Аналитические
методы
в теории
вероятностей
и теории
операторов

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

Физико-технический институт низких температур

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ

Сборник научных трудов

Киев Наукова думка 1990

УДК 517.547.22:519.213.2:517.582

Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов : Сб. науч. тр. / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низк. температур; Редкол.: Марченко В.А. (отв. ред.) и др. – Киев : Наук. думка, 1990. – 156 с. – ISBN 5-12-001584-0.

Сборник посвящен современным вопросам теории вероятностей, функционального анализа и математической физики. Рассмотрены проблемы устойчивости ряда аналитических задач теории вероятностей. Даны точные оценки роста целых характеристических функций без нулей в угловой области, получено описание их нулевых поверхностей в многомерном случае. Найдены условия принадлежности классу I_0 для безгранично делимых распределений с бесконечной спектральной мерой, сосредоточенной на множестве с независимыми точками. Полностью описаны множества нормальных компонент двумерных распределений. Исследована зависимость между односторонней обратимостью операторов и их сопряженных.

Для специалистов в области теории функций, теории вероятностей и функционального анализа.

Утверждено к печати ученым советом Физико-технического института низких температур АН УССР

Редакция информационной литературы

Редактор Т.В.Кацовенко

А $\frac{1602090000-533}{М221(04)-90}$ 190-90

ISBN 5-12-001584-0

С О Д Е Р Ж А Н И Е

УДК 519.2

Г.П.Чистяков

К ВОПРОСУ О ТЕОРЕМЕ И.В.ОСТРОВСКОГО – Р.КУППЕНСА

Приводятся достаточные условия принадлежности вероятностных законов классу I_0. С их помощью строятся безгранично делимые вероятностные законы из класса I_0 без гауссовой компоненты и со спектральной не вполне конечной мерой Леви, сосредоточенной на множестве с независимыми точками.

Пусть P – n-мерный безгранично делимый вероятностный закон (б.д.в.з.). Его характеристическая функция (х.ф.) (см. [1, гл. VI]) имеет вид

$$\varphi(t;P)=\exp\left\{i\langle\beta,t\rangle-Q(t)+\int\limits_{R^n\setminus\{0\}}K(t,x)\,\nu_P(dx)\right\}, \tag{1}$$

$$t\in R^n, \quad K(t,x)=e^{i\langle t,x\rangle}-1-\frac{i\langle t,x\rangle}{1+|x|^2},$$

где $\beta\in R^n$, $Q(t)$ – неотрицательная квадратичная форма, ν_P – вполне σ – конечная мера на классе борелевских множеств в R^n, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{R^n\setminus\{0\}}|x|^2(1+|x|^2)^{-1}\,\nu_P(dx)<\infty. \tag{2}$$

Меру ν_P условимся называть спектральной мерой Леви б.д.в.з. P.

И.В.Островский и Р.Куппенс [1] доказали, что если х.ф. б.д.в.з. P имеет вид (1), где $Q(t)=0$, спектральная мера Леви ν_P – вполне конечна и сосредоточена на множестве с независимыми точками, то P принадлежит классу I_0 (т.е. все компоненты в.з. P являются б.д.в.з.). А.Е.Фрынтов [2] показал, что если в этой теореме отказаться от условия вполне конечности меры ν_P, то она, вообще говоря, теряет свою силу.

ISBN 5-12-001584-0. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Киев, 1990.

Возникает вопрос: существуют ли в.з. P из класса I_0, удовлетворяющие условиям теоремы И.В.Островского – Р.Куппенса, кроме условия вполне конечности меры ν_P ? В работе будет дан положительный ответ на этот вопрос и указаны достаточные условия принадлежности в.з. классу I_0, позволяющие конструктивно строить широкий класс б.д.в.з. без гауссовой компоненты ($Q(t) \equiv 0$), с не вполне конечными мерами Леви, сосредоточенными на множестве с независимыми точками, и принадлежащих классу I_0.

Пусть e – борелевское множество, содержащее нуль. Обозначим P_e б.д.в.з. с х.ф. вида

$$\varphi(t, P_e) = exp\left\{ i\langle\beta, t\rangle - Q(t) + \int_{R^n\setminus e} K(t,x)\,\nu_P(dx)\right\}. \tag{3}$$

Теорема 1. Пусть P – б.д.в.з. с х.ф. $\varphi(t; P)$ вида (1); $\{e_q\}_{q=1}^{\infty}$ – невозрастающая последовательность борелевских множеств такая, что

$$\lim_{q\to\infty} \int_{e_q\setminus\{0\}} |x|^2 (1+|x|^2)^{-1} \nu_P(dx) = 0. \tag{4}$$

и б.д.в.з. $P_{e_q} \in I_0 \quad \forall q \in N$. Тогда существует множество

$$e^* = \bigcup_{j=1}^{\infty} (e_{q_{2j-1}} \setminus e_{q_{2j}}) \cup \{0\}, \quad q_1 < q_2 < \ldots , \tag{5}$$

такое, что б.д.в.з. $P_{e^*} \in I_0$.

Следствие 1. Существует б.д.в.з. P из класса I_0 без гауссовой компоненты с не вполне конечной спектральной мерой Леви ν_P, сосредоточенной на множестве с независимыми точками.

Для доказательства следствия возьмем б.д.в.з. P без гауссовой компоненты с мерой Леви ν_P, сосредоточенной на последовательности линейно независимых точек $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(0 < x_{k+1} \le \frac{1}{2} x_k,$ $k \in N$) и такой, что $\nu_P(\{x_k\}) = 1,\ k \in N$. Выбирая в качестве множеств $e_q = \{x : |x| < q^{-1}\}$ из теоремы И.В.Островского – Р.Куппенса и теоремы 1 легко получаем существование искомого б.д.в.з. из класса I_0.

Следствие 2. Существует б.д.в.з. $P \in I_0$ без гауссовой компоненты с не вполне конечной спектральной мерой Леви ν_P такой, что q-е степени относительно свертки ее сужения на множества $R^n \setminus \{x : |x| < \varepsilon_m\}$, $\varepsilon_m \downarrow 0$, попарно сингулярны для различных $q \in N$.

Рассмотрим одномерный б.д.в.з. P без гауссовой компоненты со спектральной мерой Леви ν_P вида: для любого борелевского множества A

$$\nu_p(A)=\int_A x^{-2}(1+x^2)\,\varkappa(dx),$$

где $\varkappa$ – сингулярная мера Кантора. Как доказал А.М.Вершик [3], q-е степени $\varkappa$ относительно свертки попарно сингулярны для различных $q\in N$. Мера ν_p, очевидно, не вполне конечна, но ее сужения ν_{mp} на множества $R^1\setminus(-\varepsilon_m,\varepsilon_m)$, $\varepsilon_m\downarrow 0$, вполне конечны и таковы, что ν_{mp}^{q*} попарно сингулярны для различных $q\in N$. Г.М.Фельдман [4] показал, что теорема И.В.Островского – Р.Куппенса сохраняет силу, если степени ν_p^{q*} вполне конечной спектральной меры Леви ν_p попарно сингулярны для различных $q\in N$. Поэтому из этого результата и теоремы 1, в которой выбираем $e_m=\{x:|x|<\varepsilon_m\}$ получаем утверждение следствия 2.

Замечание 1. Теорема 1 позволяет доказывать существование в классе I_0 в.з. P не только с не вполне конечной спектральной мерой Леви ν_p, сосредоточенной на множествах определенной арифметической структуры. С ее помощью также доказывается существование в.з. $P\in I_0$, таких, что величина $\nu_p(\{x:|x|>r\})$ медленно убывает при $r\to\infty$. На этих приложениях теоремы 1 не останавливаемся, поскольку они не связаны с темой заметки.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Следуя В.М.Золотареву [5], введем характеристику устойчивости разложений в.з. P в метрике Леви – Прохорова:

$$\beta_\pi(\varepsilon,P)=\sup_{H\in B(\varepsilon,P)}\ \sup_{H'\in K_H}\ \inf_{P'\in K_P}\ \pi(H',P'),$$

где $B(\varepsilon,P)=\{H$ – в.з.: $\pi(H,P)\le\varepsilon\}$, K_H, K_P – классы компонент соответственно в.з. H, P, π – метрика Леви – Прохорова

$$\pi(H,P)=\inf\{\varepsilon:P(A)\le H(A^\varepsilon)+\varepsilon,\ H(A)\le P(A^\varepsilon)+\varepsilon,\ \ \forall A\in\mathcal{B}\},$$

где $\mathcal{B}$ – σ-алгебра борелевских множеств в R^n и $A^\varepsilon=\{x:|x-y|<\varepsilon,\ y\in A\}$. Как известно [5, 6], величина

$$\beta_\pi(\varepsilon,P)\to 0 \qquad \text{при} \qquad \varepsilon\to 0. \tag{6}$$

Обозначим $\mathcal{S}_q^P$ множество б.д.в.з. H с х.ф. вида

$$\varphi(t;H)=\exp\Big\{\int_{A\setminus\{0\}}K(t,x)\,\nu_p(dx)\Big\},$$

где $A\subset e_q$ – борелевское множество. Тогда, рассуждая от противного, с учетом соотношения (4) нетрудно заметить, что

$$\lim_{q\to\infty} h_q = 0, \qquad \text{где} \qquad h_q = \sup_{H\in \mathcal{P}_q} \pi(H, E_0), \tag{7}$$

E_0 – единичный в.з., сосредоточенный в точке нуль.

Пусть $P_1 = P_{e_1}$. В силу (6) найдется $\delta_1 > 0$ такое, что $\beta_{\mathcal{X}}(\delta_1, P_1) \le 1/2$, а в силу (7) существует $q_2 > q_1 = 1$ такое, что $h_{q_2} \le \delta_1$. Рассмотрим теперь б.д.в.з. $P_2 = P_{f_2}$, где $f_2 = (e_1 \setminus e_{q_2}) \cup e_{q_3}$, $q_3 > q_2$. Выберем $\delta_2 \le \delta_1/2$ так, чтобы $\beta_{\mathcal{X}}(\delta_2, P_2) \le 1/4$ и укажем $q_4 > q_3$ такое, что $h_{q_4} \le \delta_2$. Это возможно в силу соотношений (6), (7). После этого строим б.д.в.з. $P_3 = P_{f_3}$, где $f_3 = (e_1 \setminus e_{q_2}) \cup (e_{q_3} \setminus e_{q_4}) \cup e_{q_5}$, $q_5 > q_4$. Продолжая описанную выше процедуру, получаем последовательность чисел $\delta_j \downarrow 0$ и последовательность б.д.в.з. $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$: $P_j = P_{f_j}$, где $f_j = (e_1 \setminus e_{q_2}) \cup \ldots (e_{q_{2j-3}} \setminus e_{q_{2j-2}}) \cup e_{q_{2j-1}}$ и при этом параметры δ_j, q_j ($q_j < q_{j+1}$, $q_1 = 1$) подобраны так, что для всех $j \in \mathbb{N}$

$$\beta_{\mathcal{X}}(\delta_j, P_j) \le 2^{-j}, \qquad h_{q_{2j}} \le \delta_j. \tag{8}$$

Определим по указанным выше параметрам q_j множество e^* по формуле (5) и покажем, что б.д.в.з. $P_{e^*} \in I_0$. По построению имеем

$$e^* \subset f_j, \qquad f_j \setminus e^* \subset e_{q_{2j}} \setminus \{0\}$$

так, что $\mathbb{R}^n \setminus e^* = (\mathbb{R}^n \setminus f_j) \cup (f_j \setminus e^*)$ и значит $P_{e^*} = P_j * H_j$, $H_j \in \mathcal{P}_{q_{2j}}$. Поэтому в силу второго из соотношений (8)

$$\pi(P_{e^*}, P_j) = \pi(H_j * P_j, E_0 * P_j) \le \pi(H_j, E_0) \le \delta_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Пусть $P_{e^*} = P_1^* * P_2^*$, где P_k^* $(k = 1, 2)$ – в.з. В силу первого из соотношений (8) найдутся в.з. $H_{kj} \in K_{P_j}$, что

$$\pi(P_k^*, H_{kj}) \le 2^{-j+1}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Поскольку в.з. $P_j \in I_0$ (как компонента в.з. $P_{e_{q_{2j}}} \in I_0$ по условию теоремы), то H_{kj} – б.д.в.з. Таким образом, существует последовательность б.д.в.з. H_{kj} слабо сходящаяся к в.з. P_k^*. Отсюда следует, что в.з. P_k^* $(k = 1, 2)$ – б.д.в.з., что и требовалось доказать.

Следующий результат о конструктивном построении б.д.в.з., существование которых доказано в следствии 1 теоремы 1. В дальнейшем через P будем обозначать б.д.в.з. с х.ф. вида (1), где $\beta = 0$, $Q(t) = 0$, а мера Леви ν_p сосредоточена на последовательности вещественных независимых точек $\{\mu_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ с предельными точками в нуле и на бесконечности. Зададимся $N > 1$ и введем следующие обозначения: $m(N)$ – число точек последовательности

$\{\mu_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, лежащих на множестве $\mathbb{R}^1 \setminus e_N$, $e_N = \{x : |x| < 1/N\} \cup \{x : |x| > N\}$;

$$\lambda_N = \int_{e_N \setminus \{0\}} x^2 (1+x^2)^{-1} \nu_p(dx);$$

$$\Delta_N = \nu_p(\mathbb{R}^1 \setminus e_N);$$

$$\rho_N = \inf \left\{ \left|\sum_k l_k \mu_k\right| : l_k \in \mathbb{Z}, \quad |l_k| \leq 2M_N, \quad \sum_k |l_k| \neq 0 \right\},$$

где суммирование ведется по k таким, что $\mu_k \in \mathbb{R}^1 \setminus e_N$, а $M_N = (\ln(1/\lambda_N)) / \ln\ln(30 + 1/\lambda_N)$. Здесь и ниже предполагаем: в.з. P таков, что $\lambda_N > 0$ для $\forall N > 1$.

Теорема 2. Пусть для в.з. P выполняется соотношение

$$\lim_{N \to \infty} \left(\frac{\ln(m(N)\Delta_N)}{\ln M_N} + \frac{\ln(1/\rho_N)}{M_N \ln M_N} \right) = 0.$$

Тогда $P \in I_0$.

Приведем пример в.з. P, удовлетворяющего условиям теоремы 2. Рассмотрим последовательность чисел

$$\mu_k = 2^{2^{-n_k}} - 1, \quad k \in \mathbb{N}, \qquad n_1 = 0, \qquad n_k = 4^{n_{k-1}}, \quad k \geq 2.$$

Нетрудно убедиться, что это последовательность независимых, целых алгебраических чисел, причем степень числа μ_k равна 2^{n_k}. Это же утверждение имеет место и для чисел $\tilde{\mu}_k = \mu_k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Алгебраически сопряженные к числу $\tilde{\mu}_k$, обозначим их через $\tilde{\mu}_k'$, по модулю не превосходят 2. Чтобы для чисел μ_k получить оценку снизу величины ρ_N, воспользуемся следующим рассуждением (см. [7, с. 99, 25, 26]). Рассмотрим числа

$$\alpha_k(x_1, \ldots, x_{2^{n_k}}) = x_1 + x_2 \tilde{\mu}_k + \ldots + x_{2^{n_k}} \tilde{\mu}_k^{2^{n_k} - 1},$$

где $x_1, \ldots, x_{2^{n_k}}$ – целые, не равные одновременно нулю. Если в этом соотношении вместо $\tilde{\mu}_k$ поставить $\tilde{\mu}_k'$, то получим алгебраически сопряженные к $\alpha_k(x_1, \ldots, x_{2^{n_k}})$ числа. Умножая число $\alpha_k(x_1, \ldots, x_{2^{n_k}})$ на произведение $2^{n_k} - 1$ его других сопряженных, получим целое рациональное число, отличное от нуля, и, значит, ≥ 1 по абсолютной величине. Следовательно,

$$\inf_{\nu \in \mathbb{Z}} |\alpha_k(x_1, \ldots, x_{2^{n_k}}) + \nu| \geq 8^{-2^{n_k}} \left(\max_{j \geq 1} |x_j| \right)^{-2^{n_k}}. \qquad (10)$$

Значения меры Леви ν_p, сосредоточенной на последовательности $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, в точках μ_k определим следующим образом: $\nu_p(\{\mu_k\}) = \mu_k^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Проверим для в.з. P со спектральной мерой Леви

ν_p выполнение условий теоремы 2. Легко видеть, что выполняются оценки:

$$\frac{1}{2} \le \lambda_N \mu_{s+1}^{-1} \le 2, \quad \mu_{s+1} = \{\mu_k : \mu_k < 1/N\};$$

$$\Delta_N \le 2\mu_s^{-1}; \quad m(N) \le n_s;$$

$$\frac{1}{2} \le \mu_k 2^{n_k} \le 2, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Кроме того, в силу (10) имеем

$$\rho_N \ge 8^{-2^{n_s}} (2M_N)^{-2^{n_s}} \ge (16(n_{s+1}+2))^{-2^{n_s}} .$$

Из этих оценок заключаем, что имеет место соотношение (9), а, значит, в.з. $P \in I_0$.

Доказательство теоремы 2. Пусть P – в.з., удовлетворяющий условиям теоремы 2 и пусть

$$P = P_1 * P_2 , \tag{11}$$

где P_j $(j=1,2)$ – в.з. Докажем, что P_j $(j=1,2)$ – б.д.в.з. Пусть $P^* = P_{e_N}$, $P_{e_{N1}}(e_{N1} = [-1/N, 1/N])$, $P_{e_{N2}}$ ($e_{N2} = [-N, N]$)- б.д.в.з. с х.ф. вида (3), где $\beta = 0$, $Q(t) = 0$. Параметр N всюду далее достаточно велик. Оценим расстояние в метрике Леви $L(P, P^*)$ между в.з. P и P^*. Сначала заметим, что непосредственно из определения в.з. $P_{e_{N2}}$ легко следует оценка: $L(E_0, P_{e_{N2}}) \le 4\lambda_N$. Чтобы оценить величину $L(P, P_{e_{N1}})$, воспользуемся следующим результатом В.М.Золотарева [8].

Теорема. Пусть H, W – одномерные в.з. с х.ф. соответственно $\varphi(t;H)$, $\varphi(t;W)$ и число $T>0$. Тогда

$$L(H,W) \le \frac{1}{\pi}\int_0^T |\varphi(t;H) - \varphi(t;W)| \frac{dt}{t} + 5{,}66 \frac{\ln(1+T)}{T} .$$

Применим эту теорему, выбирая $T = \lambda_N^{-1/3}$, к в.з. P, $P_{e_{N1}}$. Замечаем, что для $t \in [-\lambda_N^{-1/3}, \lambda_N^{-1/3}]$ справедлива простая оценка

$$|\varphi(t;P) - \varphi(t;P_{e_{N1}})| \le \left|1 - \exp\left\{\int_{e_{N1}\setminus\{0\}} K(t,x)\,\nu_p(dx)\right\}\right| \le$$

$$\le \lambda_N (t^2 + |t|) \exp\{\lambda_N (t^2 + |t|)\} \le 4\lambda_N (t^2 + |t|),$$

с помощью которой получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^T |\varphi(t;P) - \varphi(t;P_{e_{N1}})| \frac{dt}{t} \le \frac{4}{\pi}\lambda_N \int_0^T (t+1)\,dt \le \lambda_N^{1/3} .$$

Тогда из теоремы В.М.Золотарева извлекаем неравенство: $L(P, P_{e_{N1}}) \le$

$\leq 6\lambda_N^{1/3}\ln\left(1+\lambda_N^{-1/3}\right)$. В итоге приходим к нужной оценке

$$L(P,P^*)\leq L(P,P_{e_{N1}})+L(E_0,P_{e_{N2}})\leq 7\lambda_N^{1/3}\ln\left(1+\lambda_N^{-1/3}\right)\stackrel{def}{=}\varepsilon_N. \quad (12)$$

Начиная с этого места параметр N выбираем из последовательности $\{N_k\}$, $N_k\uparrow\infty$, на которой величина под знаком $\underline{\lim}$ в соотношении (9) стремится к нулю. В.з. P^* таков, что

$$P^*(\{x_N\})\geq e^{-\Delta_N},\quad x_N=-\int\limits_{\mathbb{R}^1\setminus e_N}x(1+x^2)^{-1}\nu_P(dx).$$

Из оценки (12) и соотношения (9) легко следует неравенство

$$P\left(\{x:|x-x_N|\leq\varepsilon_N\}\right)\geq e^{-\Delta_N}-2\varepsilon_N\geq\frac{1}{2}e^{-\Delta_N}.$$

Из соотношения (11) получаем тогда, что найдутся точки x_{N1},x_{N2} такие, что $x_{N1}+x_{N2}=x_N$ и

$$P_j\left(\{x:|x-x_{N_j}|\leq 2\varepsilon_N\right)\geq\frac{1}{8}e^{-\Delta_N}\geq\varepsilon_N^{1/2}. \quad (13)$$

Перепишем б.д.в.з. P^* в виде

$$P^*=e^{-\Delta_N}E_{x_N}*\left(E_0+\nu_{P^*}+\frac{1}{2}\nu_{P^*}^{2*}+\dots+\frac{1}{q!}\nu_{P^*}^{q*}+\dots\right),$$

где E_{x_N} – единичный в.з., сосредоточенный в точке $\{x_N\}$. Множество, на котором сосредоточена мера ν_{P^*}, обозначим через $\sigma(\nu_{P^*})$. Тогда для $q\in\mathbb{N}$ меры $\nu_{P^*}^{q*}$ сосредоточены соответственно на множествах $(q)\sigma(\nu_{P^*})$ *), которые в силу независимости точек множества $\sigma(\nu_{P^*})$ попарно не пересекаются для различных q. Пусть $q\leq 2M_N$, поскольку из соотношения (9) следует оценка: $\rho_N\geq\varepsilon_N^{1/10}$, то отсюда получаем, что расстояние между любыми двумя точками множества $A_M=\{x_N\}+\bigcup_{q=1}^{2M_N}(q)\sigma(\nu_{P^*})$ больше или равно $\varepsilon_N^{1/10}$

Из оценок (12), (13) и соотношения (11) следует неравенство

$$\frac{1}{8}e^{-\Delta_N}P_j\left(\{x:|x+y-x_{N_j}|\leq 2\varepsilon_N\}\right)\leq 2\varepsilon_N+$$
$$+P^*\left(\{x:|x+y-x_N|\leq 5\varepsilon_N\}\right),\quad\forall y\in\mathbb{R}^1,\quad j=1,2. \quad (14)$$

Пусть $y\in(q)\sigma(\nu_{P^*})$, $q\leq 2M_N$, тогда из неравенства (14) вытекает оценка

$$P_j\left(\{x:|x+y-x_{N_j}|\leq 2\varepsilon_N\}\right)\leq\frac{8}{q!}\nu_{P^*}^{q*}\left(\{y-x_N\}\right)+\varepsilon_N^{1/2},\quad j=1,2. \quad (15)$$

Если же $y_1<y_2$ любые две соседние точки множества A_M, то аналогично (14) с учётом соотношения (9), легко получаем

---

*) $A+B=\{x+y:x\in A,\ y\in B\}$, $(q+1)A=(q)A+A$, $(1)A=A$, $q\in\mathbb{N}$.

$$P_j\left(\left\{x : y_1+2\varepsilon_N < x < y_2-2\varepsilon_N\right\}\right) + P_j\left(\left\{x : x > \sup A_M\right\}\right) +$$
$$+ P_j\left(\left\{x : x < \inf A_M\right\}\right) \le \varepsilon_N^{1/2}, \quad j = 1,2. \tag{16}$$

Обозначим через $P_{jq}\ (j=1,2,\ 1\le q\le M_N)$ меры, сосредоточенные соответственно на множествах $\{x_{Nj}\}+(q)\sigma(\nu_{p*})$ и такие, что для любой точки y из этих множеств $P_{jq}(\{y\}) = P_j(\{x : |x-y|\le 2\varepsilon_N\})$. Меры P_{jq} в силу оценки (15) обладают свойством

$$P_{jq}(\mathbb{R}^1) \le \frac{8}{q!}\left(\nu_{p*}(\mathbb{R}^1)\right)^q + D_q\varepsilon_N^{1/2}, \quad 1\le q\le M_N,\ j=1,2,$$

где D_q – число точек, входящих в множество $(q)\sigma(\nu_{p*})$. Очевидно, это число $D_q \le (m(N))^q$ и поскольку в силу соотношения (9) $m(N) \le (M_N)^{1/400}$, то для $1\le q\le 2M_N$: $D_q \le \varepsilon_N^{-1/20}$, что приводит к нужной оценке

$$P_{jq}(\mathbb{R}^1) \le \frac{8}{q!}(\Delta_N)^q + \varepsilon_N^{1/4}, \quad 1\le q\le M_N, \quad j=1,2. \tag{17}$$

Рассмотрим меры

$$P_j^* = \sum_{q=0}^{M_N} P_{jq}, \qquad P_{j0} = P_j\left(\left\{x : |x-x_{Nj}|\le 2\varepsilon_N\right\}\right)E_{x_{Nj}}, \qquad j=1,2.$$

Из определения мер P_{jq} и оценки (16) получаем соотношение

$$L(P_j^*, P_j) \le \left(3 + \sum_{q=1}^{M_N} D_q\right)\varepsilon_N^{1/2} \le \varepsilon_N^{1/8}, \quad j=1,2, \tag{18}$$

применяя которое к неравенству (12) выводим

$$L(P_1^* * P_2^*,\ P^*) \le 3\varepsilon_N^{1/8}. \tag{19}$$

Теперь введем функции

$$\varphi_j(z,t) = \sum_{q=0}^{M_N} z^q\varphi(t; P_{jq}), \quad z\in\mathbb{C}, \quad t\in\mathbb{R}^1, \tag{20}$$

где $\varphi(t;P_{jq})$ – х.ф. мер P_{jq}. Эти функции для $z\in\mathbb{C}$, $|z|\le M_N^{1/20}$, и $t\in\mathbb{R}^1$ в силу неравенств (17) допускают оценку

$$|\varphi_j(z,t)| \le 9\exp\left\{(\Delta_N+1)|z|\right\}, \quad j=1,2. \tag{21}$$

Запишем

$$\varphi_1(z,t)\varphi_2(z,t) = \sum_{q=0}^{2M_N} z^q\varphi(t; H_q),$$

H_q – меры вида

$$H_q = \sum_{l=0,\dots,q;\ l \le M_N;\ l \ge q-M_N} P_{1l} * P_{2,q-l}.$$

Эти меры сосредоточены на попарно непересекающихся множествах $\{x_N\} + (q)\sigma(\nu_{p*})$, расстояние между любыми двумя точками которых больше или равно $\varepsilon_N^{1/10}$, поэтому в силу неравенств (17) и (19) легко получаем для $q = 1, 2, \dots, 2M_N$

$$Var\left(H_q - e^{-\Delta_N}\frac{1}{q!}\left(E_{x_N} * \nu_{p*}^{q*}\right)\right) \le Var\left(\sum_{l=0}^{q} P_{1l} * P_{2,q-l} -\right.$$

$$\left.-e^{-\Delta_N}\frac{1}{q!}\left(E_{x_N} * \nu_{p*}^{q*}\right)\right) + \sum_{\substack{l=0 \\ \{l > M_N\} \cup \{l < q-M_N\}}}^{q} P_{1l}(\mathbb{R}^1) P_{2,q-l}(\mathbb{R}^1) \le$$

$$\le 6 D_q \varepsilon_N^{1/8} + \sum_{\substack{l=0 \\ \{l > M_N\} \cup \{l < q-M_N\}}}^{q} \left(\varepsilon_N^{1/4} + \frac{8\Delta_N^l}{l!}\right)\left(\varepsilon_N^{1/4} + \frac{8\Delta_N^{q-l}}{(q-l)!}\right) = \delta_q.$$

Последняя оценка позволяет написать неравенство для $t \in \mathbb{R}^1$

$$\nu_q(t) = \left|\varphi(t; H_q) - e^{-\Delta_N}\frac{1}{q!}e^{ix_N t}\varphi^q(t; \nu_{p*})\right| \le \delta_q \le$$

$$\le 6 D_q \varepsilon_N^{1/8} + (8\Delta_N + 1)^q\left(2M_N \varepsilon_N^{1/4} + 2^{2M_N}/M_N!\right) \le \varepsilon_N^{1/16},\quad q = 1, \dots, 2M_N.$$

Из этого неравенства для $|z| \le M_N^{1/256}$, $t \in \mathbb{R}^1$, извлекаем оценку

$$\sum_{q=0}^{2M_N} |z|^q \nu_q(t) \le \sum_{q=0}^{2M_N} M_N^{q/256} \nu_q(t) \le 2M_N^{1+M_N/128} \varepsilon_N^{1/16} \le \varepsilon_N^{1/32}. \qquad (22)$$

Учитывая соотношение (9), приходим к следующей оценке

$$\sum_{q=2M_N+1}^{\infty} \left(M_N^{1/256}\Delta_N\right)^q / q! \le \varepsilon_N^{1/32}. \qquad (23)$$

Из оценок (22), (23) для $z \in \mathbb{C}$, $|z| \le M_N^{1/256}$ и $t \in \mathbb{R}^1$ получаем соотношение

$$\left|\varphi_1(z,t)\varphi_2(z,t) - e^{z\varphi(t;\nu_{p*}) - \varphi(0;\nu_{p*}) + ix_N t}\right| \le$$

$$\le \sum_{q=0}^{2M_N} |z|^q \nu_q(t) + \sum_{q=2M_N+1}^{\infty} e^{-\Delta_N}(|z|\Delta_N)^q/q! \le 2\varepsilon_N^{1/32}.$$

Поскольку для указанных z, t имеет место очевидная оценка снизу
$$|exp\{z\varphi(t;\nu_{p*})-\varphi(0;\nu_{p*})\}|\geq exp(-2M_N^{1/256}\Delta_N)\geq\varepsilon_N^{1/64},$$
то, сравнивая две последние оценки, приходим к заключению, что для рассматриваемых z и t выполняется
$$|\varphi_1(z,t)\varphi_2(z,t)-exp\{z\varphi(t;\nu_{p*})-\varphi(0;\nu_{p*})+ix_Nt\}|\leq$$
$$\leq\frac{1}{2}|exp\{z\varphi(t;\nu_{p*})-\varphi(0;\nu_{p*})\}|.$$
Отсюда приходим к нужному соотношению для $|z|\leq M_{N1}=M_N^{1/256}$, $t\in\mathbb{R}^1$,
$$\frac{1}{2}\leq|\varphi_1(z,t)\varphi_2(z,t)e^{-z\varphi(t;\nu_{p*})+\varphi(0;\nu_{p*})}|\leq 2. \tag{24}$$

Зафиксируем $t\in\mathbb{R}^1$ и рассмотрим функции $\varphi_j(z,t)$ $(j=1,2)$ как функции переменной z. Это аналитические функции во всей открытой z – комплексной плоскости и в силу соотношения (24) в круге $|z|\leq M_{N1}$ не обращаются в нуль. Поэтому для $|z|<M_{N1}$ функции $\varphi_j(z,t)$ допускают представление
$$\varphi_j(z,t)=exp\{f_j(z,t)\},\quad f_j(0,t)=ix_{N_j}t+\ln P_{j0}(\mathbb{R}^1),$$
где функции $f_j(z,t)$ – аналитические в круге $|z|<M_{N1}$. Разложим их в этом круге в ряд Тейлора
$$f_j(z,t)=\sum_{q=0}^{\infty}a_{jq}(t)z^q.$$
В силу оценки (21) для функций $f_j(z,t)$ имеем оценку:
$$Re\, f_j(z,t)\leq 3+(\Delta_N+1)|z|,\quad |z|<M_{N1},\quad t\in\mathbb{R}^1.$$
Воспользуемся хорошо известной леммой [1, с. 340].

<u>Лемма</u>. Если для аналитической в круге $|z|\leq R$ функции
$$f(z)=\sum_{q=1}^{\infty}b_q z^q$$
справедливо неравенство $Re\, f(z)\leq A$, то
$$|b_q|\leq 2A/R^q,\qquad q=1,2,\ldots.$$
Из этой леммы $(f(z)=f_j(z,t)-a_{j0}(t)$, $R=M_{N1}/2$, $A=3(\Delta_N+3)M_{N1}/2)$ получаем:
$$|a_{jq}(t)|\leq 3(2(\Delta_N+3)/M_{N1})^{q-1},\quad t\in\mathbb{R}^1,\quad q=2,3,\ldots.$$
Эти оценки приводят к следующему представлению для функций $\varphi_j(z,t)$ при $|z|\leq M_{N1}/2$ и $t\in\mathbb{R}^1$

$$\varphi_j(z,t) = \exp\left\{a_{j0}(t) + a_{j1}(t)z\right\}\left(1 + Q_j(z,t)\right), \qquad (25)$$

где $Q_j(z,t)$, $Q_j^{(m)}(0,t) = 0$, $m = 0,1$ – аналитические по z в круге $|z| \leq M_{N1}/2$ при каждом фиксированном $t \in R^1$, допускающие оценку: $|Q_j(1,t)| \leq 8(\Delta_N + 3)/M_{N1}$ для всех $t \in R^1$, функции. Сравнивая представления (20) и (25) функций $\varphi_j(z,t)$, как функций переменной z, заключаем для

$$\begin{aligned} e^{a_{j0}(t)} &= P_{j0}(\{x_{N_j}\})e^{ix_{N_j}t}; \\ e^{a_{j0}(t)}a_{j1}(t) &= \varphi(t; P_{j1}). \end{aligned} \qquad (26)$$

Из определения мер $P_j^*(j = 1,2)$ и оценки (16) легко получаем:

$$|\varphi_j(1,0) - 1| \leq \left(1 + \sum_{q=1}^{M_N} D_q\right)\varepsilon_N^{1/2} \leq \varepsilon_N^{1/4},$$

поэтому из представлений (25) при $z = 1$, $t = 0$ с учетом (26) приходим к соотношениям

$$\left|\varphi(0; P_{j1}) + P_{j0}(\{x_{N_j}\})\ln P_{j0}(\{x_{N_j}\})\right| \leq \frac{16(\Delta_N + 3)}{M_{N1}}. \qquad (27)$$

Применяя соотношения (26), (27) к (25), находим, что

$$\begin{aligned} \Big|\varphi(t; P_j^*) - \exp\Big\{ix_{N_j}t + \big(\varphi(t; E_{-x_{N_j}} * P_{j1}) - \\ - \varphi(0; P_{j1})\big)/P_{j0}(\{x_{N_j}\})\Big\}\Big| \leq \frac{32(\Delta_N + 3)}{M_{N1}} \end{aligned} \qquad (28)$$

для $t \in R^1$. Устремим теперь параметр $N = N_k$ к бесконечности. В силу соотношения (9) $\Delta_{N_k}/M_{N_k1} \to 0$ при $N_k \to \infty$. Из оценок (18) получаем при $N_k \to \infty$: $P_j^* \Rightarrow P_j\ (j = 1,2)$. Поэтому из неравенства (28) следует существование последовательности б.д.в.з. слабо сходящихся к в.з. P_j. Отсюда следует безграничная делимость в.з. $P_j\ (j = 1,2)$, что и требовалось доказать.

Замечание 2. Доказательство теоремы 2 опирается на предлагаемый в [9] метод исследования количественной устойчивости разложений обобщенного в.з. Пуассона на локально компактных абелевых группах. Благодаря его большой общности, теорема 2, по-видимому, допускает перенесение на n-мерный случай. Размеры заметки не позволяют остановиться подробно на этом вопросе. Отметим также, что, по-видимому, следствие 2 теоремы 1 допускает перенесение на случай в.з. на локально компактных абелевых группах.

1. Линник Ю.В., Островский И.В. Разложения случайных величин и векторов. – М. : Наука, 1972. – 480 с.

2. Фрынтов А.Е. О факторизации безгранично делимых распределений // Теория вероятн. и ее примен. – 1975. – 20, № 3. – С. 661–664.
3. Вершик А.М. О спектральном и метрическом изоморфизме некоторых нормальных динамических систем // Докл. АН СССР. – 1962. – 144, № 2. – С. 255–257.
4. Фельдман Г.М. Обобщенное распределение Пуассона класса I_0 на группах // Теория вероятн. и ее примен. – 1981. – 26, № 3. – С. 612–618.
5. Золотарев В.М. К вопросу об устойчивости разложений нормального закона на компоненты // Теория вероятн. и ее примен. – 1968. – 13, № 4. – С. 738–742.
6. Ушакова А.П. Об устойчивости разложений вероятностных законов // Теория вероятн. и ее примен. – 1983. – 28, № 3. – С. 572–574.
7. Касселс Дж.В.С. Введение в теорию диофантовых приближений. – М. : Изд-во иностр. лит., 1961. – 212 с.
8. Золотарев В.М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М. : Наука, 1986. – 415 с.
9. Чистяков Г.П. Об устойчивости для теоремы И.В.Островского – Р.Куппенса на группах // Теория функц., функц. анализ и их приложения. – 1988. – Вып. 50. – С.40–48.

УДК 519.2

А.И.Ильинский

О НОРМАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТАХ ДВУМЕРНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ

Пусть P – двумерное вероятностное распределение, Q_{uvw} – двумерное нормальное распределение с ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} u & w \\ w & v \end{pmatrix}$, $N(P) = \{(u, v, w) \in R^3 : Q_{uvw}$ – компонента P. Дано внутреннее описание класса множеств $\{N(P)\}_P$.

1. Пусть $f = f(t)$ $(t = (t_1, t_2) \in R^2)$ – характеристическая функция (х.ф.) вероятностной меры F на плоскости R^2

$$f(t) = f(t_1, t_2) = \iint_{R^2} exp\left(i(t_1 x_1 + t_2 x_2)\right) F(dx_1, dx_2).$$

Функция $n = n(t) = exp\left(-(at_1^2 + 2bt_1t_2 + ct_2^2)\right)$ называется нормальным делителем х.ф. f, если n – х.ф. (как известно, для этого необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма $at_1^2 + 2bt_1t_2 + ct_2^2$ была неотрицательно определенной) и f/n – х.ф. И.В.Островский [1] (см. также [2, с. 452]) поставил вопрос о том, каким может быть множество нормальных делителей х.ф. f. Именно, пусть для $P = (u, v, w) \in R^3$

ISBN 5-12-001584-0. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Киев, 1990.

$$\gamma_P(t) = \gamma_P(t_1, t_2) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(ut_1^2 + 2wt_1t_2 + vt_2^2\right)\right\}, \tag{1}$$

и положим для х.ф. f

$$N(f) = \left\{ P \in R^3 : \gamma_P - \text{х.ф. и } f/\gamma_P - \text{х.ф.} \right\}. \tag{2}$$

Требуется дать внутреннее описание класса множеств $\{N(f) : f - \text{х.ф.}\}$.

Очевидно, в одномерном случае ответ таков: если $g = g(\tau)$ $(\tau \in R)$ – х.ф. вероятностной меры на прямой R, $N(g) = \{\delta \in R : \exp(-\delta\tau^2)$ – х.ф. и $g(\tau)\exp(\delta\tau^2)$ – х.ф.$\}$, то $\{N(g) : g - \text{х.ф.}\} = \{[0, \Delta] : 0 \le \Delta < \infty\}$. При этом если $N(g) = [0, \Delta]$, то $\exp(-\Delta\tau^2)$ является наибольшим нормальным делителем g в том смысле, что если $\exp(-\alpha\tau^2)$ – нормальный делитель g, то $\alpha \le \Delta$. Структура множеств $N(f)$ в двумерном случае сложнее. В множестве $N(f)$, где f – х.ф. вероятностной меры в R^2, имеется естественное отношение частичного порядка: $P_1 < P_2$ $(P_1, P_2 \in N(f))$, если $\gamma_{P_2}/\gamma_{P_1}$ – х.ф. Как показано в [1, 3] (см. также [2, с. 452–455]), существуют х.ф. f, для которых множество $N(f)$ не обладает наибольшим элементом относительно указанного порядка.

И.В.Островский показал ([1, 2]), что следующие условия на множество $D \subset R^3$ необходимы для того, чтобы существовала х.ф. f такая, что $N(f) = D$: 1) $0 \in D$; 2) D – компактно; 3) D содержится в конусе $\{(u, v, w) \in R^3 : w^2 \le uv,\ u \ge 0\}$; 4) если $(u_0, v_0, w_0) \in D$, то $\{(u, v, w) : (w - w_0)^2 \le (u - u_0)(v - v_0),\ w^2 \le uv,\ 0 \le u \le u_0\} \subset D$. В [1, 2] также найдено множество $N(f)$ для некоторых х.ф. f. Цель настоящей заметки – показать, что указанные выше необходимые условия 1) – 4) являются также и достаточными.

