 0, \quad |x|\to\infty.$$

Рассмотрим пример.

Пусть компоненты множества $F^{(N)}$ – шары радиусов $a_i^{(N)}$. Можно проверить, что функция $v_{\kappa}^{i,N}(x)$, определенная формулой

$$v_{\kappa}^{i,N}(x)=\frac{a_i^{(N)3}}{z^2}\cos(\bar z x_\kappa),$$

где $\bar z$ – радиус-вектор из центра i -го шара в точку x, есть решение задачи (7)-(I0).

Вычислим величины $A_{\kappa,\ell}^{i,N}$:

$$A_{\kappa,\ell}^{i,N}=\delta_{\kappa,\ell}\frac{4}{3}\pi a_i^{(N)3}+\int_{|z|=a_i^{(N)}} v_\kappa^{i,N}(x)\frac{\partial v_\ell^{i,N}}{\partial\nu_-}(x)\,d\Gamma_x=$$

$$=\delta_{\kappa,\ell}\frac{4}{3}\pi a_i^{(N)3}+a_i^{(N)}\int_{|z|=a_i^{(N)}}\cos(\bar z x_\kappa)\cdot\cos(\bar z x_\ell)\,d\Gamma_x=$$

$$=\frac{8}{3}\pi a_i^{(N)3}\cdot\delta_{\kappa,\ell}.$$

Следовательно, в силу условия 3) теоремы имеем:

$$A_{\kappa,\ell}(x)=2\delta_{\kappa,\ell}\tau(x),$$

где функция $\tau(x)$ определяется равенством

$$\int_G\tau(x)\,dx=\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_G a_i^{(N)3}}{\sum_D a_i^{(N)3}}.$$

Рассмотрим случай, когда все шары $F_i^{(N)}$ имеют один и тот же радиус a и расположены в попавших в область D узлах пространственной периодической решетки. Тогда $\tau(x)=1/\mu(D)$, где $\mu(D)$ – объем области D. Следовательно, представляя решение задачи (I)-(4) в виде (I3), получим для $u_0^{(N)}(x)$ следующую задачу:

$$\Delta u_0^{(N)}(x)=-4\pi f(x), \qquad x\in R_3\setminus D,$$

$$\Delta u_0^{(N)}(x)=0, \qquad x\in D,$$

$$u_{0_-}^{N}(x)=u_{0_+}^{(N)}(x), \qquad x\in\partial D,$$

$$\frac{\partial u_0^{(N)}}{\partial\nu_-}(x)=\frac{\partial u_0^{(N)}}{\partial\nu_+}(x)\left(1+\frac{8}{3}\pi\left(\frac{a}{\ell}\right)^3\right), \quad x\in\partial D,$$

где ℓ – период решетки.

В заключение автор выражает благодарность В.А. Марченко и Е.Я. Хруслову за внимание к работе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Тихонов, Самарский, Уравнения математической физики, М.,1966.

2. Полиа, Сеге, Изопериметрические неравенства в математической физике, М.,1962.

ON SOME PROBLEMS OF ELECTROSTATICS IN REGIONS WITH FINE-GRAINED BOUNDARY

V.N.Fenchenko

The electrostatic field is considered in a medium containing a great number of fine foreign inclusions $F_i^{(N)}$. To estimate the effect of the inclusions on the field potential the tensors are introduced

$$A_{\kappa,\ell}^{i,N} = \delta_{i\kappa}\,\tau_i^{(N)} + P_{\kappa,\ell}^{i,N},$$

where $\tau_i^{(N)}$ is the volume of the inclusion and $P_{\kappa,\ell}^{i,N}$ is the tensor of its polarization.

The number of the inclusions increasing and their total volume $\tau^{(N)} \to 0$, the field potential $u^{(N)}(x)$ is shown to be represented as

$$u^{(N)}(x) = u^{(0)}(x) + V(x)\,\tau^{(N)} + o(\tau^{(N)}).$$

Here $u^{(0)}(x)$ is the field potential in a homogeneous medium and the function $V(x)$ is given in an explicit form.

As results from the representation obtained the medium with a great number of foreign inclusions may be treated as the solid one with a different dielectric constant.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1972 выпуск III

К ВОПРОСУ О ФОРМЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Г.В. Щербина

Пусть на плоскости x_1, x_2 находится бесконечный слой жидкости. Высоту слоя жидкости над точкой x_1, x_2 положим равной $z=f(x_1,x_2)$, $\lim\limits_{r\to\infty} f(x_1,x_2)=h$, коэффициент поверхностного натяжения, ускорение силы тяжести и плотность обозначим соответственно σ, g, γ. Течение жидкости будем считать потенциальным, установившимся, жидкость – несжимаемой. На плоскости x_1, x_2 будем предполагать наличие ограниченного отверстия (не обязательно симметричного); назовем это отверстие D, причем распределение скоростей в точках (0, x_1, x_2) (x_1, $x_2 \subset D$) будем считать заданной непрерывной неотрицательной функцией $\alpha \cdot a(x_1, x_2)$. Здесь α – малый положительный параметр $\iint\limits_D a(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2=1$. Введем потенциал $\bar{v}=\nabla\Phi$. Область $\mathcal{G}$, в которой определена функция Φ, ограничена свободной поверхностью f и твердой стенкой. Поток жидкости через боковую поверхность цилиндра радиуса r равен α, что дает для $\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ при $r\to\infty$ следующую асимптотику $\frac{\partial\Phi}{\partial r}\sim\frac{\alpha}{2\pi r h}$.

Сделаем замену $\Phi=\Phi_0+u\alpha$, где $\Delta u=0$ в $\mathcal{G}$

$$\Phi_0=\alpha\iint\limits_D a(\xi_1,\xi_2)\Phi_1(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2,$$

$$\Phi_1=\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+z^2}}+\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+(z-2k)^2}}-\frac{1}{2k}\right).$$

Для вывода второго уравнения воспользуемся тем, что на свободной поверхности справедливо уравнение Бернулли $\frac{v^2}{2}-\frac{p}{\gamma}+gz=c$.

