ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

КИЕВ «НАУКОВА ДУМКА» 1981

УДК 513.88+519.21+517.5+517.9

В сборнике приведены результаты исследований по математическому анализу, теории функций, дифференциальным уравнениям и их приложениям. Рассмотрены алгебры фон Неймана и их автоморфизмы, аналитические свойства функций одной или нескольких комплексных переменных, построена задача Неванлинна – Пика с любыми индексами дефекта. Изучено асимптотическое поведение решений и функций Грина уравнений математической физики в средах сложной структуры. Найдены специальные решения нелинейных дифференциальных уравнений. Описаны самосопряженные расширения дифференциальных операторов.

Для математиков, а также преподавателей и студентов математических факультетов.

Редакция информационной литературы

Т $\frac{20203-177}{М221(04)-81}$ 173-81 1702050000

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 519.21

Н.М.Бланк, И.В.Островский

О ФУНКЦИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ, БЛИЗКИХ К НОРМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Россберг [1] доказал следующую теорему. Пусть $F(x)$ - безгранично делимая, $\Phi(x)$ - стандартная нормальная функция распределения. Если

$$F(x) = \Phi(x) \quad \text{при} \quad x \leq 0, \tag{1}$$

то

$$F(x) \equiv \Phi(x). \tag{2}$$

Ридель [2] установил, что утверждение (2) этой теоремы сохранит силу, если условие (1) заменить менее ограничительным

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) / \Phi(x) = 1. \tag{3}$$

В работах И.А.Ибрагимова [3] и одного из авторов [4] получены обобщения теоремы Россберга в направлении ослабления ограничений на $F(x)$ и $\Phi(x)$. В частности, из результата [4] следует, что из (1) будет вытекать (2), если $\Phi(x)$ считать по-прежнему стандартной нормальной функцией распределения, а относительно функции $F(x)$ предполагать лишь, что она принадлежит классу $\mathcal{L}_0$, состоящему из функций ограниченной вариации (вообще говоря, комплекснозначных), удовлетворяющих условиям:

1) $F(-\infty) = 0, \quad F(x-0) = F(x)$;

2) характеристическая функция

$$\varphi(t;F)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x),$$

представляет граничные значения некоторой функции (будем обозначать ее также через $\varphi(t;F)$), аналитической в полуплоскости $Im\,t>0$ и не обращающейся там в нуль.

Возникает вопрос, будет ли из (3) вытекать (I), если предполагать, что $F(x)\in\mathcal{L}_0$. Ответ на этот вопрос оказывается отрицаиельным. В самом деле, положим $F(x)=(F_1*F_2)(x)$, где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – функции распределения с плотностями

$$F_1'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^2e^{-x^2/2},\qquad F_2'(x)=e^{-x}\max(x,0).$$

Так как $\varphi(t;F)=(1-t^2)e^{-t^2/2}(1-it)^{-2}$, то $F(x)\in\mathcal{L}_0$ и $F(x)\not\equiv\Phi(x)$. С другой стороны, дважды применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{F(x)}{\Phi(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{F'(x)}{\Phi'(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\int_{-\infty}^{x}(x-u)e^{u}u^2e^{-u^2/2}du}{e^{-x^2/2+x}}=1.$$

Однако положение можно исправить, если ввести более сильное предположение, чем (3).

<u>Теорема.</u> Пусть $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения, а $F(x)\in\mathcal{L}_0$. Предположим, что при $x<0$ выполняется

$$\left|\frac{F(x)}{\Phi(x)}-1\right|\le e^{-|x|R(x)},\tag{4}$$

где $\lim\limits_{x\to-\infty}R(x)=+\infty$. Тогда $F(x)\equiv\Phi(x)$.

<u>Доказательство.</u> Положим

$$h(t)=\varphi(t;F)-e^{-t^2/2}.$$

Функция $h(t)$ аналитична в полуплоскости $Im\,t>0$. Покажем, что для нее справедлива оценка

$$|h(t)| \le exp\left\{|t|^2/2 - |t|\,\omega(|t|)\right\}, \qquad Im\,t \ge 0 \quad , \qquad (5)$$

где $\lim\limits_{u\to+\infty} \omega(u) = +\infty$

Имеем при $Im\,t \geqslant 0$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{itx} d(F(x) - \Phi(x)) + O(1) = -it\int_{-\infty}^{0} e^{itx}(F(x) - \Phi(x))dx + O(1).$$

Используя условие (4), получаем

$$|h(t)| \le |t|\int_{-\infty}^{0} exp\left\{|tx| - \frac{1}{2}x^2 - |x|\mathcal{R}(x)\right\}dx + O(1)\ .$$

Считая далее (это не уменьшает общности) функцию $\mathcal{R}(x)$ монотонной и больше I, получаем

$$|h(t)| \le |t|\int_{-\infty}^{-|t|/3} exp\left\{\frac{1}{2}(|t|^2 + x^2) - \frac{1}{2}x^2 - |x|\mathcal{R}(x)\right\}dx \ +$$
$$+ |t|\int_{-|t|/3}^{0} exp\left\{|tx|\right\}dx + O(1) = |t|\,exp\left\{\frac{1}{2}|t|^2\right\}\int_{-\infty}^{-|t|/3} exp\left\{-|x| \times\right.$$
$$\left.\times(\mathcal{R}(x) - 1)\right\}e^{x}dx + |t|\,exp\left\{\frac{1}{3}|t|^2\right\} + O(1) \le$$
$$\le |t|\,exp\left\{\frac{1}{2}|t|^2\right\}\, exp\left\{-\frac{1}{3}|t|(\mathcal{R}(-\frac{1}{3}|t|) - 1)\right\} +$$
$$+ |t|\,exp\left\{\frac{1}{3}|t|^2\right\} + O(1) =$$
$$= exp\left\{\frac{1}{2}|t|^2\right\}\left[exp\left\{-\frac{1}{3}|t|(\mathcal{R}(-\frac{1}{3}|t|) - 1) + \ln|t|\right\} +\right.$$
$$\left.+ exp\left\{-\frac{1}{6}|t|^2 + \ln|t|\right\} + O\left(exp\left\{-\frac{1}{2}|t|^2\right\}\right)\right] \quad ,$$

откуда следует справедливость (5).

Из определения класса $\mathcal{L}_0$ и оценки (5) видно, что теорема будет доказана, если будет установлена справедливость следующего утверждения.

Лемма. Пусть $\varphi(t)$ – функция, аналитическая в полуплоскости $Im\,t > 0$ и не обращающаяся там в нуль. Предположим, что функция $h(t) = \varphi(t) - e^{-t^2/2}$ удовлетворяет условиям*:

$$\text{а)}\ |h(t)| \leq \exp\left\{C_1(|t|+1)^{\alpha}\right\};\ \alpha>2,\ \ Im t>0; \qquad (6)$$

$$\text{б)}\ |h(iy)| \leq \exp\left\{y^2/2 - y\omega(y)\right\},\ y>0,\ \lim_{y\to+\infty}\omega(y)=+\infty. \qquad (7)$$

Тогда $h(t) \equiv 0$.

Доказательство. Рассмотрим аналитическую в круге $|z|<1$ функцию

$$\phi(z) = \varphi\left(\frac{1}{i}\,\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Эта функция не имеет нулей, в силу (6) она допускает оценку

$$|\phi(z)| \leq \exp\left\{C_2(1-|z|)^{-\alpha}\right\}. \qquad (8)$$

Поэтому неванлинновская характеристика $T(r,\phi)$ функции $\phi(z)$ допускает оценку

$$T(r,\phi) = O((1-r)^{-\alpha}).$$

Полагая в неравенстве Неванлинны ([5], с.54, неравенство (7.1)) $R=(1+r)/2$ и пользуясь известным свойством характеристики ([5], с.45/, равенство (6.7) при $\alpha=0$), получаем

$$\ln\left|1/\phi(re^{i\varphi})\right| \leq \frac{4}{1-r}\,T\left(\frac{1+r}{2},\frac{1}{\phi}\right) = \frac{4}{1-r}\left\{T\left(\frac{1+r}{2};\phi\right)+O(1)\right\} =$$
$$= O\left((1-r)^{-\alpha-1}\right).$$

Отсюда и из (8) следует, что

$$\left|\ln|\phi(z)|\right| \leq C_3(1-|z|)^{-\alpha-1}. \qquad (9)$$

Рассмотрим аналитическую в полуплоскости $Im t>0$ функцию $g(t)=\ln\varphi(t)$. В силу (9) ее действительная часть допускает оценку

---

* Буквой С с индексами ниже обозначаются положительные постоянные.

$$|Re\, g(t)| = |\ln|\varphi(\tfrac{t-i}{t+i})|| \le C_3 \left(\frac{|t+i|}{|t+i|-|t-i|}\right)^{\alpha+1}, \quad Im\, t > 0,$$

откуда

$$|Re\, g(t)| \le C_4 |t|^{2\alpha+2}, \qquad Im\, t \ge 1 .$$

В силу формулы Шварца ([6], с.178) имеем

$$g'(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} Re\, g(t+e^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta, \quad Im\, t \ge 2,$$

поэтому

$$|g'(t)| \le C_5 |t|^{2\alpha+2}, \qquad Im\, t \ge 2 ,$$

и, следовательно,

$$|g(t)| \le C_6 |t|^{2\alpha+3}, \qquad Im\, t \ge 2 . \tag{10}$$

Нам достаточно установить, что $g(t) \equiv -t^2/2$. Предполагая противное, рассматриваем функцию

$$g_1(t) = \left\{g(t) + t^2/2\right\}(t+i)^{-2\alpha-3} .$$

Эта функция не равна тождественно нулю, аналитична в полуплоскости $Im\, t \ge 2$ и в силу (10) ограничена в этой полуплоскости. Отсюда следует ([7], с.317), что

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\, y^{-1}\ln|g_1(iy)| > -\infty , \text{ и поэтому}$$

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\, y^{-1}\ln|g(iy) - y^2/2| > -\infty . \tag{11}$$

Но, с другой стороны, так как

$$g(t) + t^2/2 = \ln(1 + e^{t^2/2}h(t)),$$

то из условия (7) имеем

$$g(iy) - y^2/2 = O(\exp(-y\omega(y))), \qquad y \to +\infty,$$

что противоречит (II). Лемма доказана, а вместе с ней и теорема.

Нетрудно привести пример функции $F(x) \in \mathcal{L}_0$ такой, что $F(x) \neq \Phi(x)$ и для некоторой постоянной $c > 0$ выполняется

$$\left| \frac{F(x)}{\Phi(x)} - 1 \right| < \exp(-c|x|), \qquad x < 0. \tag{12}$$

Такой пример дает функция

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} (\exp(cu - \tfrac{1}{2}c^2) + 1)\, du,$$

для которой $\varphi(t; F) = e^{-t^2/2}(e^{itc} + 1)$.

Можно поставить вопрос, существует ли отличная от стандартной нормальной функции распределения функция $F(x) \in \mathcal{L}_0$, удовлетворяющая условию (12) и являющаяся, кроме того, функцией распределения. В этом направлении мы можем утверждать следующее. Существуют функции распределения $F(x) \in \mathcal{L}_0$, $F(x) \neq \Phi(x)$, такие, что

$$\left| \frac{F(x)}{\Phi(x)} - 1 \right| < \exp(-c\sqrt{|x|}), \qquad c > 0, \quad x < 0. \tag{13}$$

Построим соответствующий пример.

Пусть $d = \sum_{k=1}^{\infty} (k + \frac{1}{2})^{-4}$, положим

$$\varphi(t) = e^{-t^2/2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{d(k+\frac{1}{2})^4}\right)\left(1 - \frac{it}{2\sqrt{d}\,(k+\frac{1}{2})^2}\right)^{-2}.$$

Так как

$$\varphi(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \theta\left(\frac{t}{\sqrt{d}\,(k+\frac{1}{2})^2}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \tau\left(\frac{t}{2\sqrt{d}\,(k+\frac{1}{2})^2}\right),$$

где

$$\theta(t)=(1-t^2)e^{-t^2/2}, \qquad g(t)=(1-it)^{-2}$$

являются характеристическими функциями функций распределения, то $\varphi(t)$ является характеристической функцией некоторой функции распределения $F(x)\in \mathcal{L}_0$. Покажем, что $F(x)$ удовлетворяет условию (13).

Легко видеть, что

$$\varphi(t)=e^{-t^2/2}\cos\pi\sqrt{\frac{t}{\sqrt{d}}}\cos\pi\sqrt{-\frac{t}{\sqrt{d}}}\cos^{-2}\pi\sqrt{\frac{it}{2\sqrt{d}}}.$$

Поэтому

$$\varphi(t)-e^{-t^2/2}=e^{-t^2/2}\left\{\cos\pi\sqrt{-\frac{2it}{\sqrt{d}}}-1\right\}\left\{\cos\pi\sqrt{\frac{2it}{\sqrt{d}}}+1\right\}^{-1},$$

откуда

$$|\varphi(t)-e^{-t^2/2}|\le|e^{-t^2/2}|\left\{ch\left(\pi\, Im\sqrt{-\frac{2it}{\sqrt{d}}}\right)+1\right\}\times$$

$$\times\left\{\left|sh\left(\pi\, Im\sqrt{\frac{2it}{\sqrt{d}}}\right)\right|-1\right\}^{-1}.$$

Замечая, что $\left|Im\sqrt{\pm\frac{2it}{\sqrt{d}}}\right|=\sqrt{\frac{2|t|}{\sqrt{d}}}\left|\sin\left(\frac{\varphi}{2}\pm\frac{\pi}{4}\right)\right|$, $\varphi=\arg t$, $0<\varphi<\pi$,

получаем при достаточно больших $|t|$

$$|\varphi(t)-e^{-t^2/2}|\le|e^{-t^2/2}|C_7\exp\left\{\pi\sqrt{\frac{2|t|}{\sqrt{d}}}\left(\left|\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right\}\le$$

$$\le|e^{-t^2/2}|C_8\exp\left\{-C_9\sqrt{|t|}\sin\varphi\right\}. \tag{14}$$

По формуле обращения имеем

$$2\pi(F'(x)-\Phi'(x))=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}(\varphi(t)-e^{-t^2/2})\,dt.$$

Будем считать далее, что $x<0$. В силу оценки (14) интегрирование по действительной оси можно заменить интегрированием по ломаной L, состоящей из двух лучей $\left\{\sqrt{2}|x|\le|t|<\infty, \arg t=\pm\frac{\pi}{4}\right\}$, соединенных отрезком $\left\{-|x|\le Re\,t\le|x|,\ Im\,t=|x|\right\}$. Совершив такую замену, с помощью (14) получим

$$2x\,|F'(x)-\varphi'(x)| \le 2C_8 \int\limits_{|x|\sqrt{2}}^{\infty} \exp\,(xr/\sqrt{2})\,dr \;+$$

$$+\,C_8 \int\limits_{-|x|}^{|x|} \exp\left\{|x|\,x - \frac{1}{2}(u^2-x^2) - C_9\sqrt{|x|}\,/\sqrt{2}\right\} du =$$

$$= 2\sqrt{2}\,C_8 \exp\left\{-x^2\right\} + C_8 \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2 - C_9\sqrt{|x|}/\sqrt{2}\right\} \int\limits_{-|x|}^{|x|} \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} du \le$$

$$\le C_{10} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2 - C_9\sqrt{|x|}\,/\sqrt{2}\right\}.$$

Интегрируя, получаем оценку

$$|F(x) - \Phi(x)| \le \varphi(x) \exp(-C_{11}\sqrt{|x|}\,), \quad x<0,$$

откуда и следует (I3).

I. Rossberg H.J. On a problem of Kolmogorov concerning the normal distribution. - Теория вероятности и ее применение, 1974, I9, вып.4, с.824-828.

2. Riedel M.H. On the oneside tails of infinitely divisible distributions. - Math. Nachr., 1975, 70, S. 155-163.

3. Ибрагимов И.А. Об определении безгранично делимой функции распределения по ее значениям на полупрямой. - Теория вероятности и ее применение, 1977, 22, вып.2, с.393-399.

4. Островский И.В. Об одном классе функций ограниченной вариации на прямой, определяемых своими значениями на полупрямой.- Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1979, 82, с.III-II8.

5. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. - М., Наука, 1970. - 592 с.

6. Линник Ю.В., Островский И.В. Разложение случайных величин и векторов. - М.: Наука, 1972. - 480 с.

7. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. - М.: Гостехиздат, 1956. - 632 с.

УДК 519.46+513.88

С.И.Безуглый, В.Я.Голодец

НЕАМЕНАБЕЛЬНЫЕ ГРУППЫ И ИХ ЭРГОДИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

I. Изучению траекторной (слабой) эквивалентности действий счетных групп автоморфизмов пространств Лебега посвящено в последнее время большое число работ, в которых, в частности, доказана траекторная эквивалентность действий для некоторых классов групп. А именно, для коммутативных [1] и разрешаемых [2] групп установлено, что любое их действие слабоэквивалентно действию группы Z, т.е. аппроксимируемое. Представляется важным выяснить, какие свободные, эргодические и сохраняющие меру действия групп (т.е. действия типа II_1) траекторно эквивалентны. Вполне возможно, что класс счетных групп, имеющих только одно, с точностью до слабой эквивалентности, действие типа II_1 исчерпывается аменабельными группами, причем это действие будет аппроксимируемым.

Неаменабельные группы не могут иметь аппроксимируемых действий типа II_1 [3]. Более того, в настоящей работе мы рассмотрим пример неаменабельной группы, имеющей континуум неэквивалентных действий типа II_1 (см. п.2–4).

Если не предполагать наличия конечной инвариантной меры, то для неаменабельной группы существуют аппроксимируемые действия. Первый, известный нам, пример построен в [4]. Ниже мы приведем конструкцию, позволяющую строить аппроксимируемые, эргодические, свободные действия типов II_∞ и III для счетной группы (см.п.6)*.

Помимо того, показано, что если свободная группа с n образующими имеет аппроксимируемое свободное действие, то, по крайней мере, $n-1$ образующая действует диссипативно (см. п.5).

2. Под действием группы Γ на пространстве Лебега (X, μ) будем понимать ее точное представление в группу автоморфизмов (X, μ). С каждым свободным, эргодическим, сохраняющим конечную меру действием группы Γ связывается, согласно конструкции в [5], фактор типа II_1, который будем обозначать $\mathfrak{M}(X, \Gamma)$.

Если считать, что X – компактная коммутативная группа, а у Γ все классы сопряженных элементов, кроме тривиального, бесконечны (такие группы называются ICC -группами), то можно уточнить вид $\mathfrak{M}(X, \Gamma)$. Группу характеров группы X обозначим через $\hat{X}$, полупрямое произведение групп Γ и $\hat{X}$ – через $\Gamma \circledS \hat{X}$, левое регулярное представление ICC -группы G через $U(G)$. Оказывается, что фактор $\mathfrak{M}(X, \Gamma)$ изоморфен фактору $U(\Gamma \circledS \hat{X})$.

Мы будем пользоваться терминологией и обозначениями работы [6].

Рассмотрим группу $G = \Sigma_{i=1}^{\infty} \oplus H_i$, где для каждого i группа H_i совпадает с некоторой счетной группой H. Обозначим через Δ свободную группу с бесконечным числом образующих δ_1, δ_2, ... Тогда через $L_0(H)$ будем обозначать группу, порож-

---

* В построении примеров аппроксимируемых действий принимал участие Р.Шиков.

денную G и δ, где единственные соотношения между δ_i и элементами G состоят в том, что δ_i коммутирует поэлементно с группой H_j при $j \geq i$. По индукции определяем $L_0^n(H) = L_0(L_0^{n-1}(H))$.

Из определения группы G ясно, что можно добавить элементы $\delta_1, \delta_2, \dots$ к группе $G = \sum_{i_1=1}^{\infty} \oplus G_{i_1}$ и определить соотношения между G_{i_1} и δ_j так, чтобы полученная группа стала изоморфна $L_0(G)$. Затем к каждой из групп G_{i_1} (все G_{i_1} изоморфны G) добавим элементы $\delta_{i_1,1}, \delta_{i_1,2}, \dots$ так, чтобы группа $G_{i_1} = \sum_{i_2=1}^{\infty} \oplus G_{i_1,i_2}$ и элементы $\{\delta_{i_1,j}\}_{j=1}^{\infty}$ порождали группу $L_0(G)_{i_1}$, и определим соотношения между элементами δ_j и $L_0(G)_{i_1}$ так, чтобы группа в целом оказалась изоморфной $L_0^2(G)$. В общем случае к группам $G_{i_1,\dots,i_n}$ (которые изоморфны G) добавим $\{\delta_{i_1,\dots,i_n,j_{n+1}}\}_{j_{n+1}=1}^{\infty}$ так, чтобы группа $G_{i_1,\dots,i_n} = \sum_{i_{n+1}=1}^{\infty} \oplus G_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1}}$ и $\{\delta_{i_1,\dots,i_n,j_{n+1}}\}_{j_{n+1}=1}^{\infty}$ порождали группу $L_0(G)_{i_1,\dots,i_n}$, а группа $\sum_{i_n=1}^{\infty} \oplus$ $\oplus L_0(G)_{i_1,\dots,i_{n-1},i_n}$ и $\{\delta_{i_1,\dots,i_{n-1},j_n}\}_{j_n=1}^{\infty}$ определяли группу $L_0^2(G)_{i_1,\dots,i_{n-1}}$ и т.д., пока не получим группу $L_0^{n+1}(G)$. Обозначим через $\mathcal{L}$ группу $\bigcup_{n=1}^{\infty} L_0^n(G)$.

Далее, будем обозначать через F_1 подгруппу в $\mathcal{L}$, порожденную $\{\delta_{i_1}\}_{i_1=1}^{\infty}$, а через F_n – подгруппу в $\mathcal{L}$, порожденную F_{n-1} и $\{\delta_{i_1,\dots,i_n}\}_{i_1,\dots,i_n=1}^{\infty}$. Положим $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Подгруппу $\mathcal{L}$, определяемую группами $\{G_{i_1,\dots,i_n,j_1,\dots,j_m} : j_1,\dots,j_m = 1,2,\dots,\ m \in \mathbb{N}\}$ и элементами $\{\delta_{i_1,\dots,i_n,j_1,\dots,j_m} : j_1,\dots,j_m = 1,2,\dots,\ m \in \mathbb{N}\}$, будем обозначать через $\mathcal{L}_{i_1,\dots,i_n}$. Д.Макдуфф доказала, что фактор $U(\mathcal{L})$ содержит массивный комплекс бесконечного порядка $\{U(\mathcal{L}), U(\mathcal{L}_{i_1}), \dots, U(\mathcal{L}_{i_1,\dots,i_n}), \dots\}$ [6].

Если обозначить через $L_1(G)$ группу $L_0(G \oplus \mathbb{Z})$, то каждой последовательности $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, согласно [6], поставим в соответствие группу $Q_\alpha = \bigcup_{p=1}^{\infty} Q_{(p)}$, где $Q_{(p)} = L_{\alpha_1} \dots L_{\alpha_p}(G)$. Тогда факторы $U(Q_\alpha)$ имеют массивные комплексы бесконечного порядка и неизоморфны при различных α (см. [6], с.48).

Опишем сначала идею построения континуума неэквивалентных действий типа II_1 группы $\mathcal{L}$. Заменим в $L_0(G \oplus \mathbb{Z})$ группу $\mathbb{Z}$ на группу характеров $\hat{Y}$ некоторой компактной коммутативной группы Y и потребуем, чтобы элементы δ_j $(j=1,2,\dots)$ были автоморфизмами группы $\hat{Y}$ и действовали на $\Sigma_{i=1}^{\infty}\oplus \hat{Y}_i$, $(\hat{Y}_i=\hat{Y})$ в соответствии с определением $L_0(G)$, т.е. автоморфизм δ_j отличен от тождественного автоморфизма только на $\Sigma_{i=1}^{j-1}\oplus\hat{Y}_i$. Получим группу, изоморфную $L_0(G)\circledS\sum_{i=1}^{\infty}\oplus\hat{Y}_i$, и, как будет видно из дальнейшего, в факторе $U(L_0(G)\circledS\Sigma_{i=1}^{\infty}\oplus\hat{Y}_i)$ имеется массивный комплекс первого порядка. Кроме того, можно считать, что задано действие группы $L_0(G)$ (несвободное, эргодическое) на $\Pi_{i=1}^{\infty}Y_i$, $(Y_i=Y)$, сохраняющее меру Хаара. Теперь описанную замену проделаем в каждой группе Q_α. Получим несвободное, эргодическое и сохраняющее меру действие группы $\mathcal{L}\,(=Q_\alpha$, где $\alpha_i=0$, $i=1,2,\dots)$ на некоторой коммутативной группе $Y(\alpha)$. Оказывается, что существует компактная коммутативная группа X такая, что: а) действие $\mathcal{L}$ на $X\times Y(\alpha)$ свободное, эргодическое, сохраняющее конечную меру; б) в факторе $U(\mathcal{L}\circledS\hat{X}\times\hat{Y}(\alpha))$ существует массивный комплекс бесконечного порядка. Пользуясь теми же соображениями, которые устанавливают неизоморфность факторов $U(Q_\alpha)$ [6], можем показать, что факторы $U(\mathcal{L}\circledS\hat{X}\times Y(\alpha))$ неизоморфны и, следовательно, действия $\mathcal{L}$ на $X\times Y(\alpha)$ неэквивалентны при различных α. В последующих пунктах эти рассуждения будут обоснованы.

3. Выделим в $\mathcal{L}$ возрастающую последовательность подгрупп $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$. Положим $E_1=\mathcal{E}_1$; E_n – группа, порожденная $\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_{n-1}$ и E_1. Заметим, что для каждого элемента $g\in\mathcal{L}$ можно однозначно указать последовательность $\{g(n)\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из $\mathcal{L}$ и число $n_g\in\mathbb{N}$ такие, что $g(n)\in E_n$, $g(n)\notin E_{n-1}$ и $g(n)=g$ при $n\geq n_g$. Кроме того, отображение $g\to g(n)$ определяет гомоморфизм группы $\mathcal{L}$ в группу E_n $(n\in\mathbb{N})$.

Для произвольной счетной группы M положим $X_M=\{0,1\}^M$, тогда X_M – компактная коммутативная группа. Обозначим

$$X=\prod_{n=1}^{\infty}X_{E_n}.$$

Определим теперь $Y(\alpha)$, где $\alpha=\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$. Положим $Y_{i_1,\dots,i_n}=\{0,1\}^{F_n}$, где $i_1,\dots,i_n=1,2,\dots,n\in\mathbb{N}$, а F_n – определена в п.2. Определим зависимость $Y_{i_1,\dots,i_n}$ от α следующим образом:

$$Y_{i_1,\dots,i_n}(\alpha) = Y_{i_1,\dots,i_n}(\alpha_{n-1}) = \begin{cases} Y_{i_1,\dots,i_n} & \text{при } \alpha_{n-1}=1; \\ \emptyset & \text{при } \alpha_{n-1}=0 \end{cases}.$$

Положим, наконец,

$$Y(\alpha) = \prod_{i_1=1}^{\infty} Y_{i_1} \times \prod_{i_1,i_2=1}^{\infty} Y_{i_1,i_2}(\alpha_1) \times \dots \times \prod_{i_1,\dots,i_n=1}^{\infty} Y_{i_1,\dots,i_n}(\alpha_{n-1}) \times \dots =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{i_1,\dots,i_n=1}^{\infty} Y_{i_1,\dots,i_n}(\alpha_{n-1}) .$$

Чтобы определить действие $\mathcal{L}$ на $Y(\alpha)$, введем некоторые обозначения. Определим отображение $\tau : \mathcal{L} \to F$. Запишем элемент $g \in \mathcal{L}$ через образующие группы $\mathcal{L}$, т.е. через элементы групп F и G, и каждую образующую, не входящую в F, заменим на единицу группы $\mathcal{L}$. Полученный элемент будем обозначать $\tau(g)$. Очевидно, τ есть гомоморфизм группы $\mathcal{L}$ на группу F. Далее, поскольку $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $(F_n \subset F_{n+1})$, то для любого $f \in F$ можем однозначно указать последовательность $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ и число $n_f \in N$ такие, что $f(n) \in F_n$, $f(n) \notin F_{n-1}$, $f(n) = f$ при $n \geq n_f$. Отображение $f(n): F \to F_n$ также будет гомоморфизмом.

Определим действие образующих $\delta_{n_1,\dots,n_r}$ ($n_1,\dots,n_r = 1,2,\dots$, $r \in N$) группы F на $Y(\alpha)$. Пусть $y^{i_1,\dots,i_n} = \{y_f^{i_1,\dots,i_n}\}_{f\in F_n} \in Y_{i_1,\dots,i_n}(\alpha_{n-1})$, тогда $\delta_{n_1,\dots,n_r}$ не действует тождественно на $y^{i_1,\dots,i_n}$ только если $r \leq n$; $i_1 = n_1,\dots, i_{r-1} = n_{r-1}$, $i_r < n_r$, причем в этом случае

$$\delta_{n_1,\dots,n_r} y^{i_1,\dots,i_n} = \left\{ y^{i_1,\dots,i_n}_{f\delta_{n_1,\dots,n_r}} \right\}_{f\in F_n} .$$

Далее, для каждого $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in Y(\alpha)$ $(y_n \in \prod_{i_1,\dots,i_n=1}^{\infty} Y_{i_1,\dots,i_n}(\alpha_{n-1}))$ и $f \in F$ положим

$$fy = \{f(n) Y_n\}_{n=1}^{\infty} ,$$

где
$$Y_n = \{ y^{i_1,\dots,i_n} \}_{i_1,\dots,i_n=1}^{\infty}$$

и
$$f(n) Y_n = \{ f(n) y^{i_1,\dots,i_n} \}_{i_1,\dots,i_n=1}^{\infty}.$$

Наконец, определим для $g \in \mathcal{L}$, $y \in Y(\alpha)$

$$gy = \tau(g)y .$$

Определим действие $\mathcal{L}$ на X. Каждое $x \in X$ представимо в виде последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x_n \in X_{E_n}$ и $x_n = \{x_g^n\}_{g \in E_n}$. Положим

$$gx = \{g(n) x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\{x^n_{gg(n)}\}_{g \in E_n}\}_{n=1}^{\infty} .$$

Очевидно, что действие $\mathcal{L}$ на X свободное, сохраняющее меру Хаара и эргодическое. Положим для $g \in \mathcal{L}$ и $(x, y) \in X \times Y(\alpha)$

$$g(x, y) = (gx, \tau(g)y).$$

Такое действие будет свободным, сохраняющим меру. Его эргодичность следует из того, что всякая траектория неединичного характера из $\hat{X} \times \hat{Y}(\alpha)$ бесконечна.

Скрещенное произведение $\mathcal{M}(X \times Y(\alpha), \mathcal{L}) = \mathcal{M}(\alpha)$, построенное по действию группы $\mathcal{L}$ на пространстве Лебега $X \times Y(\alpha)$, изоморфно фактору $U(\mathcal{L} \circledS \hat{X} \times \hat{Y}(\alpha))$, который имеет тип II_1.

<u>4. Лемма I.</u> Фактор $U(\mathcal{L} \circledS \hat{X} \times \hat{Y}(\alpha))$ содержит массивный комплекс бесконечного порядка.

<u>Доказательство.</u> Чтобы доказать существование массивного комплекса первого порядка, проверим выполнение следующего свойства: в $U(\mathcal{L} \circledS \hat{X} \times \hat{Y}(\alpha))$ существует последовательность алгебр $\{\mathcal{R}_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что:

I) $\mathcal{R}_n \supset \mathcal{R}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;

2) последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, где t_n – произвольный элемент из единичного шара $\mathcal{R}_n$, будет центральной;

3) $\mathcal{R}_n$ массивна в $U(\mathcal{L} \circledS \hat{X} \times \hat{Y}(\alpha))$;

4) для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует подалгебра $\mathcal{R}^n \subset \mathcal{R}'_{n+1} \cap \mathcal{R}_n$ такая, что алгебра, порожденная $\mathcal{R}^n$ и $\mathcal{R}_{n+1}$, изоморфна их тензорному произведению и совпадает с $\mathcal{R}_n$. Введем обозначения:

$$V_{i_1,\dots,i_r}(\alpha) = \prod_{i_{r+1}=1}^{\infty} Y_{i_1,\dots,i_r,i_{r+1}}(\alpha_r) \times \dots \times \prod_{i_{r+1},\dots,i_n=1}^{\infty} Y_{i_1,\dots,i_r,i_{r+1},\dots,i_n} \times$$
$$\times (\alpha_{n-1}) \times \dots ;$$

$$W_{i_1,\dots,i_r}(\alpha) = Y_{i_1,\dots,i_r}(\alpha_{r-1}) \times V_{i_1,\dots,i_r}(\alpha) .$$

Положим

$$\mathcal{R}_n = U\left(\sum_{i_1=n}^{\infty} \oplus \mathcal{L}_{i_1} \circledS 1_X \times \sum_{i_1=n}^{\infty} \oplus \hat{W}_{i_1}(\alpha)\right),$$

где 1_X – единичный характер группы X.

Очевидно, (1) выполняется. Нетрудно вычислить коммутант $\mathcal{R}_n'$. Обозначим через Φ_n подгруппу $\mathcal{L}$, порожденную $\sum_{i_1=1}^{n-1} \oplus \mathcal{L}_{i_1}$ и элементами $\delta_1, \dots, \delta_n$. Тогда

$$\mathcal{R}_n' = U\left(\Phi_n \circledS \sum_{i_1=1}^{n-1} \oplus (\hat{Y}_{i_1} \times \hat{V}_{i_1}(\alpha)) \times \sum_{i_1=n}^{\infty} \oplus (\hat{Y}_{i_1} \times 1_{V_{i_1}(\alpha)})\right).$$

Алгебра, порожденная $\{\mathcal{R}_n' : n \in \mathbb{N}\}$, совпадает с $U(\mathcal{L} \circledS \hat{X} \times \hat{X} \times \hat{Y}(\alpha))$. Отсюда следует, что выполняется (2).

Далее,

$$\mathcal{R}_{n+1}' \cap \mathcal{R}_n = U\left(\mathcal{L}_n \circledS (\hat{Y}_n \times \hat{V}_n(\alpha)) \times \sum_{i_1=n+1}^{\infty} \oplus (\hat{Y}_{i_1} \times 1_{V_{i_1}(\alpha)})\right).$$

Положим

$$\mathcal{R}^n = U(\mathcal{L}_n \circledS \hat{Y}_n + \hat{V}_n(\alpha)).$$

Очевидно, что $\mathcal{R}^n \subset \mathcal{R}_{n+1}' \cap \mathcal{R}_n$ и $\mathcal{R}^n \otimes \mathcal{R}_{n+1} = \mathcal{R}_n$.

Чтобы доказать массивность алгебры $\mathcal{R}_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$, воспользуемся леммой 3.2 [6]. Заметим, что каждый характер из $Y(\alpha)$ задается конечным числом конечных наборов элементов из группы F, а характеры из $\hat{X}$ – наборами элементов из $\mathcal{L}$. Обозначим через $\hat{X}'(\hat{W}_{i_1}'(\alpha))$ множество тех характеров из $\hat{X}(\hat{W}_{i_1}(\alpha))$, у которых все элементы в наборах (определяющих этот характер) заканчиваются на ненулевую степень δ_n (если δ_n переносим как можно далеко вправо, пользуясь групповыми свойствами). Через S' обозначим множество элементов группы $\mathcal{L}$ со следующим свойством: запись такого элемента через образующие группы $\mathcal{L}$, где δ_n стоит справа настолько далеко, насколько это возможно, оканчивается ненулевой степенью δ_n. Положим

$$g_1 = (\delta_n \circledS 1_X \times 1_{Y(\alpha)}), \quad g_2 = (\delta_{n+1} \circledS 1_X \times 1_{Y(\alpha)}) \quad \text{и}$$

$$S = (S' \circledS \hat{X} \times \hat{Y}(\alpha)) \cup \Big(\sum_{i_1=n}^{\infty} \oplus \mathcal{L}_{i_1} \circledS \hat{X} \times \sum_{i_1=1}^{n-1} \oplus \hat{W}'_{i_1}(\alpha)\Big) \cup$$

$$\cup \Big(\sum_{i_1=n}^{\infty} \oplus \mathcal{L}_{i_1} \circledS \hat{X}' \times \sum_{i_1=n}^{\infty} \oplus \hat{W}_{i_1}(\alpha)\Big).$$

Поскольку легко устанавливается справедливость условий леммы 3.2 [6], заключаем, что выполняется и (3).

Далее, по индукции несложно показать, что на самом деле в $\mathcal{U}(\mathcal{L} \circledS \hat{X} \times \hat{Y}(\alpha))$ существует массивный комплекс бесконечного порядка

$$\{\mathcal{U}(\mathcal{L} \circledS \hat{X} \times \hat{Y}(\alpha)),\ \mathcal{R}^{n_1}, \dots, \mathcal{R}^{n_1,\dots,n_r}, \dots\},$$

где

$$\mathcal{R}^{n_1,\dots,n_r} = \mathcal{U}(\mathcal{L}_{n_1,\dots,n_r} \circledS \hat{Y}_{n_1,\dots,n_r}(\alpha_{r-1}) \times \hat{V}_{n_1,\dots,n_r}(\alpha)).$$

Лемма доказана.

Теорема 2. Факторы $\mathcal{U}(\mathcal{L} \circledS \hat{X} \times \hat{Y}(\alpha))$ и $\mathcal{U}(\alpha \circledS \hat{X} \times \hat{Y}(\beta))$ неизоморфны при $\alpha \neq \beta$.

Доказательство. Так как $\alpha \neq \beta$, то существует наименьшее число $p \in N$, для которого $\alpha_p \neq \beta_p$, например, $\alpha_p = 1$, $\beta_p = 0$. Тогда в $\mathcal{R}^{n_1,\dots,n_p}(\alpha)$ содержится нетривиальная гиперцентральная последовательность. Действительно, поскольку $\alpha_p = 1$, то $\hat{Y}_{n_1,\dots,n_p,i_{p+1}}(\alpha_p) = \hat{Y}_{n_1,\dots,n_p,i_{p+1}}$ для всех $i_{p+1} \in N$. Тогда последовательность $\{\xi_{i_{p+1}}(y)\}_{i_{p+1}=1}^{\infty}$, где $\xi_{i_{p+1}}(y) \in \hat{Y}_{n_1,\dots,n_p,i_{p+1}}$ будет гиперцентральной.

С другой стороны, в $\mathcal{R}^{n_1,\dots,n_p}(\beta)$ нет нетривиальных гиперцентральных последовательностей, поскольку $\hat{Y}_{n_1,\dots,n_p,i_{p+1}}(\beta_p) = \emptyset$. Доказательство теоремы завершает

Лемма 3. [6]. Пусть $\{A, \mathcal{R}\}$ и $\{A, \emptyset\}$ массивные комплексы порядка не меньшего, чем p. Тогда, если для некоторого $\varepsilon > 0$ все подалгебры p-го порядка для $\{A, \mathcal{R}\}$ содержат гиперцентральные последовательности, расстояния которых по 2-норме в A от тривиальных центральных последовательностей больше ε, то подалгебры p-го порядка для $\{A, \emptyset\}$ также содержат нетривиальные гиперцентральные последовательности.

5. Пусть есть свободное, эргодическое действие G свободной группы с двумя образующими A_2 на пространстве Лебега (X, μ), оставляющее меру μ квазивариантной. Действие G называется аппроксимируемым, если существует такой автоморфизм T пространства (X, μ), что $[G] = [T]$ (определение полной группы, например, см. в [10]). Докажем такую теорему.

Теорема 4. Если образующие g_0 и g_1 группы G действуют на (X, μ) консервативно, то действие G неаппроксимируемо.

Следствие. Если свободная группа с n образующими ($n \geqslant 2$) имеет аппроксимируемое свободное действие, то по крайней мере $n-1$ образующая действует диссипативно.

Пусть H – произвольная группа автоморфизмов пространства (X, μ); λ – мера Лебега на $\mathbb{R}$. Через $\tilde{H}$ будем обозначать группу автоморфизмов пространства ($X \times \mathbb{R}$, $\mu \times \lambda$), каждый элемент $\tilde{h}$ которой действует по формуле

$$\tilde{h}(x, u) = \left(hx,\ u + \log \frac{dh^{-1}\mu}{d\mu}(x) \right), \qquad h \in H .$$

Легко видеть, что группа G действует свободно и является точным представлением группы A_2. Если g_0 и g_1 – образующие группы G, то $\tilde{g}_0$ и $\tilde{g}_1$ будут образующими группы $\tilde{g}$.

Лемма 5. Для произвольной группы H автоморфизмов (X, μ) группа $\tilde{H}$ обладает свойствами: 1) в пространстве $X \times \mathbb{R}$ существует бесконечная σ-конечная мера ν эквивалентная $\mu \times \lambda$ и инвариантная относительно $\tilde{H}$; 2) если H действует аппроксимируемо, то и $\tilde{H}$ так же. Доказательство см. в [7].

Лемма 6. Если автоморфизм g пространства (X, μ) действует консервативно, то и автоморфизм $\tilde{g}$ действует на ($X \times \mathbb{R}$, $\mu \times \lambda$) консервативно.

Доказательство. Без ограничения общности автоморфизм g можно считать типа III. Предположим, что автоморфизм $\tilde{g}$ действует диссипативно, т.е. он имеет тип I. Тогда алгебра фон Неймана $\mathfrak{M}$, построенная как скрещенное произведение группы, порожденной $\tilde{g}$ и автоморфизмами $T_s : X \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}$ ($T_s(x, u) = (x, u + s)$), на $L^\infty(X \times \mathbb{R})$ будет тип I. Но $\mathfrak{M} = M \otimes R$, где R – фактор типа I, а фактор M изоморфен скрещенному произведению автоморфизма g на $L^\infty(X)$ и также имеет тип I [8]. Полученное противоречие доказывает справедливость леммы.

Лемма 7. Пусть на пространстве Лебега (X,μ) $(\mu(X)=1)$ действует группа A_2, сохраняя меру μ. Тогда действие G группы A_2 неаппроксимируемо.

Доказательство. Если бы действие G было аппроксимируемым, то группа A_2 была бы аменабельной [3].

Доказательство теоремы 4. Выберем в $X\times\mathbb{R}$ множество Y с $\nu(Y)=1$, где ν - G-инвариантная мера в $X\times\mathbb{R}$. Согласно лемме 6, существуют автоморфизмы $\tilde{g}_{0Y}$ и $\tilde{g}_{1Y}$, где g_0 и g_1 - образующие группы G, а $\tilde{g}_{iY}$ $(i=0,1)$ - производный автоморфизм множества Y [9]. Заметим, что между автоморфизмами $\tilde{g}_{0Y}$ и $\tilde{g}_{1Y}$ могут быть только свободные соотношения. Обозначим через $\tilde{G}_Y$ группу, порожденную элементами $\tilde{g}_{0Y}$ и $\tilde{g}_{1Y}$. Она является точным представлением группы A_2. Предположим теперь, что группа G действует аппроксимируемо в (X,μ). Тогда, согласно лемме 5, группа $\tilde{G}$ действует в $(X\times\mathbb{R},\nu)$ аппроксимируемо, сохраняя меру ν. Поскольку $[\tilde{G}_Y]\subset[\tilde{G}]$, то группа $\tilde{G}_Y$ также аппроксимируема в (Y,ν), что противоречит лемме 7. Теорема доказана.

6. Пусть (X,μ) - произвольное пространство Лебега; T - свободнодействующий, эргодический автоморфизм (X,μ), оставляющий меру μ квазиинвариантной; H - произвольная счетная группа (не обязательно аменабельная). Измеримое отображение $p: X\times\mathbb{Z}\to H$ называется коциклом, если для почти всех $x\in X$

$$p(x,n+m)=p(x,n)p(T^n x,m).$$

Обозначим через μ_H меру на H такую, что $\mu_H(\{h\})=1$ $(h\in H)$. Определим автоморфизм $\tilde{T}$ пространства $(X\times H,\mu\times\mu_H)$, действующий по формуле

$$\tilde{T}(x,h)=(Tx,\ hp(x,1)), \tag{*}$$

где $p(x,h)$ - некоторый коцикл со значениями в H. Рассмотрим теперь действие группы H в $(X\times H,\mu\times\mu_H)$

$$k(x,h)=(x,k^{-1}h),\quad k\in H.$$

Очевидно, что такое действие H коммутирует с $\tilde{T}$. Обозначим через ξ измеримую оболочку разбиения $X\times H$ на траектории автоморфизма $\tilde{T}$. Тогда в фактор-пространстве $(X\times H)/\xi$ возникает ет действие группы H, которое мы будем обозначать через $\tilde{H}$. Наш результат состоит в следующем.

Теорема 8. Пусть автоморфизм $\tilde{T}$ пространства $X \times H$ (построенный согласно (*)) такой, что разбиение ξ на его траектории измеримо. Тогда действие $\tilde{H}$ в $(X \times H)/\xi$ аппроксимируемо.

Доказательство. Так как разбиение на траектории автоморфизма $\tilde{T}$ измеримо, то существует множество $C \subset X \times H$ такое, что $\tilde{T}^i C \cap C = \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots$ и

$$\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{T}^i C = X \times H .$$

Подходящим образом выбрав C, сможем считать, что $\mu(C \cap (X \times \{e\})) > 0$ (e – единица группы H). Положим $D = C \cap (X \times \{e\})$; $\tilde{H}$ можно рассматривать как группу автоморфизмов C. Те автоморфизмы из $[\tilde{H}]$, которые оставляют инвариантным множество D, образуют группу $[\tilde{H}]_D$. Известно [10], что если $[\tilde{H}]_D$ – аппроксимируемая группа, то такова и $[\tilde{H}]$.

Для любого автоморфизма $\tilde{g} \in \tilde{H}$ и $(x, e) \in D$ имеем

$$\tilde{g}(x, e) = \tilde{T}^m g(x, e) = (T^m x,\ g^{-1} p(x, m)),$$

где $m = m(x, g)$ выбирается из условия $\tilde{T}^m (x, g) \in C$.

Следовательно, $\tilde{g}(x, e) \in D$ тогда и только тогда, когда $T^m x \in D$, $g = p(x, m)$ и $\tilde{g}(x, e) = (T^m x, e)$. Таким образом, получаем, что $[\tilde{H}]_D \subset [T]_D$, т.е. $\tilde{H}$ – аппроксимируема. Теорема доказана.

Коциклы, для которых разбиение на траектории автоморфизма $\tilde{T}$ измеримо, легко указать. Положим $p(x, 1) = h_0$ для некоторого $h_0 \in H$. Тогда фактор-пространство $(X \times H)/\xi$ изоморфно $X \times H / H_0$, где $H_0 = \{ h_0^n : n \in \mathbb{Z} \}$. Согласно доказанной теореме, действие H в $X \times H / H_0$ будета аппроксимируемым.

Заметим, что если существует в H циклическая подгруппа конечного индекса, то для H описанная конструкция позволяет строить аппроксимируемые действия типа II_1.

1. Feldman J., Lind D.A. Hyperfiniteness and the Halmos-Rohlin theorem for nonsingular abelian actions. - Proc. Amer. Math. Soc., 1976, 55, N 2, p. 339-344.

2. Connes A., Krieger W. Measure space automorphisms, the normalizers of their full groups, and approximate finiteness.- J. Funct. Anal., 1977, 24, N 2, p. 336-352.

3. Sakai S. C* algebras and W* algebras. - New York: Springer Verlag, 1971. - 256 p.
4. Вершик А.М. Действие $PSL(2,\mathbb{Z})$ в $\mathbb{R}$ аппроксимируемо. - Успехи мат. наук, 1978, 33, вып.I, с.209-210.
5. Von Neumann J. On rings of operators. III. - Ann. Math., 1940, 41, p. 94-161.
6. Макдуфф Д. К структуре II_1 - факторов. - Успехи мат. наук, 1970, 25, вып.6, с.29-51.
7. Голодец В.Я. О структуре алгебр фон Неймана, двойственных к алгебрам, построенным по динамическим системам. - Функцион. анализ и его приложения, 1975, 9, вып.3, с.87-88.
8. Takesaki M. Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III. - Acta Math., 1974, 131, p. 249-310.
9. Kakutani S. Induced measure preserving transformations. - Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1943, 19, p. 635-641.
10. Dye H.A. On groups of measure preserving transformations I.- Amer. J. Math., 1959, 81, p. 119-159.

УДК 517.9

Р.Н.Давыдов

РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Недавно В.А.Марченко и Е.И.Тарапова предложили новый метод для отыскания элементарных решений некоторых нелинейных уравнений. В настоящей работе показано, как этим методом можно находить рациональные решения нелинейного уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\varkappa u|u|^2=0 \qquad (\varkappa<0) \tag{1}$$

(уравнение (1) с $\varkappa>0$ не имеет рациональных решений).

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений относительно $2n$ неизвестных $u_k(x,t)$, $v_k(x,t)$, $k=1,2,\dots,n$,

$$\sum_{k=1}^{n}\left[p_j^{(n-k)}(x,t)\,v_k(x,t)+\overline{p_j^{(n-k)}(x,t)}\,u_k(x,t)\right]=-2p_j^{(n)}(x,t)\ (j=0,1,\dots,2n-1), \tag{2}$$

где $p_j^{(m)}(x,t)=\frac{\partial^m}{\partial x^m}p_j(x,t)$, а $p_j(x,t)$ суть полиномы по x и t, определяемые следующим образом; $p_0(x,t)=1$, $p_1(x,t)=$ $=ix$,

$$p_k(x,t)=ik\Big[\int_0^x p_{k-1}(\xi,t)\,d\xi-2(k-1)\int_0^t p_{k-2}(0,\tau)\,d\tau+C_k\Big]. \qquad (3)$$

В силу этого определения $p_k(x,t)$ удовлетворяют уравнению

$$i\frac{\partial p}{\partial t}+2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=0. \qquad (4)$$

Рассмотрим определитель системы (2)

$$D_n=\det\begin{pmatrix} p_0 & \overline{p_0} & \dots & p_0^{(n-1)} & \overline{p_0^{(n-1)}} \\ p_1 & \overline{p_1} & \dots & p_1^{(n-1)} & \overline{p_1^{(n-1)}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_{2n-1} & \overline{p_{2n-1}} & & p_{2n-1}^{(n-1)} & \overline{p_{2n-1}^{(n-1)}} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что D_n – полином от x и t, и, если он не равен тождественно нулю, то система (2) имеет единственное решение, причем, функции u_k и v_k – , очевидно, рациональные дроби.

В силу определения $p_k(x,t)=i^k x^k(1+O(x^{-2}))$ и, значит, при $x\to\infty$

$$D_n\sim\hat D_n=i^{n(2n-1)}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & -x & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ x^{2n-1} & -x^{2n-1} & \frac{d}{dx}(x^{2n-1}) & -\frac{d}{dx}(x^{2n-1}) & \dots & \frac{d}{dx^{n-1}}(x^{2n-1}) \end{pmatrix}$$

прибавляя к четным столбцам нечетные, затем вычитая из нечетных четные, деленные пополам, и переставляя строки и столбцы, получаем

$$\hat D_n=(2i)^n\det\begin{pmatrix} P_n & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & Q_n \end{pmatrix}=(2i)^n\det P_n\det Q_n,$$

где P_n, Q_n – квадратные матрицы $n \times n$,

$$P_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2 & 2x & \dots & \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2) \\ x^4 & 4x^3 & \dots & \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^4) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{2n-2} & \frac{d}{dx}\left(x^{2n-2}\right) & \dots & \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^{2n-2}\right) \end{pmatrix}; \quad Q_n = \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 0 \\ x^3 & 3x^2 & \dots & \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^3) \\ x^5 & 5x^4 & \dots & \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^5) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{2n-1} & \frac{d}{dx}(x^{2n-1}) & \dots & \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{2n-1}) \end{pmatrix}.$$

Расписывая определитель по первой строке, убеждаемся, что $\det P_n = 2^{n-1}(n-1)!\det Q_{n-1}$. Ясно также, что $\det Q_n = x^n \det P_n$.

Следовательно,

$$\hat{D}_n = i(2x)^{2n-1}\left[(n-1)!\right]^2 \hat{D}_{n-1},$$

а так как $D_1 = -2ix$, то $\hat{D}_n = K_n x^{n^2}$, где K_n – отличные от нуля константы. Таким образом, D_n является полиномом от x строго степени n^2 и, значит, он не может быть равен тождественно нулю.

Найдем теперь дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции $u_k(x,t)$, $v_k(x,t)$. Продифференцируем последовательно систему (2) по x и по t. Обозначим при этом $\frac{\partial}{\partial t}w = \dot{w}$, $\frac{\partial}{\partial x}w = w'$. Учитывая при этом формулы (3) и (4), получаем

$$2p_j^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\left[p_j^{(n-k+1)}v_k + \overline{p_j^{(n-k+1)}}u_k + p_j^{(n-k)}v_k' + \overline{p_j^{(n-k)}}u_k'\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[2\overline{p_j^{(n-k+1)}}u_k + p_j^{(n-k)}v_k' + \overline{p_j^{(n-k)}}u_k'\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[p_j^{(n-k)}v_k' + \overline{p_j^{(n-k)}}(u_k' + 2u_{k+1})\right] +$$

$$+ 2\overline{p_j^{(n)}}u_1 = \sum_{k=1}^{n}\left[p_j^{(n-k)}(v_k' - \bar{u}_k u_1) + \overline{p_j^{(n-k)}}(u_k' + 2u_{k+1} - \bar{v}_k u_1)\right] = 0,$$

$$2p_j^{(n+2)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{k=1}^{n}\left[p_j^{(n-k)}v_k + \overline{p_j^{(n-k)}}u_k\right] = \sum_{k=1}^{n} p_j^{(n-k)}(v_k'' + 2v_{k+1}') +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\overline{p_j^{(n-k)}}(u_k'' + 2u_{k+1}') + 2p_j^{(n)}v_1' + 2\overline{p_j^{(n)}}u_1' =$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[p_j^{(n-k)}(v_k''+2v_{k+1}'-v_kv_1'-\bar{u}_ku_1')+\overline{p_j^{(n-k)}}(u_k''+2u_{k+1}'-u_kv_1'-\bar{v}_ku_1')\right]=0,$$

$$2i\dot{p}_j^{(n)}+i\sum_{k=1}^{n}\left[\dot{p}_j^{(n-k)}v_k+\dot{\overline{p_j^{(n-k)}}}u_k+p_j^{(n-k)}\dot{v}_k+\overline{p_j^{(n-k)}}\dot{u}_k\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[4\overline{p_j^{(n-k+2)}}u_k+p_j^{(n-k)}i\dot{v}_k+\overline{p_j^{(n-k)}}i\dot{u}_k\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[2p_j^{(n-k+1)}v_k'-2\overline{p_j^{(n-k+1)}}u_k'\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left[p_j^{(n-k)}i\dot{v}_k+\overline{p_j^{(n-k)}}i\dot{u}_k\right]=\sum_{k=1}^{n}p_j^{(n-k)}(i\dot{v}_k+2v_{k+1}'-v_kv_1'+u_ku_1')+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\overline{p_j^{(n-k)}}(i\dot{u}_k-2u_{k+1}'+\bar{v}_ku_1'-u_kv_1')=0.$$

Сравнивая полученные результаты, мы приходим к уравнениям

$$i\dot{u}_k+u_k''-2u_kv_1'=0;$$

$$i\dot{v}_k-v_k''+2\bar{u}_ku_1'=0;$$

$$v_k'=\bar{u}_ku_1\ ,$$

из которых, в частности, следует, что функция $u_1(x,t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению Шредингера (I) с $\varkappa=-2$.

Несложно установить, что $u_1(x,t)$ убывает при $x\to\infty$ как x^{-1}. Действительно, из рассмотрения системы (2) видно, что

$$v_1+\bar{v}_1=-2\frac{\partial}{\partial x}\ln D_n$$

и, значит,

$$|u_1|^2=\frac{\partial}{\partial x}v_1=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D_n=n^2x^{-2}(1+O(x^{-2})).$$

В заключение приведем вид первых трех решений

$$u=\frac{1}{x}\quad(n=1);$$

$$u = \frac{2x^3 - 12\,itx - C}{x^4 - 12t^2 + Cx}, \quad (n=2);$$

$$u = \frac{3(x^8 - 16\,itx^6 - 120\,t^2x^4 + 720\,t^4)}{x^9 - 72\,t^2x^5 - 12\cdot 180\,t^4x}, \quad (n=3).$$

В последней формуле постоянные интегрирования полагаются равными нулю.

УДК 519.210

И.В.Ковалишина, В.П.Потапов

РАДИУСЫ КРУГА ВЕЙЛЯ В МАТРИЧНОЙ ПРОБЛЕМЕ НЕВАНЛИННЫ – ПИКА

В настоящей работе рассматриваются дополнительные сведения о матричной проблеме Неванлинны – Пика, изложенной авторами ранее [3]. Основным результатом здесь является вывод мультипликатных формул для радиусов кругов Вейля. На этом основании излагается метод построения задач Неванлинны – Пика с любыми наперед заданными рангами предельных радиусов Вейля. Работа открывает возможность решения аналогичных вопросов для других задач, в которых рассматривается ситуация, в частности для самосопряженных дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами.

Мы выведем формулы для левого и правого радиусов круга Вейля, играющие существенную роль в классификации задач Неванлинны – Пика, опираясь на мультипликативную структуру матрицы-функции $\mathfrak{A}_k = f_k f_{k-1} \ldots f_2 f_1$, которая является матрицей коэффициентов дробно-линейного преобразования, определяющего общее решение k-й усеченной задачи. При этом будем считать, что независимая переменная ζ изменяется в единичном круге.

I. Исследование естественно начать с анализа двучленного множителя. Здесь мы по двучленному множителю $f^{-1}(\zeta)$ найдем радиусы круга Вейля и, наоборот, по заданным в фиксированной точке единичного круга радиусам круга Вейля восстановим двучленный множитель.

Так как алгоритм построения структурных формул уже на втором шаге приведет нас с необходимостью к метрике с $j = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, то поставленная для двучленного множителя задача будет решаться как в метрике $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$, так и в метрике $j = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

Двучленный элементарный множитель, нормированный к модулю в точке $\zeta = 0$, имеет вид

$$f^{-1}(\zeta) = I - \left(i - \frac{\zeta_0 - \zeta}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} \cdot \frac{|\zeta_0|}{\zeta_0}\right) P,$$

где P – проектор полного ранга, представимый в случае $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$ в виде

$$P = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} [x, y] J, \qquad [x, y] J \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = I,$$

а в случае $j = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ – в виде

$$P = \begin{bmatrix} \xi^* \\ \eta^* \end{bmatrix} [\xi, \eta] j, \qquad [\xi, \eta] j \begin{bmatrix} \xi^* \\ \eta^* \end{bmatrix} = I.$$

Здесь x, y, ξ, η – квадратные матрицы m-го порядка, причем x, η – неособенные.

Матрицу Вейля W будем рассматривать в точке $\zeta = 0$, которая, по предположению, не является узлом интерполяции.

В J – метрике будем по-прежнему пользоваться обозначениями

$$W = \begin{bmatrix} -R & S^* \\ S & -T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -SR^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R & 0 \\ 0 & SR^{-1}S^* - T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -R^{-1}S^* \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Для j-метрики будем использовать соответствующие малые буквы латинского алфавита.