2. Будем придерживаться следующих обозначений. Для $P_0 = (u_0, v_0, w_0) \in R^3$

$$B(P_0) = B(u_0, v_0, w_0) = \{(u, v, w) \in R^3 : (w - w_0)^2 \le (u - u_0)(v - v_0)\},$$

$$B_\pm(P_0) = B_\pm(u_0, v_0, w_0) = B(u_0, v_0, w_0) \cap \{(u, v, w) : u \gtreqless u_0\},$$

$$K(P_0) = \partial B(P_0), \quad K_\pm(P_0) = \partial B_\pm(P_0),$$

где ∂A – граница множества A в обычной топологии пространства R^3. Пусть $\mathring{A}$ – внутренность множества $A \subset R^3$. Если $\varkappa$ – заряд в R^2 (разность двух вполне конечных борелевских мер в R^2), то через $\hat{\varkappa}$ обозначаем его преобразование Фурье $\hat{\varkappa}(t) = \hat{\varkappa}(t_1, t_2) = \iint_{R^2} \exp(i(t_1x_1 + t_2x_2))\varkappa(dx_1, dx_2)$. Через $\varepsilon_{(\xi,\eta)}$ обозначаем вероятностную меру в R^2, приписывающую точке $(\xi, \eta) \in R^2$ единичную массу, то есть для каждого борелевского множества $E \subset R^2$ выполняется $\varepsilon_{(\xi,\eta)}(E)=1$ или 0 в зависимости от того, принадлежит точка $(\xi,\eta)^2$ множеству E или нет. Считая $\alpha>0,\ \beta>0,\ 2\beta-\alpha=1$, положим

$$\sigma_{\xi\eta\alpha\beta}=\beta\varepsilon_{(\xi,\eta)}+\beta\varepsilon_{(-\xi,-\eta)}-\alpha\varepsilon_{(0,0)}. \tag{3}$$

При $P=(u,v,w)\in R^3$,

$$\varphi_P(t)=exp\left(-\frac{1}{2}\left(t_1^2+t_2^2\right)\right)/\gamma_P(t), \tag{4}$$

где $\gamma_P(t)$ определено в (1). Будем обозначать также $0=(0,0,0)$, $I=(1,1,0)$. (Заметим, что $\varphi_P=\gamma_I/\gamma_P$ и функция γ_P (функция φ_P) является х.ф. нормального распределения в том и только том случае, когда $P\in B_+(0)\,(P\in B_-(I)))$.

3. В приведенных обозначениях теорема об описании класса множеств $\{N(f)\ :\ f$ – х.ф.$\}$ может быть сформулирована следующим образом.

Теорема. Для множества $D\subset R^3$ существует х.ф. $f(t_1,\ t_2)$ такая, что $N(f)=D$, тогда и только тогда, когда выполняются условия

1) $0\in D$;
2) D – компакт;
3) $D\subset B_+(0)$;
4) $P\in D\Rightarrow B_-(P)\cap B_+(0)\subset D$.

Замечание I. Условие 4) эквивалентно следующему:
4') $P\in B_+(0),\quad P\notin D\Rightarrow B_+(P)\ \cap\ D=\emptyset$.

Доказательство теоремы в сторону необходимости имеется в [1, 2]. Поэтому нужно доказать, что если множество $D\subset R^3$ удовлетворяет условиям 1)-4), то существует х.ф. f вероятностной меры в R^2 такая, что $N(f)=D$. Не уменьшая общности, можно считать, что множество D удовлетворяет также условию

5) $D\subset B_-(1/2,\ 1/2,\ 0)$.

В силу условия 2) выполнения 5) можно добиться, производя над D преобразование подобия и пользуясь очевидным равенством

$$N(f(\rho t))=\rho^2N(f(t)).$$

4. Итак, пусть множество $D\subset R^3$ удовлетворяет условиям 1)-3), 4'), 5). Х.ф. f такая, что $N(f)=D$, будет построена в виде

$$f(t)=\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}f_m(t)e^{ia_mt_1}\quad (t=(t_1,t_2)),$$

где $\{a_m\}$ – достаточно быстро растущая к бесконечности последовательность положительных чисел, $f_m = \gamma_I \ddot{\sigma}_m$, где $I = (1,1,0)$, γ_I определено в (1), σ_m – заряды в R^2 ($\sigma_m(R^2) = 1$). Построение зарядов σ_m будет связано с построением последовательности множеств G_m, удовлетворяющих условиям:

а) G_m – компакт;

б) $G_m \subset \overset{\circ}{B}_-(I)$;

в) $D = (B_+(0) \cap \overset{\circ}{B}_-(I)) \setminus (\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m)$;

г) если $P \in D$, то f_m/γ_P является х.ф. при всех $m = 1,2,\ldots$;

д) обратное преобразование Фурье $q_m(x_1, x_2; P)$ функции f_m/γ_P ($P \in \overset{\circ}{B}_-(I)$),

$$q_m(x_1, x_2; P) = (2\pi)^{-2} \iint_{R^2} f_m(t)/\gamma_P(t) \exp\left(-i(t_1x_1 + t_2x_2)\right) dt_1\, dt_2$$

удовлетворяет условиям

$$\min\left\{-q_m(0,0;P) : P \in G_m\right\} = \varkappa_m > 0,$$

и для всякого компакта $H \subset \overset{\circ}{B}_-(I)$

$$\max\left\{|q_m(x_1, x_2; P)| : P \in H\right\} \to 0 \quad (x_1^2 + x_2^2 \to \infty).$$

Предположим, что последовательности σ_m и G_m, обладающие указанными свойствами, существуют. Тогда в силу г) и условия 1) f является х.ф. и $D \subset N(f)$. Покажем, что последовательность $\{a_m\}$ ($a_m \geqslant 0$, $a_m \uparrow \infty$) можно выбрать столь быстро возрастающей, что обратное преобразование Фурье функции f/γ_P, равное $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} q_m(x_1, x_2, P)$, будет отрицательным в точке $(a_m, 0)$ при всех $P \in G_m$. Выбор последовательности $\{a_m\}$ произведем следующим образом. Положим $a_1 = 0$. Если $a_1, \ldots, a_{m-1}$ уже выбраны, то a_m выбираем так, чтобы выполнялись условия $a_m > a_{m-1}$ и

$$3^{-j} 2^{-m} \varkappa_m \geqslant \max\left\{|q_j(a_m - a_j, 0; P)| : P \in G_m\right\}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m-1),$$
$$3^{-j} 2^{-(m-j)} \varkappa_{m-j} \geqslant \max\left\{|q_m(a_m - a_{m-j}, 0; P)| : P \in G_{m-j}\right\},$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Такой выбор a_m возможен в силу а) и д). Следовательно, f/γ_P не будет х.ф., то есть $P \notin N(f)$, если $P \in \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m$. Пусть теперь $P \in B_+(0)$, $P \notin \overset{\circ}{B}_-(I)$. Покажем, что $P \notin N(f)$. Если бы $P \in N(f)$, то в силу условия 4) $B_-(P) \cap B_+(0) \subset N(f)$. В силу 5) $(B_-(P) \cap B_+(0)) \cap (\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m) \neq \emptyset$, а следовательно, $N(f) \cap (\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m) \neq \emptyset$;

как было показано, это невозможно. Итак, $N(f) \subset D$, и, следовательно, $N(f) = D$.

5. Переходим к построению зарядов σ_m и множеств G_m. Оно основано на следующих трех леммах.

Лемма 1. Пусть $\xi, \eta \in R$, $\xi^2 + \eta^2 \neq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $2\beta - \alpha = 1$, $\rho = (u, v, w) \in \mathring{B}_-(I)$, заряд $\sigma_{\xi\eta\alpha\beta}$ и х.ф. ψ_ρ таковы, как в (3) и (4). Тогда функция $\psi_\rho \hat{\sigma}_{\xi\eta\alpha\beta}$ является х.ф. в том и только том случае, когда

$$\frac{2\beta}{\alpha} \exp\left\{-\frac{(1-v)\xi^2 + 2w\xi\eta + (1-u)\eta^2}{2[(1-u)(1-v) - w^2]}\right\} \geq 1. \qquad (5)$$

Доказательство. Плотность х.ф. ψ_ρ равна

$$n_\rho(x_1, x_2) = (2\pi\sqrt{M})^{-1} \exp\left\{-(2M)^{-1}\left((1-v)x_1^2 + 2w x_1 x_2 + (1-u)x_2^2\right)\right\},$$

где $M = (1-u)(1-v) - w^2$. Как показывают простые вычисления, $\psi_\rho \hat{\sigma}_{\xi\eta\alpha\beta}$ является преобразованием Фурье функции

$$r_{\xi\eta\alpha\beta}(x_1, x_2, \rho) = -\alpha n_\rho(x_1, x_2) + \beta n_\rho(x_1 + \xi, x_2 + \eta) +$$
$$+ \beta n_\rho(x_1 - \xi, x_2 - \eta) = n_\rho(x_1, x_2)\left\{2\beta \exp\left[-(2M)^{-1}\left((1-v)\xi^2 +\right.\right.\right.$$
$$\left.\left. + 2w\xi\eta + (1-u)\eta^2\right)\right] \operatorname{ch}\left[M^{-1}\left((1-v)x_1\xi + w x_1\eta + w x_2\xi +\right.\right.$$
$$\left.\left. + (1-u)x_2\eta\right)\right] - \alpha \Big\}.$$

Она неотрицательна при всех $(x_1, x_2) \in R$ тогда и только тогда, когда

$$0 \leq \min_{x_1, x_2} \{\cdots\} = \{\cdots\}\Big|_{x_1 = x_2 = 0} =$$
$$= 2\beta \exp\left[-(2M)^{-1}\left((1-v)\xi^2 + 2w\xi\eta + (1-u)\eta^2\right)\right] - \alpha,$$

что эквивалентно (5).

Следующая лемма 2 является переформулировкой леммы 1 в терминах, удобных для дальнейшего.

Лемма 2. Пусть числа ξ, η, α, β и точка $\rho = (u, v, w)$ такие же, как в лемме 1, причем

$$\xi = \lambda b, \quad \eta = \mu b, \quad 2\beta/\alpha = \exp(b^2/2), \qquad (6)$$

где $b > 0$, $\lambda, \mu \in R$.

Тогда $\psi_\rho \hat{\sigma}_{\xi\eta\alpha\beta}$ – х.ф. в том и только том случае, когда

$$\rho \in B_-(1-\lambda^2, 1-\mu^2, -\lambda\mu) \cap \mathring{B}_-(I). \qquad (7)$$

Доказательство. В силу (6) условие (5) эквивалентно следующему

$$1-\frac{(1-v)\lambda^2+2w\lambda\mu+(1-u)\mu^2}{(1-u)(1-v)-w^2}\geq 0$$

или, поскольку $w^2<(1-u)(1-v)$, –

$$(w+\lambda\mu)^2\leq(1-\lambda^2-u)(1-\mu^2-v),$$

т.е. $P=(u,v,w)\in B(1-\lambda^2,\ 1-\mu^2,\ -\lambda\mu)$. Так как $(1-\lambda^2, 1-\mu^2, -\lambda\mu)\in$ $\in K_-(I)$ и $B(1-\lambda^2,1-\mu^2,-\lambda\mu)\cap\mathring{B}_-(I)=B_-(1-\lambda^2,1-\mu^2,-\lambda\mu)\cap\mathring{B}_-(I)$, то получаем (7).

Лемма 3. Пусть $P=(u,v,w)\in\mathring{B}_-(I)$, $n\in\underline{N}$, $b>0$, $\lambda_i,\mu_i\in R$ $(i=1,\dots,n)$, причем $\lambda_i^2+\mu_i^2\neq 0$ при всех i, числа $\alpha,\beta>0$ таковы, что $2n\beta-\alpha=1$ и $2\beta/\alpha=\exp(b^2/2)$,

$$\sigma_{\vec\lambda\vec\mu b}=\sum_{i=1}^{n}\left(\beta\varepsilon_{(\lambda_i b,\ \mu_i b)}+\beta\varepsilon_{(-\lambda_i b,\ -\mu_i b)}\right)-\alpha\varepsilon_{(0,0)}.$$

Тогда функция $\psi_P\hat\sigma_{\vec\lambda\vec\mu b}$ является х.ф. в том и только том случае, когда

$$\sum_{i=1}^{n}\exp\left\{\frac{b^2}{2}\left[1-\frac{(1-v)\lambda_i^2+2w\lambda_i\mu_i+(1-u)\mu_i^2}{(1-u)(1-v)-w^2}\right]\right\}\geq 1. \qquad (8)$$

Доказательство аналогично доказательствам лемм 1 и 2.

Замечание 2. Обозначим через

$$A(\vec\lambda,\vec\mu,b)=\left\{(u,v,w)\in B_+(0)\cap\mathring{B}_-(I):\quad \text{выполняется (8)}\right\}. \qquad (9)$$

Так как (8) выполняется, если хотя бы одна из квадратных скобок неотрицательна, то (ср. доказательство леммы 2)

$$A(\vec\lambda,\vec\mu,b)\supset\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_-\left(1-\lambda_i^2,\ 1-\mu_i^2,\ -\lambda_i\mu_i\right)\right)\cap B_+(0)\cap\mathring{B}_-(I), \qquad (10)$$

причем $\lim\limits_{b\to\infty}A(\vec\lambda,\vec\mu,b)$ равен правой части (10). Отметим также, что из явного вида обратного преобразования Фурье $r(x_1,x_2;P)$ (r зависит от параметров $\vec\lambda,\vec\mu,b$) функции $\psi_P\hat\sigma_{\vec\lambda\vec\mu b}$ видно (ср. доказательство леммы 1), что для каждого компакта $H\subset\mathring{B}_-(I)$

$$\max\left\{|r(x_1,x_2;P)|:P\in H\right\}\to 0\ \ (x_1^2+x_2^2\to\infty), \qquad (11)$$

и для каждого компакта $G\subset\mathring{B}_-(I)$ такого, что $A(\vec\lambda,\vec\mu,b)\cap$ $\cap\, G=\varnothing$,

$$\min\left\{-r(0,0;P):P\in G\right\}=\varkappa>0. \qquad (12)$$

6. Покажем, что существует счетное множество точек $\{P_l:$ $l=1,2,\dots\}$ такое, что

$$D = B_+(0) \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} \overset{\circ}{B}_+(P_l) \right). \tag{13}$$

Возьмем произвольную точку $P \in (B_+(0) \cap \overset{\circ}{B}_-(I)) \setminus D$. Тогда $B_+(P) \cap D = \emptyset$ в силу условия 4′). Поскольку D компактно, а $B_+(P)$ замкнуто, то $dist(B_+(P), D) > 0$. Поэтому найдется точка P' такая, что $\overset{\circ}{B}_+(P') \supset B_+(P)$ и $\overset{\circ}{B}_+(P') \cap D = \emptyset$. Проведя это построение для каждой точки $P \in (B_+(0) \cap \overset{\circ}{B}_-(I)) \setminus D$, получим

$$D = B_+(0) \setminus \left(\bigcup_{P'} \overset{\circ}{B}_+(P') \right). \tag{14}$$

По теореме Линделефа найдется счетное множество $\{P_l\} \subset \{P'\}$ такое, что $\bigcup_l \overset{\circ}{B}_+(P_l) = \bigcup_{P'} \overset{\circ}{B}_+(P')$; это вместе с (14) дает (13). Имея множество $\{P_l\}$, проведем следующее построение для каждого l. Фиксируем последовательность $\{\varepsilon_n : n = 1, 2, \dots\}$, $\varepsilon_n \downarrow 0$. При каждом n найдем такое конечное число точек $Q_{lnr} \in K_-(I)$ $(r = 1, \dots, R_{ln})$, что

$$D \subset \bigcup_{r=1}^{R_{ln}} B_-(Q_{lnr}), \tag{15}$$

$$K_+(P_l) \cap \overset{\circ}{B}_-(I) \subset \bigcup_{r=1}^{R_{ln}} \overset{\circ}{B}_-(Q_{lnr}), \tag{16}$$

$$\forall T \in \partial \left(\bigcup_{r=1}^{R_{ln}} B_-(Q_{lnr}) \right) \cap B_+(P_l): \tag{17}$$

$$dist(T, K_+(P_l) \cap B_-(I)) \le \varepsilon_n .$$

Для построения множества $\{Q_{lnr} : r = 1, 2, \dots, R_{ln}\}$ надо взять густое конечное множество точек, лежащих на линии $K_+(P_l) \cap K_-(I)$, и немного сдвинуть их по поверхности $K_-(I)$ внутрь $\overset{\circ}{B}_+(P_l)$. Включение (15) будет выполняться в силу 5). Справедливость (16) и (17) вытекает из того, что если $P' \in K_+(P'')$, то конусы $K_+(P'')$ и $K_-(P')$ касаются по отрезку прямой, соединяющему точки P' и P''. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что $P'' \in K_-(P')$ и касательные плоскости к $K_+(P'')$ в точке P' и к $K_-(P')$ в точке P'' совпадают. (Последнее проверяется непосредственными вычислениями.)

Для каждой тройки индексов l, n, r найдем числа λ_{lnr} и μ_{lnr} такие, что $Q_{lnr} = (1 - \lambda_{lnr}^2, 1 - \mu_{lnr}^2, -\lambda_{lnr}\mu_{lnr})$, и положим

$$\sigma_{ln} = \sum_{r=1}^{R_{ln}} \Big(\beta\varepsilon_{(\lambda_{lnr} b_{ln}, \mu_{lnr} b_{ln})} + \beta\varepsilon_{(-\lambda_{lnr} b_{ln}, -\mu_{lnr} b_{ln})} \Big) - \alpha\varepsilon_{(0,0)} ,$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $2R_{ln}\beta - \alpha = 1$, $2\beta/\alpha = \exp(b_{ln}^2/2)$, а b_{ln} – настолько большое положительное число, что часть границы множества $A_{ln} = A(\vec{\lambda}_{ln}, \vec{\mu}_{ln}, b_{ln})$ (множество $A(\vec{\lambda}, \vec{\mu}, b)$ определено в (9)), лежащая в $B_+(P_l) \cap \mathring{B}_-(I)$, не более, чем на $2\varepsilon_n$ отстоит от $K_+(P_l) \cap B_-(I)$:

$$dist\,(\partial A_{ln} \cap B_+(P_l) \cap B_-(I),\ K_+(P_l) \cap B_-(I)) \leq 2\varepsilon_n .$$

Выбрав так число b_{ln}, положим

$$C_{ln} = (R^3 \setminus A_{ln}) \cap B_+(0) \cap B_-(I),$$

$$G_{ln} = \left\{ P \in C_{ln} : dist\,(P, \partial A_{ln}) \geq \varepsilon_n \right\}.$$

Занумеруем множества зарядов $\{\sigma_{ln} : l, n = 1, 2, \dots\}$ и соответствующих им компактных множеств $\{G_{ln}\}$ в последовательности $\{\sigma_m : m = 1, 2, \dots\}$ и $\{G_m : m = 1, 2, \dots\}$. Они являются искомыми (см. п. 4). Теорема доказана.

1. Островский И.В. Об одном вопросе С.Р.Рао // Теория вероятн. и ее примен. – 1969. – 14, № 2. – С. 317-318.
2. Линник Ю.В., Островский И.В. Разложения случайных величин и векторов. – М. : Наука, 1972. – 480 с.
3. Ramachandran B. A miscellany // Sankhyā: The Indian J. of Statistics. Ser.A. – 1976. – 38, N 3. – P. 292-299.

УДК 519.2

Г.М.Фельдман

ОБ АНАЛОГЕ ДЛЯ ГРУПП ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ А.Я.ХИНЧИНА

Пусть X – локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа. К.Р.Партасарати, Р.Ранга Рао и С.Р.С.Варадханом был установлен следующий аналог известной теоремы А.Я.Хинчина: всякое распределение на X, не имеющее ни неразложимых, ни идемпотентных делителей, безгранично делимо. В данной работе получено усиление этого результата: всякое распределение на X, не имеющее неразложимых делителей безгранично делимо.

1. Пусть X локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа, Y – ее группа характеров, (x, y) – значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$. Под мерой на X будем понимать неотрицательную счетно-аддитивную функцию, определенную на σ-алгебре борелевских множеств $\mathcal{B}(X)$. Мера μ называется распределением, если $\mu(X) = 1$. Носитель распределения μ обозначим через $\sigma(\mu)$. Свертка распределений μ и ν и характеристическая функция распределения μ определяются обычным образом

ISBN 5-12-001584-0. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Киев, 1990.

$$(\mu * \nu)(E) = \int_X \mu(E-x)d\nu(x), \quad \hat{\mu}(y) = \int_X (x,y)d\mu(x).$$

Через μ^{*n} обозначим n-кратную свертку распределения μ. Вырожденное распределение, сосредоточенное в точке $x \in X$ обозначим через E_x. Свертка $\mu * E_x$ называется сдвигом распределения μ. Распределение α называется делителем распределения μ, если $\mu = \alpha * \beta$ для некоторого распределения β. Невырожденное распределение μ, у которого нет других делителей, кроме вырожденных распределений и сдвигов μ, называется неразложимым. Распределение μ называется безгранично делимым, если для каждого натурального n существует элемент $x_n \in X$ и распределение μ_n такие, что $\mu = \mu_n^{*n} * E_{x_n}$. Распределение λ называется идемпотентным, если $\lambda^{*2} = \lambda * E_x$ для некоторого $x \in X$. Любое идемпотентное распределение является сдвигом распределения Хаара m_K некоторой компактной подгруппы K группы X [1].

Через $Z(2)$ обозначим группу вычетов по модулю два.

2. Пусть $X \neq Z(2)$. Тогда на группе X существует неразложимое распределение. Действительно, если существует элемент $x \in X$ такой, что $x \neq 0$, $2x \neq 0$, то распределение $\mu = 1/2(E_0 + E_x)$ – неразложимо. Если же все ненулевые элементы группы X имеют порядок 2, то распределение $\mu = 1/3(E_0 + E_{x_1} + E_{x_2})$, где x_1 и x_2 – различные отличные от нуля элементы группы X, как легко видеть, неразложимо.

Если $X \approx Z(2)$, то, как нетрудно проверить, любое распределение на X безгранично делимо.

3. В [1], наряду с другими результатами, установлен групповой аналог известной теоремы А.Я.Хинчина (см. [2, с. 119]).

<u>Теорема A</u>. Всякое распределение на группе X, не имеющее ни неразложимых, ни невырожденных идемпотентных делителей, безгранично делимо.

В настоящей заметке мы докажем такое усиление этого результата.

<u>Теорема 1</u>. Всякое распределение на группе X, не имеющее неразложимых делителей безгранично делимо.

Мы получим теорему 1, как непосредственное следствие теоремы A и следующего результата.

<u>Предложение 1</u>. Пусть μ – распределение на группе X, имеющее невырожденный идемпотентный делитель. Тогда либо $\mu = m_K * E_x$, где $K \subset X$, $K \approx Z(2)$, либо у μ существует неразложимый делитель.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как доказано в [1], любое распределение μ на группе X представим в виде $\mu = m_K * \lambda_0$, где распределение λ_0 уже не имеет невырожденных идемпотентных делителей. Если $K \not\approx Z(2)$, то любое неразложимое распределение на K, существующее, как отмечено в п. 2, является неразложимым делителем μ. Поэтому в доказательстве нуждается лишь случай, когда $K \approx Z(2)$. В предположении, что $\mu \neq m_K * E_x$, мы покажем, что существует разложение

$$\mu = m_K * \lambda , \tag{1}$$

где распределение λ либо само неразложимо, либо имеет неразложимый делитель.

Обозначим через η элемент порядка 2 в K и перепишем (1) в виде

$$\mu(E) = 1/2\left[\lambda(E) + \lambda(E+\eta)\right], \quad E \in \mathcal{B}(X).$$

Очевидно, что

$$\mu(E) = \mu(E+\eta) \tag{2}$$

для любого $E \in \mathcal{B}(X)$. В зависимости от вида носителя $\sigma(\mu)$ могут представиться такие возможности.

1. Носитель $\sigma(\mu)$ состоит из двух точек.

Учитывая (2), легко проверить, что это возможно тогда и только тогда, когда $\mu = m_K * E_x$.

2. Носитель $\sigma(\mu)$ состоит из четырех точек.

Пусть $\sigma(\mu) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Не ограничивая общности можно считать, что $x_1 = 0$ и $x_{j+2} = x_j + \eta$, $\mu(\{x_j\}) = \mu(\{x_{j+2}\})$, $j=1,2$. Если $2x_2 \neq 0$, то распределение λ определим следующим образом:

$$\lambda(\{x_j\}) = \begin{cases} 2\mu(\{x_j\}), & \text{если } j=1,2, \\ 0, & \text{если } j=3,4. \end{cases}$$

Как легко видеть, распределение λ удовлетворяет (1) и неразложимо.

Если же $2x_2 = 0$, то μ – распределение на подгруппе $G \subset X$, $G \approx (Z(2))^2$. Определим тогда распределение λ так:

$$\lambda(\{x_j\}) = \begin{cases} \mu(\{x_1\}), & \text{если } j=1,3, \\ 2\mu(\{x_2\}), & \text{если } j=2, \\ 0, & \text{если } j=4. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что распределение λ удовлетворяет (1) и неразложимо.

3. Носитель $\sigma(\mu)$ состоит не менее чем из шести точек.

Выберем тогда в $\sigma(\mu)$ 6 различных точек $\{x_j\}$, $j=1,2,\ldots,6$, так, чтобы $x_{j+3} = x_j + \eta$, $j = 1, 2, 3$. Пусть V – окрестность нуля в группе X. Положим $V_x = V + x$, $x \in X$. Окрестность V выберем так, чтобы окрестности V_{x_j}, $j = 1, 2, \dots, 6$, попарно не пересекались. Положим $H = A(Y, K) = \{ y \in Y : (x, y) = 1 \ \forall x \in K \}$. Выберем элемент $\zeta \in Y$ так, чтобы $(\eta, \zeta) = -1$. Тогда разложение группы Y по подгруппе H имеет вид: $Y = H \cup (\zeta + H)$. Рассмотрим функцию $f(x)$ на группе X:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } & x \notin \bigcup_{j=1}^{6} V_{x_j}, \\ 1 + \alpha_j, \text{ если } & x \in V_{x_j}, \quad j = 1, 2, 3, \\ 1 - \alpha_j, \text{ если } & x \in V_{x_{j+3}}, \quad j = 1, 2, 3, \end{cases}$$

где $-1 < \alpha_j < 1$. Положим $\lambda = f\mu$ и проверим, что распределение λ удовлетворяет уравнению (1). Для этого заметим, что

$$\hat{m}_K(y) = \begin{cases} 1, \text{ если } & y \in H, \\ 0, \text{ если } & y \notin H, \end{cases}$$

и перейдем в (1) к характеристическим функциям. Ясно, что достаточно проверить совпадение характеристических функций $\hat{\mu}(y)$ и $\hat{\lambda}(y)$ при $y \in H$. Имеем

$$\hat{\lambda}(y) = \int_X (x, y)\, d\lambda(x) = \int_X (x, y) f(x)\, d\mu(x) = \hat{\mu}(y) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \Big[\int_{V_{x_j}} (x, y)\, d\mu(x) - \int_{V_{x_{j+3}}} (x, y)\, d\mu(x) \Big], \quad y \in Y. \tag{3}$$

Учитывая (2) и то, что при $y \in H$ выполнено $(x + \eta, y) = (x, y)$, получаем

$$\int_{V_{x_{j+3}}} (x, y)\, d\mu(x) = \int_{V_{x_j + \eta}} (x, y)\, d\mu(x) = \int_{V_{x_j}} (x, y)\, d\mu(x), \quad y \in H, \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$\hat{\lambda}(y) = \hat{\mu}(y), \quad y \in H. \tag{4}$$

Заметим теперь следующее. Ввиду того что существует распределение λ_0, удовлетворяющее (1), без невырожденных идемпотентных делителей, то любое распределение λ, удовлетворяющее (1), не может иметь невырожденных идемпотентных делителей, отличных от сдвигов m_K. Если же $\lambda \neq \mu$, то и m_K не может быть делителем λ, ибо тогда мы имели бы: $\hat{\mu}(y) = \hat{m}_K(y) = \hat{\lambda}(y) = 0$ при $y \in \zeta + H$, а с учетом (4) $\hat{\mu}(y) = \hat{\lambda}(y)$ при всех $y \in Y$. Значит, $\mu = \lambda$. Поэтому, если хотя бы одно из чисел α_j отлично от нуля, то $\lambda \neq \mu$ и, следовательно, λ не имеет невырожденных идемпотентных делителей. Покажем, что можно выбрать не равные нулю одновременно числа α_j так, чтобы в некоторой точке $y_1 \in \zeta + H$ было выполнено $\hat{\lambda}(y_1) = 0$. Тогда распределение λ обязано иметь неразложимый делитель.

Действительно, по построению λ не имеет невырожденных идемпотентных делителей. Если бы λ не имело и неразложимых делителей, то по теореме 1 λ было бы безгранично делимым распределением. Но, как доказано в [1], если характеристическая функция безгранично делимого распределения λ обращается в нуль хотя бы в одной точке $y \in Y$, то λ имеет невырожденный идемпотентный делитель. Полученное противоречие показывает, что у λ есть неразложимый делитель.

Итак, пусть $y_1 \in \zeta + H$. Тогда, как легко видеть,

$$\int\limits_{V_{x_{j+3}}} (x, y_1)\, d\mu(x) = -\int\limits_{V_{x_j}} (x, y_1)\, d\mu(x) \ . \tag{5}$$

Поэтому, подставляя (5) в (3), получаем

$$\hat{\lambda}(y_1) = \hat{\mu}(y_1) + 2\sum_{j=1}^{3} \alpha_j \int\limits_{V_{x_j}} (x, y_1)\, d\mu(x) = 2\sum_{j=1}^{3} \alpha_j \int\limits_{V_{x_j}} (x, y_1)\, d\mu(x),$$

так как $\hat{\mu}(y_1) = 0$. Ясно, что существуют такие числа α_j, $-1 < \alpha_j < 1$, $j = 1, 2, 3$ не равные нулю одновременно, чтобы $\hat{\lambda}(y_1) = 0$.

Предложение 1 доказано.

1. Партасарати К.Р., Ранга Рао Р., Варадхан С.Р.С. Распределения вероятностей на локально компактных абелевых группах // Математика. - 1965. - 9, № 2. - С. 113-146.
2. Линник Ю.В., Островский И.В. Разложения случайных величин и векторов. - М. : Наука, 1972. - 480 с.

УДК 517.547.2

Л.И.Ронкин, А.М.Руссаковский

НУЛИ ЦЕЛЫХ ЭРМИТОВО-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Находятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы данный дивизор в $\mathbb{C}^n$ был дивизором целой эрмитово-положительной функции.

Целую функцию $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, называют эрмитово-положительной, если $f(0)=1$ и при любых $t^{(1)} \in \mathbb{R}^n, \dots, t^{(n)} \in \mathbb{R}^n$, $\zeta_1 \in \mathbb{C}$,

ISBN 5-12-001584-0. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Киев, 1990.

$\dots, \zeta_n \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k,j=1}^{n} f(t^{(k)}-t^{(j)})\zeta_k \bar{\zeta}_j \geq 0 .$$

В [1] дано полное описание нулевых множеств (дивизоров*) целых эрмитово-положительных функций (ц.э.п.ф.) одной переменной. Соответствующий результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема А [1]. Пусть $\Lambda = \{a_k ; q_k\}$ – дивизор в $\mathbb{C}$. Для того чтобы он был дивизором некоторой ц.э.п.ф., необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $|\Lambda| \cap \{ z \in \mathbb{C} : Re\, z = 0 \} = \emptyset$;

2) $\Lambda = -\bar{\Lambda}$, где $-\bar{\Lambda}$ – дивизор $\{-\bar{a}_k ; q_k\}$;

3) $\lim\limits_{r \to \infty} \frac{1}{r} \ln n_\Lambda(r, H) = 0 \quad \forall H \in (0, \infty)$,

где $n_\Lambda(r, H)$ – число точек дивизора Λ в прямоугольнике $P(r, H) = \{z \in \mathbb{C} : |Re\, z| < r,\ |Im\, z| < H\}$, т.е.

$$n_\Lambda(r, H) = \sum_{k : a_k \in P(r,H)} q_k .$$

Для ц.э.п.ф. многих переменных полное описание их нулевых множеств, а точнее их дивизоров**, получено не было. Однако в [1] было показано, что этот вопрос сводится к описанию дивизоров функций более широкого класса, а именно класса B_0 тех целых функций $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, которые положительны при $Re\, z = (Re\, z_1, \dots, Re\, z_n) = 0$, нормированы условием $f(0) = 1$ и для которых при любом $H \in (0, \infty)$

$$M_f(H) \stackrel{def}{=} \sup_{|Im\, z| < H} \ln |f(z)| < \infty .$$

---

* Дивизором Λ в $\mathbb{C}$ называется совокупность попарно различных точек $a_k \in \mathbb{C}$, $a_k \to \infty$ при $k \to \infty$ и их кратностей $q_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots$. Дискретное множество $|\Lambda|$, образованное точками a_k, называется носителем дивизора Λ. Дивизор $\Lambda = \{a_k ; q_k\}$ называется дивизором целой функции $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, если a_k – различные корни $f(z)$, а q_k – их кратности.

** Дивизором в $\mathbb{C}^n$ называется пара $\{|\Lambda| ; \gamma\} = \Lambda$, где носитель дивизора $|\Lambda|$ есть аналитическое множество в $\mathbb{C}^n$ чистой комплексной размерности $n-1$, а γ – целочисленная положительная функция на множестве $|\Lambda|^*$ регулярных точек множества $|\Lambda|$, постоянная на каждой его связной компоненте. Дивизор Λ называется дивизором целой функции $f(z)$, если $|\Lambda| = \{z \in \mathbb{C}^n : f(z) = 0\}$ и $\gamma(z)$ – кратность корня $f(z)$ в точке $z \in |\Lambda|^*$. Подробнее о дивизорах голоморфных функций см., например, [2].

Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема B [1]. Для любой целой функции $f(z) \in B_0$, $z \in \mathbb{C}^n$, найдется такая не имеющая нулей ц.э.п.ф. $\varphi(z)$, что произведение $f(z)\varphi(z)$ будет ц.э.п.ф.

Кроме того, в [1] получен следующий результат.

Теорема C [1]. Пусть $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, – целая функция, удовлетворяющая условиям

1) $f(0) = 1$;

2) $f(z) > 0$ при $Re\, z = 0$;

3) $\ln^+ \ln^+ |f(z)| = o(|z|)$, $|z| \to \infty$.

Тогда существует ц.э.п.ф. $\varphi(z)$, не имеющая нулей и такая, что $\varphi(z) f(z)$ является ц.э.п.ф.

Цель настоящей работы – дать полное описание* нулей ц.э.п.ф. многих переменных и тем самым полностью ответить на соответствующий вопрос, поставленный в [3]. При этом мы существенно опираемся на указанную выше теорему B.

Нам понадобятся следующие обозначения.

Пусть $\Lambda = \{|\Lambda|; \gamma\}$ – дивизор в $\mathbb{C}^n$. Обозначим через $-\bar{\Lambda}$ дивизор с носителем $\{z : -\bar{z} \in |\Lambda|\}$ и кратностью $\gamma(-\bar{z})$. Через $\sigma_\Lambda(\mathcal{D})$ обозначим объем дивизора Λ в области $\mathcal{D}$, т.е. положим

$$\sigma_\Lambda(\mathcal{D}) = \int\limits_{|\Lambda| \cap \mathcal{D}} \gamma(z)\, \beta_{n-1}(z),$$

где форма

$$\beta_p(z) = \frac{1}{p!} \left(\frac{i}{2} \sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k \right)^p.$$

Обозначим также

$$\sigma_\Lambda(r, H) = \sigma_\Lambda\left(\{ z \in \mathbb{C}^n : |Re\, z| < r,\ |Im\, z| < H \}\right).$$

Следующая теорема является непосредственным обобщением теоремы A на многомерный случай и является основным результатом данной работы.

Теорема 1. Для того чтобы дивизор Λ в $\mathbb{C}^n$ был дивизором некоторой ц.э.п.ф., необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $|\Lambda| \cap \{Re\, z = 0\} = \emptyset$;

2) $\Lambda = -\bar{\Lambda}$;

3) при любом $H \in (0, \infty)$

---

* Случай полиномиального нулевого множества рассмотрен в [4].

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \ln \sigma_\Lambda(r, H) = 0 .$$

Доказательство. Необходимость условий 1) и 2) непосредственно вытекает из условия $f(z) > 0$ при $Re\, z = 0$. Для доказательства необходимости условия 3) мы используем следующую лемму, доказательство которой будет дано в конце этой заметки.

Лемма. Пусть $f(w)$, $w \in \mathbb{C}$,- целая функция, ограниченная в любой горизонтальной полосе.

Тогда имеют место оценки

$$i)\ n_f(r, H) \le Ce^{\frac{\pi r}{4H}}(M_f(2H) - \ln|f(0)|), \quad \forall r,\ H;$$

$$ii)\ \int\limits_{P(r,H)} |\ln|f(w)||\, \beta_1(w) \le CH^2 e^{\frac{\pi r}{H}}\left(2\pi M_f(H) - \ln|f(0)|\right),$$

в которых константа C не зависит от f.

Итак, пусть $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, - ц.э.п.ф. с дивизором Λ. Обозначим $z^{(j)} = (z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n)$, а через $n(r, h;\, z^{(j)})$ обозначим подсчитанное с учетом кратности число корней функции $\tilde{f}(w, z^{(j)}) = f(z_1, \dots, z_{j-1}, w, z_{j+1}, \dots, z_n)$ как функции переменного w в прямоугольнике $P(r, h)$ при фиксированном $z^{(j)}$.

Согласно известным правилам вычисления объемов дивизоров (см., например, [5, с. 363], [6, предложение 2.31])

$$\sigma_\Lambda(r,h) \le \sigma_\Lambda\left(\left\{z \in \mathbb{C}^n : z_1 \in P(r,h), \dots, z_n \in P(r,h)\right\}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\{z : z_j \in P(r,h),\, j=1,\dots,n\}} \Delta \ln|f(z)|\, \beta_n(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\{z^{(j)} : z_k \in P(r,h),\, k\ne j\}} \beta_{n-1}(z^{(j)}) \int\limits_{\{w \in P(r,h)\}} \Delta_w \ln|\tilde{f}(w, z^{(j)})| \times$$

$$\times \beta_1(w) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\{z^{(j)} : z_k \in P(r,h),\, k \ne j\}} n(r, h;\, z^{(j)})\, \beta_{n-1}(z^{(j)}) .$$

Отметим, что фигурирующие здесь лапласианы Δ и Δ_w по переменным z и w соответственно понимаются в смысле обобщенных функций.

По первому утверждению леммы при $H \ge h$ справедлива оценка

$$n(r,h;z^{(j)}) \leq Ce^{\frac{\pi r}{4H}}\left(M_f(2H) - \ln|\tilde{f}(0,z^{(j)})|\right)$$

и значит

$$\sigma_\Lambda(r,h) \leq C_1 e^{\frac{\pi r}{4H}}\Big[(4rh)^{n-1} M_f(2H) \quad +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{z_k \in P(r,h),\, k\neq j} \cdots \int |\ln|f(0;z^{(j)})|| \bigwedge_{k\neq j} \beta_1(z_k)\Big],$$

где $C_1 = nC$. Для оценки слагаемых в последней сумме воспользуемся вторым утверждением леммы. Применяя его последовательно и учитывая в конце, что $f(0)=1$, получаем, например, для $j=1$

$$\int\limits_{\substack{z_j \in P(r,h)\\ j\neq 1}} \cdots \int |\ln|f(0;z^{(1)})|| \bigwedge_{j\neq 1} \beta_1(z_j) \leq$$

$$\leq Ce^{\frac{\pi r}{H}} H^2 \Big(2\pi M_f(H) + \int\limits_{\substack{z_j \in P(r,h)\\ j\neq 1,2}} \cdots \int |\ln|f(0,0,z_3,\dots,z_n)|| \times$$

$$\times \bigwedge_{j\neq 1,2} \beta_1(z_j)\Big) \leq CH^2 e^{\frac{\pi r}{H}}\big((4rh)^{n-2} 2\pi M_f(H) \quad +$$

$$+ CH^2 e^{\frac{\pi r}{H}}\big((4rh)^{n-3} 2\pi M_f(H) + \dots + CH^4 e^{\frac{\pi r}{H}} \times$$

$$\times \left(2\pi M_f(H) - \ln|f(0)|\right)\big)\big) = 2\pi M_f(H) \quad \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n-1} \left(CH^2 e^{\frac{\pi r}{H}}\right)^k (4rh)^{n-1-k} \quad \leq$$

$$\leq n M_f(H) e^{\frac{n\pi r}{H}} (rh)^n H^{2n} \qquad (r>1, \quad h>1).$$

Из полученных оценок вытекает, что при некоторых постоянных C' и C''

$$\sigma_\Lambda(r,h) \leq C'(rH^3)^n e^{\frac{C'' r}{H}} M_f(2H), \quad \forall H \geq h,\ r>1.$$

Отсюда ввиду произвольности H заключаем о выполнении условия 3).

Для доказательства достаточности нам понадобится несколько усиленный вариант теоремы C, а именно теорема 2.