Здесь p – давление на поверхности жидкости. Воспользуемся формулой $p-p_0=-\sigma\mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ – средняя кривизна свободной поверхности, p_0 – давление в среде над уровнем жидкости, которое мы будем считать постоянным. Окончательно получаем на свободной поверхности

$$\frac{[\nabla(u+\Phi_0)]^2}{2}-\frac{\sigma}{\gamma}\mathcal{K}+g(f-h)=C_1.$$

Естественно потребовать выполнение условий $f'\to 0,\ \mathcal{K}\to 0,\ \nabla u\to 0\ (r\to\infty)$. $C_1=0$
и окончательно

$$\frac{[\nabla(u+\Phi_0)]^2}{2}-\frac{\sigma}{\gamma}\mathcal{K}+g(f-h)=0,\quad f(\infty)=h.$$

После замены переменных $r=h\tilde{r}$, $z=h\tilde{z}$, $f=h\tilde{f}$ мы получим для u и f систему уравнений

$$\Delta u=0\qquad (x_1,x_2,z\subset\mathcal{G};\ x_1,x_2,-z\subset\mathcal{G}),\tag{I}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}\quad (z=\pm f(x_1,x_2),\ u\to 0\quad (r\to\infty),\tag{I.I}$$

$$\frac{\alpha^2[\nabla(u+\alpha^{-1}\Phi_0)]^2}{2}-\mathcal{K}+B(f-1)=0,\quad f\to 1\quad (r\to\infty).\tag{2}$$

В дальнейшем нам будут полезны пространства $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{V}$, определенные следующим образом. Пусть

$$m = \frac{m_0}{r^2+1} + \frac{m_1(x_1, x_2)}{(r^2+1)^{3/2}}, \quad n = \frac{n_0}{(r^2+1)^{1/2}} + \frac{n_1(x_1, x_2)}{r^2+1},$$

$$b = \frac{b_0}{(r^2+1)^{3/2}} + \frac{b_1(x_1, x_2)}{(r^2+1)^2};$$

$$\|m\| = \max_{x_1, x_2, \bar{x}, \bar{y}} \left(|m_0| + |m_1| + \sum_i |m'_{1x_i}| + \sum_{i,j} |m''_{1x_i, x_j}| + \frac{|m_1(\bar{x}) - m_1(\bar{y})|}{|\bar{x} - \bar{y}|}\right),$$

$$\|n\| = \max_{x_1, x_2, |\bar{x}-\bar{y}|<1} \left(|n_0| + |n_1| + \frac{|n_1(\bar{x}) - n_1(\bar{y})|}{|\bar{x} - \bar{y}|}\right),$$

$$\|b\| = \max_{x_1, x_2, |\bar{x}-\bar{y}|<1} \left(|b_0| + |b_1| + \frac{|b_1(\bar{x}) - b_1(\bar{y})|}{|\bar{x} - \bar{y}|}\right).$$

Будем считать, что $m \subset \mathfrak{M}$, $n \subset \mathfrak{N}$, $b \subset \mathfrak{V}$, если соответственно $\|m\| < \infty$, $\|n\| < \infty$, $\|b\| < \infty$. Будем искать u в виде

$$u(M) = \iint_{S_1} \frac{n(\xi_1, \xi_2)\,ds}{r(M, M_1)} + \iint_{S_2} \frac{n(\xi_1, \xi_2)\,ds}{r(M, M_2)},$$

где $m = 1 - f \subset \mathfrak{M}$, $M_i \subset S_i : \{z = (-1)^i f(x_1, x_2)\}$, $n \subset \mathfrak{N}$.

Имеем из условия (I.I):

$$n - \frac{1}{2\pi} n * \frac{2}{(\sqrt{r^2+4})^3} + Kn = \Psi(m) = \iint_D a(\vec{\xi})\, \Psi_1(\vec{x} - \vec{\xi})\, d\xi;$$

$$Kn = \iint_{-\infty}^{\infty} \gamma n \left[\frac{\partial \frac{1}{r(M,M_1)}}{\partial N_1} + \frac{\partial \frac{1}{r(M,M_2)}}{\partial N_2}\right] - \frac{2}{\gamma(\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + 4})^3}\Big] d\xi_1 d\xi_2, \tag{3}$$

$$\Psi_1(m) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{m'_{x_1} x_1 + m'_{x_2} x_2 + (1 - m - 2k)}{(x_1^2 + x_2^2 + (1 - m - 2k)^2)^{3/2}}.$$

Оценим $\Psi_1(m)$:

$$\Psi_1 = -\left\{\sum_k \left[\frac{m'_{x_1} x_1 + m'_{x_2} x_2 - m}{(r^2 + (1 - m - 2k)^2)^{3/2}} + (1 - 2k)\left(\frac{1}{(r^2 + (1-2k)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(r^2 + (1 - 2k - m)^2)^{3/2}}\right)\right]\right\},$$

и окончательно $\Psi(m) \subset \mathfrak{V}$, $|\Psi(m)| \le A\|m\|(1+r^2)^{-2}$, $\left|\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\right| \le A\|m\|(1+r^2)^{-2}$,

где A не зависит от m. Положим $\|m\| \le q < 1$. Докажем, что K – сжимающий оператор из $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{V}$. В дальнейшем нам понадобятся равенства

$$\iint_{|\bar{x}-\bar{\xi}|>1} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + 1}\,(\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2})^3} = \frac{d_0}{\sqrt{r^2+1}} + \frac{d_1(x_1, x_2)}{1 + r^2} \subset \mathfrak{N},$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+1}} * \frac{x_i}{(r^2+1)^{3/2}} = \frac{\sqrt{1+r^2} - 1}{\sqrt{1+r^2} \cdot r}.$$

Представим Kn в виде $Kn = K_I n + K_{II} \cdot n$, где

$$K_I n = \iint_{|\bar{x}-\bar{\xi}|<1} K(\xi_1, \xi_2, m)\, n\, d\vec{\xi}.$$

Имеем: $|K_I n| \le C_I \|m\|\|n\|(1+r^2)^{-2}$, $K_{II} n = k_0(1+r^2)^{-\frac{3}{2}} + k_1(\vec{x})(1+r^2)^{-2}$,

где $|k_0| + |k_1| \le C_{II} \|m\|\|n\|$.

Аналогично $\left|\frac{\partial}{\partial x_i} K_{II} n\right| \le D_{II}\|m\|\|n\|(1+r^2)^{-2}$. Представим $K_I n$ в виде

$$K_I n = \iint_{|\vec{\xi}|<1} n(\vec{x} - \vec{\xi})\, \frac{m'_{x_1}\xi_1 + m'_{x_2}\xi_2 - (m(\vec{x}) - m(\vec{x} - \vec{\xi}))}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{3/2}}\, \psi^0(u)\, d\vec{\xi}_1 d\vec{\xi}_2,$$

$$\Psi^{\circ}(u) = 1 - \frac{2}{3}\int_0^u \frac{dv}{(1+v)^{5/2}}, \qquad u = \frac{(m(\vec{x}) - m(\vec{x}-\vec{\xi}))^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Функция u имеет по x_i производные, удовлетворяющие условию

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leq E \frac{\|m\|^2}{(1+z^2)^2}.$$

Из того, что $n \subset \mathfrak{N}, m \subset \mathfrak{M}$, получим:

$$|K_I(\vec{x},\vec{\xi},m)\cdot n - K_I(\vec{y},\vec{\xi},m)\cdot n| \leq \frac{D_I |\vec{x}-\vec{y}| \|m\| \|n\|}{(1+z^2)^2}.$$

Из всего сказанного легко заключить, что

$$\|K_n\|_{\mathfrak{N}} \leq B \|m\| \|n\|.$$

Рассмотрим уравнение

$$n - \frac{1}{\pi} n * \frac{1}{(z^2+4)^{3/2}} = b(x_1, x_2) = \frac{b_0}{(1+z^2)^{3/2}} + \frac{b_1(x_1,x_2)}{(1+z^2)^2} \subset \mathfrak{N}. \tag{4}$$