Теорема I. В J-метрике радиусы круга Вейля, соответствующего двучленному множителю $f^{-1}(\xi)$, определяются по формулам

$$\mathcal{P}_d = R^{-1}; \qquad \mathcal{P}_g = |\zeta_0|^2 R^{-1}.$$

Доказательству подлежит лишь второе соотношение. Отправляясь от равенства

$$PJ = \begin{bmatrix} x^* x & x^* y \\ y^* x & y^* y \end{bmatrix},$$

вычисляем матрицу Вейля

$$\begin{bmatrix} -R & S^* \\ S & -T \end{bmatrix} = f^{-1}(0) J f^{*-1}(0) = J - (1 - |\zeta_0|^2) Py =$$

$$=\begin{bmatrix} -(1-|\zeta_0|^2)x^*x & I-(1-|\zeta_0|^2)x^*y \\ I-(1-|\zeta_0|^2)y^*x & -(1-|\zeta_0|^2)y^*y \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Тогда

$$R=(1-|\zeta_0|^2)x^*x,$$

а

$$\rho_g=SR^{-1}S^*-T=[I-(1-|\zeta_0|^2)y^*x]\frac{x^{-1}x^{*-1}}{1-|\zeta_0|^2}[I-(1-|\zeta_0|^2)x^*y]-$$

$$-(1-|\zeta_0|^2)y^*y=\frac{x^{-1}x^{*-1}}{1-|\zeta_0|^2}-x^{-1}[xy^*+yx^*]x^{*-1}=$$

$$=\frac{|\zeta_0|^2}{1-|\zeta_0|^2}x^{-1}x^{*-1}=|\zeta_0|^2R^{-1},$$

что и требовалось.

Обратная задача заключается в том, чтобы построить двучленный множитель по заданным радиусам

$$\rho_d=R^{-1}, \quad \rho_g=|\zeta_0|^2R^{-1}.$$

Очевидно, ее решение сводится к отысканию проектора

$$P=\begin{bmatrix} x^*x & x^*y \\ y^*x & y^*y \end{bmatrix}y, \qquad P^2=P, \qquad Py\geqslant 0.$$

Выкладки упростятся, если матрицу Вейля $W=\begin{bmatrix} -R & S^* \\ S & -T \end{bmatrix}$ подвергнуть преобразованию трансформации*

$$\begin{bmatrix} R^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} R^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & R^{-\frac{1}{2}}S^*R^{\frac{1}{2}} \\ R^{\frac{1}{2}}SR^{-\frac{1}{2}} & -R^{\frac{1}{2}}TR^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}.$$

При этом радиусы круга Вейля перейдут в

$$\rho_d=I, \qquad \rho_g=|\zeta_0|^2I.$$

---

* В теории цепей $\begin{bmatrix} R^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$ – проходная матрица идеального трансформатора.

Но поскольку должно выполняться равенство

$$R = (1 - |\zeta_0|^2)\, x^* x\,,$$

то

$$x^* x = \frac{I}{1 - |\zeta_0|^2}\,. \tag{2}$$

Далее, преобразуя соотношение

$$[x;y]\, J \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = x y^* + y x^* = I$$

умножением слева на x^*, справа – на x, получаем

$$x^* x\; y^* x \;\; + x^* y\; x^* x = x^* x$$

или после сокращения на $x^* x = \frac{1}{1 - |\zeta_0|^2} I$

$$y^* x \;+ x^* y = I\,, \tag{3}$$

откуда вытекает, что

$$x^* y = \frac{1}{2} I + ih\,, \tag{4}$$

где h – произвольная эрмитова матрица.

Наконец, так как с одной стороны,

$$T = (1 - |\zeta_0|^2)\; y^* y$$

а с другой стороны,

$$T = SR^{-1}S^* - \rho_g = SR^{-1}S^* - |\zeta_0|^2 R^{-1} = SS^* - |\zeta_0|^2 I =$$

$$= [I - (1 - |\zeta_0|^2) y^* x][I - (1 - |\zeta_0|^2) x^* y] - |\zeta_0|^2 I =$$

$$= [I - (1 - |\zeta_0|^2)(\tfrac{1}{2} I - ih)][I - (1 - |\zeta_0|^2)(\tfrac{1}{2} I + ih)] - |\zeta_0|^2 I =$$

$$= (1 - |\zeta_0|^2)^2 (\tfrac{1}{4} I + h^2)\,,$$

то

$$y^* y = (1 - |\zeta_0|^2)(\tfrac{1}{4} I + h^2). \tag{5}$$

Таким образом,

$$P = \begin{bmatrix} x^* x & x^* y \\ y^* x & y^* y \end{bmatrix} J = \begin{bmatrix} x^* y & x^* x \\ y^* y & y^* x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} I + ih & \frac{1}{1-|\zeta_0|^2} I \\ (1-|\zeta_0|^2)(\frac{1}{4} I + h^2) & \frac{1}{2} I - ih \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Легко видеть, что при произвольной эрмитовой матрице h, P является J– неотрицательным проектором и что матрица Вейля, соответствующая элементарному множителю $f^{-1}(\zeta) = I - \left(1 - \frac{\zeta_0 - \zeta}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} \frac{|\zeta_0|}{\zeta_0}\right) P$, будет иметь вид

$$W = \begin{bmatrix} -I & I - (1-|\zeta_0|^2)(\frac{1}{2} I + ih) \\ I - (1-|\zeta_0|^2)(\frac{1}{2} I - ih) & -(1-|\zeta_0|^2)^2 (\frac{1}{4} I + h^2) \end{bmatrix}$$

Возвращаясь к первоначально заданным радиусам, мы подвергаем P и W обратному преобразованию трансформации, что сводится к обрамлению PJ и W слева и справа матрицами $\begin{bmatrix} R^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & R^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$.

Таким образом, окончательно

$$P = \begin{bmatrix} R^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & R^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} I + ih & \frac{1}{1-|\zeta_0|^2} I \\ (1-|\zeta_0|^2)(\frac{1}{4} I + h^2) & \frac{1}{2} I - ih \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} I + i R^{\frac{1}{2}} h R^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{1-|\zeta_0|^2} R \\ (1-|\zeta_0|^2)(\frac{1}{4} R^{-1} + R^{-\frac{1}{2}} h^2 R^{-\frac{1}{2}}) & \frac{1}{2} I - i R^{-\frac{1}{2}} h R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}; \tag{7}$$

$$W = \begin{bmatrix} -R & I - (1-|\zeta_0|^2)(\frac{1}{2} I + i R^{\frac{1}{2}} h R^{-\frac{1}{2}}) \\ I - (1-|\zeta_0|^2)(\frac{1}{2} I - i R^{-\frac{1}{2}} h R^{\frac{1}{2}}) & -(1-|\zeta_0|^2)^2 (\frac{1}{4} R^{-1} + R^{-\frac{1}{2}} h^2 R^{-\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}, \tag{8}$$

что и завершает построение.

Следовательно, заданным радиусам круга Вейля соответствует бесконечное множество двучленных множителей, зависящее от параметра h – произвольной эрмитовой матрицы.

В j-метрике связь между левым и правым радиусами, а также между радиусами и двучленным множителем становится значительно сложнее. В частности, коллинеарность радиусов будет иметь место лишь при наложении дополнительного ограничения на проектор p.

Предварительно докажем лемму.

Лемма I. Для того чтобы в j-метрике радиусы круга Вейля, соответствующего элементарному двучленному множителю

$$f^{*-1}(\zeta)=I-\left(1-\frac{\zeta_0-\zeta}{1-\bar\zeta_0\zeta}\,\frac{|\zeta_0|}{\zeta_0}\right)p,\quad p=\begin{bmatrix}\xi^*\\ \eta^*\end{bmatrix}[\xi,\eta]j,\ [\xi,\eta]j\begin{bmatrix}\xi^*\\ \eta^*\end{bmatrix}=I,$$

определялись по формулам

$$\rho_d=r^{-1},\qquad \rho_g=|\zeta_0|^2r^{-1},$$

где

$$r=I+(1-|\zeta_0|^2)\xi^*\xi,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось дополнительное условие

$$-\xi^*\xi+\eta^*\eta=I. \tag{9}$$

Доказательство. Сейчас матрица Вейля имеет вид

$$W=\begin{bmatrix}-r & s^*\\ s & -t\end{bmatrix}=b^{-1}(0)jb^{*-1}(0)=j-(1-|\zeta_0|^2)pj=$$

$$=\begin{bmatrix}-I-(1-|\zeta_0|^2)\xi^*\xi & -(1-|\zeta_0|^2)\xi^*\eta\\ -(1-|\zeta_0|^2)\eta^*\xi & I-(1-|\zeta_0|^2)\eta^*\eta\end{bmatrix} \tag{10}$$

и, следовательно, правый радиус равен

$$\rho_d=r^{-1}=\left[I+(1-|\zeta_0|^2)\xi^*\xi\right]^{-1}.$$

Будем теперь преобразовывать выражение для левого радиуса $\rho_g=sr^{-1}s^*-t$, используя пока лишь основное соотношение для проектора

$$[\xi,\eta]j\begin{bmatrix}\xi^*\\ \eta^*\end{bmatrix}=-\xi\xi^*+\eta\eta^*=I. \tag{11}$$

Основываясь на легкопроверяемом тождестве

$$\xi\left[I+(1-|\zeta_0|^2)\xi^*\xi\right]^{-1}=\left[I+(1-|\zeta_0|^2)\xi\xi^*\right]^{-1}\xi ,$$

получаем

$$sr^{-1}s^*-t=(1-|\zeta_0|^2)\eta^*\xi\left[I+(1-|\zeta_0|^2)\xi^*\xi\right]^{-1}(1-|\zeta_0|^2)\xi^*\eta+I-$$

$$-(1-|\zeta_0|^2)\eta^*\eta=(1-|\zeta_0|^2)\eta^*\left[I+(1-|\zeta_0|^2)\xi\xi^*\right]^{-1}(1-|\zeta_0|^2)\xi\xi^*\eta+I-$$

$$-(1-|\zeta_0|^2)\eta^*\eta=(1-|\zeta_0|^2)\eta^*\left\{I-\left[I+(1-|\zeta_0|^2)\xi\xi^*\right]^{-1}\right\}\eta+I-(1-|\zeta_0|^2)\eta^*\eta=$$

$$=I-(1-|\zeta_0|^2)\eta^*\left[I+(1-|\zeta_0|^2)\xi\xi^*\right]^{-1}\eta=$$

$$=I-(1-|\zeta_0|^2)\eta^*\left[I+(1-|\zeta_0|^2)(\eta\eta^*-I)\right]^{-1}\eta=I-\left[I+\frac{|\zeta_0|}{1-|\zeta_0|^2}\eta^{-1}\eta^{*-1}\right]^{-1}=$$

$$=\left[\frac{|\zeta_0|^2}{1-|\zeta_0|^2}\eta^{-1}\eta^{*-1}\right]\left[I+\frac{|\zeta_0|^2}{1-|\zeta_0|^2}\eta^{-1}\eta^{*-1}\right]^{-1}=|\zeta_0|^2\left[(1-|\zeta_0|^2)\eta^*\eta+|\zeta_0|^2I\right]^{-1}.$$

Сравнивая вычисленное выражение для ρ_g $\rho_d=\left[I+(1-|\zeta_0|^2)\xi^*\xi\right]^{-1}$, видим, что равенство $\rho_g=|\zeta_0|^2\rho_d$ будет выполняться тогда и только тогда, когда

$$-\xi^*\xi+\eta^*\eta=I .$$

Решим и обратную задачу: построить двучленный множитель, удовлетворяющий условию

$$-\xi^*\xi+\eta^*\eta=I.$$

по заданным радиусам

$$\rho_d=r^{-1},\quad \rho_g=|\zeta_0|^2r^{-1}\qquad (r^{-1}<I) .$$

Как и в предыдущем случае, она сводится к отысканию проектора

$$\bar{p}=\begin{bmatrix}\xi^*\xi & \xi^*\eta\\ \eta^*\xi & \eta^*\eta\end{bmatrix}j .$$

Так как матрица Вейля имеет вид

$$W=\begin{bmatrix}-r & s^*\\ s & -t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-I-(1-|\zeta_0|^2)\xi^*\xi & -(1-|\zeta_0|^2)\xi^*\eta\\ -(1-|\zeta_0|^2)\eta^*\xi & I-(1-|\zeta_0|^2)\eta^*\eta\end{bmatrix},$$

то из равенства

$$r = I + (1 - |\zeta_0|^2)\,\xi^* \xi$$

следует, что

$$\xi^* \xi = \frac{r - I}{1 - |\zeta_0|^2}, \tag{12}$$

откуда

$$\xi = x \frac{\sqrt{r - I}}{\sqrt{1 - |\zeta_0|^2}}, \tag{13}$$

где x – произвольная унитарная матрица

$$x^* x = I.$$

Далее, из условия

$$-\xi^* \xi + \eta^* \eta = I$$

вытекает

$$\eta^* \eta = I + \xi^* \xi = \frac{r - |\zeta_0|^2 I}{1 - |\zeta_0|^2}, \tag{14}$$

откуда

$$\eta = y \frac{\sqrt{r - |\zeta_0|^2 I}}{\sqrt{1 - |\zeta_0|^2}}, \quad y^* y = I. \tag{15}$$

Но тогда

$$\xi^* \eta = \frac{\sqrt{r - I}\; x^* y\; \sqrt{r - |\zeta_0|^2 I}}{1 - |\zeta_0|^2}$$

или при

$$x^* y = z, \qquad z^* z = I,$$

$$\xi^* \eta = \frac{\sqrt{r - I}\; z\, \sqrt{r - |\zeta_0|^2 I}}{1 - |\zeta_0|^2}. \tag{16}$$

Рассмотрим теперь, какому условию должна подчиняться пока произвольная унитарная матрица z. Для этого подставим в основное соотношение для p

$$-\xi\xi^* + \eta\eta^* = I$$

выражения ξ и η (13) и (15)

$$-x\frac{\sqrt{r-I}}{\sqrt{1-|\zeta_0|^2}}\cdot\frac{\sqrt{r-I}}{\sqrt{1-|\zeta_0|^2}}x^* + y\frac{\sqrt{r-|\zeta_0|^2 I}}{\sqrt{1-|\zeta_0|^2}}\cdot\frac{\sqrt{r-|\zeta_0|^2 I}}{\sqrt{1-|\zeta_0|^2}}y^* = I. \quad (17)$$

Умножение (17) слева на x^*, справа – на y приводит к

$$-(r-I)x^*y + x^*y(r-|\zeta_0|^2 I) = (1-|\zeta_0|^2)x^*y$$

или

$$rz = zr. \quad (18)$$

Наконец, легко проверяется, что

$$p = \begin{bmatrix} \dfrac{r-I}{1-|\zeta_0|^2} & \dfrac{\sqrt{r-I}\; z\sqrt{r-|\zeta_0|^2 I}}{1-|\zeta_0|^2} \\ \dfrac{\sqrt{r-|\zeta_0|^2 I}\; z^*\sqrt{r-I}}{1-|\zeta_0|^2} & \dfrac{r-|\zeta_0|^2 I}{1-|\zeta_0|^2} \end{bmatrix} j$$

при любой унитарной матрице z перестановочной с r является j -неотрицательным проектором

$$p_j \geq 0, \quad p^2 = p.$$

Таким образом, заданным радиусам круга Вейля соответствует бесконечное множество двучленных множителей, удовлетворяющих дополнительному условию $-\xi^*\xi + \eta^*\eta = I$, зависящее от параметра z – унитарной матрицы перестановочной с r: $rz = zr$.

Заметим, что дополнительное условие (9) является следствием основного соотношения

$$-\xi\xi^* + \eta\eta^* = I$$

в том случае, когда ξ и η эрмитовы или нормальные матрицы.

Пусть теперь

$$f^{-1}(\zeta) = I - \left(1 - \frac{\zeta_0 - \zeta}{1 - \bar{\zeta}_0\zeta} \; \frac{|\zeta_0|}{\zeta_0}\right) p\,;$$

$$p = \begin{bmatrix} \xi^* \\ \eta^* \end{bmatrix} [\xi,\ \eta]\, j = \begin{bmatrix} -\xi^*\xi & \xi^*\eta \\ -\eta^*\xi & \eta^*\eta \end{bmatrix};$$

$$-\xi\xi^* + \eta\eta^* = I$$

– произвольный двучленный j-сжимающий элементарный множитель полного ранга.

Представим матрицы ξ и η в полярной форме

$$\xi = |\xi|\, u, \qquad \eta = |\eta|\, v,$$

где $|\xi| = \sqrt{\xi\xi^*}$; $|\eta| = \sqrt{\eta\eta^*}$; u и v – унитарные матрицы, и рассмотрим новую матрицу-функцию

$$\hat{f}^{-1}(\zeta) = I - \left(1 - \frac{\zeta_0 - \zeta}{1 - \bar{\zeta}_0\zeta} \; \frac{|\zeta_0|}{\zeta_0}\right) \hat{p}\,;$$

$$\hat{p} = \begin{bmatrix} |\xi| \\ |\eta| \end{bmatrix} [\,|\xi|,\ |\eta|\,]\, j\,.$$

Из основного условия для $f^{-1}(\zeta)$ вытекает сейчас равенство

$$-|\xi|\,|\xi| + |\eta|\,|\eta| = I$$

и, следовательно, $\hat{f}^{-1}(\zeta)$ является элементарным j-сжимающим множителем, для которого дополнительное условие (9) совпадает с основным. К $\hat{f}^{-1}(\zeta)$ применима лемма I, и поэтому

$$\hat{\rho}_d = \hat{r}^{-1} = [\,I + (1 - |\zeta_0|^2)\,|\xi|^2\,]^{-1}$$

$$\hat{\rho}_g = \hat{s}\,\hat{r}^{-1}\hat{s}^* - \hat{t} = |\zeta_0|^2\,\hat{r}^{-1}\,.$$

Вспомогательная элементарная матрица-функция $\hat{f}^{-1}(\zeta)$, которую мы будем называть центральной по отношению к $f^{-1}(\zeta)$, играет существенную роль в дальнейших построениях.

Для доказательства последующих теорем нам понадобится элементарная лемма.

Лемма 2. Если в матрице $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ блок A неособенный, то она:

I) допускает "треугольное" представление

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix};$$

2) это представление однозначно. Первое утверждение проверяется непосредственно.

Если имеет место равенство

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y_1 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

то его можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ X-X_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y-Y_1 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} A & A(Y-Y_1) \\ (X-X_1)A & (X-X_1)A(Y-Y_1)+\mathcal{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_1 \end{bmatrix}.$$

Из последнего в силу неособенности матрицы A вытекают соотношения

$$A_1 = A, \quad X_1 = X, \quad Y_1 = Y, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E},$$

доказывающие второе утверждение леммы.

Теорема 2. В j-метрике правый и левый радиусы круга Вейля произвольного j-сжимающего двучленного множителя $f^{-1}(\zeta)$ полного ранга равны соответственно

$\rho_d = r^{-1} = u^* \hat{r}^{-1} u;$

$$\rho_g = sr^{-1}s^* - t = |\zeta_0|^2 v^* \hat{r}^{-1} v ,$$

где u, v – унитарные матрицы полярного представления

$$\xi = |\xi|u, \quad \eta = |\eta|v,$$

а $\hat{r}^{-1} = [I + (1 - |\zeta_0|^2)|\xi|^2]^{-1}$ – правый радиус центрального по отношению к $f^{-1}(\zeta)$ множителя $\hat{f}^{-1}(\zeta)$.

Доказательство. В самом деле, так как

$$f^{-1}(\zeta) = \begin{bmatrix} u^* & 0 \\ 0 & v^* \end{bmatrix} \hat{f}^{-1}(\zeta) \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix},$$

то матрица Вейля для $f^{-1}(\zeta)$ равна

$$w = f^{-1}(0) j f^{*-1}(0) = \begin{bmatrix} u^* & 0 \\ 0 & v^* \end{bmatrix} \hat{w} \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^* & 0 \\ 0 & v^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\hat{s}\hat{r}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\hat{r} & 0 \\ 0 & \hat{s}\hat{r}^{-1}\hat{s}^* - \hat{t} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} I & -\hat{r}^{-1}\hat{s}^* \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^* & 0 \\ 0 & v^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\hat{s}\hat{r}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\hat{r} & 0 \\ 0 & |\zeta_0|^2\hat{r}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\hat{r}^{-1}\hat{s}^* \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}.$$

Переставляя в последнем выражении первый и второй, четвертый и пятый множители и используя при этом очевидное тождество

$$\begin{bmatrix} I & -\hat{r}^{-1}\hat{s}^* \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -u^*\hat{r}^{-1}\hat{s}^* v \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

получаем

$$w = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -v^*\hat{s}\hat{r}^{-1}u & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^* & 0 \\ 0 & v^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\hat{r} & 0 \\ 0 & |\zeta_0|^2\hat{r}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -u^*\hat{r}^{-1}\hat{s}^* v \\ 0 & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -v^*\hat{s}\hat{r}^{-1}u & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u^*\hat{r}u & 0 \\ 0 & |\zeta_0|^2 v^*\hat{r}^{-1}v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -u^*\hat{r}^{-1}\hat{s}^* v \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

На основании второго утверждения предыдущей леммы $u^*\hat{r}^{-1}u$ и $|\zeta_0|^2 v^*\hat{r}^{-1} v$ являются правым и левым радиусами круга Вейля для $f^{-1}(\zeta)$. Теорема доказана.

Заметим, что

$$0 < \hat{r}^{-1} \leq I,$$

так как

$$\hat{r}^{-1} = \left[I + (1 - |\zeta_0|^2)\xi^*\xi\right]^{-1}.$$

Существенную роль для нас будет играть обратное утверждение.

Теорема 3. Для любой неособенной эрмитовой положительной матрицы $0 < r^{-1} \leq I$ и любых унитарных матриц u и v существует семейство элементарных двучленных j-сжимающих множителей $f^{-1}(\zeta)$ полного ранга, для которых матрицы $u^* r^{-1} u$ и $|\zeta_0|^2 v^* r^{-1} v$ являются соответственно правым и левым радиусами круга Вейля.

Доказательство. Прежде всего по радиусам в точке $\zeta = 0$

$\tilde{\rho}_d = r^{-1}, \quad \tilde{\rho}_g = |\zeta_0|^2 r^{-1}$

построим семейство множителей $\tilde{f}^{-1}(\zeta)$, удовлетворяющих дополнительному условию $-\ \xi^*\xi + \eta^*\eta = I$, как это сделано во второй части леммы I:

$$\tilde{f}^{-1}(\zeta) = I - \left(1 - \frac{\zeta_0 - \zeta}{1 - \bar{\zeta}_0\zeta}\,\frac{|\zeta_0|}{\zeta_0}\right)p;$$

$$p = \begin{bmatrix} \dfrac{r - 1}{1 - |\zeta_0|^2} & -\dfrac{\sqrt{r - I}\,x\,\sqrt{r - |\zeta_0|^2 I}}{1 - |\zeta_0|^2} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{r - |\zeta_0|^2 I}\;\;x\,\sqrt{r - I}}{1 - |\zeta_0|^2} & \dfrac{r - |\zeta_0|^2 I}{1 - |\zeta_0|^2} \end{bmatrix} j,$$

где унитарная и перестановочная с r матрица x является параметром.

Наконец, как и в теореме 2, мы покажем, что радиусы круга Вейля для множителей

$$f^{-1}(\zeta) = \begin{bmatrix} u^* & 0 \\ 0 & v^* \end{bmatrix} \tilde{f}^{-1}(\zeta) \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$$

будут как раз равны

$$\rho_d = u^* r^{-1} u;$$

$$\rho_g = |\zeta_0|^2 v^* r^{-1} v,$$

что и требовалось.

2. Рассмотрим вычисление радиусов круга Вейля для конечного произведения

$$\mathfrak{A}_k^{-1}(\zeta) = f_1^{-1}(\zeta) f_2^{-2}(\zeta) \ldots f_k^{-1}(\zeta)$$

элементарных двучленных J-сжимающих множителей полного ранга. Эти радиусы вычисляются в точке $\zeta = 0$ в предположении, что $\zeta = 0$ не является узлом интерполяции. Процесс будем осуществлять шаг за шагом, рассматривая произведение двух, трех и т.д. множителей.

Пусть сначала

$$\mathfrak{A}_1^{-1}(\zeta) = f_1^{-1}(\zeta),\ f_1^{-1}(\zeta) = I - (1 - |\zeta_1|^2) P_1;\ P_1 = \begin{bmatrix} x_1^* \\ y_1^* \end{bmatrix} [x_1, y_1] J,\ [x_1, y_1] J \begin{bmatrix} x_1^* \\ y_1^* \end{bmatrix} = I.$$

Составим матрицу Вейля

$$\mathfrak{A}_1^{-1}(0) J \mathfrak{A}^{*-1}(0) = W_1 = \begin{bmatrix} -R_1 & S_1^* \\ S_1 & -T_1 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Нижеследующие выкладки являются подготовительным шагом для рассмотрения произведения двух множителей

$$W_1 = \begin{bmatrix} -R_1 & S_1^* \\ S_1 & -T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_1 R_1^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & S_1 R_1^{-1} S_1^* - T_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -R_1^{-1} S_1^* \\ 0 & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_1 R_1^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & |\zeta_1|^2 R_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -R_1^{-1} S_1^* \\ 0 & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_1 R_1^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1| R_1^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1| R^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -R_1^{-1} S_1^* \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

но так как

$$\begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I & -\frac{1}{\sqrt{2}} I \\ \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \end{bmatrix},$$

то

$$W_1=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_1R_1^{-1} & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|R_1^{-\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I\end{bmatrix}J\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} R^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|R_1^{-\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -R_1^{-1}S_1^* \\ 0 & I\end{bmatrix}. \tag{20}$$

Сравнивая теперь (19) и (20), приходим к следующему выражению для $\mathfrak{A}_1^{-1}(0)$:

$$\mathfrak{A}_1^{-1}(0)=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_1R_1^{-1} & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|R_1^{-\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I\end{bmatrix}\mathcal{H}_1 , \tag{21}$$

где $\mathcal{H}_1$ – J-унитарная матрица

$$\mathcal{H}_1 J \mathcal{H}_1^* = J ,$$

которую можно вычислить по формуле

$$\mathcal{H}_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{|\zeta_1|}R_1^{\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ S_1R_1^{-1} & I\end{bmatrix}\mathfrak{A}_1^{-1}(0) . \tag{22}$$

Пусть теперь

$$\mathfrak{A}_2^{-1}(\zeta)=\mathfrak{A}_1^{-1}(\zeta)f_2^{-1}(\zeta),\ f_2^{-1}(0)=I-(1-|\zeta_2|^2)P_2;\ P_2=\begin{bmatrix} x_2^* \\ y_2^*\end{bmatrix}[x_2,y_2]J;\ [x_2,y_2]J\begin{bmatrix} x_2^* \\ y_2^*\end{bmatrix}=I .$$

Используем соотношение (21) для записи произведения

$$\mathfrak{A}_2^{-1}(0)=\mathfrak{A}_1^{-1}(0)f_2^{-1}(0)=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_1R_1^{-1} & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|R_1^{-\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I\end{bmatrix}\mathcal{H}_1 f_2^{-1}(0)$$

и рассмотрим матрицу Вейля.

$$W_2=\mathfrak{A}_2^{-1}(0)J\mathfrak{A}_2^{*\,-1}(0)=$$

$$=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_1R_1^{-1} & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|R_1^{-\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I\end{bmatrix}\mathcal{H}_1 f_2^{-1}(0)Jf_2^{*\,-1}(0)\mathcal{H}_1^*\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|R_1^{-\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -R_1^{-1}S_1^* \\ 0 & I\end{bmatrix}.$$

Последнее выражение перепишем в удобной форме, заменив J на

$$\mathcal{H}_1^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I\end{bmatrix}J\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I\end{bmatrix}\mathcal{H}_1^{*\,-1}.$$

Тогда

$$W_2=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_1R_1^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|R_1^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}\text{Ю}_1 f_2^{-1}(0)\text{Ю}_1^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}}\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}j\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}}\times$$

$$\times\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}\text{Ю}_1^{*^{-1}} f_2^{*^{-1}}(0)\text{Ю}_1^{*}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|R_1^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -R_1^{-1}S_1^{*} \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{23}$$

Введем в рассмотрение новую матрицу-функцию

$$\beta_2^{-1}(\zeta)=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}\text{Ю}_1 f_2^{-1}(\zeta)\text{Ю}_1^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}=I-\left(1-\frac{\zeta_2-\zeta}{1-\bar{\zeta}_2\zeta}\,\frac{|\zeta_2|}{\zeta_2}\right)p_2; \tag{24}$$

$$p_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}\text{Ю}_1 P_2\text{Ю}_1^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \xi_2^{*} \\ \eta_2^{*} \end{bmatrix}[\xi_2,\eta_2]j,\ [\xi_2,\eta_2]j\begin{bmatrix} \xi_2^{*} \\ \eta_2^{*} \end{bmatrix}=I.$$

Очевидно, $\beta_2^{-1}(\zeta)$ является элементарным j-сжимающим множителем, матрица Вейля которого по теореме 2 имеет вид

$$W_2=\beta_2^{-1}(0)j\beta_2^{*^{-1}}(0)=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -v_2^{*}\hat{s}_2\hat{r}_2^{-1}u_2 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -u_2^{*}\hat{r}_2u_2 & 0 \\ 0 & |\zeta_2|^2v_2^{*}\hat{r}_2^{-1}v_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -u_2^{*}\hat{r}_2^{-1}\hat{s}_2^{*}v_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$\hat{r}_2=I+(1-|\zeta_2|^2)|\xi_2|^2;$$

$$\xi_2=|\xi_2|\,u_2;$$

$$\eta_2=|\eta_2|\,v_2.$$

Теперь, учитывая обозначение (24), переписываем равенство (23) для W_2 в виде

$$W_2=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_1R_1^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|R_1^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}\beta_2^{-1}(0)j\beta_2^{*^{-1}}(0)\begin{bmatrix} R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|R_1^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -R_1^{-1}S_1^{*} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

или

$$W_2=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_1R_1^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|R_1^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}w_2\begin{bmatrix} R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|R_1^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -R_1^{-1}S_1^{*} \\ 0 & I \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_1R_1^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|R_1^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -v_2^*\hat{s}_2\hat{r}_2^{-1}u_2 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -u_2^*\hat{r}_2u_2 & 0 \\ 0 & |\zeta_2|^2v_2^*\hat{r}_2^{-1}v_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -u_2^*\hat{r}_2^{-1}\hat{s}_2^*v_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|R_1^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -R_1^{-1}S_1^* \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Наконец, переставляя второй и третий, пятый и шестой множители последнего произведения, получаем

$$W_2=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_1R_1^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -R_1^{-\frac{1}{2}}v_2^*\hat{s}_2\hat{r}_2^{-1}u_2R_1^{-\frac{1}{2}}|\zeta_1| & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|R_1^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -u_2^*\hat{r}_2u_2 & 0 \\ 0 & |\zeta_2|^2v_2^*\hat{r}_2^{-1}v_2 \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|R_1^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -|\zeta_1|R_1^{-\frac{1}{2}}u_2^*\hat{r}_2^{-1}\hat{s}_2^*v_2R_1^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -R_1^{-1}S_1^* \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

откуда окончательно

$$W_2=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_2R_2^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -R_1^{\frac{1}{2}}u_2^*\hat{r}_2^{-1}u_2R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|^2|\zeta_2|^2R_1^{-\frac{1}{2}}v_2^*\hat{r}_2^{-1}v_2R_1^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -R_2^{-1}S_2^* \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Поскольку, с другой стороны,

$$W_2=\begin{bmatrix} -R_2 & S_2^* \\ S_2 & -T_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_2R_2^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\rho_{d2}^{-1} & 0 \\ 0 & \rho_{g2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -R_2^{-1}S_2^* \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

где

$$\rho_{d2}=R_2^{-1},\qquad \rho_{g2}=S_2R_2^{-1}S_2^*-T_2,$$

то на основании утверждения леммы 2 о единственности треугольного представления приходим к равенствам

$$\rho_{d2}=R_1^{-\frac{1}{2}}u_2^*\hat{r}_2^{-1}u_2R_1^{-\frac{1}{2}};$$

$$\rho_{g2}=|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2R_1^{-\frac{1}{2}}v_2^*\hat{r}_2^{-1}v_2R_1^{-\frac{1}{2}}.$$

Описанный здесь процесс допускает неограниченное продолжение. Для того чтобы вычислить радиусы круга Вейля для произведения трех множителей

$$\mathcal{U}_3^{-1}(0)=f_1^{-1}(0)f_2^{-1}(0)f_3^{-1}(0),$$

преобразуем $\mathfrak{A}_2^{-1}(0)$ к удобной для нас форме с помощью матрицы Вейля

$$W_2 = \mathfrak{A}_2^{-1}(0) J \mathfrak{A}_2^{*-1}(0) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_2 R_2^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\rho_{d2}^{-1} & 0 \\ 0 & \rho_{g2}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -R_2^{-1} S_2^* \\ 0 & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_2 R_2^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^{\frac{1}{2}} u_2^* \hat{r}_2^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1||\zeta_2| R_1^{-\frac{1}{2}} v_2^* \hat{r}_2^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r}_2^{\frac{1}{2}} u_2 R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1||\zeta_2| \hat{r}_2^{-\frac{1}{2}} v_2 R_1^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -R_2^{-1} S_2^* \\ 0 & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_2 R_2^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^{\frac{1}{2}} u_2^* \hat{r}_2^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1||\zeta_2| R_1^{-\frac{1}{2}} v_2^* \hat{r}_2^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I & -\frac{1}{\sqrt{2}} I \\ \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r}_2^{\frac{1}{2}} u_2 R_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1||\zeta_2| \hat{r}_2^{-\frac{1}{2}} v_2 R_1^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} I & -R_2^{-1} S_2^* \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

откуда определяется

$$\mathfrak{A}_2^{-1}(0) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_2 R_2^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^{\frac{1}{2}} u_2^* \hat{r}_2^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1||\zeta_2| R_1^{-\frac{1}{2}} v_2^* \hat{r}_2^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I & -\frac{1}{\sqrt{2}} I \\ \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \end{bmatrix} \text{Ю}_2 . \tag{25}$$

Здесь Ю_2 – J – унитарная матрица

$$\text{Ю}_2 J \text{Ю}_2^* = J ,$$

которая вычисляется по формуле

$$\text{Ю}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r}_2^{-\frac{1}{2}} u_2 R_1^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{|\zeta_1||\zeta_2|} \hat{r}_2^{\frac{1}{2}} v_2 R_1^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ S_2 R_2^{-1} & I \end{bmatrix} \mathfrak{A}_2^{-1}(0) . \tag{26}$$

Зная матрицу Ю_2, переходим от $f^{-1}(\zeta)$ к j-сжимающему множителю

$$\beta_3^{-1}(\zeta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I & -\frac{1}{\sqrt{2}} I \\ \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \end{bmatrix} \text{Ю}_2 f_3^{-1}(\zeta) \text{Ю}_2^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \end{bmatrix} = I - \left(1 - \frac{\xi_3 - \zeta}{1 - \xi_3 \zeta} \frac{|\xi_3|}{\zeta_3}\right) p_3 ,$$

где

$$p_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I & -\frac{1}{\sqrt{2}} I \\ \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \end{bmatrix} \text{Ю}_2 P_3 \text{Ю}_2^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_3^* \\ \eta_3^* \end{bmatrix} [\xi_3, \eta_3] j , [\xi_3, \eta_3] j \begin{bmatrix} \xi_3^* \\ \eta_3^* \end{bmatrix} = I ,$$

$$p_3^2 = p_3 , \qquad p_3 j \geqslant 0 .$$

Буквально повторяя предыдущие выкладки, получаем для матрицы Вейля W_3 равенство

$$W_3=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_3R_3^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -R_1^{-\frac{1}{2}}u_2^*\hat{r}_2^{-\frac{1}{2}}u_3^*\hat{r}_3^{-1}u_3\hat{r}_2^{-\frac{1}{2}}u_2R_1^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|^2|\zeta_2|^2|\zeta_3|^2R_1^{-\frac{1}{2}}v_2^*\hat{r}_2^{-\frac{1}{2}}v_3^*\hat{r}_3^{-1}v_3\hat{r}_2^{-\frac{1}{2}}v_2R_1^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -R_3^{-1}S_3^* \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

из которого следуют соотношения для радиусов

$$\rho_{d3}=R_1^{-\frac{1}{2}}u_2^*\hat{r}_2^{-\frac{1}{2}}u_3^*\hat{r}_3^{-1}u_3\hat{r}_2^{-\frac{1}{2}}u_2R_2^{-\frac{1}{2}};$$

$$\rho_{g3}=|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2|\zeta_3|^2R_1^{-\frac{1}{2}}v_2^*r_2^{-\frac{1}{2}}v_3^*\hat{r}_3^{-1}v_3\hat{r}_2^{-\frac{1}{2}}v_2R_1^{-\frac{1}{2}}.$$

Продолжая, получаем следующие выражения для радиусов круга Вейля, соответствующего произведению k двучленных J-сжимающих множителей полного ранга:

$$\mathfrak{A}_k^{-1}(\zeta)=f_1^{-1}(\zeta)f_2^{-1}(\zeta)\ldots f_k^{-1}(\zeta);$$

$$\rho_{dk}=R_1^{-\frac{1}{2}}u_2^*\hat{r}_2^{-\frac{1}{2}}u_3^*\hat{r}_3^{-\frac{1}{2}}\ldots u_k^*\hat{r}_k^{-1}u_k\ldots\hat{r}_3^{-\frac{1}{2}}u_3\hat{r}_2^{-\frac{1}{2}}u_2R_1^{-\frac{1}{2}};$$

$$\rho_{gk}=|\zeta_1|^2|\zeta_2|^2\ldots|\zeta_k|^2R_1^{-\frac{1}{2}}v_2^*\hat{r}_2^{-\frac{1}{2}}v_3^*\hat{r}_3^{-\frac{1}{2}}\ldots v_k^*\hat{r}_k^{-1}v_k\ldots\hat{r}_3^{-\frac{1}{2}}v_3\hat{r}_2^{-\frac{1}{2}}v_2R_1^{-\frac{1}{2}}.$$

Тем самым доказана следующая основная теорема.

Теорема 4. Пусть задано произведение конечного числа двучленных J-сжимающих множителей полного ранга

$$\mathfrak{A}_k^{-1}(\zeta)=f_1^{-1}(\zeta)f_2^{-1}(\zeta)\ldots f_k^{-1}(\zeta)=\overset{\rightarrow}{\prod_{\nu=1}^{k}}f_\nu^{-1}(\zeta)=\overset{\rightarrow}{\prod_{\nu=1}^{k}}\left[I-\left(1-\frac{\zeta_\nu-\zeta}{1-\bar{\zeta}_\nu\zeta}\,\frac{|\zeta_\nu|}{\zeta_\nu}\right)P_\nu\right]$$

и

$$W_\nu=\mathfrak{A}_\nu^{-1}(0)J\mathfrak{A}_\nu^{*-1}(0)=\begin{bmatrix} -R_\nu & S_\nu^* \\ S_\nu & -T_\nu \end{bmatrix}.$$

Определим последовательно матрицы

$$\mathfrak{W}_1;\ \hat{r}_2,\ u_2,\ v_2,\ \mathfrak{W}_2;\ \hat{r}_3,\ u_3,\ v_3,\ \mathfrak{W}_3;\ldots;\ \mathfrak{W}_{k-1};\ \hat{r}_k,\ u_k,\ v_k$$

с помощью следующего рекуррентного процесса:

$$\mathfrak{W}_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|^{-1}R_1^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ S_1R_1^{-1} & I \end{bmatrix}\mathfrak{A}_1^{-1}(0),$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix} \mathcal{H}_1 P_2 \mathcal{H}_1^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2^* \\ \eta_2^* \end{bmatrix} [\xi_2, \eta_2] j,$$

$$\hat{r}_2 = I + (1 - |\zeta_2|^2) |\xi_2|^2,$$

$$\xi_2 = |\xi_2| u_2, \quad \eta_2 = |\eta_2| v_2;$$

$$\mathcal{H}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r}_2^{-\frac{1}{2}} u_2 R_1^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\zeta_1|^{-1}|\zeta_2|^{-1} \hat{r}_2^{\frac{1}{2}} v_2 R_1^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ S_2 R_2^{-1} & I \end{bmatrix} \mathcal{A}_2^{-1}(0),$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix} \mathcal{H}_2 P_3 \mathcal{H}_2^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_3^* \\ \eta_3^* \end{bmatrix} [\xi_3, \eta_3] j,$$

$$\hat{r}_3 = I + (1 - |\zeta_3|^2) |\xi_3|^2,$$

$$\xi_3 = |\xi_3| u_3, \quad \eta_3 = |\eta_3| v_3;$$

. . . .

$$\mathcal{H}_\nu = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r}_\nu^{-\frac{1}{2}} u_\nu \hat{r}_{\nu-1}^{-\frac{1}{2}} u_{\nu-1} \ldots \hat{r}_2^{-\frac{1}{2}} u_2 R_1^{-\frac{1}{2}} & \\ 0 & \frac{1}{|\zeta_1| \ldots |\zeta_\nu|} \hat{r}_\nu^{\frac{1}{2}} v_\nu \hat{r}_{\nu-1}^{\frac{1}{2}} \ldots \hat{r}_2^{\frac{1}{2}} v_2 R_1^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} I & 0 \\ S_\nu R_\nu^{-1} & I \end{bmatrix} \mathcal{A}_\nu^{-1}(0),$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix} \mathcal{H}_\nu P_{\nu+1} \mathcal{H}_\nu^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{\nu+1}^* \\ \eta_{\nu+1}^* \end{bmatrix} [\xi_{\nu+1}, \eta_{\nu+1}] j,$$

$$\hat{r}_{\nu+1} = I + (1 - |\zeta_{\nu+1}|^2) |\xi_{\nu+1}|^2,$$

$$\xi_{\nu+1} = |\xi_{\nu+1}| u_{\nu+1}, \quad \eta_{\nu+1} = |\eta_{\nu+1}| v_{\nu+1}.$$

. . . .

Тогда радиусы круга Вейля вычисляются по формулам

$$\rho_{d_k} = R_1^{-\frac{1}{2}} u_2^* \hat{r}_2^{-\frac{1}{2}} u_3^* \hat{r}_3^{-\frac{1}{2}} \ldots u_k^* \hat{r}_k^{-1} u_k \ldots \hat{r}_3^{-\frac{1}{2}} u_3 \hat{r}_2^{-\frac{1}{2}} u_2 R_1^{-\frac{1}{2}}; \qquad (27)$$

$$\rho_{g_k} = |\zeta_1|^2 |\zeta_2|^2 \ldots |\zeta_k|^2 R_1^{-\frac{1}{2}} v_2^* \hat{r}_2^{-\frac{1}{2}} v_3^* \hat{r}_3^{-\frac{1}{2}} \ldots v_k^* \hat{r}_k^{-1} v_k \ldots \hat{r}_3^{-\frac{1}{2}} v_3 \hat{r}_2^{-\frac{1}{2}} v_2 R_1^{-\frac{1}{2}}. \qquad (28)$$

Для построения важного для нас примера существенную роль играет обратная теорема.

Теорема 5. Пусть $R_1>0,\ \hat r_2 \geq I, \ldots, \hat r_k \geq I$ – эрмитовы матрицы; $u_2, v_2, \ldots, u_k, v_k$ – унитарные матрицы; $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ – точки, лежащие внутри единичного круга, попарно различны и заданы произвольно.

Тогда существует проблема Неванлинны – Пика с узлами интерполяции в точках $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$, для которой правый и левый радиусы круга Вейля в точке $\zeta=0$ определяются формулами (27), (28).

Доказательство. Как следует из замечания, сделанного после теоремы I, по заданной матрице R_1^{-1} можно построить семейство двучленных элементарных множителей, для которых R_1^{-1} и $|\zeta_1|^2 R_1^{-1}$ являются соответственно правым и левым радиусами круга Вейля. Выберем какой-нибудь один из них и обозначим через $f^{-1}(\zeta)$. Определим матрицу $\mathfrak{W}_1$ по формуле (22).

Затем в силу теоремы 3 можно построить семейство элементарных j-сжимающих множителей, для которых радиусами круга Вейля будут матрицы

$$u_2^* \hat r_2^{-1} u_2, \qquad |\zeta_2|\, v_2^* \hat r_2^{-1} v_2 .$$

Выберем один множитель $\beta_2^{-1}(\zeta)$ из этого семейства и через $f_2^{-1}(\zeta)$ обозначим матрицу-функцию

$$f_2^{-1}(\zeta)=\mathfrak{W}_1^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}I & \frac{1}{\sqrt2}I\\ -\frac{1}{\sqrt2}I & \frac{1}{\sqrt2}I\end{bmatrix}\beta_2^{-1}(\zeta)\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}I & -\frac{1}{\sqrt2}I\\ \frac{1}{\sqrt2}I & \frac{1}{\sqrt2}I\end{bmatrix}\mathfrak{W}_1 .$$

Далее, положим

$$\alpha_2^{-1}(\zeta)=f_1^{-1}(\zeta)\,f_2^{-1}(\zeta)$$

и определим матрицу $\mathfrak{W}_2$ равенством

$$\mathfrak{W}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}I & \frac{1}{\sqrt2}I\\ -\frac{1}{\sqrt2}I & \frac{1}{\sqrt2}I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat r_2^{-\frac12} u_2 R_1^{-\frac12} & 0\\ 0 & \frac{1}{|\zeta_1||\zeta_2|}\hat r_2^{\frac12} v_2 R_1^{\frac12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & 0\\ S_2 R_2^{-1} & I\end{bmatrix}\alpha_2^{-1}(0).$$

Снова по теореме 3 строим j-сжимающий множитель $\beta_3^{-1}(\zeta)$, для которого радиусами круга Вейля будут матрицы

$$u_3^* \hat{r}_3^{-1} u_3, \qquad |\zeta_3|^2 v_3^* \hat{r}_3^{-1} v_3,$$

и определяем

$$f_3^{-1}(\zeta) = \mathcal{W}_2^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \end{bmatrix} \beta_3^{-1}(\zeta) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I & -\frac{1}{\sqrt{2}} I \\ \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \end{bmatrix} \mathcal{W}_2 .$$

Продолжая этот процесс, приходим к матрице-функции

$$\mathfrak{A}_k^{-1}(\zeta) = f_1^{-1}(\zeta) f_2^{-1}(\zeta) \dots f_k^{-1}(\zeta).$$

Из предыдущей теоремы 4 вытекает, что радиусы круга Вейля для $\mathfrak{A}_k^{-1}(\zeta)$ определяются по формулам (27), (28).

Любому произведению элементарных J-растягивающих множителей полного ранга

$$\mathfrak{A}_k(\zeta) = f_k(\zeta) f_{k-1}(\zeta) \dots f_2(\zeta) f_1(\zeta)$$

соответствует [1] проблема Неванлинны - Пика с узлами интерполяции в полюсах $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$.

3. Будем теперь считать, что количество множителей в произведении

$$\mathfrak{A}_k(\zeta) = \prod_{\nu=1}^{k} f_\nu(\zeta)$$

неограниченно возрастает. Последовательности матриц-функций $\{\mathfrak{A}_k(\zeta)\}$ соответствует последовательность матричных кругов $\mathfrak{K}_k(\zeta)$, вложенных друг в друга, правые и левые радиусы которых ρ_{d_k}, ρ_{g_k} можно вычислить по формулам (27), (28).

Отметим, что существует предел центров кругов $\mathfrak{K}_k$, так как вычисление J-формы группового параметризованного множителя уже второго порядка покажет, что выполнено условие $L > 0$.

Следовательно, сейчас в каждой точке ζ_0 единичного круга можно говорить о предельном круге Вейля. По теореме С.А.Орлова [4], ранги правого и левого предельных радиусов не зависят от выбора точки ζ_0, в результате чего появляется возможность классифицировать задачи Неванлинны - Пика по значениям рангов предельных радиусов. В этих вопросах существенную роль играют структурные формулы (27),(28). В частности, из них вытекает следствие.

Следствие. Для каждой проблемы Неванлинны – Пика, у которой правый предельный радиус полного ранга, а скалярное произведение Бляшке $\prod_{\nu=1}^{\infty} |\zeta_\nu|$ сходится, левый предельный радиус $\rho_{g\infty}$ также имеет полный ранг; если же скалярное произведение Бляшке $\prod_{\nu=1}^{\infty} |\zeta_\nu|$ расходится, то левый предельный радиус $\rho_{g\infty}$ равен нулю.

Очевидно, если левый предельный радиус полного ранга, то произведение Бляшке $\prod_{\nu=1}^{\infty} |\zeta_\nu|$ сходится и правый предельный радиус имеет полный ранг.

В том случае, когда предельные радиусы являются вырожденными матрицами, не существует какой-либо связи между их рангами. Именно, для любой пары неотрицательных целых чисел ν_d, ν_g, каждое из которых меньше m, можно построить задачу Неванлинны – Пика такую, что ранги радиусов предельного круга Вейля равны соответственно ν_d и ν_g. Построение опирается на теорему 5.

Пусть $\hat{r}_1 = I$, а $\hat{r}_2, \hat{r}_3, \ldots, \hat{r}_k, \ldots$ – диагональные матрицы с элементами, которые больше либо равны единице и расположены в порядке убывания. Для определенности будем считать, что $\nu_d > \nu_g$. Положим

$$u_2 = u_3 = \ldots = u_k = \ldots = I$$

$$\hat{r}_k^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_1^{(k)} & & & & & \\ & \gamma_2^{(k)} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \gamma_{\mu_d}^{(k)} & & \\ & & & & \delta_1^{(k)} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \delta_{\nu_d}^{(k)} \\ & & & & & & \end{bmatrix}, \quad \mu_d + \nu_d = m$$

и подберем последовательности $\{\gamma_i^{(k)}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu_d)$ так, чтобы произведения

$$\prod_{k=2}^{\infty} \gamma_i^{(k)}$$

расходились (т.е. стремились к нулю), а последовательности $\{\delta_j^{(k)}\}$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu_d)$ – так, чтобы произведения

$$\prod_{k=2}^{\infty} \delta_j^{(k)}$$

сходились (т.е. стремились к отличным от нуля пределам).

При таком выборе матриц R_1 , $\hat{r}_k$, u_k правый радиус ρ_{dn} имеет вид

$$\rho_{dn}=\begin{bmatrix} \prod\limits_{k=2}^{n}\gamma_1^{(k)} & & & & & & \\ & \prod\limits_{k=2}^{n}\gamma_2^{(k)} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \prod\limits_{k=2}^{n}\gamma_{\mu_d}^{(k)} & & & \\ & & & & \prod\limits_{k=2}^{n}\delta_1^{(k)} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \prod\limits_{k=2}^{n}\delta_{\nu_d}^{(k)} \end{bmatrix},$$

а правый радиус предельного круга Вейля

$$\rho_{d_\infty}=\begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \Delta_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \Delta_{\nu_d} \end{bmatrix} \quad (\Delta_j>0,\ j=1,2,\dots,\nu_d)$$

будет иметь ранг, равный ν_d.

Для построения левого радиуса следует определить еще унитарные матрицы, v_2, v_3, ..., v_k, ... Зададим их так, что ρ_g будет иметь диагональный вид, причем такой, что в нем уже $\mu_g=m-\nu_g$ первых диагональных элементов будут стремиться к нулю. Достигнем этого, переставив в некоторых $\hat{r}_k^{-1}$ первый диагональный элемент с диагональными элементами, стоящими на $\mu_d+1, \mu_d+2, \dots \mu_g$ местах.

Так, например, перестановка первого диагонального элемента с μ_d+1 осуществляется с помощью преобразования

$$v^*\hat{r}^{-1}v,$$

где матрица v^* имеет вид

$$v^*=\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \qquad v^*v=I.$$

Перестановка диагональных элементов, обеспечивающая нулевую расходимость, проводится следующим образом. Обозначим

$$\nu_d - \nu_g = \nu - 1 .$$

Ряд $\sum_{k=2}^{\infty}(1 - \gamma_1^{(k)})$ расходится. Разобьем его на отрезки, каждый из которых больше единицы. Элементы матриц $\hat{r}_k^{-1}$, соответствующие $1, \nu+1, 2\nu+1, 3\nu+1, \ldots$ отрезкам, оставляем на месте. Элементы, соответствующие 2, $\nu + 2$, $2\nu + 2$, $3\nu + 2$, ... отрезкам, переставляем с элементами, стоящими на $\mu_d + 1$ месте; элементы матриц $\hat{r}_k^{-1}$, соответствующие 3, $\nu + 3$, $2\nu + 3$, $3\nu + 3$, ... отрезкам, переставляем с элементами, стоящими на $\mu_d + 2$ месте и т.д.

Ясно, что после такой перестановки будут расходиться уже μ_g первых рядов $\sum(1 - h^{(k)})$, стало быть, и соответствующие произведения; левый радиус предельного круга Вейля будет иметь вид

$$\rho_{g\infty} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots 0 & & & \\ & & & \Delta_\nu & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \Delta_{\nu_d} \end{bmatrix} .$$

По теореме 5, такой последовательности матриц $R_1 = I$, $\hat{r}_k$, $u_k = I$, v_k соответствует бесконечное произведение двучленных J-растягивающих множителей полного ранга

$$\ldots f_k(\zeta) f_{k-1}(\zeta) \ldots f_2(\zeta) f_1(\zeta) ,$$

а значит, и связанная с ним проблема Неванлинны – Пика.

1. Nevanlinna R. Über beschränkte analytische Funktionen. - Ann.Akad.Sci. Fenn. Ser.A32, 1929, 1, p. 1-75.

2. Ефимов А.В., Потапов В.П. J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей. - Успехи мат. наук, 1973, 28, вып.I, с.65-130.

3. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны - Пика. - Докл. АН АрмССР, 1974, 59, с.17-22.

4. Орлов С.А. Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов. - Изв. АН СССР, 1976, 40, № 3, с.593-644.

УДК 517.958

В.П.Котляров

КОНЕЧНО-ЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Цель работы – описание множества конечно-зонных решений уравнения

$$iS_t = \frac{1}{2}[S, S_{xx}], \tag{1}$$

где $S = S(x, t)$ – эрмитова матрица второго порядка с нулевым следом и такая, что $S^2 = I$ (I – единичная матрица). Представление Лакса для этого уравнения найдено Л.А.Тахтаджяном [1], что позволило методом обратной задачи найти солитонные решения.

Задача построения конечно-зонных решений уравнения Кортевега – де Фриза [2], нелинейного уравнения Шредингера [3, 4], как известно, связана с классической проблемой обращения Якоби. В случае уравнения (1) приходим к нестандартной проблеме обращения. Ее решение, данное в настоящей работе, позволило получить явные формулы для конечно-зонных решений уравнения (1). При некоторых частных условиях возникает обычная классическая проблема Якоби, которая решается известным способом [5]. В связи с этим множество конечно-зонных решений уравнения (1) разбивается на два класса. В работе дано полное описание этих классов решений в терминах θ – функций.

Совместные системы

Существование пары Лакса для уравнения Гейзенберга, установленное в работе [1], эквивалентно совместности следующих матричных уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_x &= [\varphi, A]; \\ \varphi_t &= [\varphi, B], \end{aligned} \tag{2}$$

где $A = i\lambda S$, $B = -2i\lambda^2 S + \lambda S S_x$, а $\varphi = \varphi(x, t, \lambda)$ – матрица второго порядка с нулевым следом.

Отметим легко проверяемые свойства системы уравнений (2):

1) $\det \varphi(x, t, \lambda) \equiv -P(\lambda)$, т.е. определитель матрицы $\varphi(x, t, \lambda)$ не зависит от x и t;

2) $\varphi^+(x,t,\bar\lambda) = \varphi(x,t,\lambda)$, если только $\varphi^+(0,0,\bar\lambda) = \varphi(0,0,\lambda)$. Здесь " + " и черта – эрмитово и комплексное сопряжение.

Как и в работе [3], для получения конечно-зонных решений уравнения (I) будем искать полиномиальные по λ решения системы (2), т.е. будем искать $\varphi(x,t\ \lambda)$ в виде

$$\varphi(x,t,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x,t)\lambda^k .$$

Тогда система (2) запишется так:

$$\varphi_k' = i[\varphi_{k-1}, S] ;$$

$$\varphi_k^{\cdot} = -2i[\varphi_{k-2}, S] + [\varphi_{k-1}, SS_x], \qquad k = 0,1,\dots,n . \tag{3}$$

Полагая $k = n+1$, получаем

$$[\varphi_n, S] = 0, \ -2i[\varphi_{n-1}, S] + [\varphi_n, SS_x] = 0 . \tag{4}$$

Поскольку $Sp\ S = 0$ и она невырожденная, то $\varphi_n = \alpha S$, где α – скаляр. Выберем $\alpha = 1$. Тогда $\varphi_n(x,t) = S(x,t)$, а $SS_x = \varphi_n\varphi_n' = i\varphi_n\varphi_{n-1}\varphi_n - i\varphi_n^2\ \varphi_{n-1}$, значит, второе равенство в (4) также удовлетворяется. Далее, $\varphi^2 = -det\ \ \varphi I = P(\lambda) I$. Поэтому $P(\lambda)$ есть полином степени $2n$, старший коэффициент которого равен единице, т.е.

$$P(\lambda) = \prod_{j=1}^{2n}(\lambda - E_j) = \lambda^{2n} + P_{2n-1}\lambda^{2n-1} + \dots + P_0 .$$

Кроме того, имеем

$$P_{2n-1} I = \varphi_n\varphi_{n-1} + \varphi_{n-1}\varphi_n , \tag{5}$$

следовательно,

$$SS_x = 2i(K\varphi_n - \varphi_{n-1}), \tag{6}$$

где $K = \frac{1}{2}P_{2n-1} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n} E_j$.

Отметим, что свойство 2) решений систем (2) приводит к условию $\overline{P(\bar{\lambda})} = P(\lambda)$ и, следовательно, постоянная K – вещественная. Отметим также, что величина (5) (вообще все коэффициенты полинома $P(\lambda)$) является интегралом, т.е. она сохраняется по x и по t. Наконец, подставляя в систему (3) $S = \varphi_n$ и SS_x, по формуле (6) получаем следующие системы автономных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\varphi_k' = i\,[\varphi_{k-1}, \varphi_n] \qquad k = 0,1,2,\ldots,n \\ &\dot{\varphi}_k = -2i\,[\varphi_{k-2}, \varphi_n] - 2i\,[\varphi_{k-1}, \varphi_{n-1}] + 2iK\,[\varphi_{k-1}, \varphi_n], \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$2KI = (\varphi_n \varphi_{n-1} + \varphi_{n-1}\varphi_n)\Big|_{x=t=0}.$$

Система уравнений (7) является совместной, в чем легко убедиться непосредственной проверкой условий Фробениуса.

<u>Лемма.</u> Если начальные данные для системы (7) таковы, что

$$\varphi_k^+(0,0) = \varphi_k(0,0),\ k = 0,1,2,\ldots,n;\ \ \varphi_n^2(0,0) = I, \tag{8}$$

то существует при всех x и t бесконечно дифференцируемое и ограниченное решение $\{\varphi_k(x,t)\}$, $k = 0,1,2,\ldots,n$ этой системы, обладающее свойством (8) при всех x и t.

Доказательство леммы проводится так же, как и в работе [3].

<u>Теорема I.</u> Пусть $\{\varphi_k(x,t)\}$, $k = 0,1,2,\ldots,n$ – любое совместное решение системы (7) с начальными условиями, удовлетворяющими (8). Тогда матрица $S = \varphi_n(x,t)$ является бесконечно дифференцируемым и ограниченным решением уравнения (I), определенным при всех $x, t \in (-\infty, \infty)$, причем $S^2 \equiv I$.