Теорема 2. Пусть $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$,- целая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f(0)=1$;

2) $f(z)>0$ при $\operatorname{Re} z=0$;

3) в любой области $\{z\in\mathbb{C}^n : |\operatorname{Im} z|<H\}$

$$\ln^+\ln^+|f(z)|=o(|\operatorname{Re} z|),\ |z|\to\infty . \tag{1}$$

Тогда существует ц.э.п.ф. $\varphi(z)$ без нулей такая, что $\varphi(z)f(z)$ является ц.э.п.ф.

Доказательство этого утверждения можно извлечь из [1]. Как следует из леммы, содержащейся в этой работе, целую функцию, рост которой удовлетворяет ограничению (1), можно домножить на функцию класса B_0 без нулей так, что произведение будет ограничено в каждой области $|\operatorname{Im} z|<H$. Ввиду первых двух условий тем самым получится функция класса B_0, и нужное утверждение следует тогда из теоремы B.

Таким образом, исходная задача – доказательство достаточности в теореме 1 – свелась к построению целой функции, удовлетворяющей условиям теоремы 2 и имеющей данный дивизор.

Заметим, что если целая функция $g(z)$ удовлетворяет оценке (1) и имеет дивизор Λ, удовлетворяющий условиям 1) и 2) теоремы 1, то, полагая $f(z)=\frac{h(z)}{h(0)}$, где

$$h(z)=[g(z)\overline{g(-\bar z)}]^{1/2}$$

(корень можно извлекать ввиду условия 2), а $h(0)\neq 0$ ввиду условия 1)), мы получаем функцию, удовлетворяющую условиям теоремы 2 и имеющую своим дивизором дивизор Λ (это следует из условия 2)).

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1 осталось по дивизору Λ, удовлетворяющему условию

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\ln\sigma_\Lambda(r,H)=0\qquad \forall H>0,$$

построить целую функцию, рост которой удовлетворяет условию (1). Воспользуемся для этого следующим результатом А.Скода (см., например, [6, теорема 3.49]).

<u>Теорема D</u>. Пусть Λ – дивизор в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющий при некотором $\varepsilon>0$ условию

$$\int\limits_{|\Lambda|\cap\{|z'-z|\le\varepsilon\}}\gamma_\Lambda(z')\,\beta_{n-1}(z')\le Ce^{\Phi(z)},\qquad \forall z\in\mathbb{C}^n .$$

Здесь $\Phi(z)$ – плюрисубгармоническая функция, а C – константа. Тогда для любого $\alpha>0$ существует целая функция $g(z)$, дивизор которой совпадает с Λ и для которой

$$\ln|g(z)| \leq C(\varepsilon,\alpha)(1+|z|)^{n+\varepsilon+\alpha}\left[\int_{|z'-z|\leq\varepsilon}\left(\int_0^1 te^{\varphi(tz')}dt\right)^2\beta_n(z')\right]^{1/2}. \quad (2)$$

Отметим, что из (2) следует оценка

$$\ln^+\ln^+|g(z)| \leq C_1(\varepsilon,\alpha) + (n+\varepsilon+\alpha)\ln(1+|z|) + \sup_{z'\in Q_\varepsilon(z)} \varphi(z'), \quad (3)$$

где $Q_\varepsilon(z) = \{z' : dist(z', [0,z]) \leq \varepsilon\}$ (через $[0,z]$ обозначен отрезок, соединяющий точки 0 и z).

Пусть $\varphi(z)$ – плюрисубгармоническая функция, зависящая только от $\|Re\, z\|$ и $\|Im\, z\|$, где $\|(a_1,\dots,a_n)\| \overset{def}{=} \max_{1\leq j\leq n} |a_j|$, четная и монотонная по $\|Re\, z\|$ и $\|Im\, z\|$ и такая, что

$$\ln \sigma_\Lambda(r+1, H+1) \leq \varphi((r+iH)I), \quad (4)$$

$I = (1,\dots,1)$. Тогда в силу теоремы D существует целая функция $g(z)$ с дивизором, равным Λ, и такая, что

$$\ln^+\ln^+|g(z)| \leq \tilde{C}(1,\alpha) + (n+\alpha+1)\ln(1+|z|) +$$
$$+ \varphi((|Re\, z|+1+i(|Im\, z|+1))I).$$

Требуемый результат получается отсюда с помощью следующего очевидного утверждения: если функция $\sigma_\Lambda(r,H)$ такова, что при любом $H\in(0,\infty)$ выполняется соотношение

$$\ln\sigma_\Lambda(r,H) = o(r), \quad r\to\infty,$$

то существует плюрисубгармоническая функция $\varphi(z) = \varphi_1(\|Re\, z\|, \|Im\, z\|)$, удовлетворяющая условию (4) и такая, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\varphi((r+iH)I)}{r} = 0 \qquad \forall H\in(0,\infty).$$

Приведем доказательство леммы. Для этого воспользуемся представлением Грина для функции $\ln|f(z)|$ в полосе $|y|\leq 2H$. Учитывая, что функция Грина $G(z,\zeta)$ такой полосы в точке $z=0$ имеет вид

$$G(z,0) = -\ln\left|th\frac{\pi z}{8H}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{ch\frac{\pi x}{4H} + \cos\frac{\pi y}{4H}}{ch\frac{\pi x}{4H} - \cos\frac{\pi y}{4H}}\right),$$

получаем

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{8H}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|f(x+2H_i)f(x-2Hi)|}{ch\frac{\pi x}{4H}}dx -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{|y|\le 2H}\ln\left(1+\frac{2\cos\frac{\pi y}{4H}}{ch\frac{\pi x}{4H}-\cos\frac{\pi y}{4H}}\right)\Delta\ln|f(z)|\beta_1(z).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{4\pi}\int_{P(r,H)}\ln\left(1+\frac{2\cos\frac{\pi y}{4H}}{ch\frac{\pi x}{4H}-\cos\frac{\pi y}{4H}}\right)\Delta\ln|f(z)|\beta_1(z) \le$$

$$\le\frac{1}{8H}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|f(x+2Hi)f(x-2H_i)|}{ch\frac{\pi x}{4H}}dx-\ln|f(0)|.$$

Ядро в интеграле слева оценивается снизу величиной $Ce^{-\frac{\pi r}{4H}}$ и, значит, сам интеграл оценивается снизу величиной $n_f(r,H)Ce^{-\frac{\pi r}{4H}}$. Интеграл справа оценивается следующим образом:

$$\frac{1}{8H}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|f(x+i2H)f(x-2Hi)|}{ch\frac{\pi x}{4H}}dx \le$$

$$\le M_f(2H)\frac{1}{4H}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{ch\frac{\pi x}{4H}} = M_f(2H).$$

Из этих оценок непосредственно следует утверждение $i)$ доказываемой леммы.

Далее, отображая полосу $|Im\, z|\le H$ с помощью отображения $\zeta(z)=th\frac{\pi z}{4H}$ на единичный круг, имеем

$$\int_{P(r,h)}|\ln|f(z)||\beta_1(z) =$$

$$=\int_{D(r,h)}|\ln|f(z(\zeta))||\,|z'(\zeta)|^2\beta_1(\zeta) \le \tag{5}$$

$$\le\max_{\zeta\in D(r,h)}|z'(\zeta)|^2\int_{|\zeta|\le 1}|\ln|f(\zeta)||\beta_1(\zeta),$$

где $D(r,h)$ – образ $P(r,h)$ при отображении $\zeta(z)$. Последний интеграл оценивается стандартным способом, а именно:

$$\int\limits_{|\zeta|\le 1} |\ln|f(\zeta)||\beta_1(\zeta) = 2\int\limits_{|\zeta|\le 1} \ln^+|f(\zeta)|\beta_1(\zeta) -$$

$$-\int\limits_{|\zeta|\le 1} \ln|f(\zeta)|\beta_1(\zeta) \le 2\pi M_f(H) - \ln|f(0)|. \tag{6}$$

Осталось оценить $\max|z'(\zeta)|^2$. Имеем

$$|z'(\zeta)|^2 = \frac{1}{|\zeta'(z)|^2} = \left(\frac{4H}{\pi}\right)^2 \left|ch^4 \frac{\pi z}{4H}\right| \le CH^2 e^{\frac{\pi \operatorname{Re} z}{H}}.$$

Отсюда и из (5) и (6) вытекает $ii)$.

Лемма доказана.

1. Камынин И.П., Островский И.В. О нулевых множествах целых эрмитово-положительных функций // Сиб. мат. журн. – 1982. – 23, № 3. – С. 66–82.
2. Ронкин Л.И. Элементы теории аналитических функций многих переменных. – Киев : Наук. думка, 1977. – 168 с.
3. Линник Ю.В., Островский И.В. Разложения случайных величин и векторов. – М. : Наука, 1972. – 380 с.
4. Гинзбург Б.Н., Серых Н.Д. Об алгебраических нулевых поверхностях целых характеристических функций многомерных вероятностных распределений // Теория функц., функц. анализ и их приложения. – 1978. – Вып. 30. – С. 30–36.
5. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных.– М. : Наука, 1971. – 430 с.
6. Lelon P., Gruman L. Entire functions of several complex variables. – Berlin: Springer-Verlag, 1986. – 270 p.

УДК 519.21

А.Е.Фрынтов

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КОНУСА, ПОРОЖДЕННОГО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ СДВИГАМИ СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ ХРЕБТОВОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $u(z)$ – субгармоническая хребтовая функция в области $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, т.е. удовлетворяет там неравенству $u(z) \le u(\operatorname{Re} z)$, а $\Lambda^+(u_t)$ – замкнутый в $L^1(loc)$ конус, порожденный функциями $u_t(z) = u(tz)$, $t > 0$. Доказана.

<u>Теорема</u>. Для любого конечного порядка Пойя μ субгармонической хребтовой функции $u(z)$ в конусе $\Lambda^+(u_t)$ найдется μ-однородная субгармоническая хребтовая функция $v(z)$, $v \ne 0$, т.е. удовлетворяющая при всех z, $\operatorname{Re} z > 0$ и $t > 0$ равенству $v(tz) = t^{\mu} v(z)$.

Дадим нужные определения. Аналитическая в полосе $\{\operatorname{Re} z \in (a,b)\}$ функция (ф.) называется хребтовой (хр.), если там выполнено неравенство

ISBN 5-12-001584-0. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Киев, 1990.

$$|f(z)| \leq f(Re\, z).$$

Класс таких функций введен Ю.В.Линником в связи с изучением свойств аналитических характеристических ф. вероятностных распределений. Как известно [1, с. 38], любая характеристическая ф. $g(\zeta)$ вероятностного распределения μ, т.е. функция вида

$$g(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta t} d\mu(t),$$

аналитическая на интервале (ia, ib), является хр. от $z = i\zeta$ в полосе $\{Re\, z \in (a, b)\}$. Мы несколько расширим понятие хребтовости и продолжим его на субгармонические в полосе функции.

Определение. Субгармоническая (суб.) функция в полосе $\{Re\, z \in (a, b)\}$ называется суб.хр.ф., если там выполнено неравенство

$$u(z) \leq u(Re\, z).$$

Это определение хорошо согласуется с ранее введенным определением, так как $\ln|g(z)|$ любой аналитической хр.ф. $g(z)$ является суб. хр.ф. Нам важно, что суб.хр.ф. образуют замкнутый конус в топологии $L^1(loc)$.

В этой работе мы будем рассматривать только нормированные суб.хр.ф. в полуплоскости $\{Re\, z > 0\}$, т.е. такие, что

$$\lim \sup u(z) = 0.$$

Кроме того, мы будем предполагать, это в нашем случае можно будет сделать без ограничения общности, что $u(r)$ не убывает по r. Если последнее свойство не выполняется, то мы всегда сможем ввести в рассмотрение вместо функции $u(z)$ функцию $u(z + r_0) - u(r_0) + \alpha\, Re\, z$, которая при некоторых $\alpha > 0$ и $r_0 > 0$ будет неубывающей в силу выпуклости функции $u(r)$ по r.

Каждой суб.хр.ф. $u(z)$ и числу $t > 0$ можно поставить в соответствие ее мультипликативный сдвиг

$$u_t(z) = u(tz).$$

Очевидно, что u_t также суб.хр.ф. Через $\Lambda^+(u_t)$ будем обозначать наименьший замкнутый в $L^1(loc)$ конус, содержащий все сдвиги u_t при $t > 0$. Одним из характерных свойств этого конуса является следующее: если функция $u(z)$ гармонична в некотором угле вида $\{arg\, z \in (a, b)\}$, то любая функция $V(z)$ из $\Lambda^+(u_t)$ также гармонична в этом угле.

Напомним некоторые определения и свойства порядков. Порядком ρ и нижним порядком λ суб.хр.ф. называются величины

$$\rho = \lim_{r\to\infty} \sup \ln u(r)/\ln r ,$$

$$\lambda = \lim_{r\to\infty} \inf \ln u(r)/\ln r .$$

Говорят, что неубывающая функция $u(r)$ имеет пики Пойя порядка μ, если существует пара последовательностей $r_k \uparrow +\infty$ и $\delta_k \downarrow 0$, что выполнены неравенства

$$u(rr_k) \le (1+\delta_k)\, r^{\mu} u(r_k), \qquad r \in (\delta_k, \delta_k^{-1}).$$

Те значения μ, для которых существуют пики Пойя, будем называть порядками Пойя. Хорошо известно, что множество порядков Пойя образует интервал $[\lambda^*, \rho^*]$ (возможно и пустой), для которого справедливо включение .

$$[\lambda, \rho] \subset [\lambda^*, \rho^*] .$$

Числа λ^* и ρ^* мы будем называть соответственно нижним и верхним порядками Пойя.

Аналогами теоремы Марцинкевича для целых и аналитических в полуплоскости $\{Re\, z > 0\}$ хр.ф. авторы [2] называют теоремы, дающие ответ на такой вопрос: если $g(z)$ целая (аналитическая в полуплоскости) хр.ф. порядка $\rho < \infty$ не имеет корней в области $\{|\arg z| < \alpha\} \cup \{|\arg z - \pi| < \alpha\}$ (соответственно в области $\{|\arg z| < \alpha\}$), то верно ли, что ее порядок ρ не превосходит некоторой величины $\Delta(\alpha)$? Требуется также получить оценку величины $\Delta(\alpha)$ сверху.

В [2] приведены библиография и обзор по истории этого вопроса, здесь же мы приведем только формулировки основных результатов этой работы.

Теорема А. (Вишнякова А.М., Островский И.В.) Если целая хр.ф. порядка $\rho < \infty$ не имеет корней в области $\{|\arg z| < \alpha\} \cup$ $\cup \{|\arg z - \pi| < \alpha\}$, то справедливо неравенство $\rho \le \Delta(\alpha)$, где $\Delta(\alpha) = 2$ при $\alpha \in [\pi/4, \pi/2]$ и $\Delta(\alpha) = \pi/\alpha$ при $\alpha \in (0, \pi/4)$.

Теорема В. (Вишнякова А.М., Островский И.В.) Существует целая характеристическая функция порядка $\rho = \gamma(\alpha)$, не имеющая корней в области $\{|\arg z| < \alpha\} \cup \{|\arg z - \pi| < \alpha\}$, где $\gamma(\alpha) = 2$ при $\alpha \in [\pi/4, \pi/2]$, $\gamma(\alpha) = \pi/2\alpha$ при $\alpha \in [\pi/6, \pi/4]$ и $\gamma(\alpha)$ – корень уравнения $\cos^{\gamma}(\alpha + \pi/\gamma) = -\cos \alpha\gamma$ в интервале $[\pi/2\alpha, \pi/\alpha]$ при $\alpha \in (0, \pi/6)$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема, уточняющая теорему А.

Теорема 1. Пусть $u(z)$ – субгармоническая хр.ф. во всей комплексной плоскости и конечного нижнего порядка Пойя $\lambda^* < \infty$. Если функция $u(z)$ гармонична в области $\{|\arg z| < \alpha\} \cup \{|\arg z - \pi| < \alpha\}$, то ее порядок конечен и справедлива оценка $\rho \le \gamma(\alpha)$, где $\gamma(\alpha)$ то же, что и в теореме В.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующее утверждение о структуре конуса субгармонический функций, порожденного мультипликативными сдвигами субгармонической хр.ф.

Теорема 2. Пусть $u(z)$ суб.хр.ф. в полуплоскости $\{Re\, z > 0\}$ и $\mu < \infty$ – один из ее порядков Пойя, тогда найдется суб.хр.ф. $v \in \Lambda^+(u_t)$, которая удовлетворяет соотношению

$$v(rz) = r^{\mu} v(z), \quad z \in \{Re\, z > 0\}, \quad r \in \mathbb{R}^+,$$

т.е. является однородной порядка μ.

Доказательство. Сперва покажем, что найдется функция $g(z) = \Lambda^+(u_t)$, $g \neq 0$, для которой справедливо неравенство

$$g(r) \le r^{\mu}, \quad r > 0,$$

и $g(1) = 1$. Для этого выберем последовательность пиков Пойя r_k порядка μ_k для функции $u(z)$. Согласно определению пиков и неравенству хребта имеем

$$u_k(z) = \frac{u(r_k z)}{u(r_k)} \le (1 + \delta_k) x^{\mu}, \quad x = Re\, z \in (\delta_k, \delta_k^{-1})$$

и $u_k(1) = 1$. Воспользуемся теперь критерием нормальности семейства субгармонических функций, согласно которому [3] семейство субгармонических функций в области D, равномерно ограниченное на любом внутреннем компакте сверху и ограниченное снизу хотя бы в одной точке области D, имеет предельную точку в топологии $L^1(loc)$. Обозначив эту точку через $g(z)$, имеем $g(z) \in \Lambda^+(u_t)$ и, кроме того, для этой функции справедливо неравенство $g(r) \le r^{\mu}$, $r > 0$ и $g(1) = 1$.

Рассмотрим теперь такое семейство функций

$$g_r(z) = (\varphi(r))^{-1} \int_{r^{-1}}^{r} \frac{g(zt)}{t^{\mu+1}}\, dt,$$

где $\varphi(r) = \int_{r^{-1}}^{r} g(t)/t^{\mu+1} dt$, и покажем, что семейство имеет предельную точку в топологии $L^1(loc)$ при $r \to +\infty$. Обозначив ее через $v(z)$, докажем, что

$$v(rz) = r^{\mu} v(z).$$

Для доказательства нормальности семейства $\{g_r\}$ отметим, что оно ограничено снизу в точке $z = 1$, так как $g_r(1) = 1$. Заметим также, что функция $\varphi(r)$, определенная выше, является функцией медленного роста, т.е.

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\varphi(r)}{\varphi(rx)} = 1 \qquad \forall x > 0 .$$

Действительно, если $x > 1$, имеем

$$0 \leq \varphi(xr) - \varphi(r) = \left(\int_{(xr)^{-1}}^{r^{-1}} + \int_{r}^{xr} \right) \frac{g(t)}{t^{\rho+1}}\,dt \leq$$

$$\leq \left(\int_{(xr)^{-1}}^{r^{-1}} + \int_{r}^{xr} \right) \frac{dt}{t} = 2\ln x .$$

Поэтому, если $\varphi(r) \to \infty$, то

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\varphi(r)}{\varphi(xr)} = 1. \tag{1}$$

Если же функция $\varphi(r)$ ограничена, то интеграл

$$\int_{R^+} g(t)/t^{\rho+1}\,dt < \infty \quad \text{и} \quad \varphi(xr) - \varphi(r) = O(1), \quad r \to \infty,$$

а значит, (1) также имеет место.

Для доказательства ограниченности семейства $\{g_r(z)\}$ сверху воспользуемся соотношением (1) и неравенством хребта. Имеем $(x = Re\, z)$

$$g_r(z) \leq \frac{1}{\varphi(r)} \int_{r^{-1}}^{r} \frac{g(xt)}{t^{\rho+1}}\,dt = \frac{x^{\rho}}{\varphi(r)} \times$$

$$\times \int_{(xr)^{-1}}^{rx} \frac{g(t)}{t^{\rho+1}}\,dt = \frac{x^{\rho}\varphi(xr)}{\varphi(r)} = O(1), \quad r \to +\infty .$$

Таким образом, нормальность семейства $\{g_r(z)\}$ доказана.

Пусть $\alpha > 1$, тогда

$$g_r(z\alpha) - \alpha^{\rho} g_r(z) = \frac{\alpha^{\rho}}{\varphi(r)} \left(\int_{r}^{\alpha r} + \int_{(\alpha r)^{-1}}^{r^{-1}} \right) \frac{g(zt)}{t^{\rho+1}}\,dt . \tag{2}$$

Нам для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$g_r(z\alpha) - g_r(z)\alpha^{\rho} \to 0, \quad r \to +\infty ,$$

в топологии $L^1(loc)$, а для этого достаточно убедиться, что $(z = z_0 + \rho e^{i\varphi},\ z_0 \in R^+)$

$$\| g_r(z\alpha) - g_r(z)\alpha^{\rho} \| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | g_r(z\alpha) - g_r(z)\alpha^{\rho} |\, d\varphi$$

при всех $z_0 \in \mathbb{R}^+$ и $\rho_0 < z_0$ равномерно по $\rho \in [0, \rho_0]$ стремится к нулю при $r \to +\infty$.

Пусть $f(z)$ – субгармоническая функция, тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\,d\varphi \geq f(z_0), \qquad z = z_0 + \rho e^{i\varphi},$$

поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^-(z)\,d\varphi \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^+(z)\,d\varphi - f(z_0)$$

и значит, если $f(z_0) \geq 0$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|\,d\varphi \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^+(z)\,d\varphi .$$

Учитывая, что $g_r(\alpha z) - \alpha^\mu g_r(z)$ – субгармоническая функция, как следует из представления (2), и тот факт, что она неотрицательна, имеем

$$\| g_r(z\alpha) - g_r(z)\alpha^\mu \| \leq \frac{2\alpha^\mu}{\varphi(r)}\left(\int_r^{\alpha r} + \int_{(\alpha r)^{-1}}^{r^{-1}}\right)\frac{g^+((z_0+\rho_0)t)\,dt}{t^{\mu+1}} =$$

$$= \frac{2\alpha^\mu (z_0+\rho_0)^\mu [\varphi(\alpha(z_0+\rho_0)r) - \varphi((z_0+\rho_0)r)]}{\varphi(r)} .$$

Так как $\varphi(r)$ – медленно растущая функция, то это и есть нужная оценка. Теорема 2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть $u(z)$ функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1. Будем считать $u(z) = u(-z)$ и $u(z) = u(\bar z)$, в противном случае, можно рассматривать функцию $u_1(z) = u(z) + u(-z) + u(\bar z) + u(-\bar z)$. Согласно теореме 2 в конусе $\Lambda^+(u_1)$ есть функция $v(z)$ – субгармоническая и μ – однородная, где μ – произвольное число из интервала $[\lambda^*, \rho^*]$. Функция $h(\theta) = v(e^{i\theta})$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $h(\theta)$ – π-периодическая, четная, μ-тригонометрически выпуклая функция;

в) $h(\theta) = \cos \mu\theta$, $|\theta| \leq \alpha$;

с) $h(\theta) \leq |\cos\theta|^\mu$

(последнее соотношение следует из неравенства хребта и условия μ-однородности). Рассмотрим следующую задачу: для функции $\alpha(\mu)$, $\mu \geq 1$,

$$\alpha(\mu) \overset{def}{=} \sup\left\{\alpha \leq \pi/2 : \exists h(\theta) \text{ со свойствами а)–с)}\right\}$$

дать подходящую оценку сверху.

Пусть $\mu \in [1, 2]$ тогда функция $h(\theta) = \cos \mu\theta$ $|\theta| \leq \pi/2$, π-периодически продолженная на всю вещественную ось, удовлетворяет свойствам а)–с) с $\alpha = \pi/2$, поэтому

$$\alpha(\mu) = \frac{\pi}{2}, \quad \mu \in [1, 2]\ . \tag{3}$$

Если $\mu \in (2, 3]$, то при $\alpha \in \pi/2\mu + \varepsilon$ имеем $h(\alpha) < 0$, $h(\pi/2) \leq 0$, $h(\pi - \alpha) = h(\alpha) < 0$. Так как длины интервалов $[\alpha, \pi/2]$ и $[\pi/2, \pi - \alpha]$ меньше π/μ, то из определения μ-тригонометрически выпуклой функции следует

$$h(\theta) < 0, \quad \theta \in [\alpha, \pi - \alpha] \setminus \{\pi/2\}.$$

Так как длина интервала $[\alpha, \pi - \alpha]$ больше π/μ при подходящем $\varepsilon > 0$, то последнее соотношение противоречит известному свойству μ-тригонометрически выпуклых функций [4, с. 53]

$$h(\theta) + h(\theta + \pi/\mu) \geq 0\ . \tag{4}$$

Таким образом,

$$\alpha(\mu) \leq \pi/2\mu, \quad \mu \in (2, 3]\ . \tag{5}$$

Если $\mu \in (3, \infty)$, то из (4), в) и с) следует, что

$$\cos \mu\alpha \geq - \left|\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{\mu}\right)\right|^{\mu},$$

поэтому $\alpha(\mu) \geq \alpha^*(\mu)$, где $\alpha^*(\mu)$ – наименьший положительный корень уравнения $\cos \mu\alpha = -|\cos(\alpha + \pi/\mu)|^{\mu}$. Следовательно,

$$\alpha(\mu) \leq \alpha^*(\mu), \quad \mu \in (3, \infty)\ . \tag{6}$$

Сравнивая теперь (3), (5) и (6) видим, что при $\mu > \gamma(\alpha)$ функции $h(\theta) = v(re^{i\theta})$ со свойствами а) – с) не существует, а значит, любой порядок Пойя функции $u(z)$ не превосходит $\gamma(\alpha)$, поэтому $\rho \leq \gamma(\alpha)$. Теорема доказана.

1. Линник Ю.В., Островский И.В. Разложения случайных величин и векторов. – М. : Наука, 1972. – 480 с.
2. Вишнякова А.М., Островский И.В. Аналог теоремы Марцинкевича для целых функций, которые не имеют корней в угловой области // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фiз.-мат. та техн. науки. – 1987. – № 9. – С. 8–11.
3. Азарин В.С. Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка // Мат. сб. – 1979. – 108 (150), № 2. – С. 147–167.
4. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М. : Гостехиздат, 1956. – 630 с.

УДК 517.547.22, 519.21.2

А.М.Вишнякова

О РОСТЕ ХРЕБТОВЫХ ФУНКЦИЙ, НЕ ИМЕЮЩИХ НУЛЕЙ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

Для целых (аналитических в верхней полуплоскости) хребтовых функций конечного порядка ρ, не имеющих нулей в угле $\{|\arg z - \pi/2| < \alpha\} \cup \{|\arg z + \pi/2| < \alpha\}$, $0 < \alpha \leq \pi/2$ (соответственно в угле $\{|\arg z - \pi/2| < \alpha\}$, $0 < \alpha < \pi/2$), дается оценка на α через ρ. Показано, что эта оценка не может быть улучшена ни при каком α.

Целая или аналитическая в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функция $f(z)$, $f(0)=1$, называется хребтовой, если она в области определения удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| \leq f(i\,\mathrm{Im}\,z). \qquad (1)$$

В частности, хребтовыми являются все целые или аналитические в $\mathbb{C}_+$ характеристические функции вероятностных распределений.

Известная теорема Марцинкевича [1, с. 59] гласит, что если целая хребтовая функция конечного порядка ρ имеет в некотором смысле мало нулей, то $\rho \leq 2$. Эта теорема усиливалась и обобщалась в различных направлениях (см. библиографию в [2]). В частности, И.П.Камынин доказал, что если аналитическая в $\mathbb{C}_+$ хребтовая функция конечного порядка ρ не имеет нулей, то $\rho \leq 3$ [3]. Обе оценки неулучшаемы, о чем говорят примеры целой характеристической функции Гаусса $f(z) = \exp(-\gamma z^2 + i\beta z)$ $(\gamma > 0,\ \beta \in \mathbb{R})$ и аналитической в $\mathbb{C}_+$ характеристической функции $f(z) = (1-iz)^{-1} \times \exp(iz^3 - 3z^2)$. В [4] рассматривается вопрос об оценке порядка целой или аналитической в $\mathbb{C}_+$ хребтовой функции конечного порядка, не имеющей нулей внутри некоторого угла. Именно в этой работе доказаны следующие теоремы.

Теорема А. ([4, с. 8]) Если аналитическая в $\mathbb{C}_+$ хребтовая функция конечного порядка ρ не имеет нулей внутри угла $\{|\arg z - \pi/2| \alpha\}$, $0 < \alpha < \pi/2$, то $\rho < \max(4, \pi/\alpha)$.

Теорема В. ([4, с. 8]) Если целая хребтовая функция конечного порядка ρ не имеет нулей внутри угла $\{|\arg z - \pi/2| < \alpha\} \cup \{|\arg z + \pi/2| < \alpha\}$, $0 < \alpha \leq \pi/2$, то

$$\rho \begin{cases} \leq 2, & \pi/4 \leq \alpha \leq \pi/2 \\ < \pi/\alpha, & 0 < \alpha < \pi/4 \end{cases}.$$

Целью настоящей статьи является уточнение оценок для ρ в теоремах А и В.

ISBN 5-12-001584-0. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Киев, 1990.

Обозначим через $\gamma(\alpha)$, $0<\alpha\le\pi/6$, лежащий в интервале $(\pi/(2\alpha);\pi/\alpha)$ корень уравнения

$$\cos^{\gamma}(\alpha+\pi/\gamma) = -\cos\gamma\alpha\ .$$

Легко видеть, что функция $\gamma(\alpha)$ убывает и $\gamma(\alpha)=\pi/\alpha-2\sqrt{\pi/\alpha}\,(1+o(1))$, $\alpha\to 0$.

Теорема 1. Пусть $f(z)$ – аналитическая в $\mathbb{C}_+$ хребтовая функция конечного порядка ρ, не имеющая нулей внутри угла $\{|\arg z-\pi/2|<\alpha\}$, $0<\alpha\le\pi/2$. Тогда

$$\rho\le\begin{cases}\gamma(\alpha), & 0<\alpha\le\pi/6\\ 3=\gamma(\pi/6), & \pi/6<\alpha\le\pi/2\end{cases}$$

Теорема 2. Пусть $f(z)$ – целая хребтовая функция конечного порядка ρ, не имеющая нулей внутри угла $\{|\arg z-\pi/2|<\alpha\}\cup\{|\arg z+\pi/2|<\alpha\}$, $0<\alpha\le\pi/2$. Тогда

$$\rho\le\begin{cases}\gamma(\alpha), & 0<\alpha\le\pi/6,\\ \pi/(2\alpha), & \pi/6<\alpha\le\pi/4,\\ 2, & \pi/4<\alpha\le\pi/2.\end{cases}$$

Замечание. В [5] доказана, в частности, следующая теорема.

Теорема. Если аналитическая в $\mathbb{C}_+$ хребтовая функция $f(z)$ не имеет нулей внутри угла $\{|\arg z-\pi/2|<\beta\}$ при некотором $\beta\in(0;\pi/2]$ и $\lim\limits_{y\to+\infty} y^{-1}\ln\ln f(iy)=0$, то функция $f(z)$ имеет конечный порядок.

Используя эту теорему, можно ослабить требование конечности порядка в формулировках теорем 1 и 2, заменив его требованием $\lim\limits_{y\to+\infty} y^{-1}\ln\ln f(iy)=0$.

Доказательство теоремы 1. Достаточно доказывать теорему при $\alpha\in(0;\pi/6)$. Будем доказывать от противного; пусть аналитическая в $\mathbb{C}_+$ хребтовая функция $f(z)$, не имеющая нулей внутри угла $\{|\arg z-\pi/2|<\alpha\}$, $0<\alpha<\pi/6$, имеет конечный порядок $\rho>\gamma(\alpha)\ge\gamma(\pi/6)=3$. Пусть $a_k=r_k e^{i\varphi_k}$ – нули функции $f(iz)$. Введем следующие обозначения: $u(z)=\ln|f(iz)|$, $v_R(z)=\operatorname{Im}(e^{i\rho\alpha}z^{-\rho}+z^{\rho}e^{-i\rho\alpha}R^{-2\rho})=(|z|^{-\rho}-|z|^{\rho}R^{-2\rho})\sin\rho(\alpha-\arg z)$; $\Pi_R=\{z:1<|z|<R,\ 0<\arg z<\beta\}$ $(R>1)$, $\beta=\alpha+\pi/\rho$ $(0<\beta<\pi/2)$. Применим формулу Грина в области Π_R к функциям $u(x)$ и $v_R(x)$. Учитывая гармоничность функции $v_R(z)$ в Π_R при любом $R>1$ и равенство $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_x=0$, $1\le x\le R$, вытекающее из (1), получаем

$$\int_1^R\left[(-\cos\rho\alpha)u(x)-u(xe^{i\beta})\right](x^{-\rho-1}-x^{\rho-1}R^{-2\rho})\,dx =$$

$$= 2R^{-\rho}\int_0^{\beta} u\left(Re^{i\rho}\right)\sin\rho(\alpha-\theta)\,d\theta \; +$$

$$+ 2\pi\rho^{-1}\sum_{a_k\in\Pi_R}\left(r_k^{-\rho}-r_k^{\rho}R^{-2\rho}\right)\sin\rho(\alpha-\varphi_k)+c_1+c_2R^{-2\rho}\,, \qquad (3)$$

где c_1, c_2 – константы, не зависящие от R.

Не уменьшая общности, можно считать, что $u(x)>0$ и монотонно возрастает при $x>0$. Введем следующие обозначения для слагаемых формулы (3):

$$A(R)=\int_1^R\left[(-\cos\rho\alpha)u(x)-u(xe^{i\beta})\right]\left(x^{-\rho-1}-x^{\rho-1}R^{-2\rho}\right)dx\,; \qquad (3а)$$

$$B(R)=2R^{-\rho}\int_0^{\beta}u(Re^{i\theta})\sin\rho(\alpha-\theta)\,d\theta\,; \qquad (3б)$$

$$S(R)=2\pi\rho^{-1}\sum_{a_k\in\Pi_R}\left(r_k^{-\rho}-r_k^{\rho}R^{-2\rho}\right)\sin\rho(\alpha-\varphi_k)\,. \qquad (3в)$$

Во введенных обозначениях формула (3) запишется в виде

$$A(R)=B(R)+S(R)+c_1+c_2R^{-2\rho}. \qquad (4)$$

Вычтем из (4) формулу, получаемую заменой в (4) R на r $(1<r<R)$. Имеем

$$A(R)-A(r)=B(R)-B(r)+S(R)-S(r)+c_2\left(R^{-2\rho}-r^{-2\rho}\right). \qquad (5)$$

Левую часть равенства (5) оценим снизу, учитывая условие хребта (1) и монотонность функции $u(x)$. Здесь и далее через K будем обозначать не обязательно одинаковые положительные постоянные, не зависящие от R.

$$A(R)-A(r)=\int_1^R\left(u(x)-u(xe^{i\beta})\right)\left(x^{-\rho-1}-x^{\rho-1}R^{-2\rho}\right)dx\;-$$

$$-\int_1^r\left(u(x)-u(xe^{i\beta})\right)\left(x^{-\rho-1}-x^{\rho-1}R^{-2\rho}\right)dx\;-$$

$$-(1+\cos\rho\alpha)\int_1^R u(x)\left(x^{-\rho-1}-x^{\rho-1}R^{-2\rho}\right)dx\;+$$

$$+(1+\cos\rho\alpha)\int_1^r u(x)\left(x^{-\rho-1}-x^{\rho-1}R^{-2\rho}\right)dx\geqslant$$

$$\geqslant\int_r^R\left(u(x)-u(xe^{i\beta})\right)\left(x^{-\rho-1}-x^{\rho-1}R^{-2\rho}\right)dx\;-$$

$$-(1+\cos\rho\alpha)\int_r^R u(x)x^{-\rho-1}dx-(1+\cos\rho\alpha)\int_1^r u(x)x^{\rho-1}r^{-2\rho}dx\geqslant$$

$$\geqslant\int_r^R\left(u(x)-u(x\cos\beta)\right)\left(x^{-\rho-1}-x^{\rho-1}R^{-2\rho}\right)dx\;-$$

$$-(1+\cos\rho\alpha)\int_r^R u(x)x^{-\rho-1}dx-(1+\cos\rho\alpha)\int_1^r u(x)x^{\rho-1}r^{-2\rho}dx\geqslant$$

$$\geqslant\int_r^R\left[(-\cos\rho\alpha)u(x)-u(x\cos\beta)\right]x^{-\rho-1}dx\;-$$

$$-\int_r^R u(x)x^{\rho-1}R^{-2\rho}dx-(1+\cos\rho\alpha)\int_1^r u(x)x^{\rho-1}r^{-2\rho}dx\geqslant$$

$$\geqslant(-\cos\rho\alpha)\int_r^R u(x)x^{-\rho-1}dx-\cos^{\rho}\beta\int_{r\cos\beta}^{R\cos\beta}u(x)x^{-\rho-1}dx\;-$$

$$-Ku(R)R^{-\rho}-Ku(r)r^{-\rho}\geqslant(-\cos\rho\alpha-\cos^{\rho}\beta)\int_r^R u(x)x^{-\rho-1}dx\;-$$

$$-\cos^{\rho}\beta\int_{r\cos\beta}^{r}u(x)x^{-\rho-1}dx-Ku(R)R^{-\rho}-Ku(r)r^{-\rho}\geqslant$$

$$\geqslant(-\cos\rho\alpha-\cos^{\rho}\beta)\int_r^R u(x)x^{-\rho-1}dx-Ku(R)R^{-\rho}-Ku(r)r^{-\rho}\quad. \tag{6}$$

Функция $h_\alpha(\rho)=-\cos\rho\alpha-\cos^{\rho}\beta=-\cos\rho\alpha-\cos^{\rho}(\alpha+\pi/\rho)$ имеет на отрезке $\rho\in[\pi/(2\alpha);\ \pi/\alpha]$ единственный корень $\gamma(\alpha)$, кроме того, $h_\alpha(\pi/\alpha)>0$. Поэтому в нашем предположении $\rho>\gamma(\alpha)$ имеем $e=h_\alpha(\rho)>0$. Подставляя оценку (6) в равенство (5) и деля на $\varepsilon>0$, получаем

$$\int_r^R u(x)x^{-\rho-1}dx\leqslant K[(B(R)-B(r))+(S(R)-$$

$$-S(r))+u(R)R^{-\rho}+u(r)r^{-\rho}] \tag{7}$$

(мы учли положительность и монотонное возрастание $u(x)$).

Правую часть неравенства (7) оценим сверху.

1. Для оценки $B(R)$ используем следующую лемму из [4]:

Лемма 1. ([4, с. 9])

$$|B(R)|\leqslant Ku(R)R^{-\rho}.$$

Используя утверждение леммы, получаем

$$B(R)-B(r)\le Ku(R)R^{-\rho}+Ku(r)r^{-\rho}. \tag{8}$$

2. При оценке сверху разности $S(R)-S(r)$ будем использовать то, что $f(iz)$ не имеет нулей внутри угла $\{0<\arg z<\alpha\}$. Имеем

$$S(R)-S(r)=2\pi\rho^{-1}\Bigg(\sum_{\substack{1<r_k<R\\ \alpha<\varphi_k<\beta}}(r_k^{-\rho}-r_k^{\rho}R^{-2\rho})\sin\rho(\alpha-\varphi_k)-$$

$$-\sum_{\substack{1<r_k<r\\ \alpha<\varphi_k<\beta}}(r_k^{-\rho}-r_k^{\rho}r^{-2\rho})\sin\rho(\alpha-\varphi_k)\Bigg)=$$

$$=2\pi\rho^{-1}\Bigg(\sum_{\substack{1<r_k<r\\ \alpha<\varphi_k<\beta}}r_k^{\rho}(r^{-2\rho}-R^{-2\rho})\sin\rho(\alpha-\varphi_k)+$$

$$+\sum_{\substack{r<r_k<R\\ \alpha<\varphi_k<\beta}}(r_k^{-\rho}-r_k^{\rho}R^{-2\rho})\sin\rho(\alpha-\varphi_k)\Bigg)\le 0. \tag{9}$$

Подставляя (8) и (9) в (7), получаем

$$\int_r^R u(x)\,x^{-\rho-1}dx\le K(u(R)R^{-\rho}+u(r)r^{-\rho}). \tag{10}$$

Для завершения доказательства воспользуемся элементарной леммой из [4].

Лемма 2. ([4, с. 9]). Пусть $w(x)>0$ – непрерывно дифференцируемая неубывающая функция на $[1;\infty)$ такая, что для всех достаточно больших r и R, $r<R$ выполняется

$$w(R)-w(r)\le K(Rw'(R)+rw'(r)).$$

Тогда для всех достаточно больших x имеем: 1) если $w(\infty)=\infty$, то $w(x)>Kx^{\delta}$, 2) если $w(\infty)<\infty$, то $w(\infty)-w(x)\le Kx^{\delta}$, где δ – некоторое положительное число.

Применяя лемму 2 к функции $w(x)=\int_1^x u(t)t^{-\rho-1}dt$, получаем противоречие с тем, что ρ является порядком функции $f(z)$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Поскольку $f(z)$ является аналитической в $\mathbb{C}_+$ хребтовой функцией, то при $0<\alpha\le\pi/6$ выполняется $\rho\le\gamma(\alpha)$. Достаточно поэтому доказывать теорему при $\pi/6<\alpha<\pi/4$, $2<\rho<3$. Можно считать, что $f(z)$ – четная функция, иначе вместо $f(z)$ рассмотрим четную функцию $f(z)f(-z)$.