Его решение имеет вид

$$n = \frac{b_0 + \bar{\alpha} l_2}{8\sqrt{z^2+1}} + \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 H(\overline{x-\xi})}{\partial \xi_1 d\xi_2} d\xi \iint_{\xi_1,\xi_2}^{\infty\,\infty} d(\eta_1,\eta_2) d\eta_1 d\eta_2,$$

где $\bar{\alpha}$ – абсолютная постоянная, $d = b_1(z^2+1)^{-2} \subset \mathfrak{N}$, $\|d\| \leq B\|b\|$,

$$H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(z^2+k^2)^{3/2}} \subset \mathfrak{N},$$

$$l_2 = \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{b_0}{(z^2+1)^{3/2}} - \frac{b_0}{8\sqrt{z^2+1}} + \frac{b_0}{8\sqrt{z^2+9}} + \frac{b_1(x_1,x_2)}{(z^2+1)^2}\right] dx_1 dx_2,$$

B – абсолютная постоянная.

Мы получили ограниченный оператор H, ставящий в соответствие любому $b \subset \mathfrak{N}$ решение уравнения (4) $n \subset \mathfrak{N}$. Уравнение (3) перепишем теперь в виде

$$n = HKn + H\Psi. \tag{4.I}$$

При достаточно малом q оператор HK сжимающий. Обозначим $\|HK\| - q_0 < 1$. Уравнение (4.I) имеет единственное решение $n \subset \mathfrak{N}$ и справедлива оценка $\|n\| \leq (1-q_0)^{-1} \|H\| \|\Psi\| \leq C_H \|m\|$.

Таким образом, каждому $m \subset \mathfrak{M}$, удовлетворяющему неравенству $\|m\| \leq q$, где q достаточно мало, мы поставили в соответствие решение уравнения (3) $n \subset \mathfrak{N} : n = T_0(n)$.

Подставим n в уравнение (3). Получим:

$$\frac{1}{(1+z^2)^{3/2}} \cdot n_0 (k_0(\|m\|) - 3) = \frac{O(1)}{(1+z^2)^2}, \qquad |k_0| \leq C_{II} \|m\|,$$

и из малости $\|m\|$ имеем: $n_0 = 0$. Итак, T_0 переводит окрестность $\Omega : = (\|m\| \leq q)$ в пространство $\mathfrak{N}^*$ с нормой

$$\|n\|_* - \max_{x_1,x_2} (1+z^2)\left(|n(x_1,x_2)| + \sup_{|\vec{x}-\vec{y}|<1} \frac{|n(\vec{x}) - n(\vec{y})|}{|\vec{x}-\vec{y}|}\right).$$

Легко видеть, что нелинейный оператор T_0 непрерывен и удовлетворяет неравенству $\|\Delta n\|_* \leq$ $\leq M \|\Delta m\|$. Нас интересует $|\nabla(u + \alpha^{-1}\Phi_0)|^2 = T(m)$. Производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ по любому касательному направлению s задается на поверхности формулой

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} n(\xi_1, \xi_2)\frac{\partial}{\partial S}\left[\frac{1}{r(M,M_1)} + \frac{1}{r(M,M_2)}\right]ds = Ln,$$

причем L - непрерывный оператор из $\mathcal{N}^*$ в $\mathcal{N}^*$. Суммируя все сказанное, получим, что если $\|m\| < q$, где q достаточно мало, то $|\nabla(u+\alpha^{-1}\Phi_0)|^2 = T(m)$ есть непрерывный оператор из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$, удовлетворяющий условию $\|T(m+\Delta m) - T(m)\| \leq C_T \|\Delta m\|$.

Осталось исследовать зависимость решения уравнения, которое получилось из уравнения (2) после замены $1 - m = f$, от свободного члена $\alpha^2 \frac{[\nabla(u+\alpha^{-1}\Phi_0)]^2}{2} = \alpha\zeta(x_1, x_2)$. Отметим, что $\zeta \in \mathfrak{N}$. Подставив выражение для средней кривизны, будем иметь:

$$m''_{x_1x_1} + m''_{x_2x_2} - bm = \alpha\zeta(x_1, x_2) + R(m),$$

где $R(m) = \sum\limits_{i,j}(-1)^{i+j} m_{x_ix_j} m_{x_i} m_{x_j} (1+m'^2_{x_i}+m'^2_{x_j})^{\frac{3}{2}}$. Учитывая граничные условия для m, получим интегральное уравнение

$$m = \frac{\pi}{2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} K_0(\sqrt{b|\vec{x}-\vec{\xi}|^2})[R(m) - \alpha\zeta]\,d\vec{\xi}. \tag{6}$$

Известно, что (см. [I]) $\frac{\partial m}{\partial x_i} = \frac{\pi}{2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K_0(\sqrt{b|\vec{x}-\vec{\xi}|^2})}{\partial x_i}\cdot Q(\vec{\xi}, m)\,d\vec{\xi}$,

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\pi}{2}\iint\limits_{|\vec{x}-\vec{\xi}|>1} \frac{\partial^2 K_0}{\partial x_i \partial x_j} Q(\vec{\xi}, m)\,d\vec{\xi} + \frac{\pi}{2}\iint\limits_{|\vec{x}-\vec{\xi}|<1} \frac{\partial^2 K_0(\sqrt{b|\vec{x}-\vec{\xi}|^2})}{\partial x_i \partial x_j}[Q(\vec{\xi}, m(\vec{\xi})) - Q(\vec{x}, m(\vec{x}))]\,d\vec{\xi} +$$
$$+ \gamma_{ij} Q(\vec{x}, m(\vec{x})),$$

где γ_{ij} - достаточно гладкие функции. Легко видеть, что при $\|m\| \leq q$, $\|\Delta m\| \leq q$ справедливы неравенства

$$|R(m)| \leq K_1\|m\|^2, \quad |R(m+\Delta m) - R(m)| \leq K_2\|\Delta m\|\|m\|.$$

Обозначим решение уравнения (6) $m = R_0(\zeta)$. Решая это уравнение методом итераций и положив $m_0 = 0$, получим (α мало):

$$\|R(\zeta)\| \leq \alpha\cdot r_1\|\zeta\|, \quad \|R_0(\zeta+\Delta\zeta) - R_0(\zeta)\| \leq \alpha r_2 \|\zeta\|\|\Delta\zeta\|.$$

Итак наша задача свелась к исследованию уравнения

$$m = R_0(T(m)) = F(m). \tag{7}$$

Из предыдущих рассмотрений легко следует, что при малых α и q F -сжимающий оператор, переводящий Ω в Ω, и потому уравнение (7) имеет в Ω единственное решение.

Осесимметричный случай рассмотрен в работе (2).

В заключение приношу благодарность А.Д. Мышкису за ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

I. О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, изд-во "Наука", Москва, 1964.

2. Г.В.Щербина, О форме свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости, Труды ФТИНТ, Математическая физика и функциональный анализ, вып. I, 1969.