<u>Доказательство.</u> В силу леммы нужно лишь показать, что $S = \varphi_n(x,t)$ удовлетворяет уравнению (I). Действительно, при $k = n,\ n-1$ из системы (8) имеем

$$\dot{S} = -2i\,[\varphi_{n-2}, S] + 2iK\,[\varphi_{n-1}, S];$$

$$S' = i\,[\varphi_{n-1}, S], \quad \varphi_{n-1}' = i\,[\varphi_{n-2}, S],$$

значит,

$$\dot S = -2\varphi'_{n-1} + 2KS'. \tag{9}$$

Умножая уравнения системы (7) на λ^k и суммируя получаем, что $\varphi(x,t,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x,t)\lambda^k$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} &\varphi' = i\lambda[\varphi, \varphi_n]; \\ &\dot\varphi = -2i\lambda^2[\varphi,\varphi_n] - 2i\lambda[\varphi,\varphi_{n-1}] + 2iK\lambda[\varphi,\varphi_n]. \end{aligned} \tag{10}$$

Отсюда следует, что $\varphi^2 = -\det\varphi I$ сохраняется, поэтому

$$2KI = \varphi_n\varphi_{n-1} + \varphi_{n-1}\varphi_n = S\varphi_{n-1} + \varphi_{n-1}S.$$

Кроме того, мы уже имели, что

$$iS' = S\varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}S.$$

Следовательно

$$2KI + iS' = 2S\varphi_{n-1},$$

или

$$\varphi_{n-1} = \frac{i}{2}SS' + KS.$$

Подставляя это выражение в (9), окончательно получаем

$$\dot S = -i(SS')' - 2KS' + 2KS' = \frac{1}{2i}[S, S_{xx}],$$

т.е. $S = \varphi_n(x,t)$ удовлетворяет уравнению (I). Теорема доказана.

Решения уравнения (I), порождаемые полиномиальными по λ решениями системы уравнений (I0) называются конечно-зонными.

Представление конечно-зонных решений и уравнения для нулей

Пусть $\varphi(x,t,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x,t)\lambda^k$ – полиномиальное по λ решение системы (I0) с начальными условиями, удовлетворяющими (8). Тогда, если

$$\Phi = \begin{pmatrix} f(\lambda), & \bar{\varphi}(\lambda) \\ \varphi(\lambda), & -f(\lambda) \end{pmatrix}; \qquad S = \begin{pmatrix} \nu & \bar{\mu} \\ \mu & -\nu \end{pmatrix},$$

то, во-первых, функции $f = f(x, t, \lambda)$ и $\varphi = \varphi(x, t, \lambda)$ являются полиномами степени n, т.е.

$$f(x,t) = f_n(x,t)\prod_{k=1}^{n}(\lambda - \hat{\lambda}_k(x,t)) = f_n\lambda^n + f_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + f_0;$$

$$\varphi(x,t) = \varphi_n(x,t)\prod_{k=1}^{n}(\lambda - \lambda_k(x,t)) = \varphi_n\lambda^n + \varphi_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \varphi_0,$$

а, во-вторых, из равенства $S = \Phi_n(x,t)$ находим

$$\mu = \mu(x,t) = \varphi_n(x,t), \quad \nu = \nu(x,t) = f_n(x,t).$$

Из уравнений системы (10) при $\lambda = 0$ получаем, что $\Phi_0(x,t) = const$, т.е. $f_0 = const$ и $\varphi_0 = const = \varphi_0(0, 0)$. Поэтому

$$\mu(x,t) = \varphi_n(x,t) = \varphi_0\left(\frac{\varphi_0}{\varphi_n}\right)^{-1} = \varphi_0 \Big/ \prod_{k=1}^{n}(-\lambda_k(x,t)), \qquad (11)$$

где $\lambda_k(x,t)$ – нули полинома $\varphi(x, t, \lambda)$. А поскольку $S^2 = \Phi_n^2 = I$, то $\nu^2 + |\mu|^2 = 1$. Следовательно,

$$\nu(x,t) = \operatorname{sgn} f_n(0,0)\sqrt{1 - |\mu(x,t)|^2}. \qquad (12)$$

Для получения уравнений для нулей $\lambda_k(x,t)$ полинома $\varphi(x,t,\lambda)$, которые всюду в дальнейшем предполагаются простыми, рассмотрим уравнения для полинома $\varphi(x,t,\lambda)$, воспользовавшись системой (10)

$$\varphi' = 2i\lambda(f_n\varphi - f\varphi_n);$$

$$\dot{\varphi} = 4i\lambda(K - \lambda)(f_n\varphi - f\varphi_n) - 4i\lambda(f_{n-1}\varphi - \varphi_{n-1}f).$$

Разделив оба уравнения на $\varphi(x,t,\lambda)$, умножив их на $\lambda-\lambda_k(x,t)$ и устремив $\lambda\to\lambda_k$, получим

$$\lambda'_k = 2i\,\lambda_k f(\lambda_k)\Big/\prod_{r\neq k}(\lambda_k-\lambda_r);$$

$$\dot\lambda_k = 4i\left(K+\sum_{r=1}^{n}\lambda_r-\lambda_k\right)\lambda_k f\left(\lambda_k\right)\Big/\prod_{r\neq k}\left(\lambda_k-\lambda_r\right),\quad k=1,2,\dots,n.$$

Учитывая, что $-\det\varphi(x,t,\lambda)=f^2(\lambda)+\varphi(\lambda)\overline{\varphi(\bar\lambda)}=P(\lambda)$, окончательно получаем уравнения для нулей $\lambda_k(x,t)$, через которые по формулам (11) и (12) выражается искомое решение уравнения (1)

$$\lambda'_k = 2i\,\lambda_k\sqrt{P(\lambda_k)}\Big/\prod_{r\neq k}(\lambda_k-\lambda_r);$$

$$\dot\lambda_k = 4i\left(K+\sum_{r=1}^{n}\lambda_r-\lambda_k\right)\lambda_k\sqrt{P(\lambda_k)}\Big/\prod_{r\neq k}(\lambda_k-\lambda_r),\ k=1,2,\dots,n. \tag{13}$$

Проблема обращения Якоби и решение уравнений для нулей

Уравнения (13) легко могут быть линеаризованы. Для этого рассмотрим риманову поверхность R функции $\sqrt{P(\lambda)}$, $P(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}(\lambda-E_j)(\lambda-\bar E_j)$ ($P(0)\neq 0$, $E_i\neq E_j$ при $i\neq j$) с фиксированным стандартным образом каноническим рассечением ее [5]. Ее род равен $n-1$. Введем абелевы интегралы

$$\omega_j(\lambda)=\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\varphi_j(\xi)\,d\xi}{\xi\sqrt{P(\xi)}},\quad \varphi_j(\xi)=\sum_{r=1}^{n}C_{jr}\xi^{n-r},\ j=1,2,\dots,n, \tag{14}$$

нормированные условиями

$$\int_{a_k} d\omega_j(\lambda)=\delta_{kj},\qquad k,j=1,2,\dots,n, \tag{15}$$

где $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ – a-циклы римановой поверхности R; a_n – контур, охватывающий точку 0, лежащий на верхнем листе R. Условия нормировки (15) можно записать в виде

$$\sum_{r=1}^{n} C_{jr} A_{rk} = \delta_{jk}, \tag{16}$$

где

$$A_{rk} = \int_{a_k} \frac{\lambda^{n-r}}{\lambda \sqrt{P(\lambda)}} d\lambda .$$

Если $r, k = 1, 2, \ldots, n-1$, то матрица $\| A_{rk} \|_{r, k=1}^{n-1}$ – обычная матрица, связанная с каноническим базисом абелевых интегралов первого рода на поверхности R и, следовательно, ее определитель отличен от нуля [5]. При $r = 1, 2, \ldots, n$, $k = n$, имеем

$$A_{rn} = \int_{a_n} \frac{\lambda^{n-r}}{\lambda \sqrt{P(\lambda)}} d\lambda = 2\pi i \operatorname*{res}_{\lambda=0} \left(\frac{\lambda^{n-r}}{\lambda \sqrt{P(\lambda)}} \right) = \frac{2\pi i}{\sqrt{P(0)}} \delta_{rn} .$$

Поэтому

$$\det \| A_{rk} \|_{r,k=1}^{n} = \frac{2\pi i}{\sqrt{P(0)}} \det \| A_{rk} \|_{r,k=1}^{n-1} \neq 0$$

и тем самым числа C_{jr} определяются однозначно. Легко найти числа C_{jn}. Действительно, поскольку $A_{rn} = 2\pi i \delta_{rn} / \sqrt{P(0)}$, то из (16) имеем

$$C_{jn} = \frac{\sqrt{P(0)}}{2\pi i} \delta_{jn}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n . \tag{17}$$

Поскольку нули полинома $P(\lambda)$ предполагаются простыми, то интегралы могут иметь особенности разве лишь в точках 0^+ и 0^- (нули на верхнем и нижнем листе поверхности R). Соответствующие дифференциалы $d\omega_j(\lambda)$ в окрестности точек $0^\pm$ имеют разложение

$$d\omega_j(\lambda) = \left(\pm \frac{C_{jn}}{\lambda \sqrt{P(0)}} + рег \right) d\lambda .$$

Следовательно, логарифмические вычеты дифференциалов $d\omega_j(\lambda)$ в точках 0^+ и 0^- равны соответственно $\pm C_{jn}/\sqrt{P(0)} = \pm \delta_{jn}/2\pi i$. Поэтому $d\omega_1, \dots, d\omega_{n-1}$ – абелевы дифференциалы первого рода, а $d\omega_n$ – абелев дифференциал третьего рода с логарифмическими вычетами в точках 0^+ и 0^- и полярными периодами $1/2\pi i$ и $-1/2\pi i$ соответственно. Дифференциал $d\omega_n$ является нормированным, поскольку его a-периоды равны нулю. Таким образом, первые $n-1$ интегралов (14) дают обычный базис абелевых интегралов первого рода, а $\omega_n(\lambda)$ – интеграл третьего рода на R.

В уравнениях (13) сделаем замену

$$\vartheta_j(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \omega_j(\lambda_k(x,t)), \quad j = 1,2,\dots,n, \tag{18}$$

где под $\omega_j(\lambda)$ понимаем фиксированные ветви абелевых интегралов (14), и покажем, что эти уравнения линеаризуются. Действительно, используя легко вычислимое равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^{n-r}}{\prod\limits_{r\neq k}(\lambda_k - \lambda_r)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{n} \lambda_m, & r = 0; \\ 1, & r = 1; \\ 0, & r > 1, \end{cases}$$

находим

$$\vartheta_j' = 2i \sum_{r=1}^{n} C_{jr} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^{n-r}}{\prod\limits_{r\neq k}(\lambda_k - \lambda_r)} = 2i\, C_{j1};$$

$$\dot{\vartheta}_j = 4i\,(KC_{j1} - C_{j2}), \qquad j = 1,2,\dots,n.$$

Следовательно,

$$\vartheta_j(x,t) = \alpha_j x + \beta_j t + \gamma_j^0, \quad j = 1,2,\dots,n, \tag{19}$$

где

$$\alpha_j = 2iC_{j1}, \quad \beta_j = 4i\,(KC_{j1} - C_{j2}), \quad \gamma_j^0 = \sum_{k=1}^{n} \omega_j(\lambda_k(0,0)).$$

В соответствии с (18), имеем следующую проблему обращения: по известным $\vartheta_j(x,t)$ найти $\lambda_k(x,t)$ из сравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_j(\lambda_k(x,t)) \equiv \vartheta_j(x,t), \quad j=1,2,\ldots,n.$$

Полученная проблема обращения отличается от обычной проблемы обращения Якоби тем, что она рассматривается на римановой поверхности R рода $n-1$ с обычным базисом абелевых интегралов первого рода $\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}$, но в ней участвует дополнительно нормированный абелев интеграл третьего рода $\omega_n(\lambda)$ с известными особенностями и полярными периодами.

Покажем, что проблема обращения (20) при некоторых условиях однозначно разрешима. Для этого перейдем от поверхности R к поверхности R_ε, определяемой функцией $\sqrt{(\lambda^2+\varepsilon^2)P(\lambda)}$. Род R_ε равен n. От $\lambda_k(x,t)$ перейдем к $\lambda_k^\varepsilon(x,t)$, считая, что они являются решением таких уравнений:

$$\lambda_k^{\varepsilon\prime} = 2i\sqrt{(\lambda_k^\varepsilon+\varepsilon^2)P(\lambda_k^\varepsilon)} \Big/ \prod_{r\neq k}(\lambda_k^\varepsilon-\lambda_r^\varepsilon);$$

$$\dot\lambda_k^\varepsilon = 4i\Big(\sum_{r=1}^{n}\lambda_r^\varepsilon + K - \lambda_k^\varepsilon\Big)\sqrt{(\lambda_k^{\varepsilon 2}+\varepsilon^2)\sqrt{P(\lambda_k^\varepsilon)}} \Big/ \prod_{r\neq k}(\lambda_k^\varepsilon-\lambda_r^\varepsilon), \tag{21}$$

$$k=1,2,\ldots,n.$$

Предположим, что начальные данные для системы (13) таковы, что

$$\max_{1\le k\le n}|\lambda_k(0,0)|<M, \quad \min_{r\neq k}|\lambda_k(0,0)-\lambda_r(0,0)|>m. \tag{22}$$

Выбирая для системы (21) начальные данные, подчиненные условиям (22), при достаточно малых x и t будем иметь

$$\left|\frac{d}{dx}\lambda_k^\varepsilon(x,t)\right| \le C_1, \qquad \left|\frac{d}{dt}\lambda_k^\varepsilon(x,t)\right| \le C_2$$

с постоянными, не зависящими от ε, x, t, т.е. семейство функций $\{\lambda_k^\varepsilon(x,t)\}$ компактно в равномерной метрике. Следовательно, существует подпоследовательность $\{\lambda_k^{\varepsilon'}\}$, которая при $\varepsilon'\to 0$ равномерно по x и t сходится к $\lambda_k(x,t)$, удовлетворяющим уравнениям (13) с теми же начальными условиями. Условия

(22) гарантируют единственность решения уравнений (13), и поэтому пределы по любой подпоследовательности совпадают между собой.

Вводя канонический базис абелевых интегралов первого рода на R_ε, линеаризуем уравнения (21) путем замены

$$\nu_j^\varepsilon(x,t)=\sum_{k=1}^{n}\omega_j^\varepsilon(\lambda_k^\varepsilon(x,t)),\quad j=1,2,\dots,n, \tag{23}$$

где

$$\omega_j^\varepsilon(\lambda)=\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\varphi_j^\varepsilon(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(\xi^2+\varepsilon^2)P(\xi)}};\quad \varphi_j^\varepsilon(\xi)=\sum_{r=1}^{n}C_{jr}^\varepsilon\,\xi^{n-r}$$

Тогда

$$\nu_j^\varepsilon(x,t)=\alpha_j^\varepsilon x+\beta_j^\varepsilon t+\gamma_j^{0\varepsilon};$$

$$\alpha_j^\varepsilon=2i\,C_{j1}^\varepsilon;\quad \beta_j^\varepsilon=4i\left(KC_{j1}^\varepsilon-C_{j2}^\varepsilon\right),\ \gamma_j^{0\varepsilon}=\sum_{k=1}^{n}\omega_j^\varepsilon(\lambda_k(0,0)).$$

Для того чтобы установить сходимость абелевых интегралов, проведем каноническое рассечение римановой поверхности R_ε по a- и b - циклам. В полученной области R_ε^* любая ветвь интеграла $\omega_j^\varepsilon(\lambda)$ регулярна, и легко видеть, что она сходится поточечно, за исключением точек 0^+ и 0^- к соответствующей ветви интеграла $\omega_j(\lambda)$, определенного в области R^*, получающейся в результате канонического рассечения поверхности R. Следовательно, на любом компакте $K\subset R^*$, отстоящем на положительном расстоянии от точек 0^+ и 0^-, семейство регулярных функций $\{\omega_j^\varepsilon(\lambda)\}$ равномерно по ε и ограничено (поскольку их поточечный предел $\omega_j(\lambda)$ ограничен на любом компакте k постоянной, зависящей только от k), потому $\omega_j^\varepsilon(\lambda)$ при $\varepsilon\to 0$ сходится равномерно на $K\subset R^*$ к $\omega_j(\lambda)$. Отсюда вытекает, что если начальные условия $\lambda_k(0,0)$ не лежат в окрестности 0^+ и 0^-, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\nu_j^\varepsilon(x,t)=\nu_j(x,t)$ и тем самым проблема обращения (23) в пределе переходит в проблему обращения (20).

Проблема обращения (23) есть стандартная проблема обращения Якоби на римановой поверхности R_ε. Предполагая, что все

$\lambda_k(0,0)$ различны, по теореме Римана [5] получаем, что существует нетривиальная θ-функция Римана $\theta^{\varepsilon}(\lambda)=\theta_{\varepsilon}(\vec{\omega}^{\varepsilon}(\lambda)-\vec{e}^{\varepsilon})$, где

$$\theta_{\varepsilon}(\vec{u})=\sum_{(\vec{m})} exp\left[\pi i(B^{\varepsilon}\vec{m},\vec{m})+2\pi i(\vec{u},\vec{m})\right],$$

$\vec{u}\in C$; $\vec{m}$ – целочисленный вектор, каждая компонента которого изменяется от $-\infty$ до $+\infty$; B^{ε} – матрица B-периодов канонического базиса $\omega_j^{\varepsilon}(\lambda)$ на R_{ε}, $\vec{\omega}^{\varepsilon}(\lambda)=(\omega_1^{\varepsilon}(\lambda),\ldots,\omega_n^{\varepsilon}(\lambda))$,

$$\vec{e}^{\varepsilon}=(e_1^{\varepsilon},\ldots,e_n^{\varepsilon}),\quad e_j^{\varepsilon}=\nu_j^{\varepsilon}(x,t)+k_j^{\varepsilon},$$

$k_j^{\varepsilon}=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}B^{\varepsilon}_{rj}-j/2$, которая является регулярной в области R_{ε}^{+} , имеет там n нулей λ_k^{ε} , которые решают проблему обращения (23).

Вычислим предел $\theta^{\varepsilon}(\lambda)$ при $\varepsilon\to 0$, который обозначим $T(\lambda)$, и покажем, что нули функции $T(\lambda)$ (их оказывается ровно n) решают проблему обращения (20). Для этого прежде всего найдем поточечный предел $\theta^{\varepsilon}(\lambda)$. Запишем

$$(B^{\varepsilon}\vec{m},\vec{m})+2(\vec{\omega}^{\varepsilon}(\lambda)-\vec{e}^{\varepsilon},\vec{m})=\sum_{k,j=1}^{n}B^{\varepsilon}_{kj}m_k m_j+2\sum_{j=1}^{n}(\omega_j^{\varepsilon}(\lambda)-\nu_j^{\varepsilon}-k_j^{\varepsilon})m_j=$$

$$=\sum_{k,j=1}^{n-1}B^{\varepsilon}_{kj}m_k m_j+2\sum_{j=1}^{n-1}(\omega_j^{\varepsilon}(\lambda)-\nu_j^{\varepsilon}-k_j^{\varepsilon})m_j+\sum_{k=1}^{n-1}B^{\varepsilon}_{kn}m_k m_n+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}B^{\varepsilon}_{nj}m_n m_j+B^{\varepsilon}_{nn}m_n^2+2(\omega_n^{\varepsilon}(\lambda)-\nu_n^{\varepsilon}-k_n^{\varepsilon})m_n=$$

$$=\sum_{k,j=1}^{n-1}B^{\varepsilon}_{kj}m_k m_j+2\sum_{j=1}^{n-1}(\omega_j^{\varepsilon}(\lambda)-\nu_j^{\varepsilon}-k_j^{\varepsilon})m_j+B^{\varepsilon}_{nn}m_n(m_n-1)+$$

$$+2m_n\left(\sum_{k=1}^{n-1}B_{nk}^{\varepsilon}m_k+\omega_n^{\varepsilon}(\lambda)-\nu_n^{\varepsilon}-\hat{k}_n^{\varepsilon}\right);\quad \hat{k}_n^{\varepsilon}=k_n^{\varepsilon}-\frac{1}{2}B_{nn}^{\varepsilon}.$$

Легко проверяется, что все входящие в это выражение величины имеют конечные пределы при $\varepsilon\to 0$, кроме

$$\lim_{\varepsilon\to 0}B^{\varepsilon}_{nn}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b_n^{\varepsilon}}d\omega_n^{\varepsilon}(\lambda)=+i\infty,$$

и, следовательно,

$$\exp\left(\pi i\, B^{\varepsilon}_{nn}\, m_n(m_n-1)\right) \to 0$$

для всех значений m_n, кроме $m_n=0$, $m_n=1$. Поэтому в пределе получим

$$T(\lambda)=\lim_{\varepsilon\to 0}\theta^{\varepsilon}(\lambda)=\theta_{n-1}(\vec{\omega}(\lambda)-\vec{e}^{\,+})+ \tag{24}$$
$$+e^{2\pi i(\omega_n(\lambda)-e_n)}\theta_{n-1}(\vec{\omega}(\lambda)-\vec{e}^{\,-}),$$

где $\vec{e}^{\,\pm}=(e_1^{\pm},\ldots,e_{n-1}^{\pm})$, $e_j^{\pm}=\nu_j(x,t)+\hat{k}_j\pm\frac{1}{2}B_{nj}$,
$e_n=\nu_n(x,t)+\hat{k}_n$, $\hat{k}_j=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}B_{kj}-j/2$, $\vec{\omega}=(\omega_1(\lambda),\ldots,\omega_{n-1}(\lambda))$ – абелевы интегралы (14), а $\theta_{n-1}(\vec{u})$ – $(n-1)$-мерная θ-функция, порождаемая поверхностью R,

$$\theta_{n-1}(\vec{u})=\sum_{(m_j)}\exp\left[\pi i\sum_{k,j=1}^{n-1}B_{kj}m_k m_j+\sum_{j=1}^{n-1}2\pi i\, u_j m_j\right].$$

Числа B_{nj} определены следующим образом:

$$B_{nj}=\lim_{\varepsilon\to 0}B^{\varepsilon}_{nj}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b_j}d\omega^{\varepsilon}_n(\lambda)=\int_{b_j}d\omega_n(\lambda),\quad j=1,2,\ldots,n-1,$$

т.е. B_{nj} – B-периоды интеграла $\omega_n(\lambda)$.

Легко выяснить свойства полученной функции $T(\lambda)$. Она получается из такой функции:

$$T(U_1,U_2,\ldots,U_n)=\theta_{n-1}\left(U_1-\frac{B_{n1}}{2},\ldots,U_{n-1}-\frac{B_{n\,n-1}}{2}\right)+$$
$$+e^{2\pi i U_n}\theta_{n-1}\left(U_1+\frac{B_{n1}}{2},\ldots,U_{n-1}+\frac{B_{n\,n-1}}{2}\right),$$

где $\theta_{n-1}(h_1,\ldots,h_{n-1})$ – обычная $(n-1)$-мерная θ-функция, путем подстановки вместо U_j интегралов $\omega_j(\lambda)-\nu_j-\hat{k}_j$.

Таким образом, получаем, что $T(U_1,\ldots,U_n)$ – целая функция n комплексных переменных со следующими свойствами:

1) $T(U_1,\dots,U_j+1,\dots,U_n)=T(U_1,U_j,\dots,U_n)$, т.е. периодична с периодом I по любому аргументу;

2) $T(U_1+B_{ik},\dots,U_n+B_{nk})=\exp(-\pi i B_{kk}-2\pi i U_k+\pi i B_{nk})T(U_1,\dots,U_n)$;

3) $T(-U_1,\dots,-U_n)=\exp(-2\pi i U_n)T(U_1,\dots,U_n)$.

Полученные свойства позволяют легко установить, что функция $T(\lambda)=T(\omega_1(\lambda)-\nu_1-\hat{k}_1,\dots,\omega_n(\lambda)-\nu_n-\hat{k}_n)$ является регулярной в R^*, кроме точки 0^-, где она имеет простой полюс, непрерывна при переходе через b-циклы в силу свойства I) и терпит скачки на a-циклах в силу свойства 2) :

$$T^+(\lambda)=\exp\left[\pi i\left(B_{jj}+2(\omega_j(\lambda)-\nu_j-\hat{k}_j)-B_{nj}\right)\right]T^-(\lambda),\ \lambda\in a_j. \tag{25}$$

Поэтому по принципу аргумента имеем, что разность $N-P$ числа нулей N и числа полюсов $P=1$ равна

$$N-1=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R^*} d\ln T(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n-1}2\pi i\int_{a_j}d\omega_j(\lambda)=n-1.$$

Следовательно, $T(\lambda)$ имеет в R^* ровно n нулей.

Покажем теперь, что функции $T(\lambda)$ решают проблему обращения (20). Для этого достаточно показать, что нули функции $T(\lambda)$, которые мы обозначим $\mu_k(x,t)$, совпадают с нулями $\lambda_k(x,t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda_k^{\varepsilon}(x,t)$. Равенство $\mu_k(x,t)=\lambda_k(x,t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda_k^{\varepsilon}(x,t)$ вытекает из поточечной сходимости последовательности регулярных функций $\theta^{\varepsilon}(\lambda)$ к регулярной функции $T(\lambda)$ и ограниченности в совокупности семейства $\{\theta^{\varepsilon}(\lambda)\}$ на любом компакте из R^*, находящемся на положительном расстоянии от точки 0^-, поскольку в этом случае нули $\theta^{\varepsilon}(\lambda)$ сходятся к нулям функции $T(\lambda)$. При этом предполагается, что нули $\lambda_k^{\varepsilon}(x,t)$ лежат вне некоторой окрестности точки 0^-, что легко обеспечить выбором их начальных значений $\lambda_k(0,0)$.

Ограниченность в совокупности семейства функций $\{\theta^{\varepsilon}(\lambda)\}$ вытекает из поточечной сходимости $\theta^{\varepsilon}(\lambda)$ к $T(\lambda)$ и ограниченности последней на любом компакте K из R^*, находящемся на положительном расстоянии $r>0$ от точки 0^-. Действительно, для функции $T(\lambda)$, согласно (24), нетрудно получить оценку

$$\left|T(\lambda)\right| \le C_1 e^{M_1 \|\vec\omega(\lambda)\|^2} + \frac{C_2}{r} e^{M_2 \|\vec\omega(\lambda)\|^2}, \quad \lambda \in K,$$

где C_1, C_2, M_1, M_2 – постоянные, $\|\vec\omega(\lambda)\|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} |\omega_j(\lambda)|^2$.
Величина $\|\vec\omega(\lambda)\|$ ограничена на K как непрерывная функция на компакте (в окрестности бесконечно удаленных точек $\infty^\pm$ абелевы интегралы также ограничены, поскольку $d\omega_j(\lambda) \sim O\left(\frac{d\lambda}{\lambda^2}\right)$ $\lambda \to \infty^\pm$). Следовательно, функция $T(\lambda)$ ограничена, а потому семейство регулярных функций $\{\theta^\varepsilon(\lambda)\}$ ограничено в совокупности.

Отметим, что на этом пути легко получить решение проблемы обращения типа (20), в которой участвуют $n-m$ интегралов первого рода и m интегралов третьего рода.

Явные формулы для конечно-зонных решений

Для получения явных формул для конечно-зонных решений уравнения (I) нужно найти, согласно формулам (II) и (I2), выражение через θ-функции $\prod_{k=1}^{n} \lambda_k(x,t)$. Для этого рассмотрим область R^* с дополнительными разрезами по кривым L_1 и L_2, идущим из точек ∞^+ и ∞^- в точку 0^+ соответственно. Введем функцию $\varphi(\lambda) = \ln\lambda + 2\pi i\, \omega_n(\lambda)$, которая является абелевым интегралом третьего рода с логарифмическими особыми точками в точках 0^+ (вычет равен 2), ∞^+ (вычет равен – I), ∞^- (вычет равен -I). В точке 0^- особенности нет, поскольку в окрестности точки 0^- имеем

$$\varphi(\lambda) = \ln\lambda + 2\pi i\left(-\frac{1}{2\pi i}\ln\lambda + \text{рег}\right) = \text{рег}.$$

Для вычисления $\prod_{k=1}^{n} \lambda_k(x,t)$ рассмотрим интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial R^* \cup L_1^+ \cup L_1^- \cup L_2^+ \cup L_2^-} \varphi(\lambda)\, d\ln T(\lambda).$$

По теореме о вычетах имеем

$$J = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda_k) - \varphi(0^-) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln\lambda_k + 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \omega_n(\lambda_k) - \varphi(0^-).$$

Из проблемы обращения (20)

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_n(\lambda_k) = \vartheta_n(x, t),$$

поэтому

$$J = \ln \prod_{k=1}^{n} \lambda_k(x,t) + 2\pi i\, \vartheta_n(x, t) - \varphi(0^-). \tag{26}$$

С другой стороны, учитывая непрерывность $\varphi(\lambda)$ и $T(\lambda)$ на b-циклах, имеем

$$J = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\int_{a_j^+} \varphi^+(\lambda)\, d\ln T^+(\lambda) - \int_{a_j^-} \varphi^-(\lambda)\, d\ln T^-(\lambda) \right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{L_1^+} \varphi^+(\lambda)\, d\ln T^+(\lambda) - \int_{L_1^-} \varphi^-(\lambda)\, d\ln T^-(\lambda) + \int_{L_2^+} \varphi^+(\lambda)\, d\ln T^+(\lambda) - \right.$$
$$\left. - \int_{L_2^-} \varphi^-(\lambda)\, d\ln T^-(\lambda) \right),$$

Используя формулы скачков для абелевых интегралов третьего рода, находим

$$\varphi^+(\lambda) - \varphi^-(\lambda) = -B_j, \quad B_j = \int_{b_j} d\ln\lambda + 2\pi i \int_{b_j} d\omega_n(\lambda), \quad \lambda \in a_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$\varphi^+(\lambda) - \varphi^-(\lambda) = 2\pi i(-1), \qquad \lambda \in L_1;$$

$$\varphi^+(\lambda) - \varphi^-(\lambda) = 2\pi i(-1), \qquad \lambda \in L_2.$$

Тогда, учитывая еще и непрерывность функции $T(\lambda)$ на кривых L_1 и L_2 и ее скачки (25) на a-циклах, находим

$$J = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{a_j} \varphi^-(\lambda)\, d\ln \frac{T^+(\lambda)}{T^-(\lambda)} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n-1} B_j \int_{a_j} d\ln T^-(\lambda) -$$

$$- \int_{L_1^+} d\ln T(\lambda) - \int_{L_2^+} d\ln T(\lambda),$$

т.е.

$$J=\sum_{j=1}^{n-1}\int_{a_j}\varphi^-(\lambda)d\omega_j(\lambda)-\sum_{j=1}^{n-1}B_j n_j+\ln\frac{T(\infty^+)\,T(\infty^-)}{T(0^+)\,T(0^+)}\,. \tag{27}$$

Сопоставляя (26) и (27), получаем

$$\prod_{k=1}^{n}\lambda_k(x,t)=\frac{T(\infty^+)T(\infty^-)}{T^2(0^+)}\exp\,(a-2\pi i\,\nu_n(x,t)),$$

где $a=\sum_{j=1}^{n-1}\int_{a_j}\varphi^-(\lambda)d\omega_j(\lambda)+\varphi(0^-)-\sum_{j=1}^{n-1}B_j n_j;\quad B_j=\int_{b_j}d\varphi(\lambda);$

$n_j=\int_{a_j}d\ln T^-(\lambda).$

Таким образом, конечно-зонные решения $S=\begin{pmatrix}\nu & \bar\mu\\ \mu & -\nu\end{pmatrix}$ уравнения (I) имеют вид

$$\nu(x,t)=\operatorname{sgn} f_n(0,0)\sqrt{1-|\mu(x,t)|^2}\;; \tag{28}$$

$$\mu(x,t)=\frac{(-1)^n\varphi_0(0,0)\,\theta_{n-1}^2(0^+)}{T(\infty^+)\;T(\infty^-)}\,e^{2\pi i(\alpha_n x+\beta_n t+\gamma_n^0+a)}, \tag{29}$$

где

$$\theta_{n-1}(0^+)=\theta_{n-1}(\vec\omega(0^+)-\vec e^{\,+}(x,t));$$

$$T(\infty^\pm)=\theta_{n-1}(\vec\omega(\infty^\pm)-\vec e^{\,+}(x,t))+$$

$$+e^{2\pi i(\vec\omega_n(\infty^\pm)-e_n(x,t))}\theta_{n-1}(\vec\omega(\infty^\pm)-\vec e^{\,-}(x,t));$$

$$e_j^\pm(x,t)=\alpha_j x+\beta_j t+\gamma_j^0+\hat k_j^0\pm\frac{B_{nj}}{2};$$

$$e_n(x,t)=\alpha_n x+\beta_n t+\gamma_n^0+\hat k_n\,.$$

При этом $\theta_{n-1}(\vec u)$ обозначения $(n-1)$ – мерная θ– функция.

Изложенное выше можно обобщить в виде теоремы.

<u>Теорема 2.</u> Пусть заданы попарно различные и отличные от нуля комплексные числа $E_j\;(j=1,2,\dots,2n)$ и $\lambda_k^0=\lambda_k(0,0)\,(k=1,2,\dots,n)$.

Если эти числа удовлетворяют соотношению

$$\prod_{j=1}^{2n}(\lambda-E_j)-|\mu_0|^2\prod_{k=1}^{n}(\lambda-\lambda_k^0)(\lambda-\bar{\lambda}_k^0)=f^2(\lambda),$$

где $f(\lambda)$ – полином степени n с вещественными коэффициентами, а число μ_0 по модулю меньше единицы, то матрица $S(x,t)$, построенная по формулам (28), (29), будет бесконечно-дифференцируемым, ограниченным и, вообще говоря, почти-периодическим по x и t решением уравнения (I).

Предположим теперь, что одно из чисел $\lambda_k^0=0$. Тогда в силу уравнений (I3) он останется неподвижным и значит, $\varphi_0(0,0)=0$ и мы не получим решений. Для того чтобы найти решения, вернемся к уравнениям (I3). Они в этом случае сводятся к таким:

$$\lambda_k'=2i\sqrt{P(\lambda_k)}\Big/\prod_{r\neq k}(\lambda_k-\lambda_r);$$

$$\dot{\lambda}_k=4i\left(K+\sum_{r=1}^{n-1}\lambda_r-\lambda_k\right)\sqrt{P(\lambda_k)}\Big/\prod_{r\neq k}(\lambda_k-\lambda_r),\quad k=1,2,\dots,n-1, \tag{30}$$

которые, как и в случае нелинейного уравнения Шредингера [4], приводят к стандартной проблеме обращения Якоби. При этом представление решений уравнения (I) имеет вид

$$\mu(x,t)=\varphi_n(0,0)\frac{\pi(0,0)}{\pi(x,t)}\exp\left[-2if_0(0,0)\left[\int_0^x\frac{d\xi}{\pi(\xi,t)}+2\int_0^t\frac{K+\sigma(0,\tau)}{\pi(0,\tau)}d\tau\right]\right], \tag{31}$$

где $\pi(x,t)=\prod_{k=1}^{n-1}(-\lambda_k(x,t))$, $\sigma(x,t)=\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k(x,t)$,

а функция $\nu=\nu(x,t)$ определяется, как и ранее, формулой (I2).

Как и в работе [4], используя стандартную θ-функцию Римана, нули которой дают решение уравнений (30), получаем решения уравнения (I) в этом частном случае. А именно, пусть $\omega_1(\lambda)$, $\omega_2(\lambda),\dots,\omega_{n-1}(\lambda)$ канонический базис абелевых интегралов на R, $\theta(\vec{U})$ – $(n-1)$-мерная θ-функция, $e_j=\alpha_jx+\beta_jt+\gamma_j^0+k_j$, $k_j=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-1}B_{rj}-j/2$, $j=1,2,\dots,n-1$. Тогда функция $\theta(\lambda)=$

$= \theta(\omega_1(\lambda) - e_1, \ldots, \omega_{n-1}(\lambda) - e_{n-1})$, по теореме Римана [5], имеет $n-1$ нуль, которые дают решения уравнений (30). Далее, нетрудно вычислить, что

$$\pi(x,t) = \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k(x,t) = \frac{\theta(\infty^+)\theta(\infty^-)}{\theta(0^+)\theta(0^-)} \exp\left(\sum_{j=1}^{n-1} \int_{a_j} \ln \lambda \, d\omega_j(\lambda)\right). \qquad (32)$$

Выражение для $\sigma(x,t)$ находим в [4]

$$G(x,t) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k(x,t) = \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\theta(\infty^+)}{\theta(\infty^-)} + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{a_j} \lambda \, d\omega_j(\lambda). \qquad (33)$$

Таким образом, в предположении простоты нулей $\lambda_k^0 = \lambda_k(0,0)$ $k = 1, 2, \ldots, n$ формулы (28), (29) и (31) – (33) дают полное описание конечно-зонных ($n-1$-зонных) решений уравнения (I), которые являются, вообще говоря, почти-периодическими функциями x и t.

I. Takhtajan L.A. Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method. – Phys. Lett., 1977, 64, N 1, p. 235-237.

2. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Об одном классе решений уравнения $Kg\varphi$. – Пробл. мат.физики, 1976, вып.8, с.70–91.

3. Котляров В.П. Периодическая задача для нелинейного уравнения Шредингера. – В кн.: Вопросы математической физики и функционального анализа. Киев: Наук. думка, 1976, с.121–131.

4. Итс А.Р., Котляров В.П. Об одном классе решений нелинейного уравнения Шредингера. – Докл. АН УССР. Сер.А, 1976, № 11, с.965–968.

5. Зверович Э.И. Краевые задачи теории аналитических функций. – Успехи мат.наук, 1971, 26, № 1, с.113–179.

УДК 517.535.4

С.В.Львова

О ВЕЛИЧИНАХ ОТКЛОНЕНИЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ГОЛОМОРФНЫХ КРИВЫХ НАД ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

I. Формулировка результатов. Пусть $f(z)$ – функция, мероморфная в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ и не равная тождественной постоянной. Обозначим через $\mathring{n}(r,f)$, $r > 1$, число полюсов функции $f(z)$, лежащих в области $\left\{\left|z - \frac{ir}{2}\right| < \frac{r}{2}, \quad |z| > 1\right\}$.

Положим

$$\hat{N}(r,f)=\int_1^r \frac{\hat{n}(t,f)}{t^2}\,dt, \qquad 1<r<\infty;$$

$$\hat{m}(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{\varkappa(r)}^{\pi-\varkappa(r)} \ln^+|f(re^{i\theta}\sin\theta)|\frac{d\theta}{r\sin^2\theta},$$

где $\varkappa(r)=\arcsin\frac{1}{r}$;

$\hat{T}(r,f)=\hat{m}(r,f)+\hat{N}(r,f).$

Введенные таким образом функции, характеризующие распределение значений функций $f(z)$, носят название характеристик Цудзи. Порядком функции $f(z)$ в смысле Цудзи назовем величину

$$\rho(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\hat{T}(r,f)}{\ln r},$$

соответственно нижним порядком – величину

$$\lambda(f)=\underline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\ln\hat{T}(r,f)}{\ln r}.$$

Положим далее

$$\hat{M}(r,f)=\max_{\varkappa(r)\le\theta\le\pi-\varkappa(r)}|f(re^{i\theta}\sin\theta)|.$$

В данной работе изучается вопрос о связи между величинами $\ln^+\hat{M}(r,f)$ и $\hat{T}(r,f)$ для функций, мероморфных в полуплоскости $\{\mathrm{Im}\,z>0\}$. Следующая теорема является аналогом теореме Неванлинны ([1] с.55), относящейся к функциям, мероморфным в плоскости.

<u>Теорема I.</u> Пусть $f(z)$ – функция, мероморфная в полуплоскости $\{\mathrm{Im}\,z>0\}$, не равная тождественно постоянной и голоморфная в некоторой окрестности начала координат. Тогда при любом фиксированном $k>1$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{r}\int_0^r \ln^+ M(t,f)\,dt\le\alpha_1(k)\,r\,\hat{T}(kr,f)+\alpha_2(k,f)\,r, \qquad \forall r>0, \qquad (1)$$

где $\alpha_1(k)$ – константа, зависящая только от k ; $\alpha_2(k, f)$ – константа, зависящая от k и f .

Как следствие теоремы I получена оценка для величины

$$\hat{\beta}(f) = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln^+ \hat{M}(r,f)}{r\hat{T}(r,f)}^{*}, \tag{2}$$

названной по аналогии со случаем функций, мероморфных в плоскости (см. [2]) величиной отклонения.

Теорема 2. Пусть $f(z)$ – функция, мероморфная в полуплоскости $\{Jm\, z > 0\}$, голоморфная в окрестности начала координат и такая, что I) $\hat{T}(r,f) \to \infty$ при $r\to\infty$, 2) $\lambda = \lambda(f) < \infty$.

Тогда при любом $k > 1$ имеет место неравенство

$$\hat{\beta}(f) \le \alpha_3(k)\, k^{\lambda}, \tag{3}$$

где $\alpha_3(k)$ – величина, зависящая только от k и не зависящая от выбора функции f .

Аналогичные результаты получены для голоморфных кривых над полуплоскостью $\{Jm\, z > 0\}$.

Напомним, что голоморфной кривой над полуплоскостью $\{Jm\, z > 0\}$ называется вектор-функция $\vec{G}(z) = \{g_1(z), g_2(z), \ldots$ $\ldots, g_n(z)\}$, где $g_i(z)$ – функции, голоморфные в $\{Jm\, z > 0\}$, не обращающиеся одновременно в нуль и линейно-независимые. Функции, характеризующие поведение кривой $\vec{G}(z)$, вводятся следующим образом:

$$\hat{T}(r, \vec{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varkappa(r)}^{\pi-\varkappa(r)} \ln \|\vec{G}(re^{i\theta}\sin\theta)\| \frac{d\theta}{\sin^2\theta\, r},$$

---

* Определение величины $\hat{\beta}(f)$ для функций, мероморфных в полуплоскости $\{Jm\, z > 0\}$, посредством равенства (2) более естественно, чем с помощью равенства $\beta(f) = \lim\limits_{r\to\infty} \frac{\ln^+ M(r,f)}{T(r,f)}$, используемого для функций, мероморфных в плоскости. В последнем случае, например, $\beta(e^z) = \infty$.

где $\quad \|\vec{G}(z)\| = \sum_{1}^{n} |g_k(z)|^2$;

$$\hat{n}(r,\vec{A},\vec{G}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\varkappa(r)}^{\pi-\varkappa(r)} \frac{\|\vec{G}(re^{i\theta}\sin\theta)\|\|\vec{A}\|}{|(\vec{G}(re^{i\theta}\sin\theta),\vec{A})|}\frac{d\theta}{r\sin^2\theta};$$

$$\hat{N}(r,\vec{A},\vec{G}) = \int_{1}^{r}\frac{\hat{n}(t,\vec{A},\vec{G})}{t^2}\,dt;$$

где $\hat{n}(t,\vec{A},\vec{G})$ – число корней $(\vec{G}(z),\vec{A})$ в области $\left\{\left|z-\frac{it}{2}\right|<\frac{t}{2},\ t\geq 1\right\}$; $\vec{A}$ – постоянный вектор.

Заметим также (см. [3]), что

$$\hat{T}(r,\vec{G}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\varkappa(r)}^{\pi-\varkappa(r)} u(re^{i\theta}\sin\theta)\frac{d\theta}{r\sin^2\theta} + O(1),$$

где

$$u(z) = \max_{1\leq k\leq n} \ln|g_k(z)|$$

По аналогии с целыми кривыми (см. [4]) обозначим

$$\hat{L}(r,\vec{A},\vec{G}) = \max_{\varkappa(r)\leq\theta\leq\pi-\varkappa(r)} \ln\frac{\|\vec{G}(re^{i\theta}\sin\theta)\|\|\vec{A}\|}{|(\vec{G}(re^{i\theta}\sin\theta),\vec{A})|}$$

и

$$\hat{\beta}(\vec{A},\vec{G}) = \lim_{r\to\infty}\frac{\hat{L}(r,\vec{A},\vec{G})}{r\,\hat{T}(r,\vec{G})}.$$

Теорема 3. Пусть $\vec{G}(z)$ – голоморфная кривая над полуплоскостью $\{\operatorname{Im} z>0\}$ и ее компоненты – $g_i(z)$ $i=1,2,\dots,n$, голоморфны в некоторой окрестности начала координат. Тогда для любого $k>1$ найдутся не зависящая от выбора кривой константа $\alpha_4(k)$ и зависящая только от k и $\vec{G}$ константа $\alpha_5(k,\vec{G})$ такие, что

$$\frac{1}{r}\int_{0}^{r}\hat{L}(t,\vec{A},\vec{G})\,dt \leq \alpha_4(k)\,r\,\hat{T}(kr,\vec{G}) + \alpha_5(k,\vec{G})\,r,\quad \forall r>0. \qquad (4)$$

Из этой теоремы как следствие вытекает следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $\vec{G}(z)$ – голоморфная кривая над полуплоскостью $\{Jm\, z > 0\}$ конечного нижнего порядка и такая, что $\hat{T}(r, \vec{G}) \to \infty$, $r \to \infty$. Пусть далее функции $\{g_k(z)\}$ $k = 1, 2, \ldots, n$ голоморфны в некоторой окрестности начала координат. Тогда при любом $k > 1$ имеет место неравенство

$$\hat{\beta}(\vec{A}, \vec{G}) \leq \alpha_6(k)\, k^{\lambda}, \tag{5}$$

где $\alpha_6(k)$ – константа, зависящая от k и не зависящая от кривой $\vec{G}$. Отметим также, что для функций, голоморфных над полуплоскостью, справедливы следующие предложения.

Предложение I. Пусть $f(z)$ – функция, голоморфная в полуплоскости $\{Jm\, z > 0\}$ и такая, что:

1) $\hat{T}(r, f) \to \infty$, $r \to \infty$;

2) $\lambda = \lambda(f) < \infty$.

Тогда имеет место оценка

$$\hat{\beta}(f) \leq \frac{2}{k-1}\, k^{\lambda}\, \hat{\Delta}(f),$$

где $k > 1$, $\hat{\Delta}(f) = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\hat{m}(r, f)}{\hat{T}(r, f)}$ – валироновский дефект функции $f(z)$.

Пусть $E_V(f)$ и $\mathcal{R}(f)$ – множество исключительных значений, т.е. тех значений, для которых соответственно $\hat{\Delta}(a, f) > 0$, $\hat{\beta}(a, f) > 0$.

Предложение 2. Пусть $f(z)$–функция голоморфная в полуплоскости $\{Jm\, z > 0\}$ и такая, что

1) $\hat{T}(r, f) \to \infty$, $r \to \infty$

2) $\lambda = \lambda(f) < \infty$, тогда $\mathcal{R}(f) \subset E_V(f)$.

2. Доказательство теорем I и 2. Доказательство теоремы I проводится в общих чертах по той же схеме, что и упомянутой выше теоремы Неванлинны. Однако при этом возникают затруднения, связанные с необходимостью учета поведения рассматриваемой функции в окрестности границы полуплоскости $Re\, z = 0$.

Для доказательства теорем I и 2 нам понадобятся следующие леммы.

<u>Лемма I.</u> Пусть

$$\Phi(\varphi, \tau) = \mathrm{Re}\, \frac{\frac{s}{2} e^{i\left(2\tau - \frac{\pi}{2}\right)} + z}{\frac{s}{2} e^{i\left(2\tau - \frac{\pi}{2}\right)} - z},$$

где $s > 2r, \quad z = r e^{i\varphi} \sin \varphi - \frac{is}{2},$

и пусть

$$\tau_1 = \arcsin \frac{r}{\sqrt{s^2 r^2 - s^2 + r^2}}, \quad \tau_2 = \pi - \tau_1 .$$

Тогда

$$\sup_{\varkappa(r) \leq \varphi \leq \pi - \varkappa(r)} \Phi(\varphi, \tau) = \begin{cases} \dfrac{r}{s-r} \quad \dfrac{1}{\sin^2 \tau}, & \tau_2 \leq \tau \leq \tau_2 ; \\[2ex] \dfrac{s-r}{s^2 r \sin^2 \tau - (s-r) - s\sqrt{r^2-1}\, \sin 2\tau + s \cos 2\tau}, & 0 \leq \tau \leq \tau_1 , \\ & \tau_2 < \tau \leq \pi . \end{cases} \tag{6}$$

<u>Доказательство.</u> Имеем

$$\Phi(\varphi, \tau) = \mathrm{Re}\, \frac{\frac{s}{2} e^{i\left(2\tau - \frac{\pi}{2}\right)} + z}{\frac{s}{2} e^{i\left(2\tau - \frac{\pi}{2}\right)} - z} = \frac{r(s-r)\sin^2\varphi}{s^2 \sin^2 \tau - r(s-r)\sin^2\varphi - sr \sin\varphi - \sin(2\tau - \varphi)} .$$

Далее, стандартным образом убеждаемся в том, что точкой максимума по переменной φ, $0 < \varphi < \pi$, при каждом фиксированном τ при $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ является точка $\varphi_\tau = \alpha = \arcsin \frac{s \sin \tau}{\sqrt{s^2 \sin^2 \tau + r^2 \cos^2 \tau}}$, а при $\frac{\pi}{2} < \tau < \pi$, точка $\varphi_\tau = \pi - \alpha$. Вычисляя соответствующие значения функции $\Phi(\varphi, \tau)$, получаем

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \tau) &= \frac{r}{s-r} \; \frac{1}{\sin^2 \tau}, \quad 0 < \tau < \frac{\pi}{2}; \\ \Phi(\pi - \alpha, \tau) &= \frac{r}{s-r} \; \frac{1}{\sin^2 \tau}, \quad \frac{\pi}{2} < \tau < \pi . \end{aligned} \tag{7}$$

Непосредственно проверяем, что для значений $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ точки α и $\pi - \alpha$ лежат на сегменте $[\varkappa(r), \pi - \varkappa(r)]$, и соответственно

$$\sup_{\varkappa(r)\le\varphi\le\pi-\varkappa(r)} \Phi(\alpha,\tau) = \frac{r}{s-r}\,\frac{1}{\sin^2\tau}.$$

Если $0 \le \tau \le \tau_1$ или $\tau_2 < \tau \le \pi$, то точка максимума лежит вне сегмента $[\varkappa(r),\ \pi-\varkappa(r)]$, и в силу монотонности функции имеем соответственно

$$\sup_{\varphi} \Phi(\varphi,\tau) = \Phi(\varkappa(r),\tau) = \frac{s-r}{s^2 r\sin^2\tau - s + r - s\sqrt{r^2-1}\ \sin 2\tau + s\cos 2\tau},$$

когда $0 \le \tau \le \tau_2$, и

$$\sup_{\varphi} \Phi(\varphi,\tau) = \Phi(\pi-\varkappa(r),\tau) = \frac{s-r}{s^2 r\sin^2\tau - s + r - s\sqrt{r^2-1}\,\sin 2\tau + s\cos 2\tau},$$

когда $\tau_2 < \tau \le \pi$.

Лемма доказана.

Лемма 2.

Пусть $b = \rho e^{i\psi}\sin\psi,\ 0<\psi<\pi,\ \rho<s,\ z = re^{i\varphi}\sin\varphi - \frac{is}{2},$ $0<\varphi<\pi,\quad 0<r<\frac{s}{2}$ Тогда

$$\ln\left|\frac{\frac{s^2}{4}-\left(b-\frac{is}{2}\right)z}{\frac{s}{2}\left(z-\left(b-\frac{is}{2}\right)\right)}\right| \le \ln\frac{2s}{|\rho-r|}. \qquad (8)$$

Доказательство. Обозначим

$$V(\zeta,b) = \ln\left|\frac{\frac{s^2}{4}-\left(b-\frac{is}{2}\right)\left(\zeta-\frac{is}{2}\right)}{\frac{s}{2}(\zeta-b)}\right|,$$

где $\zeta = z + \frac{is}{2}$. Функция $V(\zeta,b)$ является гармонической в круге $\left|\zeta-\frac{is}{2}\right| \le \frac{s}{2}$ за исключением точки b , где $V(\zeta,b)=\infty$, неотрицательной и равной нулю на границе круга. Соответственно функция $W(u,b) = V\left(\frac{1}{u},b\right)$ гармонична в полуплоскости $\left\{\operatorname{Im} u \le -\frac{1}{s}\right\}$ за исключением точки $-\frac{1}{b}$, неотрицательной и обращающейся в нуль на прямой $\operatorname{Re} u = -\frac{1}{s}$. Из соображений симметрии функция $V\left(\frac{1}{u},b\right)$ достигает своего максимума на прямой $\operatorname{Im} u = -\frac{1}{r}$ в точке $u_0 = \left\{\frac{\cos\psi}{\rho\sin\psi} - \frac{1}{r}\right\}$. Ясно также, что

$$\sup_{\operatorname{Im} u=-\frac{1}{r}} W(u,b) = \sup_{\operatorname{Im} u=-\frac{1}{r}} W(u,i\rho).$$

Соответственно этому

$$\sup_{|\zeta - \frac{is}{2}| \le \frac{s}{2}} v(\zeta, b) = v(ir, i\rho) =$$

$$= \ln \left| \frac{-r\rho + \frac{sr}{2} + \frac{s\rho}{2}}{\frac{is}{2}(\rho - r)} \right| = \ln \left| \frac{\frac{s}{2}\left(\rho\left[1 - \frac{2r}{s}\right] + r\right)}{\frac{is}{2}(\rho - r)} \right| \le \ln \frac{2s}{|\rho - r|} .$$

Используя леммы I и 2, докажем теперь теорему I.

Из формулы Пуассона – Иенсена для функции $f(z + \frac{is}{2})$ в круге $|z| < \frac{s}{2}$ следует, что

$$\ln |f(z + \frac{is}{2})| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(\frac{s}{2}e^{i\theta} + \frac{s}{2})| \, Re \, \frac{\frac{s}{2}e^{i\theta} + z}{\frac{s}{2}e^{i\theta} - z} \, d\theta +$$

$$+ \sum_{|b_n - \frac{is}{2}| < \frac{s}{2}} \ln \left| \frac{\frac{s^2}{4} - \overline{\left(b_n - \frac{is}{2}\right)} z}{\frac{s}{2}\left(z - \left(b_n - \frac{is}{2}\right)\right)} \right| ,$$

где b_n – полюсы $f(z)$.

Сделав в приведенном здесь интеграле замену переменных $\theta = 2\tau - \frac{\pi}{2}$, а члены ряда оценив с помощью леммы 2, получим следующее неравенство:

$$\ln |f(\zeta)| \le \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln |f(se^{i\tau} \sin \tau)| \, \Phi(\varphi, \tau) \, d\tau +$$

$$+ \sum_{|b_n - \frac{is}{2}| < \frac{s}{2}} \ln \frac{2s}{|\rho_n - r|} . \tag{9}$$

Далее,

$$\int_0^{\pi} \ln |f(se^{i\tau} \sin \tau)| \, \varphi(\varphi, \tau) \, d\tau = \int_0^{\tau_1} + \int_{\tau_1}^{\pi - \tau_1} + \int_{\pi - \tau_1}^{\pi} .$$

Учитывая анализ поведения функции $\varphi(\varphi, \tau)$, проведенной при доказательстве леммы I и тот факт, что $\varkappa(s) < \tau_1$, получаем, что при $\varkappa(r) \le \varphi \le \pi - \varkappa(r)$

$$\int_0^{\pi} \ln|f(se^{i\tau}\sin\tau)|\,\varphi(\psi,\tau)\,d\tau \le \int_0^{\tau_1} \ln|f(se^{i\tau}\sin\tau)|\,\varphi(\varkappa(r),r)\,d\tau +$$

$$+\int_{\varkappa(s)}^{\pi-\varkappa(s)} \ln|f(se^{i\tau}\sin\tau)|\,\varphi(\alpha,\tau)\,d\tau + \int_{\pi-\tau_1}^{\pi} \ln|f(se^{i\tau}\sin\tau)|\,\varphi(\pi-\varkappa(r),\tau)\,d\tau -$$

$$-\int_{\varkappa(s)}^{\tau_1} \ln|f(se^{i\tau}\sin\tau)|\,\varphi(\alpha,\tau)\,d\tau - \int_{\pi-\tau_1}^{\pi-\varkappa(s)} \ln|f(se^{i\tau}\sin\tau)|\,\varphi(\alpha,\tau)\,d\tau = \tag{10}$$

$$= J_1 + J_2 + J_3 - J_4 - J_5$$

Рассмотрим интеграл $J_1 = \int_0^{\tau_1} \ln|f(se^{i\tau}\sin\tau)|\,\varphi(\varkappa(r),\tau)\,d\tau$. Непосредственно проверяем, что $\max\ \varphi(\varkappa(r),\tau)$ при $\tau\in[0,\tau_2]$ достигается в точке $\beta = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{r^2-1}}{\sqrt{(sr-2)^2+4(r^2-1)}}$,

и его значение $\varphi(\varkappa(r),\beta)\le s^2$. Функция $f(z)$ голоморфна в начале координат, и, не нарушая общности, можем считать, что она голоморфна в круге $|z|<2$. Тогда в этом круге при некоторых постоянных $m=m(f)$ и $M=M(f)$ справедливо неравенство

$$m\le \ln|f(z)|\le M. \tag{11}$$

Заметим, что точки $se^{i\tau}\sin\tau$ при достаточно больших s и $\tau\in[0,\tau_1]$ лежат внутри круга $|z|\le 2$.

Поэтому

$$J_1 \le M\frac{1}{\pi}s^2\tau_1 = \frac{1}{\pi}Ms^2\frac{r}{\sqrt{s^2r^2-s^2+r^2}} = O(s). \tag{12}$$

По аналогии с J_1

$$J_3 = O(s). \tag{13}$$

Далее, рассмотрим J_4 . Учитывая (7) и (11),

$$J_4 = \int_{\varkappa(s)}^{\tau_1} \ln\left|f(se^{i\tau}\sin\tau)\right|\frac{r}{s-r}\,\frac{d\tau}{\sin^2\tau} \ge m\,\frac{r}{s-r}\,(-\operatorname{ctg}\tau)\Big|_{\varkappa(s)}^{\tau_1} =$$

$$= m\,\frac{r}{s-r}\left\{\frac{\sqrt{1-\frac{1}{s^2}}}{\frac{1}{s}} - \frac{\sqrt{1-\frac{r^2}{s^2r^2-s^2+r^2}}}{\frac{r}{s^2r^2-s^2+r^2}}\right\} =$$

$$= m\,\frac{r}{s-r}\left\{\sqrt{s^2-1} - \frac{s\sqrt{r^2-1}}{r}\right\} = m\,\frac{s+r}{2sr} \geqslant m\,\frac{1}{s}. \tag{14}$$

По аналогии с J_4

$$J_5 \geqslant m\,\frac{1}{s}. \tag{15}$$

Из (9), (10), (12) – (15) получаем

$$\ln|f(\zeta)| \leqslant \frac{2sr}{s-r}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varkappa(s)}^{\pi-\varkappa(s)} \ln|f(se^{i\tau}\sin\tau)|\,\frac{d\tau}{s\sin^2\tau} +$$

$$+ \sum_{\left|b_n-\frac{is}{2}\right|<\frac{s}{2}} \ln\frac{2s}{|\rho_n - r|} + \hat{c}_1(f)\,s, \tag{16}$$

и значит, при любом $t \in (0,r)$, где $r = \frac{s}{k}$, $k > 1$, справедливо неравенство

$$\ln|f(te^{i\varphi}\sin\varphi)| \leqslant \hat{c}_2(k)\,s\,\hat{m}(s,\infty) + \sum_{\left|b_n-\frac{is}{2}\right|<\frac{s}{2}} \ln\frac{2s}{|\rho_n - r|} + \hat{c}_1(f)\,s,$$

где $\hat{c}_2(k) = \frac{2}{k-1}$, а $c_1(f)$ зависит от выбора функции, но обе константы не зависят ни от r, ни от s. Это неравенство верно для всех $\varphi \in [\varkappa(r), \pi - \varkappa(r)]$.