удовлетворяющую условиям теоремы. Будем проводить доказательство от противного: пусть четная целая хребтовая функция $f(z)$, не имеющая нулей внутри углов $\{|\arg z-\pi/2|<\alpha\}\cup\{|\arg z+\pi/2|<\alpha\}$, имеет конечный порядок $\rho>\pi/(2\alpha)$. Обозначим через $a_k=r_k e^{i\varphi_k}$ нули функции $f(iz)$ в полуплоскости $\{\operatorname{Re} z>0\}$. Будем употреблять обозначения $u(z)$ и $V_R(z)$, введенные при доказательстве теоремы 1. Обозначим $C_R=\{z: 1<|z|<R,\quad 0<\arg z<\pi/2\}$, $R>1$. Применим формулу Грина в области C_R к функциям $u(z)$ и $V_R(z)$. Учитывая гармоничность $V_R(z)$ в области C_R, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_x=0$, вытекающее из условия хребта (1), и $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y=0$, вытекающее из четности функции $f(z)$, получаем

$$\int_1^R\left[(-\cos\rho\alpha)\,u(x)-(-\cos\rho(\alpha-\pi/2))\,u(ix)\right](x^{-\rho-1}-x^{\rho-1}R^{-2\rho})\,dx=$$

$$=2R^{-\rho}\int_0^{\pi/2}u(Re^{i\theta})\sin\rho(\alpha-\theta)\,d\theta+$$

$$+2\pi\rho^{-1}\sum_{a_k\in C_R}(r_k^{-\rho}-r_k^{\rho}R^{-2\rho})\sin\rho(\alpha-\varphi_k)+c_1+c_2R^{-2\rho},\tag{11}$$

где c_1, c_2 – положительные постоянные. Заметим, что при наших предположениях $(-\cos\rho(\alpha-\pi/2))>0$. Поскольку $f(z)$ – целая четная хребтовая функция, то $u(x)>0$ и монотонно возрастает при $x>0$. Аналогично доказательству теоремы 1 введем обозначения:

$$A(R)=\int_1^R\left[(-\cos\rho\alpha)\,u(x)-(\cos\rho(\alpha-\pi/2))\,u(ix)\right](x^{-\rho-1}-x^{\rho-1}R^{-2\rho})\,dx;$$

$$B(R)=2R^{-\rho}\int_0^{\pi/2}u(Re^{i\theta})\sin\rho(\alpha-\theta)\,d\theta;$$

$$S(R)=2\pi\rho^{-1}\sum_{a_k\in C_R}(r_k^{-\rho}-r_k^{\rho}R^{-2\rho})\sin\rho(\alpha-\varphi_k).$$

Вычитая из (11) формулу, получающуюся из нее заменой R на r, $1<r<R$, имеем

$$A(R)-A(r)=B(R)-B(r)+S(R)-S(r)+c_2(R^{-2\rho}-r^{-2\rho}).\tag{12}$$

Оценим левую часть (12) снизу:

$$A(R)-A(r)=\int_1^R(-\cos\rho\alpha)\,u(x)(x^{-\rho-1}-x^{\rho-1}R^{-2\rho})\,dx-$$
$$-\int_1^r(-\cos\rho\alpha)\,u(x)(x^{-\rho-1}-x^{\rho-1}r^{-2\rho})\,dx-$$

$$-(-\cos\rho(\alpha-\pi/2))\int_1^R u(ix)\,(x^{-\rho-1}-x^{\rho-1}R^{-2\rho})\,dx+$$

$$+(-\cos\rho(\alpha-\pi/2))\int_1^r u(ix)\,(x^{-\rho-1}-x^{\rho-1}r^{-2\rho})\,dx\geqslant$$

$$\geqslant(-\cos\rho\alpha)\int_1^R u(x)\,(x^{-\rho-1}-x^{\rho-1}R^{-2\rho})\,dx-$$

$$-(-\cos\rho\alpha)\int_1^r u(x)\,(x^{-\rho-1}-x^{\rho-1}r^{-2\rho})\,dx\geqslant$$

$$\geqslant(-\cos\rho\alpha)\int_r^R u(x)\,(x^{-\rho-1}-x^{\rho-1}R^{-2\rho})\,dx\geqslant$$

$$\geqslant(-\cos\rho\alpha)\int_r^R u(x)\,x^{-\rho-1}\,dx-Ku(R)R^{-\rho} \qquad (13)$$

Оценка сверху разности $B(R)-B(r)$ получается так же, как в доказательстве теоремы 1. Имеем

$$B(R)-B(r)\leqslant K\,(u(R)R^{-\rho}+u(r)\,r^{-\rho}). \qquad (14)$$

Кроме того, поскольку $f(z)$ не имеет нулей в углу $\{|\arg z-\pi/2|<\alpha\}$, то

$$S(R)-S(r)\leqslant 0. \qquad (15)$$

Подставляя оценки (13), (14), (15) в равенство (12), получаем

$$\int_r^R u(x)\,x^{-\rho-1}dx\leqslant K[u(R)R^{-\rho}+u(r)r^{-\rho}]. \qquad (16)$$

Как и в доказательстве теоремы 1, замечаем, что неравенство (16) противоречит тому, что ρ есть порядок функции $f(z)$.

Теорема 2 доказана.

Следующее утверждение показывает точность оценки на ρ в теоремах 1 и 2.

Теорема 3.

1. Для любого α, $0<\alpha\leqslant\pi/2$, существует целая характеристическая функция $f(z)$ конечного порядка ρ, не имеющая нулей внутри угла $\{|\arg z-\pi/2|<\alpha\}\cup\{|\arg z+\pi/2|<\alpha\}$, причем

$$\rho=\begin{cases}\gamma(\alpha), & 0<\alpha\leqslant\pi/6,\\ \pi/(2\alpha), & \pi/6<\alpha\leqslant\pi/4,\\ 2, & \pi/4<\alpha\leqslant\pi/2.\end{cases}$$

2. Для любого α, $0<\alpha\le\pi/2$, существует аналитическая в $\mathbb{C}_+$ характеристическая функция $f(z)$ конечного порядка ρ, не имеющая нулей внутри угла $\{|\arg z-\pi/2|<\alpha\}$, причем

$$\rho=\begin{cases}\gamma(\alpha), & 0<\alpha\le\pi/6,\\ 3, & \pi/6<\alpha\le\pi/2.\end{cases}$$

Доказательство теоремы 3.

1. Для $\alpha\in[\pi/4;\ \pi/2]$ примером служит характеристическая функция Гаусса $f(z)=\exp(-\gamma z^2+i\beta z)$ $(\gamma>0,\ \beta\in\mathbb{R})$. Рассмотрим $0<\alpha<\pi/4$. Для построения примера воспользуемся результатом работы [6]. Именно в [6] доказано, что если четная ρ-тригонометрически выпуклая функция $h(\theta)$, $\theta\in[-\pi;\ \pi]$, удовлетворяет условиям $(\rho>2)$:

1) $\exists\ \delta>0,\ A>0:\ h(\theta)=A\cos\rho(\pi/2-\theta),\ \ |\pi/2-\theta|<\delta$;

2) $h(\pi/2+\theta)=h(\pi/2-\theta),\quad \theta\in[0;\ \pi/2]$;

3) $h(\pi/2+\theta)\le h(\pi/2)\cos^{\rho}(\pi/2-\theta),\quad \theta\in[0;\ \pi/2]$,

то найдется целая характеристическая функция $f(z)$ порядка ρ и вполне регулярного роста, имеющая индикатор $h(\theta)$.

Мы построим функцию $h(\theta)$, обладающую указанными свойствами и являющуюся ρ-тригонометрической при $\theta\in[\pi/2-\alpha;\ \pi/2+\alpha]$. В силу четности $h(\theta)$ и условия 2), достаточно построить функцию $h(\theta)$ при $\theta\in[\pi/2;\pi]$.

а) Рассмотрим $\alpha\in(0;\pi/6]$, $\rho=\gamma(\alpha)\ge 3$. Положим

$$h(\theta)=\begin{cases}\cos\rho(\pi/2-\theta); & \theta\in[\pi/2;\ \pi/2+\alpha],\\ -\cos^{\rho-1}(\alpha+\pi/\rho)\cos\rho(\theta+\alpha/\rho+\pi/\rho^2-\alpha-\pi/2); & \\ & \theta\in[\pi/2+\alpha;\ \pi/2+\alpha+\pi/\rho]\\ \cos^{\rho}(\pi/2-\theta); & \theta\in[\pi/2+\alpha+\pi/\rho;\ \pi].\end{cases}$$

Непосредственная проверка показывает, что построенная функция является ρ-тригонометрически выпуклой (при этом используется тот факт, что $\rho=\gamma(\alpha)$ удовлетворяет уравнению $\cos^{\rho}(\alpha+\pi/\rho)=-\cos\rho\alpha$, кроме того, функция $h(\theta)$ удовлетворяет условиям 1)–3). Поэтому найдется целая характеристическая функция $f(z)$ вполне регулярного роста при порядке ρ, имеющая индикатор $h(\theta)$. В силу ρ-тригонометричности функции $h(\theta)$ при $\theta\in[-\pi/2-\alpha;\ -\pi/2+\alpha]\cup[\pi/2-\alpha;\ \pi/2+\alpha]$ функцию $f(z)$ можно считать не имеющей нулей при $\{|\arg z-\pi/2|<\alpha\}\cup\{|\arg z+\pi/2|<\alpha\}$.

б) Рассмотрим $\alpha\in[\pi/6;\ \pi/4]$, $\rho=\pi/(2\alpha)$. Положим

$$h(\theta)=\begin{cases}\cos\rho(\pi/2-\theta); & \theta\in[\pi/2;\ \pi/2+\alpha];\\ 0; & \theta\in[\pi/2+\alpha;\ \pi].\end{cases}$$

Функция $h(\theta)$ является ρ-тригонометрически выпуклой и удовлетворяет условиям 1)–3). Поэтому найдется целая характеристическая функция $f(z)$ вполне регулярного роста при порядке ρ, имеющая индикатор $h(\theta)$. В силу ρ-тригонометричности $h(\theta)$ при $\theta \in [-\pi/2-\alpha; -\pi/2+\alpha] \cup [\pi/2-\alpha; \pi/2+\alpha]$ функция $f(z)$ не будет иметь нулей при $\{|\arg z-\pi/2|<\alpha\} \cup \{|\arg z+\pi/2|<\alpha\}$.

2. При $0<\alpha<\pi/6$ примером аналитической в $\mathbb{C}_+$ характеристической функции порядка $\rho=\gamma(\alpha)$ является построенная в пункте 1,а) целая функция. При $\pi/6 \leq \alpha < \pi/2$ примером аналитической в $\mathbb{C}_+$ характеристической функции порядка $\rho = 3$ является функция $f(z)=(1-iz)^{-1}\exp(iz^3-3z^2)$.

Теорема 3 доказана.

Замечание. Используя методы теории предельных множеств субгармонических функций, А.Е.Фрынтов [7] независимо доказал более сильный факт, чем теорема 2.

1. Линник Ю.В., Островский И.В. Разложения случайных величин и векторов. – М. : Наука, 1972. – 480 с.
2. Островский И.В. Арифметика вероятностных распределений // Теория вероятностей и ее применение. – 1986. – 31, вып. 1. – С. 3–30.
3. Камынин И.П. Обобщение теоремы Марцинкевича о целых характеристических функциях вероятностных распределений // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1979. – 85. – С. 94–103.
4. Вишнякова А.М., Островский И.В. Аналог теоремы Марцинкевича для целых хребтовых функций, не имеющих нулей в угловой области // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1987. – № 9. – С. 8–11.
5. Вишнякова А.М., Островский И.В., Улановский А.М. Об одной гипотезе Ю.В.Линника // Теория вероятностей и ее применение. – 1988. – Вып. 4. – С. 180–183.
6. Гольдберг А.А., Островский И.В. Индикаторы целых эрмитово позитивных функций конечного порядка // Сиб. мат. журн. – 1982. – 23, № 6. – С. 55–73.
7. Фрынтов А.Е. Об одном свойстве конуса, порожденного мультипликативными сдвигами субгармонической хребтовой функции // Наст. сб., с. 33–39.

УДК 519.21.2

А.М.Улановский

СВЕРТКИ И СМЕСИ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ОДНОЗНАЧНО ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СВОИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ НА ПОЛУОСИ

Рассматривается вопрос о возможности представления на полуоси $x \in (-\infty, 0]$ n-кратной свертки функции распределения в виде смеси

ISBN 5-12-001584-0. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Киев, 1990.

$$F_1^{n*}(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k F_2^{k*}(x),$$

где $a_m \neq 0$, F_2 – функция распределения. Указаны случаи, когда из такого представления вытекает тождество $F_1^{n*} \equiv F_2^{m*}$.

1. Постановка задачи и формулировки результатов. Настоящая статья относится к направлению, изучающему условия однозначной определенности функций распределения (ф.р.) и функций ограниченной вариации (ф.о.в.) значениями на достаточно обильных множествах. Это направление возникло в конце 70-х годов [1-4] и к настоящему времени ему посвящены многие работы (библиографию и обзор результатов см. в [5, 6]).

Постановка рассматриваемой здесь задачи приведена в [7-9]. В [7]* доказан такой результат. Пусть F_1, F_2 – ф.р., удовлетворяющие условиям

$$F_j(x)\neq 0; \quad F_j(x)=O(e^{cx}), \quad x\to-\infty, \quad \forall c>0; \quad j=1,2. \tag{1}$$

Если найдется натуральное $n\geqslant 3$ такое, что на полуоси** $(-\infty, 0)$ совпадают свертки $F_1^{n*}(x)=F_2^{n*}(x)$, $x\in(-\infty,0)$, то это равенство выполняется на всей оси и, более того, $F_1\equiv F_2$. Аналогичное утверждение будет верным и для двукратных сверток ($n=2$), если ограничение (1) заменить некоторым более жестким. В связи с этим возникает такой вопрос. Пусть ф.р. F_1; F_2 удовлетворяют (1), $2\leqslant n < m$ – натуральные числа. Верна ли импликация

$$(F_1^{n*}(x))=F_2^{m*}(x), \quad x\in(-\infty,0)\rightarrow(F_1^{n*}\equiv F_2^{m*})? \tag{2}$$

Из некоторых промежуточных результатов работы [8] вытекает, что (2) верно при дополнительном ограничении на характеристические функции f_j ф.р. F_j:

$$\lim_{y\to\infty}(y\ln y)^{-1}\ln f_j(iy)=\infty, \quad j=1,2. \tag{3}$$

Заметим, что условие $F_1^{n*}(x)=F_2^{m*}(x)$, $x\in(-\infty,0)$, можно записать в виде $A_0+F_1^{n*}\equiv F_2^{m*}$, где $A_0=F_2^{m*}-F_1^{n*}$ – ф.о.в., $A_0(x)=0$, $x\in(-\infty,0)$. Поэтому более общим, чем сформулированный ранее, является вопрос: что можно сказать о ф.р. F_1, F_2, если они удовлетворяют (1) и тождеству вида

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k * F_1^{k*}+a_n F_1^{n*}\equiv F_2^{m*}, \quad 2\leqslant n\leqslant m, \tag{4}$$

---

* В [8] доказан более общий результат, относящийся к комплекснозначным ф.о.в.

** Все приводимые результаты останутся верными, если в их условии полуось $(-\infty, 0)$ заменить на $(-\infty, x_0)$, где x_0 – произвольное фиксированное число.

где F^{0*} – ф.р., сосредоточенная в точке 0, $a_n > 0$ – постоянная, A_k – ф.о.в.,

$$A_k(x) = 0, \quad x \in (-\infty, 0), \quad k = 0, 1, \dots, n-1? \tag{5}$$

Частичный ответ дает следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть F_1, F_2 – ф.р. и пусть выполняются условия (1), (4), (5). Тогда верны тождества

$$A_k \equiv C_n^k \, n^{k-n} a_n^{k+1-n} A_{n-1}^{(n-k)*}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \tag{6}$$

и, следовательно,

$$a_n^{1-n} (a_n F_1 + A_{n-1}/n)^{n*} \equiv F_2^{m*}. \tag{7}$$

Теорема 1.1 позволяет получить некоторые утверждения об однозначной определенности сверток и смесей сверток ф.р. Так, если в (4) имеем $A_k \equiv 0$ хотя бы для одного значения k, то из (6) следует, что $A_k \equiv 0$ для всех k, и из (7) получаем $a_n = 1$, $F_1^{n*} \equiv F_2^{m*}$. В частности, справедливо

Следствие 1.2. Пусть ф.р. F_1, F_2 удовлетворяют условию (1). Тогда верна импликация (2).

В работах [10, 11] рассматривались условия однозначной определенности значениями на полуоси сверток n ф.р., совпадающих между собой при $x \in (-\infty, 0)$. В связи с этим приведем результат, усиливающий следствие 1.2.

Теорема 1.3. Пусть ф.р. F_1, F_2 удовлетворяют условию (1); $G_1, \dots, G_{n-1}$ – ф.р., и пусть на полуоси $(-\infty, 0)$ выполняются равенства

$$F_1(x) = G_1(x) = \dots = G_{n-1}(x); \quad (F_1 * G_1 * \dots * G_{n-1})(x) = F_2^{m*}(x), \; x \in (-\infty, 0), \tag{8}$$

где $2 \le n < m$. Тогда а) если $n = 2$, то $(F_1 + G_1)^{2*} \equiv 4F_2^{m*}$; б) если $n \geqslant 3$, то $F_1 \equiv G_1 \equiv \dots G_{n-1}$, $F_1^{n*} \equiv F_2^{m*}$.

В случае, когда F_2 – нормальная ф.р., это утверждение доказано в [10].

В [9, 12] рассмотрен вопрос о возможности представления на полуоси $(-\infty, 0)$ нормальной ф.р. в виде смеси сверток ф.р. Имеет место такой результат о совпадении на полуоси смеси ф.р. с m-кратной сверткой.

Теорема 1.4. Пусть ф.р. F_1, F_2 удовлетворяют условию (1) и пусть на полуоси $(-\infty, 0)$ выполняются равенства

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_1^{k*}(x) = F_2^{m*}(x), \quad x \in (-\infty, 0),$$

где $2 \le n < m$, $a_n > 0$. Тогда $a_k = C_n^k \, n^{k-n} a_n^{k+1-n} a_{n-1}^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots,$

$n-1$; $a_n^{1-n}(a_nF_1+a_{n-1}F_1^{0*}/n)^{n*}\equiv F_2^{m*}$. Если дополнительно предположить, что ф.р. F_2^{m*} непрерывна в точке 0 и верно одно из условий: $a_n\le 1$; $a_{n-1}\geqslant 0$, то $a_k=0$, $k=0,1,\ldots,n-1$; $a_n=1$; $F_1^{n*}\equiv F_2^{m*}$.

В случае, когда F_2 – нормальная ф.р., это утверждение было доказано в [9] (другое обобщение результата из [9] получено в [10]).

2. Доказательство теоремы 1.1.

Обозначим f_j – характеристические функции (х.ф.) ф.р. F_j, $j=1,2$; a_k – преобразования Фурье – Стильтьеса ф.о.в. A_k, $k=0,1,\ldots,n-1$. Поскольку ф.р. F_j удовлетворяют (1), то [13, с. 36, 53] их х.ф. f_j аналитически продолжаются в полуплоскость $C_+=\{t\in C: Im\ t>0\}$ и удовлетворяют там условию

$$\lim_{y\to\infty} y^{-1}\ln f_j(iy)=\infty,\quad j=1,2. \tag{9}$$

Что касается функций a_k, то из (5) видно, что они также аналитически продолжаются в C_+ и

$$a_k(t)=O(1),\quad t\in C_+,\quad k=0,1,\ldots,n-1;\quad a_n(t)\equiv a_n. \tag{10}$$

Таким образом, в силу (4) верно равенство

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)f_1^k(t)=f_2^m(t),\qquad t\in C_+. \tag{11}$$

Для доказательства теоремы 1.1 достаточно получить тождества

$$a_k\equiv C_n^k\, n^{k-n} a_n^{k-n+1} a_{n-1}^{n-k},\qquad k=0,1,\ldots,n-1. \tag{12}$$

Справедливость этих тождеств вытекает из следующих лемм.

Лемма 2.1. Если выполнены условия (3), (10), (11), то верны тождества (12).

Лемма 2.2. Утверждение леммы 2.1 сохранит силу, если условие (3) заменить условием (9).

Доказательство леммы 2.1. Доказательство является обобщением доказательства леммы 1 из [8].

"Пересадим" равенство (11) в единичный круг $D=\{z\in C: |z|<1\}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(z)\varphi_1^k(z)+a_n\varphi_1^n(z)=\varphi_2^m(z),\qquad z\in D,$$

где $\varphi_j(z)=f_j(t(z))$, $\alpha_k(z)=a_k(t(z))$, $t(z)=i(1+z)(1-z)^{-1}$.
Полагая

$$\varphi=\varphi_1+\alpha_{n-1}/na_n, \tag{13}$$

приходим к равенству

$$\sum_{k=0}^{n-2} \beta_k(z)\varphi^k(z) + a_n\varphi^n(z) = \varphi_2^m(z), \quad z\in D, \tag{14}$$

где

$$\beta_k = (-1)^{n-k} C_n^k a_n \left(\frac{\alpha_{n-1}}{n a_n}\right)^{n-k} + \sum_{s=k}^{n-1} (-1)^{s-k} C_s^k \left(\frac{\alpha_{n-1}}{n a_n}\right)^{s-k} \alpha_s . \tag{15}$$

Ясно, что

$$\beta_k(z) = O(1), \quad |z|\to 1, \quad k=0,1,\dots,n-2.$$

Будем использовать стандартные обозначения характеристик роста и распределения значений мероморфных функций и их элементарные свойства [14, § 1.2, 2.4; 15, гл. 1, §§ 4, 6]. Для доказательства лемм 2.1, 2.2 понадобятся три утверждения.

Утверждение 2.3. Пусть $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_s$, $\gamma_s \neq 0$, – аналитические и ограниченные в D функции; φ – аналитическая в D функция. Тогда

$$T(r, \sum_{k=0}^{s}\gamma_k\varphi^k) = sT(r,\varphi) + O(1), \qquad r\to 1.$$

Действительно,

$$T\left(r, \sum_{k=0}^{s}\gamma_k\varphi^k\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\{\theta:|\varphi(re^{i\theta})|>1\}} \ln^+\left|\left(\sum_{k=0}^{s}\gamma_k\varphi^k\right)(re^{i\theta})\right| d\theta + O(1) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\{\theta:|\varphi(re^{i\theta})|>1\}} \ln^+|\varphi^s(re^{i\theta})|\,d\theta + O(1) = sT(r,\varphi) + O(1), \quad r\to 1.$$

Утверждение 2.4. Пусть $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_s$ – аналитические и ограниченные в D функции; φ – аналитическая в D функция, причем $T(r,\varphi)\to\infty$, $r\to 1$. Если верно тождество $\sum_{k=0}^{s}\gamma_k\varphi^k \equiv 0$, то $\gamma_k \equiv 0$, $k=0,1,\dots,s$.

Доказательство. Если утверждение 2.4 неверно, то $l = \max\{k: \gamma_k \not\equiv 0\} \geq 1$. Применяя утверждение 2.3, получаем

$$lT(r,\varphi) + O(1) = T(r,\gamma_l\varphi^l) = T\left(r, -\sum_{k=0}^{l-1}\gamma_k\varphi^k\right) \leq (l-1)\,T(r,\varphi) + O(1),$$

что противоречит условию $T(r,\varphi)\to\infty$, $r\to 1$.

Утверждение 2.5. Пусть $h_0, h_1, \dots, h_s$ – аналитические и ограниченные в C_+ функции; g – аналитическая в C_+ функция, причем $\overline{\lim\limits_{y\to\infty}}\, y^{-1} \ln |g(iy)| = \infty$. Если верно тождество $\sum\limits_{k=0}^{s} h_k g^k \equiv 0$, то $h_k \equiv 0,\ k = 0, \ldots, s$.

Доказательство. Положим $\gamma_k(z) = h_k(i(1+z)(1-z)^{-1})$, $\varphi(z) = g(i(1+z)(1-z)^{-1})$. Эти функции аналитичны в D, причем γ_k ограничены и $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\,(1-r)\ln|\varphi(r)| = \infty$. Используя неравенство [15, гл. 1, (7.1)]

$$\ln \max_{0\le\theta<2\pi} |\varphi(re^{i\theta})| \le \frac{5}{1-r} T\left(\frac{1+r}{2}, \varphi\right), \quad 0<r<1, \tag{16}$$

получим, что $T(r,\varphi) \to \infty,\ r\to 1$. Справедливость утверждения 2.5 теперь вытекает из утверждения 2.4.

Продолжим доказательство леммы 2.1. Докажем три соотношения:

$$T(r,\varphi) = \frac{m}{n} T(r,\varphi_2) + O(1), \quad r\to 1; \tag{17}$$

$$m\Big(r,\infty, a_n\varphi^n \Big(\sum_{k=0}^{n-2} \beta_k\varphi^k\Big)^{-1}\Big) \ge 2T(r,\varphi) + O(1), \quad r\to 1; \tag{18}$$

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\ T(r,\varphi)\left(\ln\frac{1}{1-r}\right)^{-1} = \infty. \tag{19}$$

Равенство (17) вытекает из (14) и утверждения 2.3. Для доказательства (18) заметим, что в силу утверждения 2.3

$$m\Big(r,\infty,\sum_{k=0}^{n-2}\beta_k\varphi^k\Big) \le (n-2)\,T(r,\varphi) + O(1),$$

поэтому

$$m\left(r,\infty,\frac{a_n\varphi^n}{\sum\limits_{k=0}^{n-2}\beta_k\varphi^k}\right) \ge m(r,\infty,\varphi^n) + O(1) - m\Big(r,\infty,\sum_{k=0}^{n-2}\beta_k\varphi^k\Big) \ge 2T(r,\varphi) + O(1).$$

Допустим, что (19) неверно. Поскольку из (13) следует, что $T(r,\varphi) = T(r,\varphi_1) + O(1)$, то имеем $T(r,\varphi_1) = O\left(\ln\frac{1}{1-r}\right),\ r\to 1$. Применяя к φ_1 неравенство (16), получаем оценку $\ln|\varphi_1(r)| = O\left((1-r)^{-1}\ln\frac{1}{1-r}\right),\ r\to 1$. Это эквивалентно оценке $\ln f_1(iy) = O(y\ln y),\ y\to\infty$, которая противоречит условию (3). Значит, (19) верно.

Теперь докажем, что выполняется тождество

$$\sum_{k=0}^{n-2} \beta_k \varphi^k \equiv 0. \tag{20}$$

Предположим противное и перепишем (14) в виде

$$u - v \equiv 1; \quad u = a_n \varphi^n \Big/ \sum_{k=0}^{n-2} \beta_k \varphi^k, \quad v = \varphi_2^m \Big/ \sum_{k=0}^{n-2} \beta_k \varphi^k. \tag{21}$$

Из (18) и (19) следует, что $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\ T(r,u)\ (\ln 1/(1-r))^{-1} = \infty$, поэтому [14, § 2.4, (2.9)] найдется последовательность $r = r_s \uparrow 1$ такая, что

$$(1+o(1))\,T(r,u) \le \bar N(r,0,u) + \bar N(r,1,u) + \bar N(r,\infty,u), \quad r = r_s \uparrow 1. \tag{22}$$

В силу (21) имеют место оценки: $\bar N(r,0,u) \le T(r,\varphi) + O(1)$, $\bar N(r,1,u) = \bar N(r,0,v) \le T(r,\varphi_2)$, а из (18) вытекает, что $T(r,u) = m(r,\infty,u) + N(r,\infty,u) \ge 2T(r,\varphi) + N(r,\infty,u)$. Подставляя эти оценки в (22), учитывая, что $N(r,\infty,u) \ge \bar N(r,\infty,u)$, получаем

$$(1+o(1))\,T(r,\varphi) \le T(r,\varphi_2) + O(1), \qquad r = r_s \uparrow 1,$$

что противоречит (17) и (19). Следовательно, (20) верно.

Из (20) и утверждения 2.4 вытекают тождества: $\beta_k \equiv 0$, $k = 0,1,\dots,n-2$. Это, в силу определения функций β_k (15), влечет

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varphi_1^k + a_n \varphi_1^n \equiv a_n \left(\varphi_1 + \frac{\alpha_{n-1}}{n a_n}\right)^n,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_k - C_n^k a_n \left(\frac{\alpha_{n-1}}{n a_n}\right)^{n-k}\right)\varphi_1^k \equiv 0.$$

Применяя утверждение 2.4, получаем тождества $\alpha_k = C_n^k\, n^{k-n} a_n^{k+1-n} \times \alpha_{n-1}^{n-k}$, $k = 0,1,\dots,n-1$, которые доказывают (12). Лемма 2.1 доказана.

Доказательство леммы 2.2. В силу леммы 2.1 достаточно рассмотреть случай, когда не имеет места условие (3), т.е. для одной из х.ф. f_j выполняется

$$\overline{\lim_{y\to\infty}}\ (y \ln y)^{-1} \ln f_j(iy) < \infty \tag{23}$$

Тогда из условий (10), (11) легко увидеть, что (23) выполняется для обеих х.ф. f_1, f_2.

Нам понадобится

Утверждение 2.6. Пусть функция g аналитична в C_+ и удовлетворяет условиям

$$|g(t)| \le e^{c_1 \operatorname{Im} t \ln \operatorname{Im} t}, \quad \operatorname{Im} t \ge 2; \tag{24}$$

$$\lim_{y \to \infty} y^{-1} \ln |g(iy)| = -\infty, \tag{25}$$

где $c_1 > 0$ – постоянная. Тогда $g \equiv 0$.

Доказательство утверждения 2.6 опустим, так как оно вытекает из известных фактов (см., например [16, теоремы 3.4.2, 3.5.1]).

Положим

$$f = f_1 + a_{n-1} / n a_n . \tag{26}$$

Тогда равенство (11) примет вид

$$\sum_{k=0}^{n-2} b_k f^k + a_n f^n = f_2^m, \tag{27}$$

где функции b_k связаны с функциями a_k по формулам, аналогичным (15), и, значит, b_k ограничены в $\mathbb{C}_+$.

Докажем, что для некоторой постоянной $c_2 > 0$ верно неравенство

$$|f(iy)| + |f'(iy)| + |f_2'(iy)| \le c_2\, y f_2^{m/n}(iy), \quad y \to \infty. \tag{28}$$

Сначала оценим $f_1'(iy)$. Для этого используем равенство [13, (2.4.3)]: $\lim\limits_{x \to -\infty} (\ln|x|)^{-1} \ln\ln 1/f_1(x) = [1 - (\overline{\lim\limits_{y \to \infty}} (\ln y)^{-1} \ln\ln f_1(iy))^{-1}]^{-1}$, что в силу (23) равно ∞. Значит, найдется $x_0 < 0$ такое, что $f_1(x) < \exp\{-|x|^3\}$ при $x \in (-\infty, x_0)$. Поэтому при $y > y_0$ выполняется

$$|f_1'(iy)| = \int_{-\infty}^{0} (-x) e^{-yx} d f_1(x) + O(1) = \int_{-\infty}^{0} e^{-xy} (1 - xy) f_1(x)\, dx + O(1) \le$$

$$\le 2y \int_{-\infty}^{-y} e^{-yx - |x|^3} (-x)\, dx + 2y^2 \int_{-y}^{0} e^{-xy} f_1(x)\, dx + O(1) \le 3y f_1(iy), \quad y > y_0.$$

Аналогично, $|f_2'(iy)| \le 3y f_2(iy)$, $y > y_0$. Поскольку в силу (10) и (26) разности $f - f_1$, $f' - f_1'$ ограничены в $\mathbb{C}_+$, то имеем $|f'(iy)| \le 4y |f(iy)|$, $y \to \infty$. Из (27) и ограниченности функций b_k следует, что $|f(iy)|^n (1 + o(1)) = f_2^m(iy)$, $y \to \infty$. Полученные оценки вместе приводят к оценке (28).

Возьмем логарифмическую производную от обеих частей равенства (27):

$$\Big(a_n f^n + \sum_{k=0}^{n-2} b_k f^k\Big)^{-1} \Big(n a_n f' f^{n-1} + \Big(\sum_{k=0}^{n-2} b_k f^k\Big)' \Big) = m f_2' f_2^{-1} .$$

Умножив это равенство на ff_2 , получим

$$nf'f_2-mf_2'f=\left(a_nf^n+\sum_{k=0}^{n-2}b_kf^k\right)^{-1}\left(nf'f_2\sum_{k=0}^{n-2}b_kf^k-\right.$$

$$\left.-ff_2\left(\left(\sum_{k=0}^{n-2}b_kf^k\right)'\right)\right)=f_2^{1-m}\left(nf'\sum_{k=0}^{n-2}b_kf^k-f\left(\sum_{k=0}^{n-2}b_kf^k\right)'\right). \tag{29}$$

Заметим, что

$$|f_2'(t)|\le\int_{-\infty}^{0}e^{-Imtx}(-x)\,dF_2(x)+O(1)=|f_2'(iImt)|+O(1),$$

$$Im\,t>1.$$

Аналогично, в силу (26), $|f'(t)|\le|f'(iImt)|+O(1)$, $Im\,t>1$.
Применяя неравенства (23) и (28), получаем, что функция $nf'f_2-$ $-mf_2'f$ удовлетворяет неравенству (24). Далее, из (28) и (29) следует, что для некоторой постоянной $c_2>0$ выполняется $|nf'(iy)\times$ $\times f_2(iy)-mf_2'(iy)f(iy)|\le c_2\,y f_2^{1-m/n}(iy)$, $y\to\infty$. В силу условий (9), $m/n>1$, отсюда вытекает, что функция $nf'f_2-mf_2'f$ удовлетворяет (25). Привлекая утверждение 2.6, получаем $0\equiv nf'f_2-$ $-mf_2'f=f_2f\left(\ln f_2^{-m}f^n\right)'$, $f^nf_2^{-m}\equiv const$. Из (27) видно, что $a_nf^n\equiv f_2^m$ и, значит, $\sum_{k=0}^{n-2}b_kf^k\equiv 0$. Применяя утверждение 2.5, получаем, что $b_k\equiv 0$, $k=0,1,\dots,n-2$. Отсюда, рассуждая как в заключительной части доказательства леммы 2.1, с помощью утверждения 2.5 приходим к тождествам (12). Лемма 2.2, а вместе с ней и теорема 1.1 доказаны.

3. Д о к а з а т е л ь с т в а теорем 1.3 и 1.4.

Сначала докажем теорему 1.3. Отметим, что оно аналогично доказательству теоремы 2 из [11].

Положим $F=(F_1+G_1+\dots+G_{n-1})/n$, $D_1=F-F_1,\dots,D_n=F-G_{n-1}$, $D_0=F_2^{m*}-F_1*G_1*\dots*G_{n-1}$. Отсюда

$$F_1*G_1*\dots*G_{n-1}=(F-D_1)*\dots*(F-D_n)=F_2^{m*}-D_0, \tag{30}$$

причем в силу (8), $D_k(x)=0$, $x\in(-\infty,0)$, $k=0,1,\dots,n$.
Из (30) следует, что

$$F^{n*}+\sum_{k=0}^{n-1}A_k*F^{k*}\equiv F_2^{m*},$$

где A_k – соответствующие симметрические полиномы от D_k , причем $A_{n-1}=-\sum_{k=1}^{n}D_k=-(nF-F_1-G_1-\dots-G_{n-1})\equiv 0$. Ясно, что $A_k(x)=0$,

$x \in (-\infty, 0)$, $k=0,1,\dots,n-2$. Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 1.1, в силу которой и из условия $A_{n-1} \equiv 0$ следует, что $A_k \equiv 0$, $k=0,1,\dots,n-2$. Значит, $F^{n*} \equiv F_2^{m*}$, что доказывает пункт а) теоремы 1.3.

Обозначим f, g_k и d_k – преобразования Фурье – Стильтьеса F, G_k и D_k. Докажем, что при всех $w \in \mathbf{C}$, $t \in \mathbf{C}_+$ верно тождество

$$\prod_{k=1}^{n} (w - d_k(t)) \equiv w^n - d_0(t). \tag{31}$$

Действительно, $\prod_{k=1}^{n} (w - d_k(t)) + d_0(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) w^k + w^n$, где a_k есть преобразования Фурье – Стильтьеса A_k. Поскольку $A_k \equiv 0$, то имеем $a_0 \equiv d_0$, $a_k \equiv 0$, $k=1,\dots,n-1$. Значит, (31) верно.

Предположим, что $d_0 \not\equiv 0$. Тогда найдется круг $K \subset \mathbf{C}_+$, в котором $d_0(t) \neq 0$, $t \in K$. Обозначим $d_0^{1/n}(t)$ – какую-нибудь ветвь корня в круге K. Поскольку $w^n - d_0(t) = \prod_{k=0}^{n} (w - \varepsilon_k d_0^{1/n}(t))$, где $\{\varepsilon_k\}_1^n$ – все корни n-й степени из 1, то из (31) видно, что в каждой точке $t \in K$ выполняется $d_k(t) = \varepsilon_k d_0^{1/n}(t)$ (номер k зависит от t), $k=1,\dots,n$. Очевидно, что отсюда вытекает, что можно так перенумеровать ε_k, чтобы было $d_k(t) = \varepsilon_k d_0^{1/n}(t)$, $t \in K$, $k=1,\dots,n$. Это означает, что $d_0^{1/n}$ допускает аналитическое продолжение в $\mathbf{C}_+$ и равенства выполняются при $t \in \mathbf{C}_+$.

Заметим, что все функции d_k вещественны на мнимом луче. Поэтому ясно, что при $n \geq 3$ все функции $f(iy) - d_k(iy) = f(iy) - \varepsilon_k d_0^{1/n}(iy)$ не могут быть вещественными одновременно. Это противоречит тому, что они являются характеристическими функциями. Значит, $d_0 \equiv 0$, что в силу (31) влечет $d_k \equiv 0$; $D_k \equiv 0$, $k=1,\dots,n$; $F_1 \equiv G_1 \equiv \dots \equiv G_{n-1}$. Теорема 1.3 доказана.

Доказательство теоремы 1.4. Нуждается в доказательстве только заключительная часть теоремы.

Пусть ф.р. F_2^{m*} непрерывна в нуле. Тогда функция $(a_n F + a_{n-1} F^{0*}/n)^{n*} \equiv F_2^{m*}$ непрерывна в нуле. Отсюда, в силу $a_n > 0$ видно, что $a_{n-1} \leq 0$. Если $a_{n-1} = 0$, то все $a_k = 0$, $k < n$, и теорема доказана. Пусть $a_{n-1} < 0$. Тогда из равенства $1 = \lim_{x \to \infty} (a_n F + a_{n-1} F^{0*}/n)^{n*} = \left(a_n - \frac{|a_{n-1}|}{n}\right)^n$ получаем $a_n > 1$, что противоречит условию. Теорема 1.4 доказана.

Таким образом, если F_1, F_2 – ф.р., одна из которых удовлетворяет условию (1), и выполняются условия (4), (5), то можно показать, что обе ф.р. F_1, F_2 удовлетворяют (1). Это означает, что утверждения теорем 1.1, 1.3 и 1.4 останутся верными, если в их условии считать, что только одна из ф.р. F_1, F_2 удовлетворяет условию (1).

1. Rossberg H.-J. On a problem of Kolmogorov concerning the normal distribution // Теория вероятн. и ее примен. – 1974. – 19, № 4. – С. 795–798.
2. Золотарев В.М. Несколько замечаний к статье "О единственности устойчивых функций распределения" // Math. Nachr. – 1978. – 82. – S. 301–304.
3. Ибрагимов И.А. Об определении безгранично делимой функции распределения по ее значениям на полупрямой // Теория вероятн. и ее примен. – 1977. – 22, № 2. – С. 393–399.
4. Островский И.В. Об одном классе функций ограниченной вариации на прямой, определяемых своими значениями на полупрямой // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1979. – 92. – С. 220–229.
5. Rossberg H.-J., Jesiak B., Siegel G. Analytic methods of probability theory. – Berlin: Akademie-Verglad, 1985. – 310 p.
6. Островский И.В., Улановский А.М. Классы комплекснозначных борелевских мер, в которых имеет место однозначная определенность сужениями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1988. – 170. – С. 31–44.
7. Бланк Н.М. О распределениях, свертки которых совпадают на полуоси // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1981. – 36. – С. 17–25.
8. Ostrovskii I.V. Generalisation of the Titchmarsh convolution theorem and the complex-valued measures uniquely determined by their restrictions to a half-line // Lect. Notes in Math. – 1985. – 1155. – P. 256–282.
9. Kruglov V.M., Totov A.N. Mixtures of probability distributions // Ibid. – 1987. – 1233. – P. 41–56.
10. Ронкин А.Л., Улановский А.М. Распределения, свертки которых совпадают с нормальным распределением на полуоси // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 4. – С. 106–110.
11. Ронкин А.Л., Улановский А.М. Об определении суммы функций распределения по значениям их свертки на полуоси // Теория вероятн. и ее примен. – 1987. – 32, № 4. – С. 800–804.
12. Круглов В.М., Улановский А.М. Смеси вероятностных распределений, однозначно определяемые поведением на полуоси // Там же. – 1987. – 32, № 4. – С. 670–678.
13. Линник Ю.В., Островский И.В. Разложения случайных величин и векторов. – М. : Наука, 1972. – 490 с.
14. Хейман У. Мероморфные функции. – М. : Мир, 1966. – 287 с.
15. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М. : Наука, 1970. – 590 с.
16. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. – М. : Наука, 1979. – 320 с.