ON FREE SURFACE FORM OF IDEAL INCOMPRESSIBLE FLUID

L.V.Shcherbina.

The stationary problem on the free surface form for the infinite layer of ideal incompressible fluid rested on a plane is considered with a given suction through the finite hole . The problem consists in determining a solution for the non-linear operator equation in a special space. The equation is shown to have a solution at small sinks. The surface tension and gravity force are taken into account.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1972 выпуск III

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ИЗ ТЕОРИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Г.В. Щербина

В настоящей заметке рассматривается вопрос о единственности решения следующей краевой задачи:

$$(xy'')' - \lambda(yy'' - y'^2) = \beta, \tag{I}$$

$$y(0) = y'(1) = 0; \quad y(1) = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\, y'' = 0 \tag{I'}$$

при достаточно малых $\lambda > 0$.

Эта задача была поставлена в работе [I]. Автор рассмотрел осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечной пористой трубе с равномерным отсосом. Введя функцию тока

$$\Psi(r,z) = (\bar{u}_0 R - 2\bar{v}_0 R z)\, y(x), \tag{2}$$

где $\bar{u}_0$ - некоторый постоянный вектор, он преобразовал уравнения Навье-Стокса в задачу (I), (I′). Здесь $\lambda = \frac{v_0 R}{\nu}$ - число Рейнольдса, R - радиус трубы, $x = (\frac{r}{R})^2$, β - неизвестный параметр, зависящий от λ. Ось z направлена по оси трубы.

Аналогичная плоская задача рассматривалась в работах [2], [3], [4], [5]. Было доказано [5], что плоская задача имеет решение при всех $\lambda > 0$, причем при достаточно малых $\lambda > 0$ это решение единственно, а при достаточно больших λ - неединственно.

Из равенства (2) видно, что составляющая скорости в направлении оси канала пропорциональна функции $y'(x,\lambda)$. При малых λ (т.е. при малых отсосах) естественно ожидать, что $y'(x,\lambda) \to y'(x,0)$. Существование такой ветви доказано в работе [7], и эта ветвь численно получена в работах [6], [7]. Однако численное построение решений показало, что при малых λ имеется по крайней мере еще одна ветвь решений $\tilde{y}(x,\lambda)$, неограниченно растущая при $\lambda \to 0$. Причем $\tilde{y}'(x,\lambda)$ при малых λ меняет знак, что соответствует наличию возле пористой стенки течения в сторону, противоположную основному потоку. Не вдаваясь в физическую целесообразность рассмотрения неограниченных при $\lambda \to 0$ решений, мы докажем, что существует единственная ограниченная при $\lambda \to 0$ ветвь решений. Будет показано также, что условие ограниченности можно заменить условием $y'(x,\lambda) \geq 0$, т.е. условием отсутствия возвратных течений. Попутно мы проведем доказательство неединственности решения при малых λ.

Хотя уравнение (I) имеет при $x = 0$ особую точку, из условий

$$y(0) = 0, \quad \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\, y''(x) = 0 \tag{3}$$

следует, что существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to 0} y'(x) = \alpha, \tag{4.I}$$

$$\lim_{x\to 0} y''(x) = \beta - \lambda\alpha^2, \tag{4.2}$$

$$\lim_{x\to 0} y'''(x) = -\lambda\alpha(\beta - \lambda\alpha^2). \tag{4.3}$$

Обозначим $y'''(x) = u(x)$. Имеем:

$$y = \alpha x + \frac{\beta - \lambda\alpha^2}{2} x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-s)^2 u(s)\,ds.$$

Условия (I′) дают:

$$0 = \alpha + \beta - \lambda\alpha^2 + \int_0^1 (1-s)\,u(s)\,ds,$$

$$\frac{1}{2} = \alpha + \frac{\beta - \lambda\alpha^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^2 u(s)\,ds.$$

Из этих уравнений мы определяем α и β, затем, зная α и β, находим y, y', y'', и, подставив их в уравнение (I), получим интегральное уравнение вида $Au = \lambda B(u, \lambda)$, где

$$Au = xu + \int_0^x u(s)\,ds,$$

$$B(u,\lambda) = -\alpha\gamma x - \frac{\gamma^2}{2}x^2 + \gamma\int_0^x \frac{(x-s)^2}{2}u(s)\,ds + (\alpha x + \frac{\gamma x^2}{2})\int_0^x u(s)\,ds -$$
$$-[\int_0^x (x-s)u(s)\,ds]^2 - 2[\alpha + \gamma x]\int_0^x (x-s)\,u(s)\,ds,$$
$$\alpha = 1 + \int_0^1 s(1-s)\,u(s)\,ds, \quad \gamma = -1 - \int_0^1 (1-s^2)\,u(s)\,ds.$$

Обращая оператор A, получим окончательно:

$$u(x) - \lambda\, x^{-2}\{\int_0^x [B(u(x),\lambda) - B(u(s),\lambda)]ds = \lambda F(u,\lambda). \tag{5}$$

Легко показать, что если

$$|y'''(x,\lambda)| = |u(x)| \leq C, \tag{6}$$

то при $\lambda \leq \lambda_0(c)$ оператор λF сжимающий и уравнение (5) имеет единственное решение. Мы покажем, что единственность обеспечивается несколько более слабыми предположениями $|y(x,\lambda)| \leq C$ или $y'(x,\lambda) \geq 0$. Отметим, что у уравнения (5) есть два решения, удовлетворяющих условиям $y > 0$, $u > 0$.

Сформулируем лемму, доказанную в работе [7].

Л Е М М А I. При $\lambda > 0$ и любом β для всех решений уравнения (I), удовлетворяющих условию (3), справедливы неравенства

$$y^{IV}(x,\lambda) < 0, \quad \lim_{x\to\infty} y'(x,\lambda) < 0. \tag{7}$$

Л Е М М А 2. В предположении, что $0 < \lambda < 2$, любое решение задачи (I), (I′) удовлетворяют условиям

$$y(x) > 0, \tag{8.I}$$

$$y'(0) > 0, \tag{8.2}$$

$$y'''(x) > 0. \tag{8.3}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Продифференцируем уравнение (I) и положим $x = 1$. Получим $y'''(1) = -y^{IV}(1)(1-\frac{\lambda}{2})^{-1}$, и неравенство (8.3) является прямым следствием леммы I.

Из (8.3) следует, что функция $y'(x,\lambda)$ не может иметь максимума по x внутри интервала (0,I), а значит, максимум достигается на границе. Так как $y(1) = \int_0^1 y'dx = \frac{1}{2}$, то этот максимум положителен, что доказывает неравенство (2).

Кроме того, условие (8.3) означает, что $y'(x)$ может обращаться на сегменте [0,I] в нуль не более двух раз. Если $y'(x) > 0$ при $0 < x < 1$, то неравенство (8.I) доказано. Если же $y'(x)$ обращается в нуль в некоторой внутренней точке ξ интервала (0,I), то в этой точке функция $y(x)$ имеет максимум. Значит, минимум функции $y(x)$ достигается на одном из концов сегмента [0,I] и неравенство (8.I) имеет место.