Следовательно,

$$\frac{1}{r^2}\int\limits_0^r \ln^+ M(t,f)\,dt \leqslant c_1(k)\,\hat{m}(s,\infty) + \frac{1}{r^2}\sum_{\left|b_n-\frac{is}{2}\right|<\frac{s}{2}} \int\limits_0^r \frac{2s\,dt}{|\rho_n - t|} + c_2(k,f).$$

Далее, учитывая, что

$$\int\limits_0^r \ln\frac{2s}{|\rho_n - t|}\,dt = r\ln(4ek) \quad (\text{см.}\ [1],\ \text{с. } 57)$$

и

$$\hat{N}(s',f) \geq \int\limits_{s}^{s'} \frac{\hat{n}(t,f)}{t^2}\,dt \geq \hat{n}(s,f)\cdot\frac{s'-s}{s's} = c_3(k)\hat{n}(s,f)\frac{1}{s},$$

где $s' = ks$

получаем следующее неравенство:

$$\frac{1}{r^2}\int\limits_{0}^{r} \ln^+ M(t,f)\,dt \leq c_1(k)\hat{m}(kr,\infty) + c_4(k)\hat{N}(k^2r,f) + c_2(k,f). \qquad (17)$$

Но, как следует из свойства почти монотонности* функции $\hat{T}(r,f)$,

$$\hat{m}(kr,f) \leq \hat{T}(kr,f) \leq \hat{T}(k^2r,f) + O(1);$$

$$\hat{N}(k^2r,f) \leq \hat{T}(k^2r,f),$$

и поэтому из (17) вытекает, что при всех r справедлива оценка

$$\frac{1}{r}\int\limits_{0}^{r} \ln^+ M(t,f)\,dt \leq c_5(k)r\,\hat{T}(kr,f) + c_6(k,f)r,$$

где $c_5(k)$ – константа, зависящая от k, но не зависящая от выбора функции, а $c_6(k,f)$ зависит только от k и выбора функции.

Теорема I доказана.

Докажем теперь теорему 2. Из определения величины отклонения $\check{\beta}(f)$ вытекает, что для любого $A < \hat{\beta}(f)$, начиная с некоторого $r > r_0$, выполняется неравенство

$$\ln^+ M(r,f) \geq Ar\,\hat{T}(r,f). \qquad (18)$$

Отсюда, согласно теореме I, заключаем, что

$$\frac{1}{r}A\int\limits_{r_0}^{r} t\,\hat{T}(t,f)\,dt \leq \frac{1}{r}\int\limits_{r_0}^{r} \ln^+ M(t,f)\,dt \leq a_1(k)\,r\,\hat{T}(kr,f) + a_2(k,f)r.$$

---

* В работе [1] (с.43) доказано, что $\hat{T}(r,f) = T_1(r,f) + O(1)$, где $\hat{T}_1(r,f)$ – неубывающая непрерывная функция.

В силу почти монотонности функции $\hat{T}(r,f)$ следует, что

$$\frac{1}{r}A\hat{T}\left(\frac{r}{k}\right)r^2\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \le \frac{1}{r}\int_{r/k}^{r} A\,t\,\hat{T}(t,f)\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{r}\int_{r_0}^{r} A\,t\,\hat{T}(t,f)\,dt \le a_1(k)\,r\,\hat{T}(kr,f) + a_2(k,f)\,r$$

и, следовательно,

$$A \le a_1(k)\varliminf_{r\to\infty}\frac{\hat{T}(kr,f)}{\hat{T}\left(\frac{r}{k}\right)} = a_1(k)\varliminf_{r\to\infty}\frac{\hat{T}(k^2r,f)}{\hat{T}(r,f)}. \tag{19}$$

Для любой неубывающей функции $\varphi(t)$ конечного нижнего порядка, как известно (см., например, [2]), справедливо неравенство

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{\varphi(kr)}{\varphi(r)} \le k^{\lambda+1}, \qquad k>1.$$

Отсюда и из (19) следует, что

$$\hat{\beta}(\dot{f}) \le a_2(k)\,k^{\lambda}.$$

Теорема 2 доказана.

Как нетрудно видеть, предложения I и 2 следуют из формулы (16).

<u>3. Доказательство теорем 3 и 4.</u> Для доказательства теоремы 3 нам понадобится следующая лемма.

<u>Лемма 3.</u> Пусть $g(z)$ - функция, голоморфная в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z>0\}$ и такая, что $\hat{T}(r)\to\infty,\ r\to\infty$. Тогда при любом фиксированном $k>1$ для всех r, начиная с некоторого $r>r_0$, справедливо

$$\ln^+ M(r,g) \le c(k)\,r\,\hat{T}(kr,g). \tag{20}$$

<u>Доказательство.</u> Имеем

$$\int_{R_0}^{kR}\hat{T}(t,g)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{R_0}^{kR}dt\int_{x(r)}^{\pi-x(r)}\ln^+|g(te^{i\theta}\sin\theta)|\frac{d\theta}{t\sin^2\theta} \ge$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_r} \ln^+ |g(x+iy)| \frac{dx\,dy}{y^2}, \tag{21}$$

где C_r – любой круг радиуса r, лежащий в области
$$\left\{ \left| z - i\frac{kR}{2} \right| < \frac{kR}{2}, \quad |z| > 1 \right\}.$$

Пусть теперь C_R – максимальный из кругов C_r, имеющих центр в точке $Re^{i\theta} \sin\theta$.

Из (21) следует, что

$$\int\limits_{R_0}^{kR} \hat{T}(t,g)\,dt \geqslant \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\max\limits_{y \in C_R} y^2} \int\limits_{C_R} \ln^+ |g(z)|\,dx\,dy. \tag{22}$$

Непосредственно вычисляется, что

$$\max_{y \in C_R} y \leqslant c_8(k) R.$$

Отсюда и из (22), учитывая субгармоничность функции $\ln^+|g(z)|$ и почти монотонность функции $\hat{T}(r,g)$, получаем

$$kR(\hat{T}(kR) + O(1)) \geqslant \int\limits_{R_0}^{kR} \hat{T}(t,g)\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{c_8(k)}{S_{C_R}} \int\limits_{C_R} \ln^+ |g(z)|\,dx\,dy \geqslant c_8(k) \ln^+ |f(Re^{i\theta} \sin\theta)|,$$

где S_{C_R} – площадь круга C_R. Лемма доказана.

<u>Доказательство теоремы 3.</u> Рассмотрим мероморфную в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ функцию $\dfrac{1}{(\vec{G}(z), \vec{A})}$. Для нее имеет место неравенство (16)

$$\ln \frac{1}{|(\vec{G}(z), \vec{A})|} \leqslant \hat{c}_2(k)\, s\, \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x(s)}^{\pi - x(s)} \ln \frac{1}{|(\vec{G}(se^{i\tau} \sin\tau), \vec{A})|} \frac{d\tau}{s \sin^2\tau} +$$

$$+ \sum_{\left| b_n - \frac{is}{2} \right| < \frac{s}{2}} \ln \frac{2s}{|\rho_n - r|} + \hat{c}_1(\vec{G}, \vec{A})\, s,$$

где b_n – полюсы функции $\dfrac{1}{(\vec{G}(z), \vec{A})}$.

Иначе,

$$\ln\frac{1}{|(\vec{G}(z),\vec{A})|}\le \hat{c}_2(k)\,s\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x(s)}^{\pi-x(s)}\ln\frac{\|\vec{G}(se^{i\tau}\sin\tau)\|\,\|\vec{A}\|}{|(\vec{G}(se^{i\tau}\sin\tau),\vec{A})|}\,\frac{d\tau}{s\sin^2\tau}-$$

$$-\hat{c}_2(k)\,s\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x(s)}^{\pi-x(s)}\ln\|\vec{G}(se^{i\tau}\sin\tau)\|\frac{d\tau}{s\sin^2\tau}+\sum_{|b_n-\frac{is}{2}|<\frac{s}{2}}\ln\frac{2s}{|\rho_n-r|}+\hat{c}_1(\vec{G},\vec{A})s.$$

Отсюда, пользуясь определением характеристических функций для кривых, голоморфных над полуплоскостью

$$\ln\frac{1}{|(\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi),\vec{A})|}\le\hat{c}_2(k)\,s\,\hat{m}(s,\vec{A},\vec{G})-\hat{c}_2(k)\,s\,\hat{T}(s,\vec{G})+$$

$$+\sum_{|b_n-\frac{is}{2}|<\frac{s}{2}}\ln\frac{2s}{|\rho_n-r|}+\hat{c}_1(\vec{G},\vec{A})\,s \tag{23}$$

и, следовательно,

$$\max_{x(r)\le\varphi\le\pi-x(r)}\ln\frac{\|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi)\|\,\|\vec{A}\|}{|(\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi),\vec{A})|}\le\hat{c}_2(k)\,s\,\hat{m}(s,\vec{A},\vec{G})-\hat{c}_2(k)\,s\,\hat{T}(s\vec{G})+$$

$$+\sum_{|b_n-\frac{is}{2}|<\frac{s}{2}}\ln\frac{2s}{|\rho_n-r|}+\max_{x(r)\le\varphi\le\pi-x(r)}\ln\|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi)\|+\hat{c}_1(\vec{G},\vec{A})s+\ln\|\vec{A}\| \tag{24}$$

Далее имеем

$$\max_{x(r)\le\varphi\le\pi-x(r)}\ln\|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi)\|=\max_{x(r)\le\varphi\le\pi-x(r)}\left\{\frac{1}{2}\ln\sum_{i=1}^{n}|g_i(re^{i\varphi}\sin\varphi)|^2\right\}\le$$

$$\le\frac{1}{2}\ln\left\{n\max_{1\le i\le n}\max_{x(r)\le\varphi\le\pi-x(r)}|g_i(re^{i\varphi}\sin\varphi)|\right\}.$$

Отсюда, используя лемму 3 и то, что (см. [4])

$T(r,g_i)\le\hat{T}(r,\vec{G})$,

получаем

$$\max_{\varkappa(r)\le\varphi\le\pi-\varkappa(r)} \ln \|\vec{G}(re^{i\varphi}\sin\varphi)\| \le c_9(k)\, r\hat{T}(kr,\vec{G}) + \frac{1}{2}\ln n .$$

Из (24) и (25) следует, что при любом t, $0\le t\le r$, $r=\frac{s}{k}$, $k>1$

$$\ln^+\hat{L}(t,\vec{A},\vec{G}) \le \hat{c}_2(k)\, s\,\hat{m}(s,\vec{A},\vec{G}) + c_{10}(k)\, s\,\hat{T}(s,\vec{G}) +$$

$$+\sum_{\left|b_n-\frac{is}{2}\right|<\frac{s}{2}} \ln\frac{2s}{|\rho_n-r|} + \frac{1}{2}\ln n + \hat{c}_1(\vec{G},\vec{A})\, s$$

и значит

$$\frac{1}{r^2}\int_0^r \ln^+\hat{L}(t,\vec{A},\vec{G})\,dt \le c_1(k)\,\hat{m}(s,\vec{A},\vec{G}) + c_{10}(k)\, s\,\hat{T}(s,\vec{G}) +$$

$$+ c_2(k)\,\hat{N}(k^2 r,\vec{A},\vec{G}) + c_3(k,\vec{G}),$$

Откуда в силу монотонности $\hat{T}(r,\vec{G})$ [4] следует утверждение теоремы 3. Теорема 4 следует из теоремы 3 подобно тому, как теорема 2 следует из теоремы I.

I. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. - М.: Наука, 1970. - 591 с.

2. Петренко В.П. Рост мероморфных функций. - Харьков: Вища школа, 1978. - 166 с.

3. Гольдберг А.А. Некоторые вопросы теории распределения значений, дополнение к книге Т.Виттих. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. - М.: Физматгиз, 1960. - 423 с.

4. Петренко В.П., Хуссайн М. О росте целых кривых. - Изв. АН СССР, 1973, 2, вып.39. - 266 с.

УДК 517.9

С.А.Молчанов, А.К.Степанов

О ФУНКЦИИ ГРИНА ОДНОМЕРНЫХ СЛАБОНЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СТРУКТУР

I. Одномерная неупорядоченная структура характеризуется случайным гамильтонианом

$$H=-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}+q(x,\omega),\quad x\in R^1,\quad \omega\in\Omega, \tag{I}$$

где потенциал $q(x,\omega)$ является стационарным (вообще говоря, обобщенным) случайным процессом с "хорошими" эргодическими свойствами. Мы будем изучать свойства оператора $(\lambda + H)^{-1}$ для модельного δ-образного потенциала

$$q(x,\omega) = \sum_i k_i \delta(x - x_i),$$

где точки x_i образуют пуассоновское случайное множество с интенсивностью ε, а k_i – независимые между собой (и от $\{x_i\}$), одинаково распределенные положительные случайные величины, т.е. $P\{k_i > 0\} = 1$. Часть результатов переносится и на более общие потенциалы.

Оператор H, очевидно, неотрицателен, и легко показать, что при $\lambda > 0$ почти наверное существует обратный ограниченный оператор $G_\lambda = (\lambda + H)^{-1}$. Ядро этого обратного оператора $G_\lambda(x,y)$ называется функцией Грина. Оно допускает одно из двух эквивалентных представлений.

I. $G_\lambda(x,y) = \int_0^\infty p_\lambda(t,x,y)\,dt$, где $p_\lambda(t,x,y)$ – переходная плотность подпроцесса (λ, q) одномерного винеровского процесса w_s, получающегося "сокращением жизни" с аддитивным функционалом

$$\varphi_t = \lambda t + \int_0^t q(x + w_s)\,ds.$$

По формуле Каца – Фейнмана это обстоятельство записывается в виде

$$G_\lambda(x,y) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} \left\langle e^{-\int_0^t (\lambda + q(x+w_s))ds} \Big/ w_0 = x,\ w_t = y \right\rangle =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{2t} - \lambda t}}{\sqrt{2\pi t}} \left\langle e^{-\sum_i k_i \ell_t(x_i)} \Big/ w_0 = x,\ w_t = y \right\rangle, \tag{2}$$

где $\ell_t(x_i)$ – "локальное время"* винеровского процесса в точ-

---

* Локальное время в точке a определяется как $\ell_t(a) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\int_0^t \chi_{(a-\delta,a+\delta)}(w_s)\,ds}{2\delta}$. Последний предел существует почти наверное для любых a и t.

ке x_i на интервале $[0, t]$. Идея применения формулы Каца – Фейнмана при изучении случайных операторов в настоящее время (после известной статьи Л.А.Пастура является весьма популярной.

2. $G_\lambda(x, y)$ – ограниченная почти наверное функция, такая, что

$$(\lambda + H)_x G_\lambda = -\delta(x - y) \tag{3}$$

или, чуть более подробно,

$$(\lambda + H)_x G_\lambda = 0, \quad x \neq y;$$
$$\frac{\partial G_\lambda}{\partial x}(y - 0, y) - \frac{\partial G_\lambda}{\partial x}(y + 0, y) = 1. \tag{4}$$

Разумеется, в нашем случае функция Грина $G_\lambda(x, y)$ случайна, и,с точки зрения теории вероятностей и спектральной теории, важно выяснить асимптотику моментов $G_\lambda(x, y)$, в первую очередь значения

$$\bar{G}_\lambda(x, y) = \langle G_\lambda(x, y) \rangle \tag{5}$$

при $\varepsilon \to 0$ (слабое неупорядочение) и $|x - y| \to \infty$. Наиболее интересным здесь является эффект резкого изменения вида асимптотики при $\lambda = 0$ вблизи области $\varepsilon |x - y| \sim const$ (см. предложения 2-4). Вероятностный механизм этого явления понятен: если $\varepsilon |x - y| \ll 1$, то $(0, q)$ подпроцесс при переходе из x в y скорее всего не будет взаимодействовать с "рассеивателями" x_i (носителями δ-функций); если $\varepsilon |x - y| \sim const$, то он провзаимодействует с конечным числом "рассеивателей"; если $\varepsilon |x - y| \gg 1$, то таких "рассеивателей" ему встретится $\gg 1$.

П. Начнем с изучения случая $\lambda > 0$. Здесь описанный выше эффект отсутствует, поскольку редкие рассеиватели "незаметны" на фоне постоянного рассеивания с интенсивностью λ.

<u>Предложение I.</u> Если $\lambda > 0$, $\varepsilon \to 0$, то равномерно по x, $y \in R^1$

$$\bar{G}_\lambda(x, y) \sim \frac{1}{2\sqrt{2\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}\,|x - y|}. \tag{6}$$

Действительно, легко видеть, что для любых $x, y \in R^1$

$$\tilde{G}_{\lambda,\varepsilon}(x,y) < G_{\lambda,\varepsilon}(x,y) < \frac{1}{2\sqrt{2\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}|x-y|}, \qquad (7)$$

где $\tilde{G}_{\lambda,\varepsilon}(x,y)$ – функция Грина подпроцесса, погибающего с вероятностью I в точках $\{x_i\}$. Другими словами, правой части в (7) отвечает потенциал $q^0(x,\omega)=\sum_i 0\delta(x-x_i)$, а левой – потенциал $\sum_i \infty\, \delta(x-x_i)$. Найдем $\langle \tilde{G} \rangle$. Нетрудно показать, что

$$\langle \tilde{G}_{\lambda,\varepsilon}(x,y)\rangle = e^{-\varepsilon|x-y|} \langle \tilde{G}_{\lambda,\varepsilon}(x,y)/[x,y] \text{ не содержит точек } \{x_i\}\rangle = \\ = e^{-\varepsilon|x-y|}\langle G_{\lambda,\xi,\eta}(x,y)\rangle,$$

где $G_{\lambda,\xi,\eta}(x,y)$ – функция Грина оператора $-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}+\lambda$ на интервале $[x-\xi, y+\eta]$ * с нулевыми граничными условиями на концах. Здесь ξ и η – независимые показательно распределенные величины с параметром ε. Прямая выкладка показывает, что

$$G_{\lambda,\varepsilon,\eta}(x,y) = \frac{sh\sqrt{2\lambda}\,\xi\;\; sh\sqrt{2\lambda}\,\eta}{\sqrt{2\lambda}\; sh\sqrt{2\lambda}(|x-y|+\xi+\eta)} =$$

$$= \frac{e^{-\sqrt{2\lambda}|x-y|}(1-e^{-2\sqrt{2\lambda}\xi})(1-e^{-2\sqrt{2\lambda}\eta})}{2\sqrt{2\lambda}\,(1-e^{-2\sqrt{2\lambda}(|x-y|+\xi+\eta)})} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{e^{-\sqrt{2\lambda}|x-y|}}{2\sqrt{2\lambda}}\left(1-e^{-2\sqrt{2\lambda}\xi}-e^{-2\sqrt{2\lambda}\eta}-e^{-2\sqrt{2\lambda}(|x-y|+\xi+\eta)}(e^{-2\sqrt{2\lambda}\xi}+e^{-2\sqrt{2\lambda}\eta})\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{e^{-\sqrt{2\lambda}|x-y|}}{2\sqrt{2\lambda}}\left(1-2\left(e^{-2\sqrt{2\lambda}\xi}+e^{-2\sqrt{2\lambda}\eta}\right)\right).$$

Но среднее значение последнего выражения равно

$\frac{1}{2\sqrt{2\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}|x-y|}(1-O(\varepsilon))$. Предложение доказано.

III. Рассмотрение случая $\lambda=0$ начнем в зоне $\varepsilon|x-y| \ll 1$. Верхняя оценка п.II уже не проходит, поскольку при $\lambda=0$, $\varepsilon=0$ функция Грина не существует (одномерный винеровский процесс возвратен).

---

* Предполагается, что $x<y$.

Предложение 2. Пусть $\lambda = 0$, $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon|x_\varepsilon - y_\varepsilon| \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$, $\langle \frac{1}{k_i} \rangle < \infty$. Тогда

$$\bar{G}_{0,\varepsilon}(x_\varepsilon, y_\varepsilon) = \bar{G}_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \sim \frac{1}{3\varepsilon}. \qquad (8)$$

Очевидно, что (в обозначениях п.II)

$$e^{-\varepsilon|x-y|} < \frac{\xi\eta}{|x-y|+\xi+\eta} > < \bar{G}_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) < \bar{G}_{\xi,\eta}(x, y), \qquad (9)$$

где $G_{\xi,\eta}(x, y)$ – функция Грина оператора

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2} + k_1\delta(t - x + \xi) + k_2\delta(t - y - \eta).$$

Другими словами, для оценки сверху мы "убираем" все рассеиватели, кроме близлежащих слева и справа к интервалу (x, y). Рассуждения в духе предложения I показывают, что

$$\bar{G}_{\xi,\eta}(x, y) = \left\langle \frac{(1+k_1\xi)(1+k_2\eta)}{k_1+k_2+k_1k_2(|x-y|+\xi+\eta)} \right\rangle \le$$

$$\le \left\langle \frac{\xi\eta}{|x-y|+\xi+\eta} \right\rangle + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1+k_2};$$

Но

$$\left\langle \frac{\xi\eta}{|x-y|+\xi+\eta} \right\rangle \sim \frac{1}{\varepsilon} \left\langle \frac{\xi^*\eta^*}{\xi^*+\eta^*} \right\rangle = \frac{1}{3\varepsilon},$$

где ξ^*, η^* – независимые показательно распределенные случайные величины с параметром I. Если $\langle \frac{1}{k_i} \rangle < \infty$, то окончательно находим

$$\bar{G}_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{1}{3\varepsilon}(1 + O(\varepsilon)).$$

Предложение доказано.

Замечание. Если $k_i = \infty$ – полное рассеяние в точках $\{x_i\}$, то верхняя и нижняя оценки (9) совпадают:

$$\bar{G}_\varepsilon(x, y) = \left\langle \frac{\xi\eta}{|x-y|+\xi+\eta} \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon} \left\langle \frac{\xi^*\eta^*}{\varepsilon|x-y|+\xi^*+\eta^*} \right\rangle$$

и можно написать следующие члены асимптотического разложения:

$$\bar{G}_\varepsilon(x,y)=\frac{1}{3\varepsilon}-\frac{|x-y|}{6}+\frac{\varepsilon|x-y|^2}{6}-\varepsilon^2|x-y|^3 O(\ln\varepsilon|x-y|).$$

IУ. Предложение 3. Если $\lambda=0$ и $\varepsilon|x_\varepsilon-y_\varepsilon|\sim const$, то

$$\bar{G}_\varepsilon(x_\varepsilon,y_\varepsilon)\sim\frac{c(\varepsilon|x_\varepsilon-y_\varepsilon|)}{\varepsilon}, \tag{10}$$

где $c(\varepsilon|x_\varepsilon-y_\varepsilon|)$ – ограниченная функция.

Для этой функции удается указать явную, хотя и малоэффективную формулу. Воспользуемся формулой (2) и одним тонким результатом Рая. Усредняя по множеству $\{x_i\}$ в (2), получаем

$$\bar{G}_\lambda(x,y)=\int_0^\infty\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}dt\left\langle e^{-\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}dz\left(1-e^{-k\int_0^t\delta(z-w_s)ds}\right)}\Big/w_0=x,\ w_t=y\right\rangle=$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{\pi\sqrt{2\rho}}\cos|x-y|\sqrt{2\rho}\,d\rho\int_0^\infty e^{-\rho t}dt\left\langle e^{-\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}dz\left(1-e^{-k\int_0^t\delta(z-w_s)ds}\right)}\Big/w_0=x,\ w_t=y\right\rangle.$$

Далее сделаем замену переменных и используем свойство автомодельности винеровского процесса, т.е. $w_{s/2\rho}=\frac{1}{\sqrt{2\rho}}\sqrt{2\rho}\,w_{s/2\rho}=\frac{1}{\sqrt{2\rho}}w_s$:

$$\bar{G}_\lambda(x,y)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_0^\infty\frac{\cos|x-y|\sqrt{2\rho}}{\rho\sqrt{\rho}}d\rho\int_0^\infty\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}dt\times$$

$$\times\left\langle e^{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\rho}}\int_0^\infty dz\left(1-e^{-\frac{k}{\sqrt{2\rho}}\int_0^t\delta(z-w_s)ds}\right)}\Big/w_0=x,\ w_t=y\right\rangle.$$

Обозначим через τ экспоненциальный случайный момент с распределением $P\{\tau>t\}=e^{-t/2}$. Тогда

$$\bar{G}_\lambda(x,y)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_0^\infty\frac{\cos|x-y|\sqrt{2\rho}}{\rho\sqrt{\rho}}d\rho\left\langle e^{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\rho}}\int_{-\infty}^{\infty}dz\left(1-e^{-\frac{k}{\sqrt{2\rho}}\int_0^\tau\delta(z-w_s)ds}\right)}\Big/w_0=x,\ w_\tau=y\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_0^\infty\frac{\cos|x-y|\sqrt{2\rho}}{\rho\sqrt{\rho}}d\rho\left\langle e^{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\rho}}\int_{-\infty}^{\infty}dz\left(1-e^{-\frac{k}{\sqrt{2\rho}}t_\tau^{(x,y)}(z)}\right)}\right\rangle,$$

где $\ell_\tau^{\gamma(x,y)}(z)$ – "условное локальное время" винеровского процесса в точке z на интервале $[0,\tau]$, т.е. $\ell_\tau^{\gamma(x,y)}(\cdot) = \{\ell_\tau^{\gamma}(\cdot) / w_0 = x,\ w_\tau = y\}$ (ср. с замечанием).

Из последнего выражения в результате несложных преобразований получим окончательно

$$\bar{G}_\lambda(x,y) = \frac{2}{\pi\varepsilon}\int_0^\infty \frac{\cos\varepsilon|x-y|\rho}{\rho^2}\,d\rho \left\langle e^{-\frac{1}{\rho}\int_{-\infty}^{\infty} dz\left(1-e^{-\frac{k}{\varepsilon\rho}\ell_\tau^{\gamma(x,y)}(z)}\right)}\right\rangle. \tag{11}$$

Можем указать и другое представление для функции $c(\varepsilon|x_\varepsilon - y_\varepsilon|)$, используя выражение $\ell_\tau^{\gamma(x,y)}$ через бесселевские процессы. А именно, поскольку $\ell_\tau^{\gamma(x,y)}(z) = 0$, если $z \bar{\in} [b,d]$, то

$$c(\varepsilon|x_\varepsilon - y_\varepsilon|) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\varepsilon|x-y|\rho}{\rho^2}\,d\rho \left\langle e^{-\frac{1}{\rho}\int_b^x dz\left(1-e^{-\frac{k}{4\varepsilon\rho}e^{-2z}r_4^2(e^{2z}-e^{2b})}\right)}\right\rangle$$

$$\left\langle e^{-\frac{1}{\rho}\int_x^y dz\left(1-e^{-\frac{k}{4\varepsilon\rho}e^{-2z}r_2^2(e^{2z}-e^{2x})}\right)}\right\rangle \left\langle e^{-\frac{1}{\rho}\int_y^d dz\left(1-e^{-\frac{k}{4\varepsilon\rho}e^{2z}\tilde{r}_4^2(e^{-2z}-e^{-2d})}\right)}\right\rangle. \tag{12}$$

Здесь $b = \min_{s\le\tau} w_s$, $d = \max_{s\le\tau} w_s$; r_4 – четырехмерный бесселевский процесс, начинающийся в нуле и не зависящий от b; r_2 – двумерный бесселевский процесс, начинающийся в $r_4(e^{2x}-e^{2b})$, но не зависящий от r_4 и b; $\tilde{r}_4$ – четырехмерный бесселевский процесс, начинающийся в нуле, такой, что $\tilde{r}_4 = \ell_t^{\gamma(x,y)}(y \pm 0)$ и не зависящий от b, d, r_2, r_4.

<u>У. Перейдем к изучению $G(x,y)$ при $\varepsilon|x-y| \gg 1$.</u> Предварительно изложим некоторые сведения о возникающих в связи с δ-потенциалом цепях Маркова. Введем на интервале $(x_{i-1}, x_i + 0)$ матрицу монодромии A_i для уравнения $Hy = 0$. Легко показать, что

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & k_i \\ \frac{\tau_i}{\varepsilon} & 1 + \frac{k_i\tau_i}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $\tau_i = (x_i - x_{i-1})\,\varepsilon$ – независимые показательно распределенные случайные величины; k_i (по условию) не зависят от $\{\tau_i\}$

и между собой. Матрицы A_i – независимые одинаково распределенные элементы группы $SL(2, R)$ и к ним, в частности, применимы хорошо известные результаты Ферстенберга и В.Н.Тутубалина.

Легко показать, что произведение трех таких матриц (скажем, $A_3\ A_2\ A_1$) уже имеет непрерывную плотность относительно меры Хаара в $SL(2, R)$, положительную в окрестности $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (так будет, если даже $k_i \equiv const$, если сами k_i имеют "хорошую" плотность, то достаточно двух сомножителей.

Поэтому, согласно [3], для любого (неслучайного) вектора $x \in R^2,\ x \neq 0$ существует и строго положителен

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\| A_n A_{n-1} \dots A_1 x \|}{n} = \alpha > 0 . \tag{14}$$

Это так называемый старший показатель Ляпунова последовательности матриц $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$

Последнее значит, что если мы решаем задачу Коши $Hy = 0,$

$y(0) = x , \qquad y'(0) = x_1 ,$ то

$$\frac{\ln \sqrt{y^2(x_n) + (y'(x_n))^2}}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha > 0 . \tag{15}$$

Но $y(x)$ – выпуклая вниз функция и, стало быть, монотонна при больших x . Так как $x_n \sim \frac{n}{\varepsilon}$ (почти наверное), то из (15) следует, что с вероятностью 1

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln \sqrt{y^2(x) + (y'(x))^2}}{\varepsilon x} = \alpha . \tag{16}$$

Соотношение (16) доказано пока что при фиксированном ε , однако оно справедливо (по вероятности!) равномерно по ε .

Докажем это и получим попутно некоторые явные асимптотические формулы для $\alpha = \alpha(\varepsilon)$.

Последовательность матриц A_n индуцирует на одномерном проективном пространстве P^1 цепь Маркова X_n по формуле

$$X_{n+1} = \frac{A_n X_n}{\| A_n X_n \|} .$$

На $\mathcal{P}^1$ удобно ввести угловую координату $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (точки $\pm\frac{\pi}{2}$ склеены). Если

$$t_n = tg\, \varphi\,(X_n)$$

то, как легко показать,

$$t_{n+1} = \frac{\frac{\tau_n}{\varepsilon} + \left(1 + \frac{k_n \tau_n}{\varepsilon}\right) t_n}{1 + k_n t_n} = \frac{\tau_n}{\varepsilon} + \frac{1}{k_n} - \frac{1}{k_n + k_n^2 t_n} .$$

Подберем постоянную c таким образом, чтобы $P\left\{\frac{1}{k_n} < c\right\} > \frac{1}{2}$, и оценим теперь коэффициент эргодичности цепи $t_n^{(\varepsilon)}$. Имеем для любой функции $f(x),\ x > 0$

$$< f(t_{n+1}) / t_n > = \int_0^\infty f(x)\, p(t_n, x)\, dx =$$

$$= < f\left(\frac{\tau_{n+1}}{\varepsilon} + \frac{t_n}{1 + k_{n+1} t_n}\right) > = < e^{\frac{t_n}{1+k_{n+1} t_n}} \int_{\frac{t_n}{1+k_{n+1} t_n}}^{\infty} \varepsilon e^{-\varepsilon x} f(x) dx > \geq$$

$$\geq < \int_{\frac{1}{k_{n+1}}}^{\infty} \varepsilon e^{-\varepsilon x} f(x) dx > \geq \frac{1}{2} \int_c^\infty \varepsilon e^{-\varepsilon x} f(x)\, dx .$$

Отсюда следует, что для любого $t_n \geq 0$

$$p(t_n, x) \geq \frac{1}{2} \varepsilon e^{-\varepsilon x} \chi_{(c,\infty)}(x) = \frac{\chi_{(c,\infty)}(x)}{2}\, p(0, x) .$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2} \int_c^\infty \varepsilon e^{-\varepsilon x} dx = \frac{1}{2} e^{-c\varepsilon} \geq \frac{1}{3} \quad \text{при} \quad \varepsilon < \varepsilon_0 .$$

Таким образом, коэффициент эргодичности цепи $t_n^{(\varepsilon)}$ оценивается равномерно по ε при $\varepsilon \to 0$, и наше утверждение доказано.

Согласно И.Я.Гольдшейду,

$$\alpha = < \ln \frac{A_n x}{\| A_n x \|} > \pi, \tag{17}$$

где x имеет стационарное (инвариантное) распределение π. Легко показать, что формула (17) переписывается в виде

$$\alpha = \frac{1}{2} < \ln \frac{\left(\frac{\tau_{n+1}}{\varepsilon} + t_n\left(1 + \frac{k_{n+1}\tau_{n+1}}{\varepsilon}\right)\right)^2 + \left(1 + k_{n+1}t_n\right)^2}{1 + t_n^2} > ,$$

где τ_{n+1} , k_{n+1} не зависят от t_n , а t_n имеет стационарное распределение π . Но $t_n = -\frac{\tau_n}{\varepsilon} + \frac{1}{k_n} + O(\varepsilon)$.
Тогда (после несложных выкладок) найдем, что

$$\alpha = < \ln \frac{k_{n+1}\tau_{n+1}}{\varepsilon} > + \frac{1}{2} < \ln\left(1 + \frac{2\varepsilon}{k_{n+1}}\left(\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_{n+1}}\right) + O(\varepsilon)\right) > =$$
$$= \ln \frac{1}{\varepsilon} + < \ln k\tau > + O(\varepsilon \ln \varepsilon) = \ln \frac{1}{\varepsilon} + C + O(\varepsilon \ln \varepsilon) . \qquad (18)$$

(разумеется, мы предполагаем, что $< \ln k_i > < \infty$).

Собирая воедино все результаты, находим, что равномерно по ε

$$\frac{\ln\sqrt{y^2(x) + (y'(x))^2}}{x} \sim \varepsilon \ln \varepsilon^{-1} + C\varepsilon > 0 .$$

Согласно И.Я.Гольдшейду, существует решение $\hat{y}(x)$ уравнения $Hy = 0$ со случайными начальными данными $\hat{y}(0) = \xi$, $\hat{y}'(0) = \eta$, причем $\xi = \xi(k_i, \tau_i, i = 1, 2, \ldots)$, $\eta = \eta(k_i, \tau_i, i = 1, 2, \ldots)$, такое, что

$$\frac{\ln\sqrt{\hat{y}^2(x) + (\hat{y}'(x))^2}}{x} \sim -\alpha\varepsilon = -\varepsilon \ln \varepsilon^{-1} - C\varepsilon$$

(равномерно по ε). При этом начальные данные (ξ, η) имеют совместное невырожденное (равномерно по ε) распределение.

Отсюда легко заключить, что при $\varepsilon |x - y| >> 1$ равномерно по ε и по вероятности выполнено

Предложение 4.

$$\ln G(x, y) \sim (-\varepsilon \ln \varepsilon^{-1} - C\varepsilon) |x - y| ,$$

где $C = < \ln k_i \tau_i >$.

УДК 517.55:517.5

М.В.Новицкий

ОБ ОБОЛОЧКЕ ГОЛОМОРФНОСТИ ОДНОГО КЛАССА ВЕЩЕСТВЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Н.Ароншайн [1] ввел класс гармонических функций бесконечного порядка, т.е. класс бесконечно дифференцируемых функций, заданных в области $D \subset R^n$, $n \geq 2$, и удовлетворяющих условию

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|\Delta^n u(x)|}{(2n)!}} = 0, \quad x \in D, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа. Он исследовал некоторые свойства таких функций и, в частности, доказал их вещественную аналитичность. П.Лелон [2] нашел оболочку голоморфности этого класса функций. Результат Лелона формулируется следующим образом. Рассмотрим множество, получаемое выбрасыванием из C^n многообразий вида

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + iy_k - \xi_k)^2 = 0, \quad \xi \in \partial D. \tag{2}$$

Связная компонента этого множества, содержащая D, называется комплексной ячейкой, ассоциированной с областью D и обозначается через $H(D)$.

Теорема I (Лелон [2]). $H(D)$ является оболочкой голоморфности класса гармонических функций бесконечного порядка в области D.

В настоящей работе вводится класс $L(\mathfrak{R})$ вещественно-аналитических функций, обобщающий класс гармонических функций бесконечного порядка и строится его оболочка голоморфности. Класс $L(\mathfrak{R})$ определяется следующим образом. Пусть $u(x)$ – вещественно-аналитическая функция в области D. Сопоставим функции $u(x)$ с функцией

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\Delta)^n u(x)}{(2n)!} t^{2n}, \tag{3}$$

определенной равенством (3) для достаточно малых t и продолженной затем по аналитичности в максимально большую область в R^{n+1}. Полученную функцию будем называть функцией $v(x,t)$, ассоциированной с функцией $u(x)$.

Пусть Ω – область в R^{n+1}, симметричная относительно гиперплоскости $t=0$ и такая, что $\Omega \cap R^n = D$. Обозначим через $L(\Omega)$ класс вещественно-аналитических функций в $D \subset R^n$, ассоциированные функции которых аналитичны в $\Omega \subset R^{n+1}$. Рассмотрим множество, получаемое выбрасыванием из C^n многообразий вида

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k+iy_k-\xi_k)^2+h^2=0, \quad (\xi,h)\in\partial\Omega, \quad h \geqslant 0. \tag{4}$$

Связную компоненту этого множества, содержащую D, назовем комплексной ячейкой $H(\Omega)$, ассоциированной с областью Ω.

Теорема 2. $H(\Omega)$ является оболочкой голоморфности класса $L(\Omega)$.

Далее будет показано (следствие 3 теоремы 2), что теорема I следует из теоремы 2, если $\Omega = D \times R$. Для доказательства теоремы 2 понадобится следующая лемма.

Лемма. Для того чтобы $u \in L(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $v(x,t)$ такая, что: а) $v(x,t)$ – гармоническая функция в области Ω; б) $v(x,t)$ – четная функция по переменной t при фиксированном $x \in D$; в) $v(x,0) = u(x)$;

Доказательство. Необходимость условий а), б), в) очевидна. Достаточность заключается в проверке того, что $v(x,t)$ имеет вид (I) для достаточно малых t. Поскольку $v(x,t)$ – аналитическая функция, то для достаточно малых t

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} u_n(x).$$

Из условия $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right)v(x,t)=0$ получаем $u_n(x)=(-\Delta)^n u_0(x)$. Согласно условию в), $u_0(x)=u(x)$, что и доказывает представимость $v(x,t)$ формулой (I) для достаточно малых t.

Доказательство теоремы 2. Покажем, что каждая функция из класса $L(\Omega)$ имеет голоморфное продолжение в $H(\Omega)$. Для этого рассмотрим семейство ограниченных областей $\mathfrak{R}_\varepsilon$, компактно вложенных друг в друга, исчерпывающих изнутри $\mathfrak{R}$ при $\varepsilon \to 0$, имеющих достаточно гладкие границы и симметричных относительно гиперплоскости $t = 0$.

Применим формулу Грина для гармонической функции $v(x,t)$ в области $\mathfrak{R}_\varepsilon$. Тогда

$$v(x,t) = \frac{1}{(n-1)\sigma_{n+1}} \int_{\partial\mathfrak{R}_\varepsilon} \Bigg[\frac{1}{(\|x-\xi\|^2 + (t-h)^2)^{n-1}} \frac{\partial v(\xi,h)}{\partial n_{(\xi,h)}} -$$

$$- v(\xi,h) \frac{\partial}{\partial n_{(\xi,h)}} \frac{1}{(\|x-\xi\|^2 + (t-h)^2)^{n-1}} \Bigg] dS_{(\xi,h)}.$$

Учитывая четность $v(x,t)$ по переменной t, получаем

$$v(x,t) = \frac{1}{(n-1)\sigma_{n+1}} \int_{\partial\mathfrak{R}_\varepsilon^+} \Big[K(x,t,\xi,h) \frac{\partial v(\xi,h)}{\partial n_{(\xi,h)}} - v(\xi,h) \frac{\partial}{\partial n_{(\xi,h)}} K(x,t,\xi,h) \Big] dS_{(\xi,h)}, \quad (5)$$

где $\mathfrak{R}_\varepsilon^+ = \left\{ (\xi,h) \in \mathfrak{R}, \quad h \geq 0 \right\}$, а

$$K(x,t,\xi,h) = \frac{1}{(\|x-\xi\|^2 + (t-h)^2)^{n-1}} + \frac{1}{(\|x-\xi\|^2 + (t-h)^2)^{n-1}}.$$

Полагаем в формуле (5) $t = 0$ и подставляем вместо переменной x переменную $z = x + iy$. Тогда функция

$$u(z) = \frac{1}{(n-1)\sigma_{n+1}} \int_{\partial\mathfrak{R}_\varepsilon^+} \Big[K(z,0,\xi,h) \frac{\partial v(\xi,h)}{\partial n_{(\xi,h)}} - v(\xi,h) \frac{\partial}{\partial n_{(\xi,h)}} k(z,0,\xi,h) \Big] dS_{(\xi,h)}$$

задает голоморфное продолжение функции $u(x)$ в $H(\mathfrak{R}_\varepsilon)$. Для этого достаточно заметить, что функция $K(x, 0, \xi, h) = \frac{2}{(\|x-\xi\|^2 + h^2)^{n-1}}$ продолжается в $H(\mathfrak{R}_\varepsilon)$, если $(\xi, h) \in \partial\mathfrak{R}_\varepsilon^+$. Поскольку $H(\mathfrak{R}) = \cup H(\mathfrak{R}_\varepsilon)$, то отсюда получаем, что $u(x)$ продолжается как голоморфная функция в $H(\mathfrak{R})$.

Покажем, что существует функция класса $L(\mathfrak{R})$, не продолжаемая как голоморфная функция в более широкое множество, чем $H(\mathfrak{R})$. Достаточно указать функции из $L(\mathfrak{R})$, не продолжаемые в множества вида (4). Такие функции имеют вид

$$u_{\xi,h}(x)=\frac{1}{(\|x-\xi\|^2+h^2)^{n-1}}.$$

Эти функции лежат в классе $L(\mathfrak{R})$., так как функции

$$v_{\xi,h}(x,t)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(\|x-\xi\|^2+(h-t)^2)^{n-1}}+\frac{1}{(\|x-\xi\|^2+(h+t)^2)^{n-1}}\right]$$

удовлетворяют условиям леммы I. Теорема доказана.

Рассмотрим некоторые следствия теоремы 2 в предположении, что область $\mathfrak{R}$ имеет вид

$$\mathfrak{R}=\left\{(x,t):x\in D,\quad |t|<R(x)\right\}, \tag{6}$$

где $t=R(x)$ – некоторая положительная в области D функция.

Следствие I. Оболочка голоморфности для класса $L(\mathfrak{R})$, где $\mathfrak{R}$ имеет вид (6), является связной компонентой множества, получаемого выбрасыванием из C^n многообразий вида:

$$\text{а)}\ \sum_{k=1}^{n}(x_k+iy_k-\xi_k)^2=0,\qquad \xi\in\partial D; \tag{7}$$

$$\text{б)}\ \sum_{k=1}^{n}(x_k+iy_k-\xi_k)^2+R^2(\xi)=0,\quad \xi\in D. \tag{8}$$

Доказательство. Достаточно показать, что многообразия вида (4) при $x\in\partial D$ и $|h|\leqslant R(x)$ содержатся в $C^n-H(\mathfrak{R})$. Действительно, если из C^n выброшены многообразия вида (7), то для всех точек $H(\mathfrak{R})$ должно выполняться неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-\xi_k)^2-y_k^2\geqslant 0,\qquad \xi\in\partial D. \tag{9}$$

Точки многообразия вида (3) при $\xi\in\partial D$, $|h|\leqslant R(\xi)$ удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-\xi_k)^2-y_k^2=-h^2<0,$$

что противоречит (9).

Пусть область Ω имеет вид (6). Тогда, если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[2n]{\frac{|\Delta^n u(x)|}{(2n)!}} \le \frac{1}{R(x)},$$

то функция $u(x)$ имеет голоморфное продолжение в $H(\Omega)$.

Для любого семейства Φ вещественно-аналитических функций, удовлетворяющего условию

$$M \subsetneq \Phi \subsetneq L(D \times R), \tag{10}$$

где M - класс всех гармонических функций в области D, оболочка голоморфности совпадает с комплексной ячейкой $H(D)$, ассоциированной с областью D.

Отметим, что класс гармонических функций бесконечного порядка очевидным образом условию (10) удовлетворяет.

2. Комплексной круговой ячейкой связанной с областью D, называется множество в C^n вида

$$C_\varphi(D) = \left\{ z = x + iy \in C^n,\ \ x \in D,\ \ |y| < \varphi(x) \right\}, \tag{11}$$

где функция $\varphi(x)$ определена в D, $\varphi(x) > 0$ при $x \in D$.

П.Лелон показал [2], что максимальная круговая ячейка, в которую продолжаются все гармонические функции бесконечного порядка, имеет вид (11) с $\varphi(x) = \rho(x, \partial D)$.

<u>Теорема 3.</u> Максимальная круговая ячейка, в которую продолжаются все функции класса $L(\Omega)$, имеет вид (11) с $\varphi(x) = \rho(x, \partial\Omega)$.

<u>Доказательство.</u> Максимальный шар, содержащийся в области Ω с центром в точке $(x, 0)$, имеет радиус $\rho(x, \partial\Omega)$. В этом шаре ассоциированные функции $V(x, t)$ разлагаются в ряд. Подставляя в этот ряд $t = 0$, $x = x$, получаем продолжение $u(x)$ в $S_\varphi(D)$ с $\varphi(x) = \rho(x, \partial\Omega)$.

Максимальность этой комплексной круговой ячейки следует из того, что в классе $L(\Omega)$ содержатся функции вида

$$u_{\xi,h}(x) = \frac{1}{(\|x-\xi\|^2 + h^2)^{n-1}}, \text{ где } (\xi, h) \in \partial\Omega.$$

Следствие. Если область $\Re$ имеет вид (6), то

$$\varphi(x) = \min\left[\rho(x, \partial D), \inf_{\xi\in D} \rho\left[(x,0), \xi, R(\xi)\right]\right].$$

В частности, при $R(\xi) \equiv +\infty$, получаем $\varphi(x) = \rho(x, \partial D)$.

3. Пусть L – эллиптический оператор второго порядка, заданный в области D и имеющий бесконечно дифференцируемые коэффициенты. Класс $W(L, D)$ вполне L-супергармонических функций определяется как класс бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию

$$(-L)^n u(x) \geqslant 0, \quad x \in D, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

(см., например [3]). В этом пункте мы получаем ряд свойств функций класса $W(L, D)$, вводя аналогично предыдущему функцию

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-L)^n u(x)}{(2n)!} t^{2n}. \tag{13}$$

Отметим, что, поскольку на любом компакте K и D функции из $W(L, D)$ удовлетворяют оценке

$$|L^n u(x)| < C\lambda^n(K), \tag{14}$$

где C и $\lambda(K)$ – некоторые постоянные (см. [3]), то ряд (13) сходится для любого $|t| < \infty$.

Теорема 4. Равенство (13) задает взаимно-однозначное соответствие между классом $W(L, D)$ и классом функций $v(x, t)$, заданных в области $\Re = D \times R$ и удовлетворяющих следующим условиям:

α) $\left(L + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Re;$

β) $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^n v(x,t) \geqslant 0, \quad |t| < \infty, \ x \in D, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$

γ) $v(x,t)$ – четная функция переменной t при фиксированном $x \in D$;

Доказательство. Пусть $u \in W(L, D)$. Тогда для функции $V(x, t)$ очевидным образом выполняются условия $\beta)$ и $\gamma)$. Проверим $\alpha)$:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t^2)^{n-1}}{[2(n-1)]!}(-L)^n u(x) = -L\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t^2)^{n-1}}{[2(n-1)]!} L^{n-1} u(x)\right) =$$

$$= -L\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}(-L)^n u(x)\right) = -L_x V(x, t),$$

т.е. $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L\right) V(x,t) = 0$.

Пусть задана функция $V(x, t)$, удовлетворяющая $\alpha), \beta), \gamma)$. Покажем, что эта функция с необходимостью имеет вид (13), где $u \in W(L,D)$. Согласно $\beta)$, функция $V(x, t)$ по переменной t аналитична в R и разлагается в ряд

$$V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(x)}{(2n)!} t^{2n}.$$

Применяя к функции $V(x, t)$ оператор $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L$ и используя свойство $\alpha)$, получаем $u_{n+1}(x) = -L u_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, т.е. $u_n(x) = (-L)^n u_0(x)$ и значит, $u_0(x) \in W(L, D)$.

Следствие. Конус $W(L, D)$ имеет компактное основание

$$N = \{u \in W(L,D),\ u(x_0) = 1\}$$

(x_0 - фиксированная точка в D) в метрике, порождаемой счетной системой полунорм

$|u|_n = \max_{x \in D_n} |u(x)|$, где D_n - последовательность областей компактно вложенных друг в друга и исчерпывающих изнутри область D.

Замечания к теореме 4.

1. Функция $V(x, t)$ обладает следующим дополнительным свойством: при любом фиксированном t $V(x, t)$ - вполне L-супергармоническая функция.

2. Функция $v(x,t)$ продолжается в комплексную плоскость по переменной t как целая функция экспоненциального типа $\sigma(x)$. Для $\sigma(x)$ имеет место оценка

$$\sigma(x) \leq \inf_{G \subset\subset D} \sqrt{\lambda_1(G)},$$

где G – произвольная ограниченная область в D с достаточно гладкой границей; $\lambda_1(G)$ – первое собственное значение оператора L с нулевыми граничными условиями на ∂G.

3. В работе [4] доказано следующее утверждение (теорема I). Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке (a,b) и удовлетворяет условию

$$(-1)^n f^{(2n)}(x) \geq 0, \quad x \in (a,b), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (15)$$

Тогда существует неотрицательная гармоническая функция, заданная в полосе $(a,b) \times R$, такая, что: а) $u(x,0) = f(x)$; б) функция $u(x,y)$ при фиксированном y удовлетворяет условию (15).

Отметим, что функция $u(x,y)$ может быть задана формулой (13), если оператор L заменить оператором $\frac{d^2}{dx^2}$.

I. Aronszajn N. Sur les decompositions des fonctions analytiques uniformes sur leurs applications. - Acta Math., 1935, 65, p. 1-156.

2. Lelong P. Sur la definitions des fonctions hormoniques d'orde infini. - Comptes rendus, 1946, 223, p. 372-374.

3. Новицкий М.В. Представление вполне L-субгармонических функций. - Изв. АН СССР. Сер. математика, 1975, 39, № 6, с.1346-1365.

4. Mugler D.H. Completely convex and positive harmonic functions. - Siam. J. Math. Anal., 1975, 6, N 4, p. 681-688.

УДК 519.4

Н.И.Нессонов

АВТОМОРФИЗМЫ АППРОКСИМАТИВНО-КОНЕЧНЫХ ФАКТОРОВ ТИПА III_0

I. Пусть M – аппроксимативно-конечный (AK) фактор типа III_0; φ – точный нормальный полуконечный вес на M; σ_t^φ – группа модулярных автоморфизмов $(ГМА)$ M, отвечающая φ. Согласно работам [1, 2], M является скрещенным произведением алгебры $N=R_{01}\otimes L^{\infty}(X)$, где R_{01} – АК фактор типа II_{∞}; X – пространство Лебега, на некоторый автоморфизм $\tilde{Q}\in Aut\, N$. Обозначим через $p(\theta)$ период канонического действия автоморфизма $\theta\in Aut\, M$ на асимптотической алгебре C_M^U и будем называть θ апериодическим, если $p(\theta)=0$ (см. [3]).

В настоящей работе найдена полная система инвариантов внешнего сопряжения для апериодических автоморфизмов АК факторов типа III_0, которые являются скрещенными произведениями алгебры $N=R_{01}\otimes L^{\infty}(X)$ с весом $tr\otimes\mu$ на автоморфизм $\tilde{Q}$, который действует согласно формуле

$$\tilde{Q}(y,x)=(U_x(y),\,Qx)\,(y\in R_{01},\; x\in X).$$

Здесь Q – эргодический, свободно действующий автоморфизм X, оставляющий меру μ на X инвариантной; tr – след на R_{01}; $U_x\,(x\in X)$ – автоморфизмы R_{01} и $tr(U_x(y))(try)^{-1}\in\{\lambda^n\times(n\in Z),\ \lambda>0\},(try>0)$. Оказывается, что внешняя сопряженность апериодических автоморфизмов полностью характеризуется действием, которое они индуцируют на двойственной, по Такесаки, к M алгебре $R(M,\sigma_t^{\varphi})$ (см. [4]). Более того, структура множества классов внешнесопряженных апериодических автоморфизмов определяется структурой множества $\mathcal{O}_G=\{\theta\in Aut\, L^{\infty}(X):\theta G=G\theta\}$, где G – автоморфизм из $[Q]$.

2. Разработаем необходимый нам вспомогательный аппарат, который будем существенно использовать в дальнейшем при описании системы инвариантов внешнего сопряжения. Пусть $\mathcal{O}_\lambda$ – класс факторов типа III_0, описанный в п.I.

Лемма 2.I. Если $M\in\mathcal{O}_2$, то M изоморфен $R(N,\tilde{Q}_1)$, где $R(N,\tilde{Q}_1)$ – скрещенное произведение алгебры $N=R_{01}\otimes L^{\infty}(X)$ на автоморфизм $\tilde{Q}_1=u_2\otimes Q_1\,(Q_1\in[Q],\ atr\circ u_2=\lambda tr\,(0<\lambda<1)$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы [4] и результатов работы [2] (см. теорему 6.I2)

Обозначим через π каноническое вложение алгебры N в M и пусть $\tilde{\varphi}$ – точный нормальный полуконечный вес на M, построенный обычным способом по $tr\otimes\varphi_\mu$, где φ_μ – состояние на $L^{\infty}(X)$, определяемое мерой μ; $M_{\tilde{\varphi}}$ – централизатор $\tilde{\varphi}$ в M.

Лемма 2.2. Пусть e – проектор из $M_{\tilde{\varphi}}$, для которого $\tilde{\varphi}(e)=1$; $P_1=\bigotimes_{i=1}^{N} I_2(i)$ – подфактор eMe типа I_2 такой, что $\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(\bar{e}_{kl}^{n}) = \lambda^{(k-l)it}\bar{e}_{kl}^{n}$ $(k, l = 1, 2)$, где $\bar{e}_{kl}$ – матричные единицы фактора $I_2(n)$; P_2 – подфактор типа I_r $(r < \infty)$ в $eM_{\tilde{\varphi}}e$, коммутирующий с P_1 ; K – фактор типа $I_{2^N r}$, порожденный P_1 и P_2 , с матричными единицами e_{kl} $(1 \le k, l \le 2^N r)$; $a_1, \dots, a_q$ – набор операторов из eMe ; θ – апериодический автоморфизм M ; $\tilde{\varphi}_0\theta = \tilde{\varphi}$; $\theta(e) = e$ и $\theta(K) = K$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и точного нормального состояния ψ на eMe существуют два конечных фактора F_1 и $F_2 \in eMe \cap K'$*, порожденные системами матричных единиц f_{kl}^1 $(1 \le k, l \le n_1)$ и f_{kl}^2 $(1 \le k, l \le n)$, а также унитарный оператор $v \in eM_{\tilde{\varphi}}e$, для которых справедливы следующие соотношения: $\| v - 1 \|_{\psi} = \psi((v-1))^*(v-1))^{1/2} < \varepsilon + 2(\sqrt{n})^{-1}$;

$$Ad\, v\theta(f_{kl}^1) = f_{kl}^1 \quad (1 \le k, l \le n_1);$$

$$Ad\, v\,\theta\Big(\sum_{i=1}^{n-1} f_{i+1\,i}^2 + f_{1n}^2\Big) = \sum_{i=1}^{n-1} f_{i+1\,i}^2 + f_{1n}^2;$$

$$\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(f_{kl}^1) = \lambda^{(k-l)it} f_{kl}^1 \,(1 \le k, l \le n_1),\ \sigma_t^{\varphi}(f_{kl}^2) = f_{kl}^2 \,(1 \le k, l \le n);$$

$$Ad\, v\theta(f_{ii}^2) = f_{i+1\,i+1}^2 \,(1 \le i < n), \quad Ad\, v\,\theta(f_{nn}^2) = f_{n}^2 .$$

В алгебре K_2 , порожденной K , F_1 , F_2 и $e\pi(L^\infty(X))e$, существуют операторы $b_1, \dots, b_q$, удовлетворяющие неравенствам

$$\| a_i - b_i \|_{\psi} < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Доказательство. В силу условий нашей леммы существует фактор $R_\lambda \in eMe$ типа III_λ такой, что R_λ и $e\pi(L^\infty(X))e$ порождают алгебру eMe и сужение веса $\tilde{\varphi}$ на R_λ – точное нормальное состояние $\tilde{\varphi}_e$ на R_λ , для которого $\sigma_T^{\tilde{\varphi}_e} = I$ $(T = 2\pi / \ln \lambda)$. Далее, можно считать, что $K \in R_\lambda$, $\theta(K) = K$, $\tilde{\varphi}_e \circ \theta = \tilde{\varphi}_e$. Теперь заметим, что в алгебре $R_\lambda \cap K'$ существует фактор F типа I_{n_1} с матричными единицами $\bar{f}_{kl}$ $(1 \le k, l \le n_1)$ такими, что $\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(\bar{f}_{kl}) = \lambda^{it(k-l)}\bar{f}$ и в алгебре $\bar{K}$, порожденной F K и $\pi(L^\infty(X))$, найдутся операторы $b_m^{j\,kl}$ $(1 \le m \le q,\ 0 \le j \le n-1)$, для которых справедливы соотношения $\| a_m - \theta^j(b_m^j)\|_{\psi} < \varepsilon / n^2$ $(0 \le j \le n-1,\ 1 \le m \le q)$.

---

* K' – коммутант K .

Пусть θ_U – автоморфизм асимптотической алгебры C^U_{eMe}, индуцируемый θ. В C^U_{eMe} существует унитарный оператор и набор взаимно ортогональных проекторов $\{\bar e_i\}$ ($0 \le i \le n-1$) со свойствами: $\bar U^n = I$, $Ad\, \bar U(\bar e_i) = \bar e_{i+1(mod\ n)}$ и $\sum_{i=0}^{n-1} \bar e_i = I$. Принимая во внимание стабильность автоморфизма θ_U, можем считать, что $\theta_U(\bar e_i) = \bar e_i$ ($0 \le i < m$), $\theta_U(\bar U) = \bar U$. Пусть W – унитарный оператор из C^U_{eMe} со свойством $\bar U = W^* \theta_U(W)$. Тогда, обозначив $Ad\, W(\bar e_i)$ через e_i, получим $\theta_U(e_i) = e_{i+1(mod\ n)}$, $\theta_U(U) = U$, где $U = Ad\, W(\bar U)$. Если $e_i = (e_i(k))$, $U = (u(k))$, то можно считать, что $u(k)$ – унитарные операторы; $e_i(k)$ взаимно ортогональны по i; $\sum_{i=0}^{n-1} e_i(k) = 1$; $Ad\, u(k)(e_i(k)) = e^{(k)}_{i+1(mod\ n)}$; $[u(k), x] = [e_i(k), x] = 0$ для всех $x \in \bar K$; $i = 0, 1, \ldots, n-1$; $s\text{-}\lim_{k\to\infty} (\theta(u(k)) - u(k)) = s\text{-}\lim_{k\to\infty} (\theta(e_i(k)) - e^{(k)}_{i+1(mod\ n)}) = 0$; $u(k), e_i(k) \in eM_{\tilde\varphi}e$ для всех $i, k \in N$.