УДК 517.535.4

Б.Г.Фрейдин

УБЫВАНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ БОРЕЛЕВСКИХ МЕР И ИХ СВЕРТОК

Дан отрицательный ответ на вопрос о том, можно ли оценить скорости убывания величин $|\mu_j|((-\infty, x))$, $x\to-\infty$, где μ_j, $j=1,2$ – вещественные меры на $\mathbb{R}$, зная скорость убывания $|\mu_1*\mu_2|((-\infty,x))$.

Пусть M – совокупность всех комплекснозначных мер μ на $\mathbb{R}$ таких, что $\mu\neq 0, |\mu|(\mathbb{R})<\infty$. В работе Домара [1], в частности, доказано, что если $\mu_j\in M\ (j=1,2)$ и $|\mu_j|((-\infty,x)) = O(\exp\times$ $\times(-|x|^a))$, $x\to-\infty$, $\exists a>2, j=1,2$, то

$$(\mu_1*\mu_2)((-\infty,x))=0,\quad x<x_0 \Rightarrow \mu_j((-\infty,x))=0,\ \ x<x_1,\ \ j=1,2. \qquad (A)$$

В [2] показано, что импликация (A) сохраняет силу при более слабом ограничении

$$|\mu_j|((-\infty,x))=O(\exp(-C|x|\ln|x|)),\ \ x\to-\infty,\ \ \forall C>0,\ \ j=1,2, \qquad (B)$$

дальнейшее ослабление которого невозможно. Нас будет интересовать следующий вопрос. Считая меры μ_j удовлетворяющими условию (B), смягчим условие в левой стороне (A), потребовав лишь, чтобы величина $|\mu_1*\mu_2|((-\infty,x))$ имела заданную оценку скорости убывания при $x\to-\infty$. Можно ли тогда оценить скорости убывания величин $|\mu_j|((-\infty,x))$, $x\to-\infty$? Хорошо известно ([3, гл. 3]), что для неотрицательных мер μ_j ответ утвердителен. Мы покажем, что уже для вещественных (тем более для комплекснозначных) мер ответ отрицателен.

<u>Теорема 1</u>. Для любой неубывающей (сколь угодно быстро стремящейся к бесконечности) функции q и любого $\varepsilon>0$ найдутся вещественные меры $\mu_1,\mu_2\in M$, удовлетворяющие при некотором $C>0$ условиям

$$|\mu_j|((-\infty,-r))\neq O(\exp(-Cr^{1+\varepsilon}))\quad (j=1,2),\ \ r\to\infty, \qquad (1)$$

$$|\mu_1*\mu_2|((-\infty,-r))=O(\exp(-Cq(r))),\ \ r\to\infty. \qquad (2)$$

Таким образом, скорость убывания вариации свертки вещественных мер – при фиксированной оценке снизу убывания вариации самих мер – может быть сколь угодно быстрой.

Покажем, что теорема 1 вытекает из следующего результата о возможном поведении L-норм целых функций по прямым, параллельным действительной оси.

ISBN 5-12-001584-0. Аналитические методы
в теории вероятностей и теории операторов. Киев, 1990.

Теорема 2. Для любой функции $\Psi(r)\uparrow\infty$ и любого $\varepsilon>0$ найдутся целые функции f_j, $f_j(i\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$ $(j=1,2)$, удовлетворяющие при некотором $C>0$ условиям

$$\|f_j(x+iy)\|_{L^1}\le \exp\left(C|y|^{1+1/\varepsilon}\right), \quad (j=1,2); \tag{3}$$

$$\|f_j(x+iy)\|_{L^\infty}\ne O(\exp(C|y|^{1+1/\varepsilon})) \quad (j=1,2); \tag{4}$$

$$\|(f_1 f_2)(x+iy)\|_{L^1}=O(\exp(C|y|\Psi(|y|))). \tag{5}$$

Эта теорема показывает, что L^1-норма произведения $f_1\cdot f_2$ может расти (как функция от y) значительно медленнее, чем L^∞-норма функций f_1 и f_2.

Ниже через C обозначаются положительные, не обязательно одинаковые, постоянные.

Для того чтобы вывести из теоремы 2 теорему 1, понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Пусть f – целая функция, удовлетворяющая условию

$$|f(x+iy)|\le \ell(x,y)\exp(\Psi(|y|)), \tag{6}$$

где функция $\ell:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ такова, что $\sup_{y\in\mathbb{R}}\|\ell(x,y)\|_{L^1}<\infty$. Тогда обратное преобразование Фурье $\check{f}$ допускает оценку

$$|\check{f}(-t)|\le C\exp\left(\min_{y\in\mathbb{R}_+}(\Psi(y)-ty)\right), \quad t\ge 0.$$

Доказательство. Для любых $t,y\in\mathbb{R}$ имеем

$$\check{f}(-t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}f(x)\,dx=\int_{-\infty+iy}^{\infty+iy}e^{itz}f(z)\,dz.$$

Используя оценку (6) и минимизируя по y, получаем утверждение леммы. ■

Выведем из теоремы 2 теорему 1. Пусть f_j – целые функции, о которых говорится в теореме 2. Положим $\mu_j(E)=\int_E\check{f}_j(x)\,dx$ $(j=1,2)$. Из условия $f_j(i\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$ $(j=1,2)$ следует, что $f_j(x)=\overline{f_j(x)}$, поэтому меры μ_j $(j=1,2)$ вещественны. Из условия (3) и леммы 1 с $\Psi(y)=y^{1+1/\varepsilon}$ следует, что $|\check{f}_j(-t)|\le\exp(-Ct^{1+\varepsilon})$, $t>0$, $(j=1,2)$. Отсюда

$$|\mu_j|((-\infty,-t))=\int_{-\infty}^{-t}|\check{f}_j(x)|\,dx\le\exp(-Ct^{1+\varepsilon}),\quad t>0 \quad (j=1,2). \tag{7}$$

Оценка (7) не может выполняться для любого $C>0$. В противном случае по известной теореме о связи убывания "хвоста" меры и реста ее преобразования Фурье получалось бы, что функции f_j $(j=1,2)$ не удовлетворяют условию (4). Тем самым выполняется (1). Применяя лемму 1 к функции $f_1 \cdot f_2$, получаем

$$|(f_1 \cdot f_2)^{\sim}(-t)| \leq C\exp\left(\min_{y>0}(-ty+y\psi(y))\right) \leq C\exp(-ty+y\psi(y))\Big|_{y=\psi^{-1}(t-1)} =$$

$= C\exp(-\psi^{-1}(t-1))$ $(t>1)$. Выбирая $\psi(t)=q^{-1}(t+1)$, получаем утверждение (2). ■

1. Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся несколько вспомогательных фактов о субгармонических функциях. Будем обозначать через $SH(D)$ – функции субгармонические в области D, через Λ – класс неубывающих медленно меняющихся функций на $\mathbb{R}_+$.

Лемма 2. Пусть $\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $\varphi(r)>0$ и $h(r,\varphi)=r\varphi(r)|\sin\varphi|$. Тогда утверждения $h(r,\varphi) \in SH(|x|>R_0)$ и

$$3\varphi'(r)+r\varphi''(r) \geq 0 \qquad (r>R_0) \tag{8}$$

равносильны.

Лемма доказывается непосредственной проверкой.

Условие (8) не ограничивает снизу рост φ, так как имеет место следующий факт.

Замечание 1. Пусть $\pi(r)\uparrow\infty$ и $\pi\in\Lambda$. Тогда существует функция $\varphi\in\Lambda$, $\varphi\uparrow\infty$, удовлетворяющая условию (8) и такая, что $\varphi(r)\leq\pi(r)$.

Для доказательства замечания возьмем функцию $\lambda\uparrow\infty$, $\lambda\in\Lambda$ такую, что $r\lambda(r)$ – выпукла и $2\lambda(r)<\pi(r)$ (в качестве графика $r\lambda(r)$ можно взять границу выпуклой оболочки надграфика функции $r\pi(r)/2$, лежащую над $r>0$).

Рассмотрим функцию $\varphi(r)=\int_0^\infty \lambda(rt)(t+1)^{-2}\,dt$. Тогда $\varphi\uparrow\infty$, $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ и $r\varphi(r)$ выпуклая функция. Используя известные методы из теории медленно меняющихся функций ([4, с. 52]; [10, с. 10, теорема 1.2]), устанавливаем, что $\varphi(r)\sim\lambda(r)$ и

$$r^k\varphi^{(k)}(r)=O(\varphi(r)),\quad r\to\infty \quad (k\in\mathbb{N}). \tag{9}$$

Поэтому умножая, если это необходимо, φ на достаточно малую постоянную, будем иметь $\varphi(r)\leq\pi(r)$ $(r>0)$. Так как $r\varphi(r)$ выпукла, то φ удовлетворяет (8).

Далее будем считать, что $\varphi\uparrow\infty$ удовлетворяет условиям (8) и (9). Класс таких функций обозначим через A.

Определим в первом квадранте $Q=\{z=re^{i\varphi}: r\geq 0,\ 0\leq\varphi\leq\pi/2\}$ функцию $h_1(z)\equiv h_1(r,\varphi)=h(r,\varphi)+Cr^{4/5}\varphi\cos\varphi+r\sin\varphi-r^{4/5}\sin\varphi$ и продолжим ее с помощью четырехкратной симметрии относительно координатных полуосей во всю плоскость. Непосредственно проверяется

Лемма 3. При достаточно малом C имеем $h_1 \in SH(|z| > R_0)$.

Лемма 4. Обозначим через $\tilde{h}_1$ непрерывную функцию в $\mathbb{C}$, совпадающую с h_1 при $|z| > R_1$ и гармоническую при $|z| < R_1$. Тогда при достаточно большом R_1 имеем $\tilde{h}_1 \in SH(\mathbb{C})$.

Доказательство леммы 4 аналогично рассуждению из [5, с. 38], и мы его опускаем.

Пусть функция h_2 определена в Q равенством

$$h_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial Q} \frac{\partial G}{\partial n}(\xi, z)\, \tilde{h}_1(\xi)\, ds \tag{10}$$

(G – функция Грина для Q) и продолжается в $\mathbb{C}$ с помощью симметрии относительно координатных осей. Интеграл в (10) сходится, так как $\tilde{h}_1(\xi) < C|\xi|\ \psi(|\xi|)$, а $\frac{\partial G}{\partial n}(\xi, z) = O(|\xi|^{-3})$, $|\xi| \to \infty$, $\xi \in \partial Q$. Легко видеть, что $h_2(z) \geq \tilde{h}_1(z)$ и $h_2 \in SH(\mathbb{C})$.

Лемма 5. Справедливо неравенство $h_2(z) \leq C\tilde{h}_1(z)$.

Доказательство. Так как $\psi \in A$, то справедливо представление $r\psi(r) = r^{\rho(r)}$, где $\rho(r) \to 1$ – уточненный порядок. Из принципа Фрагмена – Линделефа и леммы 10 из ([6, гл. 1]) следует, что $h_2(z) \leq Cr\psi(r)$. Ясно, что $h_2(r) = 0$, $r > R_1$. Применяя теорему о двух константах к круговому сектору $D_R = \{z : |z| < R$, $0 \leq \arg z \leq \pi/2\}$, $R > R_1$, получаем $h_2(z) \leq CR\psi(R)\omega(z, D_R, M)$, $z \in D_R$, где $\omega(z, D_R, M)$ – гармоническая мера множества $M = \partial D_R \setminus \{z : \operatorname{Im} z = 0$, $R_1 \leq \operatorname{Re} z \leq R\}$. Заметим, что $\omega(z, D_R, M) \leq C \sin\varphi$ при $2|z| = R$, $0 \leq \arg z \leq \pi/2$. Это неравенство получается при помощи конформного отображения D_R на $\mathbb{C}_+$. Беря $R = 2|z|$, заключаем, что $h_2(z) \leq Cr\psi(r)\sin\varphi$, т.е.

$$\tilde{h}_1(z) \leq h_2(z) \leq C\tilde{h}_1(z). \tag{11}$$

■

Далее будем пользоваться следующими двумя леммами, доказательства которых опустим.

Лемма 6. Пусть $\Pi_g(z) = \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)\,dt}{(t-x)^2 + y^2}$ – интеграл Пуассона для функции $g \in C^2(\mathbb{R})$. Тогда $\exists \lim\limits_{y_0 \to 0} \frac{\partial}{\partial y} \Pi_g(x + iy_0) = \frac{\partial}{\partial y} \Pi_g(x)$.

Лемма 7. Пусть функция u гармонична в $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$ и непрерывно дифференцируема в $\mathbb{C}$. Функция $u \in SH(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда $\frac{\partial u}{\partial y}(x, +0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, -0) \geq 0$. Мера Рисса μ функции u дается формулой $d\mu = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, +0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, -0)\right)dx$.

Продолжим доказательство теоремы 2. По построению мера Рисса субгармонической функции h_2 сосредоточена на $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$. Так как $\frac{\partial}{\partial y} h_1(t) = \psi(t)\,(1 + o(1))$, $t \to \infty$, то из (11) и леммы 7 следует, что плотность ρ_x меры Рисса функции h_2 на $\mathbb{R}$ допускает оценку $\rho_x(t) \asymp \psi(t)$ $(t \to \infty)$, а так как $\frac{\partial}{\partial x}\tilde{h}_1(ir) = Cr^{-1/5}$, то плотность меры Рисса ρ_y функции h_2 на $i\mathbb{R}$ допускает оценку $\rho_y(t) > Ct^{-1/5}$. Из теоремы Адамара о представлении ([7, с. 165]) вытекает, что функция h_2 представима в виде $h_2 = u_1 + u_2 + u_3$, где u_1 и u_2 канонические интегралы рода 1, отвечающие массам Рисса функции h_2, сосредоточенным на $\mathbb{R}$ и $i\mathbb{R}$ соответственно, а u_3 – линейная функция.

Лемма 8. Существуют целые функции Φ_1 и Φ_2 такие, что

$$|u_1(z) - \ln|\Phi_1(z)|| = O(\psi(r)), \quad |Im\, z| > 1, \ r \to \infty, \tag{12}$$

$$|u_2(z) - \ln|\Phi_2(z)|| = O(1), \quad \{|x| > \varepsilon|y|\}, \ r \to \infty. \tag{13}$$

Доказательство леммы проведем методом работы [8]. Положим

$$m_1(E) = \int_E \rho_x(t)\,dt, \qquad \text{тогда} \qquad u_1(z) = \int_0^\infty \ln\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| dm_1(t).$$

Атомизируем меру m_1, заменяя ее мерой h, сосредоточенной на последовательности $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$, причем $h(\{x_k\}) = 2$. В качестве x_k берем точку $x_k = \frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^{t_k} t\,dm_1(t)$, где t_k – корень уравнения $m_1([0, t_k]) = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$. Вследствие выбора x_k выполняется условие

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} (t - x_k)\,dm_1(t) = 0. \tag{14}$$

Определим целую функцию Φ_1, $\Phi_1(0) = 1$ равенством

$$\ln|\Phi_1(z)| = 2\sum_{k=1}^\infty \ln\left|1 - \frac{z^2}{x_k^2}\right|.$$

Тогда

$$u_1(z) - \ln|\Phi_1(z)| = \sum_{k=1}^\infty \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{\ln\left|\frac{t+z}{x_k+z}\right| + \ln\left|\frac{t-z}{x_k-z}\right| - 2\ln\frac{t}{x_k}\right\} dm_1(t).$$

Так как $m_1((0,t)) \asymp t\psi(t)$, то $x_k^{-1} = O(k^{-1+\delta})$, $k \to \infty$, $\forall\delta > 0$, и $\sup\limits_{t\in[t_{k-1},t_k]} |t - x_k| = O(1)$, $k \to \infty$. Поэтому при $t \in [t_{k-1}, t_k]$ $k \to \infty$, $z \notin P = \{z : |Im\, z| < 1\}$ имеем

$$\ln\frac{t}{x_k} = \ln\left(1 + \frac{t - x_k}{x_k}\right) = \frac{t - x_k}{x_k} + O(k^{-2+2\delta}) \qquad (\forall\delta > 0),$$

$$\ln\left|\frac{t \pm z}{x_k \pm z}\right| = Re\ln\left(1 + \frac{t - x_k}{x_k \pm z}\right) = Re\,\frac{t - x_k}{x_k \pm z} + O(|x_k \pm z|^{-2}).$$

Используя (14), получаем

$$\left|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \ln\frac{t}{x_k}\,dm_1(t)\right| = O(k^{-2+2\delta}),\quad t\to\infty,\quad \forall\delta>0,$$

$$\left|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \ln\left|\frac{t\pm z}{x_k\pm z}\right| dm_1(t)\right| \le C\,|x_k\pm z|^{-2},\quad z\notin P.$$

Следовательно,

$$|u_1(z)-\ln|\Phi_1(z)|| \le C_0 + C\sum_{k=1}^{\infty} |x_k\pm z|^{-2},\qquad z\notin P.$$

Покажем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k\pm z|^{-2} = O(\psi(|x|)),\quad z\notin P,\quad |x|\to\infty.$$

Достаточно установить, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+(x-x_k)^2} = \int\limits_0^{\infty}\frac{dn_x(t)}{1+t^2} = O(\psi(x)),\quad x>0,\quad x\to\infty, \tag{15}$$

где $n_x(t) = card\{x_k : |x-x_k| < t\}$. Учитывая, что при $0<x<t$ $n_x(t) \le n_0(x+t) \le n_0(2t) \le O(t^{1+\varepsilon})$ $\forall\varepsilon>0$, имеем

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{dn_x(t)}{1+t^2} = C + 2\int\limits_0^{x}\frac{t\,n_x(t)\,dt}{(1+t^2)^2} + O(1),\quad x\to\infty.$$

Поскольку $n_x(t) \le 1 + C\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(t)\,dt \le 1 + Ct\psi(x+t)$, то

$$\int\limits_0^{x}\frac{2t\,n_x(t)dt}{(1+t^2)^2} \le C\int\limits_0^{x}\frac{t^2\psi(2x)}{(1+t)^4}\,dt < C\psi(x),$$

что дает (15). Тем самым (12) доказано.

Для доказательства (13) запишем

$$u_2(z) = \int\limits_0^{\infty}\ln\left|1+\frac{z^2}{t^2}\right| dm_2(t),\ \text{где}\qquad m_2(E) = \int\limits_E \rho_y(t)\,dt.$$

Атомизируя меру m_2, строим целую функцию Φ_2, $\Phi_2(0)=1$, полагая

$$\ln|\Phi_2(z)| = 2\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left|1+\frac{z^2}{y_k^2}\right|.$$

Точки y_k определяются равенством $y_k = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} t\,dm_2(t)$, где τ_k – корень уравнения $m_2((0,\tau_k)) = 2k$, $k\in\mathbb{N}$. Имеем

$$|u_2(z)-\ln|\Phi_2(z)|| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\left\{\ln\left|\frac{t+iz}{y_k+iz}\right| + \ln\left|\frac{t-iz}{y_k-iz}\right| - 2\ln\frac{t}{y_k}\right\} dm_2(t)\right|.$$

Используя оценку $Ct^{-1/5} \le \rho_y(t) = O(t^{1+\varepsilon})$ $\forall\varepsilon>0$, $t\to\infty$, получаем аналогично предыдущему

$$y_k^{-1}=O(k^{-1+\delta})\,(\forall\delta>0) \quad \text{и} \quad \sup_{t\in[\tau_{k-1},\tau_k]}|t-y_k|=O(k^{1/4}),\ k\to\infty,$$

$$\ln\frac{t}{y_k}=\frac{t-y_k}{y_k}+O(k^{-1,5+2\delta})\ \ (t\in[\tau_{k-1},\tau_k]),$$

$$\ln\left|\frac{t\pm iz}{y_k\pm iz}\right|=\operatorname{Re}\frac{t-y_k}{y_k\pm iz}+O(|y_k\pm z|^{-2})\cdot\ \ (|\operatorname{Im} iz|>1).$$

$$\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\ln\frac{t}{y_k}\,dm_2(t)=O(k^{-1,25+2\delta}),\quad\left|\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\ln\left|\frac{t\pm iz}{y_k\pm iz}\right|dm_2(t)\right|\le k^{3/4}|y_k\pm z|^{2}.$$

Если $z\notin C_\alpha=\{z:|x|<\alpha|y|\}$, то $|y_k\pm iz|^{-2}\le C_\alpha|y_k|^{-2}$. Поэтому при $z\notin C_\alpha$

$$|u_2(z)-\ln|\varphi_2(z)||\le C_0+C_\alpha\sum_{k=1}^{\infty}k^{3/4}y_k^{-2}<C<\infty.\ ■$$

Пусть $\varphi_3\ (\varphi_3(0)>0)$ – целая функция, такая, что $u_3=\ln|\varphi_3|$. Определим целую функцию Φ равенством $\Phi=\varphi_1\varphi_2\varphi_3$. В силу леммы 8 имеем

$$\ln|\Phi(z)|=h_2(z)+O(\varphi(r)),\quad z\notin P\cup C_\alpha. \tag{16}$$

Таким образом,

$$\ln|\Phi(z)|\asymp y\Psi(r),\quad z\in P\cup C_\alpha. \tag{17}$$

2. Для того чтобы построить функции $f_j\ (j=1,2)$, о которых идет речь в теореме 2, "подправим" функцию Φ. Для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 9. Пусть функция $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $\sup_{x\in\mathbb{R}}|g''(x)|<\infty$, $|g'(x)|=O(\ln^{-2}|x|)$, $x\to\infty$. Тогда при достаточно большом $K>0$ функция $V(z)=\Pi_g(x+i|y|)+K|y|$, где $\Pi_g(z)$ – интеграл Пуассона функции g, является субгармонической в $\mathbb{C}$.

Доказательство. В силу леммы 7 достаточно показать, что производная $\frac{\partial}{\partial y}\Pi_g(x)$ ограничена. Имеем при $t_0\in\mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Pi_g(t_0)=\frac{1}{\pi}\lim_{y\to0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t+t_0)-g(t_0)}{t^2+y^2}dt=\frac{1}{\pi}\lim_{y\to0}\left\{\int_{|t|<y}+\int_{y<|t|<1}+\int_{|t|>1}\right\}:=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{y\to0}\{I_1+I_2+I_3\},$$

$$|I_1|\le\sup_{t\in\mathbb{R}}|g'(t)|\int_{|t|<y}\frac{|t|}{t^2+y^2}dt<C<\infty,$$

$$|I_2|\le\left|\int_y^1\frac{g(t+t_0)+g(t_0-t)-2g(t_0)}{t^2+y^2}dt\right|<C<\infty.$$

Покажем, что $\lim\limits_{y\to 0}|I_3|<C<\infty$ при $t_0<1$ (случай $t_0<1$ рассматривается аналогично). Имеем

$$\lim_{y\to 0}|I_3|=\left|\int\limits_{|t-t_0|>1}\frac{g(t)-g(t_0)}{(t-t_0)^2}\,dt\right|=\left|\int\limits_{t_0+1}^{\infty}+\int\limits_{-\infty}^{t_0-1}\right|.$$

Так как $g'(t)\ln^2|t|=O(1)$, то

$$\left|\int\limits_{t_0+1}^{\infty}\right|\le\left|\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\right|_{t_0+1}^{\infty}\Bigg|+\int\limits_{1}^{\infty}\frac{|g'(t)|}{t}\,dt\le C<\infty,$$

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{t_0-1}\right|\le\left|\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\right|_{-\infty}^{t_0-1}\Bigg|+\int\limits_{-\infty}^{t_0-1}\left|\frac{g'(t)}{t-t_0}\right|dt\le C+\int\limits_{-\infty}^{0}\left|\frac{g'(t)}{t-1}\right|dt+$$

$$+\int\limits_{0}^{(t_0-1)/2}\left|\frac{g'(t)}{t-t_0}\right|dt+\int\limits_{(t_0-1)/2}^{t_0-1}\left|\frac{g'(t)}{t-t_0}\right|dt.$$

$$\left|\int\limits_{0}^{(t_0-1)/2}\right|\le\sup_{t\in\mathbb{R}}|g'(t)|\,\frac{t_0-1}{2}\left|\frac{2}{t_0-1-2t_0}\right|<C<\infty,$$

$$\left|\int\limits_{(t_0-1)/2}^{t_0-1}\right|\le\sup_{(t_0-1)/2<t<(t_0-1)}|g'(t)|\ln|t_0|<C<\infty.$$

Лемма 10. Пусть функция $\psi\in A$. Существуют четные функции $g_j\ (j=1,2)$, удовлетворяющие условиям леммы 9 и такие, что 1) $g_j(x)\le-\psi^{1+\varepsilon}(x)\ (j=1,2)$, $x\in\mathbb{R}$; 2) $(g_1+g_2)(x)=-|x|^{\delta}$, $0<\delta<1$; 3) существуют две последовательности интервалов $\{w_{kj}\}_{k=1}^{\infty}=\{[0{,}01t_{kj};\ 100t_{kj}]\}_{k=1}^{\infty}$ $(j=1,2)$ таких, что $g_j(x)=-\psi^{1+\varepsilon}(x)$ при $x\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}w_{kj}$ $(j=1,2)$.

Доказательство ввиду простоты опускаем.

Рассмотрим функции V_j, построенные по функциям g_j $(j=1,2)$ в соответствии с леммами 8 и 9.

Лемма 11. Справедливо соотношение $\Pi_{g_j}(z)=-\psi^{1+\varepsilon}(\operatorname{Re}z)\,(1+o(1))$, когда $z\to\infty$ так, что $|\operatorname{Re}z|\to\infty$, $[0{,}5|\operatorname{Re}z|,2|\operatorname{Re}z|]\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}w_{kj}$, $|\operatorname{Im}z|<|\operatorname{Re}z|^{\delta_1}$, где $0<\delta_1<1-\delta$.

Доказательство. Так как $g_j(t)=g_j(-t)$, то будем доказывать лемму, считая $\operatorname{Re}z>0$. Полагая $\operatorname{Re}z=x$, $\operatorname{Im}z=y$, имеем

$$\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{g_j(t)-g_j(x)}{(t-x)^2+y^2}\,dt=\frac{y}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{0,5x}+\int\limits_{0,5x}^{2x}+\int\limits_{2x}^{\infty}\right):=I_1+I_2+I_3.$$

Так как $|g_j(t)|<|t|^{\delta}$ и $|y|<x^{\delta_1}$, то

$$|I_1|\le cx^{\delta_1}\int\limits_{-\infty}^{0,5x}\frac{|t|^{\delta}}{(t-x)^2}\,dt\to 0,\quad x\to\infty,$$

$$|I_3| \le Cx^{\delta_1} \int_{2x}^{\infty} \frac{t^{\delta}}{(t-x)^2}\, dt \to 0, \quad x \to \infty .$$

Учитывая, что на $[0{,}5x;\ 2x\ ]$ выполняется $g_j(t) = -\psi^{1+\varepsilon}(t)$, имеем

$$|I_2| = \left| \frac{y}{\pi} \int_{0,5x}^{2x} \frac{\psi^{1+\varepsilon}(t) - \psi^{1+\varepsilon}(x)}{(t-x)^2 + y^2}\, dt \right| = \left| \frac{y}{\pi} \int_{0,5x}^{2x} \frac{(\psi^{1+\varepsilon})'\ (x+\theta(t-x))(t-x)}{(t-x)^2 + y^2}\, dt \right| ,$$

$0 < \theta < 1$. Так как $\psi^{1+\varepsilon} \in A$, то $|I_2| = o\ (\psi^{1+\varepsilon}(x))$, $x \to \infty$. ■

Методом, который был использован в доказательстве леммы 8, можно показать, что существуют целые функции λ_1 и λ_2 экспоненциального типа такие, что $|\, V_j(z) - \ln|\lambda_j(z)|| = O(1)$, $z \notin P\ (j = 1,2)$, поэтому из (16) вытекает, что

$$|\, h_2(z) + V_j(z) - \ln|\, (\Phi\lambda_j)\,(z)\,|| = O(\psi(r)), \quad z \notin P \cup G_\alpha .$$

Покажем, что целые функции $\Phi\lambda_j\ (j = 1,2)$ удовлетворяют условию (4) теоремы 2. Обозначим $B(y, f) = \| f\,(x+iy)\,\|_{L^\infty}$.

Лемма 12. Выполняются соотношения

$$\ln B(y, \Phi\lambda_j) \neq o\left(|y|^{1+1/\varepsilon}\right), \quad \ln B\,(y, \Phi\lambda_j) = O\left(|y|^{1+1/\varepsilon}\right)\ (j = 1,2).$$

Так как функции $|\lambda_j \Phi|\ (j = 1,2)$ симметричны относительно координатных осей, достаточно оценить их при $x \ge 0$, $y \ge 0$. Из лемм 8 и 11 следует, что

$$\ln|\, (\Phi\lambda_j)\,(z)| = h_2(z) + V_j(z) + O(\psi(r)) \ge Cy\,\psi(r) - 2\psi^{1+\varepsilon}(r),$$

$$z \in A_j = \left\{ z : |y| < x^{\varepsilon_1},\ [0{,}5x\,;\ 2x\,] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} w_{kj} \right\} \setminus P \quad (j = 1,2).$$

Заметим, что $\max\limits_{r>0} (Cy\,\psi(r) - 2\psi^{1+\varepsilon}(r))$, равный $Cy^{1+1/\varepsilon}$, достигается на кривой $r = \psi^{-1}\,(Cy^{1/\varepsilon})$. Последняя имеет общие точки с A_j со сколь угодно большими ординатами. Отсюда получаем первое утверждение леммы.

Из (17) и леммы 11 следует, что $\ln|\Phi\lambda_j\,(z)| < Cy\,\psi(r) - 0{,}5\,\psi^{1+\varepsilon}(r)$ для $z \in U = \{z : |y| < |x|^{\delta_1}\} \setminus P$. Отсюда

$$\ln B(y, \Phi\lambda_j) \le \max\left(\sup_{\{\operatorname{Im} z = y\}\setminus U} \ln|\Phi\lambda_j|\,;\ \sup_{\{\operatorname{Im} z = y\}\cap U} (Cy\,\psi(r) - 0{,}5\,\psi^{1+\varepsilon}(r)) \right) \le$$

$$\le \max\left(Cy\,\psi(y^{1/\delta_1}),\ Cy^{1+1/\varepsilon}\right) \le Cy^{1+1/\varepsilon} \quad (j = 1,2).\ ■$$

Лемма 13. Верно неравенство $\ln B(\,y, \lambda_1\lambda_2\,\Phi^2) < C|y|\psi(|y|)$.

Доказательство. Имеем $\ln|\,(\lambda_1\lambda_2\,\Phi^2)(z)\,| = 2h_2(z) + V_1(z) + V_2(z) + O(\psi(r)) = 2h_2(z) + \Pi_{g_1+g_2}(z) + Cy + O(\psi(r))$, $z \notin P \cup Q_\alpha$.

Так как $(g_1+g_2)(x)=-|x|^\delta$, то из принципа Фрагмена – Линделефа следует, что при некотором $\alpha>0$

$$\ln|(\lambda_1\lambda_2\Phi^2)(z)|\le Cy\psi(r)-r^\delta, \qquad z\notin G_\alpha\cup P.$$

Так как функция ψ монотонна и $Cy\psi(r)-r^\delta<0$ при $r>y^{1/\tau}(\tau<\delta)$, то для достаточно больших y имеем $Cy\psi(r)-r^\delta<Cy\psi(y^{1/\tau})$. Ввиду того что $\psi\in A$, выполняется неравенство $\ln|(\lambda_1\lambda_2\Phi^2)(z)|<Cy\psi(y)$, $z\notin G_\alpha\cup P$. Дополняя это неравенство оценкой $\ln|(\lambda_1\lambda_2\Phi^2)(z)|<$ $<Cy\varphi(r)$, получаем утверждение леммы.

3. Докажем теорему 2. Используя прием из работы [9], рассмотрим функцию

$$b(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\varkappa(z,a_n)+\varkappa(z,-a_n)\right\}, \quad \text{где} \quad \varkappa(z,a)=\frac{\cos^2\sqrt{(z-a)^2-1}}{\left(z-a-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+1}\right)^2},$$

$$a_n\in R_+,\qquad a_n\uparrow\infty,\qquad n\to\infty.$$

Легко видеть, что b – целая функция экспоненциального типа такая, что $b\in L^1(R)\cap L^2(R)$, $b(iR)\subset R$.

Лемма 14. Пусть $|a_n-a_{n-1}|>Ca_n^{1/2}>n^3$. Тогда для $z=\pm a_k\pm iy$, $|y|\in[0,a_k^\varepsilon]$ $(\varepsilon<1/4)$ выполняется неравенство

$$|b(z)|>Ce^{2(y)}/(k^2(y^2+1)).$$

Так как функция $|b|$ симметрична относительно координатных осей, то достаточно проверить оценку в первом квадранте. Пусть $\operatorname{Re} z=a_k$, $0\le \operatorname{Im} z\le a_k^\varepsilon$, тогда

$$b(z)=\frac{1}{k^2}(\varkappa(a_k+iy,a_k)+\varkappa(a_k+iy,-a_k))+\sum_{n\ne k}\frac{1}{n^2}\{\varkappa(a_k+iy,a_n)+$$

$$+\varkappa(a_k+iy;-a_n)\}:=\frac{1}{k^2}\varkappa(a_k+iy,a_k)+S.$$

Легко видеть, что $|\varkappa(a_k+iy,a_k)|\asymp e^{2y}/(y^2+1)$. Оценим слагаемые в S. Так как $y^2=O(|a_k-a_n|)$, $k\to\infty$, то для $a\in$ $\in\{-a_k\}\cup\{\pm a_n\}_{n\ne k}$

$$((a_k-a+iy)^2-1)^{1/2}=|a_k-a|\left\{1+\frac{1}{2}\left[\frac{2iy}{(a_k-a)}-\frac{y^2+1}{(a_k-a)^2}\right]+O\left(\frac{y^2}{(a_k-a)^2}\right)\right\},$$

откуда $\operatorname{Im}((a_k-a+iy)^2-1)^{1/2}=y+O(1)$, $k\to\infty$. Тогда

$$|S|<Ce^{2y}\left(\sum_{n\ne k}\frac{1}{n^2|a_k\pm a_n|^2}+\frac{1}{k^2a_k^2}\right)\le Ce^{2y}\times$$

$$\times\sum_{n\ne k}\frac{1}{n^2(y^2+1)|a_k\pm a_n|}\le\frac{Ce^{2y}}{k^3(y^2+1)},\quad \text{откуда}$$

$$|b(x)| > Ce^{2y} / (k^2(y^2+1)) \quad \forall k > k_0.$$

Таким образом, $\ln|b(x)| > C - 2\ln K$, при $x = \pm a_k + iy$, $|y| \in [0, a_k^{\varepsilon}]$. Выбрав

$$a_k > \psi^{-1}(2\ln K), \tag{18}$$

получим

$$\ln|b(\pm a_k + iy)| > C - \psi(a_k), \quad |y| \in [0, a_k^{\varepsilon}], \quad \varepsilon < 1/4. \tag{19}$$

Так как условия леммы 14 и последнего утверждения имеют вид оценок снизу на a_k, то существуют две последовательности $\{a_{kj}\}_{k=1}^{\infty}$ $(j=1,2)$, удовлетворяющие условиям леммы 14 и (18), такие, что множества $\{a_{kj}\}_{k=1}^{\infty} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} [0{,}02 t_{kj}, 50 t_{kj}]\right)$ бесконечны $(j=1,2)$.

Построим по последовательностям $\{a_{kj}\}_{k=1}^{\infty}$ функции b_j $(j=1,2)$, тогда функции $f_j = \Phi\lambda_j b_j$ удовлетворяют всем условиям теоремы 2. Действительно, $f_j(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, так как Φ, λ_j, b_j вещественны на мнимой оси $(j=1,2)$. Так как b_j – целая функция экспоненциального типа и $b_j \in L^1 \cap L^2$ $(j=1,2)$, то из лемм 12 и 13 следует, что

$$\|f_j(x+iy)\|_{L^1} \le \|b_j(x+iy)\|_{L^1} B(y, \Phi\lambda_j) \le \exp(C|y|^{1+1/\varepsilon}) \quad (j=1,2),$$

$$\|(f_1 \cdot f_2)(x+iy)\|_{L^1} \le \|(b_1 b_2)(x+iy)\|_{L^1} B(y, \Phi^2\lambda_1\lambda_2) \le \exp(C|y|\,\psi(|y|)).$$

В силу (19) и леммы 14 условие (4) теоремы 2 доказывается аналогично лемме 12. Теорема 2 доказана. ■

Замечание 2. Если в лемме 10 заменить в условиях 1) и 3) функцию $-\psi^{1+\varepsilon}$ на функцию $-\psi h(\psi)$, где $h \in A$, то можно доказать более общую теорему, чем теорема 2, отличающуюся от последней тем, что в условиях (3) и (4) функция $y^{1+1/\varepsilon}$ заменяется на $h^{-1}(y)$. Отсюда следует, что теорема 1 сохраняет силу, если в ее формулировке функцию $-r^{1+\varepsilon}$ заменить на $-rh(r)$.

Замечание 3. Если исключить в теореме 1 условие вещественности мер μ_j $(j=1,2)$, то доказательство упрощается.

1. Domar Y. Exensions of the Titchmarch convolution theorem with applications in theory of invariant subspaces // Proc. London Math. Sos. – 1983. – 46. – P. 288–300.
2. Островский И.В. Носитель свертки конечных мер и меры, однозначно определяемые сужением на полупрямую // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 3. – С. 8–12.
3. Линник Ю.В., Островский И.В. Разложения случайных величин и векторов. – М. : Наука, 1972. – 480 с.
4. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. – М. : Гостехиздат, 1957. – 160 с.
5. Гольдберг А.А., Островский И.В. Индикаторы целых абсолютно монотонных функций конечного порядка // Сиб. мат. журн. – 1986. – № 6.
6. Левин Б.Я. Распределения корней целых функций. – М. : Гостехиздат, 1956. – 632 с.

7. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. – М. : Мир. 1980. – 304 с.
8. Кацнельсон В.Э. Целые функции класса Картрайт с нерегулярным поведением // Функц. анализ и его приложение. – 1976. – 10. вып.4.– С. 35.
9. Koosis P. Fonctions de type exponenntiel presque borne'es et de croisaance irre'guliere sur l'axe re'el. // C.R. Acad. Sci. – 1977. – A285, N 5. – A345–A346.
10. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. – М. : Наука, 1985. – 141 с.

УДК 519.213.2

Р.Шарм

О ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СВЯЗИ С ЭФФЕКТОМ ХИНЧИНА

Указаны условия, при которых из равенства $(G*F_1)(x)=(G*F_2)(x)$, $x<x_0$, где F_j, G – функции распределения, следует, что $F_1(x)=F_2(x)$, $x<x_1$.

1. Постановка задачи и формулировки результатов. Пусть F_1, F_2 и G – произвольные функции распределения (ф.р.) f_1, f_2 и g – их характеристические функции (х.ф.). Пусть $D=\frac{1}{2}(F_1-F_2)$ и $d=\frac{1}{2}(f_1-f_2)$. Эффект Хинчина состоит в том, что из равенства $G*F_1=G*F_2$ не следует, что $F_1=F_2$; это справедливо только при некоторых дополнительных условиях [1, § 4.8].

Предположим теперь, что равенство сверток выполняется на полуоси, т.е.

$$(G*F_1)(x)=(G*F_2)(x), \qquad x\le x_0. \tag{1}$$

Какие дополнительные условия влекут, что $F_1=F_2$?

Первыми рассмотрели эту задачу Розенберг и Дук [2] и получили следующие результаты:

Теорема А [2]. Пусть выполняется условие (1), а также

$$\mathrm{Lext}\, G:=\sup\{x: G(x)=0\}=-\infty, \tag{2}$$

$$G(x)=O(e^{cx}), \quad x\to-\infty, \quad \forall c>0. \tag{3}$$

Если, кроме того,

$$|D(x)|=O(e^{-bx^2}), \quad x\to-\infty, \quad \exists b>0, \tag{4}$$

то $F_1=F_2$.

ISBN 5-12-001581-0. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Киев, 1990.

Теорема B [2]. Пусть выполняется условие (1), а также

$$\operatorname{Lext} G = 0, \quad |D(x)| = O(e^{\delta x}), \quad x \to \infty, \quad \forall \delta > 0 \tag{5}$$

Тогда существует число $x_1, -\infty < x_1 \leq \infty$, такое, что

$$F_1(x) = F_2(x); \quad x < x_1. \tag{6}$$

Приведем для сравнения аналогичный результат, который непосредственно следует из одной теоремы [3].