С Л Е Д С Т В И Е. При $0<\lambda<2$ для любого решения краевой задачи (I), (I′) выполнены неравенства $\alpha>0$, $\beta<\lambda\alpha^2$.

Везде далее мы будем предполагать, что неравенство $0<\lambda<2$ имеет место.

Л Е М М А 3. Пусть $y(x,\lambda)$ – решение краевой задачи (I), (I′), которому соответствует некоторое $\beta(\lambda)>0$. Тогда

$$\max_{0\le x\le 1} y(x,\lambda) > \frac{1}{2\lambda} . \tag{9}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Используя неравенство (8.3) и следствие из леммы 2, запишем $y'>\alpha+(\beta-\lambda\alpha^2)x$, $y_{max}>\frac{1}{2}(\lambda\alpha^2-\beta)^{-1}\alpha^2>\frac{1}{2\lambda}$.

Л Е М М А 4. Пусть $0<\lambda<\frac{1}{2}$, $y(x,\lambda)$ – решение задачи (I), (I′), которому соответствует $\beta(\lambda)<0$. Тогда справедливо неравенство

$$|\beta(\lambda)|+|\alpha(\lambda)|\le C, \tag{I0}$$

где C не зависит от λ .

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из уравнения (I) в точке $x=1$ получаем $y''(1)=$ $=(\beta-y'''(1))(1-\frac{\lambda}{2})^{-1}$. Учитывая, что y'' возрастает, мы можем написать для всех $0\le x\le 1$ неравенство $y''\le\beta(\lambda)(1-\frac{\lambda}{2})^{-1}$. Так как $y'=\alpha+\int_0^x y''\,dx$, то, полагая $x=1$, имеем:

$$\alpha+\max_{0\le x\le 1} y''\ge 0,$$

то есть

$$-\beta\le\alpha(1-\frac{\lambda}{2}) . \tag{II}$$

По доказанному на сегменте [0,I] $y''<0$, $y'>0$, значит, y возрастает и $y(1)=\frac{1}{2}>\frac{1}{2\lambda}(1-\beta\alpha^{-2})^{-1}$,

$$-\beta>\alpha^2(1-\lambda) . \tag{I2}$$

Утверждение леммы является следствием неравенств (II) и (I2).

Т Е О Р Е М А I. При достаточно малых $\lambda>0$ существует единственное решение задачи (I), (I′), удовлетворяющее неравенству $y'(x,\lambda)>0$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Существование такого решения было доказано в работе [7] . Осталось проверить его единственность, которая, как мы видели выше, является следствием ограниченности $|y'''(x,\lambda)|$. Так как $y'''>0$, $y^{IV}<0$ нам достаточно показать ограниченность $y'''(0,\lambda)=-\lambda\alpha^2(\beta-\lambda\alpha^2)$.

Из леммы 3 следует существование $\lambda_0(C)$ такого, что для $0<\lambda<\lambda_0$ имеет место неравенство $\beta(\lambda)<0$, а значит, и неравенство (I0). Из последнего и следует нужная оценка для $|u(x,\lambda)|$.

С Л Е Д С Т В И Е I. При малых $\lambda>0$ существует единственное решение, удовлетворяющее неравенству $|y(x,\lambda)|\le C$.

С Л Е Д С Т В И Е 2. При малых $\lambda>0$ существует единственное решение, удовлетворяющее неравенству $y''(x,\lambda)\le 0$.

Т Е О Р Е М А 2. Решение задачи (I), (I′) неединственно при всех малых $\lambda>0$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Рассмотрим зависящее от β семейство решений уравнения

$$(xy'')'-yy''+y'^2=\beta, \tag{I3}$$

удовлетворяющих условиям $y(0,\beta)=0,\ y'(0,\beta)=1$.

Полагая в (4.2) и (4.3) $\alpha=1$, $\lambda=1$, получаем:

$$y'''(0,\beta)=1-\beta ;\quad y''(0,\beta)=\beta-1 . \tag{I4}$$

В работе (7) показано, что $y(x,\beta)$ – непрерывная функция переменных x, β.

Разобьем интервал $-\infty<\beta<1$ на сумму множеств B_1 и B_2 по признаку $\beta\subset B_1$, если $y''(x,\beta)\leqslant 0$ при всех $x>0$. Пусть $x_i(\beta)$ – i-ый от нуля корень уравнения $y'(x,\beta)=0$. Будем считать, что $\beta\subset B_3$, если $y''(x,\beta)<0, y'''(x,\beta)>0$ для $0<x<x_1(\beta)$. Из уравнения (I3) и равенств (I4), положив $\beta<0$, от противного получаем, что для $x>0$ и $\beta<0$ выполнено неравенство $y''(x,\beta)\leqslant 0$.

Продифференцируем уравнение (I3) и положим $x=x_1(\beta)$. Получим:

$$y'''(1,\beta)=(y(x_1,\beta)-1)^{-1}x_1(\beta)y^{IV}(x_1,\beta). \tag{I5}$$

Так как $y''(x,\beta)<0$ при $\beta<0$, то $y(x_1,\beta)<\frac{1}{2}x_1(\beta)$. Из неравенства $y'(x,\beta)<$ $<1+(\beta-1)x+\frac{1-\beta}{2}x^2$ следует оценка для $x_1(\beta)$. Имеем: $x_1(\beta)<(1-\beta+\sqrt{\beta^2-\beta})<1$, значит, $y(x_1,\beta)<1$, $y'''(x_1,\beta)>0$, то есть B_1 и B_3 содержат интервал $(-\infty,0)$.

При $\beta\to 1$ функция $y(x_1,\beta)\to\infty$, поэтому из равенства (I5) следует, что $y'''(x_1,\beta)<0$ для β, близких к единице, так что $\sup B_3=\bar\beta<1$. По определению точки $\bar\beta$ неравенство $y'''(x_1,\beta)<0$ не может иметь места, поэтому $y''(x_1,\beta)=0, y'''(x_1,\bar\beta)>0$, и функция $y''(x,\bar\beta)$ меняет знак в точке $\bar\beta$. Это означает включение $\bar\beta\subset B_2$. Итак, B_2 непусто, открыто и ограничено снизу нулем: $B_2=U(\alpha_i,\beta_i)$, $\alpha_i\geqslant 0$. Пусть $\bar\beta\subset(\alpha_{i_0},\beta_{i_0})$. Так как $\alpha_{i_0}\subset B_1$, то

$$y''(x,\alpha_{i_0})\leqslant 0,\quad \lim_{x\to+\infty}y'(x,\alpha_{i_0})<0,\quad \lim_{x\to\infty}y(x,\alpha_{i_0})=-\infty.$$

При изменении β в конечном интервале $\alpha_{i_0},\bar\beta$ функция $y_2(\beta)=y(x_2,\beta)$ непрерывно меняется от $-\infty$ до положительной величины $y_1(\bar\beta)$. Нам осталось отметить, что после замены $y=y_2(\beta)\tilde y$, $x=x_2(\beta)\tilde x$ мы получим решения задачи (I), (I′) при $\lambda=2y_2(\beta)$.