Используя эти равенства, можем найти унитарный оператор $v_1 \in eM_{\tilde\varphi}e \cap \bar K'$ и $k \in N$ такие, что для $\bar u = u(k)$, $e_i = e_i(k)$ ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &Ad\, v_1^* \theta(e_i) = e_{i+1(mod\ n)};\ Ad\, v_1 \theta(\bar u) = \bar u;\\ &\|(Ad\, v_1 \theta)^i (b^i_m) - \theta^i(b^i_m)\|_\varphi < \varepsilon/n^2 \quad (1 \le m \le q,\ 0 \le i < n);\\ &\sqrt{\tfrac{1}{n}} - \tfrac{\varepsilon}{2} \le \varphi(e_i) \le \sqrt{\tfrac{1}{n}} + \tfrac{\varepsilon}{2} \quad (0 \le i < n);\\ &\|v_1 - 1\|_\varphi < \varepsilon \cdot 2^{-1}. \end{aligned} \tag{I}$$

Пусть $F_1 = \bigcup_{x\in F} (x' = \sum_{i=0}^{n-1} (Ad\, v_1\theta)^i (x e_0))$. Тогда F_1 – фактор типа I_{n_1}, и $Ad\, v_1\theta(x') - x' = ((Ad\, v_1\theta)^n(x) - x)e_0$. Если R – унитарный оператор в $e_0 M_{\tilde\varphi} e_0 \cap K'$, для которого $Ad\, v_1^*(\theta)(x) = Ad\, R(x)$ ($x \in F$), то можно считать, что $[R, e_i] = [R, \bar u] = 0$ ($0 \le i < n$). Положим $u = \left[\left(\prod_{j=0}^{n-2} (Ad\, v_1\theta)^{n-2-j}(R)\right)^{-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (Ad\, v_1\theta)^{i-1}(R) e_i\right] \bar u$.

Тогда u коммутирует со всеми операторами из F_1 и $Ad\, u(e_i) = e_{i+1(mod\ n)}$ ($i = 0, 1, \ldots, n-1$). Далее, если $v_2 = (\prod_{j=0}^{n-1} (Ad\, v_1\theta)^{n-1-j} \times (R))^{-1} e_0 + 1 - e_0$, то $Ad\,(v_2 v_1)\,\theta(x) = x$ для всех $x \in F_1$ и

$Ad(v_1 v_1)\theta(e_i)=e_{i+1(\mathrm{mod}\,n)}$ $(i=0,1,\dots,n-1)$. Покажем, что $Ad(v_2 v_1)\theta(u)=u$.

Действительно,

$$Ad(v_2v_1)\theta(u)=v_2\Big[\Big(\prod_{j=0}^{n-2}(Ad v_1\theta)^{n-1-j}(R)\Big)^{-1}e_1+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-2}(Ad\, v_1\theta)^{i}(R)e_{i+1}+(Ad\, v_1\theta)^{n-1}(R)e_0\Big];$$

$$\Big[1-e_1+\prod_{j=0}^{n-1}(Ad\, v_1\theta)^{n-1-j}(R)e_1\Big]\bar u=$$

$$\Big\{Re_1+\Big[\prod_{j=0}^{n-2}(Ad\, v_1\theta)^{n-2-j}(R)\Big]^{-1}e_0+\sum_{i=2}^{n-1}(Ad\, v_1\theta)^{i-1}(R)e_i\Big\}\bar u=u.$$

Пусть F_2 – фактор типа I_n, порожденный u и e_i $(0\le i<n)$; P – конечный фактор типа I, образованный операторами из K, F_1 и F_2. Докажем, что алгебра $\bar P$, порожденная P $\mathfrak{X}(L^\infty(X))$, содержит операторы b_i, для которых $\|a_i-b_i\|_\varphi<\varepsilon$ $(0\le i<n)$. Для этого установим в первую очередь, что операторы $e_j(Ad\, v_1\theta)^j(b_m^j)$ $(j=0,1,\dots,n-1)$ принадлежат $\bar P$. Действительно,

$b_m^j=\sum_{s,g,p,t}e_{sg}f_{pt}q_{sgpt}^{jm}$, где q_{sgpt}^{jm} $(0\le j\le n-1,$ $1\le m\le q,$ $1\le p,$ $t\le nn_1,$ $1\le s,g\le 2^N r)$ – операторы из $\mathfrak{X}(L^\infty(X))$, коммутирующие с элементами из $\bar P$, а e_{sg} и f_{pt} – системы матричных единиц факторов K и L^* соответственно. Теперь из инвариантности фактора K относительно $Ad\, v_1\theta$ и того факта, что $(Ad\, v_2v_1\theta)^j(f_{pt})$ принадлежат алгебре порожденной F_1 и F_2, следует наше утверждение.

Далее, из неравенства $\|a_m-\theta^j(b_m^j)\|_\varphi<\varepsilon/n^2$ $(0\le j\le n,\ 1\le m\le q)$ и соотношений (1) получаем

$$\Big\|a_m-\sum_{j=0}^{n-1}e_j(Ad\, v_1\theta)^j(b_m^j)\Big\|_\varphi<\varepsilon n^{-1}+\Big\|a_m-\sum_{j=0}^{n-1}e_j\theta^j(b_m^j)\Big\|_\varphi\le 2\varepsilon n^{-1}.$$

Положим $v=v_2v_1$ и оценим $\|v-1\|_\varphi$. Учитывая (1), получаем $\|v_2v_1-I\|_\varphi=\|v_2v_1-v_2+v_2-1\|_\varphi<\varepsilon/2+\varepsilon\sqrt{n}$.

---

* L – фактор, порожденный F_1 и F_2.

Теперь очевидно, что $b_m=\sum_{j=0}^{n-1} e_j (Ad\ V,\theta)^j (b_m^j)V$, F_1 и F_2 удовлетворяют условиям леммы.

3. Основная цель – доказательство следующего утверждения.

Теорема 3.I. Пусть M такой же, как и в лемме 2.I; $\theta\in Aut\ M$; $p(\theta)=0$ и $\tilde\varphi_0\theta=\tilde\varphi$. Тогда существуют унитарный оператор $W\in M_{\tilde\varphi}$ и $\sigma\in Aut\ M$, для которых $Ad\ W\sigma\theta\sigma^{-1}(\mathcal{X}(x))\in\mathcal{X}(R_{01})$ для всех $x\in R_{01}$.

Доказательство. Пусть $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ – семейство ортогональных проекторов из $\mathcal{X}(R_{01})$, в сумме равных единице; $\varphi(E_i)=1$ для всех i; $h=(1-\lambda)\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i E_i$ $(\lambda<1)$ и $\tilde\varphi(\cdot)=\bar\varphi(h\cdot)$ – состояние на M. Так как $\theta(\mathcal{X}(N)=\mathcal{X}(N)$, то, умножая θ на внутренний автоморфизм, можем считать, что $\varphi_0\theta=\varphi$. Далее заметим, что алгебра R_λ, порожденная $\mathcal{X}(R_{01})$ и $\lambda_{\tilde Q_1}$, где $\lambda_{\tilde Q_1}$ – унитарный оператор в M, отвечающий $\tilde Q_1$, – фактор типа Ⅲ_λ и $\sigma_t^\varphi(R_\lambda)=R_\lambda$. Для доказательства теоремы достаточно построить автоморфизм σ и унитарный оператор $W\in M_\varphi$ со свойствами $\varphi_0\sigma=\varphi$; $Ad\ W\sigma\theta\sigma^{-1}(R_\lambda)=R_\lambda$.

Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ – счетное, плотное в сильной топологии в M множество операторов. Для доказательства теоремы мы построим семейство конечных факторов $K_i\in R_\lambda$ и $K_i(\theta)\in M$ типа I со следующими свойствами: а) $[x_i,x_j]=[x_i(\theta),x_j(\theta)]=0$ для $i\neq j$ и всех $x_i\in K_i$, $x_i(\theta)\in K_i(\theta)$; б) существуют унитарные операторы $S_k\in M_\varphi (k\in N)$ такие, что $Ad\ S_k(K_i)=K_i(\theta)$ $(i=1,2,\dots,k)$; $Ad\ S_n(x)=Ad\ S_{n+m}(x)$, когда x принадлежит алгебре порожденной $K_1,\dots,K_n$ $(m>0)$; в) в алгебрах $\bar K_i$ и $\bar K_i(\theta)$, порожденных K_l $(1\le l\le i)$ и $\mathcal{X}(L^\infty(X))$, $K_l(\theta)$ $(1\le l\le i)$ и $\mathcal{X}(L^\infty(x))$ соответственно, существуют операторы b_l $(1\le l\le i)$, для которых $\|b_l-a_l\|_\varphi<2^{-i}$ $(1\le l\le i)$ и $\|b_l\|\le\|a_l\|$; г) существуют унитарные операторы $V_k\in M_\varphi$ $(k=1,2,\dots)$ такие, что $\|V_k-1\|_\varphi<2^{-k}$ и для любого n

$Ad(V_n\dots V_1)\theta(K_i(\theta))=K_i(\theta)(0<i\le n)$, $[V_k,x]=0$ для всех x, принадлежащих алгебре, порожденной $K_1(\theta),\dots,K_{n-1}(\theta)$; д) $\sigma_t^\varphi(K_p)=K_p$, $\sigma_t^\varphi(K_p(\theta))=K_p(\theta)$, K_p и $K_p(\theta)$ содержат факторы F_p и $F_p(\theta)$ соответственно с системами матричных единиц e_{kl}^p $(k,l=1,2)$ и $e_{kl}^p(\theta)$ $(k,l=1,2)$ такими, что

$$\sigma_t^\varphi(e_{kl}^p)=\lambda^{it(k-l)}e_{kl}^p;$$

$$\sigma_t^{\varphi}(e_{kl}^{p}(\theta)) = \lambda^{it(k-l)} e_{kl}^{p}(\theta) \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Проведем доказательство теоремы в предположении, что объекты, удовлетворяющие условиям а) – д), построены.

В первую очередь заметим, что алгебра $R_\lambda(\theta)$, порожденная $\{K_i(\theta)\}_{i=1}^{\infty}$, – фактор типа III_λ и $R_\lambda(\theta)$ с $\mathcal{A}(L^\infty(X))$ порождают M (см. а), в), д)). Далее, учитывая г), легко вывести, что последовательность $v_n v_{n-1} \ldots v_1$ сильно сходится к некоторому унитарному оператору $v \in M_\varphi$ и $Ad\, v\theta(R_\lambda(\theta)) = R_\lambda(\theta)$ (см. б)).

Введем в $Aut\, M$ топологию τ, определяемую системой окрестностей $\mathcal{U}_{\psi\varepsilon} = \{\alpha \in Aut\, M : \|\psi_0\alpha - \psi\| < \varepsilon\}$, где ψ пробегает множество элементов преддвойственного пространства к M (M_*), и покажем, что относительно этой топологии $Ad\, S_k$ ($k \in \mathbb{N}$) сходятся к некоторому автоморфизму $\sigma \in \overline{Int}\, M$, где $\overline{Int}\, M$ – τ – замыкание группы внутренних автоморфизмов M. Для этого в первую очередь заметим, что $S_{n+m}^* S_n$ и $S_n^* S_{n+m}$ – центральные последовательности, т.е. $s - \lim\limits_{n\to\infty} [S_n^* S_{n+m}, x] = 0$ для всех $x \in M$;

$m \in \mathbb{N}$ и $s - \lim\limits_{n,m\to\infty} [(S_n^* S_{n+m}), x] = 0$ для всех $x \in M$.

Отсюда из принадлежности S_n к M_φ для всех $x \in M$ и того факта, что множество $(\varphi(x\cdot))$ ($x \in M$) плотно по норме в M_*, нетрудно вывести фундаментальность последовательности $Ad\, S_n$ в $Aut\, M$ и соотношения $\sigma = \tau - \lim\limits_{n\to\infty} Ad\, S_n \in Aut\, M$, $\sigma(R_\lambda) = R_\lambda(\theta)$.

Теперь очевидно, что $\sigma^{-1} Ad\, v\, \theta\sigma(R_\lambda) = R_\lambda$ и $\sigma^{-1} Ad\, v\,\theta\sigma(\mathcal{A}(f(x))) = \theta(\mathcal{A}(f(x)))$. Теорема 3.I доказана.

Приступим к построению объектов, удовлетворяющих свойствам а) – д).

Согласно лемме 2.2, в R_λ существует конечный подфактор P_1 типа I_{n_1} с матричными единицами e_{kl}^1 ($1 \le k, l \le n_1$) такой, что в алгебре, порожденной $\mathcal{A}(L^\infty(X))$ и P_1, существует оператор b_1, для которого $\|b_1 - a_1\|_\varphi < 2^{-1}$ и e_{kl}^1 – собственные элементы для модулярного оператора, отвечающего состоянию φ. Используя технику, развитую при доказательстве леммы 2.2, P_1 можем выбрать так, чтобы существовали унитарные операторы v_1 и u из M_φ и полная система ортогональных проекторов $\{e_i\}_{i=0}^{n-1} \in M_\varphi$ со следующими свойствами:

$$u^n = I, \quad Ad\, u\,(e_i) = e_{i+1\,(mod\, n)} = Ad\, v_1\theta(e_i);$$

$$\|v_1 - 1\|_\varphi < 2^{-1};$$

$$[\tilde{u}, x]^* = [e_i, x] = 0 \text{ для всех } x \in P_1, \quad 0 \le i \le n-1;$$

$$Ad\, v_1\theta(u) = u;$$

фактор $K_1(\theta)$, порожденный операторами вида $x(\theta) = \sum_{i=0}^{n-1}(Ad\,\tilde{v}_1\vartheta)^i$ (xe_0), $x \in P_1$, и $e_i (0 \le i < n)$ инвариантен относительно $Ad\,v_1\theta$ ($\tilde{v}_1$ обладает теми же свойствами, что и v_1, в доказательстве леммы 2.2) и содержит элемент $b_1(\theta)$, для которого $\|a_1 - b_1(\theta)\|_\varphi \le 2^{-1}$, $\|b_1(\theta)\| \le \|a_1\|$.

Пусть P_2 – фактор типа I_n из $(R_\lambda)_\varphi \cap P_1'$ и $\bar{S}_1$ – унитарный оператор из M_φ, удовлетворяющий соотношению $Ad\,\bar{S}_1(x(\theta)) = x$ $(x \in P_1)$. Тогда фактор $\bar{P}_2$, порожденный $Ad\,\bar{S}_1(u)$ и $Ad\,\bar{S}_1(e_i)$ $(i = 0, \dots, n-1)$, принадлежит $P_1' \cap M_\varphi$; существует унитарный оператор $w_1 \in P_1' \cap M_\varphi$, для которого $Ad\, w_1(\bar{P}_2) = P_2$.

Теперь очевидно, что алгебра K_1, порожденная P_1 и P_2, $S_1 = \bar{S}_1^* w_1^*$, $K_1(\theta)$, v_1, удовлетворяет а) – д).

Предположим, что $K_i(\theta)$, K_i, S_i, v_i со свойствами а) – д) построены для $i \le n$ и укажем конструкцию K_{n+1}, $K_{n+1}(\theta)$, S_{n+1}, v_{n+1}.

Пусть $\bar{K}_n$ и $\bar{K}_n(\theta)$ – конечные факторы типа I, порожденные $K_i (1 \le i \le n)$ и $K_i(\theta)$ $(1 \le i \le n)$ соответственно. Используя утверждение леммы 2.2, найдем в $R_\lambda \cap \bar{K}_n'$ конечный фактор P_1 типа I, матричные единицы которого являются собственными элементами для модулярного оператора Δ_φ, отвечающего состоянию φ, и алгебра, порожденная $\bar{K}_n$, P_1 и $\mathcal{X}(L^\infty(X))$, содержит операторы b_i и $\bar{b}_i$ со свойствами $\|b_i - a_i\|_\varphi < 2^{-n-1}$; $\|b_i\| \le \|a_i\|$; $(1 \le i \le n+1)$; $\|a_i - Ad\,S_n\bar{b}_i\|_\varphi < 2^{-n-1}$; $\|\bar{b}_i\| \le \|a_i\|$.

Так же, как и выше, мы можем выбрать P_1 так, чтобы в $K_n'(\theta) \cap M$ существовал конечный фактор F типа I, инвариантный относи-

---

* $\tilde{u}$ и u обладают теми же свойствами, что $\tilde{u}$ и u в лемме 2.2.

тельно $\theta_{n+1} = Ad\, v_{n+1} \dots v_1 \theta$, и алгебра, порожденная $\bar{K}_n(\theta)$, F_1 и $\mathcal{A}(L^\infty(X))$, содержит операторы b_i', для которых $\|a_i - b_i'\|_\varphi < 2^{-n-1}$ $(1 \le i \le n+1)$. Более того, можно считать, что матричные единицы F_1 – собственные элементы Δ_φ, $v_{n+1} \in M_\varphi \cap \bar{K}_n'(\theta)$;

$$\|v_{n+1} - 1\|_\varphi < 2^{-n-1}; \quad \|b_i'\| \le \|a_i\| \quad (1 \le i \le n+1);$$

$$Ad\, w_{n+1} S_n(P_1) \in F_1 \quad (w_{n+1} \text{ – унитарный оператор из } M_\varphi \cap \bar{K}_n'(\theta)),$$

$$F_2 = Ad\,(w_{n+1} S_n)(P_1') \cap F_1 \in M_\varphi \cap \bar{K}_n'(\theta)$$

и $\quad Ad\, v_{n+1}\theta_n(x) = x \quad (x \in Ad\, w_{n+1} S_n(P_1))$.

Теперь заметим, что $Ad\, S_n^* w_{n+1}^*(F_2) \in M_\varphi \cap P_1' \cap \bar{K}_n'$ и в $R_{2\varphi} \cap P_1' \cap \bar{K}_n'$ существует фактор P_2 такой, что $Ad\, \bar{S}_{n+1}^* S_n^* w_{n+1}^* \times (F_2) = P_2$ для некоторого унитарного оператора $\bar{S}_{n+1} \in M_\varphi \cap P_1' \cap \bar{K}_n'$. Положим $S_{n+1} = w_n S_n \bar{S}_{n+1}$ и пусть $K_{n+1}(\theta) = F_1$, K_{n+1} совпадает с фактором, порожденным элементами из P_1 и P_2. Так как $Ad\, S_{n+1}(x) = Ad\, S_n(x)(x \in \bar{K}_n)$, то очевидно, что $K_{n+1}(\theta), K_{n+1}, S_{n+1}, v_{n+1}$ удовлетворяют условиям а) – д). Теорема доказана.

4. Опишем полную систему инвариантов внешнего сопряжения для автоморфизмов θ факторов класса $\mathcal{O}\!\mathcal{L}_\lambda$ с нулевым асимптотическим периодом $(\rho(\theta))$ (см. [3]).

Теорема 4.I. Пусть M, N, $\tilde{\varphi}$ и Q такие же, как и в п.2; Q_1 выбран согласно условиям леммы 2,I; θ_1 и $\theta_2 \in Aut\, M$, $\rho(\theta_i) = 0$, $\varphi_0 \theta_i = \alpha_i$ $(i = 1, 2)$. Для того, чтобы θ_1 и θ_2 были внешне сопряжены $(\theta_1 = Ad\, v\sigma\theta_2\sigma^{-1}$ $(\sigma \in Aut\, M$, v – унитарный оператор из M), необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_1 = \alpha_2 (mod\, \lambda)$ и существовал автоморфизм $\sigma_z \in Aut\, Z(M_{\tilde{\varphi}})$ со свойствами $\theta_{1z} = \sigma_z \theta_{2z} \sigma_z^{-1}$, где θ_{iz} – сужение автоморфизма $\theta_i (i = 1, 2)$ на $Z(M_{\tilde{\varphi}})$ и $\sigma_z Q_1 = Q_1 \sigma_z$.

Для доказательства теоремы следует заметить, что M изоморфен $M \otimes R_{01} \otimes R_{01}$; $Ad\, v_i \theta_i = \alpha_i^{-1} \theta_i \otimes \theta_\lambda \otimes \theta_\lambda^{-1} \alpha_i$, где v_i $(i = 1, 2)$ – унитарные операторы из M_φ; α_i $(i = 1, 2)$ – изоморфизмы M на $M \otimes R_{01} \otimes R_{01}$; автоморфизмы ρ_1 и $\rho_2 \in Aut\, R_{01}$, удовлетворяющие соотношениям $\rho(\rho_i) = 0$, $tr\,\rho_1 = tr\,\rho_2$ $(i = 1, 2)$, внешне сопряжены, и воспользоваться утверждением теоремы 3.I.

Предложение. Если $\theta \in Aut\, M$, то существует унитарный оператор v из M такой, что $\varphi\, Ad\, v\theta = \alpha\varphi$ $(0 < \alpha \le 1)$.

Следовательно, в силу 4.I и предложения структура множества классов внешне сопряженных автоморфизмов факторов из $\mathcal{O}\!\mathcal{L}_\lambda$

с нулевым асимптотическим периодом полностью определяется структурой группы автоморфизмов $L^{\infty}(X, \mathcal{X}, \mu)$, коммутирующих с Q_1.

1. Connes A. On hyperfinite factors of type III, and Kriegers factors. - J. Funct. Anal., 1974, 16, p. 318-327.
2. Krieger W. On Ergodic flows and the isomorphism of factors. - Math.Ann., 1976, 223, p. 19-70.
3. Голодец В.Я. Модулярные операторы и асимптотическая коммутативность в алгебрах фон Неймана. - Успехи мат. наук, 1978, 23, № I, с.43-94.
4. Takesaki M. Duality for crossed products. - Acta Math., 1973, 131, p. 249-310.

УДК 517.946

В.Р.Смилянский

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОЖИТЕЛЕЙ СТОКСА.II

Настоящая работа является непосредственным продолжением одноименной статьи автора [6]; в ней представлены доказательства ранее изложенных результатов.

Доказательство теоремы I.I. Пусть ρ_0 и нумерация столбцов (λ_j) фиксированы. Рассмотрим стандарты сектора (с.с.) $S: l_1 \leq \arg z < l_1 + \pi/r+1$, что не нарушает общности. Будем доказывать от противного. Пусть существуют две различные фундаментальные матрицы (ф.м.) $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, асимптотически базисных в S, т.е.

$$\psi(z) \sim \varphi(z) \sim \hat{\varphi}(z) \qquad |z| \to \infty \qquad z \in S. \tag{I}$$

Тогда $\psi(z) = \varphi(z) C$, где C - постоянная неособая матрица. Пусть нумерация столбцов (λ_j) выбрана так, что в секторе $l_1 < \arg z < l_2$ $Re\, \lambda_\alpha z^{r+1} < Re\, \lambda_\beta z^{r+1}$, если $\alpha < \beta$. (2)

Тогда для того чтобы в этом секторе выполнялось (I), матрица C должна быть верхней треугольной с единичными элементами на главной диагонали. Следовательно, i-й столбец $\psi_i(z)$ следующим образом выражается через столбцы $\varphi_\nu(z)$:

$$\psi_i(z) = \sum_{\xi=1}^{i} c_{\xi i}\, \varphi_\xi(z), \quad c_{ii} = 1. \tag{3}$$

Пусть на какой-либо линии l_ν: $Re\, \lambda_{\alpha+1} z^{r+1} = Re\, \lambda_{\alpha+2} z^{r+1} = \dots$ $\dots = Re\, \lambda_{\alpha+K_\nu} z^{r+1}$. Тогда для выполнения (I) на этой линии нужно потребовать

$$c_{\alpha+\xi,\,\alpha+g}=0;\ 2\le g\le k_\nu;\quad \xi=1,2,\dots,g-1. \tag{4}$$

Всего, согласно (4), должно быть равно нулю $\frac{1}{2}k_\nu(k_\nu-1)$ элементов матрицы C, расположенных над главной диагональю. Рассматривая все линии l_ν внутри S, приходим к требованию равенства нулю $\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{k} k_\nu(k_\nu-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$ элементов над главной диагональю. Это означает, что матрица C должна быть единичной. Теорема доказана.

Заметим, что в качестве доказательства теоремы I.I можно также дословно повторить то рассуждение, которое проведено для доказательства независимости матрицы $\varphi_L(x)$ от выбора $\varphi_1(x)$ в теореме I.I. Там фактически был доказан более общий результат, а не только сформулирован.

Доказательство следствия I. При доказательстве теоремы I.I матрица $\varphi_1(x)$ принималась асимптотически базисной только в s_1, Умножение $\varphi_1(x)$ на B_1 преобразует только те столбцы $\varphi_1(x)$, асимптотическое представление которых меняется при переходе l_2 (см. доказательство теоремы I. I.I.). Прочие столбцы (асимптотическое представление которых не меняется при переходе l_2) у матриц $\varphi_1(x)$ и $\varphi_1(x)B_1$ совпадают.

Аналогичная процедура производится при переходе $l_3, l_4 \dots, l_L$. И поскольку в с.с. $l_1 \le \arg x < l_{L+1}$ любая пара выражений $Re\,\lambda_\alpha x^{r+1}, Re\,\lambda_\beta x^{r+1} (\alpha\ne\beta)$ становится равной только на одной линии l_ν, то очевидно, что построенная таким способом $\varphi_3(x)=\varphi_2(x)B_2=\varphi_1(x)B_1B_2$ асимптотически базисна в $s_1+s_2+s_3$, $\varphi_4(x)=\varphi_3(x)B_3=\varphi_1(x)B_1B_2B_3$, асимптотически базисна в $s_1+s_2+s_3+s_4$ и, наконец, $\varphi_L(x)=\varphi_1(x)B_1\dots B_{L-1}$ асимптотически базисна в с.с. $l_1\le\arg x<l_{L+1}$.

Доказательство следствия 3, а). $\varphi_1(x)$, по условию, задана, а $\varPhi(x)$, по теореме I.I, единственна и может быть построена из $\varphi_1(x)$ последовательным применением теоремы I. I.I, отсюда следует $V_\omega=\Gamma_\omega$; б) матрицы $\Psi(x)$ и $\varPhi(x)$, по теореме I.I, единственны и могут быть получены одна из другой последовательным применением теоремы I. I.I, отсюда следует (I.I); в) поскольку $\varphi_L(x)$ в обоих случаях одна и та же, и, по теореме I.I, единственна, то отсюда следует (I.2.I). Тогда из очевидного соотношения $Y'=G^{-1}YG$ следует (I.2.2).

Доказательство теоремы I.2, б). Для рассматриваемых систем (см. [1], § 2)

$$\hat{\Phi}(ze^{i\chi\sigma\alpha_0}) = \hat{\Phi}(z)e^{i\chi\alpha_0 R}, \quad \chi = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Согласно следствиям I,2 теоремы I.I, матрица $\Phi_\omega(z)(l \leq \omega \leq \varepsilon)$ асимптотически базисна в с.с. $l_{\omega+1-l} \leq \arg z < l_{\omega+1}$, т.е. $\Phi_\omega(z) \underset{|z|\to\infty}{\sim} \hat{\Phi}(z)$ в этом секторе. Тогда матрица

$$\Phi_\omega(z)e^{i\chi\sigma\alpha_0 R} \underset{|z|\to\infty}{\sim} \hat{\Phi}(z)e^{i\chi\sigma\alpha_0 R} \equiv \hat{\Phi}(ze^{i\chi\sigma\alpha_0}), \tag{6}$$

т.е., согласно (5), является асимптотически базисной в с.с. $l_{\varepsilon\chi+\omega+1-l} \leq \arg z < l_{\varepsilon\chi+\omega+1}$. Отсюда по следствию 3 теоремы I.I следуют (I.3), (I.4). Полагая в (I.4) $\omega = l;\ \chi = 1$, получаем (I.5). По общему определению

$$\Gamma_{\varepsilon\chi+\omega+1} = D_{\varepsilon\chi+\omega}\Gamma_{\varepsilon\chi+\omega}. \tag{7}$$

С другой стороны, согласно (I.4),

$$\Gamma_{\varepsilon\chi+\omega+1} = e^{-i\chi\sigma\alpha_0 R}\Gamma_{\omega+1}Y^{\chi} = e^{-i\chi\sigma\alpha_0 R}D_\omega e^{i\chi\sigma\alpha_0 R}\Gamma_{\varepsilon\chi+\omega}. \tag{8}$$

Сравнивая правые части (7) и (8), получаем (I.6).

Доказательство п.б). В [2] $\Gamma_{\varepsilon+1} = Y_1 e^{-i\sigma\alpha_0 R}$ (где $\Phi_{\varepsilon+1}(ze^{i\sigma\alpha_0}) = \Phi_{\varepsilon+1}(z)Y_1;\ \Phi_1(z) \equiv z_1'(z)$.

Согласно примечанию (см. [2], с.I2I0), $Y = e^{i\sigma\alpha_0 R}Y_1 e^{-i\sigma\alpha_0 R}$.

Представляя первое выражение во второе, получаем $Y = e^{i\sigma\alpha_0 R}\Gamma_{\varepsilon+1}$.

Матрица $\Phi_{\varepsilon+1}(ze^{i\sigma\alpha_0})$ по построению асиптотически базисна в с.с. $l_{\varepsilon+2} - \pi/r+1 \leq \arg z + \sigma\alpha_0 < l_{(\varepsilon+2)}$, т.е. здесь $\arg z$ соответственно меняется в с.с. $l_2 - \pi/r+1 \leq \arg z < l_2$. С другой стороны, согласно (П.I.8.) и (5) $Z_1'(z) = \Phi_{\varepsilon+1}(ze^{i\sigma\alpha_0})e^{-i\sigma\alpha_0 R} \sim \hat{\Phi}(ze^{i\sigma\alpha_0})e^{-i\sigma\alpha_0 R} \equiv \hat{\Phi}(z)$, т.е. $Z_1(z)$ асимптотически базисна в с.с. $l_2 - \pi/r+1 \leq \arg z < l_2$. Но тогда $\Phi_\omega(z)$ (а значит, $\Psi_{\varepsilon\chi+\omega}(ze^{i\chi\sigma\alpha_0})$) асимптотически базисна в соответствующем с.с. для $1 \leq \omega \leq \varepsilon$, так как получена из $Z_1'(z)$ последовательным применением теоремы I.I.I. Следовательно, и (I.3), (I.4) справедливы для $1 \leq \omega \leq \varepsilon$.

Справедливость (I.6) для $1 \leq \omega \leq \varepsilon - 1$ доказывается так же, как и в п. а). Докажем для $\omega = \varepsilon$. По определению,

$$\Gamma_{\varepsilon(\chi+1)+1} = D_{\varepsilon\chi+\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\chi+\varepsilon} = D_{\varepsilon\chi+\varepsilon}\, e^{-i\chi\sigma\alpha_0 R}\,\Gamma_\varepsilon\, \gamma^{\chi}. \qquad (9)$$

С другой стороны,

$$\Gamma_{\varepsilon(\chi+1)+1} = e^{-i(\chi+1)\sigma\alpha_0 R}\,\gamma^{(\chi+1)}. \qquad (10)$$

Приравнивая правые части (9) и (10), имеем

$$D_{\varepsilon\chi+\varepsilon}\, e^{-i\chi\sigma\alpha_0 R}\,\Gamma_\varepsilon = e^{-i(\chi+1)\sigma\alpha_0 R}\,\gamma. \qquad (11)$$

Подставляя $\gamma = e^{i\sigma\alpha_0 R}\Gamma_{\varepsilon+1}$ в (11), окончательно получаем

$$D_{\varepsilon\chi+\varepsilon} = e^{-i\chi\sigma\alpha_0 R}\, D_\varepsilon\, e^{i\chi\sigma\alpha_0 R}. \qquad (12)$$

<u>Доказательство теоремы 1.3.</u> Предварительно приведем несколько легко проверяемых соотношений. Пусть U, V – произвольные матрицы; E – единичная матрица и $F = UV$. Тогда

$$\begin{aligned} &1)\ UK = \overset{\perp}{U}\vec{V}; \quad 2)\ \overset{\perp}{F} = U\overset{\perp}{V}; \quad 3)\ \vec{F} = \vec{U}V; \\ &4)\ U\vec{E} = \overset{\perp}{U}; \quad 5)\ \overset{\perp}{E}U = \vec{U}; \quad 6)\ \overset{\perp}{E} = \vec{E}. \end{aligned} \qquad (13)$$

С учетом того, что в данном случае $r_j = r_{n-j+1}$ (см.1.3.10):

$$\begin{aligned} &1)\ \overset{\perp}{e}{}^{\pm i\chi\varphi R} = \vec{e}^{\,\pm i\chi\varphi R}; \quad 2)\ \left[\overset{\perp}{e}{}^{\pm i\chi\varphi R}\right]^{-1} = \overset{\perp}{e}{}^{\mp i\chi\varphi R}; \\ &3)\ \left[\overset{\perp}{e}{}^{i\varphi R}\right]^{-\chi} = \left[\overset{\perp}{e}{}^{-i\varphi R}\right]^{\chi}; \\ &4)\ \left[\overset{\perp}{e}{}^{\pm i\varphi R}\right]^{\chi} = \begin{cases} \overset{\perp}{e}{}^{\pm i\chi\varphi R} & (\text{для } \chi = 1, 3, \ldots); \\ e^{\pm i\chi\varphi R} & (\text{для } \chi = 0, 2, 4, \ldots). \end{cases} \end{aligned} \qquad (14)$$

Докажем (14,2). Пусть U, V – диагональные неособые матрицы. Пусть U – задана, а элементы V определены из условия $UV = VU = E$. Тогда на основании (13,1) $UV = \overset{\perp}{U}\vec{V} \equiv \overset{\perp}{V}\vec{U} = E$. Полагая $U = e^{\pm i\chi\varphi R}$ и учитывая (14,1), находим $\overset{\perp}{V} = \vec{V} = \overset{\perp}{e}{}^{\mp i\chi\varphi R}$. Формула (14,3) доказывается из определения целой степени как произведения оснований и с использованием (14,2). Формула (14,4) легко проверяется для $\chi = 2,3$ (удобно с использованием (I3)). Общий случай доказывается простой индукцией.

Доказательство п.а). Согласно (I.3) и с учетом $r_j = r_{n-j+1}$),

$$\hat{\Phi}(xe^{i\chi\varphi}) = \begin{cases} \overset{1}{\hat{\Phi}}(x)e^{i\chi\varphi R} = \hat{\Phi}(x)\overset{1}{e}{}^{i\chi\varphi R} & \chi = 1,3,\dots \\ \hat{\Phi}(x)e^{i\chi\varphi R} & \chi = 0,2,4,\dots \end{cases} = \hat{\Phi}(x)\left[\overset{1}{e}{}^{i\varphi R}\right]^{\chi}. \tag{I5}$$

Согласно (I.2) $(\sigma\alpha_0 = \varphi;\ \varepsilon = L)$,

$$\overset{1}{\psi}_{L\chi+L}(xe^{i\chi\varphi}) = \overbrace{\left[\varphi_L(x)e^{i\chi\varphi R}\right]}^{1} = \varphi_L(x)\overset{1}{e}{}^{i\chi\varphi R} \qquad \chi = 1,3,\dots$$

$$\psi_{L\chi+L}(xe^{i\chi\varphi}) = \varphi_L(x)e^{i\chi\varphi R} \qquad \chi = 0,2,4,\dots \tag{I6}$$

Матрица $\varphi_L(x)$ по построению асимптотически базисна в с.с. $l_1 \le \arg x < l_{L+1}$. Поэтому из сравнения (I5) и (I6), а также из следствия 3 теоремы I.I следует (I.I7) (см. доказательство теоремы I.2). Полагая в (I.7) $\chi = 1$, последовательно имеем

$$\Gamma_{2L} = \overbrace{\left[e^{-i\varphi R}\vec{\Gamma}_L Y\right]}^{\to 1}; \qquad \vec{\Gamma}_{2L} = e^{-i\varphi R}\Gamma_L Y, \tag{I7}$$

что и дает (I.8).

Доказательство п.б). Согласно (I.2) $(\sigma\alpha_0 = \varphi;\ \varepsilon = L)$, $(1 \le \omega \le L)$,

$$\overset{1}{\psi}_{L\chi+\omega}(xe^{i\chi\varphi}) = \overbrace{\left[\varphi_\omega(x)e^{i\chi\varphi R}\right]}^{1} = \dot{\varphi}_\omega(x)\overset{1}{e}{}^{i\chi\alpha R} \qquad \chi = 1,3,\dots$$

$$\psi_{L\chi+\omega}(xe^{i\chi\varphi}) = \varphi_\omega(x)e^{i\chi\varphi R} \qquad \chi = 0,2,4,\dots \tag{I8}$$

Так как по условию матрица $\varphi_1(x)$ асимптотически базисна в с.с. $l_2 - \varphi \le \arg x < l_2$, то построенная из нее последовательным применением теоремы (I.I) матрица $\varphi_\omega(x)$ асимптотически базисна в с.с. $l_{\omega+1} - \varphi \le \arg x < l_{\omega+1}$ (согласно следствиям I,2 теоремы I.I.). Поэтому из сравнения (I5) и (I8), а также из следствия 3 теоремы I.I следует (I.9) (см. доказательство теоремы I.2).

Полагая в (I.9) $\chi = 1;\ \omega = 1$ и пользуясь (I8), получаем (I.10).

Для получения (I.10), опять полагая $\chi = 1;\ \underset{\to}{\omega} = 1$ в (I.9) и пользуясь (I.2) $(\sigma\alpha_0 = \varphi;\ \varepsilon = L)$, имеем $\Gamma_{L+1} = \overbrace{[e^{-i\varphi R}Y]}$, откуда и следует (I.10).

Выражения (I.9) (используя (I.2), где $\sigma\alpha_0 = \varphi$; $\varepsilon = L$) могут быть записаны в виде ($1 \le \omega \le L$; $\chi = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\varphi_{L\chi+\omega}(xe^{i\chi\varphi}) = \varphi_\omega(x)\left[\overset{\perp}{e}{}^{i\varphi R}\right]^\chi; \quad \Gamma_{L\chi+\omega} = \left[\overset{\perp}{e}{}^{-i\varphi R}\right]^\chi \Gamma_\omega \Upsilon^\chi. \tag{19}$$

По определению, имеем (7) ($\varepsilon = L$). С другой стороны, согласно (19) и (14,3),

$$\Gamma_{L\chi+\omega+1} = \left[\overset{\perp}{e}{}^{-i\varphi R}\right]^\chi D_\omega \left[\overset{\perp}{e}{}^{i\varphi R}\right]^\chi \Gamma_{L\chi+\omega}. \tag{20}$$

Сравнивая правые части (7) и (20), получаем (I.II) для $1 \le \omega \le L-1$. Докажем (I.II) для $\omega = L$. По определению и далее, согласно (19),

$$\Gamma_{L(\chi+1)+1} = D_{L\chi+L}\Gamma_{L\chi+L} = D_{L\chi+L}\left[\overset{\perp}{e}{}^{-i\varphi R}\right]^\chi \Gamma_L \Upsilon^\chi. \tag{21}$$

С другой стороны, по (19)

$$\Gamma_{L(\chi+1)+1} = \left[\overset{\perp}{e}{}^{-i\varphi R}\right]^{(\chi+1)} \Upsilon^{(\chi+1)} \tag{22}$$

Приравнивая правые части (21) и (22), имеем

$$D_{L\chi+L}\left[\overset{\perp}{e}{}^{-i\varphi R}\right]^\chi \Gamma_L = \left[\overset{\perp}{e}{}^{-i\varphi R}\right]^{(\chi+1)} \Upsilon. \tag{23}$$

Подставляя (I.I0) в (23) и используя (14,3), получаем (I.II) для $\omega = L$.

Доказательство теоремы I.4. Для уравнения (I.12) $L=1$; $\omega = 1$ и, согласно (I.3), $r_1 = r_2 = r_3$ (т.е. $R = diag\{r_0, r_0\}$). Подставляя это и (I.14) в (I.II) и используя (14,4), получаем (I.14).

Доказательство теоремы I.5. Поскольку формальное решение $\hat{\varphi}(x)$ удовлетворяет уравнению (I.I), то оно должно удовлетворять и свойству (I.16), т.е.

$$\hat{\varphi}^t(xe^{i\sigma\varphi})\,\hat{\varphi}(x) = H \tag{24}$$

или

$$e^{Q(ze^{i\sigma\varphi})+i\sigma\varphi R}z^R P^t(ze^{i\sigma\varphi})P(z)z^R e^{Q(z)}=H. \tag{25}$$

Справа в (25) стоит постоянная матрица H. Слева – произведение матриц, каждая из которых зависит от z. Перемножая формальные ряды $P^t(ze^{i\sigma\varphi})$ и $P(z)$, также получаем формальный ряд по обратным степеням z. Так как (25) должно выполняться при любом z, то очевидно, что коэффициент при каждой степени $z^{-\nu}$ этого ряда должен тождественно равняться нулю. Учитывая это, а также то, что $P_0=E$, имеем

$$H=e^{Q(ze^{i\sigma\varphi})+Q(z)+i\sigma\varphi R}z^{2R}. \tag{26}$$

Для того чтобы правая часть в (26) не зависела от z, должны быть выполнены (I.19; 1), 2)). Тогда $H=E$ (для формального решения $\hat{\Phi}(z)$!). Отсюда следует (I.19, 3)) для $\varkappa=1$, а значит, с помощью простой индукции и для любых $\varkappa$.

Согласно (I.20),

$$\varphi_1(ze^{i\sigma\alpha_0})=\left[\varphi_1^t(ze^{i\sigma\varphi})\right]^{-1}H^t. \tag{27}$$

Подставляя в (27) $\left[\varphi_1^t(ze^{i\sigma\varphi})\right]^{-1}$ из (I.20), получаем (I.21).

<u>Доказательство п.</u> а). Для нечетных $\varkappa$, согласно (I.20), последовательно имеем $\varphi_1(ze^{i\varkappa\sigma\varphi})=\varphi_1(ze^{i\sigma\varphi})\Upsilon^{\frac{1}{2}(\varkappa-1)}=$ $=\left[\varphi_1^t(z)\right]^{-1}H^t\Upsilon^{\frac{1}{2}(\varkappa-1)}=\left[\{\varphi_\omega(z)\Gamma_\omega\}^t\right]^{-1}\Upsilon^{\frac{1}{2}(\varkappa-1)}$, откуда следует (I.22). Для четных $\varkappa$ соответственно $\varphi_1(ze^{i\varkappa\sigma\varphi})=\varphi_1(z)\Upsilon^{\frac{\varkappa}{2}}=\varphi_\omega(z)\Gamma_\omega\Upsilon^{\frac{\varkappa}{2}}$, что совпадает с (I.22). Асимптотическая базисность $\psi_{\frac{\varepsilon}{2}\varkappa+\omega}(ze^{i\varkappa\sigma\varphi})$ в секторе $s_{\frac{\varepsilon}{2}\varkappa+\omega}$ следует из (I.19).

Матрица $\varphi_\omega(z)$ для $\omega\geqslant L$ асимптотически базисна в с.с. $l_{\omega+1-L}\leqslant\arg z<l_{\omega+1}$ и, следовательно, согласно (I.19), для четных $\varkappa$ асимптотически базисна в с.с. $l_{\frac{\varepsilon}{2}\varkappa+\omega+1-L}\leqslant\arg z+$ $+\varkappa\sigma\varphi<l_{\frac{\varepsilon}{2}\varkappa+\omega+1}$. Для нечетных $\varkappa$ в указанном секторе асимптотически базисна матрица $[\varphi_\omega^t(z)]^{-1}$. Отсюда, по следствию 3 теоремы I.I., следует (I.24), (I.25). Полагая в (I.22), (I.25) $\varkappa=1$; $\omega=1$, получаем (I.23).

По общему определению, $\Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}+\omega+1} = D_{\frac{\varepsilon}{2}+\omega}\,\Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}+\omega}$. С другой стороны, согласно (I.25), (I.22); $\Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}+\omega+1} = \left[\Gamma^t_{\omega+1}\right]^{-1} H^t = \left[D^t_\omega\right]^{-1}\left[\Gamma^t_\omega\right]^{-1} H^t = \left[D^t_\omega\right]^{-1}\Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}+\omega}$. Сравнивая правые части этих выражений, получаем (I.26). Полагая в (I.6) $\beta = 0$, получаем (I.27).

<u>Доказательство п.б)</u>. Так как $\Phi_1(z)$, по условию, асимптотически базисна в с.с. $l_2 - \varphi \le \arg z < l_2$, то $\Phi_\omega(z)$ асимптотически базисна в с.с. $l_{\omega+1} - \varphi \le \arg z < l_{\omega+1}$ при $1 \le \omega \le \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, повторяя рассуждения п.а, соотношения (I.24), (I.25) справедливы для $1 \le \omega \le \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому, полагая в (I.24), (I.22) $\chi = 1;\ \omega = 1$, получаем (I.28).

Справедливость (I.26) для $1 \le \omega \le \frac{\varepsilon}{2} - 1$ доказывается так же, как и в п.а). Докажем для $\omega = \frac{\varepsilon}{2}$. По определению, и далее с учетом (I.22): $\Gamma_{\varepsilon+1} = D_\varepsilon \Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} = D_\varepsilon \left[\Gamma^t_{\frac{\varepsilon}{2}}\right]^{-1} H^t$. С другой стороны, по (I.22) и далее с учетом (I.21): $\Gamma_{2\frac{\varepsilon}{2}+1} = Y = H^{-1} H^t$. Приравнивая оба выражения и затем используя (I.28), имеем $D_\varepsilon \left[\Gamma^t_{\frac{\varepsilon}{2}}\right]^{-1} = H^{-1} = \left[\Gamma^t_{\frac{\varepsilon}{2}+1}\right]^{-1} = \left[D^t_{\frac{\varepsilon}{2}}\right]^{-1}\left[\Gamma^t_{\frac{\varepsilon}{2}}\right]^{-1}$. Отсюда следует $D_\varepsilon = \left[D^t_{\frac{\varepsilon}{2}}\right]^{-1}$. Справедливость (I.27) для $1 \le \omega \le \varepsilon$ следует из теоремы I.2; п.б.

<u>Доказательство теоремы I.7.</u> Указанная нумерация столбцов $\Phi_1(z)$ выбрана при доказательстве теоремы I.I и именно поэтому матрица B_1 там получилась верхней треугольной матрицей (с единичными элементами на главной диагонали). Так как в с.с. $l_1 < \arg z \le l_{L+1}$ любые два выражения $Re\,\lambda_\alpha z^{r+1}, Re\,\lambda_\beta z^{r+1}\ (\alpha \ne \beta)$ становятся равными только один раз (на одной линии l_ν), то указанным свойством обладают матрицы $B_1, B_2, \dots, B_L$ (а значит, и их произведение), а также (следовательно $D_1, D_2, \dots, D_L$ и их произведение.

Очевидно, что если $Re\,\lambda_\alpha z^{r+1} < Re\,\lambda_\beta z^{r+1}$ в $l_1 < \arg z < l_2$, то в $l_{1+L} < \arg z < l_{2+L}$ выполняется обратное неравенство. Следовательно, матрицы $B_{L+1}, B_{L+2}, \dots, B_{2L}$ есть нижние треугольные матрицы (с единичными элементами на главной диагонали). Общий случай доказывается простой индукцией. Формула (I.33) является прямым следствием указанных свойств.

<u>Доказательство теоремы I.8.</u> Очевидно, что достаточно доказать справедливость теоремы для какой-либо одной ф.м. Выберем для доказательства исключительную матрицу $\Phi_1(z)$. Пусть нуме-

рация столбцов $\Phi_1(z)$ выбрана такой же, как в теореме I.7. Если $Y^N = E$, то, согласно $Y = e^{i\theta\alpha_0 R}\Gamma_{\ell+1}$, $\Gamma_{2L+1} = F_2 F_1 = e^{-i\alpha_0 R}$

Разлагая матрицу $e^{-i\alpha_0 R}$ в произведение треугольных матриц по известным формулам [5], последовательно получаем $e^{-i\alpha_0 r_1} = 1$, $e^{-\alpha_0 r_2} = 1, \ldots, e^{-i\alpha_0 r_n} = 1$, откуда имеем (I.36) [5].

Следовательно, $F_2 F_1 = E$ и $F_2 = F_1^{-1}$. Но F_1^{-1} – верхняя треугольная матрица с единичными элементами на главной диагонали (так как таковой по условию является F_1), а F_2 (тоже по условию) – нижняя треугольная матрица с единичными элементами на главной диагонали. Следовательно, $F_1 = F_2 = E$ и, далее, по (I.34); $F_\nu = E$ $(\nu = 3, 4, \ldots)$. Согласно (I.33), $\Gamma_{\nu L+E} = E$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Но тогда по (I.6) $\Phi_{\nu L+1}(z) = \Phi_1(z)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

Последнее означает, что $\Phi_1(z)$ асимптотически базисна не только в с.с. $l_2 - \varphi \leq \arg z < l_2$, но и в с.с. $l_{2+(\nu-1)L} \leq \arg z < l_{2+\nu L}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, т.е. во всей кольцевой окрестности $z = \infty$. Но это означает, что (I.35) выполняется для всех значений $\arg z$. Условие $Y^\nu = E$ означает однозначность $\Phi_1(z)$ во всей окрестности $z = \infty$, а значит, и однозначность $\Pi(z)$, так как $\Pi(z) = \Phi_1(z)e^{-Q(z)}z^{-R}$ и выполнено условие (I.36). Следовательно, теорема справедлива.

Доказательство теоремы I.9. Пусть $\bar{\Phi}_1(z) = \Phi_1(z)$ – не исключительная матрица. По (I.6) $\Phi_1(z) = \bar{\Phi}_\nu(z)\bar{\Gamma}_\nu = \Phi_{(N+1+L-\nu)}(z)\Gamma_{(N+H L-\nu)}$.

Пусть $\nu \geq L$ и $N+1+L-\nu \geq L$. Тогда для $\nu = L, L+1, \ldots, N+1$ обе фундаментальные матрицы не зависят от выбора $\Phi_1(z)$ и асимптотически базисны в соответствующих с.с., сдвинутых относительно друг друга на 2π. Следовательно,

$$\bar{\Phi}_\nu(z) = \Phi_{(N+1+L-\nu)}(ze^{i2\pi})e^{-i2\pi R}; \quad \nu = L, L+1, \ldots, N+1. \tag{28}$$

Перепишем (28) в виде

$$\bar{\Phi}_{(\nu+1)}(z) = \Phi_{[N+1+L-(\nu+1)]}(ze^{i2\pi})e^{-i2\pi R}; \; \nu = L-1, L, \ldots, N. \tag{29}$$

Далее, последовательно преобразуя левую и правую части (29), имеем

$$\bar{\Phi}_\nu(z)\bar{B}_\nu = \Phi_{(N+1+L-\nu)}(ze^{i2\pi})B^{-1}_{[N+1+L-(\nu+1)]}e^{-i2\pi R} =$$

$$= \Phi_{(N+1+L-\nu)}(ze^{i2\pi})e^{-i2\pi R}e^{i2\pi R}B^{-1}_{[N+1+L-(\nu+1)]}e^{-i2\pi R} \quad \nu = L, L+1, \ldots, N. \tag{30}$$

Сокращая в (30) общий множитель с учетом (28), получаем

$$\bar{B}_\nu = e^{i2\pi R}D_{(N+L-\nu)}e^{-i2\pi R} \; (\nu = L, L+1, \ldots, N),$$

а значит, и (I.37).

В случае а) выражение (I.38) следует из того, что $\Phi_1(z)$, по условию, асимптотически базисна в с.с. $\bar{l}_{L+1} < \arg z < l_2$.

Рассмотрим случай б). Так как по условию $\Phi_1(z)$ асимптотически базисна в с.с. $\bar{l}_{L+1} < \arg z < l_2$, а $\bar{\Phi}_1(z)$ – в стандартном секторе $\bar{l}_2 < \arg z < l_{L+1}$, то из этого непосредственно следует

$$\bar{\Phi}_\nu(z) = \Phi_{(L+1-\nu)}(z) \qquad \nu = 1, 2, \ldots, L \tag{31}$$

или

$$\Phi_{\nu+1}(z) = \Phi_{[L+1-(\nu+1)]}(z) \quad (0 \le \nu \le L-1)$$

или

$$\bar{\Phi}_\nu(z)\bar{B}_\nu = \Phi_{(L+1-\nu)}(z)B^{-1}_{[L+1-(\nu+1)]}; \; \nu = 1, 2, \ldots, L-1. \tag{32}$$

Из (32) с помощью (31) получаем $\bar{B}_\nu = D_{(L-\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, (L-1))$, а значит, и (I.39)

Замечание I. В формуле (3.14) [1] в выражении для $f_{\omega h}$ пропущен сомножитель $\lambda^{m-(\omega-\xi)}$. Его наличие подразумевается в следующем за формулой тексте. Точное выражение для $f_{\omega h}$:

$$f_{\omega h} = \sum_{m=0}^{n}\sum_{\xi=\xi_{min}}^{\omega} a_{m\xi}C_m^{\omega-\xi}\lambda^{m-(\omega-\xi)}\Pi_{(\omega-h),h}. \tag{33}$$

Замечание 2. В работе [1], во введении, теорема II сформулирована в матричной форме, причем в формулировку вкралась неточность. Это не повлияло на результаты, так как фактически в [1,2] всюду имелась в виду формулировка теоремы 15.I из работы [3].

1. Смилянский В.Р. О множителях Стокса для различных систем линейных дифференциальных уравнений.I. - Дифференц. уравнения, 1970, 6, № 3, с.483-496.
2. Смилянский В.Р. О множителях Стокса для различных систем линейных дифференциальных уравнений.II. - Дифференц. уравнения, 1970, 6, № 7, с.1207-1210.
3. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1968. - 108 с.
4. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Изд-во иностр. лит., 1958. - 159 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1967. - 52 с.
6. Смилянский В.Р. Некоторые свойства множителей Стокса.I.- В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Киев: Наук. думка, 1979, с.97-107.

УДК 517.946

В.Н.Фенченко

АСИМПТОТИКА ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ОБЛАСТЯХ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Рассмотрим в области $\Omega \in R_3$ замкнутое, достаточно сильно изрезанное и измельченное множество $F^{(N)}$, зависящее от параметра (N (N = 1,2,...) так, что при $N \to \infty$ оно становится все более изрезанным и измельченным. В частности, $F^{(N)}$ может состоять из отдельных мелких компонент, число которых неограниченно растет, а диаметры стремятся к нулю, или быть связанным множеством типа пористого тела, причем густота пор последнего неограниченно увеличивается, а размеры пор уменьшаются.

Поставим в области Ω следующую задачу сопряжения:

$$\begin{cases} \Delta u = -4\pi f, & \Omega^{(N)} = \Omega \setminus F^{(N)}; \\ \varepsilon^{(N)} \Delta u = -4\pi f, & F^{(N)}; \\ \varepsilon^{(N)} \dfrac{\partial u}{\partial \nu_+} = \dfrac{\partial u}{\partial \nu_-}, & \partial F^{(N)}; \\ u_+ = u_-, & \partial F^{(N)}; \\ u = 0, \quad \partial\Omega, & \end{cases} \qquad (1)$$

где f - заданная функция; ν - внешняя нормаль к границе области $\Omega^{(N)}$, а знаки "+", "-" обозначают соответственно предельные значения области $\Omega^{(N)}$ извне и изнутри.

Задача (I) имеет единственное решение, которое обозначим через $u^{(N)}$. Как известно, функция $u^{(N)}$ является потенциалом электростатического поля, создаваемого зарядами с плотностью распределения f в области, содержащей диэлектрические включения $F^{(N)}$ с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^{(N)}$.

Будем изучать асимптотическое поведение решения $u^{(N)}$ при $N\to\infty$. Случай, когда объем $r^{(N)}$ множества $F^{(N)}$ при $N\to\infty$ стремится к нулю, был изучен в работе [1]. Здесь, используя методы [2], будем рассматривать случай, когда множество $F^{(N)}$ в пределе оказывает конечное влияние на решение $u^{(N)}$.

Пусть

$$\underline{\lim}_{N\to\infty}\varepsilon^{(N)}=\varepsilon_0>0,\qquad \overline{\lim}_{N\to\infty}\varepsilon^{(N)}=\varepsilon_1<\infty\;, \tag{2}$$

тогда при определенных условиях последовательность решений $u^{(N)}$ задачи (I) сходится в $L_2(\Omega)$ к решению u такой предельной задачи

$$\begin{cases}\sum\limits_{i,k=1}^{3}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\dfrac{\partial}{\partial x_k}u\right)=-4\pi f,\ \ \Omega,\\ u=0,\ \ \partial\Omega,\end{cases} \tag{3}$$

где коэффициенты a_{ik} определяются множеством $F^{(N)}$.

Введем основную характеристику множества $F^{(N)}$.
Рассмотрим величину

$$\Phi_l(N,x^0,h)=\inf_{v^{(N)}}\int\limits_{K^0\cap\Omega}\left\{\left(1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)}\right)|\nabla v^{(N)}|^2+h^{-2-\gamma}\left|v^{(N)}-(x-x^0,l)\right|\right\}dx, \tag{4}$$

где $K^0=K(x^0,h)$ – куб с центром в точке x^0 и ребрами длины h, ориентированными по координатным осям; $\chi^{(N)}$ – характеристическая функция множества $F^{(N)}$, а нижняя грань берется в классе функций из $W_2^1(K^0\cap\Omega)$.

Существует единственная функция, доставляющая минимум в (4), она является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} -\Delta v_l^{(N)} + h^{-2-\gamma} v_l^{(N)} = h^{-2-\gamma}(x - x^0, l), & K^0 \cap \Omega^{(N)}; \\ -\varepsilon^{(N)} \Delta v_l^{(N)} + h^{-2-\gamma} v_l^{(N)} = h^{-2-\gamma}(x - x^0, l), & K^0 \cap F^{(N)}; \\ v_{l_+}^{(N)} = v_{l_-}^{(N)}, & \partial(K^0 \cap F^{(N)}); \\ \varepsilon^{(N)} \dfrac{\partial v_l^{(N)}}{\partial \nu_+} = \dfrac{\partial v_l^{(N)}}{\partial \nu_-}, & \partial(K^0 \cap F^{(N)}); \\ \dfrac{\partial v_l^{(N)}}{\partial \nu} = 0, & \partial(K^0 \cap \Omega). \end{cases} \tag{5}$$

Обозначим через $v_i^{(N)}$ функции $v_l^{(N)}$, когда l ортогональна оси x_i, и определим числа $a_{ik}(N, x^0, h)$ формулой

$$a_{ik}(N, x^0, h) = \int_{K^0 \cap \Omega} \Big\{ (1 + (\varepsilon^{(N)} - 1)\chi^{(N)})(\nabla v_i^{(N)} \nabla v_k^{(N)}) + h^{-2-\gamma} \left[v_i^{(N)} - (x_i - x_i^0) \right] \left[v_k^{(N)} - (x_k - x_k^0) \right] \Big\} dx . \tag{6}$$

Система чисел $\{a_{ik}(N, x^0, h), ik\}$ является тензором в R_3, который служит основной количественной характеристикой множества $F^{(N)}$ в кубе K^0.

Если $K^0 \cap F^{(N)} = \emptyset$, то нетрудно проверить, что $a_{ik}(N, x^0, h) = h^3 \delta_{ik}$, где δ_{ik} – символ Кронекера.

Тензор $\{a_{ik}(N, x^0, h)\}$ зависит от параметра $\gamma > 0$, однако при больших N и малых h эта зависимость не существенна, что будет следовать из теоремы, и потому не указывается. Сформулируем основной результат.

Теорема. Для того чтобы последовательность $u^{(N)}$ решений задачи (I) сходилась в $L_2(\Omega)$ к решению u задачи (3), необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\gamma > 0$ существовало условие

$$\lim_{h \to 0} \varliminf_{N \to \infty} a_{ik}(N, x, h) h^{-3} = \lim_{h \to 0} \varlimsup_{N \to \infty} a_{ik}(N, x, h) h^{-3} = a_{ik}(x),$$

где $a_{ik}(x)$ – непрерывные функции, а тензор $\{a_{ik}(x), i, k\}$ положительно определен. Это условие как необходимое выполняется при любом $r>0$.