Теорема B. Пусть выполняется условие (1), а также

$$|D(x)| = O(\exp(-\delta|x| \ln |x|)), \quad x \to -\infty, \quad \forall \delta > 0, \tag{7}$$

$$G(x) = O(\exp(-c|x| \ln |x|)), \quad x \to -\infty, \quad \forall c > 0. \tag{8}$$

Тогда имеет место (6). Если, кроме того, справедливо (2), то $F_1 = F_2$.

Сравнивая теоремы A и B, констатируем, что предположение (7) слабее, чем (4), но (8) сильнее, чем (3). С другой стороны, (7) сильнее, чем первое из условий (5), но (8) слабее, чем второе из них.

В настоящей работе мы докажем два обобщения теоремы B, ослабляя предположения (7) или (8). Сформулируем результаты, первый из которых является обобщением теоремы B и модификацией теоремы A, а второй является обобщением теоремы A.

Теорема 1.1. Если выполняются условия (1), (5) и (8), то имеет место (6). Если, кроме того, справедливо (2), то $F_1 = F_2$.

Теорема 1.2. Утверждения теоремы 1.1 сохраняют силу, если предположения (5) и (6) заменить соответственно на предположения (7) и (3).

В условиях теорем 1.1 и 1.2 функции g и d аналитически продолжимы в полуплоскость $H_+ = \{z = t + is : s > 0\}$. Без ограничения общности можно предположить, что в (1) $x_0 = 0$. Тогда условие (1) эквивалентно тому, что произведение gd ограничено в H_+. Поэтому основными средствами при доказательстве сформулированных результатов являются теоремы разложения ограниченных аналитических функций в H_+. Мы воспользуемся одним результатом [3] (теорема 2.1, см. ниже), на котором основана теорема B. Дополнительно утверждения делают возможным применение этой теоремы для доказательства теорем 1.1 и 1.2. Для доказательства теоремы 1.1 используется также один из результатов [6].

2. Вспомогательные результаты.

Лемма 2.1. а) Если функция D удовлетворяет (5), то функция

d аналитически продолжима в H_+, и справедлива оценка $|d(t+is)| \leq \leq K_s(|t|+1)$, где K_s не зависит от t.

б) Если g удовлетворяет (2) и (3), то выполняется $\lim\limits_{s\to\infty} s^{-1} \ln g(is) = +\infty$.

в) Если D удовлетворяет (7), то $\limsup\limits_{r\to\infty} r^{-1} \ln^+ \ln^+ M(r,d) = 0$, где $M(r,d) = \max\limits_{0\leq\theta\leq\pi} |d(re^{i\theta})|$.

Доказательство. В силу (5) функция d аналитически продолжима в H_+. Рассмотрим представление

$$d(z) = d_+(z) + d_-(z) = \int_0^\infty e^{izx} dD(x) + \int_{-\infty}^0 e^{izx} dD(x). \tag{9}$$

Функция d_+ ограничена единицей на H_+ и

$$|d_-(z)| \leq |D(0) - iz \int_{-\infty}^0 e^{izx} D(x) dx| \leq 1 + |z| \int_{-\infty}^0 e^{-sx} |D(x)| dx. \tag{10}$$

Утверждение (а) следует из (9) и (10). Утверждение (б) следует из [4, 2.3.4], а утверждение (в) получено в доказательстве теоремы 1 из [3].

Определение. Обозначим через M_+ класс тех функций φ, которые аналитичны в H_+, непрерывны в $\bar{H}_+ = H_+ \cup \mathbb{R}$, и $|\varphi(t)| \leq 1$, $t \in \mathbb{R}$. Обозначим через N_+ подкласс функций из M_+, для которых $|\varphi(z)| \leq 1$, $z \in H_+$.

Россберг и Ридель [1] доказали следующую теорему.

Теорема 2.2. Пусть $\varphi_1 \in N_+$, $\varphi_2 \in M_+$, $\varphi_1 \not\equiv 0$ и $\varphi_1\varphi_2 \in N_+$. Тогда $|\varphi_2(t+is)| \leq \exp(b_2 s)$, $s>0$, $\exists b_2 > 0$. Если $b_1 = \limsup\limits_{s\to\infty} s^{-1} \times \ln|\varphi_1(is)| = 0$, то $b_2 = 0$ и $\varphi_2 \in N_+$.

Можно привести примеры функций $\varphi_1, \varphi_2 \in M_+$ таких, что $\varphi_1\varphi_2 \in N_+$, а φ_1, φ_2 имеют любой порядок, больший 1. Следующая теорема обобщает теорему 2.2 на случай, когда порядок может быть больше единицы.

Теорема 2.3. Пусть φ_1, φ_2 – функции из M_+, нули которых не имеют конечной предельной точки, и пусть $\varphi_1\varphi_2 \in N_+$. Если

$$\limsup_{r\to\infty} r^{-g} \ln M(r, \varphi_1) < \infty \tag{11}$$

для некоторого $g \geq 1$, то справедливо одно из следующих утверждений:

1) $\exists b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 + b_2 \leq 0$, такие, что

$$|\varphi_j(t+is)| \leq \exp(b_j s), \quad s > 0, \quad j=1,2. \tag{12}$$

2) φ_1, φ_2 имеют один и тот же порядок $m\,(1\le m\le g)$ и тип τ.

Теорема 2.4 [3]. Пусть $j=1,2$, $\varphi_j\in M_+$, $\varphi_j\ne 0$ и $\varphi_1\varphi_2\in N_+$. Кроме того, пусть

$$\liminf_{r\to\infty} r^{-1}\ln^+\ln^+\bigl(M(r,\varphi_1)+M(r,\varphi_2)\bigr)=0, \tag{13}$$

$$|\varphi_j(t+is)|\le C(H)<\infty, \quad 0<s<H, \quad \exists H>0. \tag{14}$$

Тогда выполняется (12).

Лемма 2.5. Пусть $\varphi_j\in M_+$, $j=1,2$ и пусть нули функций φ_1, φ_2 не имеют конечной предельной точки. Предположим, что

$$\liminf_{r\to\infty} r^{-1}\ln^+\ln^+ M(r,\varphi_1)=0 \tag{15}$$

и что φ_2 – х.ф. Тогда равенство (15) выполняется и для φ_2.

Доказательство. По предположению теоремы $\varphi=\varphi_1\varphi_2\in N_+$. Пусть $\pi_0^+(z)$ – произведение Бляшке для нулей функции φ_1, тогда $\varphi_1=\varphi_0\,\pi_0^+$, где $\varphi_0\in M_+$ и не имеет нулей в H_+. Применяем результат Хеймана [5] к π_0^+ и получаем, что существуют число $\delta>0$ и множество Q такие, что $\ln|\pi_0^+(z)|\geq-\delta|z|$, $z\notin Q$; $\int_Q d\ln x<\infty$.
Из (15) следует, что имеется последовательность $\{R_k\}$, $R_k\to\infty$ при $k\to\infty$, такая, что $|\varphi_1(z)|\le\exp\exp(O(R_k))$, $|z|\to\infty$, $z\in H_+$. Множество Q не содержит бесконечного числа интервалов $\{R_k/2\le|z|\le R_k,\ z\in H_+\}$. Поэтому для некоторой последовательности ρ_k, $R_k/2\le\rho_k\le R_k$), имеем $\ln|\pi_0^+(z)|\geq-\delta|z|$, $|z|=\rho_k$, $z\in H_+$, и, следовательно,

$$\ln|\varphi_0(z)|\le\exp\bigl(O(R_k)\bigr)+\delta|z|\le\exp\bigl(O|z|)\bigr),\ |z|=\rho_k,\ z\in H_+. \tag{16}$$

Так как $|\varphi_0(t)|\le 1$, то для всех $\varepsilon>0$ существует $k_0(\varepsilon)$ такое, что

$$\ln|\varphi_0(z)|\le\exp(\varepsilon\rho_2),\quad |z|\le\rho_k,\quad z\in H_+,\quad k>k_0(\varepsilon). \tag{17}$$

Преобразуем конформно полуплоскость H_+ в круг $S=\left\{w=\frac{z-i}{z+i}:|w|<1\right\}$ и рассмотрим $\tilde\varphi_0(w)=\varphi_0(z)$. Легко видеть, что $\ln|\tilde\varphi_0(w)|\le e^{\varepsilon R_k}$, $|w|\le\frac{\rho_k-1}{\rho_k+1}=g_k$, и отсюда

$$\ln|\tilde\varphi_0(w)|\le\exp\left\{\frac{2\varepsilon}{1-g_k}\right\},\quad |w|<g_k,\quad \lim_{k\to\infty}g_k=1. \tag{18}$$

Применяя неравенство Каратеодори [7, 1, § 6], из (18) получаем

$$\left| \ln \tilde{\varphi}_0 (w) \right| \leq \frac{K|w|}{g_k - |w|} \exp\left\{ \frac{2\varepsilon}{1-g_k} \right\}, \quad \exists K>0.$$

Фиксируем $|w|$ такое, что $|w| = 2g_k - 1 = u_k$, тогда

$$\left| \ln \tilde{\varphi}_0 (w) \right| \leq \frac{2K}{1-|w|} \exp\left\{ \frac{4\varepsilon}{1-|w|} \right\}.$$

Элементарные вычисления приводят к следующему неравенству:

$$\left| \ln \varphi_0 (z) \right| \leq \frac{4K|z|^2}{\operatorname{Im} z} \exp\left\{ \frac{8\varepsilon |z|^2}{\operatorname{Im} z} \right\}, \quad |z|>1.$$

В частности, для $z = is_k = i\,\dfrac{1+u_k}{1-u_k}$ имеем

$$\left| \ln \varphi_0 (is_k) \right| \leq 4Ks_k e^{8\varepsilon s_k}, \qquad k \geq k_0(\varepsilon). \tag{19}$$

Напомним, что $\varphi_2 \varphi_0 \pi_0^+ \in N_+$, а функции $\varphi_2 \varphi_0$ и π_0^+ удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Отсюда получаем $\varphi_2 \varphi_0 \in N_+$. Поскольку φ_2 – х.ф., то $|\varphi_2(t+is)| \leq \varphi_2(is)$ и $\varphi_2(is)$ ограничена или не убывает при $s > s_0$. В первом случае утверждение леммы тривиально, во втором из (19) получаем, что для некоторого $s_k > s_0$ и $k > k_0(\varepsilon)$ выполняется $(s_0 < s < s_k)$:

$$\ln|\varphi_2(t+is)| \leq \ln \varphi_2(is_k) \leq -\ln|\varphi_0(is_k)| \leq 4Ks_k e^{8\varepsilon s_k}. \tag{20}$$

Поэтому $\liminf\limits_{r\to\infty} r^{-1} \ln^+ \ln^+ M(r, \varphi_2) = 0$ и лемма доказана.

Теорема 2.6. [6] Пусть $\varphi \in M_+$, $\varphi \not\equiv 0$ и $|\varphi(t+is)| \leq \varphi(is)$, $s > s_0$. Если функция φ удовлетворяет (15) и для ее нулей a_ν выполняется

$$\sum_{a_\nu \in H_+} \left| \operatorname{Im}(1/a_\nu) \right| < \infty, \tag{21}$$

то

$$\limsup_{r\to\infty} r^{-3} \ln^+ M(r, \varphi) < \infty. \tag{22}$$

3. Доказательство теоремы 1.1. В силу условий (5), (6) и леммы 2.1 функции g и d аналитически продолжимы в H_+ и $g \not\equiv 0$. Можно считать, что $d \not\equiv 0$, иначе второе утверждение тривиально. Без ограничения общности считаем, что $x_0 = 0$ в (1). Тогда условие (1) означает, что преобразование Фурье – Стильтьеса функции $G*D$ удовлетворяет неравенству $|g(x)d(x)| \leq 1$, $x \in \bar{H}_+$. Положим $\tilde{g}(z) = Ag(z+i)$, $\tilde{d}(z) = B\,\dfrac{d(z+i)}{z+i}$, где $1/A = \max(|g(i)|, 1)$, $1/B = 3e^{k_1}$, k_1 – неотрицательное число такое, что $|D(x)| \leq e^{2x}$ для $x \leq -k_1$. Отсюда следует, что $\tilde{g}$ и $\tilde{d}$ аналитичны в некоторой об-

ласти, содержащей $\tilde{H}_+$. Кроме того, $|\tilde{g}(t)| \le 1$ и

$$|\tilde{d}(t)| \le \frac{|d(t+i)|}{3e^{k_1}|t+i|} \le 1,$$

(см. лемму 2.1 (а)). Следовательно $\tilde{g}$, $\tilde{d} \in M_+$, а их нули не имеют конечной продольной точки. Далее, $|\tilde{g}(z)\tilde{d}(z)| \le 1$, т.е. $\tilde{g}\tilde{d} \in N_+$. С помощью леммы 2.1 (В) из условия (8) заключаем, что $\limsup\limits_{s\to\infty} s^{-1} \ln^+ \ln^+ g(is) = 0$, следовательно,

$$\limsup_{s\to\infty} s^{-1} \ln^+ \ln^+ \tilde{g}(is) = 0. \tag{23}$$

Нули b_j произведения gd удовлетворяют (21), так что и нули a_j функций g и $\tilde{g}$ удовлетворяют (21). Применяя теорему 2.6, получаем

$$\limsup_{r\to\infty} r^{-3} \ln M(r,\tilde{g}) < \infty. \tag{24}$$

В силу теоремы 2.3 порядок функции $\tilde{d}$ не больше, чем 3, так что для функции $\tilde{d}$ выполняется (15).

Функции $\tilde{g}$ и $\tilde{d}$ удовлетворяют (14), так как

$$|g(z+i)| \le q(i(s+1)), \quad \left|\frac{d(z+i)}{z+i}\right| \le 2K_{s+1}$$

(см. лемму 2.1 (а)). Таким образом, все предположения теоремы 2.4 выполняются. Следовательно, существуют $b_1, b_2 \in R$ такие, что $|\tilde{g}(z)| \le e^{b_1 s}$, $|\tilde{d}(z)| \le e^{b_2 s}$, поэтому $|d(z)| \le B^{-1}|z+i|\, e^{b_2 s}$. Поскольку $|d(t)| \le 1$, можем воспользоваться теоремой Фрагмена – Линделефа [7, 1, § 14], из которой следует $|d(z)| \le exp(b_2 s)$, $s>0$. В силу одной теоремы Пойя [1] имеем $lextD \ge -|b_2|$, и первое утверждение доказано.

Предположим, что дополнительно выполняется (2). Тогда по лемме 2.1 (б) $\lim\limits_{s\to\infty} s^{-1} \ln\tilde{g}(is) = \infty$, что несовместимо с условием $|\tilde{g}(z)| \le exp(b_1 s)$. Отсюда следует, что $d \equiv 0$.

<u>4. Доказательство теоремы 1.2</u>. Как и в доказательстве теоремы 1.1, из (3) и (7) следует, что $\tilde{d}, \tilde{g} \in M_+$, $\tilde{g}\tilde{d} \in N_+$, $\tilde{g} \not\equiv 0$. Можно считать, что $\tilde{d} \not\equiv 0$ иначе второе утверждение теоремы тривиально. Тогда нули функций $\tilde{g}$ и $\tilde{d}$ не имеют конечной предельной точки. Из леммы 2.1 (в) следует, что $\limsup\limits_{r\to\infty} r^{-1} \ln^+ \ln^+ M(r,d) = 0$, следовательно, для функции $\tilde{d}$ выполняется (15). Отсюда заключаем с помощью леммы 2.5, что функция $\tilde{g}$ также удовлетворяет условию (15). Утверждение теоремы доказывается далее так же, как в теореме 1.1.

1. Rossberg H.-J., Jesiak B., Siegel G. Analytic methods in probability theory. - Berlin: Akademieverlag, 1985. - 306 p.
2. Rossberg H.-J., Chu Duc. Uniqueness theorems for components of a convolution given on a half-line // Math. Operationforsch. und Statist. - 1980. - 11. - S. 361-371.
3. Ostrovskii I.V. Generalization of the Titchmarsh convolution theorem and the complex-valued measures uniqueky determined by their restriction on a half-line//Lect. Notes in Math.- 1985.- 1155. - S. 256-283.
4. Линник Ю.В., Островский И.В. Разложения случайных величин и векторов. - М. : Наука, 1972. - 480 с.
5. Hayman W.K. Questions of regularity connected with the Phragmén-Lindelöf principle // J. Math. Pures et Appliquees. - 1956. - 35. - P. 115-126.
6. Островский И.В. О росте целых и аналитических в полуплоскости хребтовых функций // Мат. сб. - 1982. - 119, № 1. - С.150-159.
7. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. - М. : Гостехиздат, 1956. - 632 с.

УДК 519.213.2

И.В.Островский

ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ Р.ШАРМА

Указаны условия, при которых из равенства $(G_1 * G_2)(x) = 0, x < x_0$, где G_j - функции ограниченной вариации на прямой, следует, что $G_1(x) = G_2(x) = 0, \quad x < x_1$.

Теоремы 1.1 и 1.2 работы [1] содержатся в таком утверждении.

Теорема 1. Пусть G_1 и G_2 - две не равные тождественно нулю комплекснозначные функции ограниченной вариации на R, удовлетворяющие условиям

$$|G_1(x)| = O(e^{-c|x|\ln|x|}), \quad x \to -\infty, \quad \forall c>0, \tag{1}$$

$$|G_2(x)| = O(e^{-c|x|}), \quad x \to -\infty, \quad \forall c>0. \tag{2}$$

Предположим, что

$$(G_1 * G_2)(x) = 0, \qquad x \le 0.$$

Тогда существует $x_1 \in R$ такое, что $G_1(x) = G_2(x) = 0$ при $x < x_1$.

Пусть обозначения G, D, F_1, F_2 имеют тот же смысл, что и в п. 1 работы [1]. Чтобы вывести теоремы 1.1 и 1.2 из теоремы 1, предположим, что $F_1 \not\equiv F_2$ (иначе нечего доказывать) и применим теорему 1 к $G_1 = G, \quad G_2 = D - \frac{1}{2}(F_1 - F_2)$ в случае теоремы 1.1, и к $G_1 = D - \frac{1}{2}(F_1 - F_2), \quad G_2 = G$ в случае теоремы 1.2.

Теорема 1 является следствием такой теоремы о факторизации

ISBN 5-12-001584-0. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Киев, 1990.

в классе Харди $H_\infty(\mathbb{C}_+)$ в полуплоскости $\mathbb{C}_+=\{z: Im z>0\}$.

Теорема 2. Пусть функция $h\neq 0$ принадлежит $H_\infty(\mathbb{C}_+)$ и допускает факторизацию $h=g_1 g_2$, где функции g_1 и g_2 аналитичны в $\mathbb{C}_+$ и удовлетворяют условиям:

(I) Найдется последовательность $R_k\uparrow\infty$ такая, что

$$sup\{|g_1(z)|:|z|\le R_k,\quad Im z>0\}\le exp\,exp\{O(R_k)\},$$

(II) Найдутся числа $0<\alpha<1$ и $H>0$ такие, что

$$sup\{|g_1(z)|+|g_2(z)|:|z|\le r,\quad 0<Im z<H\}\le exp(O(r^\alpha)),\quad r\to\infty.$$

Тогда существуют числа $b_j\in\mathbb{R}$ такие, что $g_j(z)\,exp(ib_j z)\in H_\infty(\mathbb{C}_+)$.

Чтобы вывести отсюда теорему 1, применяем теорему 2 к функциям g_1 и g_2, являющимся преобразованиями Фурье – Стилтьеса функций G_1 и G_2 соответственно. Условия (1), (2) влекут (сравни [1, (9), (10)]) аналитичность функций g_1 и g_2 в $\mathbb{C}_+$ и оценки

$$|g_1(z)|+|g_2(z)|=O(|z|),\quad z\to\infty,\qquad 0<Im z<H,$$

$$|g_1(z)|\le exp\,exp(O(|z|)),\quad z\to\infty,\qquad z\in\mathbb{C}_+.$$

Поэтому условия теоремы 2 выполнены, и мы заключаем, что $|g_j(z)|=O(exp(|b_j||z|))$. Отсюда в силу теоремы Пэли – Винера следует, что при $x<-max(|b_1|,|b_2|)$ выполняется $G_1(x)=G_2(x)=0$.

Теорема 2 является усилением теоремы с тем же номером из [2], где ограничение (1) накладывалось на обе функции, g_1 и g_2. Теоремы 1.1 и 1.2 в [1] получаются с помощью теоремы, отличающейся от теоремы 2 тем, что дополнительно по крайней мере одна из функций, g_1 или g_2 предполагается характеристической (т.е. преобразованием Фурье – Стильтьеса функции распределения). На справедливость теоремы 2 любезно обратил внимание автора И.Домар, который указал также те изменения, которые следует сделать в рассуждениях из работы [2], чтобы получить теорему 2.

Приведем эти изменения, сохраняя обозначения, принятые в [2, с. 260-265]. Пусть G – функция, введенная соотношением (3.2) на с. 261 в [2]. Напомним, что функция G – целая и $G(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$, поэтому функция $Im G$ – гармоническая и равна нулю на $\mathbb{R}$.

В [2, на с. 263] установлено, что

$$max\{Im G(s_k e^{i\theta}): 0\le\theta\le\pi\}\le exp(O(s_k)),\quad s_k\to\infty,\tag{3}$$

и из проведенных далее рассуждений видно, что теорема 2 будет доказана, если удастся установить, что

$$max\{-Im G(\tfrac{1}{2}s_k e^{i\theta}): 0\le\theta\le\pi\}\le exp(O(s_k)),\quad s_k\to\infty.\tag{4}$$

Применим к функции $Im\,G(z)$ формулу Пуассона для полукруга $\{z: |z| \le s_k,\ Im\,z \ge 0\}$. Учитывая явный вид ядра Пуассона и то обстоятельство, что $Im\,G = 0$ на $\mathbb{R}$, получаем $Im\,G(z) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} Im\,G(s_k e^{i\theta}) \times$$
$$\times \frac{(s_k^2 - r^2)\, 4 s_k\, r \sin\varphi \sin\theta\, d\theta}{(s_k^2 + r^2 - 2 s_k r\cos(\varphi - \theta))(s_k^2 + r^2 - 2 s_k r \cos(\varphi + \theta))}. \qquad (5)$$

Полагая $z = i$, получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (Im\,G(s_k e^{i\theta}))^- \frac{(s_k^2 - 1)\, 4 s_k \sin\theta\, d\theta}{(s_k^2+1)^2 - 4 s_k \sin^2\theta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (Im\,G(s_k e^{i\theta}))^+ \frac{(s_k^2 - 1)\, 4 s_k \sin\theta\, d\theta}{(s_k^2+1)^2 - 4 s_k^2 \sin^2\theta} - Im\,G(i),$$

откуда в силу (3) следует, что

$$\int_0^{\pi} (Im\,G(s_k e^{i\theta}))^- \sin\theta\, d\theta \le \exp\,(O(s_k)).$$

Используя эту оценку и (3), из (5) заключаем, что имеет место (4).

1. Шарм Р. О продолжении функции распределения в связи с эффектом Хинчина // Наст. сб., с. 70-76.
2. Ostrovskii I.V. Generalization of the Titchmarsh convolution theorem and the complex-valued measures uniquely determined by their restriction on a half-line //Lect. Notes in Math.-1985.-1155. - S. 256-283.

УДК 519.6

Ю.И.Любич

ДИНАМИКА ОТБОРА В ДИАЛЛЕЛЬНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ГЕННОЙ СТРУКТУРЕ

Доказана сходимость траекторий под действием отбора в неменделевской стационарной генной структуре. В сверхдоминантном случае имеет место сходимость к равновесному полиморфизму, в остальных случаях происходит вытеснение аллеля. Эти процессы не сопровождаются возрастанием средней приспособленности, поскольку ее экстремум, не совпадает с равновесным полиморфизмом.

В рассматриваемой генной структуре, впервые описанной автором в [1] (см. также [2]), имеются два аллельных гена A, a и три генотипа AA, aa, Aa, как и в классической ситуации Менделя, однако гетерозигота Aa в мейозе продуцирует гены A, a с вероятностями c_1, c_2 $(c_1 + c_2 = 1)$ отличными от $\frac{1}{2}$. Этот мейотиче-

ISBN 5-12-001584-0. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Киев, 1990.

ский драйв (или, может быть, отбор гамет) компенсируется при оплодотворении таким образом, что при слиянии генов A, a образуется не только гетерозигота Aa, но и обе гомозиготы AA, aa. Вероятности этих исходов обозначим через b, a_{12} и a_{21}. Тогда, если удовлетворяются уравнения генного балланса

$$a_{12} + c_1 b = a_{21} + c_2 b = \frac{1}{2}, \qquad (1)$$

то вероятности p, q генов A, a в генофонде сохранятся при переходе к следующему поколению. Если обозначить вероятности генотипов AA, aa, Aa в исходном поколении через x_1, x_2, x_3, то

$$p = x_1 + c_1 x_3, \qquad q = x_2 + c_2 x_3, \qquad (2)$$

а в следующем поколении

$$x_1' = p^2 + 2a_{12}pq, \qquad x_2' = q^2 + 2a_{21}pq, \qquad x_3' = 2bpq. \qquad (3)$$

Это – обобщенный закон Харди – Вайнберга (в менделевской ситуации $a_{12} = a_{21} = 0$, $b = 1$, $c_1 = c_2 = 1/2$, причем последние три равенства вытекают из первых двух благодаря (1)).

В силу упомянутых законов сохранения ($p' = p$, $q' = q$) выполняется принцип стационарности: $x_i'' = x_i'$ $(i = 1, 2, 3)$, популяция на уровне зигот в первом поколении потомков приходит в равновесное состояние. Отметим, что эволюционный оператор $V(x_1, x_2, x_3) = (x_1', x_2', x_3')$, являющийся суперпозицией оператора оплодотворения (3) и оператора мейоза (2), был найден еще С.Н.Бернштейном (см. [3]) как решение поставленной им же проблемы явного описания всех квадратичных операторов (в симплексе), удовлетворяющих условию $V^2 = V$.

Цель настоящей статьи – исследовать динамику отбора в описанной генной структуре. В менделевской ситуации можно опираться на фундаментальную теорему Фишера о росте средней приспособленности популяции в процессе отбора. В общем случае, как мы увидим ниже, Фундаментальная Теорема нарушается, но теорема о сходимости всех траекторий остается в силе в том же виде, что и для менделевской популяции (ср. [2]).

Динамика на уровне гамет (генов) определяется следующими уравнениями:

$$p' = p\,\frac{W_1}{W}, \qquad q' = q\,\frac{W_2}{W}, \qquad (4)$$

где

$$W_1 = \lambda_1 p + 2(\lambda_1 a_{12} + \lambda_3 c_1 b)q, \qquad W_2 = \lambda_2 q + 2(\lambda_2 a_{21} + \lambda_3 c_2 b)p$$

и средняя приспособленность популяции

$$W = pW_1 + qW_2 = \lambda_1 p^2 + \lambda_2 q^2 + 2(\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 b)pq.$$

Здесь λ_1, λ_2, λ_3 – коэффициенты приспособленности (выживания) зигот AA, aa, Aa. В отличие от менделевской ситуации, матрица системы линейных форм W_1, W_2 не симметрична, вообще говоря, и поэтому задача не сводится к классической.

Коэффициенты приспособленности по смыслу всегда неотрицательны. Будем считать $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Тогда и $W > 0$ при всех p $(0 \le p \le 1,\ q = 1-p)$. Можно также сразу исключить из рассмотрения селективно нейтральный случай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Равновесные состояния данной динамической системы – это неподвижные точки отображения (4). Ими всегда являются гомозиготные состояния: 1) $p = 1$, $q = 0$; 2) $p = 0$, $q = 1$. Сверх этого возможен полиморфизм (p^*, q^*), определяемый линейным уравнением $W_1 = W_2$ $(= W$ автоматически), из которого, предполагая здесь и далее $b > 0$, $\lambda_3 \ne \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$, получаем

$$p^* = \frac{(\lambda_2 - \lambda_3) - 2a_{12}(\lambda_1 - \lambda_3)}{2b(\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 - \lambda_3)}; \qquad q^* = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3) - 2a_{21}(\lambda_2 - \lambda_3)}{2b(\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 - \lambda_3)}, \tag{5}$$

но нужно еще потребовать, чтобы было $p^* > 0$, $q^* > 0$. Последнее эквивалентно тому, что в (5) числители имеют одинаковые знаки, т.е. тому, что либо $\lambda_3 > max(\lambda_1, \lambda_2)$, либо $\lambda_3 < min(\lambda_1, \lambda_2)$, и в обоих случаях

$$2a_{21} < \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} < \frac{1}{2a_{12}}$$

(отметим, что $4a_{12}a_{21} < 1$). В первом случае гетерозигота приспособлена лучше обеих гомозигот (сверхдоминантная), во втором случае – хуже (сверхрецессивная).

В промежуточной ситуации $\lambda_1 \le \lambda_3 \le \lambda_2$ (для определенности считаем $\lambda_1 < \lambda_2$) полиморфизм отсутствует.

<u>Теорема</u>. Траектории динамической системы (4) сходятся к полиморфизму в сверхдоминантном случае при начальном состоянии $p^0 > 0$, $q^0 > 0$, и к одному из гомозиготных состояний в остальных случаях.

Для доказательства заметим, что система (4) с учетом ограничений $p + q = 1$, $p \ge 0$, $q \ge 0$, эквивалентна динамической системе вида

$$\theta' = \theta g(\theta) = \theta\,\frac{\alpha_{11}\theta + \alpha_{12}}{\alpha_{21}\theta + \alpha_{12}'} \qquad (0 \le \theta \le \infty), \tag{6}$$

где $\theta = \frac{p}{q}$ – проективная координата. Коэффициенты

$$\alpha_{11} = \lambda_1, \qquad \alpha_{12} = 2(\lambda_1 a_{12} + \lambda_3 (c_1 b),$$

$$\alpha_{21} = 2(\lambda_2 a_{21} + \lambda_3 c_2 b), \qquad \alpha_{22} = \lambda_2$$

положительны, если исключить случай $a_{12} = a_{21} = 0, \cdot \lambda_3 = 0,$ для которого справедливость теоремы очевидна. Заметим сразу, что для всех $\theta > 0$

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = \frac{\alpha_{11}\alpha_{21}\theta^2 + 2\alpha_{11}\alpha_{22}\theta + \alpha_{12}\alpha_{22}}{(\alpha_{21}\theta + \alpha_{22})^2} > 0. \tag{7}$$

Существование полиморфизма эквивалентно существованию в $(0, \infty)$ неподвижной точки θ^*. При этом $g(\theta^*) = 1$, откуда

$$\theta^* = \frac{\alpha_{12} - \alpha_{22}}{\alpha_{21} - \alpha_{11}} = \frac{a_{12}(\lambda_2 - \lambda_1) + c_1 b(\lambda_2 - \lambda_3)}{a_{21}(\lambda_1 - \lambda_2) + c_2 b(\lambda_1 - \lambda_3)}. \tag{8}$$

В сверхдоминантном случае выполняются неравенства

$$\alpha_{12} > \alpha_{22}, \qquad \alpha_{11} < \alpha_{21}, \tag{9}$$

в силу которых $g(\theta) > 1$ в $(0, \theta^*)$ и $g(\theta) < 1$ в (θ^*, ∞), т.е. $\theta' > \theta$ в $(0, \theta^*)$ и $\theta' < \theta$ в $(\theta^*; \infty)$. Кроме того, благодаря (7) $\theta' < \theta^*$ в $(0, \theta^*)$ и $\theta' > \theta^*$ в (θ^*, ∞) т.е. эти интервалы инвариантны. Ясно, что итерации отображения (6) в данном случае сходятся к θ^*.

В сверхрецессивном случае выполняются неравенства

$$\alpha_{12} < \alpha_{22}, \qquad \alpha_{11} > \alpha_{21}, \tag{10}$$

в силу которых $g(\theta) > 1$ в $(0, \theta^*)$ и $g(\theta) < 1$ в (θ^*, ∞), т.е. $\theta' < \theta$ в $(0, \theta^*)$ и $\theta' > \theta$ в (θ^*, ∞). Эти интервалы снова оказываются инвариантными, но теперь в правом из них итерации сходятся к нулю, а во втором – к бесконечности.

В промежуточном случае отображение (6) не имеет в $(0, \infty)$ неподвижных точек. Поэтому либо $\theta' < \theta$ при всех $\theta > 0$, либо $\theta' > 0$ при всех $\theta > 0$. Соответственно, либо итерации сходятся к нулю, либо – к бесконечности. Теорема доказана.

Из проведенного доказательства видно, что координата θ (и вместе с ней координата $p = \frac{\theta}{1+\theta}$) монотонно изменяется в процессе эволюции, однако направление изменения может зависеть от начального условия (не зависит в промежуточной ситуации).

Оценим скорость сходимости к равновесию. В силу (7) и соотношения $\alpha_{21}\theta^* + \alpha_{22} = \alpha_{11}\theta^* + \alpha_{12}$ имеем

$$\left.\frac{d\theta'}{d\theta}\right|_{\theta^*} = \frac{\alpha_{11}\theta^* + \alpha_{22}}{\alpha_{21}\theta^* + \alpha_{22}}.$$

Отсюда, благодаря неравенствам (9) в сверхдоминантном случае

$$\left.\frac{d\theta'}{d\theta}\right|_{\theta^*} < 1.$$

В сверхрецессивном случае благодаря неравенствам (10)

$$\left.\frac{d\theta'}{d\theta}\right|_{\theta^*} > 1.$$

В этом же случае

$$\left.\frac{d\theta'}{d\theta}\right|_{0} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}} < 1, \qquad \left.\frac{d\theta'}{d\theta}\right|_{\infty} = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} > 1.$$

В обоих случаях скорость сходимости экспоненциальна.

Переходя к промежуточному случаю, предположим для определенности, что итерации сходятся к нулю. Тогда с необходимостью $\alpha_{12} \le \alpha_{22}$. Если $\alpha_{12} < \alpha_{22}$, то скорость сходимости экспоненциальна. Если $\alpha_{12} = \alpha_{22}$, то в окрестности нуля

$$\theta' = \theta - \frac{\alpha_{21} - \alpha_{11}}{\alpha_{22}}\,\theta^2 + \ldots$$

С необходимостью $\alpha_{21} \geq \alpha_{11}$. Если $\alpha_{21} > \alpha_{11}$, то скорость сходимости степенная (первой степени). Если же $\alpha_{21} = \alpha_{11}$, то отображение (6) вырождается в тождественное, что исключено нашими априорными предположениями.

Рассмотрим теперь динамику средней приспособленности популяции $W = W(p)$ $(0 \le p \le 1)$. В сверхдоминантном случае функция W вогнута

$$\frac{d^2W}{dp^2} = 2\delta(\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 - \lambda_3) < 0.$$

Ее единственным экстремумом (максимумом) на интервале $0 < p < 1$ является точка $\bar{p}$ с проективной координатой

$$\bar{\theta} = \bar{p}/\bar{q} = \frac{a_{12}(\lambda_2 - \lambda_1) + \delta(\lambda_2 - \lambda_3)}{a_{21}(\lambda_1 - \lambda_2) + \delta(\lambda_1 - \lambda_3)} \tag{11}$$

при условии $0 < \bar{\theta} < \infty$. Сопоставляя (11) с (8), мы видим, что, вообще говоря, $\bar{\theta} \ne \theta^*$. Если, например, $\bar{p} < p^*$, то на траекториях, начинающихся и, следовательно, целиком лежащих на $(\bar{p}, p^*)$, средняя приспособленность убывает, тогда как на траекториях, начинающихся на $(p^*, 1)$, она возрастает. Таким образом, фундаментальная теорема нарушается. Аналогично обстоит дело в сверхрецессивном случае. Ясно, что необходимое и достаточное условие справедливости фундаментальной теоремы в целом записывается в виде импликации

$$0 < \bar{\theta} < \infty \implies \bar{\theta} = \theta^*.$$

Фундаментальная теорема существенно используется в доказательстве сходимости всех траекторий под действием отбора в полиаллельной менделевской популяции (см. [2]). Из сказанного ясно, что такой подход не осуществим для общей стационарной генной структуры, однако гипотеза сходимости представляется весьма правдоподобной.

1. Любич Ю.И. Основные понятия и теоремы эволюционной генетики свободных популяций // Успехи мат. наук. – 1971. – 26, № 5. – С. 51–116.
2. Любич Ю.И. Математические структуры в популяционной генетике. – Киев : Наук. думка, 1983.
3. Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности // Учен. зап. н.-и. каф. Украины. – 1924. – Вып. 1. – С. 83–115.

УДК 517.98

А.И.Милославский

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ АБСТРАКТНЫХ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С НАСЛЕДСТВЕННЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

В гильбертовом пространстве рассматривается абстрактная линейная задача Коши

$$\ddot{u} + k\dot{u} + Au + Bu = \int_0^t a(t-\tau)\, Au(\tau)\, d\tau, \qquad t>0,$$

$$u(0) = u_0, \qquad \dot{u}(0) = u_1, \tag{$*$}$$

где $u = u(t)$ – вектор-функция, $k > 0$, оператор A самосопряжен и положителен, операторы A^{-1} и BA^{-1} вполне непрерывны. Изучается устойчивость задачи (ж), ее связь с расположением спектра оператор-функции

$$h(\lambda) = (\lambda^2 + k\lambda) I + A(1 - a(\lambda)) + B.$$

Исследуется вопрос о дестабилизации системы исчезающе малыми силами демпфирования ($k \to 0$, $a(t) \to 0$).

1. Динамика широкого класса неконсервативных упругих систем может быть описана линейным уравнением в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.

$$\ddot{u} + k\dot{u} + Au + Bu = \int_0^t a(t-\tau)\, Au(\tau)\, d\tau, \quad t>0, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1, \tag{2}$$

где $u = u(t)$ – дважды дифференцируемая вектор-функция (в.-ф.) со значениями в $D(A)$ – области определения оператора A. Относительно операторов A, B и ядра $a(t)$ предполагается следующее.

ISBN 5-12-001584-0. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Киев, 1990.

а) Оператор A самосопряжен и положителен, $A^{-1} \in \gamma_\infty$ (γ_∞ – идеал вполне непрерывных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$), оператор B, вообще говоря, несимметрический, вполне подчинен оператору A в том смысле, что $D(B) \supset D(A)$ и $BA^{-1} \in \gamma_\infty$.

б) Оператор $A+B$ представим в виде

$$A+B = QHQ^{-1} + B_0, \tag{3}$$

где Q – ограниченный вместе с обратным оператор, $QD(H) = D(A)$, $H = H^* > 0$, $H^{-1} \in \gamma_\infty$, оператор B_0 вполне подчинен оператору $A^{1/2}$.

в) Ядро $a(t)$ вещественно, $\dot{a}(t),\ ta(t) \in C^1[0,\infty) \cap L_1[0,\infty)$,

$$\dot{a}(t) \in L_1[0,\infty),\ \hat{a}(0) < 1, \quad Im\,\hat{a}(i\omega) < 0 \quad (\omega > 0),$$

где $\hat{a}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} a(t)\,dt$ – преобразование Лапласа функции $a(t)$, $k \geq 0$, $a(0) + k > 0$.

Уравнением (1) описываются, например, малые колебания $u = u(t,x)$ вязкоупругого консольного стержня, находящегося в вязкой среде и сжатого тангенциальной следящей силой (см. [1, 2]). В этом случае операторы A и B действуют по правилам

$$(Ay)(x) = y^{IV}, \quad (By)(x) = \beta y'', \quad 0 < x < 1, \quad \beta\text{-const}, \quad \beta \geq 0,$$

$$y \in D(A) = \{ y \mid y \in W_2^4[0,1],\ y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0 \}.$$

Предположение а) очевидно выполняется, проверка б) опирается на

Замечание 1. Соотношение (3) заведомо справедливо, если $BA^{-1/2} \in \gamma_\infty$, что предполагалось в [3]. Пользуясь результатами работы [4] можно проверить, что самосопряженный вещественный обыкновенный дифференциальный оператор A порядка $2m$ с усиленно регулярными краевыми условиями, возмущенный вещественным дифференциальным оператором B меньшего порядка удовлетворяет условию б).

Требование б) можно ослабить предполагая лишь самосопряженность оператора H.

Неравенства, налагаемые на ядро предположением в) физически оправданы (см. [3]).

Обозначив через $\hat{u}(\lambda)$ преобразование Лапласа в.-ф. $u(t)$, рассмотрим спектральную задачу

$$L(\lambda)x \equiv \left(\lambda^2 I + k\lambda I + A + B - \hat{a}(\lambda) A \right) x = 0, \tag{4}$$

к которой приводит решение задачи Коши (1), (2) операционным методом.

В п. 3 доказаны теоремы о спектре $\sigma(L)$ оператор-функции (о.-ф.) $L(\lambda)$ и о связи между расположением $\sigma(L)$ и устойчивостью задачи (1), (2); в п. 4 рассмотрен случай неизотермического трения

($k \to 0$ $a(t) \to 0$); п. 2 посвящен вспомогательным утверждениям. Основные результаты работы анонсированы в [3].