В заключение приношу благодарность А.Д. Мышкису за ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. S.W.Juan and Finkelstein, Trans. of the ASME, 78, n° 4, 719, 1956.
2. Abracham S. Berman, Jorn. of Appl. Phys. 24, n°9, 1959.
3. I.R.Sellars, Jorn. of Appl. Phys. 27, 489, 1955.
4. S.W.Juan, Jorn. of Appl. Phys. 27, n°3, 1956.
5. Г.В. Щербина, Ламинарный поток вязкой жидкости в канале с пористыми стенками, Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, Киев, 1964.
6. R.M.Terrill F.W.Thomas, Appl. Scien. Res. 21, 37-67, 1969.
7. В.С. Темкина, Г.В. Щербина, Ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в пористой трубе с равномерным отсосом, Сб. ФТИНТ, Вопросы гидродинамики и теплообмена в криогенных системах, 1970.

ON BOUNDARY-VALUE PROBLEM FROM VISCOUS-FLUID FLOW THEORY

L.V.Shcherbina.

The nonlinear boundary-value problem which arose when studying axisymmetric flow of viscous fluid in a porous tube with a uniform suction on the walls is considered. The nonuniqueness of the solution is proved and it is elucidated at which additional reguirements for the solution the uniqueness takes place.

К О Р О Т К И Е   С О О Б Щ Е Н И Я

СТРУКТУРА ФАКТОРОВ И МОДУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В.Я. Голодец

1. В этой заметке мы опишем свойства факторов типа III, обладающих модулярным оператором (МО) [3] с чисто точечным спектром. В частности, нас будет интересовать вопрос о том, являются ли такие факторы бесконечными тензорными произведениями факторов типа I_n (БТПФ I).

Мы установим, что факторы, которые обладают МО с чисто точечным спектром и у которых множество асимптотических отношений (МАО) [4] есть множество $[0,\infty)$, являются БТПФI.

2. Обозначим через R_λ $(0<\lambda<1)$ (а также через R_∞) стандартные факторы типа III, являющиеся БТПФI, МАО которых есть [4] λ^n $(n=0,\pm 1,\dots)$, (а также $[0,\infty)$).

Т Е О Р Е М А 2.1. Пусть M – аппроксимативно конечный фактор типа III в сепарабельном гильбертовом пространстве H, ρ – точное нормальное состояние на M, Δ_ρ – МО для M, определяемый ρ [3], σ_t^ρ $(-\infty<t<\infty)$ – однопараметрическая группа модулярных автоморфизмов M, определяемая Δ_ρ [3], M_ρ – неймановская подалгебра M, содержащая все элементы $x\in M$, для которых

$$\sigma_t^\rho(x)=x \quad (-\infty<t<\infty).$$

(M_ρ – II – алгебра, а ρ – точный нормальный след на M_ρ).

Пусть спектр Δ_ρ $(S_\rho\Delta_\rho)$ чисто точечный и образует счетную подгруппу мультипликативной группы вещественных чисел с образующими λ_i $(i=1,2,\dots)$, где $0<\lambda_i\leq 1$. Тогда, если M_ρ – II_1-фактор, то $R=\bigotimes_{i=1}^{\infty} R_{\lambda_i}$.

Л Е М М А 2.2. Пусть выполнены все предположения теоремы 2.1, кроме предположения о том, что M_ρ – II_1 – фактор (предположение об аппроксимативной конечности M необязательно). Тогда, если в M существуют центральные последовательности (x_n^j), где $\sigma_t^\rho(x_n^j)=\lambda_j^{it}(x_n^j)$ для всякого $j=1,2,\dots$, то

1) M_ρ – II_1 – фактор,

2) $M\otimes R_{\lambda_j}\approx M$.

Доказательства теоремы и леммы содержатся в [5].

3. Исследуем факторы N типа III, у которых МО имеет чисто точечный спектр.

Т Е О Р Е М А 3.1. Пусть N – аппроксимативно конечный фактор типа III в сепарабельном гильбертовом пространстве, ν – точное нормальное состояние на N, Δ_ν – МО для N, построенный по ν. Если спектр Δ_ν чисто точечный, то

1) $N\otimes R_\infty\approx R_\infty$,

2) если $N\otimes R_\infty\approx N$, т.е. МАО N есть $[0,\infty)$, то $N\approx R_\infty$, а значит N является БТПФI.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. 1) Обозначим $R=\bigotimes_{i=1}^{\infty} N_i$, где $N_i=N$ $(i=1,2,\dots)$ и пусть $\mu=\prod_{i=1}^{\infty}\nu_i$, где $\nu_i=\nu$ $(i=1,2,\dots)$ – состояние на R. Ясно, что $S_\rho\Delta_\mu$ есть группа, образующими которой являются собственные значения МО Δ_ν для N. Воспользовавшись леммой 2.2, заключаем, что R_μ – II_1 – фактор. Но тогда согласно теореме 2.1 аппроксимативно конечный фактор R является БТПФI. Следовательно, $R\otimes R_\infty\approx R_\infty$ [4]. С другой стороны, $N\otimes R\approx N\otimes(\bigotimes_{i=1}^{\infty} N_i)\approx R$, поэтому $N\otimes R_\infty\approx N\otimes R\otimes R_\infty\approx R\otimes R_\infty\approx R_\infty$ и 1) доказано.

2) Так как по предположению $N\approx N\otimes R_\infty$, а $N\otimes R_\infty\approx R_\infty$ в силу 1), то $N\approx R_\infty$, что доказывает 2).

4. Стандартный способ построения факторов типа III состоит в использовании конструкции скрещенного произведения [2]. Пусть A – коммутативное неймановское кольцо умножения на измеримую ограниченную функцию в сепарабельном гильбертовом пространстве $H=L_2(X,\mu)$ с точным нормальным следом μ, а G – счетная дискретная свободно действующая группа автоморфизмов A, оставляющих μ квазиинвариантным. Тогда скрещенное произведение $G\times A$ – фактор, МО которого есть оператор умножения на функцию $\frac{d\mu(g^{-1}x)}{d\mu(x)}$ $(g\in G)$ в пространстве $e(g)\otimes H$, где $e(g)$ – характеристическая функция точки $g\in G$.

Заметим, что для любой счетной группы G кольцо A можно построить таким образом, чтобы μ была достаточно сложной (т.е. G - эргодической, G - квазиинвариантной, не эквивалентной G - инвариантной мере), а производные Радона были кусочно постоянными функциями. Соответствующий МО тогда будет иметь чисто точечный спектр.