Доказательство. Пусть названное условие теоремы выполнено, тогда, поскольку решение задачи (I) минимизирует функционал

$$I=\int_{\Omega}\left\{(1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)}|\nabla u^{(N)}|^2-8\pi f u^{(N)}\right\}dx \qquad (7)$$

в классе функций $u^{(N)}\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, нетрудно получить неравенство

$$\|u^{(N)}\|_{W_2^1(\Omega)}\le C\,\|f\|_{L_2(\Omega)} \qquad (8)$$

с постоянной C, от N не зависящей. Последовательность функций $\{u^{(N)}\}$ слабокомпактна в $W_2^1(\Omega)$ и, следовательно, можно выделить подпоследовательность $\{u^{(N_k)}\}$, слабосходящуюся в $W_2^1(\Omega)$ к функции $u\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если будет доказано, что u при выполнении условий этой теоремы является решением задачи (3), то в силу единственности решения этой задачи будет доказано, что вся последовательность $\{u^{(N)}\}$ сходится к u слабо в $W_2^1(\Omega)$ и на основании теоремы вложения – сильно в $L_2(\Omega)$.

Пусть $w\in C_2^0(\Omega)$. Образуем покрытие области Ω кубами $K^\alpha=K(x^\alpha,h)$ с ребрами достаточно малой длины h, ориентированными по координатным осям и центрами x^α, представляющими узлы пространственной решетки с периодом $h-r$. Известно, что с этим покрытием можно связать разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}$, т.е. построить набор бесконечно дифференцируемых функций φ_α, удовлетворяющих следующим условиям: $0\le\varphi_\alpha\le 1$, $\varphi_\alpha=0$ вне K^α; $\varphi_\alpha=1$ внутри $K^\alpha\setminus\bigcup_{\beta\ne\alpha}K^\beta$, $\sum_\alpha\varphi_\alpha=1$, $|\partial\varphi_\alpha/\partial x_i|\le Cr^{-1}$.

Рассмотрим функцию $w^{(N)}\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$,

$$w^{(N)}=w+\sum_\alpha\sum_i\frac{\partial w}{\partial x_i}\left[v_i^\alpha-(x_i-x_i^\alpha)\right]\varphi_\alpha\,, \qquad (8)$$

где $v_i^{(\alpha)}$ – функции, доставляющие минимум (4), когда K^0 – куб K^α. Так как $u^{(N)}$ минимизирует функционал I в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$,

то
$$I(u^{(N)}) \leq I(W^{(N)}). \tag{9}$$

Пусть $K_1^\alpha = K(x^\alpha, h_1)$ – куб с центром в точке x^α и ребрами длины $h_1 = h - 2r$, т.е. $K_1^\alpha = K^\alpha \setminus \bigcup_{\beta\neq\alpha} K^\beta$. Учитывая названное условие теоремы и вытекающие при этом из (4) оценки

$$\int_{K^\alpha \cap \Omega} |\nabla v_i^\alpha|^2 dx = O(h^3), \quad \int_{K^\alpha \cap \Omega} |v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)|^2 dx = O(h^{5+\gamma}), \tag{10}$$

записываем

$$\int_{(K^\alpha \setminus K_1^\alpha)\cap \Omega} \left\{(1 + (\varepsilon^{(N)} - 1)\chi^{(N)})|\nabla v_i^\alpha|^2 + h^{-2-\gamma}|v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)|^2\right\} dx =$$

$$= \int_{K^\alpha \cap \Omega} \left\{(1 + (\varepsilon^{(N)} - 1)\chi^{(N)})|\nabla v_i^\alpha|^2 + h^{-2-\gamma}|v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)|^2\right\} dx -$$

$$- \int_{K_1^\alpha \cap \Omega} \left\{(1 + (\varepsilon^{(N)} - 1)\chi^{(N)})|\nabla v_i^\alpha|^2 + h_1^{-2-\gamma}|v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)|^2\right\} dx. \tag{11}$$

Первое слагаемое в (11) равно $a_{ii}(N, x^\alpha, h)$, второе не менее $a_{ii}(N, x^\alpha, h_1)$, поэтому при достаточно больших N

$$\int_{(K^\alpha \setminus K_1^\alpha)\cap \Omega} \left\{(1 + (\varepsilon^{(N)} - 1)\chi^{(N)})|\nabla v_i^\alpha|^2 + h^{-2-\gamma}|v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)|^2\right\} dx \leq$$

$$\leq a_{ii}(N, x^\alpha, h) - a_{ii}(N, x^\alpha, h_1) + o(rh^2) \tag{12}$$

и при $r = o(h)$

$$\int_{(K^\alpha \setminus K_1^\alpha)\cap \Omega} |\nabla v_i^\alpha|^2 dx = o(h^3), \quad \int_{(K^\alpha \setminus K_1^\alpha)\cap \Omega} |v_i^\alpha - (x_i - x_i^\alpha)|^2 dx = o(h^{5+\gamma}). \tag{13}$$

Оценим теперь правую часть неравенства (9). Имеем

$$I(w^{(N)}) = \sum_{\alpha}\sum_{i,k=1}^{3}\int_{K^\alpha\cap\Omega}(1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k}(\nabla v_i^\alpha \nabla v_k^\alpha)dx -$$

$$-8\pi\int_{\Omega} f w\,dx + \sum_{\alpha}\sum_{i,k=1}^{3}\int_{K^\alpha\cap\Omega}(1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k}(\nabla v_i^\alpha \nabla v_k^\alpha)\times$$

$$\times[\varphi_\alpha^2-1]dx + \sum_{\alpha}\sum_{i,k=1}^{3}\int_{K^\alpha\cap K^\beta\cap\Omega}(1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k}\times$$

$$\times(\nabla v_i^\alpha \nabla v_k^\alpha)\varphi_\alpha\varphi_\beta\,dx + E(N,h,r,w), \tag{14}$$

где через E обозначены остальные слагаемые. Так как в силу финитности w и свойств $\{\varphi_\alpha\}$ суммирование по α,β проводится в конечных пределах от I до $O(h^{-3})$ и при фиксированном α суммирование по β распространяется не более чем на 27 значений, то принимая $r = h^{1+\gamma/2}$ и учитывая оценки (13), получаем

$$\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{N\to\infty}}\,|E(N,h,r,w)| = 0. \tag{15}$$

Аналогично с помощью оценки (10) находим

$$\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{N\to\infty}}\left\{\left|\sum_{\alpha}\sum_{i,k=1}^{3}\int_{K^\alpha\cap\Omega}(1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k}(\nabla v_i^\alpha \nabla v_k^\alpha)\times\right.\right.$$

$$\times\varphi_\alpha^2-1)dx\Big| + \Big|\sum_{\alpha\neq\beta}\sum_{i,k=1}^{3}\int_{K^\alpha\cap K^\beta\cap\Omega}(1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k}\times \tag{16}$$

$$\left.\times(\nabla v_i^\alpha \nabla v_k^\alpha)\varphi_\alpha\varphi_\beta\,dx\Big|\right\} = 0.$$

Далее, так как

$$\sum_{i,k=1}^{3}\int_{K^\alpha\cap\Omega}(1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k}(\nabla v_i^\alpha \nabla v_k^\alpha)dx \le \sum_{i,k=1}^{3}\int_{K^\alpha\cap\Omega}(1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})\times$$

$$\times\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k}\left\{(\nabla v_i^\alpha \nabla v_k^\alpha)+h^{-2\gamma}[v_i^\alpha-(x_i-x_i^\alpha)][v_k^\alpha-(x_k-x_k^\alpha)]\right\}dx,$$

то из оценок (10) получаем при достаточно больших N

$$\sum_{i,k=1}^{3}\int_{K^\alpha\cap\Omega}(1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k}(\nabla v_i^\alpha \nabla v_k^\alpha)dx \le$$

$$\le\sum_{i,k=1}^{3}\frac{\partial w}{\partial x_i}(x^\alpha)\frac{\partial w}{\partial x_k}(x^\alpha)a_{ik}(N,x^\alpha,h) + o(h^4). \tag{17}$$

Объединяя (14) – (17) и используя названное выше условие теоремы и плотность класса C_2^0 в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ находим, что для любой функции w из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} I(u^{(N)}) \leq \tilde{I}(w), \tag{18}$$

где

$$\tilde{I}(w) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_k} - 8\pi f w \right\} dx. \tag{19}$$

Покажем, что если u – слабый предел $\{u^{(N)}\}$ по некоторой последовательности $\{N = N_k\}$, то имеет место и обратное неравенство

$$\underline{\lim_{N=N_k\to\infty}} I(u^{(N)}) \geq \tilde{I}(u). \tag{20}$$

Пусть u_ε – гладкая финитная функция такая, что

$$\| u_\varepsilon - u \|_{W_2^1(\Omega)} < \varepsilon. \tag{21}$$

Рассмотрим функции $u_\varepsilon^{(N)} = u^{(N)} + u_\varepsilon - u$, при $N=N_k\to\infty$ слабосходящиеся к u_ε и такие, что

$$\| u_\varepsilon^{(N)} - u^{(N)} \|_{W_2^1(\Omega)} < \varepsilon. \tag{22}$$

В разбиении области Ω непересекающимися кубами $K_1^\alpha = K^\alpha \setminus \cup K^\beta$ выделим те, которые принадлежат области $\Omega_{\varepsilon,\delta} = \{ |\nabla u_\varepsilon| > \delta > 0 \}$. В пересечении каждого из выделенных кубов с областью Ω рассмотрим функцию

$$v^{\alpha(N)} = |\nabla u_\varepsilon(x^\alpha)|^{-1} [u_\varepsilon^{(N)} - u_\varepsilon(x^\alpha) - \sum_{k=2}^{m} D^k u_\varepsilon^{(N)}(x^\alpha)(x-x^\alpha)^k], \tag{23}$$

выбрав $m = [\gamma/2]+1$.

В силу гладкости функции u_ε и учитывая (23), получаем

$$\overline{\lim_{N=N_k\to\infty}} \int_{K_1^\alpha \cap \Omega} |v^{\alpha(N)} - (x-x^\alpha, l^{(\alpha)})|^2 dx = O(h^{5+2m}), \tag{24}$$

где $l^{(\alpha)} = \nabla u_\varepsilon(x^\alpha) / |\nabla u_\varepsilon(x^\alpha)|$.

Далее, согласно (2), имеем

$$\int\limits_{K_1^\alpha\cap\Omega}\left\{(1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla v^{\alpha(N)}|^2+h_1^{-2-\gamma}|v^{\alpha(N)}-(x-x^\alpha,l^{(\alpha)})|^2\right\}dx=\varphi_{l(\alpha)}(N,x^\alpha,h_1) \quad (25)$$

и, следовательно, в силу (25)

$$\int\limits_{K_1^\alpha\cap\Omega}(1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla u_\varepsilon^{(N)}|^2dx\geq\varphi_{l(\alpha)}(N,x^\alpha,h_1)-h_1^{-2-\gamma}\int\limits_{K_1^\alpha\cap\Omega}|v^{\alpha(N)}-$$

$$-(x-x^\alpha,l^{(\alpha)})|^2dx\;|\nabla u_\varepsilon(x^\alpha)|^2-2\int\limits_{K_1^\alpha\cap\Omega}(1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|(\nabla u_\varepsilon^{(N)}\times$$

$$\times\nabla\sum_{k=2}^m D^k u_\varepsilon^{(N)}(x^\alpha)(x-x^\alpha)^k|dx-\int\limits_{K_1^\alpha\cap\Omega}(1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla\sum_{k=2}^m D^k u_\varepsilon^{(N)}(x^\alpha)(x-x^\alpha)^k|^2dx. \quad (26)$$

Отсюда, учитывая (24), имеем

$$\int\limits_{K_1^\alpha\cap\Omega}(1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla u_\varepsilon^{(N)}|^2dx\geq\varphi_{l(\alpha)}(N,x^\alpha,h_1)-O(h_1^{3+2m-\gamma})-$$

$$-\sqrt{\int\limits_{K_1^\alpha\cap\Omega}(1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla u_\varepsilon^{(N)}|^2dx}\;O(h_1^5)-O(h_1^5), \quad (27)$$

следовательно,

$$\int\limits_{K_1^\alpha\cap\Omega}\left(1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)}\right)\left|\nabla u_\varepsilon^{(N)}\right|^2dx\geq\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(N,x^\alpha,h_1)\times$$

$$\times\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x^\alpha)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k}(x^\alpha)-O(h_1^{3+2m-\gamma}), \quad (28)$$

а так как $N=N(\varepsilon,\delta,h_1)=O(h^{-3})$, то

$$\sum_{\alpha=1}^N\int\limits_{K_1^\alpha\cap\Omega}(1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla u_\varepsilon^{(N)}|^2dx-8\pi\int\limits_\Omega f u_\varepsilon^{(N)}dx\geq$$

$$\geq\sum_{\alpha=1}^N\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(N,x^\alpha,h_1)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x^\alpha)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k}(x^\alpha)-8\pi\int\limits_\Omega f u_\varepsilon^{(N)}dx-O(h_1^{2m-\gamma}). \quad (29)$$

Перейдем в (29) к пределу по $N = N_k \to \infty$, зафиксировав ε и δ, а затем устремив к нулю h_1. Учитывая условия теоремы, получаем

$$\lim_{N=N_k\to\infty} I(u_\varepsilon^{(N)}) \geq \int_{\Omega_{\varepsilon,\delta}} \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} dx - 8\pi \int_{\Omega} f u_\varepsilon dx . \tag{30}$$

Теперь устремим к нулю сначала δ, а затем ε, и учитывая при этом (21), приходим к неравенству (20), тем самым достаточность названного выше условия доказана.

Перейдем к доказательству необходимости этого условия, предварительно докажем лемму.

Лемма I. Пусть последовательность решений $\{u^{(N)}\}_{N=1}^{\infty}$ задачи (I) сходится в $L_2(\Omega)$ к решению u задачи (3) для любой функции f, а φ - произвольная гладкая финитная в Ω функция, тогда справедливо равенство

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Omega} (1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)}) |\nabla u^{(N)}|^2 \varphi dx = \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} \varphi dx . \tag{31}$$

Определим по функции φ последовательность $\{\varphi^{(N)}\}_{N=1}^{\infty}$ функций, решив задачу (I) с правой частью $F = \frac{1}{4\pi} \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)$. По условию, последовательность $\{\varphi^{(N)}\}_{N=1}^{\infty}$ должна сходиться к φ в $L_2(\Omega)$, поэтому можно выделить из нее подпоследовательность $\{\varphi^{(N_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ функций и последовательность областей $\Omega^{(N_k)} \subset \Omega$ таких, что

$$\max_{x\in\Omega^{(N)}} |\varphi^{(N_k)} - \varphi| \to 0, \quad mes(\Omega \setminus \Omega^{(N_k)}) \to 0, \quad N_k \to \infty . \tag{32}$$

Нетрудно показать также, что $\varphi^{(N)}$ ограничены в Ω равномерно по N.

В соответствии со следствием леммы 3* построим последовательность функций $\{\tilde{u}^{(N)}\}_{N=1}^{\infty}$ и областей $\tilde{G}^{(N)}$ таких, что

---

* Хруслов Е.Я. О сходимости решений второй краевой задачи в слабосвязанных областях (см. настоящий сб., с.129-147).

$$\tilde{G}^{(N)} \supset \Omega \setminus \Omega^{(N)}, \quad mes\, \tilde{G}^{(N)} \to 0, \quad N \to \infty,$$
$$\tilde{u}^{(N)} = u^{(N)} \text{ на } \Omega \setminus \tilde{G}^{(N)}, \; \|\tilde{u}^{(N)}\|_{W_2^1(\tilde{G}^{(N)})} \to 0, \quad N \to \infty. \tag{33}$$

Так как функции $u^{(N)}$ минимизируют функционал (7), учитывая (2) и (33), а также сравнивая $u^{(N)}$ и $\tilde{u}^{(N)}$, легко замечаем, что

$$\int_{\tilde{G}^{(N)}} (1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla u^{(N)}|^2 dx \to 0, \quad N \to \infty. \tag{34}$$

Имеем

$$\int_{\Omega} (1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla u^{(N)}|^2 \varphi\, dx = \int_{\Omega} (1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla u^{(N)}|^2 \varphi^{(N)} dx +$$
$$+ \int_{\Omega \setminus \tilde{G}^{(N)}} (1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla u^{(N)}|^2 (\varphi - \varphi^{(N)}) dx + \int_{\tilde{G}^{(N)}} (1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)}) \times \tag{35}$$
$$\times |\nabla u^{(N)}|^2 (\varphi - \varphi^{(N)}) dx.$$

Второй интеграл в правой части (35) стремится к нулю при $N \to \infty$ в силу (32), а последний – в силу (34), поэтому

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Omega} (1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla u^{(N)}|^2 \varphi\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_{\Omega} (1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)}) \times \tag{36}$$
$$\times |\nabla u^{(N)}|^2 \varphi^{(N)} dx.$$

Поскольку $\varphi^{(N)}$, $u^{(N)}$ удовлетворяют задаче (I) с соответствующими правыми частями в уравнениях, то, интегрируя по частям, преобразуем правую часть (36) к виду

$$\int_{\Omega} (1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla u^{(N)}|^2 \varphi^{(N)} dx = \frac{4\pi}{2} \int_{\Omega} u^{(N)^2} F dx - 4\pi \int_{\Omega} u^{(N)} \varphi^{(N)} f. \tag{37}$$

Переходя теперь к пределу при $N \to \infty$, получаем

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Omega} (1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla u^{(N)}|^2 \varphi^{(N)} dx = \frac{4\pi}{2} \int_{\Omega} u^2 F dx - 4\pi \int_{\Omega} u \varphi f, \tag{38}$$

откуда, подставляя вместо F, f соответствующие выражения и интегрируя по частям, приходим к равенству

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\Omega} (1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla u^{(N)}|^2 \varphi^{(N)} dx = \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} \varphi\, dx. \tag{39}$$

Объединяя (39) с (36), завершаем доказательство леммы.

Из леммы I следует, что для любой области $D \subset \Omega$, граница которой имеет нулевую меру

$$\lim_{N\to\infty} \int_D (1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla u^{(N)}|^2 dx = \int_D \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx. \qquad (40)$$

Действительно, применяя лемму I к $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, где бесконечно дифференцируемые функции φ_1, φ_2 таковы, что $\varphi_1 = 1$ в D', $\varphi_1 = 0$ вне D, $\varphi_2 = 1$ в D, $\varphi_2 = 0$ вне D'', $D' \subset D \subset D''$, $mes(D'' \setminus D') < \varepsilon$, ε – произвольное положительное число, получаем

$$\underline{\lim}_{N\to\infty} \int_D (1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla u^{(N)}|^2 dx \geq \int_{D'} \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx,$$

$$\overline{\lim}_{N\to\infty} \int_D (1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla u^{(N)}|^2 dx \leq \int_{D''} \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx. \qquad (41)$$

Так как $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $mes(D'' \setminus D') < \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, то из (41) вытекает (40).

Пусть $x^0 \in \Omega_0 \subset \Omega$, подберем правую часть $f = f_0$ в уравнении так, чтобы решение задачи (3) в области Ω_0 было равно $(x - x^0, l)$, где l – единичный вектор. Пусть $u^{(N)}$ – решение задачи (I) с той же правой частью, а $K^0 = K(x^0, h)$ – куб в области Ω_0. Согласно (2), имеем

$$\int_{K^0 \cap \Omega} (1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla u^{(N)}|^2 dx + h^{-2-\gamma} \int_{K^0 \cap \Omega} |u^{(N)} - (x - x^0, l)|^2 dx \geq \qquad (42)$$
$$\geq \Phi_l(N, x^0, h),$$

откуда, учитывая сходимость $u^{(N)}$ к $u = (x - x^0, l)$ в K^0 в смысле $L_2(\Omega)$ получаем

$$\lim_{N\to\infty} \int_{K^0 \cap \Omega} (1+(\varepsilon^{(N)}-1)\chi^{(N)})|\nabla u^{(N)}|^2 dx \geq \overline{\lim}_{N\to\infty} \Phi_l(N, x^0, h), \qquad (43)$$

следовательно,

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}(x^0) l_i l_k \geq \lim_{h\to 0} \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{\Phi_l(N, x^0, h)}{h^3} = \sum_{i,k=1}^{3} \lim_{h\to 0} \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{a_{ik}(N, x^0, h)}{h^3} l_i l_k. \quad (44)$$

Из (44) следует, что если названное выше условие теоремы не выполняется для какого-нибудь $\gamma > 0$, то найдутся l, числа $\varepsilon, h > 0$ сколь угодно малые и подпоследовательность $N = N_k \to 0$, что

$$\frac{\varphi_l(N, x^0, h)}{h^3} \leq \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}(x^0)\, l_i l_k - \varepsilon, \qquad N \geq N(h). \tag{45}$$

Пусть функция $v_l^{(N)}$ минимизирует (2) при рассматриваемых l и γ. Рассмотрим в Ω функцию

$$w_h^{(N)} = u + [v_l^{(N)} - (x - x^0, l)]\varphi_0 + [u^{(N)} - u]\varphi_1, \tag{46}$$

где φ_0, φ_1 – разбиение единицы, связанное с покрытием $\{K^0, \Omega \setminus K^0\}$. Имеем

$$I(w_h^{(N)}) = \int_{\Omega} (1 + (\varepsilon^{(N)} - 1)\chi^{(N)}) |\nabla u^{(N)}|^2 dx - 8\pi \int_{\Omega} f u\, dx +$$

$$+ \int_{K^0 \cap \Omega} (1 + (\varepsilon^{(N)} - 1)\chi^{(N)}) |\nabla v_l^{(N)}|^2 \varphi_0^2 dx - \int_{K^0 \cap \Omega} (1 + (\varepsilon^{(N)} - 1)\chi^{(N)}) |\nabla u^{(N)}|^2 \times \tag{47}$$

$$\times (1 - \varphi_1^2)\, dx + E(N, h, r).$$

где, поскольку в силу (45) для $v_l^{(N)}$ вёрны оценки (10), то

$$\overline{\lim_{N = N_k \to \infty}} |E(N, h, r)| = o(h^{3+\gamma/4}). \tag{48}$$

Далее, в силу (41), (45) и непрерывности a_{ik} имеем

$$\int_{K^0 \cap \Omega} (1 + (\varepsilon^{(N)} - 1)\chi^{(N)}) |\nabla v_l^{(N)}|^2 \varphi_0^2 dx \leq \varphi_l(N, x^0, h) \leq$$

$$\leq h^3 \Big(\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}(x^0)\, l_i l_k - \varepsilon \Big), \quad \overline{\lim_{N \to \infty}} \int_{K^0 \cap \Omega} (1 + (\varepsilon^{(N)} - 1)\chi^{(N)}) \times \tag{49}$$

$$\times |\nabla u^{(N)}|^2 (1 - \varphi_1^2)\, dx \geq \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}(x^0)\, l_i l_k h^3 (1 + o(1)).$$

Объединяя, (47) – (49) получаем, что найдется $h > 0$ и подпоследовательность $N = N_k \to \infty$ такие, что

$$I(w_h^{(N)}) \leq \tilde{I}(u) - \frac{\varepsilon}{2} h^3, \tag{50}$$

что неверно, поскольку $w_h^{(N)}$ из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, а u минимизирует I в этом классе. Теорема доказана.

В ряде случаев тензор $\{a_{ik}, i,k\}$ можно выразить через более простые характеристики множества $F^{(N)}$.

Так, если $F^{(N)}$ состоит из шаров радиуса r, содержащихся в области Ω с центрами в узлах периодической решетки с периодами по осям соответственно h_1, h_2, h_3, причем при $N\to\infty$ $r=O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{N}}\right)$, $h_i=O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{N}}\right)$, $h_i/r=const$, то компоненты тензора вычисляются по формуле $a_{ik}=\frac{r^3}{h_1h_2h_3}\delta_{ik}A_{ik}$, где

$$A_{ik}=\int_{\Pi}(\nabla u_i\nabla u_k)\,dx, \quad \Pi=\left\{-h_i/2r<x_i<h_i/2r\right\}-$$

параллелепипед с шаром $F=\left\{\sum_{i=1}^{3}x_i^2\le 1\right\}$ единичного радиуса, а u_k – решение следующей задачи:

$$\begin{cases}\Delta u_k=0, & \Pi\setminus F,\ F;\\ u_k=\pm h_k/2r, & \partial\Pi\cap\left\{x: x_k=\pm h_k/2r\right\};\\ u_k^+=u_k^-, & \partial F;\\ \varepsilon\dfrac{\partial u_k}{\partial\nu_+}=\dfrac{\partial u_k}{\partial\nu_-}, & \partial F;\\ \dfrac{\partial u_k}{\partial\nu}=0, & \partial\Pi\setminus\bigcup\limits_{i\ne k}\left\{x: x_i=\pm h_i/2r\right\},\end{cases}\tag{51}$$

ε – диэлектрическая проницаемость шаров.

1. Фенченко В.Н. О некоторых задачах электростатики в областях с мелкозернистой границей. – Мат. физика и функционал. анализ, 1972, вып. 3, с.80-85.
2. Хруслов Е.Я. Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области. – Мат. сб., 1978, 106, № 4, с.604-621.

УДК 517.946

Е.Я.Хруслов

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В СЛАБОСВЯЗАННЫХ ОБЛАСТЯХ

Пусть Ω – произвольная ограниченная область в $R_n\ (n\ge 2)$, а $F^{(s)}$ – замкнутое, достаточно сильно изрезанное множество в

Ω типа пористого тела. Будем предполагать, что $F^{(s)}$ зависит от параметра $s\ (s = 1, 2, \dots)$ так, что при $s \to \infty$ оно становится все более изрезанным (например, диаметры пор уменьшаются, а их густота увеличивается). При каждом s рассмотрим в области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus F^{(s)}$ краевую задачу

$$\Delta u^{(s)}(x) - \lambda u^{(s)}(x) = f^{(s)}(x), \qquad x \in \Omega^{(s)}; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu}(x) = 0, \qquad x \in \partial F^{(s)}; \qquad (2)$$

$$u^{(s)}(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \qquad (3)$$

где $x = \{x_1, \dots, x_n\} \in R_n$; $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ $f^{(s)}(x) \in L_2(\Omega^{(s)})$; $\lambda > 0$; $\frac{\partial}{\partial \nu}$ – производная по нормали к $\partial F^{(s)}$, понимаемая в обобщенном смысле [1]. Граничное условие на $\partial\Omega$ для удобства выбрано нулевым, но для данного класса задач оно не существенно и может быть любым.

Как известно [1], существует единственное решение этой задачи $u^{(s)}(x) \in W_2^1(\Omega^{(s)})$. Изучим асимптотическое поведение $u^{(s)}(x)$ при $s \to \infty$.

Введем необходимые определения. Будем говорить, что последовательность областей $\{G^{(s)} \subset \Omega\}_{s=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию сильной связанности, если для любых $\Omega' \subset \Omega$ и $v^{(s)}(x) \in W_2^1(G^{(s)} \cap \Omega')$ существует функция $\tilde{v}^{(s)}(x) \in W_2^1(\Omega')$ такая, что $\tilde{v}^{(s)}(x) = v^{(s)}(x)$ при $x \in G^{(s)} \cap \Omega'$ и

$$\|\tilde{v}^{(s)}\|_{W_2^1(\Omega')} \le C \|v^{(s)}\|_{W_2^1(G^{(s)} \cap \Omega')},$$

где постоянная C не зависит от s.

В данной работе рассматриваются такие области $\Omega^{(s)}$, которые при каждом s можно разбить на $m+1$ частей: $\Omega_1^{(s)}, \dots$ $\dots \Omega_m^{(s)}$, $Q^{(s)}$ так, что подобласти $\Omega_r^{(s)}$ $(r = 1, \dots, m)$ удовлетворяют условию сильной связанности, а множество $Q^{(s)}$ в некотором смысле мало (вообще говоря, оно может быть и пустым). Сами области $\Omega^{(s)}$ при $m > 1$ не удовлетворяют условию сильной связанности, поэтому будем называть их слабосвязанными.

Будем предполагать для простоты, что области $\Omega_r^{(s)}$ ($r=1, \ldots, m$) удовлетворяют еще такому условию: для любого фиксированного куска Γ поверхности $\partial\Omega$ при достаточно больших s $\partial\Omega_r^{(s)} \cap \Gamma \neq \emptyset$ и, если функция $v^{(s)}(x) \in W_2^1(\Omega_r^{(s)})$ равна 0 на $\partial\Omega_r^{(s)} \cap \partial\Omega$, то $\tilde{v}^{(s)}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Это обеспечит в пределе при $s \to \infty$ нулевое граничное условие на $\partial\Omega$.

Пусть $K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)$ – куб с центром в точке $x^\alpha \in \Omega$ и ребрами длиной $h>0$, ориентированными по координатным осям, а $l = \{l_1, \ldots, l_n\}$ – вектор в R_n. Рассмотрим функционал

$$\varphi_{rh}^{\alpha(s)}(l) = \inf_{v^{(s)}} \int_{K_h^\alpha \cap \Omega_r^{(s)}} \left\{ |\nabla v^{(s)}|^2 + h^{-2-\tau} |v^{(s)} - (x - x^\alpha, l)|^2 \right\} dx, \quad (4)$$

где $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$; τ – произвольное положительное число; $(x - x^\alpha, l)$ – скалярное произведение в R_n, а нижняя грань берется в классе функций $v^{(s)} \in W_2^1(K_h^\alpha \cap \Omega_r^{(s)})$. Нетрудно показать (см. [2]), что $\varphi_{rh}^{\alpha(s)}(l)$ – квадратичен относительно l и справедливо представление

$$\varphi_{rh}^{\alpha(s)}(l) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^r(s, h, x^\alpha)\, l_i\, l_j, \quad (5)$$

где
$$a_{ij}^r(s,h,x^\alpha) = \int_{K_h^\alpha \cap \Omega_r^{(s)}} \Big\{ (\nabla v_i^{(s)}, \nabla v_j^{(s)}) +$$
$$+ h^{-2-\tau} \left[v_i^{(s)} - (x_i - x_i^\alpha) \right] \left[v_j^{(s)} - (x_j - x_j^\alpha) \right] \Big\} dx,$$

а $v_i^{(s)}(x)$ – функция, доставляющая минимум в (4), когда l-орт оси x_i.

Тензор $\{a_{ij}^r(s, h, x^\alpha)\}_{i,j=1}^n$, а также Лебегова мера области $\Omega_r^{(s)} \cap K(x^\alpha, h)$ принимаются в качестве основных характеристик $\Omega_r^{(s)}$ (в кубе $K(x^\alpha, h)$).

Введем еще количественную характеристику множества $Q^{(s)}$. Пусть $t = \{t_1, \ldots, t_m\}$ – вектор в R_m. Рассмотрим функционал

$$\Lambda_h^{\alpha(s)}(t) = \inf_{\psi^{(s)}} \int_{K_h^\alpha \cap \Omega^{(s)}} \left\{ |\nabla\psi^{(s)}|^2 + h^{-2-\theta} \Big|\psi^{(s)} - \sum_{r=1}^{m} t_r \chi_r^{(s)}\Big|^2 \right\} dx, \quad (6)$$

где $\chi_r^{(s)} = \chi_r^{(s)}(x)$ – характеристическая функция области $\Omega_r^{(s)}$; θ – произвольное положительное число, а нижняя грань берется в классе функций $\varphi_{\cdot}^{(s)} \in W_2^1(K_h^\alpha \cap \Omega^{(s)})$.

Так же, как в работе [2], можно показать, что $\Lambda_h^{\alpha(s)}(t)$ квадратичен относительно $t \in R_m$ и

$$\Lambda_h^{\alpha(s)}(t) = \sum_{r,p=1}^{m} C_{rp}(s,h,x^\alpha)\, t_r t_p , \tag{7}$$

где

$$C_{rp}(s,h,x^\alpha) = \int_{K_h^\alpha \cap \Omega^{(s)}} \Big\{ (\nabla\psi_r^{(s)}, \nabla\psi_p^{(s)}) + h^{-2-\theta} \times$$

$$\times \Big[\psi_r^{(s)} - \chi_r^{(s)}\Big]\Big[\psi_p^{(s)} - \chi_p^{(s)}\Big]\Big\} dx ,$$

а $\psi_r^{(s)}(x)$ – функция, доставляющая минимум в (6), когда вектор t имеет единственную ненулевую компоненту $t_r = 1$.

Числа $C_{rp}(s,h,x^\alpha)$ характеризуют степень связи между областями $\Omega_r^{(s)}$ и $\Omega_p^{(s)}$ (в кубе $K(x^\alpha, h)$).

Определим теперь понятие сходимости функций $v^{(s)}(x)$, заданных в областях $\Omega^{(s)} = (\bigcup_{r=1}^{m} \Omega_r^{(s)}) \cup Q^{(s)}$ $(mes\, Q^{(s)} \to 0$ при $s \to \infty$) к вектор-функции $v(x) = \{v_1(x), \ldots, v_m(x)\}$, заданной в области $\Omega = \Omega^{(s)} \cup F^{(s)}$. Будем говорить, что последовательность $\{v^{(s)}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ сходится к $v(x)$ в смысле $L_2(\Omega^{(s)}, m)$, если

$$\lim_{s\to\infty} \Big\{ \sum_{r=1}^{m} \int_{\Omega} |v^{(s)}\chi_r^{(s)} - v_r \chi_r^{(s)}|^2 dx + \int_{Q^{(s)}} |v^{(s)}|^2 dx \Big\} = 0, \tag{8}$$

где $\chi_r^{(s)} = \chi_r^{(s)}(x)$ – характеристическая функция области $\Omega_r^{(s)}$.

Целью данной работы является доказательство следующей теоремы, описывающей асимптотическое поведение решения задачи (I) – (3) при $s \to \infty$ (см. [2]).

Теорема I. Пусть при $s \to \infty$ выполняются такие условия:

I) последовательность функции $f^{(s)}$ сходится в смысле $L_2(\Omega^{(s)}, m)$ к вектор-функции $f = \{f_1, \ldots, f_m\} \in L_2(\Omega)$;

2) для любого $x \in \Omega$ и некоторого $0<\tau<2$

$$\lim_{h\to 0} \underline{\lim}_{s\to\infty} \frac{a_{ij}^{r}(s,h,x)}{h^{n}} = \lim_{h\to 0} \overline{\lim}_{s\to\infty} \frac{a_{ij}^{r}(s,h,x)}{h^{n}} = a_{ij}^{r}(x);$$

3) для любого $x \in \Omega$

$$\lim_{h\to 0} \lim_{s\to\infty} \frac{mes\left[K(x,h)\cap\Omega_r^{(s)}\right]}{h^{n}} = b_r(x);$$

4) для любого $x \in \Omega$ и некоторого $\theta>0$

$$\lim_{h\to 0} \underline{\lim}_{s\to\infty} \frac{c_{rp}(s,h,x)}{h^{n}} = \lim_{h\to 0} \overline{\lim}_{s\to\infty} \frac{c_{rp}(s,h,x)}{h^{n}} = c_{rp}(x);$$

5) $\lim\limits_{s\to\infty} mes\,[Q^{(s)}]=0,$

где $b_r(x)$, $a_{ij}^{r}(x)$, $c_{rp}(x)$ – непрерывные функции в Ω ; $b_r(x)>b>0$, $\{a_{ij}^{r}(x)\}_{i,j=1}^{n}$ – положительно-определенные матрицы Ω .

Тогда последовательность решений $u^{(s)}(x)$ задачи (I) – (3) сходится в смысле $L_2(\Omega^{(s)}, m)$ к решению $u(x)=\{u_1(x), \dots, u_m(x)\}$ следующей краевой задачи в области Ω:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{r}\frac{\partial u_r}{\partial x_j}\right) - \lambda b_r u_r - \sum_{p=1}^{m} c_{rp} u_p = b_r f_r, \quad x\in\Omega; \qquad (9)$$

$$u_r\Big|_{\partial\Omega}=0, \qquad (r=1,\dots,m) \qquad (10)$$

Один из вариантов этой теоремы сформулирован в работе [2], где приведено доказательство только для сильносвязанных областей $\Omega^{(s)}$ $(m=1)$. Ниже приводятся полное доказательство теоремы I (п.I,2) и некоторых ее следствий (п.3).

I. Вспомогательные предложения.

Пусть в пространстве R_n задана кубическая решетка, ориентированная по координатным осям. Некоторое конечное число узлов этой решетки отметим красным цветом, а остальные - синим. Будем проходить из одного синего узла в другой, двигаясь по ломаным, звенья которых лежат на линиях решетки, а повороты находятся в узлах решетки, причем повороты в красных узлах запрещены (разрешается только сквозной проход). Назовем такую ломаную монотонной, если при движении по ней координаты точки меняются монотонно (часть их не убывает, а часть - не возрастает). Ставится вопрос: возможен ли для любой пары синих узлов проход по монотонной ломаной.

Вообще говоря, при произвольном расположении красных узлов ответ на этот вопрос отрицательный. Однако требование можно ослабить, исключив из рассмотрения часть синих узлов. Будем считать, что если некоторый синий узел перекрашен в зеленый цвет, то поворот в таком узле разрешается, но конечным пунктом движения этот узел быть не обязан.

Лемма I. Пусть на решетке отмечено r красных узлов, а остальные - синие. Тогда можно g синих узлов сделать зелеными так, что для любой пары оставшихся синих узлов возможен проход по монотонной ломаной. При этом $g \leq C_n r$, где C_n зависит только от размерности пространства и не зависит от расположения и числа красных узлов.

Доказательство проводится по индукции. Рассмотрим сначала случай $n=2$. Выберем направление оси x_2 и на каждой линии решетки, параллельной этому направлению и содержащей r_i красных узлов $(r=\sum_i r_i)$, заменим $2r_i$ синих узлов зелеными, причем места зеленых узлов определим следующим образом. Сначала, двигаясь от самого крайнего узла в положительном направлении оси x_2, перекрашиваем встречающиеся синие узлы в зеленый цвет, но так, чтобы сзади по ходу движения оставалось красных узлов не меньше, чем зеленых. Таким образом, появится r_i зеленых узлов. Затем аналогичную процедуру проделываем, двигаясь в отрицательном направлении оси x_2 и начиная от последнего встретившегося при первом проходе красного узла. Общее число зеленых узлов будет, очевидно, равно $2r$. Покажем, что оставшиеся синие узлы уже можно попарно соединить монотонной ломаной.

Прежде всего заметим, что в результате проделанного построения выполняется такое условие: на любом отрезке прямой, параллельной оси x_2 с концами в узлах решетки, один из которых обязательно синий, находится зеленых узлов не меньше, чем красных. Возьмем произвольные два синих узла, не лежащих на прямой, параллельной координатой оси. Эти узлы являются концами диагонали некоторого прямоугольника. В силу сделанного замечания на каждой стороне этого прямоугольника, параллельной оси x_1, лежит красных узлов меньше, чем зеленых и синих вместе. Поэтому существует хотя бы одна пара узлов не красного цвета, лежащих напротив друг друга. Эти узлы можно соединить отрезком прямой, параллельной оси x_1, и в них разрешен поворот. Отсюда, очевидно, следует, что выбранные два синих узла можно соединить монотонной ломаной (составленной не более чем из трех звеньев).

Предположим теперь, что лемма справедлива для пространства R_{n-1}. Покажем, что тогда она справедлива и для пространства R_n. Выделим на каждой гиперплоскости размерности $n-1$, ортогональной оси x_n, необходимое число зеленых узлов так, чтобы оставшиеся синие можно было попарно соединить монотонной ломаной (лежащей в этой же гиперплоскости). Общее число зеленых узлов не превосходит $C_{n-1}\, r$, где r – общее число красных узлов. На каждой прямой, параллельной оси x_n, проведем построение, аналогичное предыдущему. А именно, двигаясь в положительном направлении оси x_n от самого крайнего не синего узла (красного или зеленого), перекрашиваем встречающиеся синие узлы в желтый цвет так, чтобы число остающихся сзади желтых узлов не превосходило суммарное число красных и зеленых. Затем такую же процедуру проделываем в отрицательном направлении оси x_n. Общее число желтых узлов получается равным удвоенному числу красных и зеленых узлов, т.е. не превосходит $2(C_{n-1}+1)\, r$. Покажем, что оставшиеся синие узлы можно попарно соединить монотонной ломаной в R_n. Желтые узлы введены для удобства рассуждений. В конце они все перекрашиваются в зеленые. Из построения ясно, что на любом отрезке прямой, параллельной оси x_n (один конец которого – синий узел), лежит синих и желтых узлов больше, чем зеленых и красных. Кроме того, в желтых узлах разрешен поворот, и любую пару желтых узлов, лежащих в одной гиперплоскости, ортогональной оси x_n, можно соединить монотонной ломаной, лежащей в этой же гиперплоскости. То же справедливо для пары синих узлов и пары желтый – синий.

Возьмем произвольную пару синих узлов, не лежащих в одной гиперплоскости, ортогональной оси x_n. Они являются концами диагонали некоторого параллелепипеда (возможно, вырожденного). На сторонах этого параллелепипеда, проходящих через эти узлы и параллельных оси x_n, лежит больше синих и желтых узлов, чем красных и зеленых. Следовательно, среди синих и желтых узлов найдется хотя бы одна пара узлов, лежащих в одной гиперплоскости, ортогональной оси x_n. Такие узлы можно соединить монотонной ломаной, лежащей в этой же гиперплоскости. Исходные синие узлы соединяем с концами этой ломаной отрезками, параллельными оси x_n. Полученная ломаная в R_n будет, очевидно, монотонной. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $v(x)$ – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая и финитная в R_n функция, а G – произвольное измеримое множество в R_n. Существует кусочно-гладкая функция $\hat{v}(x)$ и открытое множество $\hat{G}$ такие, что $G \subseteq \hat{G}$, $\hat{v}(x) = v(x)$ при $x \in R_n \setminus \hat{G}$, $\max\limits_{x \in R_n} |\hat{v}(x)| \leq C_0 \max\limits_{x \in R_n} |v(x)|$, и при достаточно малых $\operatorname{mes} G \ (< \frac{1}{3})$ справедливы оценки

$$\operatorname{mes} \hat{G} \leq 4 n A \varepsilon^{A^{-1}} |\ln \varepsilon|^{-\frac{1}{3}};$$

$$\|\hat{v}\|^2_{W_2^1(\hat{G})} \leq C(n) A \left(\varepsilon^{2^{-1} A^{-2}} |\ln \varepsilon|^{-\frac{2}{3}} + |\ln \varepsilon|^{-\frac{1}{6}} \right),$$

где $\varepsilon = \operatorname{mes} G$, $A = \max \left\{ \|v\|^2_{W_2^1(R_n)}, \ 1 \right\}$; постоянные C_0 и $C(n)$ могут зависеть лишь от размерности пространства. При этом второе неравенство выполняется также для норм $\|\hat{v}\|_{W_2^1(\check{G})}$, где $\check{G}$ – произвольное множество в Ω, мера которого удовлетворяет первому неравенству.

Доказательство. Введем обозначения

$$Q_k = \left\{ x \in R_n : |v(x)|^2 + |\nabla v(x)|^2 \geq \varepsilon^{-\frac{2}{k}} \right\};$$

$$I_k = \|v\|^2_{W_2^1(Q_k)}$$

Так как $Q_k \subseteq Q_{k+1}$, $I_k \leq I_{k+1}$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (I_{k+1} - I_k) \le \| v \|^2_{W_2^1(R_n)} \le A ,$$

то при любом $\delta > 0$ найдется такое $N \le [A\delta^{-1}] + 1$, что

$$I_{N+1} - I_N \le \delta .$$

Отсюда и из определения Q_k и I_k следует

$$\begin{aligned} mes\, Q_{N+1} &= mes\, Q_N + mes\,(Q_{N+1} \setminus Q_N) \le \\ &\le mes\, Q_N + (I_{N+1} - I_N)\varepsilon^{\frac{2}{N+1}} \le A\varepsilon^{\frac{2}{N}} + \delta\varepsilon^{\frac{2}{N+1}} . \end{aligned} \tag{11}$$

Разобьем пространство R_n на кубы K_h с ребрами достаточно малой длины h , ориентированными по координатным осям, и обозначим через G_{N+1} множество, составленное из кубов K_h , пересекающихся с Q_{N+1} . Поскольку функция $v(x)$ – дважды непрерывно дифференцируема и финитна и значит, Q_{N+1} – компакт в R_n , можно выбрать h столь малым, чтобы колебание производных $v(x)$ в каждом кубе K_h было достаточно малым и выполнялось неравенство

$$mes\, G_{N+1} \le 2\, mes\, Q_{N+1} \quad (mes\, Q_{N+1} > 0) . \tag{12}$$

Множество G_{N+1} распадается на конечное число непересекающихся брусьев B_i^j длины $l_i^j \; (j = 1, \ldots, M_i(h))$, составленных из кубов K_h и параллельных оси x_i (для удобства будем считать, что положительное направление оси x_i идет вправо). Присоединяя к каждому брусу B_i^j справа некоторое число кубов K_h , образуем новый брус $\tilde{B}_i^j$ такой, чтобы функция $v(x)$ удовлетворяла условию Липшица

$$| v(x) - v(y) | \le 2\varepsilon^{-\frac{1}{N+1}} | x - y | , \tag{13}$$

когда точки x, y лежат на противоположных торцевых гранях бруса $\tilde{B}_i^j$ и на одной прямой, параллельной оси x_i . Из определения G_{N+1} следует, что требуемое неравенство будет выполняться, если длина $\tilde{l}_i^j$ бруса $\tilde{B}_i^j$ будет не меньше величин $l_i^j(x')\,(l_i^j(x') \ge$ $\ge l_i^j)$, определяемых из уравнения

$$\int\limits_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_i+l_i^j(x')} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x', x_i)\,dx_i = 2\varepsilon^{-\frac{1}{N+1}} l_i^j(x'), \tag{14}$$

где $x' = \{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\} \in R_n$, $\bar{x} = \{x', \bar{x}_i\}$ – произвольная точка на левой торцевой грани S_i^j бруса $\tilde{B}_i^j$. Легко показать, что это уравнение имеет единственное решение $l_i^j(x') > l_i^j$ при всех $\{x', \bar{x}_i\} \in S_i^j$, для которых не выполняется условие (13) на торцевых гранях бруса B_i^j; для остальных $\{x', \bar{x}_i\} \in S_i^j$ полагаем $l_i^j(x') = l_i^j$. При этом колебание функции $l_i^j(x')$ на S_i^j не превосходит величины $M_1 M_2 \sqrt{n-1}\,\varepsilon^{\frac{2}{N+1}} l_i^j\, h$, где $M_1 = \max\limits_{x \in R_n} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|$, $M_2 = \max\limits_{x \in R_n} \left|\nabla \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|$. Поэтому, можно выбрать так, чтобы при всех $\{x', \bar{x}_i\} \in S_i^j$ выполнялось неравенство $l_i^j(x') \le \tilde{l}_i^j \le l_i^j(x') + O(h\, l_i^j)$

Из уравнения (14) и определения G_{N+1} следует, что

$$\varepsilon^{-\frac{1}{N+1}} l_i^j(x') \le \int\limits_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_i+l_i^j} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x', x_i)\right| dx_i - \varepsilon^{-\frac{1}{N+1}} l_i^j$$

и, значит, при достаточно малых h

$$\tilde{l}_i^j \le \varepsilon^{\frac{1}{N+1}} \int\limits_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_i+l_i^j} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x', x_i)\right| dx_i .$$

Отсюда, интегрируя по $x'(\{x', \bar{x}_i\} \in S_i^j)$ и применяя неравенство Коши – Буняковского, получаем

$$\tilde{l}_i^j \le \varepsilon^{\frac{1}{N+1}} h^{-\frac{n-1}{2}} (l_i^j)^{\frac{1}{2}} \left\{ \int\limits_{B_i^j} |\nabla v|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

При этом некоторые брусы $\tilde{B}_i^j$ могут пересекаться, тогда длина их объединения оценивается также неравенством (15), в котором интеграл берется по объединению соответствующих B_i^j, а вместо l_i^j стоит их общая длина. Аналогичные построения проделаем по отношению ко всем координатным осям. Тогда получаем множество $\tilde{G}_{N+1} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \bigcup\limits_{j=1}^{M_i} \tilde{B}_i^j$, мера которого в силу (15), (12), и (11) оценивается следующим образом:

$$
\operatorname{mes}\tilde{G}_{N+1}\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j}h^{n-1}\bar{l}_i^{\,j}\le h\varepsilon^{\frac{1}{N+1}}\left\{\operatorname{mes}G_{N+1}\right\}^{\frac{1}{2}}\|v\|_{W_2^1(R_n)}\le
$$

$$
\le 2n\lambda\left(\varepsilon^{\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}}+\delta^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{2}{N+1}}\right). \tag{16}
$$

Функция $v(x)$ и ее производные на множестве $\overline{R_n\setminus\tilde{G}_{N+1}}$ не превосходят $\varepsilon^{-\frac{1}{N+1}}$, и для любой пары точек $x,y\in\overline{R_n\setminus\tilde{G}_{N+1}}$, лежащих на прямых, параллельных координатным осям, выполняется неравенство Липшица (13). Но для произвольных точек $x,y\in R_n\setminus\tilde{G}_{N+1}$ условие Липшица, вообще говоря, может не выполняться. Однако это можно исправить, присоединив к множеству $\tilde{G}_{N+1}$ некоторое число кубов K_h. Действительно, рассмотрим пространственную решетку с узлами в вершинах кубов K_h. Отметим красным цветом узлы внутренние относительно множества $\tilde{G}_{N+1}$. Их число r не превосходит числа M кубов K_h, входящих в $\tilde{G}_{N+1}$, остальные узлы решетки – синие. В соответствии с леммой I перекрасим g синих узлов в зеленый цвет так, чтобы оставшиеся синие можно было попарно соединить монотонной ломаной с точками поворота в зеленых или синих узлах. Затем те кубы K_h, у которых хотя бы одна вершина – зеленый узел, присоединим к $\tilde{G}_{N+1}$, и полученное множество обозначим через $\hat{G}_{N+1}$. Число таких кубов не превосходит $2^n g$ и, так как в силу леммы I $g\le C_n r\le C_n M$, то

$$
\operatorname{mes}\hat{G}_{N+1}\le\hat{C}(n)\operatorname{mes}\tilde{G}_{N+1}, \tag{17}
$$

где постоянная $\hat{C}(n)=2^n C_n+1$ зависит лишь от размерности пространства.

Покажем, что любые две точки x,y множества $\overline{R_n\setminus\hat{G}_{N+1}}$ можно соединить ломаной, звенья которой параллельны координатным осям, точки поворота принадлежат множеству $R_n\setminus\tilde{G}_{N+1}$, а общая длина не превосходит $(\sqrt{n}+2n)|x-y|$.

Точки x,y находятся в замкнутых кубах $K_h^x, K_h^y\subset\overline{R_n\setminus\hat{G}_{N+1}}$, у которых все вершины – синие узлы. Ясно, что если эти кубы пересекаются, то x,y можно соединить монотонной ломаной со звеньями, параллельными координатным осям, полностью лежащей в $K_h^x\cup K_h^y\subset\subset R_n\setminus\hat{G}_{N+1}$. Длина такой ломаной, очевидно, равна $\sqrt{n}\,|x-y|$. Если кубы K_h^x и K_h^y не пересекаются, то $|x-y|\ge h$, и соответствующую ломаную можно построить следующим образом. Выбираем пару вершин $\xi \in K_h^x$ и $\eta \in K_h^y$, расстояние между которыми равно расстоянию между кубами K_h^x и K_h^y, и соединяем их монотонной ломаной с точками поворота в синих и зеленых узлах (которые принадлежат множеству $R_n \setminus \hat{G}_{N+1}$). Затем соединяем x с ξ, а y с η монотонными ломаными, полностью лежащими соответственно в кубах K_h^x и K_h^y. В результате получаем ломаную, соединяющую точки x, y, звенья которой параллельны координатным осям, а точки поворота принадлежат множеству $\overline{R_n \setminus \hat{G}_{N+1}}$. Эта ломаная, вообще говоря, может быть не монотонной, но она состоит всего из трех монотонных участков, и потому ее длину L легко оценить

$$L = \sqrt{n}\,|\xi-\eta| + \sqrt{n}\,|x-\xi| + \sqrt{n}\,|y-\eta| \le$$
$$\le \sqrt{n}\,|\xi-\eta| + 2nh,$$

и так как $|\xi-\eta| \le |x-y|$ и $h \le |x-y|$, то

$$L \le (\sqrt{n}+2n)\,|x-y|. \qquad (18)$$

Остается показать, что на множестве $\overline{R_n \setminus \hat{G}_{N+1}}$ функция $v(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Пусть x, y – две произвольные точки этого множества. Соединим их ломаной, звенья которой параллельны координатным осям, а точки поворота x^k ($k=1, \dots, M$) принадлежат множеству $\overline{R_n \setminus \hat{G}_{N+1}}$. Тогда

$$|v(x)-v(y)| \le \sum_{k=0}^{M} |v(x^k)-v(x^{k+1})| \qquad (x^0=x,\ x^{M+1}=y),$$

и поскольку любая пара точек (x^k, x^{k+1}) лежит на прямой, параллельной координатной оси, то из (13) и (18) следует, что

$$|v(x)-v(y)| \le 2\,(\sqrt{n}+2n)\,\varepsilon^{-\frac{1}{N+1}}\,|x-y|.$$

К этому добавим, что сама функция $v(x)$ на множестве $\overline{R_n \setminus \hat{G}_{N+1}}$ не превосходит $\varepsilon^{-\frac{1}{N+1}}$.

Согласно теореме Уитни [3], функцию $v(x)$, обладающую этими свойствами, можно продолжить на множество $\hat{G}_{N+1}$ так, чтобы полученная функция $\hat{V}(x)$ была гладкой во внутренних точках $\hat{G}_{N+1}$ и всюду выполнялись неравенства

$$|\hat{V}(x)| \le C_0 \max_{x \in R_n \setminus \hat{G}_{N+1}} |v(x)| \le C_0 \varepsilon^{-\frac{1}{N+1}}; \tag{19}$$

$$|\hat{V}(x) - \hat{V}(y)| \le C_1 \varepsilon^{-\frac{1}{N+1}} |x-y|, \tag{20}$$

где постоянные C_0 и C_1 зависят только от n*.
В силу (20) частные производные первого порядка функции $\hat{V}(x)$ во внутренних точках $\hat{G}_{N+1}$ не превосходят $C_1 \varepsilon^{-\frac{1}{N+1}}$ и, следовательно, согласно (19), (17) и (16),

$$\|\hat{V}\|^2_{W_2^1(\hat{G}_{N+1})} \le (nC_1^2 + C_0^2)\varepsilon^{-\frac{2}{N+1}} \operatorname{mes} \hat{G}_{N+1} \le C(n)A\left(\varepsilon^{\frac{1}{N(N+1)}} + \delta^{\frac{1}{2}}\right). \tag{21}$$

Положим теперь $\delta = |\ln \varepsilon|^{-\frac{1}{3}}$, тогда $N \le [A|\ln \varepsilon|^{\frac{1}{3}}] + 1 = O(|\ln \varepsilon|^{\frac{1}{3}})$; из неравенств (19), (16) и (21) вытекает, что функция $\hat{V}(x)$ и множество $\hat{G} = \hat{G}_{N+1} \setminus \partial \hat{G}_{N+1}$ удовлетворяют всем требованиям, кроме, быть может, одного: $G \subseteq \hat{G}$. Но тогда, так как при $x \in R_n \setminus \hat{G}_{N+1}$ $|\hat{V}(x)| \le \varepsilon^{-\frac{1}{N+1}}$, $|\nabla \hat{V}(x)| \le \varepsilon^{-\frac{1}{N+1}}$,

то не меняя $\hat{V}(x)$, можем положить $\hat{G} = (\hat{G}_{N+1} \setminus \partial \hat{G}_{N+1}) \cup \tilde{G}$, где $\tilde{G}$ – открытое множество меры, меньшей 2ε, содержащее G. Необходимые неравенства при этом, очевидно, будут выполняться, причем второе из них для любого множества $\check{G}$, если его мера удовлетворяет первому неравенству. Лемма доказана.

Следствие. Пусть в области Ω заданы последовательность измеримых множеств $\{G^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ и последовательности функций $\{v_r^{(s)}(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\}_{s=1}^{\infty}$ $(r=1,\dots,m)$, причем при $s \to \infty$

---

* Анализ конструкции оператора продолжения показывает, что C_0 можно положить равным 1.

$$mes\, G^{(s)} \to 0 \quad \text{и} \quad \| v_r^{(s)} \|_{W_2^1(\Omega)} < C,$$

где постоянная C не зависит от s и r. Тогда существуют последовательности открытых множеств $\{\hat{G}^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ и функций $\{\hat{v}_r^{(s)}(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\}_{s=1}^{\infty}$ $(r=1,\dots,m)$ такие, что $G^{(s)} \subset \hat{G}^{(s)}$, $\hat{v}_r^{(s)}(x) = v_r^{(s)}(x)$ при $x \in \Omega \setminus \hat{G}^{(s)}$ и

$$mes\, \hat{G}^{(s)} \to 0, \quad \| \hat{v}_r^{(s)} \|_{W_2^1(\hat{G}^{(s)})} \to 0 \quad \text{при } s \to \infty.$$

Доказательство. Сначала при каждом s аппроксимируем функцию $v_r^{(s)}(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функцией $v_{r0}^{(s)}(x) \in C_0^2(\Omega)$ так, чтобы

$$\| v_r^{(s)} - v_{r0}^{(s)} \|_{W_2^1(\Omega)} \le \frac{1}{s}:$$

Затем к функциям $v_{r0}^{(s)}$ и множествам $G^{(s)}$ применяем лемму 2, с помощью которой, учитывая, что $\varepsilon = mes\, G^{(s)} \to 0$ при $s \to \infty$, заключаем, что существуют открытые множества $\hat{G}_r^{(s)}$ и кусочно-гладкие финитные в Ω функции $\hat{v}_{r0}^{(s)}(x)$, такие, что $G^{(s)} \subset \hat{G}_r^{(s)}$, $\hat{v}_{r0}^{(s)}(x) = v_{r0}^{(s)}(x)$ при $x \in \Omega \setminus \hat{G}_r^{(s)}$ и при $s \to \infty$ $mes\, \hat{G}_r^{(s)} \to 0$,

$$\| \hat{v}_{r0}^{(s)} \|_{W_2^1(\hat{G}_r^{(s)})} \to 0.$$

Наконец, полагая $\hat{G}^{(s)} = \bigcup_{r=1}^{m} \hat{G}_r^{(s)}$,

$$\hat{v}_r^{(s)}(x) = \hat{v}_{r0}^{(s)}(x) - (v_r^{(s)}(x) - v_{r0}^{(s)}(x))$$

и учитывая, что все множества $\hat{G}_r^{(s)}$ $(r=1,\dots,m)$ имеют одну и ту же оценку, убеждаемся, что последовательности $\{\hat{G}^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$, $\{\hat{v}_r^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ $(r=1,\dots,m)$ удовлетворяют требуемым условиям.