2. Полагая $v(t) = Q^{-1}u(t)$, $v_{0,1} = Q^{-1}u_{0,1}$,

$$C_0 = Q^{-1}B_0 Q, \quad C_1 = Q^{-1}B_1 Q, \quad B_1 = B - B_0, \tag{5}$$

перепишем задачу Коши (1), (2) в виде

$$\ddot{v} + k\dot{v} + Hv + C_0 v = \int_0^t a(t-\tau)[H - C_1]\, v(\tau)\,d\tau, \quad t > 0, \tag{6}$$

$$v(0) = v_0, \quad \dot{v}(0) = v_1. \tag{7}$$

Лемма 1. Операторы A^α и $(A+B_1)^\alpha = QH^\alpha Q^{-1}$ ($0 \le \alpha \le 1$) эквивалентны в том смысле, что

$$C_1(\alpha)\|A^\alpha x\| \le \|(A+B_1)^\alpha x\| \le C_2(\alpha)\|A^\alpha x\|,$$

где $C_{1,2}(\alpha)$ – некоторые постоянные ($C_2 > C_1 > 0$), $x \in D(A^\alpha) = D((A+B_1)^\alpha)$.

Доказательство леммы основано на одной теореме Като (см. [5, с. 231]). Подробности опускаются.

В силу леммы 1 операторы $C_{0,1}$ (5) обладают свойствами

$$K_0 = C_0 H^{-1/2} \in \gamma_\infty, \quad K_1 = C_1 H^{-1} \in \gamma_\infty. \tag{8}$$

Делая замену $\dot{v} = w_1$, $H^{1/2}v = w_2$, перепишем уравнения (6), (7) в виде

$$\dot{x} = Fx + \int_0^t a(t-\tau)\, Gx(\tau)\,d\tau, \quad t > 0, \quad x(0) = x_0, \tag{9}$$

где

$$x = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -kI & -H^{1/2} - K_0 \\ H^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} 0 & H^{1/2} - K_1 H^{1/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно [6] задача Коши (9) равномерно корректна, т.е. $\forall x_0 \in D(F) = D(H^{1/2}) \oplus D(H^{1/2})$ существует единственное решение $x(t)$ такое, что $\dot{x}(t)$ и $Fx(t)$ непрерывны при $t \ge 0$, представимое в виде $x(t) = R(t)x_0$, где $R(t)$ – ограниченная о.-ф., сильно непрерывная по t ($t \ge 0$), $R(0) = I$. Кроме того, в.-ф. $\dot{x}(t)$ и $Fx(t)$ растут при $t \to \infty$ не быстрее экспоненты. Делая обратные замены, получим равномерную корректность задачи Коши (1), (2) с $u_0 \in D(A)$, $u_1 \in D(A^{1/2})$ в энергетической норме $|\cdot|$ ($|u(t)|^2 = \|\dot{u}(t)\|^2 + \|A^{1/2}u(t)\|^2$). Каждое слагаемое в уравнении (1) непрерывно при $t \ge 0$ и растет при $t \to \infty$ не быстрее экспоненты.

Лемма 2. Положим $\varphi(\lambda)=a+b\lambda+c\lambda^2-\hat{n}(\lambda)$, где $a>0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$, $\hat{n}(\lambda)$ – преобразование Лапласа вещественной функции $n(t)$ $(n(t),\ tn(t)\in L_1[0,\infty))$. Предположим, что $\varphi(0)>0$ и $Im\varphi(i\omega)>0\ (\omega>0)$. Тогда $\varphi(\lambda)\neq 0$ при $Re\,\lambda\geq 0$.

Доказательство леммы основано на теореме Руше и приведено в [7]. Пользуясь условием в), представим $\hat{a}(\lambda)$ в виде

$$\hat{a}(\lambda)=a_0\lambda^{-1}+a_1(\lambda)\lambda^{-1}, \tag{9}$$

где $a_0=a(0)$, $a_1(\lambda)=\hat{\dot{a}}(\lambda)$, причем $a_1(\lambda)\to 0$ при $|\lambda|\to\infty$, $Re\,\lambda\geq 0$. Полагая в (9) $\lambda=i\omega$ и устремляя $\omega\to\infty$, в силу в) получаем $a_0\geq 0$. Считая $a_0>0$ и выбирая $c>0$, представим о.-ф. $N(\lambda)\equiv QU(\lambda)Q^{-1}$ в виде

$$N(\lambda)=\lambda^2 I+k\lambda I+H\left(1-\frac{a_0}{\lambda+c}\right)+C_0+\hat{a}(\lambda)C_1-\frac{a_2(\lambda)}{\lambda}H, \tag{10}$$

где $a_2(\lambda)=ca_0(\lambda+c)^{-1}+a_1(\lambda)\to 0$ при $|\lambda|\to\infty$, $Re\,\lambda\geq 0$. Положим

$$M(\lambda)=\lambda(\lambda+k)(\lambda+c)I+(\lambda+\gamma^2\lambda+c)S^2, \tag{11}$$

где $\gamma^2=a_0c^{-1}<1$, $S^2=(1-\gamma^2)H$ – самосопряженный положительный оператор.

Через $\mathcal{H}^2(\mathfrak{H})$ обозначим пространство Харди в.-ф. в полуплоскости $\{\lambda\,|\,Re\,\lambda>0\}$. Норму в $\mathcal{H}^2(\mathfrak{H})$ обозначим $\|\cdot\|_2$. Используемые в работе свойства пространства $\mathcal{H}^2(\mathfrak{H})$ можно найти в [8, 9].

Рассмотрим пучок $M(\lambda)$ (11), где $c>0$, $\gamma>0$, $k\geq 0$, $S=S^*>0$. Положим

$$M_1(\lambda)=\lambda^2M^{-1}(\lambda),\quad M_2(\lambda)=S^2M^{-1}(\lambda),\quad M_3(\lambda)=\lambda SM^{-1}(\lambda). \tag{12}$$

Лемма 3. 1) О.-ф. $M_k(\lambda)$ $(k=1,2,3)$ определены при $Re\,\lambda\geq 0$ и ограничены при $Re\,\lambda\geq 0$ постоянной $m>0$. 2) В.-ф. $M_k(\lambda)x\in\mathcal{H}^2(\mathfrak{H})$, причем

$$\|M_k(\lambda)x\|_2\leq m\|x\|,\qquad \forall x\in\mathfrak{H},\quad k=1,2,3. \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{z}=Tz,\quad t>0,\quad z(0)=z_0 \tag{14}$$

в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}^3=\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$, где $T=T_0+T_1$,

$$z=\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}0 & -S & 0\\ S & -kI & -\gamma S\\ 0 & \gamma S & -cI\end{pmatrix},\quad T_0=\begin{pmatrix}0 & -S & 0\\ S & 0 & -\gamma S\\ 0 & \gamma S & 0\end{pmatrix} \tag{15}$$

Резольвента $(T-\lambda I)^{-1}$ оператора T задается матрицей с элементами $T_{ij}(\lambda)$ $(i,j=1,2,3)$, где

$$T_{11}=-[(\lambda+c)(\lambda+k)I+\gamma^2 S^2]M^{-1}(\lambda), \qquad T_{22}=-\lambda(\lambda+c)M^{-1}(\lambda),$$

$$T_{33}=-[\lambda(\lambda+k)I+S^2]M^{-1}(\lambda), \qquad T_{12}=-T_{21}=(\lambda+c)SM^{-1}(\lambda),$$

$$T_{13}=T_{31}=-\gamma S^2 M^{-1}(\lambda), \qquad T_{23}=T_{32}=-\gamma\lambda SM^{-1}(\lambda). \tag{16}$$

Оператор T_0 кососамосопряжен, порождает унитарную C_0-группу, оператор T порождает C_0-полугруппу $exp(tT)$, поскольку отличается от T_0 на ограниченный оператор T_1. В силу диссипативности оператора T полугруппа $exp(tT)$ сжимающая. Получим оценку

$$\| exp(tT)z_0 \| \le m_0 \, exp(-\varkappa t) \| z_0 \|, \qquad t \ge 0 \tag{17}$$

с некоторыми положительными постоянными m_0, $\varkappa$. Рассмотрим для этого функцию Ляпунова $(\varepsilon>0,\ \delta>0)$

$$V(z)=\|z\|^2-\varepsilon Re(u,S^{-1}v)-\delta Re(w,S^{-1}v). \tag{18}$$

Для малых ε, δ $(s^2\varepsilon^2<0.5,\ \ s^2\delta^2<0.5,\ s=\|S^{-1}\|)$ справедливо неравенство

$$0.5\|z\|^2 \le V(z) \le 1.5\|z\|^2, \qquad z\in \mathcal{H}^3. \tag{19}$$

Дифференцируя $V(z)$ в силу уравнения (14), имеем

$$-\dot V(z)=Re\{\varepsilon\|u\|^2+(2k+\delta\gamma-\varepsilon)\|v\|^2+(2c-\gamma\delta)\|w\|^2$$

$$-\varepsilon k(u,S^{-1}v)+(\delta-\varepsilon\gamma)(u,w)-\delta(c+k)(v,S^{-1}w)\}. \tag{20}$$

Полагая $\varepsilon=h\delta$, где $h>0$, $h<\gamma$, $h<\gamma^{-1}$, $\delta<2c\gamma^{-1}$, оценим снизу правую часть равенства (20):

$$-\dot V(z)\ge h\delta\|u\|^2+\delta(\gamma-h)\|v\|^2+(2c-\gamma\delta)\|w\|^2$$

$$-\delta ks\|u\|\|v\|-\delta(1-\gamma h)\|u\|\|w\|-\delta(c+k)s\|v\|\|w\| =$$

$$=3^{-1}[h\delta\|u\|^2+\delta(\gamma-h)\|v\|^2+(2c-\gamma\delta)\|w\|^2]+$$

$$+\delta 3^{-1}[h\|u\|^2+(\gamma-h)\|v\|^2-3skh\|u\|\|v\|]+$$

$$+3^{-1}[(2c-\gamma\delta)\|w\|^2+h\delta\|u\|^2-3\delta(1-\gamma h)\|u\|\|w\|]+$$

$$+3^{-1}[(2c-\gamma\delta)\|w\|^2+\delta(\gamma-h)\|v\|^2-3\delta(c+k)s\|v\|\|w\|]$$

$$=W_0+W_1+W_2+W_3, \tag{21}$$

где W_k $(0\le k\le 3)$ — квадратичные относительно $\|u\|$, $\|v\|$, $\|w\|$

Выбирая h достаточно малым, имеем: $w_1 \geq 0$. При фиксированном h за счет уменьшения δ получим: $w_{2,3} \geq 0$, $w_0 \geq \varkappa_0 \|x\|^2$, где $\varkappa_0 = \varkappa_0(\delta, h) > 0$. Учитывая эти неравенства, в силу (21) имеем

$$\dot V(x) \,/\, V(x) \leq -2\varkappa, \tag{22}$$

где $\varkappa = \varkappa_0\, 3^{-1}$. Интегрируя неравенство (22), с учетом (19) получим

$$\|exp(tT)z_0\| = \|z(t)\| \leq \sqrt{2V(z)} \leq \sqrt{2exp(-2\varkappa t)V(z_0)} \leq \sqrt{3}\, exp(-\varkappa t)\|z_0\|, \quad t \geq 0.$$

Неравенство (17) с $m_0 = \sqrt{3}$ выведено. Из неравенства (17) получаем обратимость оператора $T - \lambda I$ при $Re\,\lambda > -\varkappa$, причем, как известно (см., например, [5]),

$$(T - \lambda I)^{-1} = \int_0^\infty exp\,(tT)\; exp\,(-\lambda t)\, dt. \tag{23}$$

Используя неравенство (17), оценим интеграл (23):

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq m_0 \varkappa^{-1}, \qquad Re\,\lambda \geq 0.$$

Применяя это неравенство к элементам матрицы $T_{ij}(\lambda)$ $(i,j = 1,2,3)$ (16), получим первое утверждение леммы. В силу оценки (17) в.-ф. $z(t) \in \mathcal{L}_2(\mathcal{G}_y^3)$, $\forall z_0 \in \mathcal{G}_y^3$. С помощью теорем Пэли – Винера и Планшереля получим $z(\lambda) \in \mathcal{H}^2(\mathcal{G}_y^3)$, причем

$$\|(T - \lambda I)^{-1} z_0\|_2 = \|\hat z(\lambda)\|_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \|z(t)\|_{\mathcal{L}_2} \leq \frac{m_0}{\sqrt{\pi\varkappa}}\, \|z_0\|. \tag{24}$$

Неравенство (24), расписанное поэлементно, приводит к оценке (13). Лемма доказана.

Лемма 4. Для операторов $C_{0,1}$, удовлетворяющих (8), справедливо соотношение

$$lim\,\|C_k \lambda^{1-k} M^{-1}(\lambda)\| = 0, \quad |\lambda| \to \infty, \quad Re\,\lambda \geq 0, \quad k = 0,1. \tag{25}$$

Доказательство, основанное на одном приеме А.С.Маркуса [10], приведено в [7].

3. Теорема 1. 1) Множество $\sigma_+(L) = \sigma(L) \cap \{\lambda \mid Re\,\lambda > 0\}$ состоит из изолированных точек. 2) Множество $\sigma_+(L)$ ограничено, то есть, $\forall \lambda \in \sigma_+(L)$ имеем: $|\lambda| \leq R$, где R – некоторое положительное число. 3) В окрестности $\lambda_0 \in \sigma_+(L)$ справедливо разложение

$$N^{-1}(\lambda) = H^{-1}\left(\sum_{n=1}^{n(\lambda_0)} (\lambda - \lambda_0)^{-n} H_n + H_0(\lambda)\right), \tag{26}$$

в котором операторы H_n $(n = 1, \ldots, n(\lambda_0))$ конечномерны, ограничен-
ны

ная о.-ф. $H_0(\lambda)$ голоморфна в точке λ_0. 4) Имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}{}' \|\hat{x}(\sigma+i\tau)\|^2 d\tau \le m_0 \|x_0\|^2 \qquad (\sigma>0), \tag{27}$$

где $\hat{x}(\lambda)$ – преобразование Лапласа решения $x(t)$ задачи Коши (9). Под интегралом со штрихом понимается интеграл по промежутку $(-\infty,-R)\cup(R,+\infty)$, если $0\le\sigma\le R$; в случае $\sigma>R$ интеграл берется по $(-\infty,\infty)$.

Доказательство. Так как пучки $L(\lambda)$ и $N(\lambda)$ (10) подобны, то докажем утверждения 1, 2 для пучка $N(\lambda)$. Полагая

$$T(\lambda)=T_1(\lambda)+T_2(\lambda)+T_3(\lambda),$$

где

$$T_1(\lambda)=(\lambda+c)K_0H^{1/2}M^{-1}(\lambda), \qquad T_2(\lambda)=-(1+c\lambda^{-1})a_2(\lambda)HM^{-1}(\lambda),$$

$$T_3(\lambda)=(1+c\lambda^{-1})(a_0+a_1(\lambda))K_1HM^{-1}(\lambda), \qquad K_{01}\in\Gamma_\infty,$$

представим $N(\lambda)$ (10) в виде

$$N(\lambda)=[I+T(\lambda)](\lambda+c)^{-1}M(\lambda). \tag{28}$$

В силу лемм 3, 4 и соотношения $\lim a_k(\lambda)=0(|\lambda|\to\infty,\ Re\,\lambda\ge0,\ k=1,2)$ о.-ф. $T(\lambda)$ определена при $Re\,\lambda\ge0,\ \lambda\ne0$, голоморфна при $Re\,\lambda>0$ и стремится к нулю по норме $|\lambda|\to\infty,\ Re\,\lambda\ge0$. Найдется $R>0$ такое, что при $Re\,\lambda\ge0,\ |\lambda|>0.5R$ выполняется неравенство $\|T(\lambda)\|<0.5$; отсюда и из формулы (28) получается обратимость о.-ф. $N(\lambda)$. Утверждение 2) доказано.

Пользуясь тождеством $(I+T)^{-1}=I-(I+T)^{-1}T$, представим $N^{-1}(\lambda)$ в виде

$$N^{-1}(\lambda)=(\lambda+c)M^{-1}(\lambda)-(\lambda+c)M^{-1}(\lambda)[I+T(\lambda)]^{-1}T(\lambda). \tag{29}$$

В силу леммы 3 справедливы неравенства $(\lambda=\sigma+i\tau,\ \sigma>0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}{}'\|T(\lambda)x\|^2d\tau\le m_1\|x\|^2,\quad \int_{-\infty}^{\infty}{}'\|\lambda T(\lambda)H^{-1/2}x\|^2d\tau\le m_1\|x\|^2, \tag{30}$$

где постоянная $m_1>0$ не зависит от σ и $x\in\mathcal{H}$. Преобразуя уравнение (9) по Лапласу, для $x_0\in D(F)$ получаем

$$\hat{x}(\lambda)=\Pi^{-1}(\lambda)x_0\equiv\left(\lambda I-F-\hat{a}(\lambda)G\right)^{-1}x_0,\quad Re\,\lambda>\omega_0. \tag{31}$$

Непосредственные вычисления приводят к формуле

$$\Pi^{-1}(\lambda)=\begin{pmatrix}\Pi_{11}&\Pi_{12}\\ \Pi_{21}&\Pi_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda N^{-1}(\lambda)-[I+K_0H^{-1/2}+a(\lambda)(I-K_1)HN^{-1}(\lambda)H^{-1/2}\\ H^{1/2}N^{-1}(\lambda)\quad(\lambda+k)H^{1/2}N^{-1}(\lambda)H^{-1/2}\end{pmatrix}. \tag{32}$$

Так как о.-ф. $\Pi^{-1}(\lambda)$ определена при $Re\,\lambda \geqslant 0,\ |\lambda| > 0{,}5R$, то и $\hat{x}(\lambda)$ (31) аналитически продолжается в эту область. Пользуясь формулой (29), обозначениями (10), (12), имеем

$$\lambda(\lambda+c)^{-1}\Pi_{11} = M_1(\lambda) - M_1(\lambda)\,(I+T)^{-1}\,T(\lambda), \quad \lambda(\lambda+c)\,\Pi_{21} =$$

$$= (1-\gamma^2)^{-1/2}\left[M_3(\lambda) - M_3(\lambda)\,(I+T)^{-1}T\right], \quad \lambda^2(\lambda+c)^{-1}(\lambda+k)^{-1}\Pi_{22} =$$

$$= M_1(\lambda) - (1-\gamma^2)^{-1/2}\,M_3(\lambda)\,(I+T)^{-1}\lambda\,T(\lambda)\,H^{-1/2}, \tag{33}$$

$$\lambda(\lambda+c)^{-1}\,\Pi_{12} = -\left[I + K_0 H^{-1/2} + a(\lambda)\,(I-K_1)\right] \times$$

$$\times\left[(1-\gamma^2)^{-1/2}M_3(\lambda) - (1-\gamma^2)^{-1}M_2(\lambda)\,(I+T)^{-1}\lambda T(\lambda))\,H^{-1/2}\right].$$

Доказательство утверждения 4) получается из леммы 3, неравенства $\|(I+T)^{-1}\| \leqslant 2$ $(Re\,\lambda \geqslant 0,\ |\lambda| > 0{,}5R)$ и формул (30)-(33).

В силу предположения в) функция $\varphi(\lambda) = 1-\hat{a}(\lambda)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Применяя ее, получим: $\varphi(\lambda) \neq 0,\ Re\,\lambda \geqslant 0$. Полагая

$$N_0(\lambda) = (\lambda^2+k\lambda)I + (1-\hat{a}(\lambda))\,H, \qquad b(\lambda) = (1-\hat{a}(\lambda))^{-1},$$

$$z(\lambda) = b(\lambda)\,(\lambda^2+k\lambda),$$

замечаем, что $\arg z(\lambda) \neq \pi$ $(Re\,\lambda \geqslant 0)$. Действительно, в противном случае при некотором $r > 0$ функция $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + k\lambda + r - r\hat{a}(\lambda)$ имеет корень в полуплоскости $\{\lambda \mid Re\,\lambda \geqslant 0\}$, что противоречит лемме 2. Отсюда получаем обратимость о.-ф. $N_0(\lambda)$ при $Re\,\lambda \geqslant 0$ и формулу

$$N_0^{-1}(\lambda) = b(\lambda)\left(I + z(\lambda)\,H^{-1}\right)^{-1}H^{-1}. \tag{34}$$

Представим о.-ф. $N(\lambda)$ в виде

$$N(\lambda) = \left[I + T_0(\lambda)\right]N_0(\lambda), \tag{35}$$

где $T_0(\lambda) = K_0 H^{1/2} N_0^{-1}(\lambda) + a(\lambda)\,K_1 H N_0^{-1}(\lambda)$ – голоморфная при $Re\,\lambda \geqslant 0$ о.-ф., в силу (8), (34) принимающая значения в γ_∞. Согласно уже доказанному утверждению 2) о.-ф. $N(\lambda)$ обратима при $Re\,\lambda \geqslant 0$, $|\lambda| > 0{,}5R$. Согласно формуле (35) при этих же λ обратима и о.-ф. $I + T_0(\lambda)$. Применяя к ней теорему Гохберга [11, с.39], получим утверждение 1) о дискретности спектра. Представляя о.-ф. $N(\lambda)$ в виде

$$N(\lambda) = \left[I + K(\lambda)\right](1-\hat{a}(\lambda))\,H$$

и применяя к голоморфной при $Re\,\lambda \geqslant 0$ о.-ф. $I + K(\lambda)$, где $K(\lambda) = T_0(\lambda) + z(\lambda)\,(I+T_0)\,H^{-1} \in \gamma_\infty$ теорему Гохберга – Сигала [12], получаем формулу (26). Теорема доказана.

Теорема 2. 1) Если $\sigma_+(L) \neq \emptyset$ то задача Коши (1), (2) неустойчива, так как найдется неограниченно растущее решение уравнений (1), (2) при $t \to \infty$. 2) Если в полуплоскости $\{\lambda \mid Re\,\lambda \geq 0\}$ задача (4) имеет лишь нулевое решение, то задача Коши (1), (2) асимптотически устойчива в энергетической норме:

$$|u(t)|^2 = \|\dot u(t)\|^2 + \|A^{1/2}u(t)\|^2 \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{36}$$

Кроме того,

$$\int_0^\infty |u(t)|^2\,dt \leq m_1^2 |u(0)|^2, \qquad |u(t)| \leq m_1 |u(0)|, \tag{37}$$

где постоянная $m_1 > 0$ не зависит от начальных условий, $|u(0)|^2 = \|u_1\|^2 + \|A^{1/2}u_0\|^2$.

Доказательство. Если $\sigma_+(L) = \sigma_+(N) \neq \emptyset$, то в силу теоремы 1 найдется прямая $l = \{\lambda \mid Re\,\lambda = \alpha > 0\}$ такая, что $l \cap \sigma_+(N) = \emptyset$ и в полуплоскости $\{\lambda \mid Re\,\lambda < \alpha\}$ имеется конечное непустое множество $\{\lambda_k\}_{k=1}^{k_0} \in \sigma_+(N)$. Пользуясь формулами (26), (32), представим $\Pi^{-1}(\lambda)$ $(Re\,\lambda \geq \alpha)$ в виде

$$\Pi^{-1}(\lambda) = \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{n=1}^{n(k)} \frac{E_{nk}}{(\lambda - \lambda_k)^n} + E(\lambda), \tag{38}$$

где E_{nk} – конечномерные операторы, о.-ф. $E(\lambda)$ голоморфна при $Re\,\lambda \geq \alpha$. Выберем вектор $x \in \mathcal{G}_\eta^2$. таким, что $E_{nk}\,x \neq 0$, хотя бы для одной пары индексов n, k. В силу представления (38) и утверждения 4) теоремы 1 в.-ф. $E(\alpha+\lambda)x \in \mathcal{H}^2(\mathcal{G}_\eta^2)$. Применяя теорему Пэли – Винера, получим $E(\alpha+\lambda)x = \widehat{(e^{\alpha t}\;y(t))}$, где $y(t) \in \mathcal{L}_2(\mathcal{G}_\eta^2)$. Пользуясь формулами (32), (38), найдем решение $x(t)$ задачи (9), представимое в виде $(Re\,\lambda_k > \alpha)$

$$x(t) = \sum_{k=1}^{k_0} e^{\lambda_k t} \sum_{n=1}^{n(k)} \left((n-1)!\right)^{-1} t^{n-1} E_{n,k}\, x + e^{\alpha t}\, y(t). \tag{39}$$

Из формулы (39) получаем утверждение 1 теоремы 2.

Для доказательства второго утверждения заметим, что из предположений теоремы, формул (34), (35) вытекает обратимость о.-ф. $N(\lambda)$ при $Re\,\lambda \geq 0$. В силу непрерывности о.-ф. $HN^{-1}(\lambda)$ при $Re\,\lambda \geq 0$, формул (31), (32) и утверждения 4) теоремы 1 имеем $\hat x(\lambda) \in \mathcal{H}^2(\mathcal{G}_\eta^2)$, откуда с помощью теоремы Пэли – Винера, формулы Планшереля и единственности преобразования Лапласа получим

$$\int_0^\infty \left(\|\dot v(t)\|^2 + \|H^{1/2}v(t)\|^2\right)dt = \|x(t)\|^2_{\mathcal{L}_2} = \frac{\pi}{2}\,\|\hat x(\lambda)\|_2^2 \leq$$

$$\leq m_2 \|x_0\|^2 = m_2\left(\|v_1\|^2 + \|H^{1/2}v_0\|^2\right). \qquad (40)$$

Из неравенства (40) и эквивалентности операторов $A^{1/2}$ и $(A+B_1)^{1/2} = QH^{1/2}Q^{-1}$ следует первая из оценок (37).

Домножая уравнение (6) скалярно на $\dot v$, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\|\dot v\|^2 + \|H^{1/2}v\|^2\right) + 2k\|\dot v\|^2 = 2Re\left\{(w, \dot v) - (K_0 H^{1/2}v, \dot v)\right\}, \qquad (41)$$

где $w(t) = \int_0^t a(t-\tau)(I-K_1)Hv(\tau)\,d\tau$. Покажем, что правая часть формулы (41) принадлежит $L_1[0,\infty)$. В силу (40), ограниченности оператора K_0, теоремы Пэли – Винера для этого достаточно убедиться в справедливости соотношений

$$\hat{w}(\lambda) = \hat{a}(\lambda)(I-K_1)H\hat{v}(\lambda) \in \mathcal{H}^2(\mathcal{H}), \quad \|\hat{w}(\lambda)\|_2^2 \leq m_2 |v(0)|^2. \qquad (42)$$

Преобразуя уравнение (6) по Лапласу, имеем

$$\hat{w}(\lambda) = \hat{a}(\lambda)(I-K_1)HN^{-1}(\lambda)(v_1 + \lambda v_0 + kv_0) =$$

$$= (a_0 + a_1(\lambda))(I-K_1)HN^{-1}(\lambda)\left(\lambda^{-1}v_1 + (1+k\lambda^{-1})H^{-1/2}H^{1/2}v_0\right).$$

Пользуясь формулой (29), леммой 3, как при доказательстве теоремы 1, получим соотношения (42). Интегрируя (41), имеем

$$\|\dot v(t)\|^2 + \|H^{1/2}v(t)\|^2 + 2k\int_0^t \|\dot v(\tau)\|^2 d\tau = \|v_1\|^2 + \|H^{1/2}v_0\|^2 +$$

$$+ 2Re\int_0^t \left[(w(\tau), \dot v(\tau)) - (K_0 H^{1/2}v(\tau), \dot v(\tau)\right] d\tau. \qquad (43)$$

В силу интегрируемости подынтегрального выражения в правой части формулы (43), существует предел при $t\to\infty$ в левой части равенства (43). Так как $k\|\dot v(\tau)\| \geq 0$, то существует $\lim \int_0^t k\|\dot v(\tau)\|d\tau$ при $t\to\infty$. Отсюда получается существование $\lim\left(\|\dot v(t)\|^2 + \|H^{1/2}v(t)\|^2\right)$ при $t\to\infty$, причем в силу неравенства (40) этот предел равен нулю. Соотношение (36) доказано. Переходя к оценкам в (43), с помощью (42) получаем

$$\|\dot v(t)\|^2 + \|H^{1/2}v(t)\|^2 \leq \|v_1\|^2 + \|H^{1/2}v_0\|^2 +$$

$$+ \int_0^\infty \left(\|w(t)\|^2 + (1+\|K_0\|)\|\dot v(t)\|^2 + \|K_0\|\,\|H^{1/2}v(t)\|^2\right)dt <$$

$$< m_3\left(\|v_1\|^2 + \|H^{1/2}v_0\|^2\right), \quad t\geq 0. \qquad (44)$$

Неравенство (44) с учетом эквивалентности операторов $A^{1/2}$ и $(A+B_1)^{1/2}$ приводит ко второй из оценок (37). Теорема доказана.

Следствие. Предположим дополнительно ограниченность оператора $BA^{-1/2}$. Если $\delta = \| BA^{-1/2} \|$ достаточно мало, то справедливы соотношения (36), (37).

Д о к а з а т е л ь с т в о. При доказательстве теоремы 1 установлена обратимость о.-ф. $L_0(\lambda) = (\lambda^2 + k\lambda) I + (1 - \hat{d}(\lambda)) A$ при $Re\lambda \geq 0$. В силу формулы

$$L(\lambda) = (I + BA^{-1/2} A^{1/2} L_0^{-1}(\lambda)) L_0(\lambda) \tag{45}$$

для доказательства следствия достаточно неравенства

$$\| A^{1/2} L_0^{-1}(\lambda) \| \leq c < \infty, \qquad Re\lambda \geq 0. \tag{46}$$

Пользуясь тождеством для Π_{21} (33), где $H = A$, $K_0 = K_1 = 0$ и леммой 3, получим неравенство (46) для $Re\lambda \geq 0$, $|\lambda| \geq R$. Для остальных λ это неравенство следует из непрерывности о.-ф. $A^{1/2} L_0^{-1}(\lambda)$ при $Re\lambda \geq 0$. Выбирая $\delta c < 1$, в силу формулы (45) получаем обратимость о.-ф. $L(\lambda)$. Для окончания доказательства осталось применить теорему 2.

4. В теореме 3 используются понятия и обозначения, введенные в [3].

<u>Теорема 3.</u> 1) Справедливо неравенство $\beta_{**} \leq \beta_*$. 2) Если при $\beta = \beta_*$ система (1) ([3]) теряет устойчивость по типу "флаттера", то $\beta_{**} < \beta_*$. 3) Если дополнительно предположить, что при некотором β_0 ($0 < \beta_0 < \beta_*$) выполняется неравенство

$$\omega^{-1} Jm\, \hat{a}(i\omega) \left[\omega^2 - \frac{d\omega^2}{d\beta} \right] > k, \tag{47}$$

где $\omega = \omega(\beta) = -i\lambda_N(\beta)$, то справедливо неравенство $\beta_{**} \leq \beta_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 2 для доказательства теоремы 3 достаточно исследовать поведение спектра задачи

$$L(\beta, \varepsilon, \lambda) \equiv \left[(\lambda^2 + \varepsilon k \lambda) I + (1 - \varepsilon \hat{a}(\lambda)) A + \beta B \right] x = 0. \tag{48}$$

При $\varepsilon = 0$, $\beta = \beta_* + \delta$ ($\delta > 0$) уравнение (48) имеет в правой полуплоскости изолированную точку спектра $\lambda_0(\delta)$ конечной алгебраической кратности. Согласно теории возмущений [13, 14] при малых $\varepsilon > 0$ уравнение (48) имеет решение $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ в окрестности $\lambda_0(\delta)$ аналитически зависящее от $\varepsilon^{1/p}$ (p – натуральное число), значит при малых $\varepsilon > 0$ уравнение (48) имеет точку спектра в правой полуплоскости. Применяя теорему 2, получим неравенство $\beta_{**} \leq \beta_*$

Для доказательства утверждения 3) перепишем уравнение (18) в виде

$$\left[\frac{\lambda^2 + \varepsilon k \lambda}{1 - \varepsilon \hat{a}(\lambda)} I + A + \frac{\beta}{1 - \varepsilon \hat{a}(\lambda)} B \right] x = 0. \tag{49}$$

В случае потери устойчивости по типу "флаттера" при $\beta \in [0, \beta_0]$ собственное число $\lambda_N(\beta) = i\omega(\beta)$ задачи (2) ([3]) является аналитической функцией β, причем β может принимать комплексные значения, близкие к интервалу $[0, \beta_0]$. В силу предположения в) функция $\hat{a}(\lambda)$ непрерывно дифференцируема при $Re\,\lambda \geqslant 0$. Продолжим ее в левую полуплоскость так, чтобы продолженная функция была непрерывно дифференцируемой во всей плоскости. Для этого достаточно положить $\hat{a}(\lambda) = 2\hat{a}(Jm\,\lambda) - \hat{a}(-\bar{\lambda})$ для $Re\,\lambda < 0$. Согласно теореме о неявной функции уравнение

$$\Phi_\beta(\lambda, \varepsilon) \equiv \frac{\lambda^2 + \varepsilon k \lambda}{1 - \varepsilon \hat{a}(\lambda)} + \omega^2 \left(\frac{\beta}{1 - \varepsilon \hat{a}(\lambda)} \right) = 0 \qquad (50)$$

имеет при малых ε непрерывно дифференцируемое по ε решение $\lambda = \lambda_\beta(\varepsilon)$ $(\lambda(0) = \lambda_N(\beta))$, так как $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 2\lambda_N(\beta) \neq 0$ при $\varepsilon = 0$ и $\lambda = \lambda_N(\beta)$. Дифференцируя по ε уравнение (50), найдем

$$2Re \left. \frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon = 0} = \omega^{-1} Jm\, \hat{a}(i\omega) \left[\omega^2 - \frac{d\omega^2}{d\beta} \right] - k.$$

В силу неравенства (47) при малых $\varepsilon > 0$ и $\beta \leqslant \beta_0$ уравнение (50) имеет точку спектра в правой полуплоскости. Применяя теорему 2, получаем неравенство $\beta_{**} \leqslant \beta_0$.

Докажем утверждение 3). Так как при $\beta = \beta_*$, сливаются ровно два собственных числа ω_N^2 и ω_{N+1}^2 $(\omega_{N+1}^2(\beta) > \omega_N^2(\beta)$ при $0 \leqslant \beta < \beta_*)$ вещественного оператора $A + \beta B$, то, согласно теории возмущений, при малых $\delta = \beta_* - \beta > 0$

$$\omega_N^2(\beta) = \omega_N^2(\beta_*) - \mathcal{R}\, \delta^{1/2} + O(\delta), \qquad \mathcal{R} > 0. \qquad (51)$$

Из соотношения (51) следует, что $\frac{d\omega_N^2}{d\beta} \to -\infty$ при $\beta \to \beta_* - 0$, поэтому при β близких к β_* неравенство (47) заведомо выполняется. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. При доказательстве теоремы 3 дополнительно предполагалось, что пространство $\mathcal{H}$ является комплексификацией некоторого вещественного пространства $\mathcal{H}_0$, операторы A и B действуют в $\mathcal{H}_0$ и естественно доопределяются в $\mathcal{H}$. Кроме того предполагалось, что оператор $A + \beta B$ для любого $\beta > 0$ представим в виде (3) с некоторыми $Q = Q(\beta)$, $H = H(\beta)$, $B_0 = B_0(\beta)$.

Замечание 3. Можно показать, что ограничение $a(0) > 0$, введенное перед доказательством леммы 3, несущественно.

1. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О влиянии внутреннего трения на устойчивость одномерных упругих систем // Динамика систем. - 1975. - Вып. 5. - С. 44-52.

2. Воловин И.И., Громов В.Г. Устойчивость консольного вязкоупру-

гого стержня, загруженного следящей силой // Изв. АН СССР. Сер. МТТ. – 1976. – № 4. – С. 179–182.
3. Милославский А.И. О дестабилизирующем воздействии малого демпфирования на абстрактные неконсервативные системы // Успехи мат. наук. – 1986. – 41, вып. 1. – С. 199–200.
4. Маркус А.С., Мацаев В.И. О сходимости разложений по собственным векторам оператора, близкого к самосопряженному // Линейные операторы и интегральные уравнения : Мат. исследования. – 1981. – Вып. 61. – С. 102–129.
5. Красносельский М.А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. – М. : Наука, 1966. – 512 с.
6. Miller R.K. Volterra integral equations in a Banach space // Funk. Ekvac. – 1975. – N 18. – P. 163–193.
7. Милославский А.И. Об устойчивости интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в вязкоупругости // Деп. в УкрНИИНТИ 13.04.87, № 1226. – Ук87.
8. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М. : Мир, 1970. – 480 с.
9. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. – М. : Изд-во иностр. лит., 1963. – 311 с.
10. Маркус А.С. Некоторые критерии полноты системы корневых векторов линейного оператора в банаховом пространстве // Мат. сб. – 1966. – 70, № 4. – С. 526–560.
11. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М. : Наука, 1965. – 499 с.
12. Гохберг И.Ц., Сигал Е.И. Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше // Мат. сб. – 1971. – 84, № 4. – С. 607–630.
13. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М. : Мир, 1972. – 652 с.
14. Ени В.М. Об устойчивости корневого числа аналитической оператор-функции и возмущениях ее характеристических чисел и собственных векторов // Докл. АН СССР. – 1967. – 173, № 6. – С. 1251–1254.

УДК 517.982

М.И.Островский

ОБ ОДНОСТОРОННЕ ОБРАТИМЫХ ОПЕРАТОРАХ

Рассматривается вопрос: для каких банаховых пространств X из обратимости сопряженного оператора $A^* \in L(X^*)$ слева (справа) вытекает обратимость оператора $A \in L(X)$ справа (слева). То, что в пространстве X выполнено это условие, записывается так: $X \in LR$ $(X \in RL)$.

Из полученных результатов вытекают следствия для классических банаховых пространств: 1) $L_1(S, \Sigma, \mu) \in LR$ тогда и только тогда, когда μ – чисто атомная мера; 2) для метризуемых компактов K имеет место альтернатива: либо $C(K)$ изоморфно c_0 и принадлежит RL, либо $C(K) \notin RL$; 3) все сопряженные пространства и все пространства $L_1(S, \Sigma, \mu)$ принадлежат RL.

1. Пусть X, Y – банаховы пространства, $L(X, Y)$ – пространство ограниченных линейных операторов, действующих из X в Y

ISBN 5-12-001584-0. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Киев, 1990.

(вместо $\mathcal{L}(X, X)$ будем писать $\mathcal{L}(X)$). Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ называется обратимым справа (слева), если для некоторого $D \in \mathcal{L}(Y, X)$ имеет место равенство $AD = \dot{I}_Y$ $(DA = \dot{I}_X)$, где $\dot{I}_X, \dot{I}_Y$ – тождественные операторы в X, Y.

Из формулы $(AD)^* = D^* A^*$ следует, что обратимость оператора A справа (слева) влечет за собой обратимость сопряженного оператора A^* слева (справа). Так как для рефлексивного пространства операторы A и A^{**} канонически отождествляются, то любое рефлексивное пространство X удовлетворяет условиям:

1. Из обратимости оператора $A^* \in \mathcal{L}(X^*)$ слева следует обратимость оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ справа.

2. Из обратимости оператора $A^* \in \mathcal{L}(X^*)$ справа следует обратимость оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ слева.

А.С.Маркус предложил следующие задачи: а) существуют ли банаховы пространства, не удовлетворяющие условиям 1 и 2; б) в каких нерефлексивных пространствах эти условия выполнены?

Настоящая работа посвящена ответу на эти вопросы. В ней выделены как классы нерефлексивных пространств, удовлетворяющих условиям 1 или 2, так и классы пространств, для которых эти условия не выполняются. Часть результатов настоящей работы была анонсирована в [1]. Отметим, что исследованию односторонней обратимости в алгебре Калкина посвящена работа [2].

Терминология настоящей работы следует книгам [3–6]. Единичную сферу (шар) пространства X будем обозначать $S(X)(B(X))$. То, что в пространстве выполнено условие 1 (2), символически будем записывать так: $X \in \mathcal{LR}$ ($X \in \mathcal{RL}$).

Напомним характеризацию односторонне обратимых операторов [7, с. 22–23].

А. Для того чтобы оператор был обратим справа, необходимо и достаточно, чтобы он был сюръективным и его ядро было дополняемо.

Б. Для того чтобы оператор был обратим слева, необходимо и достаточно, чтобы он был инъективным и его образ был замкнутым дополняемым подпространством.

Предложение 1. Оператор, сопряженный которому обратим справа, является изоморфным вложением (т.е. инъективным оператором с замкнутым образом). Оператор, сопряженный которому обратим слева, является сюръективным.

Это непосредственно вытекает из А, Б и того, что оператор, сопряженный которому имеет замкнутый образ, сам имеет замкнутый образ [5, с. 526].

II. Результаты, относящиеся к классу $\mathcal{LR}$.

Теорема 1. Пусть Γ и Δ – некоторые множества, X – такое банахово пространство, что канонический образ X в X^{**} дополняем и его дополнение изоморфно $l_1(\Delta)$. Тогда $Y=X\oplus l_1(\Gamma)\in LR$.