Л Е М М А 4.I. Пусть G - аппроксимативно конечная (АК) группа автоморфизмов стандартного пространства X с вероятностной мерой μ, оставляющих μ квазиинвариантной, тогда существует мера ν на X, эквивалентная μ, у которой

$$\frac{d\mu(gx)}{d\mu(x)},$$

где $g \in G$, - кусочно постоянные функции.

Отметим, что если G - АК группа автоморфизмов коммутативного кольца A, то $G \times A$ - АК фактор. Впрочем, если G - счетная разрешимая группа, то G, по-видимому, не всегда можно реализовать как АК группу автоморфизмов А, тем не менее, $G \times A$ - всегда АК фактор и результаты, развитые в п.п. 2-3, применимы и в этом случае.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. М.А. Наймарк, Нормированные кольца, М., I969.

2. J.Dixmier, Les algebres d'operators dan's l'espase hilbertione, Gauthier-Villars, 1969.

3. M.Takesaki, Tomita's theory of modular hilbert algebras and its applications, Lecture Notes in Math.'28, Berlin, 1970.

4. H.Araki, E.I.Woods, A classifications of factors. Publ.RIMS Kyoto Univ., Ser.A.3, 1968, 51-130.

5. В.Я. Голодец, Определение структуры фактора по спектру его модулярного оператора, Препринт, ФТИНТ АН УССР, Харьков, I972.

FACTOR STRUCTURE AND MODULAR OPERATORS

V.Ya.Golodets

The work investigates the structure of the factors possessing a modular operator with a purely point spectrum.

Р Е Ф Е Р А Т Ы

УДК 517.55

ЗАМЕЧАНИЕ О СУЩЕСТВОВАНИИ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С ЗАДАННЫМ КРУГОВЫМ ИНДИКАТОРОМ ПРИ УТОЧНЕННОМ ПОРЯДКЕ. П.З. Агранович. Математическая физика и функциональный анализ, вып. Ш, 1972, стр.5.

Доказано, что для любой плюрисубгармонической функции $V(z)$, заданной в пространстве $\mathbb{C}^n$ и удовлетворяющей условию

$$V(uz) = |u|^\rho V(z), \quad u \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}^n$$

при $\rho \neq 0$, и любого уточненного порядка $\rho(r)$ ($\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty$), существует хотя бы одна целая функция конечного порядка ρ такая, что ее круговой индикатор равен функции $V(z)$.

В случае когда $\rho = 0$, для любого нулевого уточненного порядка $\rho(r)$, удовлетворяющего условию

$$\frac{\rho'(r)}{\rho(r)}\, r \ln r \to 0 \qquad \text{при} \qquad r \to \infty,$$

существует целая функция, круговой индикатор которой равен произвольно заданной константе.

Библиографических ссылок 4.

УДК 539.3:534,1

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ БЕЗМОМЕНТНЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ ОБОЛОЧЕК. В.И. Бабенко. Математическая физика и функциональный анализ, вып. Ш, 1972, стр.8.

Показано, что критерий неустойчивости оболочек, полученный ранее автором из вариационного принципа "В" А.В. Погорелова, можно получить из общего вариационного принципа теории оболочек без предположения об изометричности в основном приближении деформированной и недеформированной форм оболочек.

Рассмотрен случай, когда выпучивание оболочки начинается у ее края. Оказалось, что условия закрепления края оболочки могут существенно изменить асимптотику для критической нагрузки.

Библиографических ссылок 4.

УДК 519.949

ОБ АСИМПТОТИКЕ МОМЕНТОВ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. ДИСКРЕТНОЕ ВРЕМЯ. М.М. Бендерский. Математическая физика и функциональный анализ, вып. Ш, 1972, стр.15.

Рассматривается линейная разностная система в R^n, матрица которой зависит от значений однородной марковской цепи. Предлагается метод определения моментов решений данной системы, на основе которого изучается их асимптотика. Доказано, что замена матрицы системы ее средним значением при малых возмущениях изменяет асимптотический показатель для математического ожидания решения на величину, которая имеет порядок дисперсии возмущения.

Зависимость асимптотического показателя от параметров флуктуаций изучается на конкретных системах, матрица которых зависит от значений конечнозначной марковской цепи.

Библиографических ссылок 4.

УДК 519.4:517:513:88

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МОДУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. В.Я. Голодец. Математическая физика и функциональный анализ, вып. Ш, 1972, стр.22.

В настоящей работе найдены общие спектральные свойства семейства модулярных операторов Δ_ω [9], где ω пробегает все точные нормальные состояния фактора M в сепарабельном гильбертовом пространстве. В качестве приложения полученные результаты используются для различения алгебраически не изоморфных факторов.

Библиографических ссылок 15.

УДК 517.9:539.3

ОБ УРАВНЕНИЯХ УПРУГОЙ СРЕДЫ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ МЕЛКИХ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ. В.П. Котляров, Е.Я. Хруслов. Математическая физика и функциональный анализ, вып. Ш, 1972, стр. 39.

Рассматривается краевая задача, описывающая равновесие упругой среды с впаянными в нее абсолютно твердыми телами. Исследуется асимптотическое поведение решения такой задачи, когда число тел неограниченно возрастает, а диаметры их уменьшаются так, что суммарный объем тел τ стремится к нулю. Найдены первые два члена асимптотического разложения решения по степеням τ. Полученная асимптотика позволяет найти поправки к реологическим параметрам упругой среды с большим числом мелких твердых включений.

Библиографических ссылок 4.

УДК 517.9:532

ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ Л.А. СЛОБОЖАНИНА "ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВЕТВЛЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ". Б.В. Логинов. Математическая физика и функциональный анализ, вып. Ш, 1972, стр. 52.

Рассматривается задача о формах равновесия вращающейся вязкой капиллярной жидкости, заключенной между двумя плоскими параллельными пластинами. Жидкость имеет постоянный объем и вращается в условиях невесомости вокруг оси, нормальной к пластинам.

Задаче отвечает нелинейное функциональное уравнение. Методами теории ветвления исследован случай трехкратного собственного значения линеаризованного уравнения.

Биолиографических ссылок 7.

УДК 513.88: 517.51

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ. Ю.И.Любарский. Математическая физика и функциональный анализ, вып.Ш, 1972, стр. 56.

В статье рассмотрена задача об аппроксимации в широком классе нормированных пространств функций на вещественной оси, содержащем, например, пространства L^p_φ с растущим весом. Доказано, что каждую целую функцию экспоненциального типа σ (ц.ф.э.т. σ), принадлежащую пространству рассматриваемого класса, можно приблизить в норме этого пространства тригонометрическими полиномами степени $\sigma+\varepsilon$, где ε - произвольное положительное число. Найдены необходимые и достаточные условия того, что любую ц.ф.э.т. σ из пространства можно приблизить тригонометрическими полиномами степени точно σ. Тем самым обобщены результаты Н.И. Ахиезера, В.А. Марченко и Л.И. Ронкина, относящиеся к пространству непрерывных на вещественной оси функций с весом.

Библиографических ссылок 13.

УДК 517.564

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ХАНКЕЛЯ. А.С. Сохин. Математическая физика и функциональный анализ, вып. Ш, 1972, стр.68.