Лемма 3. Пусть при каждом $h>0$ задан куб $K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)$ с центром в произвольной точке $x^\alpha \in \Omega$, а в нем – последовательность множеств $\left\{G_h^{\alpha(s)}\right\}_{s=1}^{\infty}$ таких, что

$$\overline{\lim}\ mes\left[G_h^{\alpha(s)}\right] = O(h^n) \qquad (h\to 0). \tag{22}$$

Пусть области $\Omega_r^{(s)}$ $(r=1,\dots,m)$ удовлетворяют условию сильной связанности и выполняется условие 2) теоремы I.
Тогда существуют последовательности множеств $\left\{\hat G_{irh}^{\alpha(s)}\right\}_{s=1}^{\infty}$ и функций $\left\{\hat v_{irh}^{\alpha(s)}(x)\right\}_{s=1}^{\infty}$ $(i=1,\dots,n;\ r=1,\dots,m)$ такие, что

$$1.\ G_h^{\alpha(s)} \subset \hat G_{irh}^{\alpha(s)},\quad \overline{\lim_{s\to\infty}}\ mes\left[\hat G_{irh}^{\alpha(s)}\right] = o(h^n),\quad (h\to 0); \tag{23}$$

$$2.\ \hat v_{irh}^{\alpha(s)}(x) \in W_2^1(K_h^\alpha),\quad \max_{x\in K_h^\alpha}\left|\hat v_{irh}^{\alpha(s)}(x)\right| \le Ch; \tag{23а}$$

$$3.\ \overline{\lim_{s\to\infty}} \int\limits_{\hat G_{irh}^{\alpha(s)}} \left|\nabla \hat v_{irh}^{\alpha(s)}\right|^2 dx = o(h^n); \tag{23б}$$

$$4.\ \overline{\lim_{s\to\infty}} \int\limits_{(K_h^\alpha\setminus K_{h'}^\alpha)\cap\Omega_r^{(s)}} \left|\nabla \hat v_{irh}^{\alpha(s)}\right|^2 dx = o(h^n),\quad h' = h - o(h); \tag{23в}$$

$$5.\ \overline{\lim_{s\to\infty}} \int\limits_{(K_h^\alpha\setminus K_{h'}^\alpha)\cap\Omega_r^{(s)}\setminus \hat G_{irh}^{\alpha(s)}} \left|\hat v_{irh}^{\alpha(s)} - (x_i - x_i^\alpha)\right|^2 dx = o(h^{n+2+\tau}); \tag{23г}$$

6. Для любого вектора $l=\{l_1,\dots,l_n\}\in R_n$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int_{K_h^\alpha\cap\Omega_r^{(s)}} \left|\nabla \hat v_{irh}^{\alpha(s)}\right|^2 dx \le h^n \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^r(x^\alpha) l_i l_j + o(h^n), \tag{23д}$$

где $\hat{v}^{\alpha(s)}_{lrh}(x) = \sum_{i=1}^{n} l_i \hat{v}^{\alpha(s)}_{irh}(x)$. Причем, если оценка (22) и пределы по h в условии 2) теоремы I равномерны относительно x^α, x, принадлежащих множеству $E \subset \Omega$, то оценки (23) - (23д) также равномерны по $x^\alpha \in E$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $v^{\alpha(s)}_{irh}(x)$ - функция, доставляющая минимум функционалу (4), когда l - орт оси x_i, а $v^{\alpha(s)}_{lrh}(x)$ при произвольном $l \in R_n$. Тогда

$$|v^{\alpha(s)}_{irh}(x)| \le \frac{h}{2} \quad \text{и} \quad v^{\alpha(s)}_{lrh}(x) = \sum_{i=1}^{n} l_i v^{\alpha(s)}_{irh}(x). \tag{24}$$

Согласно (4), (5) и условию 2) теоремы I,

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int_{K_h^\alpha \cap \Omega_r^{(s)}} \left\{ |\nabla v^{\alpha(s)}_{lrh}|^2 + h^{-2-\tau} |v^{\alpha(s)}_{lrh} - (x-x^\alpha, l)|^2 \right\} dx =$$

$$= h^n \sum_{i,j=1}^{n} a^r_{ij}(x^\alpha) l_i l_j + o(h^n) \tag{25}$$

и, как показано в [2], при достаточно больших $s \ge s(h)$ и $h' = h - 2\rho$, $\rho = o(h)$, справедливы оценки

$$\int_{(K_h^\alpha \setminus K_{h'}^\alpha) \cap \Omega_r^{(s)}} |\nabla v^{\alpha(s)}_{irh}|^2 dx = o(h^n); \tag{26}$$

$$\int_{(K_h^\alpha \setminus K_{h'}^\alpha) \cap \Omega_r^{(s)}} |v^{\alpha(s)}_{irh} - (x_i - x_i^\alpha)|^2 dx = o(h^{n+2+\tau}). \tag{27}$$

Поскольку области $\Omega_r^{(s)}$ удовлетворяют условию сильной связанности, функцию $v^{\alpha(s)}_{irh}(x)$ можно продолжить на множество $K_h^\alpha \setminus \Omega_r^{(s)}$, так, чтобы полученная функция $\tilde{v}^{\alpha(s)}_{irh}(x) \in W_2^1(K_h^\alpha)$ удовлетворяла неравенству

$$\|\tilde{v}_{irh}^{\alpha(s)}\|_{W_2^1(K_h^\alpha)} \le C\,\|v_{irh}^{\alpha(s)}\|_{W_2^1(K_h^\alpha\cap\Omega_r^{(s)})}, \tag{28}$$

где постоянная C не зависит от s и h, причем в силу (24) всегда можно добиться, чтобы

$$\max_{x\in K_h^\alpha} |\tilde{v}_{irh}^{\alpha(s)}(x)| \le \frac{h}{2}. \tag{29}$$

Далее, с помощью линейного преобразования $\xi = h^{-1}(x - x^\alpha)$ отобразим куб K_h^α на единичной куб $K^0 = \left\{\xi\in R_n : |\xi_i| \le \frac{1}{2}\right\}$. При этом множества $G_h^{\alpha(s)}$ переходят в множества $G_h^{0(s)} \subset K^0$ и, согласно (22),

$$mes\, G_h^{0(s)} = h^{-n}\, mes\, G_h^{\alpha(s)} = \varepsilon(s,h) = \varepsilon; \tag{30}$$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\ \varepsilon(s,h) = o(1) \qquad (h\to 0). \tag{30a}$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{V}_{irh}^{(s)}(\xi) = \frac{1}{h}\tilde{v}_{irh}^{\alpha(s)}(h\xi + x^\alpha), \quad \xi\in K^0.$$

В силу (29), (28) и (25) справедливы оценки

$$\max_{\xi\in K^0} |\tilde{V}_{irh}^{(s)}(\xi)| \le \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \|\tilde{V}_{irh}^{(s)}\|_{W_2^1(K^0)} \le \tilde{C},$$

где $\tilde{C}$ не зависит от s и h. Поскольку функцию $\tilde{V}_{irh}^{(s)}(\xi)$ можно продолжить вне куба K^0 с сохранением характера этих оценок, в R_n существует дважды непрерывно дифференцируемая и финитная в R_n функция $V_{irh}^{(s)}(\xi)$, удовлетворяющая условиям

$$\|\tilde{V}_{irh}^{(s)} - V_{irh}^{(s)}\|_{W_2^1(K^0)} \le \frac{1}{s}; \tag{31}$$

$$\max_{\xi \in R_n} |V_{irh}^{(s)}(\xi)| \le \frac{1}{2}, \qquad \|V_{irh}^{(s)}\|_{W_2^1(R_n)} \le C.$$

Применим теперь к множеству $G_h^{0(s)}$ и функции $V_{irh}^{(s)}(\xi)$ лемму 2, согласно которой существуют множество $\hat{G}_{irh}^{0(s)}$ и функция $\hat{V}_{irh}^{(s)}(\xi)$ такие, что

$$\hat{G}_{irh}^{0(s)} \supseteq G_h^{0(s)}, \quad \hat{V}_{irh}^{(s)}(\xi) = V_{irh}^{(s)}(\xi) \text{ при } \xi \in R_n \setminus \hat{G}_{irh}^{0(s)}, \tag{32}$$

$$\max_{\xi \in R_n} |\hat{V}_{irh}^{(s)}(\xi)| \le C_0$$

$$\operatorname{mes} \hat{G}_{irh}^{0(s)} \le C_1 \varepsilon^{A^{-1}|\ln \varepsilon|^{-\frac{1}{3}}}; \tag{33}$$

$$\|\hat{V}_{irh}^{(s)}\|_{W_2^1(\hat{G}_{irh}^{0(s)})} \le C_2 \left(\varepsilon^{2^{-1}A^{-2}|\ln \varepsilon|^{-\frac{2}{3}}} + |\ln \varepsilon|^{-\frac{1}{6}}\right), \tag{34}$$

где постоянные A, C_i $(i = 0, 1, 2)$ не зависят от s и h, а ε определено равенством (30).

Положим

$$\hat{G}_{irh}^{\alpha(s)} = \left\{x = h\xi + x^\alpha : \xi \in \hat{G}_{irh}^{0(s)}\right\};$$

$$\hat{V}_{irh}^{\alpha(s)}(x) = h\hat{V}_{irh}^{(s)}(h^{-1}(x - x^\alpha)), \quad x \in K_h^\alpha;$$

$$\left(\hat{V}_{lrh}^{\alpha(s)}(x) = \sum_{i=1}^{n} l_i \hat{V}_{irh}^{\alpha(s)}(x), \quad \forall l \in R_n\right)$$

и покажем, что функции $\hat{V}_{irh}^{\alpha(s)}(x)$ и множества $\hat{G}_{irh}^{\alpha(s)}$ удовлетворяют всем требуемым условиям. Действительно, по построению $G_h^{0(s)} \subseteq \hat{G}_{irh}^{0(s)}$, $\hat{V}_{irh}^{(s)}(x) \in W_2^1(K^0)$ и

$$mes\, \hat{G}^{\alpha(s)}_{irh} = h^n mes\, \hat{G}^{0(s)}_{irh};$$

$$\max_{x \in K^\alpha_h} |v^{\alpha(s)}_{irh}(x)| = h \max_{\xi \in K^0} |\hat{V}^{(s)}_{irh}(\xi)|;$$

$$\|\hat{v}^{\alpha(s)}_{irh}\|_{W^1_2(\hat{G}^{\alpha(s)}_{irh})} \le h^n \|\hat{V}^{(s)}_{irh}\|_{W^1_2(\hat{G}^{0(s)}_{irh})},$$

откуда с помощью оценок (32) – (34) и (30а) получаем (23) – (23б). Далее, поскольку при $\xi \in R_n \setminus \hat{G}^{0(s)}_{irh}$ $\hat{V}^{(s)}_{irh}(\xi) = V^{(s)}_{irh}(\xi)$,

а при $x \in K^\alpha_h \cap \Omega^{(s)}_r$ $\tilde{v}^{\alpha(s)}_{irh}(x) = v^{\alpha(s)}_{irh}(x)$, то в силу (31)

$$\|\hat{v}^{\alpha(s)}_{irh} - v^{\alpha(s)}_{irh}\|_{W^1_2(K^\alpha_h \cap \Omega^{(s)}_h \setminus \hat{G}^{\alpha(s)}_{irh})} \le \frac{h^n}{s}$$

и, следовательно, из (25), (26), (23б) и равенства (24) вытекают остальные оценки (23в) – (23д). Если пределы по h в условии 2) теоремы I и оценка (22) равномерны по $x, x^\alpha \in E \subset \Omega$, то оценки (25) – (26) и (30а) также выполняются равномерно по $x^\alpha \in E$, откуда следует равномерность оценок (23) – (23д). Лемма доказана.

Лемма 4. Если выполняется условие 4) теоремы I, то при любых $h > 0$ и $r = 1, 2, \ldots, m$ в кубе $K^\alpha_h = K(x^\alpha, h)$ существуют последовательности измеримых множеств $\{\hat{G}^{\alpha(s)}_{rh}\}^\infty_{s=1}$ и функций $\{\hat{\varphi}^{\alpha(s)}_{rh}(x)\}^\infty_{s=1}$, такие, что $\hat{\varphi}^{\alpha(s)}_{rh}(x) \in W^1_2(K^\alpha_h \cap \Omega^{(s)})$ $0 \le \hat{\varphi}^{\alpha(s)}_{rh}(x) \le 1$, $\hat{\varphi}^{\alpha(s)}_{rh}(x) = 1$ при $x \in K^\alpha_h \cap \Omega^{(s)}_r \setminus \hat{G}^{\alpha(s)}_{rh}$, $\hat{\varphi}^{\alpha(s)}_{rh}(x) = 0$, при $x \in K^\alpha_h \cap \Omega^{(s)} \setminus (\Omega^{(s)}_r \cup \hat{G}^{\alpha(s)}_{rh})$ и при $h \to 0$ справедливы оценки:

$$1.\ \overline{\lim_{s\to\infty}}\ mes\,[\hat{G}^{\alpha(s)}_{rh}] = O(h^{n+\frac{\theta}{3}}); \tag{35}$$

$$2.\ \overline{\lim_{s\to\infty}} \int_{(K^\alpha_h \setminus K^\alpha_{h'}) \cap \Omega^{(s)}} |\nabla \hat{\varphi}^{\alpha(s)}_{rh}|^2 dx = o(h^n),\quad h' = h - o(h); \tag{35а}$$

3. $$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int\limits_{(K_h^\alpha \setminus K_{h'}^\alpha)} |\hat{\varphi}_{rh}^{\alpha(s)} - \chi_r^{(s)}|^2 dx = O\left(h^{n+2+\theta} + \rho h^{n+1+\frac{\theta}{2}}\right); \tag{35б}$$

4. Для любого вектора $t = \{t_1, \dots, t_m\} \in R_m$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int\limits_{\Omega^{(s)} \cap K_h^\alpha} \left|\nabla \hat{\varphi}_{th}^{\alpha(s)}\right|^2 dx \le h^n \sum_{r,p=1}^{m} c_{rp}(x^\alpha) t_r t_p + o(h^n), \tag{35в}$$

где $\hat{\varphi}_{th}^{\alpha(s)}(x) = \sum\limits_{r=1}^{m} t_r \hat{\varphi}_{rh}^{\alpha(s)}(x)$, $\chi_r^{(s)}(x)$ – характеристическая функция области $\Omega_r^{(s)}$. Причем, если в условии 4) пределы по h достигаются равномерно относительно $x \in E \subset \Omega$, то эти оценки равномерны по $x \in E$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\varphi_{rh}^{\alpha(s)}(x)$ – функция, доставляющая минимум функционалу (6), когда вектор $t \in R_m$ имеет единственную, отличную от нуля компоненту $t_r = 1$, а $\varphi_{th}^{\alpha(s)}(x)$ – при произвольном $t \in R_m$. Тогда

$$0 \le \varphi_{rh}^{\alpha(s)}(x) \le 1 \quad \text{и} \quad \varphi_{th}^{\alpha(s)}(x) = \sum_{r=1}^{m} t_r \varphi_{rh}^{\alpha(s)}(x). \tag{36}$$

Используя условие 4) теоремы I, так же, как в [2], нетрудно показать, что для достаточно больших $s \ge s(h)$ и $h' = h - 2\rho$, $\rho = o(h)$ справедливы оценки

$$\int\limits_{(K_h^\alpha \setminus K_{h'}^\alpha) \cap \Omega^{(s)}} |\nabla \varphi_{rh}^{\alpha(s)}|^2 dx = o(h^n); \tag{37}$$

$$\int\limits_{(K_h^\alpha \setminus K_{h'}^\alpha) \cap \Omega^{(s)}} |\varphi_{rh}^{\alpha(s)} - \chi_r^{(s)}|^2 dx = O(h^{n+2+\theta}) \quad (h \to 0). \tag{38}$$

Кроме того, согласно (6), (7) и условию 4),

$$\int_{K_h^\alpha \cap \Omega^{(s)}} |\nabla \psi_{th}^{\alpha(s)}|^2 dx \le h^n \sum_{r,p=1}^{m} c_{rp}(x^\alpha) t_r t_p + o(h^n), \tag{39}$$

и при любом $\varepsilon > 0$

$$mes \left\{ x \in K_h^\alpha \cap \Omega^{(s)} : \ |\psi_r^{\alpha(s)}(x) - \chi_r^{(s)}(x)| \ge \varepsilon \right\} < C \frac{h^{n+2+\theta}}{\varepsilon^2}, \tag{40}$$

где C не зависит от s и h.

Положим

$$\hat{G}_{rh}^{\alpha(s)} = \left\{ x \in K_h^\alpha \cap \Omega^{(s)} : |\psi_{rh}^{\alpha(s)}(x) - \chi_r^{(s)}(x)| \ge h^{1+\frac{\theta}{3}} \right\}; \tag{41}$$

$$\hat{\psi}_{rh}^{\alpha(s)}(x) = \begin{cases} 1; & x \in K_h^\alpha \cap \Omega_r^{(s)} \setminus \hat{G}_{rh}^{\alpha(s)}; \\ (1-2h^{1+\frac{\theta}{3}})^{-1}(\psi_{rh}^{\alpha(s)}(x) - h^{1+\frac{\theta}{3}}), & x \in \hat{G}_{rh}^{\alpha(s)}, \\ 0, & x \in K_h^\alpha \cap \Omega^{(s)} \setminus (\Omega_r^{(s)} \cup \hat{G}_{rh}^{\alpha(s)}) \end{cases} \tag{42}$$

$$\left(\hat{\psi}_{th}^{\alpha(s)}(x) = \sum_{r=1}^{m} t_r \hat{\psi}_{rh}^{\alpha(s)}(x), \quad \forall t \in R_m \right).$$

Тогда функции $\hat{\psi}_{rh}^{\alpha(s)}(x)$ и множества $\hat{G}_{rh}^{\alpha(s)}$ будут удовлетворять всем требуемым условиям. Действительно, согласно (42), из (37), (39) и равенства (36) вытекают соответственно оценки (35а), (35в), а из (41) и (40) следует (35). Остается убедиться в справедливости оценки (35б). Согласно (42), при $h < \frac{1}{8}$

$$\int_{(K_h^\alpha \setminus K_{h'}^\alpha) \cap \Omega^{(s)}} |\hat{\psi}_{rh}^{\alpha(s)} - \chi_r^{(s)}|^2 dx = (1-2h^{1+\frac{\theta}{3}})^{-2} \int_{(K_h^\alpha \setminus K_{h'}^\alpha) \cap \Omega^{(s)}} |\psi_{rh}^{\alpha(s)} - h^{1+\frac{\theta}{3}} - \chi_r^{(s)} \times$$

$$\times (1-2h^{1+\frac{\theta}{3}})|^2 dx \le 18 \int_{(K_h^\alpha \setminus K_{h'}^\alpha) \cap \Omega^{(s)}} |\psi_{rh}^{\alpha(s)} - \chi_r^{(s)}|^2 dx + 18 \int_{(K_h^\alpha \setminus K_{h'}^\alpha) \cap \Omega^{(s)}} \times$$

$$\times \ |2h^{1+\frac{\theta}{3}} \chi_r^{(s)} - h^{1+\frac{\theta}{3}}|^2 dx$$

Отсюда, учитывая, что при $h \to 0$ $mes\,[K_h^\alpha \setminus K_{h'}^\alpha] \sim \rho h^{n-1}$ ($h' = h - 2\rho$) и вспоминая оценку (38), получаем (35б). Ясно, что если пределы по h в условии 4) теоремы I достигаются равномерно относительно $x \in E \subset \Omega$, то оценки (37) – (40) будут равномерны по $x^\alpha \in E$, откуда вытекает равномерность оценок (35) – (35в). Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $w(x) = \{w_1(x), \dots, w_m(x)\}$ – произвольная вектор-функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если выполняются условия 4) и 5) теоремы I, то существует последовательность функций $\{w^{(s)}(x) \in W_2^1(\Omega^{(s)});\ w^{(s)}(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}_{s=1}^\infty$, сходящаяся к $w(x)$ в смысле $L_2(\Omega^{(s)}, m)$ (см. (8)) и при достаточно больших s $(s \geq s(w))$ удовлетворяющая неравенству

$$\|w^{(s)}\|_{W_2^1(\Omega^{(s)})} \leq C\,\|w\|_{W_2^1(\Omega)}, \tag{43}$$

где постоянная C не зависит от w и $s \geq s(w)$.

Доказательство. Поскольку класс гладких и финитных в Ω вектор-функций $(C_0^1(\Omega))$ плотен в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, достаточно убедиться в справедливости леммы при $w(x) \in C_0^1(\Omega)$. Покроем область Ω кубами $K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)$ с ребрами достаточно малой длины $h > 0$, ориентированными по координатным осям и центрами x^α, лежащими в узлах пространственной решетки периода $h - \rho$ $(0 < \rho \ll h)$. С этим покрытием свяжем разбиение единицы $\{\varphi^\alpha(x)\}$, т.е. построим набор бесконечно дифференцируемых и финитных функций, удовлетворяющих условиям $0 \leq \varphi^\alpha(x) \leq 1$, $\varphi^\alpha(x) = 0$ при $x \notin K_h^\alpha$ и $\varphi^\alpha(x) = 1$ при $x \in K_h^\alpha \setminus \bigcup_{\beta\neq\alpha} K_h^\beta$, $\sum_\alpha \varphi^\alpha(x) = 1$ при $x \in \Omega$, $\left|\dfrac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x_i}\right| < C\rho^{-1}$ $(i = 1, \dots, n)$. Пусть $\hat{\varphi}_r^\alpha(x) = \hat{\varphi}_{rh}^{\alpha(s)}(x)$ и $\hat{G}_{rh}^{\alpha(s)}$ – функции и множества, определенные в лемме 4.

Рассмотрим в области $\Omega^{(s)}$ функцию

$$w^{(s)}(x) = \sum_\alpha \sum_{r=1}^m w_r(x)\,\hat{\varphi}_r^\alpha(x)\,\varphi^\alpha(x). \tag{44}$$

В силу свойств функций $\varphi^\alpha(x)$ $\hat{\varphi}_r^\alpha(x)$ и $w^{(s)}(x) \in W_2^1(\Omega^{(s)})$.

Положим $\rho = h^{1+\frac{\varrho}{3}}$ и покажем, что тогда при правильном выборе $h\,(h = h\,(s))$ функции $w^{(s)}\,(x)$ будут удовлетворять всем требуемым условиям.

Очевидно,

$$\|w^{(s)}\|^2_{W_2^1(\Omega^{(s)})} \le \int_{\Omega^{(s)}} \left\{ s \sum_{i=1}^{3} |g_{ih}^{(s)}|^2 + (w^{(s)})^2 \right\} dx , \qquad (45)$$

где
$$g_{1h}^{(s)} = \sum_{\alpha} \sum_{r=1}^{m} \hat{\varphi}_r^{\alpha}(x)\, \varphi^{\alpha}(x)\, \nabla w_r(x);$$

$$g_{2h}^{(s)} = \sum_{\alpha} \sum_{r=1}^{m} w_r(x)\, \varphi^{\alpha}(x)\, \nabla \hat{\varphi}_r^{\alpha}(x);$$

$$g_{3h}^{(s)} = \sum_{\alpha} \sum_{r=1}^{m} w_r(x)\, \hat{\varphi}_r^{\alpha}(x)\, \nabla \varphi^{\alpha}(x) =$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_{r=1}^{m} w_r(x) (\hat{\varphi}_r^{\alpha}(x) - \chi_r^{(s)}(x))\, \nabla \varphi^{\alpha}(x) .$$

Заметим, что в силу финитности $w(x)$ число слагаемых в сумме по α не превосходит $N(w,h) = O(h^{-n})$, а носители функций $\varphi^{\alpha}(x)$ пересекаются в конечном числе, не превосходящем s^n. Поэтому, учитывая свойства функций $\varphi^{\alpha}(x)$, $\hat{\varphi}_r^{\alpha}(x)$ (см. лемму 4), условие 4) теоремы I и гладкость вектор-функции $w(x)$, получаем, что при достаточно малых $h\,(h \le h(w))$ и достаточно больших $s\,(s \ge s(h))$

$$\int_{\Omega^{(s)}} \left\{ |g_{1h}^{(s)}|^2 + (w^{(s)})^2 \right\} dx \le C_1(n,m)\, \|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} ;$$

$$\int_{\Omega^{(s)}} |g_{2h}^{(s)}|^2 dx \le C_2'(n,m) \sum_{\alpha} \sum_{r=1}^{m} \max_{K_h^{\alpha}} |w_r|^2 \int_{K_h^{\alpha} \cap \Omega^{(s)}} |\nabla \hat{\varphi}_r^{\alpha}|^2 dx \le$$

$$\le C_2(n,m)\, \|w\|^2_{L_2(\Omega)} ,$$

при $\rho = h^{1+\frac{\theta}{3}}$ и $h' = h - 2\rho$

$$\int\limits_{\Omega^{(s)}} |g_{3h}^{(s)}|^2 dx \le C_3'(n,m) \sum_\alpha \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{\rho^2} \max_{K_h^\alpha} |w_r|^2 \times$$

$$\times \int\limits_{(K_h^\alpha \setminus K_{h'}^\alpha) \cap \Omega^{(s)}} |\hat{\varphi}_r^\alpha - \chi_r^{(s)}|^2 dx \le C_3(w,n,m) h^{\frac{\theta}{3}},$$

причем постоянные $C_1(n,m)$ и $C_2(n,m)$ не зависят от $w(x) \in C_0^1(\Omega)$. Из этих неравенств и (45) следует, что для любой вектор-функции $w(x) \in C_0^1(\Omega)$ найдется такое число $\hat{h}(w)$, что при каждом $h \le \hat{h}(w)$ и $\rho = h^{1+\frac{\theta}{3}}$ существует число $\hat{s}(h)$ такое, что при всех $s \ge \hat{s}(h)$ ($h \le \hat{h}(w)$, $\rho = h^{1+\frac{\theta}{3}}$) выполняется неравенство (43). Поэтому при построении функции $w^{(s)}(x)$ в формуле (44) будем полагать $h = \frac{1}{k}$ ($k \to \infty$) и соответственно $\rho = \left(\frac{1}{k}\right)^{1+\frac{\theta}{3}}$, когда s находится в пределах $\hat{s}\left(\frac{1}{k}\right) \le s < \hat{s}\left(\frac{1}{k+1}\right)$.

Остается показать, что полученная последовательность функций $\left\{w^{(s)}(x)\right\}_{s=1}^{\infty}$ сходится к вектор-функции $w(x)$ в смысле $L_2(\Omega^{(s)}, m)$. Согласно (44),

$$I^{(s)} = \sum_{r=1}^{m} \int\limits_{\Omega} |w^{(s)}\chi_r^{(s)} - w_r \chi_r^{(s)}|^2 dx + \int\limits_{Q^{(s)}} |w^{(s)}|^2 dx =$$

$$= \sum_{r=1}^{m} \int\limits_{\Omega_r^{(s)}} \left| \sum_\alpha \left(\sum_{\rho=1}^{m} w_\rho \hat{\varphi}_\rho^\alpha - w_r \right) \varphi^\alpha \right|^2 dx + \int\limits_{Q^{(s)}} \left| \sum_\alpha \sum_{\rho=1}^{m} w_\rho \hat{\varphi}_\rho^\alpha \varphi^\alpha \right|^2 dx,$$

откуда, учитывая, что $0 \le \hat{\varphi}_\rho^\alpha(x) \le 1$ и $\hat{\varphi}_\rho^\alpha(x) = \delta_{\rho r}$ при $x \in K_h^\alpha \cap \Omega_r^{(s)} \setminus \bigcup_{\rho=1}^{m} \hat{G}_{\rho h}^{\alpha(s)}$, получаем

$$I^{(s)} \le \sum_{r=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{\bigcup_\rho \hat{G}_{\rho h}^{\alpha(s)}} (w_r)^2 dx + \int\limits_{Q^{(s)}} \left(\sum_{\rho=1}^{m} |w_\rho| \right)^2 dx. \qquad (46)$$

Так как при фиксированной $w(x)\in C_0^1(\Omega)$ $N=N(w,h)=O(h^{-n})$ и $h=h(s)\to 0$ при $s\to\infty$, то из (46), (35) и условия 5) теоремы I следует, что $\lim\limits_{s\to\infty} I^{(s)}=0$. Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть в области Ω задана вектор-функция $v(x)=\{v_1(x),\ldots,v_m(x)\}\in C_0^1(\Omega)$, удовлетворяющая условию: для любых $r\neq p$ $(1\le r,p\le m)$ $mes\{x\in\Omega: v_r(x)\neq v_p(x)\}=mes[supp\ v_r\cup supp\ v_p]$, т.е. компоненты $v(x)$ на носителях могут совпадать между собой лишь на множествах нулевой меры*.

Пусть в областях $\Omega^{(s)}=\Omega\setminus F^{(s)}=\bigcup\limits_{r=1}^{m}\Omega_r^{(s)}\cup Q^{(s)}$ при каждом $s=1,2,\ldots$ заданы функции $v^{(s)}(x)=W_2^1(\Omega^{(s)})$ такие, что $v^{(s)}(x)=0$ при $x\in\partial\Omega$ и

$$\|v^{(s)}(x)\|_{W_2^1(\Omega^{(s)})}<C, \tag{47}$$

где постоянная C не зависит от s, а при $s\to\infty$ последовательность $\{v^{(s)}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ сходится в смысле $L_2(\Omega^{(s)},m)$ к вектор-функции $v(x)$ (см. (8)).

Тогда, если области $\Omega_r^{(s)}$ удовлетворяют условию сильной связанности и выполняется условие 4) теоремы I, то существуют последовательности открытых множеств $\{\hat G^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ и функций $\{\hat v_r^{(s)}(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\}_{s=1}^{\infty}$ $(r=1,\ldots,m)$ такие, что $Q^{(s)}\subset\hat G^{(s)}\subset\Omega^{(s)}$, $\hat v_r^{(s)}(x)=v^{(s)}(x)$ при $x\in\Omega^{(s)}\setminus\hat G^{(s)}$ и при $s\to\infty$

$$mes\,\hat G^{(s)}\to 0,\quad \|\hat v_r^{(s)}\|_{W_2^1(\hat G^{(s)})}\to 0, \tag{48}$$

$$\lim_{s\to\infty}\int_{\hat G^{(s)}}|\nabla v^{(s)}|^2dx\ge\int_{\Omega}\sum_{r,p=1}^{m}c_{rp}(x)v_r(x)v_p(x)\,dx. \tag{49}$$

Доказательство. В силу (47) и условия сильной связанности областей $\Omega_r^{(s)}$ функцию $v^{(s)}(x)$ можно продолжить с множеств $\overline{\Omega_r^{(s)}}$ на всю область Ω так, чтобы полученные функции $v_r^{(s)}(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ удовлетворяли условиям $v_r^{(s)}(x)=v^{(s)}(x)$ при $x\in\Omega_r^{(s)}$ и

* Лемма верна и без этого предположения, которое введено для упрощения доказательства.

$$\|v_r^{(s)}\|_{W_2^1(\Omega)} \le C_r \quad (r=1,\dots,m),$$

где постоянные C_r не зависят от s. Из сходимости последовательности $\{v^{(s)}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ к $v(x)$ в смысле $L_2(\Omega^{(s)}, m)$ следует, что существуют измеримые множества $G_0^{(s)}$ такие, что $Q^{(s)} \subset G_0^{(s)} \subset \Omega^{(s)}$, $\operatorname{mes} G_0^{(s)} \to 0$ при $s \to \infty$ и на множестве $\Omega_r^{(s)} \setminus G_0^{(s)}$ $v^{(s)}(x)$ сходится к $v_r(x)$ равномерно, а значит, при $x \in \Omega_r^{(s)} \setminus G_0^{(s)}$

$$|v_r^{(s)}(x) - v_r(x)| \le \varepsilon(s) \quad (\varepsilon(s) \to 0 \text{ при } s \to \infty). \tag{50}$$

Воспользуемся теперь следствием из леммы 2 применительно к последовательности множеств $\{G_0^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ и функций $\{v_r^{(s)}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ ($r=1,\dots,m$). Согласно последнему, существуют последовательности множеств $\{\hat G_0^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ и функций $\{\hat v_r^{(s)}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ $(r=1,\dots,m)$ таких, что $G_0^{(s)} \subset \hat G_0^{(s)}$, $\hat v_r^{(s)}(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\hat v_r^{(s)}(x) = v_r^{(s)}(x)$ при $x \in \Omega \setminus \hat G_0^{(s)}$ и при $s \to \infty$

$$\operatorname{mes} \hat G_0^{(s)} \to 0, \qquad \|\hat v_r^{(s)}\|_{W_2^1(\hat G_0^{(s)})} \to 0.$$

Положим $\hat G^{(s)} = \Omega^{(s)} \cap \hat G_0^{(s)}$. Ясно, что при $x \in \Omega^{(s)} \setminus \hat G^{(s)}$

$$\hat v_r^{(s)}(x) = v_r^{(s)}(x) = v^{(s)}(x) \tag{51}$$

и, поскольку $\hat G^{(s)} \subset \hat G_0^{(s)}$, то удовлетворяются условия (48).

Докажем теперь неравенство (49). Для этого введем функцию

$$\tilde v_r^{(s)}(x) = \begin{cases} \hat v_r^{(s)}(x), & \text{если } v_r(x) - \varepsilon(s) \le \hat v_r^{(s)}(x) \le v_r(x) + \varepsilon(s); \\ v_r(x) \pm \varepsilon(s), & \text{если } \hat v_r^{(s)}(x) \gtrless v_r(x) \pm \varepsilon(s). \end{cases} \tag{52}$$

Как известно, эта конструкция обеспечивает принадлежность $\tilde{v}_r^{(s)}(x)$ пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Кроме того, всюду

$$|\tilde{v}_r^{(s)}(x) - v_r(x)| \leq \varepsilon(s), \tag{53}$$

а в силу (50), (51) $\tilde{v}_r^{(s)}(x) = v^{(s)}(x)$ при $x \in \Omega^{(s)} \setminus \hat{G}^{(s)}$. Учитывая гладкость функций $v_r(x)$ и (48), получаем

$$\| \tilde{v}_r^{(s)} \|_{W_2^1(\hat{G}^{(s)})} \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{48}$$

Разобьем пространство R_n на непересекающиеся (во внутренних точках) кубы $K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)$ с центрами в точках x^α и ребрами длины h, ориентированными по координатным осям, и выделим те из них $\{\alpha = 1, \ldots, N(\delta, h)\}$, которые принадлежат области

$$\Omega_\delta = \left\{ x \in \Omega : |v_r(x) - v_p(x)| > \delta, \quad \forall r \neq p \right\}.$$

Заметим, что в силу сделанного предположения относительно вектор-функции $v(x)$

$$\lim_{\delta \to 0} mes\,[\Omega_\delta] = mes\,[\bigcup_{r=1}^{m} supp\, v_r]. \tag{54}$$

В пересечении каждого из выделенных кубов с множеством $\hat{G}^{(s)}$ рассмотрим функцию $v_h^{\alpha(s)}(x)$, доставляющую минимум функционалу

$$J^\alpha(w^{(s)}) = \int_{\hat{G}^{(s)} \cap K_h^\alpha} |\nabla w^{(s)}|^2 dx \tag{55}$$

в классе функций из $W_2^1(\hat{G}^{(s)} \cap K_h^\alpha)$, равных $v^{(s)}(x)$ на множестве $\partial\hat{G}^{(s)} \cap \bigcup_{r=1}^{m} \Omega_r^{(s)} \cap K_h^\alpha$. Ясно, что

$$J^\alpha(v^{(s)}) \geq J^\alpha(v_h^{\alpha(s)}). \tag{56}$$

Представим $v_h^{\alpha(s)}(x)$ в виде

$$V_h^{\alpha(s)}(x)=\bar V_h^{\alpha(s)}(x)+w_h^{\alpha(s)}(x), \tag{57}$$

где функция $\bar V_h^{\alpha(s)}(x)\in W_2^1(\hat G^{(s)}\cap K_h^\alpha)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta \bar V_h^{\alpha(s)}(x)=0, \qquad x\in \hat G^{(s)}\cap K_h^\alpha;\\ &\bar V_h^{\alpha(s)}(x)=V_r(x^\alpha),\quad x\in\partial\hat G^{(s)}\cap\Omega_r^{(s)}\cap K_h^\alpha\ (r=1,\dots,m);\\ &\frac{\partial V_h^{\alpha(s)}}{\partial\nu}(x)=0,\qquad x\in\partial(\hat G^{(s)}\cap K_h^\alpha)\setminus[\partial\hat G^{(s)}\cap\bigcup_{r=1}^m\Omega_r^{(s)}\cap K_h^\alpha].\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Здесь производную по нормали $\frac{\partial}{\partial\nu}$ следует понимать, вообще говоря, в обобщенном смысле [2]. Из (57) и (58) следует, что функция $w_h^{\alpha(s)}(x)$ должна минимизировать функционал (55) в классе функций из $W_2^1(\hat G^{(s)}\cap K_h^\alpha)$, принимающих на множествах $\partial\hat G^{(s)}\cap\Omega_r^{(s)}\cap K_h^\alpha$ $(r=1,\dots,m)$ соответственно значения $V^{(s)}(x)-V_r(x^\alpha)$. Легко видеть, что этому классу принадлежит функция

$$\tilde w_h^{\alpha(s)}(x)=\sum_{r=1}^m(\tilde V_r^{\alpha(s)}(x)-V_r(x^\alpha))\psi_r^{\alpha(s)}(x),$$

где $\tilde V_r^{\alpha(s)}(x)$ определены равенствами (52), а функции $\psi_r^{\alpha(s)}(x)$ минимизирует функционал (55) при условиях: $\psi_r^{\alpha(s)}(x)=1$ при $x\in\partial\hat G^{(s)}\cap\Omega_r^{(s)}\cap K_h^\alpha$ и $\psi_r^{\alpha(s)}(x)=0$ при $x\in\partial\hat G^{(s)}\cap\bigcup_{p\neq r}\Omega_p^{(s)}\cap K_h^\alpha$. Следовательно,

$$J^\alpha(w_h^{\alpha(s)})\le J^\alpha(\tilde w_h^{\alpha(s)}),$$

и, учитывая, что $0\le\psi_r^{\alpha(s)}(x)\le 1$, получаем

$$J^\alpha(w_h^{\alpha(s)})\le 2m\sum_{r=1}^m\left\{\max_{x\in\hat G^{(s)}\cap K_h^\alpha}|\tilde V_r^{\alpha(s)}(x)-V_r(x^\alpha)|^2 J^\alpha(\psi_r^{\alpha(s)})+J^\alpha(\tilde V_r^{\alpha(s)})\right\}.$$

Отсюда в силу (48′), (53) и гладкости функций $v_r(x)$ следует, что при достаточно больших s $(s \geq s(h))$

$$J^\alpha(w_h^{\alpha(s)}) \leq Ch^2 \sum_{r=1}^{m} J^\alpha(\psi_r^{\alpha(s)}) + o(1), \quad (s \to \infty), \tag{59}$$

где постоянная C не зависит от h и $s \geq s(h)$. Покажем, что при любом $r = 1, \ldots, m$ справедливо неравенство

$$J^\alpha(\psi_r^{\alpha(s)}) \leq \frac{1}{\delta^2} J^\alpha(\bar{v}_h^{\alpha(s)}). \tag{60}$$

Для этого перенумеруем числа $v_r(x^\alpha)$ в порядке возрастания $v_1(x^\alpha) < v_2(x^\alpha) < \ldots < v_m(x^\alpha)$ и рассмотрим функцию

$$u_r^{\alpha(s)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{v}_h^{\alpha(s)}(x) > v_r(x^\alpha); \\ \frac{1}{\Delta_r^\alpha}\left[\bar{v}_h^{\alpha(s)}(x) - v_{r-1}(x^\alpha)\right], & \text{если } v_{r-1}(x^\alpha) \leq \bar{v}_h^{\alpha(s)}(x) \leq v_r(x^\alpha); \\ 0, & \text{если } \bar{v}_h^{\alpha(s)}(x) < v_{r-1}(x^\alpha), \end{cases}$$

где $\Delta_r^\alpha = v_r(x^\alpha) - v_{r-1}(x^\alpha)$, $v_0(x^\alpha) = v_1(x^\alpha) - \delta$ и, поскольку $x^\alpha \in \Omega_\delta$, $\Delta_r^\alpha > \delta$.

Ясно, что $u_r^{\alpha(s)}(x) \in W_2^1(\hat{G}^{(s)} \cap K_h^\alpha)$ и

$$J^\alpha(u_r^{\alpha(s)}) \leq \frac{1}{(\Delta_r^\alpha)^2} J^\alpha(\bar{v}_h^{\alpha(s)}) \leq \frac{1}{\delta^2} J^\alpha(\bar{v}_h^{\alpha(s)}).$$

Кроме того, $u_r^{\alpha(s)}(x)$ равно I при $x \in \partial\hat{G}^{(s)} \cap \Omega_r^{(s)} \cap K_h^\alpha$ и 0 при $x \in \partial\hat{G}^{(s)} \cap \bigcup_{\rho \neq r} \Omega_\rho^{(s)} \cap K_h^\alpha$, т.е. принадлежит классу функций, в котором $\psi_r^{\alpha(s)}(x)$ минимизирует функционал (55). Следовательно,

$$J^\alpha(\psi_h^{\alpha(s)}) \leq J^\alpha(u_r^{\alpha(s)}) \leq \frac{1}{\delta^2} J^\alpha(\bar{v}_h^{\alpha(s)}),$$

и неравенство (60) установлено.

Теперь оценим $J^{\alpha}(v^{(s)})$. Учитывая (56) с помощью (57), (59) и (60), получаем

$$J^{\alpha}(v^{(s)}) \geq J^{\alpha}(\bar{v}_h^{\alpha(s)})\left[1-O\left(\frac{h^2}{\delta^2}\right)\right]+o(1), \quad (s\to\infty). \tag{61}$$

Продолжим функцию $\bar{v}_h^{\alpha(s)}(x)$ на всю область $\Omega^{(s)}\cap K_h^{\alpha}$, положив $\bar{v}_h^{\alpha(s)}(x)=v_r(x^{\alpha})$ при $x\in\Omega_r^{(s)}\setminus\hat{G}^{(s)}$. Тогда $\bar{v}_h^{\alpha(s)}(x)\in W_2^1(\Omega^{(s)}\cap K_h^{\alpha})$ и, согласно (6) и (7),

$$\int\limits_{\Omega^{(s)}\cap K_h^{\alpha}}\left\{|\nabla\bar{v}_h^{\alpha(s)}|^2+h^{-2-\theta}\left|\bar{v}_h^{\alpha(s)}-\sum_{r=1}^{m}v_r(x^{\alpha})\chi_r^{(s)}\right|^2\right\}dx \geq$$

$$\geq \sum_{r,\rho=1}^{m} C_{r\rho}(s,h,x^{\alpha})\,v_r(x^{\alpha})\,v_{\rho}(x^{\alpha}).$$

Так как $|\bar{v}_h^{\alpha(s)}(x)|<C$ и $mes\,\hat{G}^{(s)}\to 0$ при $s\to\infty$, то отсюда следует, что

$$J^{\alpha}(\bar{v}_h^{\alpha(s)}) \geq \sum_{r,p=1}^{m} C_{rp}(s,h,x^{\alpha})\,v_r(x^{\alpha})\,v_{\rho}(x^{\alpha})+o(1) \quad (s\to\infty). \tag{62}$$

С помощью неравенств (61) и (62) получаем

$$\varliminf_{s\to\infty}\int\limits_{\hat{G}^{(s)}}|\nabla v^{(s)}|^2dx \geq \sum_{\alpha=1}^{N(h,\delta)}\varliminf_{s\to\infty} J^{\alpha}(v^{(s)}) \geq$$

$$\geq \sum_{\alpha=1}^{N(h,\delta)}\sum_{r,p=1}^{m}\varliminf_{s\to\infty} C_{r\rho}(s,h,x^{\alpha})\,v_r(x^{\alpha})\,v_{\rho}(x^{\alpha})\left[1-O\left(\frac{h^2}{\delta^2}\right)\right].$$

Перейдем к пределу по $h\to 0$ при фиксированном $\delta>0$. Тогда, учитывая гладкость функций $v_r(x)$ $(r=1,\ldots,m)$ и пользуясь условием 4) теоремы I, находим, что

$$\varliminf_{s\to\infty}\int\limits_{\hat{G}^{(s)}}|\nabla v^{(s)}|^2dx \geq \int\limits_{\Omega_{\delta}}\sum_{r,p=1}^{m} c_{rp}(x)\,v_r(x)\,v_{\rho}(x)\,dx.$$

Отсюда, переходя к пределу по $\delta\to 0$ и вспоминая (54), приходим к требуемому неравенству (49). Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы I.

Решение $u^{(s)} = u^{(s)}(x)$ задачи (1), (2) минимизирует функционал

$$J(u^{(s)}) = \int_{\Omega^{(s)}} \left\{ |\nabla u^{(s)}|^2 + \lambda (u^{(s)})^2 + 2f^{(s)} u^{(s)} \right\} dx \qquad (63)$$

в классе функций $u^{(s)}(x) \in W_2^1(\Omega^{(s)})$, равных 0 на $\partial\Omega$. Отсюда, учитывая, что $\lambda > 0$, обычным образом получаем неравенство

$$\| u^{(s)} \|_{W_2^1(\Omega^{(s)})} \le C \| f^{(s)} \|_{L_2(\Omega^{(s)})} < C_1 , \qquad (64)$$

где постоянные C и C_1 не зависят от s. Следовательно, ограничение $u_r^{(s)} = u^{(s)} \big|_{\Omega_r^{(s)}}$ функции $u^{(s)}$ на область $\Omega_r^{(s)}$ в норме $W_2^1(\Omega_r^{(s)})$ ограничено равномерно по s. По предположению, области $\Omega_r^{(s)}$ удовлетворяют условию сильной связанности, поэтому существуют продолжения $\tilde{u}_r^{(s)}$ функций $u_r^{(s)} \in W_2^1(\Omega_r^{(s)})$ на область Ω такие, что $\tilde{u}_r^{(s)} \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ и

$$\| \tilde{u}_r^{(s)} \|_{W_2^1(\Omega)} \le C \| u_r^{(s)} \|_{W_2^1(\Omega_r^{(s)})} < \tilde{C} ,$$

где $\tilde{C}$ не зависит от s. Таким образом, последовательности $\{ \tilde{u}_r^{(s)} \}_{s=1}^{\infty}$ $(r = 1, \dots, m)$ слабокомпактны в пространстве $W_2^1(\Omega)$, и, значит, можно выделить подпоследовательности $\{ \tilde{u}_r^{(s_k)} \}_{k=1}^{\infty}$, слабосходящиеся в $W_2^1(\Omega)$ к функциям $u_r \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Докажем, что если выполняются условия теоремы I, то вектор-функция $u(x) = \{ u_1(x), \dots, u_m(x) \}$ является решением задачи (9), (10). Поскольку эта задача имеет единственное решение, отсюда будет следовать, что и вся последовательность вектор-функций $\tilde{u}^{(s)} = \{ \tilde{u}_1^{(s)}, \dots, \tilde{u}_m^{(s)} \}$ сходится к $u = \{ u_1, \dots, u_m \}$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ а в силу теоремы вложения – сильно в $L_2(\Omega)$. Так как $\tilde{u}_r^{(s)}(x) = u^{(s)}(x)$ при $x \in \Omega_r^{(s)}$ и $mes\, Q^{(s)} \to 0$ при $s \to \infty$, то

$u^{(s)}$ сходится к $u=\{u_1,\dots,u_m\}$ в смысле $L_2(\Omega^{(s)},m)$. Для простоты будем предполагать, что в условиях теоремы I пределы по h достигаются равномерно относительно x, принадлежащем любому компактному множеству $E\subset\Omega$. Пусть $W(x)=\{W_1(x),\dots,W_m(x)\}$ – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая и финитная в Ω вектор-функция $(W(x)\in C_0^2(\Omega))$. Так же, как в лемме 5, покроем Ω кубами $K_h^\alpha=K(x^\alpha,h)$ с ребрами длины $h>0$, ориентированными по координатным осям и центрами x^α, лежащими в узлах пространственной решетки периода $h-\rho$, и по этому покрытию построим разбиение единицы $\{\varphi^\alpha(x)\}$, т.е. набор бесконечно дифференцируемых и финитных функций таких, что $0\le\varphi^\alpha(x)\le 1$, $\varphi^\alpha(x)=0$ при $x\notin K_h^\alpha$; $\varphi^\alpha(x)=1$ при $x\in K_h^\alpha\setminus\bigcup_{\beta\ne\alpha}K_h^\beta$; $\sum_\alpha\varphi^\alpha(x)=1$ при $x\in\Omega$ и $\left|\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x_i}\right|<C\rho^{-1}$ $(i=1,\dots,n)$. Соотношение между h и ρ будет выбрано ниже.

Пусть $\hat\varphi_r^\alpha(x)=\hat\varphi_{rh}^{\alpha(s)}(x)$ и $\hat G_{rh}^{\alpha(s)}$ – функции и множества, определенные в лемме 4, а $\hat v_{ir}^\alpha(x)=\hat v_{irh}^{\alpha(s)}(x)$ и $\hat G_{irh}^{\alpha(s)}$ – функции и множества, определенные в лемме 3 для $G_h^{\alpha(s)}=\bigcup_\beta\bigcup_{r=1}^m\hat G_{rh}^\beta\cap K_h^\alpha$. Ясно, что $mes\,G_h^{\alpha(s)}=o(h)$ $(h\to 0)$.

Рассмотрим функцию

$$W^{(s)}(x)=\sum_\alpha\sum_{r=1}^m\left\{W_r(x)+\sum_{i=1}^n\frac{\partial W_r(x)}{\partial x_i}\left[\hat v_{ir}^\alpha(x)-(x_i-x_i^\alpha)\right]\right\}\hat\varphi_r^\alpha(x)\varphi^\alpha(x). \quad (65)$$

Очевидно, $W^{(s)}(x)\in W_2^1(\Omega^{(s)})$ и $W^{(s)}(x)=0$ при $x\in\partial\Omega$, а так как $u^{(s)}(x)$ минимизирует функционал (63) в классе функций из $W_2^1(\Omega^{(s)})$ равных 0 на $\partial\Omega$, то

$$J(u^{(s)})\le J(W^{(s)}). \quad (66)$$

Оценим правую часть этого неравенства. В силу (65) и свойств разбиения единицы $\{\varphi^\alpha(x)\}$ производные $\frac{\partial W^{(s)}}{\partial x_j}$ $(j=1,\dots,n)$ можно представить в виде

$$\frac{\partial w^{(s)}}{\partial x_j}=\sum_{\alpha}\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w_r}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{v}_{ir}^{\alpha}}{\partial x_j}\chi_r^{(s)}\chi^{\alpha}+\sum_{\alpha}\sum_{r=1}^{m} w_r\frac{\partial \hat{\varphi}_r^{\alpha}}{\partial x_j}\chi^{\alpha}+\sum_{k=1}^{6}A_k, \qquad (67)$$

где $\chi^{\alpha}=\chi^{\alpha}(x)$ и $\chi_r^{(s)}=\chi_r^{(s)}(x)$ – соответственно характеристические функции множеств K_h^{α} и $\Omega_r^{(s)}$, а функции $A_k = A_k(x, s, h, \rho)$ определяются равенствами

$$A_1=\sum_{\alpha}\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w_r}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{v}_{ir}^{\alpha}}{\partial x_j}(\hat{\varphi}_r^{\alpha}\varphi^{\alpha}-\chi_r^{(s)}\chi^{\alpha});$$

$$A_2=\sum_{\alpha}\sum_{r=1}^{m} w_r\frac{\partial \hat{\varphi}_r^{\alpha}}{\partial x_j}(\varphi^{\alpha}-\chi^{\alpha});$$

$$A_3=\sum_{\alpha}\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\,\partial x_j}\left[\hat{v}_{ir}^{\alpha}-(x_i-x_i^{\alpha})\right]\hat{\varphi}_r^{\alpha}\varphi^{\alpha};$$

$$A_4=\sum_{\alpha}\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w_r}{\partial x_i}\left[\hat{v}_{ir}^{\alpha}-(x_i-x_i^{\alpha})\right]\frac{\partial \hat{\varphi}_r^{\alpha}}{\partial x_j}\varphi^{\alpha};$$

$$A_5=\sum_{\alpha}\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w_r}{\partial x_i}\left[\hat{v}_{ir}^{\alpha}-(x_i-x_i^{\alpha})\right]\hat{\varphi}_r^{\alpha}\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x_j};$$

$$A_6=\sum_{\alpha}\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} w_r(\hat{\varphi}_r^{\alpha}-\chi_r^{(s)})\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x_j}.$$

Выделенные слагаемые в (67) дают конечный вклад в функционал (43). Вклад от слагаемых A_k $(1\leq k\leq 6)$ исчезает при $h\to 0$. При его оценке будем учитывать, что $w_r\in C_0^2(\Omega)$, $0\leq\varphi^{\alpha}\leq 1$, $0\leq\hat{\varphi}_r^{\alpha}\leq 1$, суммирование по α проводится в пределах от I до $N=N(w,h)=O(h^{-n})$ и с каждым кубом K_h^{α} пересекаются лишь ближайшие кубы K_h^{β}, число которых не превосходит 3^n. Тогда с помощью оценок (23а), (35в) и условия 4) теоремы I получаем

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\int_{\Omega^{(s)}}A_3^2\,dx=O(h^2),\qquad \overline{\lim_{s\to\infty}}\int_{\Omega^{(s)}}A_4^2\,dx=O(h^2).$$

Поскольку $\hat{\varphi}_r^{\alpha}\varphi^{\alpha} - \chi_r^{(s)}\chi^{\alpha} = 0$ вне множеств $\hat{G}_{rh}^{\alpha(s)} U(K_h^{\alpha} \setminus K_{h'}^{\alpha}) \subseteq$ $\subseteq \hat{G}_{irh}^{\alpha(s)} U(K_h^{\alpha} \setminus K_{h'}^{\alpha})$, а $\varphi^{\alpha} - \chi^{\alpha} = 0$ вне $K_h^{\alpha} \setminus K_{h'}^{\alpha}$ $(h' = h - 2\rho)$, то из оценок (23б), (23в) и (35а) следует, что при $\rho = o(h)$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int_{\Omega^{(s)}} A_1^2 dx = o(1), \quad \overline{\lim_{s\to\infty}} \int_{\Omega^{(s)}} A_2^2 dx = o(1) \quad (h \to 0).$$

Далее, учитывая свойства функций $\varphi^{\alpha}(x)$, с помощью оценки (23г) и соответственно (35б) получаем

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int_{\Omega^{(s)}} A_5^2 dx = o(\rho^{-2} h^{2+\tau}) + o(\rho^{-2} \Delta_h), \tag{68}$$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int_{\Omega^{(s)}} A_6^2 dx = o(\rho^{-2} h^{2+\theta} + \rho^{-1} h^{1+\frac{\theta}{2}}), \tag{69}$$

где

$$\Delta_h = h^{-n} \max_{r,\nu,\alpha} \int_{\hat{G}_{irh}^{\alpha(s)}} | v_{ir}^{\alpha} - (x_i - x_i^{\alpha}) |^2 dx .$$

Положим

$$\rho = \max \left\{ h^{1+\frac{\tau}{2}},\ h^{1+\frac{\theta}{2}},\ h^{\frac{1}{3}} \Delta_h^{\frac{1}{3}} \right\}.$$

Поскольку, согласно (23) и (23а), $\Delta_h = o(h^2)$, то $\rho = o(h)$ и в силу (68), (69)

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int_{\Omega^{(s)}} A_5^2 dx = o(1), \quad \overline{\lim_{s\to\infty}} \int_{\Omega^{(s)}} A_6^2 dx = o(1), \quad (h \to 0).$$

Таким образом, в функционале (63) нужно учитывать лишь вклад от выделенных слагаемых в (67), причем вклад от их произведения исчезает при $h \to 0$, что следует из оценок (23б), (35в) и того, что

$$supp \frac{\partial \hat{\varphi}_r^\alpha}{\partial x_j} \subset \hat{G}_{rh}^{\alpha(s)} \subset \hat{G}_{iph}^{\alpha(s)} \quad (\forall j, i, p).$$

Аналогично, представив функцию $w^{(s)}$ (определенную равенством (65)) в виде

$$w^{(s)} = \sum_\alpha \sum_{r=1}^m w_r \chi_r^{(s)} \chi^\alpha - \sum_\alpha \sum_{r=1}^m w_r (\hat{\varphi}_r^\alpha \varphi^\alpha - \chi_r^{(s)} \chi^\alpha) +$$

$$+ \sum_\alpha \sum_{r=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_r}{\partial x_i} \left[v_{ir}^\alpha - (x_i - x_i^\alpha) \right] \hat{\varphi}_r^\alpha \varphi^\alpha , \qquad (65')$$

с помощью лемм 3 и 4 заключаем, что неисчезающий вклад в функционал (63) дает лишь первое слагаемое.

Подставляя (67) и (65′) в (63) и учитывая все сказанное выше, а также гладкость вектор-функции $w(x)$, находим, что при достаточно больших s $(s \geq s(h))$

$$J(w^{(s)}) = \sum_\alpha \sum_{r=1}^m \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega^{(s)}} (\nabla \hat{v}_{ir}^\alpha, \nabla \hat{v}_{jr}^\alpha) \frac{\partial w_r}{\partial x_i}(x^\alpha) \frac{\partial w_r}{\partial x_j}(x^\alpha) \chi_r^{(s)} \chi^\alpha dx +$$

$$+ \sum_\alpha \sum_{r,p=1}^m \int_{\Omega^{(s)}} (\nabla \hat{\varphi}_r^\alpha, \nabla \hat{\varphi}_p^\alpha) w_r(x^\alpha) w_p(x^\alpha) \chi^\alpha dx + \lambda \sum_\alpha \sum_{r=1}^m \int_{\Omega^{(s)}} w_r^2 \times$$

$$\times \chi_r^{(s)} \chi^\alpha dx + 2 \sum_\alpha \sum_{r=1}^m \int_{\Omega^{(s)}} f^{(s)} w_r \chi_r^{(s)} \chi^\alpha dx + o(1), \quad (h \to 0).$$

Члены, содержащие $(\nabla \hat{v}_{ir}^\alpha, \nabla \hat{v}_{jr}^\beta) \chi^\alpha \chi^\beta$ и $(\nabla \hat{\varphi}_r^\alpha, \nabla \hat{\varphi}_p^\beta) \chi^\alpha \chi^\beta$, при $\alpha \neq \beta$ включаются в $o(1)$, что возможно в силу оценок (23б) и (35а).

Введем функции

$$\hat{v}_{lr}^\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \hat{v}_{ir}^\alpha(x) \frac{\partial w_r}{\partial x_i}(x^\alpha) \quad \text{и} \quad \hat{\varphi}_l^\alpha(x) = \sum_{r=1}^m \hat{\varphi}_r^\alpha(x) w_r(x^\alpha)$$

и запишем предыдущее равенство в виде

$$J(w^{(s)}) = \sum_{\alpha}\sum_{r=1}^{m} \int\limits_{\Omega_r^{(s)}\cap K_h^{\alpha}} |\nabla \hat{v}_{ir}^{\alpha}|\, dx + \sum_{\alpha} \int\limits_{\Omega^{(s)}\cap K_h^{\alpha}} |\nabla \hat{\varphi}_t^{\alpha}|^2 dx +$$

$$+ \sum_{\alpha}\sum_{r=1}^{m} \int\limits_{\Omega_r^{(s)}\cap K_h^{\alpha}} w_r^2 dx + 2\sum_{\alpha}\sum_{r=1}^{m} \int\limits_{\Omega_r^{(s)}\cap K_h^{\alpha}} f^{(s)} w_r\, dx + o(1).$$

Отсюда, учитывая оценки (23д) и (35в), гладкость $w(x)$ и условия теоремы I, получаем

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\ \overline{\lim_{s\to\infty}}\ J(w^{(s)}) \le \tilde{J}(w),$$

где

$$\tilde{J}(w) = \sum_{r=1}^{m} \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{r} \frac{\partial w_r}{\partial x_i} \frac{\partial w_r}{\partial x_j} dx + \int\limits_{\Omega} \sum_{r,p=1}^{m} c_{rp} w_r w_p\, dx +$$

$$+ \lambda \sum_{r=1}^{m} \int\limits_{\Omega} b_r w_r^2 dx + 2\sum_{r=1}^{m} \int\limits_{\Omega} f_r w_r b_r\, dx. \tag{70}$$

Поскольку $J(u^{(s)})$ от h не зависит, то в силу (66)

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\ J(u^{(s)}) \le \tilde{J}(w). \tag{71}$$

Это неравенство было получено в предположении $w \in C_0^2(\Omega)$, а так как класс вектор-функций $C_0^2(\Omega)$ плотен в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то оно справедливо для любой вектор-функции $w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Покажем, что если вектор-функция $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ является пределом в смысле $L_2(\Omega^{(s)}, m)$ функций $u^{(s)}(x)$ по некоторой подпоследовательности $\{s = s_k \to \infty\}_{k=1}^{\infty}$, то справедливо обратное неравенство

$$\underline{\lim_{s=s_k\to\infty}}\ J(u^{(s)}) \ge \tilde{J}(u). \tag{72}$$

Аппроксимируем $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируемой и финитной в Ω вектор-функцией $u_\varepsilon(x) = \{u_{\varepsilon 1}(x), \dots, u_{\varepsilon m}(x)\}$ такой, что

$$\| u_\varepsilon - u \|_{W_2^1(\Omega)} \le \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0) \tag{73}$$

и для любых $r \ne p$ $mes\,\{x \in \Omega \;\; u_{\varepsilon r}(x) \ne u_{\varepsilon p}(x)\} = mes\,[supp\, u_{\varepsilon r} \cup supp\; u_{\varepsilon p}]$. Ясно, что такую вектор-функцию всегда можно подобрать. Из леммы 5 следует, что существует последовательность функций $\{u_\varepsilon^{(s)}(x) \in W_2^1(\Omega^{(s)});\ u_\varepsilon^{(s)}(x) = 0,\, x \in \partial\Omega\}_{s=1}^{\infty}$, сходящаяся при $s = s_k \to \infty$ к $u_\varepsilon(x)$ в смысле $L_2(\Omega^{(s)}, m)$ и удовлетворяющая неравенству

$$\| u_\varepsilon^{(s)} - u^{(s)} \|_{W_2^1(\Omega^{(s)})} \le C\varepsilon, \tag{74}$$

где постоянная C не зависит от ε и $s \ge s(u, \varepsilon)$.
Кроме того, в силу (64)

$$\| u_\varepsilon^{(s)} \|_{W_2^1(\Omega^{(s)})} \le C,$$

где C – не зависит от s $(s \ge s(u, \varepsilon))$.