В работе рассмотрены некоторые преобразования, переводящие функции $e^{i\lambda x}$ $(x>0, \Im m\,\lambda>0)$ в функции Ханкеля-Риккати

$$h_\alpha(\lambda x) = i e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\pi\lambda x}{2}}\, H^{(1)}_{\alpha+\frac{1}{2}}(\lambda x), \quad \alpha > -\frac{1}{2}$$

($H^{(1)}_\rho(x)$ - функция Ханкеля первого рода). Для ядер преобразований приведены выражения через гипергеометрическую функцию.

Библиографических ссылок 4.

УДК 517.94

О РОСТЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. В.А.Ткаченко. Математическая физика и функциональный анализ, вып.Ш, 1972, стр. 71.

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z)+P_{n-2}(z)^{(n-2)}(z)+\ldots+P_0(z)y(z)=\lambda^n y(z) \qquad (n\geq 2),$$

в котором $P_0(z),\ldots,P_{n-2}(z)$ – полиномы степеней $m_0,\ldots,m_{n-2}$ соответственно, а λ – произвольный комплексный параметр. Доказано, что фундаментальная система решений $\{y_k(z,\lambda)\}_1^n$ этого уравнения, нормированная единичной матрицей начальных условий в точке $z=0$, удовлетворяет при всех достаточно больших значениях $|z|$ и $|\lambda|$ оценкам

$$|y_k(z,\lambda)|\leq|\lambda|^{c|z|^\rho}\exp c|\lambda z|,$$

где C – некоторая положительная постоянная и

$$\rho=\max_{0\leq k\leq n-2}\frac{m_k-k+n}{n-k}.$$

Библиографических ссылок 2.

УДК 519.4:513.88

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ИЗОМЕТРИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ. Г.М. Фельдман. Математическая физика и функциональный анализ, вып. Ш, 1972, стр. 77.

Пусть G – сепарабельная локально компактная абелева группа, G^* – ее группа характеров, T – изометрическое $(\|T_g\|=1)$ представление группы G в банаховом пространстве X, $\sigma(T)$ – спектр представления в смысле Ю.И. Любича (ДАН СССР, т. 200, № 4, 1971). Доказывается, что если X слабо полно, а $\sigma(T)$ – счетное множество Хелсона, то собственные подпространства представления образуют безусловный базис в X.

Библиографических ссылок 5.

УДК 513.88

О СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ НЕКВАЗИАНАЛИТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА. Г.М. Фельдман. Математическая физика и функциональный анализ, вып. Ш, 1972, стр. 81.

Понятие спектрального подпространства для операторов в банаховом пространстве было определено различными способами в нескольких независимых работах (РЖ Мат 1957, 3292; 1962 2Б 283; 1964 8Б 465). В реферируемой работе устанавливается эквивалентность этих определений в классе операторов, удовлетворяющих условию неквазианалитичности

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\ln\|T^n\|}{1+n^2}<\infty.$$

В этом классе каждому компакту K на единичной окружности, содержащему точки спектра, внутренние в смысле топологии спектра, отвечает спектральное подпространство $L(K)\neq 0$. В работе приводится пример изометрического оператора $T(\|T\|=\|T^{-1}\|=1)$, для которого $L(K)\neq 0$ только при наличии в K внутренних точек. С другой стороны, построен пример изометрического оператора без собственных векторов, для которого $L(K)\neq 0$ тогда и только тогда, когда компакт K несчетен.

Библиографических ссылок 14.

УДК 517.946

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ В ОБЛАСТЯХ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ. В.Н. Фенченко. Математическая физика и функциональный анализ, вып. Ш, 1972, стр. 88.

Рассматривается электростатическое поле в среде, содержащей большое число мелких инородных включений $F_i^{(N)}$. Для оценки влияния включений на потенциал поля вводятся тензоры

$$A_{k,e}^{i,N}=\delta_{ik}\tau_i^{(N)}+P_{k,e}^{i,N},$$

где $\tau_i^{(N)}$ – объем включения, а $P_{k,e}^{i,N}$ – тензор его поляризации.

Показано, что в случае, когда число включений возрастает, а их суммарный объем $\tau^{(N)} \to 0$, потенциал поля $u^{(N)}_{(x)}$ может быть представлен в виде

$$u^{(N)}(x) = u^{(0)}(x) + V(x)\tau^{(N)} + O(\tau^{(N)}).$$

Здесь $u^{(0)}(x)$ - потенциал поля в однородной среде, а для функции $V(x)$ дано явное выражение.

Из полученного представления следует, что среда с большим числом инородных включений может рассматриваться как сплошная с иной диэлектрической проницаемостью.

Библиографических ссылок 2.

УДК 517.9:532

К ВОПРОСУ О ФОРМЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ. Г.В. Щербина. Математическая физика и функциональный анализ, вып. III, 1972, стр. 96.

Рассматривается следующая задача.

На плоскости находится бесконечный слой идеальной несжимаемой жидкости. Высота слоя жидкости над плоскостью стремится на бесконечности к единице. Течение жидкости считается потенциальным и установившимся. На плоскости через ограниченное отверстие производится отсос. Распределение скоростей в отверстии считается заданным, сила тяжести и поверхностное натяжение учитываются.

Краевое условие на неизвестной свободной поверхности, как известно, нелинейно, поэтому задача сводится к отысканию решения нелинейного операторного уравнения $f = Bf$ в некотором функциональном пространстве. Показывается, что при малых стоках оператор B является сжимающим и переводит некоторую сферу нашего пространства в себя.

Библиографических ссылок 2.

УДК 517.9:532

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ИЗ ТЕОРИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ. Г.В. Щербина. Математическая физика и функциональный анализ, вып. III, 1972, стр.101.

В работе рассматривается вопрос о единственности решения одной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка, зависящего от параметра λ. Эта задача возникла при изучении осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости в бесконечной трубе с равномерным отсосом на стенках, λ - здесь число Рейнольдса. В работе доказывается, что при малых λ существует по крайней мере два решения, причем одно из них неограниченно растет при $\lambda \to 0$ и таково, что у пористой стенки имеется течение в сторону, противоположную основному потоку. Показывается, что условие отсутствия возвратных течений при $0 < \lambda < 1$ позволяет получить априорные оценки для решения задачи, которые дают возможность доказать единственность решения в этом случае.

Библиографических ссылок 7.

УДК 519.4:517:513:88

СТРУКТУРА ФАКТОРОВ И МОДУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. В.Я. Голодец. Математическая физика и функциональный анализ, вып. III, 1972, стр. 105.

В работе исследуется структура факторов, обладающих модулярным оператором с чисто точечным спектром.

Библиографических ссылок 5.

БЦ 20450 , подписано к печати от 24/XI972г., физ.п.л. 7,0 , усл. п.л. 7,0 ,
заказ 404 , тираж 500 . Цена 70 коп.

Ротапринт ФТИНТ АН УССР, Харьков,86, пр. Ленина, 47.