Воспользуемся теперь леммой 6 применительно к вектор-функции $u_\varepsilon(x)$ и последовательности функций $\{u_\varepsilon^{(s_k)}\}_{k=1}^{\infty}$. Согласно последней, существуют последовательности множеств $\{\hat{G}^{(s_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ и функций $\{\hat{u}_{\varepsilon r}^{(s_k)} \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\}_{k=1}^{\infty}$ $(r = 1, \dots, m)$ такие, что $Q^{(s_k)} \subset \hat{G}^{(s_k)}$, $\hat{u}_{\varepsilon r}^{(s_k)}(x) = u_\varepsilon^{(s_k)}(x)$ при $x \in \Omega_r^{(s_k)} \setminus \hat{G}^{(s_k)}$ и при $s_k \to \infty$ выполняются условия (48), (49). Легко видеть, что при $s_k \to \infty$ $\hat{u}_{\varepsilon r}^{(s_k)}$ сходится к $u_{\varepsilon r}$ в $L_2(\Omega_r^{(s_k)})$.

Разобьем пространство R_n на непересекающиеся (во внутренних точках) кубы $K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)$ с центрами в точках x^α и ребрами длины h, ориентированными по координатным осям, и выделим те из них $(\alpha = 1, \dots, N(\varepsilon, \delta, h))$, которые принадлежат области $\Omega_{\varepsilon,\delta} = \{x \in \Omega : |\nabla u_\varepsilon(x)| > \delta > 0\}$.

В пересечении каждого из выделенных кубов K_h^α с областью $\Omega_r^{(s)}$ при $s = s_k$ рассмотрим функцию

$$\hat{v}_r^{\alpha(s)}(x) = |\nabla u_{\varepsilon r}(x^\alpha)|^{-1}\left[\hat{u}_{\varepsilon r}^{(s)}(x) - u_{\varepsilon r}(x^\alpha)\right]. \qquad (75)$$

Так как $u_{\varepsilon r}(x) \in C_0^2(\Omega)$, то для любого вектора $l \subset R_n$ справедливо неравенство

$$\left\{\int_{\Omega_r^{(s)} \cap K_h^\alpha} \left|v_r^{\alpha(s)} - (x - x^\alpha, l)\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leq |\nabla u_{\varepsilon r}(x^\alpha)|^{-1}\left\{\int_{\Omega_r^{(s)} \cap K_h^\alpha} |\hat{u}_{\varepsilon r}^{(s)} -$$

$$- u_{\varepsilon r}|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_{\Omega_r^{(s)} \cap K_h^\alpha}\left[|\nabla u_{\varepsilon r}(x^\alpha)|^{-1}(\nabla u_{\varepsilon r}(x^\alpha),\ x - x^\alpha) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - (x - x^\alpha, l)\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} + O\left(h^{\frac{n+4}{2}}\right).$$

Полагая $l = l^\alpha = \nabla u_{\varepsilon r}(x^\alpha) \big/ |\nabla u_{\varepsilon r}(x^\alpha)|$ и учитывая, что при $s = s_k \to \infty$ $\hat{u}_{\varepsilon r}^{(s)}$ сходится к $u_{\varepsilon r}$ в $L_2(\Omega_r^{(s)})$, получаем

$$\overline{\lim_{s = s_k \to \infty}} \int_{\Omega_r^{(s)} \cap K_h^\alpha} |v_r^{\alpha(s)} - (x - x^\alpha, l^\alpha)|^2 dx = O(h^{n+4}) \qquad (h \to 0). \quad (76)$$

Согласно (4), при $s = s_k$

$$\int_{\Omega_r^{(s)} \cap K_h^\alpha}\left\{|\nabla v_r^{\alpha(s)}|^2 + h^{-2-\varepsilon}|v_r^{\alpha(s)} - (x - x^\alpha, l^\alpha)|^2\right\}dx \geq \varphi_{rh}^{\alpha(s)}(l^\alpha)$$

и, значит, в силу (75) и (5)

$$\int_{(\Omega_r^{(s)} \setminus \hat{G}^{(s)}) \cap K_h^\alpha} |\nabla \hat{u}_{\varepsilon r}^{(s)}|^2 dx \geq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^r(s, h, x^\alpha)\frac{\partial u_{\varepsilon r}}{\partial x_i}(x^\alpha)\frac{\partial u_{\varepsilon r}}{\partial x_j}(x^\alpha) -$$

$$- \int_{\hat{G}^{(s)} \cap K_h^\alpha} |\nabla \hat{u}_{\varepsilon r}^{(s)}|^2 dx - h^{-2-\varepsilon}\int_{\Omega_r^{(s)} \cap K_h^\alpha} |v_r^{\alpha(s)} - (x - x^\alpha, l^\alpha)|^2 dx.$$

Отсюда, учитывая, что $\hat{u}_{\varepsilon r}^{(s)}(x) = u_\varepsilon^{(s)}(x)$ при $x \in \Omega^{(s)} \setminus \hat{G}^{(s)}$ и $s = s_k$, получаем

$$\int_{\Omega^{(s)}}\left\{|\nabla u_\varepsilon^{(s)}|^2+\lambda(u_\varepsilon^{(s)})^2+2f^{(s)}u^{(s)}\right\}dx \geq \sum_{r=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{N(\varepsilon,\delta,h)}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{r}(s,h,x^\alpha)\times$$

$$\times\frac{\partial u_{\varepsilon r}}{\partial x_i}(x^\alpha)\frac{\partial u_{\varepsilon r}}{\partial x_j}(x^\alpha)+\int_{G^{(s)}}|\nabla u_\varepsilon^{(s)}|^2dx+\sum_{r=1}^{m}\int_{\Omega_r^{(s)}}\left\{\lambda(u_\varepsilon^{(s)})^2+\right.$$

$$\left.+2f^{(s)}u_\varepsilon^{(s)}\right\}dx-\sum_{r=1}^{m}\int_{\hat{G}^{(s)}}|\nabla\hat{u}_{\varepsilon r}^{(s)}|^2dx\quad-$$

$$-\sum_{r=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{N(\varepsilon,\delta,h)}h^{-2-\tau}\int_{\Omega_r^{(s)}\cap K_h^\alpha}|v_r^{\alpha(s)}-(x-x^\alpha,l^\alpha)|^2dx.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при фиксированных $\delta>0$ и $\varepsilon>0$ сначала по $s=s_k\to\infty$, а затем по $h\to 0$. Тогда, пользуясь условиями теоремы I, оценками (48), (49), (76) и $N(\varepsilon,\delta,h)=O(h^{-n})$ и учитывая непрерывность функций $a_{ij}^{r}(x)$ и $b_r(x)$, гладкость вектор-функции $u_\varepsilon(x)$, а также сходимость $u_\varepsilon^{(s)}(x)$ к $u_\varepsilon(x)$ в смысле $L_2(\Omega^{(s)},m)$ при $s=s_k\to\infty$, согласно (63), получаем

$$\lim_{s=s_k\to\infty} J(u_\varepsilon^{(s)})\geq\sum_{r=1}^{m}\int_{\Omega_{\varepsilon,\delta}}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{r}\frac{\partial u_{\varepsilon r}}{\partial x_i}\frac{\partial u_{\varepsilon r}}{\partial x_j}dx+$$

$$+\int_{\Omega}\sum_{r,p=1}^{m}c_{rp}u_{\varepsilon r}u_{\varepsilon p}dx+\sum_{r=1}^{m}\int_{\Omega}\left\{\lambda b_r(u_\varepsilon)^2+2b_r f_r u_{\varepsilon r}\right\}dx.$$

Теперь перейдем к пределу по $\delta\to 0$ и, наконец, по $\varepsilon\to 0$. Учитывая при этом (73), (74), приходим к окончательному неравенству (72).

Из (7I) и (72) следует, что для любой вектор-функции $w(x)\in W_2^1(\Omega)$

$$J(u)\leq\tilde{J}(w),$$

т.е. вектор-функция $u(x)=\{u_1(x),\ldots,u_m(x)\}$, являющаяся пределом в смысле $L_2(\Omega^{(s)},m)$ решений $u^{(s)}(x)$ задачи (I)-(3) при $s=s_k\to\infty$, минимизирует функционал (70). Отсюда известными методами можно показать, что $u(x)$ является решением задачи (9) - (I0). Теорема доказана.

3. О сходимости спектральных проекторов операторов, связанных со второй краевой задачей.

Покажем, что полученный выше результат можно перенести на другие уравнения, такие, как волновое, теплопроводности, уравнение Гельмгольца с произвольным комплексным λ, а также на задачи о собственных значениях. Ясно, что для этого в первую очередь нужно изучить вопрос о сходимости спектральных проекторов соответствующих операторов.

I. Введем обозначения: $L_2(\Omega^{(s)})$ – гильбертово пространство вещественнозначных функций, заданных в области $\Omega^{(s)}$ с обычным скалярным произведением (u, v); $A^{(s)}$ – самосопряженный оператор в $L_2(\Omega^{(s)})$, порожденный операцией $-\Delta$ в $\Omega^{(s)}$ и граничными условиями (2), (3) на $\partial\Omega^{(s)}$; $R_\nu^{(s)}=(A^{(s)}-\nu E)^{-1}$ – резольвента оператора $A^{(s)}(\nu<0)$; $\{E_\lambda^{(s)}\}$ и $\{E_t^{(s)}\}$ – семейства спектральных проекторов (разложения единицы) операторов $A^{(s)}$ и $R_\nu^{(s)}$; $L_2^0(\Omega)$, $L_2^b(\Omega)$ – гильбертовы пространства m-компонентных вещественных вектор-функций, заданных в области Ω, со скалярными произведениями

$$(u,v)_0=\int_\Omega \sum_{r=1}^{m} u_r v_r^{\cdot}\, dx\,;$$

$$(u,v)_b=\int_\Omega \sum_{r=1}^{m} b_r u_r v_r\, dx\,,$$

A – самосопряженный операторов в $L_2^b(\Omega)$, порожденный операцией

$$(Au)_r=-\frac{1}{b_r}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^r\ \frac{\partial u_r}{\partial x_j}\right)+\frac{1}{b_r}\sum_{\rho=1}^{m} c_{r\rho}u_\rho$$

в области Ω и нулевым граничным условием на $\partial\Omega$; $R_\nu=(A-\nu E)^{-1}$ – резольвента оператора $A(\nu<0)$; $\{E_\lambda\}$ и $\{\hat{E}_t\}$ – семейства спектральных проекторов (ортогональных в $L_2^b(\Omega)$ операторов A и R_ν. Нетрудно убедиться, что при $\nu<0$ во всех точках непрерывности λ выполняются равенства

$$E_\lambda^{(s)} = E - \hat{E}_t^{(s)} \quad \text{и} \quad E_\lambda = E - \hat{E}_t \quad \text{, где} \quad t = \frac{1}{\lambda - \nu} . \tag{77}$$

Отметим еще, что нормы, порождаемые скалярными произведениями в $L_2^0(\Omega)$ и $L_2^b(\Omega)$, эквивалентны, поскольку $b_r(x) > b > 0$.

Пусть $\Pi^{(s)}$ – ортогональный проектор в $L_2^0(\Omega)(L_2^b(\Omega))$, определяемый равенством

$$\forall u = \{u_1, \dots, u_m\} \qquad \Pi^{(s)} u = \{\chi_1^{(s)} u_1, \dots, \chi_m^{(s)} u_m\},$$

где $\chi_r^{(s)} = \chi_r^{(s)}(x)$ – характеристическая функция области $\Omega_r^{(s)}$. Введем еще операторы $P^{(s)}$ и $Q^{(s)}$, действующие соответственно из $L_2^0(\Omega)$ в $L_2(\Omega^{(s)})$ и из $L_2(\Omega^{(s)})$ в $L_2^0(\Omega)$ по формулам

$$\forall u = \{u_1, \dots, u_m\} \qquad P^{(s)} u = \sum_{r=1}^{m} \chi_r^{(s)} u_r \in L_2(\Omega^{(s)});$$

$$\forall v^{(s)} \in L_2(\Omega^{(s)}) \quad Q^{(s)} v = \{\chi_1^{(s)} v^{(s)}, \dots, \chi_m^{(s)} v^{(s)}\}.$$

Легко видеть, что $P^{(s)}$ и $Q^{(s)}$ взаимно сопряжены, т.е.

$$\forall u \in L_2^0(\Omega), \quad v \in L_2(\Omega^{(s)}) \quad (P^{(s)} u, v) = (u, Q^{(s)} v)_0$$

и, кроме того,

$$\Pi^{(s)} Q^{(s)} = Q^{(s)}, \qquad Q^{(s)} P^{(s)} = \Pi^{(s)}. \tag{78}$$

Справедлива следующая теорема, описывающая сходимость спектральных проекторов операторов $A^{(s)}$ и A.

<u>Теорема 2.</u> Если выполняются условия 2) – 5) теоремы I, то для любого вектора $f \in L_2^0(\Omega)$ и любого λ, не принадлежащего дискретному спектру оператора A,

$$\| \Pi^{(s)} (Q^{(s)} E_\lambda^{(s)} P^{(s)} - E_\lambda) f \|_0 \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty . \tag{79}$$

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим в пространстве $L_2^0(\Omega)$ ограниченный оператор $B^{(s)} = Q^{(s)} R_\nu^{(s)} P^{(s)}$. Легко видеть, что $B^{(s)}$ – самосопряжен в $L_2^0(\Omega)$, коммутирует с проекционным операто-

ром $\Pi^{(s)}$, а семейство его спектральных проекторов имеет вид $\{Q^{(s)}\hat{E}_t^{(s)}P^{(s)}\}$, где $\hat{E}_t^{(s)}$ – спектральный проектор $R_\nu^{(s)}$.

Из теоремы I следует, что для любого $f\in L_2^0(\Omega)$

$$\|\Pi^{(s)}(Q^{(s)}R_\nu^{(s)}P^{(s)}-R_\nu f)\|_0\to 0 \quad \text{при} \quad s\to\infty, \tag{80}$$

откуда, учитывая, что $\Pi^{(s)}Q^{(s)}=Q^{(s)}$, получаем

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\ \|Q^{(s)}R_\nu^{(s)}P^{(s)}\|_0 < C. \tag{81}$$

Теперь воспользуемся следующей теоремой [4], являющейся обобщением известных теорем о сходимости семейств спектральных проекторов.

<u>Теорема.</u> Пусть H – гильбертово пространство $\{\Pi^{(s)}\}_{s=1}^\infty$ и $\{A^{(s)}\}_{s=1}^\infty$ – последовательности ортогональных проекторов и ограниченных самосопряженных операторов в H, удовлетворяющих условиям

$$\Pi^{(s)}A^{(s)}=A^{(s)}\Pi^{(s)} \qquad \text{и} \qquad \overline{\lim_{s\to\infty}}\ \|A^{(s)}\|<C.$$

Пусть A – ограниченный оператор в H, самосопряженный относительно некоторого скалярного произведения, порождающего эквивалентную норму в H, а $\{E_\lambda^{(s)}\}$, $\{E_\lambda\}$ – семейства спектральных проекторов операторов $A^{(s)}$ и A.
Тогда, если для любого $f\in H$

$$\|\Pi^{(s)}(A^{(s)}-A)f\|\to 0 \qquad \text{при} \quad s\to\infty,$$

то для любых $f\in H$ и λ, не принадлежащего дискретному спектру оператора A,

$$\|\Pi^{(s)}(E_\lambda^{(s)}-E_\lambda)f\|\to 0 \quad \text{при} \quad s\to\infty.$$

Из этой теоремы и (80), (81) следует, что при условиях 2) – 5) теоремы I

$$\|\Pi^{(s)}(Q^{(s)}\hat{E}_t^{(s)}P^{(s)}-\hat{E}_t)f\|\to 0 \text{ при } s\to\infty$$

для любых $f \in L_2^0(\Omega)$ и t, не принадлежащего дискретному спектру оператора A_γ. Отсюда, учитывая равенства (77) и (78), получаем (79). Теорема доказана.

2. С помощью теоремы 2 результат предыдущего раздела нетрудно распространить на некоторые другие уравнения. Ограничимся формулировкой лишь одной теоремы. Рассмотрим в области $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus F^{(s)}$ начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u^{(s)}(x,t)}{\partial t} = \Delta u^{(s)}(x,t), && x \in \Omega^{(s)},\ t>0;\\ &\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu}(x,t) = 0, && x \in \partial F^{(s)},\ t>0;\\ &u^{(s)}(x,t) = 0, && x \in \partial\Omega,\ t>0,\\ &u^{(s)}(x,0) = \varphi(x), && x \in \Omega^{(s)}, \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

где $\varphi(x) \in C_0^2(\Omega)$.

<u>Теорема 3.</u> Если выполняются условия 2) – 5) теоремы I, то при любом $t>0$ последовательность $\{u^{(s)}(x,t)\}_{s=1}^{\infty}$ решений задачи (82) сходится в смысле $L_2(\Omega^{(s)}, m)$ (см. (8)) к вектор-функции $u(x,t) = \{u_1(x,t), \ldots, u_m(x,t)\}$, являющейся решением следующей задачи:

$$b_r(x)\frac{\partial u_r(x,t)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^r(x)\frac{\partial u_r(x,t)}{\partial x_j}\right) - \sum_{p=1}^{m} c_{rp}(x)u_p(x,t),$$
$$x \in \Omega,\ t>0;$$

$$u_r(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t>0;$$

$$u_r(x,0) = b_r(x)\varphi(x), \qquad x \in \Omega \quad (r=1,\ldots,m).$$

3. Рассмотрим теперь задачу на собственные значения

$$\Delta u^{(s)}(x) = \lambda u^{(s)}(x), \qquad x \in \Omega^{(s)} = \Omega \setminus F^{(s)}; \tag{83}$$

$$\left.\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \nu}\right|_{\partial F^{(s)}} = 0, \qquad \left.u^{(s)}\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{84}$$

Ясно, что собственные числа $\lambda_i^{(s)}$ задачи (83), (84) зависят от вида множества $F^{(s)}$, и при сильной изрезанности $F^{(s)}$ нахождение их сопряжено с большими трудностями.

Однако, если выполняются условия 2) – 5) теоремы I, то оказывается, что собственные числа задачи (83) – (84) локализуются в сколь угодно малых окрестностях собственных чисел предельной задачи

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{r} \frac{\partial u_r}{\partial x_j}\right) - \sum_{p=1}^{m} c_{rp} u_p = \lambda b_r u_r, \quad x \in \Omega ; \tag{85}$$

$$u_r \Big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad (r = 1, \dots, m). \tag{86}$$

Этот результат из теоремы 2, вообще говоря, не вытекает, но его можно доказать непосредственно с помощью теоремы I. Действительно, любое собственное число $\lambda_i^{(s)}$ задачи (83), (84) можно представить в виде

$$\lambda_i^{(s)} = \inf_{u^{(s)}} \int_{\Omega^{(s)}} |\nabla u^{(s)}|^2 dx ,$$

где минимум берется в классе функций $u^{(s)}(x) \in W_2^1(\Omega^{(s)})$, равных 0 на $\partial\Omega$, нормированных в $L_2(\Omega^{(s)})$ на I и ортогональных всем собственным функциям, соответствующим собственным числам $\lambda_k^{(s)} \le \lambda_i^{(s)}$. Как известно, существует функция $u_i^{(s)}(x)$ такая, что

$$\lambda_i^{(s)} = \int_{\Omega^{(s)}} |\nabla u_i^{(s)}|^2 dx, \qquad \int_{\Omega^{(s)}} (u_i^{(s)})^2 dx = 1; \tag{87}$$

$$\Delta u_i^{(s)}(x) = \lambda_i^{(s)} u_i^{(s)}(x), \qquad x \in \Omega \setminus F^{(s)}, \tag{88}$$

и выполняются граничные условия (84).

Рассмотрим собственные числа $\lambda_i^{(s)}$, принадлежащие произвольному отрезку $[0, N]$ при всех s. Тогда в силу (87) соответствующие им собственные функции $u_i^{(s)}(x)$ ограничены в $W_2^1(\Omega^{(s)})$ равномерно по s. Поскольку области $\Omega_r^{(s)}$ удовлетворяют условию сильной связанности, отсюда следует, что существуют вектор-функции $\tilde{u}^{(s)}(x)=\{\tilde{u}_1^{(s)}(x),\ldots,\tilde{u}_m^{(s)}(x)\}\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ такие, что $u_i^{(s)}(x)=\tilde{u}_r^{(s)}(x)$ при $x\in\Omega_r^{(s)}$ и

$$\|\tilde{u}^{(s)}\|_{W_2^1(\Omega)}<C,$$

где C не зависит от s. Поэтому можно выделить подпоследовательность $\{s=s_k\to\infty\}$, по которой $\{\tilde{u}^{(s)}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ сходится слабо в $W_2^1(\Omega)$ (а значит, сильно – в $L_2(\Omega)$) к вектор-функции $u(x)=\{u_1(x),\ldots,u_m(x)\}\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $\lambda_i^{(s)}\to\lambda_i\in[0,N]$ при $s=s_k\to\infty$. Ясно, что при этом функции $u_i^{(s)}(x)$ и $(\lambda_i^{(s)}-\nu)\,u_i^{(s)}(x)$ сходятся соответственно к вектор-функциям $u(x)$ и $(\lambda_i-\nu)u(x)$ в смысле $L_2(\Omega^{(s)},m)\,(\forall\nu)$. Учитывая это и записывая уравнение (88) в виде

$$\Delta u_i^{(s)}(x)-\nu u_i^{(s)}(x)=(\lambda_i^{(s)}-\nu)\,u_i^{(s)}(x),\qquad(\nu>0),$$

с помощью теоремы I заключаем, что число λ_i и вектор-функция $u(x)$ должны быть соответственно собственным числом и собственным вектором задачи (85), (86). Таким образом, собственные числа $\lambda_i^{(s)}$ задачи (83), (84) при $s\to\infty$ концентрируются в сколь угодно малых окрестностях собственных чисел λ_i задачи (85), (86), а соответствующие им собственные функции становятся близкими в смысле $L_2(\Omega^{(s)},m)$. Учитывая последнее и привлекая еще теорему 2, легко уточняем, что при достаточно больших s в любую окрестность собственного числа λ_i кратности k попадает ровно k собственных чисел $\lambda_i^{(s)}$ (с учетом их кратностей).

I. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1950.- 300 с.

2. Хруслов Е.Я. Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области. – Мат. сб., 1978, 106, № 4, с.604-621.

3. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 340 с.

4. Берлянд Л.В. О сходимости разложений единицы операторов второй краевой задачи. – Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1979, вып.35, с.3-8.

УДК 517.94 + 513.88

А.М.Холькин

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ДЛЯ КВАЗИРЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

В настоящей работе приводится описание с помощью краевых условий на сингулярном и регулярном концах всех самосопряженных расширений (CP) симметрических дифференциальных операторов произвольного четного порядка с матричными коэффициентами на оси или полуоси в квазирегулярном случае. Кроме того, для характеристической матрицы-функции $M(\lambda)$ [1] краевых задач дается эффективная формула и параметризация*.

Для уравнения Штурма - Лиувилля в скалярном случае параметризация характеристической функции и описание всех CP на полуоси в различной форме получены в работах [2, 3], а для уравнения с операторным потенциалом в абсолютно неопределенном случае - в работе [4]. Все спектральные функции скалярного дифференциального оператора четного порядка с помощью характеристических матриц $M(\lambda)$ описаны в литературе [5], эти результаты для уравнений в пространстве вектор—функций обобщены в [6]. Однако в работах [5, 6] не рассматривалась параметризация $M(\lambda)$ в случае задачи на полуоси или оси.

I. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$l[y]=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left\{\left(p_{n-k}y^{(k)}\right)^{(k)}-\frac{i}{2}\left[\left(q_{n-k}y^{(k)}\right)^{(k-1)}+\left(q_{n-k}y^{(k-1)}\right)^{(k)}\right]\right\}+ \qquad (I)$$
$$+p_n y=\lambda R(t)y$$

с эрмитовыми $m\times m$ матричными коэффициентами $\det p_0(t)\neq 0$, $R(t)>0$.

Пусть минимальный дифференциальный оператор L, порожденный в гильбертовом пространстве $L_R^2=L^2(E_m(0,\infty);\ R(t)dt)$ дифференциальной операцией $l_R[y]=R^{-1}(t)l[y]$, имеет максимально возможные индексы дефекта $(2mn, 2mn)(mn \overset{df}{=} N)$, т.е. квазирегулярен : при любом $\lambda\in\mathbb{C}$ все решения уравнения (I) принадлежат L_R^2.

Пусть $y^{[k]}$, $k=1,\dots,2n$ - квазипроизводные системы (I) [7].

---

* После сдачи этого сборника в набор опубликована работа Г.А.Мирзоева "Квазирегулярные дифференциальные операторы четвертого порядка".- Докл. АН СССР, 1980, 251,№ 3, с.550-553.(Прим.ред.).

Положим

$$\hat{y}(\cdot) = \{ y(\cdot),\ y'(\cdot), \dots, y^{n-1}(\cdot) \} \in E_N;$$

$$\hat{y}'(\cdot) = \{ y^{[2n-1]}(\cdot),\ y^{[2n-2]}(\cdot), \dots, y^{[n]}(\cdot) \} \in E_N,$$

тогда, как известно, (I) сводится к канонической системе первого порядка

$$J \frac{d\tilde{y}}{dt} = (\lambda \mathcal{H}_0(t) + \mathcal{H}_1(t))\, \tilde{y}, \tag{2}$$

где $\tilde{y}(t) = \hat{y}(t) \oplus \hat{y}'(t)$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_N \\ I_N & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H}_0(t) = \begin{pmatrix} R_N(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

I_N - единичная $N \times N$ матрица

$$R_N(t) = diag\,(R(t), 0, \dots, 0). \tag{3}$$

Обозначим через $\hat{Y}(t)$, $\hat{Y}'(t)$ матрицы, столбцами которых являются соответственно векторы $\hat{y}_1(t), \dots, \hat{y}_N(t)$ и $\hat{y}_1'(t), \dots, \hat{y}_N'(t)$.

Пусть

$$Y_0(t) = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{O}}_1(t) & \hat{\mathcal{O}}_2(t) \\ \hat{\mathcal{O}}_1'(t) & \hat{\mathcal{O}}_2'(t) \end{pmatrix} \tag{4}$$

- решение системы (2) при $\lambda = 0$, удовлетворяющее начальному условию $Y_0(0) = I_{2N}$. Решение $Y_0(t)$ является J-унитарным, т.е. $Y_0^*(t)\, J\, Y_0(t) = J$, поэтому

$$Y_0^{-1}(t) = -J\, Y_0^*(t)\, J = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{O}}_2'^{*} & -\hat{\mathcal{O}}_2^{*} \\ -\hat{\mathcal{O}}_1'^{*} & \hat{\mathcal{O}}_1^{*} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Положим

$$(Sy)(t) = Y_0^{-1}(t)\, \tilde{y} = \begin{pmatrix} -(\hat{\mathcal{O}}_2^{*} \hat{y}' - \hat{\mathcal{O}}_2'^{*} \hat{y}) \\ \hat{\mathcal{O}}_1^{*} \hat{y}' - \hat{\mathcal{O}}_1'^{*} \hat{y} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Так как система (I) квазирегулярна, то в силу формулы Грина

$$\langle L^* x, y\rangle - \langle x, L^* y\rangle = \left[(\hat{x}, \hat{y}')_N - (\hat{x}', \hat{y})_N\right]\Big|_0^\infty . \qquad (7)$$

где $\langle\cdot\,,\cdot\rangle, (\cdot\,,\cdot)_N$ – скалярное произведение в L_R^2 и E_N, для любой функции $y \in D(L^*)$ существует $\lim\limits_{t\to\infty}(Sy)_i(t) = (Sy)_i(\infty)$, где

$$(Sy)_i(t) = \hat{U}_i^*(t)\,\hat{y}'(t) - \hat{U}_i'^*(t)\,\hat{y}(t), \quad (i = 1,2). \qquad (8)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно в формуле (7) взять $\hat{x} = \hat{U}_i h \in D(L^*)$, где h – произвольный вектор из E_N.

Как известно, линейная невырожденная замена переменных (6) $\hat{y}(t) = Y_0(t)(Sy)(t)$ переводит систему (2) в систему вида

$$J(Sy)'(t) = \lambda\,\mathcal{H}(t)(Sy)(t), \qquad (9)$$

где

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} \hat{U}_1^* R_N \hat{U}_1 & \hat{U}_1^* R_N \hat{U}_2 \\ \hat{U}_2^* R_N \hat{U}_1 & \hat{U}_2^* R_N \hat{U}_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку все решения системы (I) при любом λ принадлежат L_R^2, то в силу (3) $\int^{\infty}\|\mathcal{H}(t)\|\,dt < \infty$. Поэтому из литературы (см. [8], гл.X, теоремы I.I, I.2) следует лемма.

Лемма. Пусть система (I) квазирегулярна. Тогда: 1) для любого $y \in D(L^*)$ существует $\lim\limits_{t\to\infty}(Sy)(t) = (Sy)(\infty)$; 2) если $y(t,\lambda)$ – решение системы (I), то

$$|(Sy)(t,\lambda) - (Sy)(\infty,\lambda)| \le |(Sy)(0,\lambda)|\,|\lambda|\,\sigma(t)\exp(|\lambda|\,\sigma(0)), \qquad (10)$$
$$(\lambda \in \mathbb{C}),$$

где $|\cdot|$ – норма вектора в E_{2N}, $\sigma(t) = \int_t^\infty \|\mathcal{H}(\tau)\|\,d\tau$; 3) для любого $h \in E_{2N}$ существует и единственно решение $y(t,\lambda)$ системы (I), удовлетворяющее начальному условию на сингулярном конце

$$\lim_{t\to\infty}(Sy)(t,\lambda) = h.$$

Описание самосопряженных расширений симметрического оператора A часто оказывается удобным проводить с помощью эрмитовых (самосопряженных) отношений [7] в терминах "абстрактных граничных условий" [9 - 11].

Определение. Тройка $(E_p, \Gamma_1, \Gamma_2)$, где Γ_1, Γ_2 – линейные отображения $D(A^*)$ в E_p, называется пространством граничных значений замкнутого симметрического оператора A с плотной областью определения в сепарабельном пространстве H и имеет индексы дефекта (p, p), если

$$\langle A^*x, y\rangle - \langle x, A^*y\rangle = (\Gamma_1 x, \Gamma_2 y)_p - (\Gamma_2 x, \Gamma_1 y)_p, \quad (x, y \in D(A^*)), \tag{11}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $(\cdot,\cdot)_p$ – скалярное произведение соответственно в H и E_p; для любых $h, g \in E_p$ существует такое $y \in D(A^*)$, что $\Gamma_1 y = h$, $\Gamma_2 y = g$ и при $y \in D(A)$ $\Gamma_1 y = \Gamma_2 y = 0$. Установим для оператора L конкретный вид граничных значений.

Теорема I. Тройка $(E_{2N}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ является пространством граничных значений минимального оператора L в квазирегулярном случае на полуоси, если

$$\begin{aligned} &\Gamma_1 y = -\hat{y}(0) \oplus (Sy)_1(\infty); \\ &\Gamma_2 y = \hat{y}'(0) \oplus (Sy)_2(\infty), \quad (y \in D(L^*)), \end{aligned} \tag{12}$$

и на оси, если

$$\begin{aligned} &\Gamma_1 y = -(Sy)_1(-\infty) \oplus (Sy)_1(+\infty); \\ &\Gamma_2 y = (Sy)_2(-\infty) \oplus (Sy)_2(+\infty), \quad (y \in D(L^*)), \end{aligned} \tag{13}$$

где $(Sy)_i(\pm\infty)$ определяется из (8) при $t \to \pm\infty$.

Доказательство. Рассмотрим полуось. Для любых $x, y \in D(L^*)$ имеет место формула Грина (7). С другой стороны, в силу (12)

$$\begin{aligned} &(\Gamma_1 x, \Gamma_2 y)_{2N} - (\Gamma_2 x, \Gamma_1 y)_{2N} = ((Sx)_1(\infty), (Sy)_2(\infty))_N - \\ &-((Sx)_2(\infty), (Sy)_1(\infty))_N - [(\hat{x}(0), \hat{y}'(0))_N - (\hat{x}'(0), \hat{y}(0))_N]. \end{aligned} \tag{14}$$

Используя J-унитарность матрицы $Y_0(t)$, получаем соотношения

$$\hat{U}_1'\hat{U}_2'^* - \hat{U}_2'\hat{U}_1'^* = 0; \qquad \hat{U}_1 U_2^* - \hat{U}_2 \hat{U}_1^* = 0; \tag{15}$$

$$\hat{U}_1\hat{U}_2'^* - \hat{U}_2\hat{U}_1'^* = I_N\ ;\quad \hat{U}_2'\hat{U}_1^* - \hat{U}_1'\hat{U}_2^* = I_N\ ,$$

откуда, учитывая (8), имеем

$$((Sx)_1(\infty),(Sy)_2(\infty))_N - ((Sx)_2(\infty),(Sy)_1(\infty))_N =$$

$$= \lim_{t\to\infty}[(\hat{U}_1^*\hat{x}' - \hat{U}_1'^*\hat{x},\ \hat{U}_2^*\hat{y}' - \hat{U}_2'^*\hat{y})_N - (\hat{U}_2^*\hat{x}' - \hat{U}_2'^*\hat{x},$$

$$\hat{U}_1^*\hat{y}' - \hat{U}_1'^*\hat{y})_N] = \lim_{t\to\infty}[(\hat{x}(t),\hat{y}'(t))_N - (\hat{x}'(t),\hat{y}(t))_N]. \qquad (16)$$

Сравнивая (7), (14) и (16), получаем (11) для оператора L .

Пусть $h = h_1 \oplus h_2$, $g = g_1 \oplus g_2$ – произвольные векторы из E_{2N}. Обозначим $\varphi(t,\lambda)$, $\psi(t,\lambda)$ – векторные решения системы (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$\hat{\varphi}(0) = -h_1\ ;\quad \hat{\varphi}'(0) = g_1\ ;$$

$$(S\psi)_1(\infty) = h_2\ ;\quad (S\psi)_2(\infty) = g_2\ .$$

Пусть $0 \le f_1(t),\ f_2(t) \in C^\infty,\ f_1(t) + f_2(t) = 1$ и $f_1(t)$ – финитная функция, равная 1 в некоторой окрестности точки 0.

Положим $y(t,\lambda) = f_1(t)\varphi(t,\lambda) + f_2(t)\psi(t,\lambda)$. Тогда $y \in D(L^*)$ и $\Gamma_1 y = h$, $\Gamma_2 y = g$.

Наконец, если $y \in D(L)$, то в силу формулы Грина (7) и того факта, что Γ_i отображает $D(L^*)$, на E_{2N} имеем, что $\Gamma_1 y = \Gamma_2 y = 0$. Аналогично рассматривается задача на оси. Теорема доказана.

Теорема 2. Всякое самосопряженное расширение $\tilde{L}$ минимального оператора L в квазирегулярном случае определяется краевыми условиями вида

$$\cos\tilde{A}\cdot\Gamma_1 y - \sin\tilde{A}\,\Gamma_2 y = 0, \qquad (17)$$

где $\tilde{A}$ – эрмитова матрица в E_{2N} , а Γ_1 и Γ_2 определены формулами (12) или (13), Обратно, каждое краевое условие вида (17) порождает самосопряженное расширение оператора L . Соответствие между множеством самосопряженных расширений оператора L в L_R^2 и множеством всех эрмитовых матриц $-\frac{\pi}{2}I << \tilde{A} < \frac{\pi}{2}I$ является взаимно-однозначным.

Доказательство. Известно [7, 9], что каждое самосопряженное расширение $\tilde{L}$ оператора L порождает некоторое эрмитово отношение θ в E_{2N}

$$(\Gamma_1 y)\, \theta\, (\Gamma_2 y) \Leftrightarrow y \in D(\tilde{L}).$$

Поэтому в силу теоремы об общем виде эрмитовых отношений [7] имеем (17), где $\Gamma_1 y$, $\Gamma_2 y$ определены теоремой 1.

Следствие. Если

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где A, B – эрмитовы матрицы в E_N, то получаем распадающиеся краевые условия. Например, для задачи на полуоси

$$\cos A \hat{y}(0) + \sin A \hat{y}'(0) = 0, \tag{18}$$

$$\cos B (Sy)_1(\infty) - \sin B (Sy)_2(\infty) = 0. \tag{19}$$

2. Пусть

$$Y(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \hat{\Phi}(t,\lambda) & \hat{\Psi}(t,\lambda) \\ \hat{\Phi}'(t,\lambda) & \hat{\Psi}'(t,\lambda) \end{pmatrix}$$

– решение системы (2), удовлетворяющее начальному условию

$$Y(0, \lambda) = \begin{pmatrix} \sin A & \cos A \\ -\cos A & \sin A \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Теорема 3. Краевое условие (19) на сингулярном конце эквивалентно условию вида

$$\lim_{t\to\infty} [(\hat{\Psi}^*(t,\bar{\lambda}) + M^*(\bar{\lambda})\hat{\Phi}^*(t,\bar{\lambda}))\hat{y}'(t) - (\hat{\Psi}'^*(t,\bar{\lambda}) + M^*(\bar{\lambda})\hat{\Phi}'^* \times \\ \times (t,\bar{\lambda})\hat{y}(t)] = 0, \tag{21}$$

где характеристическая матрица-функция $M(\lambda)$ в квазирегулярном случае представима в виде

$$M(\lambda) = -[(S\Psi)_1^*(\infty,\bar{\lambda})\cos B - (S\Psi_2)^*(\infty,\bar{\lambda})\sin B][(S\Phi)_1^*(\infty,\bar{\lambda})\cos B - (S\Phi)_2^* \times \\ \times (\infty,\bar{\lambda})\sin B]^{-1}, \tag{22}$$

мероморфна с простыми полюсами на вещественной оси и удовлетворяет неравенству

$$\frac{\operatorname{Im} M(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} = \frac{M(\lambda) - M^*(\lambda)}{\lambda - \bar{\lambda}} > 0 \quad (\operatorname{Im} \lambda \neq 0). \tag{23}$$

Когда эрмитов матричный параметр B принимает всевозможные значения в пределах $-\frac{\pi}{2} I < B \leq \frac{\pi}{2} I$, $M(\lambda)$ пробегает все характеристические матрицы, отвечающие ортогональным спектральным матрицам-функциям задач с краевыми условиями в нуле (18).

<u>Доказательство.</u> Пусть $h_k = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\} \in E_N$ (I на k- месте); $y_k(t, \lambda)$, $k = 1, \dots, N$ – решения уравнения (I), удовлетворяющие начальным условиям на бесконечности

$$(Sy_k)_1(\infty, \lambda) = \sin Bh_k, \quad (Sy_k)_2(\infty, \lambda) = \cos Bh_k.$$

Обозначим $\hat{\chi}(t, \lambda)$, $\hat{\chi}'(t, \lambda)$ матрицы, столбцами которых являются векторы $\hat{y}_k(t, \lambda)$ и $\hat{y}'_k(t, \lambda)$, $k = 1, \dots, N$. Тогда

$$(S\chi)_i(\infty, \lambda) = \sin B, \quad (S\chi)_2(\infty, \lambda) = \cos B, \tag{24}$$

где

$$\begin{gathered} (S\chi)_i(\infty, \lambda) = \lim_{t \to \infty} W_{t,\lambda}(\hat{U}_i, \hat{\chi}) \overset{df}{=} W_{\infty, \lambda}(\hat{U}_i, \hat{\chi}); \\ W_{t,\lambda}(\hat{F}, \hat{G}) = \hat{F}^*(t, \bar{\lambda}) \hat{G}'(t, \lambda) - \hat{F}'^*(t, \bar{\lambda}) \hat{G}(t, \lambda). \end{gathered} \tag{25}$$

Используя тот факт, что матрица $Y(t, \lambda)$ является J-унитарной, легко убедиться, что

$$\hat{\chi}(t, \lambda) = \hat{\Phi}(t, \lambda) C_1(\lambda) + \hat{\Psi}(t, \lambda) C_2(\lambda),$$

где

$$C_1(\lambda) = -W_\lambda(\hat{\Psi}, \hat{\chi}), \quad C_2(\lambda) = W_\lambda(\hat{\Phi}, \hat{\chi})$$

и не зависит от t (поэтому t при $W_{t,\lambda}$ опущено).
Положим

$$D_{t,\lambda}(\hat{F}, \hat{G}) = W^*_{t,\lambda}(\hat{U}_1, \hat{F}) W_{t,\lambda}(\hat{U}_2, \hat{G}) - W^*_{t,\bar{\lambda}}(\hat{U}_2, \hat{F}) W_{t,\lambda}(\hat{U}_1, \hat{G}).$$

Используя (15), непосредственно проверяем, что $D_{t,\lambda}(\hat{F},\hat{G}) = W_{t,\lambda}(\hat{F},\hat{G})$. Поэтому, благодаря (24) и (25), получаем

$$C_1(\lambda) = -W_{\infty,\lambda}(\hat{\psi},\hat{\chi}) = -D_{\infty,\lambda}(\hat{\psi},\hat{\chi}) = [(S\psi)_1^*(\infty,\bar{\lambda})\cos B - (S\psi)_2^*(\infty,\bar{\lambda})\sin B].$$

В силу (10) $(S\psi)_1(\infty,\lambda)$ и $(S\psi)_2(\infty,\lambda)$, а поэтому и $C_1(\lambda)$ являются аналитическими функциями. Аналогично доказывается аналитичность функции $C_2(\lambda) = (S\varphi)_1^*(\infty,\bar{\lambda})\cos B - (S\varphi)_2^*(\infty,\bar{\lambda})\sin B$, а вместе с ней и функции $\hat{\chi}(t,\lambda)$.

Если $\det C_2(\lambda_0) = 0$, то при некотором $h \neq 0$ $W_{0,\lambda_0}(\hat{\varphi},\hat{\chi})h = 0$. Поэтому в силу начального условия (20) $\cos A\hat{\chi}(0,\lambda_0)h + \sin A\hat{\chi}'(0,\lambda_0)h = 0$. Тогда вектор-функция $y(t,\lambda_0) = P\hat{\chi}(t,\lambda_0)h \in D(L^*)$, где $P = I_m \oplus O_{m(n-1)}$, удовлетворяет уравнению (1), краевым условиям (18), (19), и, следовательно, λ_0 является собственным значением самосопряженного оператора $\tilde{L}$, порожденного в L_R^2 дифференциальным выражением $l_R[y]$ и краевыми условиями (18), (19). Поэтому мероморфная функция

$$M(\lambda) = C_1(\lambda)C_2^{-1}(\lambda) = -[(S\psi)_1^*(\infty,\bar{\lambda})\cos B - (S\psi)_2^*(\infty,\bar{\lambda})\sin B] \times$$
$$\times [(S\varphi)_1^*(\infty,\bar{\lambda})\cos B - (S\varphi)_2^*(\infty,\bar{\lambda})\sin B]^{-1}$$

имеет полюсы только на действительной оси и

$$\frac{M(\lambda)-M^*(\lambda)}{\lambda-\bar{\lambda}} = \frac{C_2^{-1*}(\lambda)[C_2^*(\lambda)C_1(\lambda) - C_1^*(\lambda)C_2(\lambda)]C_2^{-1}(\lambda)}{\lambda-\bar{\lambda}} \quad (Jm\,\lambda \neq 0). \qquad (26)$$

Исходя из того, что $C_1(\lambda) = -W_{0,\lambda}(\hat{\psi},\hat{\chi})$, $C_2(\lambda) = W_{0,\lambda}(\hat{\varphi},\hat{\chi})$, после элементарных преобразований имеем

$$C_2^*(\lambda)C_1(\lambda) - C_1^*(\lambda)C_2(\lambda) = \hat{\chi}'^*(0,\lambda)\hat{\chi}(0,\lambda) - \hat{\chi}^*(0,\lambda)\hat{\chi}'(0,\lambda), \qquad (27)$$

а в силу формул (7), (16) и начальных условий (24) получаем

$$(\lambda-\bar{\lambda})\int_0^\infty \hat{\chi}^*(t,\lambda)R_N(t)\hat{\chi}(t,\lambda)dt = \hat{\chi}'^*(0,\lambda)\hat{\chi}(0,\lambda) - \hat{\chi}^*(0,\lambda)\hat{\chi}'(0,\lambda). \qquad (28)$$

Из (26) - (28) вытекает (23).

Пусть $N \times N$- матрица $\hat{F}(t)$ такая, что при любом $h \in E_N$ $P\hat{F}(t)h \in D(L^*)$. Тогда при всех λ, $Jm\,\lambda \neq 0$ существует

$$\lim_{t\to\infty} W_{t,\lambda}(\hat{\varphi}+\hat{\Phi}M(\lambda),\hat{F}) = (C_2^{-1})^* \lim_{t\to\infty} W_{t,\lambda}(\hat{\chi},\hat{F}) = (C_2^{-1})^* \lim_{t\to\infty} D_{t,\lambda}(\hat{\chi},\hat{F}) =$$

$$= (C_2^{-1})^* \lim_{t\to\infty} [W^*_{t,\bar\lambda}(\hat{U}_1^*,\hat{\chi}) W_{t,\lambda}(\hat{U}_2,\hat{F}) - W^*_{t,\bar\lambda}(\hat{U}_2,\hat{\chi}) W_{t,\lambda}(\hat{U}_1,\hat{F})] =$$

$$= (C_2^{-1})^* [\sin B (SF)_2(\infty) - \cos B (SF)_1(\infty)].$$

Если при некотором h $y(t) = P\hat{F}(t)h \in D(\tilde{L})$, где $\tilde{L}$ – самосопряженное расширение, определенное граничными условиями (18), (19), то получим (21). Теорема доказана.

Замечание. Пусть коэффициенты дифференциального уравнения (1) являются самосопряженными ограниченными операторами в сепарабельном гильбертовом пространстве H; p_0^{-1}, R^{-1} – ограниченные операторы и пусть для каждого операторного решения $\varphi_i(t,\lambda)$ уравнения (1) с начальными условиями $\varphi_i^{[k-1]}(0,\lambda) = \delta_{ik}I$, $i,k=1,\dots,2N$ при некотором $\lambda=\lambda_0$ и $\lambda=\bar\lambda_0$ сходится интеграл $\int_0^\infty \|\varphi_i(t,\lambda)\|^2 dt$ (для уравнения Штурма – Лиувилля с операторными коэффициентами это требование выполняется при условиях В.Б.Лидского [4, 12]). В этом случае $\int_0^\infty \|\mathcal{H}(t)\| dt < \infty$ и можно доказать, что имеют место теоремы 1 – 3 (за исключением утверждения о мероморфности $M(\lambda)$ в теореме 3).

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

2. Крейн М.Г. О неопределенном случае краевой задачи Штурма – Лиувилля в интервале $(0,\infty)$. – Изв. АН СССР. Сер. математика, 1952, с.293-321.

3. Fulton C. Parametrizations of Titchmarsh's m(λ)-function in the limit circle case. – Trans.Amer.Math.Soc., 1977, 229, с.51-63.

4. Горбачук М.Л. О спектральных функциях дифференциального уравнения второго порядка с операторными коэффициентами. – Укр. мат. журн., 1966, 18, № 2, с.3-21.

5. Штраус А.В. Об обобщенных резольвентах и спектральных функциях дифференциальных операторов четного порядка. – Изв. АН СССР, Сер. математика, 1957, 21, № 6, с.785-808.

6. Брук В.М. Об обобщенных резольвентах и спектральных функциях дифференциальных операторов четного порядка в пространстве вектор-функций. – Мат. заметки, 1974, 15, № 6, с.945-964.

7. Рофе-Бекетов Ф.С. О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций. – Теория функций, функционал. анализ и их приложения, 1969, вып.8, с.3-24.

8. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

9. Кочубей А.Н. О расширении симметрических операторов и симметрических бинарных отношений. – Мат. заметки, 1975, 17, № 1, с.41-48.

10. Брук В.М. Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии. – Мат. сб., 1972, 100, № 2, с.210–216.

11. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. – В кн.: Спектральная теория. – М.: Мир, 1966. – 1063 с.

12. Лидский В.Б. О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений $y'' + P(t)y = \lambda y$. – Докл. АН СССР, 1954, т.95, № 2, с.217–220.

УДК 519.21

О функциях ограниченной вариации, близких к нормальной функции распределения / Бланк Н.М., Островский И.В. - В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. Сб. науч.тр. Киев: Наук. думка, 1981, с.3-10.

Пусть $F(x)$ - функция ограниченной вариации на $(-\infty, \infty)$, преобразование Фурье - Стильтьеса которой аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость и не обращается там в нуль. Если выполнено условие

$$F(x) = \Phi(x)(1+O(e^{-c|x|})), \quad x \to -\infty, \quad \forall c > 0, \tag{1}$$

где $\Phi(x)$ - нормальная функция распределения, то $F(x) \equiv \Phi(x)$. Утверждение перестает быть верным, если в условии (1) квантор $\forall$ заменить квантором $\exists$.

Библиогр.: 7 назв.

УДК 519.46+513.88

Неаменабельные группы и их эргодические действия в пространствах с мерой/ Безуглый С.И., Голодец В.Я. - В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. Сб.науч.тр. Киев: Наук. думка, 1981, с.10-21.

Построен пример неаменабельной группы, для которой существует континуум траекторно неэквивалентно-свободных, эргодических, сохраняющих конечную меру действий. Найдено необходимое условие для того, чтобы свободная группа с n образующими имела аппроксимируемое действие в пространстве Лебега. Для любой неаменабельной счетной группы построены примеры аппроксимируемых эргодических действий типов II_∞, III.

Библиогр.: 10 назв.

УДК 517.9

Рациональные решения нелинейного уравнения Шредингера / Давыдов Р.Н. – В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. Сб.науч.тр. Киев: Наук. думка, 1981, с. 21-25.

Предложен метод нахождения рациональных решений нелинейного уравнения Шредингера

$$iu_t + u_{xx} + \varkappa u|u|^2 = 0 \quad (\varkappa < 0).$$

УДК 519.210

Радиусы круга Вейля в матричной проблеме Неванлинны – Пика/ Ковалишина И.В., $\boxed{\text{Потапов В.П.}}$ – В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. Сб.науч.тр. Киев : Наук. думка, 1981, с. 25-49.

Основным результатом является вывод мультипликативных формул для радиусов кругов Вейля. На этом основании излагается метод построения задач Неванлинны – Пика с любыми наперед заданными рангами предельных радиусов Вейля.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.958

Конечно-зонные решения уравнения Гейзенберга / Котляров В.П. В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. Сб.науч.тр. Киев: Наук. думка, 1981, с. 50-67.

Задача построения явных формул для конечно-зонных решений нелинейных уравнений, допускающих представление Лакса, связана с проблемой обращения Якоби. Для рассматриваемого уравнения Гейзенберга проблема обращения не является стандартной. В работе получено решение этой проблемы обращения и на его основе дано полное описание множества конечно-зонных решений уравнения Гейзенберга в терминах θ-функций. Построенные решения являются почти-периодическими функциями.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.535.4

О величинах отклонения мероморфных функций и голоморфных кривых над полуплоскостью / Львова С.В. – В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. Сб.науч.тр. Киев : Наук. думка, 1981, с.67–81.

Для функций, мероморфных в полуплоскости $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$, рассматривается вопрос о связи величин $\ln^+ \hat{M}(r,f) = \max\limits_{\varkappa(r) \le \theta \le \pi - \varkappa(r)} \ln |f(re^{i\theta} \sin\theta)|$, где $\varkappa(r) = \arcsin \frac{1}{r}$ и ее характеристикой Цудзи $\hat{T}(r,f)$. Показано, что для таких функций имеет место ограниченность величины $\hat{\beta}(f) = \varliminf\limits_{r\to\infty} \frac{\ln^+ \hat{M}(r,f)}{r\hat{T}(r,f)}$.

Аналогичные рассмотрения проведены и для вектор-функций $\vec{G}(z) = \{g_1(z), \ldots, g_n(z)\}$, где $g_i(z)$ голоморфны в полуплоскости.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.9

О функции Грина одномерных слабонеупорядоченных структур / Молчанов С.А., Степанов А.К. – В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. Сб.науч.тр. Киев : Наук. думка, 1981, с.81–90.

Обсуждается асимптотическое поведение функции Грина в зависимости от свойств случайной среды.

УДК 517.55:517.5

Об оболочке голоморфности одного класса вещественно-аналитических функций / Новицкий М.В. – В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. Сб.науч.тр. Киев : Наук. думка, 1981, с.91–98.

Строится оболочка голоморфности некоторого класса вещественно-аналитических функций, обобщающего класс гармонических функций бесконечного порядка, рассмотренного ранее Аронштайном и Лелоном. Даются некоторые приложения.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 519.4

Автоморфизмы аппроксимативно-конечных факторов типа III_0 / Нессонов Н.И. – В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. Сб.науч.тр. Киев : Наук. думка, 1981, с.98-107.

Для автоморфизмов аппроксимативно-конечных факторов с периодической модулярной группой исследуются инварианты так называемого внешнего сопряжения. Установлено, что если фактор M является скрещенным произведением алгебры $N = R_{01} \otimes L^{\infty}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ на группу ее автоморфизмов, порожденную $\theta_x \otimes Q$ и $\mu Q = \mu$, то структура множества классов внешне сопряженных автоморфизмов M с нулевым асимптотическим периодом полностью определяется структурой группы $G = \{\theta \in Aut\, L^{\infty}(X) : \theta Q_1 = Q_1 \theta \ (Q_1 \in [Q])\}$. Здесь R_{01} – аппроксимативно-конечный фактор типа II_{∞}, $\theta_x \in Aut\, R_{01} (x \in X)$

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.946

Некоторые свойства множителей Стокса. II / Смилянский В.Р. – В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. Сб.науч.тр. Киев : Наук. думка, 1981, с.107-117.

Асимптотическое представление в окрестности иррегулярной особой точки $z = \infty$ однозначно определяет фундаментальную матрицу, имеющую это представление в любом "стандартном" секторе z-плоскости. Дополнительно найден ряд новых свойств множителей Стокса как для систем и уравнений общего вида, так и инвариантных относительно замены $z \to ze^{i\alpha}$. Для некоторого уравнения второго порядка, коэффициенты которого не являются рациональными функциями, определены все множители Стокса; для одной из систем второго порядка, коэффициенты которой не являются рациональными функциями, определены все множители Стокса с точностью до одного знака.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.946

Асимптотика потенциала электростатического поля в областях с диэлектрическими включениями / Фенченко В.Н. – В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. Сб. науч.тр. . Киев : Наук. думка, 1981, с.117–129.

Рассмотрен потенциал электростатического поля в области, содержащей большое количество мелких диэлектрических включений и его асимптотическое поведение, когда количество включений возрастает, а их диаметры уменьшаются.

Получено необходимое и достаточное условие того, чтобы среду с большим количеством мелких диэлектрических включений можно было описать введением некоторого тензора диэлектрической проницаемости, вычисляемого по характеристикам множества включений.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.946

О сходимости решений второй краевой задачи в слабосвязанных областях / Хруслов Е.Я. – В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. Сб.науч.тр. Киев : Наук. думка, 1981, с.129–174.

Рассмотрена вторая краевая задача для уравнения Гельмгольца в областях сложной структуры вида $\Omega^{(s)} = \Omega \setminus F^{(s)}$, где Ω – область в $R_n\ (n \geqslant 2)$, а $F^{(s)}$ – сильно изрезанное множество в Ω типа пористого тела. Изучено асимптотическое поведение решений $u^{(s)}(x)$ этой задачи при $s \to \infty$, когда $F^{(s)}$ становится все более изрезанным и располагается в Ω "объемно", так что расстояние от $F^{(s)}$ до любой точки $x \in \Omega$ стремится к нулю. Доказано, что при некоторых условиях $u^{(s)}(x)$ сходится (в определенном смысле) к решению $\{u_1(x), \ldots, u_m(x)\}$ следующей системы уравнений:

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}^{r} \frac{\partial u_r}{\partial x_k}\right) - \sum_{p=1}^{m} c_{rp} u_p - \lambda b_r u_r = b_r f, \quad r = 1, 2, \ldots, m,$$

рассматриваемой в области Ω. Этот результат применен к изучению поведения собственных значений оператора Лапласа в области $\Omega^{(s)}$ при краевых условиях Неймана.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.94 + 513.88

Самосопряженные краевые условия на бесконечности для квазирегулярной системы дифференциальных уравнений четного порядка / Холькин А.М. - В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. Сб.науч.тр. Киев : Наук. думка, 1981, с. 174-183.

Получено описание всех самосопряженных расширений симметрических дифференциальных операторов произвольного четного порядка с матричными коэффициентами на оси или полуоси с помощью краевых условий. С этой целью установлен конкретный вид пространства граничных значений на сингулярном конце. Кроме того, производится параметризация характеристической матрицы-функции и приводится конкретная формула для ее нахождения.

Библиогр.: 12 назв.

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Сборник научных трудов

Утверждено к печати ученым советом
Физико-технического института низких температур АН УССР

Редактор Л.А.Лащенкова
Обложка художника Б.Л.Квашнева
Художественный редактор Н.М.Абрамова
Технический редактор Т.М.Зубрицкая
Корректор А.Ф.Коровниченко

Информ. бланк № 4088.

Подп. к печ. 19.02.81. БФ 00037. Формат 60х84/16. Бумага офс. № 1.
Усл.печ.л. 11,16. Усл.кр.-отт. 11,39. Уч.-изд.л. 10,74. Тираж
1000 экз. Заказ № 1-145 Цена 1 руб. 10 коп.

Издательство "Наукова думка". 252601. Киев, ГСП, Репина, 3.
Киевская книжная типография научной книги Республиканского производственного объединения "Полиграфкнига" Госкомиздата УССР.
252004, Киев-4, Репина, 4.