Джеймс и Линденштраусс (см. [3, с. 26]) построили нетривиальные примеры пространств X, удовлетворяющих условиям теоремы 1.

Доказательство. Пусть оператор $A\in L(Y)$ таков, что A^* обратим слева. Нужно доказать, что A обратим справа.

Первый шаг в наших рассуждениях состоит в том, что мы представим оператор A в виде прямой суммы двух операторов, устроенных более просто.

Из предложения 1 вытекает, что A – сюръективный оператор. Обозначим через $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ орты пространства $l_1(\Gamma)$. Воспользовавшись теоремой об открытом отображении, найдем векторы $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}\subset Y$, для которых $Af_\gamma=e_\gamma$ и $\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}\|f_\gamma\|<\infty$. Легко видеть, что отображение $D:l_1(\Gamma)\to Y$, заданное на ортах e_γ равенствами $De_\gamma=f_\gamma$ $(\gamma\in\Gamma)$ и продолженное по линейности и непрерывности на все $l_1(\Gamma)$, является изоморфным вложением.

Обозначим через P оператор, проектирующий $Y=l_1(\Gamma)\oplus X$ на $l_1(\Gamma)$ параллельно X. Оператор DPA проектирует пространство Y на подпространство в Y, натянутое на векторы $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Легко видеть, что образ подпространства $ker(DPA)\subset Y$ при отображении A совпадает с X.

Таким образом, оператор A разложен в прямую сумму двух операторов (обозначим их A_1 и A_2), причем A_1 – изоморфизм $im(DPA)$ и $l_1(\Gamma)$, а A_2 – фактор-отображение $ker(DPA)$ на X.

Ясно, что из обратимости слева A^* вытекает обратимость слева A_2^*. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что A_2 обратим справа.

Для этого опишем пространство $ker(DPA)$.

Сначала покажем, что пространства $l_1(\Gamma)$ и X не содержат бесконечномерных изоморфных подпространств. Предположим противное. В силу хорошо известных результатов [3, с. 53] это равносильно тому, что X содержит подпространство, изоморфное l_1. Обозначим это подпространство через X_1. Хорошо известно, что X_1^{**} можно отождествить с w^*-замыканием пространства X_1, рассматриваемого как подпространство в X^{**}. Так как X_1 изоморфно l_1, то X_1 дополняемо в X_1^{**}. Пусть X_2 – некоторое дополнение к X_1 в X^{**}. Сопоставляя результаты [3, с. 111] и [8], заключаем, что X_2 содержит подпространство, изоморфное гильбертову.

Пусть U и V – подпространства некоторого банахова пространства. Наклоном U к V называется [8] величина

$$\delta(U, V) = \inf_{x \in S(U)} \operatorname{dist}(x, V).$$

Нетрудно видеть [8], что $\delta(U, V) = 1/\|P\|$, где P – оператор проектирования из $\operatorname{lin}(U \cup V)$ на U параллельно V.

Так как $X^{**} = X \oplus l_1(\Gamma)$ и пространство $l_1(\Gamma)$ не содержит подпространств, изоморфных гильбертову, то достаточно показать, что $\delta(X_2, X) > 0$.

Так как X_1 и X_2 являются взаимно дополнительными пространствами, то $\delta(X_2, X_1) > 0$. Пусть $y \in S(X_2)$. Если для $x \in X$ имеет место $\operatorname{dist}(x, X_1) < \delta(X_2, X_1)/2$, то $\|y - x\| > \delta(X_2, X_1)/2$. Если же $\operatorname{dist}(x, X_1) \geq \delta(X_2, X_1)/2$, то найдется такой функционал $x^* \in S(X^*)$, что $x^*(x) \geq \delta(X_1, X_2)/2$ и $x^*|_Y = 0$. Так как $X_2 \subset X_1^{**}$, а X_1^{**} отождествлено с w^*-замыканием пространства X_1, то $\operatorname{dist}(x, X_2) \geq \delta(X_2, X_1)/2$, и, следовательно, $\|y - x\| \geq \delta(X_2, X_1)/2$. Таким образом, $\delta(X_2, X) \geq \delta(X_2, X_1)/2$.

Итак, $l_1(\Gamma)$ и X не содержат изоморфных бесконечномерных подпространств. Воспользовавшись теоремой Эдельштейна – Войтащика [9; 3, с. 80], заключаем, что $\ker(DPA)$ изоморфно прямой сумме $X_0 \oplus Y_0$, где X_0 изоморфно дополняемому подпространству в X, а Y_0 – в $l_1(\Gamma)$.

В работе [10] (см. также [11, с. 29]) доказано, что любое дополняемое подпространство в $l_1(\Gamma)$ изоморфно $l_1(\Omega)$, где Ω – множество некоторой мощности. Таким образом, $\ker(DPA)$ изоморфно $l_1(\Omega) \oplus X_0$.

Итак, наша задача свелась к следующей:

Есть сюръективный оператор $A_2 : l_1(\Omega) \oplus X_0 \to X$, где X_0 – дополняемое подпространство в X, и дано, что A_2^* обратим слева, т. е. его образ дополняем. Нужно доказать, что A_2 обратим справа, или, что то же самое, что существует w^* – непрерывный проектор из $l_\infty(\Omega) \otimes X_0^*$ на $\operatorname{im} A_2^*$.

Пусть $Q : l_\infty(\Omega) \oplus X_0^* \to \operatorname{im} A_2^*$ – некоторый проектор, обозначим через Q_1 и Q_2 его сужения на $l_\infty(\Omega)$ и X_0^* соответственно. Обозначим через R_1 и R_2 проекторы на $l_\infty(\Omega)$ и X_0^*, соответствующие разложению $l_\infty(\Omega) \oplus X_0^*$.

w^*-непрерывный проектор будем строить из двух "частей", а именно, пространство $\operatorname{im} A_2^*$ разложим в прямую сумму $\operatorname{im} A_2^* = U_1 \oplus U_2$, где $U_1 = \operatorname{im} A_2^* \cap l_\infty(\Omega)$, а U_2 имеет ненулевой наклон с $l_\infty(\Omega)$, и соответствующие этому разложению проекторы P_1 и P_2 w^*-непрерывны. (Возможность такого разложения доказана ниже.) После этого построим w^*-непрерывные операторы $E_1 : l_\infty(\Omega) \to U_1$ и

$E_2 : X_0^* \to im\, A_2^*$, такие, что для всех $x \in im\, A_2^*$ будем иметь $E_1 P_1 x = P_1 x$ и

$$E_1 R_1 P_2 x + E_2 R_2 P_2 x = P_2 x. \qquad (1)$$

Ясно, что оператор $E : l_\infty(\Omega) \oplus X_0^* \to im\, A_2^*$, заданный равенством $E(x_1, x_2) = E_1 x_1 + E_2 x_2$, и будет искомым w^*-непрерывным проектором на $im\, A_2^*$.

Покажем, что пространство $U_1 = l_\infty(\Omega) \cap im\, A_2^*$ конечномерно. Сначала заметим, что $im A_2^*$ не содержит подпространств, изоморфных c_0. Действительно, $im A_2^*$ изоморфно X^*. Если бы X^* содержало подпространство, изоморфное c_0, то из результата Бессаги - Пелчинского [3, с. 103] следовало бы, что X содержит подпространство, изоморфное l_1, невозможность чего была доказана ранее.

Пространство $l_\infty(\Omega)$ является пространством вида $C(K)$. Из результатов работы [12] следует, что оператор $(R_1 Q_1) : l_\infty(\Omega) \to l_\infty(\Omega)$ является слабо компактным. Так как квадраты слабо компактных операторов в $C(K)$ являются компактными [5, с. 532], и оператор $(R_1 Q_1)^2$ совпадает с тождественным на U_1, то пространство U_1 конечномерно.

Пусть $P_1 : im A_2^* \to U_1$ - некоторый w^*-непрерывный проектор. Обозначим через U_2 его ядро. Покажем, что U_1 и U_2 образуют искомое разложение пространства $im A_2^*$, то есть что $\delta(U_2, l_\infty(\Omega)) > 0$.

В [8, с. 202, 203] по существу доказано, что если для подпространств U и V имеют место соотношения $U \cap V = \{0\}$; $\delta(U, V) = 0$, то для любой последовательности строго положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ существуют нормированные базисные последовательности $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ в пространствах U и V соответственно, базисные постоянные которых не превосходят 2 и такие, что $\| u_n - v_n \| < \varepsilon_n$ Воспользовавшись этим, а также результатом Крейна - Мильмана - Рутмана [3, с. 5] об устойчивости базисных последовательностей для подходящим образом подобранных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$, находим в $l_\infty(\Omega)$ базисную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, которая под действием оператора $(R_1 Q_1)^2$ переходит в эквивалентную. Приходим в противоречие с доказанной выше компактностью оператора $(R_1 Q_1)^2$.

Из $\delta(U_2, l_\infty(\Omega)) > 0$ вытекает, что сужение оператора R_2 на U_2 является изоморфным вложением U_2 в X_0^*. Поэтому, в силу известных теорем о продолжении операторов [3, с. 105], найдется такой оператор $F : X_0^* \to l_\infty(\Omega)$, что

$$F R_2 \big|_{U_2} = R_1 \big|_{U_2}.$$

Пусть $E_1 : l_\infty(\Omega) \to U_1$ - некоторый w^*-непрерывный проектор.

Определим оператор $G: X_0^* \to im\, A_2^*$ равенством $G = Q_2 + (Q_1 - E_1)\, F$. Для него имеем

$$G R_2 P_2 x = (Q_2 + Q_1 F - E_1 F) R_2 P_2 x = Q_2 R_2 P_2 x + \\ + Q_1 R_1 P_2 x - E_1 R_1 P_2 x = P_2 x - E_1 R_1 P_2 x. \tag{2}$$

Но оператор G нельзя взять в качестве искомого оператора E_2, так как он может не быть w^*-непрерывным. Для "исправления" оператора G нам понадобится следующая лемма.

<u>Лемма</u>. Пусть Z_1, Z_2 и Z_3 – банаховы пространства, причем Z_1 и Z_2 дополняемы в своих вторых сопряженных, и при этом $Z_2^{**} = Z_2 \oplus l_1(\Lambda)$. Пусть $H_1 : Z_2 \to Z_1$ – фактор-отображение, такое, что найдется оператор $j: Z_2^* \to Z_3^*$, для которого композиция jH_1^* является w^*-непрерывным изоморфизмом пространств Z_1^* и Z_3^*. Найдется такой оператор $H_2 : Z_3 \to Z_2$, что $jH_1^* = H_2^* H_1^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как jH_1^* – изоморфизм пространств Z_1^* и Z_3^*, то $H_1^{**} j^*$ – изоморфизм пространств Z_3^{**} и Z_1^{**}. При этом j^* – изоморфное вложение Z_3^{**} в Z_2^{**}. Мы могли бы попытаться в качестве H_2 взять $j|_{Z_3}^*$, но может случиться, что образ этого сужения "выходит" за пределы Z_2. Запишем $j^* z = N_1 z + N_2 z$, где $N_1 : Z_3^{**} \to l_1(\Lambda)$; $N_2 : Z_3^{**} \to Z_2$. Обозначим через $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ орты пространства $l_1(\Lambda)$. Пусть T – существующий согласно условию леммы проектор, $T: Z_1^{**} \to Z_1$. Так как оператор $H_1 : Z_2 \to Z_1$ сюрьективен, то найдутся такие $\{h_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset Z_2$, что $\sup\limits_\lambda \|h_\lambda\| < \infty$ и $H_1 h_\lambda = TH_1^{**} g_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Введем оператор $N_3 : Z_3 \to Z_2$ следующим образом: если $N_1 z = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda g_\lambda$, то $N_3 z = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda h_\lambda$. Ясно, что N_3 – ограниченный линейный оператор. Введем оператор $H_2 : Z_3 \to Z_2$ равенством $H_2 z = N_2 z + N_3 z$. Покажем, что H_2 – искомый оператор. Для этого достаточно показать, что

$$H_1 H_2 = H_1^{**} j|_{Z_3}. \tag{3}$$

Действительно, так как операторы $H_1^{**} H_2^{**}$ и $H_1^{**} j^*$ являются w^*-непрерывными в Z_3^{**}, то из их совпадения на w^*-плотном подпространстве $Z_3 \subset Z_3^{**}$ вытекает $H_1^{**} H_2^{**} = H_1^{**} j^*$, откуда, в свою очередь вытекает $H_2^* H_1^* = jH_1^*$.

Для доказательства равенства (3) воспользуемся w^*-непрерывностью оператора jH_1^*. Из нее вытекает, что для любого вектора $z \in Z_3$ вектор $H_1^{**} j^* z$, а, следовательно, и вектор $H_1^{**} N_1 z$ принадлежит Z_1, или, иначе говоря, $TH_1^{**} N_1 z = H_1^{**} N_1 z$. То, что $TH_1^{**} N_1 z = H_1 N_3 z$, непосредственно следует из определения N_3.

Поэтому для всех $z \in Z_3$ имеем $H_1^{**} N_1 z = H_1 N_3 z$. Следовательно, $H_1 H_2 z = H_1^{**} j^* z$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Полагаем $Z_1^* = (A_2^*)^{-1} U_2$. Ясно, что Z_1^* – это w^*-замкнутое подпространство конечной коразмерности в X^*. Поэтому оно каноническим образом сопряжено к фактор-пространству Z_1 пространства X по конечномерному подпространству. Ясно, что Z_1 дополняемо в своем втором сопряженном.

Полагаем $Z_2 = X_0$ (и, следовательно, $Z_2^* = X_0^*$); $H_1^* = R_2 A_2^*|_{Z_1^*}$. Ясно, что H_1^* – это w^*-непрерывный оператор, так как он является композицией двух w^*-непрерывных операторов. Кроме того, в силу сделанных выше замечаний, H_1^* – изоморфное вложение. Следовательно, у него есть предсопряженный оператор, являющийся фактор-отображением.

Покажем, что $Z_2^{**} = Z_2 \oplus l_1(\Lambda)$. Пусть U_0 – некоторое дополнение к X_0 в X. Так как X_0 и U_0 дополняемы в X, а X дополняемо в X^{**}, то X_0 и U_0 дополняемы в X_0^{**} и U_0^{**} соответственно. Пусть X_c и U_c – некоторые дополнения X_0 в X_0^{**} и U_0 в U_0^{**} соответственно. Имеем $X^{**} = X_0^{**} \oplus U_0^{**} = (X_0 \oplus X_c) \oplus (U_0 \oplus U_c) = (X_0 \oplus U_0) \oplus (X_c \oplus U_c)$, следовательно, прямая сумма $X_c \oplus U_c$ изоморфна $l_1(\Delta)$ и, в силу результата Кёте [10, 11], пространство X_c изоморфно $l_1(\Lambda)$ для некоторого множества Λ.

Положим $Z_3^* = (A_2^*)^{-1}(\dot{I} - E_1 R_1) U_2$. Пространство Z_3^* является w^*-замкнутым подпространством в X^* конечной коразмерности, а оператор $(\dot{I} - E_1 R_1)|_{U_2}$ – w^*-непрерывным изоморфизмом. Поэтому Z_3^* является пространством, сопряженным к соответствующему фактор-пространству пространства X.

Полагаем $j = (A_2^*)^{-1} G : X_0^* \to Z_3^*$. (То, что j действительно отображает X_0^* в Z_3^* вытекает из соотношения (2)).

При таком определении пространств Z_1, Z_2 и Z_3, оператор j и H_1 мы находимся в условиях леммы. Применяя ее, заменяем оператор G w^*-непрерывным оператором E_2. Теорема доказана.

<u>Предложение 2</u>. Если банахово пространство X является $\mathcal{L}_1$-пространством, не изоморфным $l_1(\Gamma)$ и содержит дополняемое подпространство, изоморфное $l_1(\Gamma)$ с $\operatorname{card}\Gamma = \operatorname{dens} X$, то $X \notin LR$.

Доказательство. Пусть $X = Y \oplus l_1(\Gamma)$. Из того, что $\operatorname{card}\Gamma = \operatorname{dens} X$ вытекает [3, с. 108], что существует фактор-отображение $F : l_1(\Gamma) \to X$. Определим оператор $G : Y \oplus l_1(\Gamma) \to X$ равенством $G(y, z) = Fz$. Ясно, что G – фактор-отображение. Поэтому оператор G^* является изоморфным вложением X^* в себя. Он является обратимым слева, так как пространство, сопряженное к $\mathcal{L}_1$-пространству, является инъективным [4, с. 200].

То, что оператор G не обратим справа, докажем от противного. Из утверждения А заключаем, что его обратимость справа эквивалентна дополняемости $\ker G = Y \oplus \ker F$ в X, или, что то же самое, дополняемости $\ker F$ в $l_1(\Gamma)$. Пусть $P: l_1(\Gamma) \to \ker F$ – соответствующий проектор. Ясно, что его ядро изоморфно X, т.е. X изоморфно дополняемому подпространству в $l_1(\Gamma)$, которое, в свою очередь, изоморфно $l_1(\Lambda)$ для множества Λ некоторой мощности [10, 11]. Получаем противоречие.

Замечание 1. Легко видеть, что для произвольного банахова пространства Y из $X \notin LR\ (X \notin RL)$ следует $X \oplus Y \notin LR\ (X \oplus Y \notin RL)$. Это позволяет очевидным образом усилить предложения 2, 3, 5, 6, теорему 2.

Следствие 1. Если сепарабельное $\mathcal{L}_1$-пространство X не изоморфно l_1, то $X \notin LR$.

Это вытекает из того, что любое $\mathcal{L}_1$-пространство содержит дополняемое подпространство, изоморфное l_1, [4, с. 200] и предложения 2.

Следствие 2. Если (S, Σ, μ) – пространство с не чисто атомной мерой, то $L_1(S, \Sigma, \mu) \notin LR$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. То, что $L_1(0,1) \notin LR$ – это частный случай следствия 1. Для общего (S, Σ, μ) результат вытекает из того, что для не чисто атомной меры μ пространство $L_1(S, \Sigma, \mu)$ содержит дополняемые подпространства, изоморфные $L_1(0,1)$, и замечания 1.

Укажем еще один способ выделения пространств, не входящих в LR. Используемую ниже терминологию см. в [6, 13].

Предложение 3. Пусть K – компакт, для которого существует гомеоморфное вложение $\varphi: K \to K$, не имеющее оператора продолжения. Тогда $C(K) \notin LR$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу известной теоремы о продолжении [5, с. 26], оператор $A: C(K) \to C(K)$, заданным равенством $(Af)(k) = f(\varphi(k))$, является сюръективным. Для сопряженного оператора $A^*: M(K) \to M(K)$ (здесь $M(K)$ – пространство регулярных борелевских мер на K) и произвольного борелевского подмножества $\alpha \subset K$ имеет место равенство $(A^*\mu)(\alpha) = \mu(\varphi^{-1}(\alpha))$. Отсюда видно, что композиция оператора сужения меры из $M(K)$ на образ $\varphi(K)$ и оператора "перенесения" меры из $\varphi(K)$ на K является левым обратным для A^*.

В то же время правого обратного для оператора A не существует, так как он был бы оператором продолжения для φ.

Замечание 2. Компакты, удовлетворяющие условиям предложения

3, существуют. Примером такого компакта может служить сумма стоунчеховской компактификации континуального дискретного пространства и декартова произведения 2^{α} экземпляров отрезка $[0, 1]$ с тихоновской топологией (см. [13, с. 366]).

Замечание 3. В силу результата [13, с. 365], компакты, удовлетворяющие условиям предложения 3, являются неметризуемыми. Таким образом, для метризуемых компактов K, вопрос о принадлежности пространств $C(K)$ классу LR остается невыясненным. Не ясно, в частности, имеет ли место $c_0 \in LR$?

III. Результаты о классе RL.

Предложение 4. Если пространство X дополняемо в X^{**}, то $X \in RL$.

Доказательство. Обозначим через P некоторую проекцию X^{**} на X. Пусть $A \in L(X)$ таков, что $A^* \in L(X^*)$ обратим справа и пусть $D \in L(X^*)$ – его правый обратный. Имеем $I_{X^{**}} = (A^*D)^* = D^*A^{**}$. Введем оператор $E: X \to X$ равенством $E = PD^*|_X$. Покажем, что E будет левым обратным для A. В самом деле, для любого $x \in X$ имеем $EAx = PD^*A^{**}x = Px = x$. Предложение доказано.

Следствие 3. Любое сопряженное пространство принадлежит RL, все L_1 -пространства принадлежат RL.

Теорема 2. Для пространства $C(K)$ непрерывных функций на метризуемом компакте выполняется следующая альтернатива: либо $C(K)$ изоморфно c_0 и принадлежит RL, либо $C(K) \notin RL$.

Доказательство. Для пространства $C(K)$ непрерывных функций на метризуемом компакте известна следующая альтернатива [6, с. 86]: либо $C(K)$ изоморфно c_0, либо $C(K)$ содержит дополняемое подпространство, изоморфное $C(\omega^{\omega})$. В первом случае заключение теоремы вытекает из предложения 1 и следующей теоремы Собчика [3, с. 106]: c_0 дополняемо в любом объемлющем сепарабельном пространстве. Во втором случае – из замечания 1 и того, что для отрезка ординалов длины ω^{ω} выполнены условия следующего предложения (см. [6, с. 89]).

Предложение 5. Пусть K – компакт (не обязательно метризуемый), для которого существует непрерывное сюръективное отображение $\varphi: K \to K$, не имеющее оператора усреднения. Тогда $C(K) \notin RL$.

Доказательство. Так как $\varphi: K \to K$ не имеет оператора усреднения, то оператор $A: C(K) \to C(K)$, определенный равенством $(Af)(k) = f(\varphi(k))$ не обратим слева.

В то же время A^* есть фактор-отображение $M(K)$ на $M(K)$. Хорошо известно, что $M(K)$ является L_1 -пространством. Поэтому применяя следующую лемму для случая $X = Y = C(K)$; $U = X^* = Y^* =$

$= M(K)$; $D = \dot{I}_{M(K)}$, $N = A$, получаем обратимость A^* справа.

Лемма [14, с. 236]. Пусть U является $\mathcal{L}_1$ – пространством; X, Y – произвольные банаховы пространства, а $N: X \to Y$ – изоморфное вложение. Тогда для любого оператора $D: U \to X^*$ найдется такой оператор $E: U \to Y^*$, что $N^* E = D$.

Теорему 2 можно вывести, также, из следующего более общего предложения (этот вывод мы опускаем).

Предложение 6. Пусть X – пространство, сопряженное к которому изоморфно $l_1(\Gamma)$, Y – пространство, изоморфное $Y \oplus Y$, и такое, что X можно изоморфно вложить в него без дополнения. Тогда $Z = X \oplus Y \notin RL$.

Прежде чем доказывать это предложение, покажем, как построить многочисленные примеры пространств, удовлетворяющих его условиям.

К числу пространств, сопряженные к которым изоморфны l_1, принадлежат пространства непрерывных функций на счетных компактах, однако класс предсопряженных к l_1 этим не исчерпывается (см. [4]). Кроме того, имеет место следующее утверждение.

Предложение 7. Если X – пространство, сопряженное к которому изоморфно $l_1(\Gamma)$, то найдется такое банахово пространство Y, изоморфное $Y \oplus Y$, в которое X можно вложить без дополнения.

Доказательство. Сначала покажем, что пространство X не инъективно. Действительно, в [11] доказано, что инъективные пространства содержат (дополняемые) подпространства, изоморфные l_∞; следовательно, их сопряженные содержат подпространства, изоморфные l_∞^*. Так как пространства l_∞ и L_∞ изоморфны [3, с. 111], то l_∞^* изоморфно L_∞^* и, следовательно, содержит подпространство, изоморфное L_1. Воспользовавшись неравенством Хинчина [3, с. 66], заключаем, что пространство, сопряженное к инъективному, содержит подпространство, изоморфное гильбертову. Но пространство $l_1(\Gamma)$ не содержит подпространоть, изоморфных гильбертову [3, с. 76].

Следовательно, существует пространство U, в которое X можно вложить без дополнения. В качестве искомого Y можно взять, например, $\left(\sum_{m=1}^{\infty} \oplus U\right)_p$ $(1 \le p < \infty)$

Доказательство предложения 6. Пусть $F: X \to Y$ – вложение с недополняемым образом. Так как Y изоморфно своему квадрату, то Z изоморфно $X \oplus Y \oplus Y$. Определим оператор $A \in L(Z)$ следующим образом:

$$A : X \oplus Y \to X \oplus Y \oplus Y;$$

$$A(x, y) = (0, Ex, \dot{I}_Y y).$$

Легко видеть, что образ оператора A недополняем, и, следовательно, оператор A не является обратимым слева. Его сопряженный $A^*: X^* \oplus Y^* \oplus Y^* \to X^* \oplus Y^*$ имеет вид $A^*(x^*, y_1^*, y_2^*) = (E^* y_1^*, y_2^*)$. Так как X^* изоморфно $l_1(\Gamma)$, то найдется такой оператор $F: X^* \to Y^*$, для которого имеет место равенство $E^*F = \dot{I}_{X^*}$ (этот оператор строится рассуждениями, проведенными в начале доказательства теоремы 1). Очевидно, что оператор $D: X^* \oplus Y^* \to X^* \oplus Y^* \oplus Y^*$, заданный равенством $D(x^*, y^*) = (0, Fx^*, y^*)$ будет правым обратным для A^*. Предложение доказано.

1. Островский М.И. Об односторонне обратимых операторах // XI Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тез. докл. Ч. 1. Челябинск, 26-30 мая 1986 г. - Челябинск : ЧПИ, 1986. - С. 78.
2. Astala K., Tylli H.-O. On semi Fredholm operators and the Calkin algebra // J. London Math. Soc. - 1986. - 34, N 3.- P. 541-551.
3. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. V.1.- Berlin : Springer, 1977. - 188 p.
4. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. - Berlin: Springer, 1973. - 243 p.
5. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. - М. : Изд-во иностр. лит., 1962. - 895 с.
6. Пелчинский А. Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения к линейной топологической классификации пространств непрерывных функций. - М. : Мир, 1970. - 144 с.
7. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. - М. : Наука, 1971. - 352 с.
8. Гурарий В.И. О растворах и наклонах подпространств банахова пространства // Теория функц., функц. анализ и их приложения. - 1965. - Вып. 1. - С. 194-204.
9. Edelstein I.S., Wojtaszczyk P. On projections and unconditional bases in direct sums of Banach spaces // Stud. Math. - 1976. - 56. - P. 263-276.
10. Köthe G. Hebbare lokalkonvexe Räume // Math. Ann. - 1966. - 165. - P. 181-195.
11. Rosenthal H.P. On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory // Stud.Math.- 1970, - 37, N 1. - P. 13-36.
12. Pelczynski A. Projections in certain Banach spaces // Ibid. - 1960. - 19. - P. 209-228.
13. Semadeni Z. Banach spaces of continuous functions. V.1. - Warszawa, PWN, 1971. - 584 p.
14. Hagler J., Stegall C. Banach spaces whose duals contain complemented subspaces isomorphic to $C(0,1)^*$ // J. Funct. Anal.- 1973. - 13. - P. 233-251.

УДК 517.547

О.М.Каткова

ИНДИКАТОРЫ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе дается полное описание индикаторов целых функций конечного порядка с неотрицательными коэффициентами.

Индикаторы целых функций конечного порядка допускают следующее описание [1, 2]: функция $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ является индикатором целой функции уточненного порядка $\rho(r)\to\rho>0$ тогда и только тогда, когда она 2π-периодична и ρ-тригонометрически выпукла.

В настоящей работе дается полное описание индикаторов подкласса целых функций конечного порядка, состоящего из целых функций с неотрицательными коэффициентами. Для других подклассов целых функций: целых эрмитово-позитивных функций, целых абсолютно монотонных функций - описания индикаторов получены в [3, 4]. Используя некоторые методы этих работ, докажем следующую теорему.

Теорема. Для того чтобы функция $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ была индикатором целой функции f уточненного порядка $\rho(r)\to\rho$, $0<\rho<\infty$, с неотрицательными коэффициентами, необходимо и достаточно, чтобы она обладала следующими свойствами:

а) h - 2π-периодическая, ρ-тригонометрически выпуклая функция;

б) h - четная функция;

в) $\max\{h(\theta):-\pi\le\theta\le\pi\}=h(0)$.

В сторону необходимости теорема получается легко. Действительно, свойством а) обладают индикаторы любой целой функции порядка ρ. Так как $f(x)>0$, $x\ge 0$, то $f(z)=\overline{f(\bar z)}$, отсюда следует б). Поскольку коэффициенты f неотрицательны, то $|f(re^{i\theta})|\le$ $\le f(r)$, следовательно, $h(0)=\varlimsup\limits_{r\to\infty} r^{-\rho(r)}\ln f(r)\ge\varlimsup\limits_{r\to\infty} r^{-\rho(r)}\ln|f(re^{i\theta})|=$ $=h(\theta)$, что и доказывает в).

Таким образом, задача сводится к доказательству следующего утверждения.

Теорема 1. Для всякого $0<\rho<\infty$, всякого уточненного порядка $\rho(r)\to\rho$, $r\to\infty$ и любой функции h, обладающей свойствами а), б), в), существует целая функция f уточненного порядка $\rho(r)\to\rho$ с неотрицательными коэффициентами такая, что $h(\theta,f)\equiv h$.

Сначала мы дополнительно потребуем от индикатора h тригоно-

ISBN 5-12-001584-0. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Киев, 1990.

метричности в окрестности нуля и покажем, что в этом случае функцию f можно построить так, чтобы она была вполне регулярного роста (в.р.р.) в смысле Левина – Пфлюгера.

Теорема 2. Пусть $0<\rho<\infty$, $\rho(r)\to\rho$, $r\to\infty$, и $h(\theta)$ обладает свойствами а), б), в) и, кроме того,

г) $h(\theta)=A\cos\rho\theta$, $\theta\in(-\theta_0,\theta_0)$, $A>0$.

Существует целая функция f с неотрицательными коэффициентами, в.р.р. относительно уточненного порядка $\rho(r)\to\rho$; $f(z)\neq 0$, когда $|\arg z|<\theta_0$ и такая, что $h(f,\theta)\equiv h$.

Доказательство. Из известных теорем теории целых функций ([1, с. 151–158], [2, с. 90, 91]) следует, что существует g_1 – целая функция в.р.р. относительно уточненного порядка $\rho(r)$, не имеющая нулей в секторе $|\arg z|<\theta_0$ с индикатором $h/2$. Целая функция $g_2(z)=\overline{g_1(\bar z)}$ обладает теми же свойствами. Пусть $\varphi_1=g_1g_2$. Тогда φ_1 – целая функция в.р.р. относительно уточненного порядка $\rho(r)$ с индикатором $h(\theta,\varphi_1)=h(\theta)$ без нулей в секторе $|\arg z|<\theta_0$ и $\varphi_1(x)=|g_1(x)|^2>0$, $x\in\mathbb{R}$. Так как $\varphi_1(x)\to\infty$, $x\to\infty$, то, умножая φ_1 в случае необходимости на константу, можно считать, что $\varphi_1(x)\geqslant e$, $x>0$.

Далее нам понадобится следующий факт.

Лемма 1. Пусть $\rho(r)\to\rho>0$ – уточненный порядок, а $\sigma(r)$ неотрицательная функция, $\sigma(r)\to 0$, $r\to\infty$. Существует уточненный порядок $\rho_1(r)\to\rho$, такой, что

$$r^{\rho_1(r)}=o(r^{\rho(r)}),\qquad \sigma(r)r^{\rho(r)}=o(r^{\rho_1(r)}),\qquad r\to\infty.$$

Доказательство. Положим $\varepsilon(r)=\max\limits_{t\geqslant r}\sqrt{\sigma(t)+\dfrac{1}{\ln t}}$.

Построим функцию $l(r)$ следующим образом: $l(r)=\varepsilon(0)$, $0\leqslant r\leqslant r_1=e^{e^e}$, $l(r)=l(r_1)+\ln_3 r_1-\ln_3 r$, $r_1\leqslant r\leqslant u_1$, где u_1 – наименьший корень уравнения $\varepsilon(r)=l(r_1)+\ln_3 r_1-\ln_3 r$ на отрезке $[r_1,u_1]$. Далее полагаем $l(r)=l(u_1)$, $u_1\leqslant r\leqslant r_2=u_1+1$. Затем с r_2 проводим те же рассуждения, что с r_1, и, повторяя этот процесс, определяем $l(r)$ на $[0,\infty)$. Очевидно, функция $l(r)$ непрерывна и имеет непрерывную производную всюду, кроме точек r_n и u_n, где существуют односторонние производные:

$$l'(r)=\begin{cases}0, & u_j\leqslant r\leqslant r_j+1\\ (r\ln r\ln_2 r)^{-1}, & r_j\leqslant r\leqslant u_j\,.\end{cases}$$

Небольшое изменение функции l в точках излома показывает, что можно считать справедливым соотношение

$$l'(r)=O((r\ln r\ln_2 r)^{-1}).\tag{1}$$

Кроме того,

$$1(r) \geq \varepsilon(r) \geq \frac{1}{\ln r}, \quad r > r_1; \quad 1(r) \downarrow 0, \ r \to \infty. \tag{2}$$

Положим $r^{\rho_1(r)} = r^{\rho(r)} \delta(r)$. С помощью (2) и (1) нетрудно показать, что $\rho_1(r) \to \rho$, $r\rho_1'(r) \ln r \to 0$, $r \to \infty$, $r^{\rho_1(r)} = 0(r^{\rho(2)})$.
Далее, учитывая (2), имеем

$$\sigma(r) r^{\rho(r)} \leq \sqrt{\sigma(r)} \sqrt{\sigma(r) + \frac{1}{\ln r}} \, r^{\rho(r)} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sigma(r)} \, \varepsilon(r) r^{\rho(r)} \leq \sqrt{\sigma(r)} \, l(r) r^{\rho(r)} =$$

$$= \sqrt{\sigma(r)} \, r^{\rho_1(r)} = o(r^{\rho_1(r)}).$$

Лемма доказана.

Пусть

$$\sigma_1(r) = \max \left\{ \left(\frac{\ln|\varphi_1(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} - h(\theta) \right)^+ : 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\},$$

$$\sigma_2(r) = \left| \frac{\ln \varphi_1(r)}{r^{\rho(r)}} - h(0) \right|. \tag{3}$$

Положим

$$\sigma(r) = \max \{ \sigma_1(r), \ \sigma_2(r) \}.$$

Очевидно, $\sigma(r) \geq 0$, $\sigma(r) \to 0$, $r \to \infty$.
В силу леммы I существует уточненный порядок $\rho_1(r) \to \rho$ такой, что

$$r^{\rho_1(r)} = 0(r^{\rho(r)}), \quad \sigma(r) r^{\rho(r)} = o(r^{\rho_1(r)}). \tag{4}$$

Пусть функция $h_1(\theta)$ обладает свойствами а), б), в), г), и, кроме того,

в') $h_1(0) > h_1(\theta)$, $\theta \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$.

В силу соображений, приведенных в начале доказательства, существует целая функция φ_2 – в.р.р. относительно уточненного порядка $\rho_1(r)$; $\varphi_2(z) \neq 0$ в секторе $|\arg z| < \theta_0$; $\varphi_2(x) > e$, $x > 0$, и такая, что $h(\theta, \varphi_2) = h_1(\theta)$.

Положим

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) \varphi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Очевидно, φ – в.р.р. относительно $\rho(r)$, коэффициенты c_k вещественны, и $h(\varphi, \theta) = h(\varphi_1, \theta) = h(\theta)$.

Для доказательства теоремы 2 покажем, что справедливо следующее предложение.

Основное предложение. Все коэффициенты c_k, за исключением, быть может, конечного числа, неотрицательны.

Доказательство. Для любого $\eta>0$ имеем

$$c_k=(2\pi)^{-1}e^{-k\eta}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-ik\xi}\varphi(e^{\eta+i\xi})\,d\xi=$$

$$=(2\pi)^{-1}e^{-k\eta}\varphi(e^{\eta})\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-ik\xi}\varphi(e^{\eta+i\xi})/\varphi(e^{\eta})\,d\xi=$$

$$=(2\pi)^{-1}e^{-k\eta}\varphi(e^{\eta})\int\limits_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\left(e^{-ik\xi}\varphi(e^{\eta+i\xi})/\varphi(e^{\eta})\right)d\xi=$$

$$=(2\pi)^{-1}e^{-k\eta}\varphi(e^{\eta})\Big(\int\limits_{|\xi|\le\delta}+\int\limits_{\delta<|\xi|\le\pi}\Big)\Big(\operatorname{Re}\,(e^{-ik\xi}\times$$

$$\times\varphi(e^{\eta+i\xi})/\varphi(e^{\eta}))\,d\xi\Big)\overset{def}{=}(2\pi)^{-1}e^{-k\eta}\varphi(e^{\eta})(I_1+I_2),$$

где $\delta=\delta(\eta)>0$ будет выбрано позднее.

Оценим I_1 снизу. Положим

$$b(\eta)=\ln\varphi(e^{\eta})-\ln\varphi_1(e^{\eta})+\ln\varphi_2(e^{\eta}).$$

Так как $\varphi_{1,2}(z)\ne 0$, когда $|\arg z|<\theta_0$, то $\varphi_{1,2}(e^{\eta+i\xi})\ne 0$, в круге $\{\xi\in\mathbb{C}:|\xi|\le\theta_0/2\}$. Поэтому при $|\xi|\le\theta_0/2$ справедливо разложение

$$\ln\left(e^{-ik\xi}\varphi(e^{\eta+i\xi})/\varphi(e^{\eta})\right)=-ik\xi+\sum_{j=1}^{\infty}b^{(j)}(\eta)\,\frac{i^j\xi^j}{j!}. \tag{5}$$

Так как φ – в.р.р. и $\varphi\ne 0$ при $|\arg z|<\theta_0$, то ([1, с. 151]) $\lim\limits_{r\to\infty}r^{-\rho(r)}\ln\varphi(r)=h(0)>0$, и, следовательно,

$$b(\eta)=\ln\varphi(e^{\eta})>C_1e^{\eta\rho(e^{\eta})}\ge C_2e^{\eta\frac{\rho}{2}},\quad \rho>0.$$

(Здесь и далее буквой C с индексами обозначаются положительные постоянные.) Поэтому $\lim\limits_{\eta\to+\infty}b'(\eta)=\infty$, а значит уравнение

$$b'(\eta)=k \tag{6}$$

имеет решения для всех $k\ge k_0=[b'(0)]+1$. Пусть $\eta=\eta(k)$ – наименьший из корней (6). Такой выбор η позволяет записать равенство (5) в виде

$$\ln\left(e^{-ik\xi}\varphi(e^{\eta+i\xi})/\varphi(e^{\eta})\right)=-\frac{b''(\eta)}{2}\xi^2+\tau(\xi,\eta), \tag{7}$$

где

$$\tau(\xi,\eta)=\sum_{j=3}^{\infty}b^{(j)}(\eta)\,i^j\xi^j/j!$$

Для оценки $\delta^{(j)}(\eta)$ нам потребуется следующий факт.

Лемма 2. При $\eta=\eta(k)$ справедливы следующие неравенства:

$$k=\delta'(\eta)\leq C_3\, e^{\eta\rho(e^{\eta})}, \tag{8}$$

$$e^{\eta\rho(e^{\eta})}\leq C_4\, k^{4/3}, \tag{9}$$

$$|\delta^{(j)}(\eta)|\leq \frac{2^j j!}{\theta_0^j} C_5\, k^{4/3}. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим формулу Шварца к функции $\ln\varphi(e^{\eta+z})$ в круге $|z|\leq\theta_0/2$.

$$\ln\varphi(e^{\eta+z})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|\varphi\left(e^{\eta+\frac{\theta_0}{2}e^{i\tau}}\right)\right|\frac{\theta_0 e^{i\tau}+2z}{\theta_0 e^{i\tau}-2z}\,d\tau+iC.$$

Продифференцировав по z и подставив $z=0$, получим

$$|\delta^{(j)}(\eta)|\leq 2^j j!\,\theta_0^{-j}\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\ln\left|\varphi\left(e^{\eta+\frac{\theta_0}{2}e^{i\tau}}\right)\right|\right|d\tau=$$

$$=2^{j+1}j!\,\theta_0^{-j}\left\{\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\ln^+\left|\varphi\left(e^{\eta+\frac{\theta_0}{2}e^{i\tau}}\right)\right|d\tau-(2\pi)^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|\varphi\left(e^{\eta+\frac{\theta_0}{2}e^{i\tau}}\right)\right|d\tau\right\}=2^{j+1}j!\,\theta_0^{-j}\left\{\pi^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{-\pi}^{\pi}\ln^+\left|\varphi\left(e^{\eta+\frac{\theta_0}{2}e^{i\tau}}\right)\right|d\tau-\ln\varphi(e^{\eta})\right\}.$$

Так как $\ln\varphi(x)=\ln\varphi_1(x)+\ln\varphi_2(x)>0,\ x\geq 0$, то

$$|\delta^{(j)}(\eta)|\leq 2^{j+1}j!\,\theta_0^{-j}\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\ln^+\left|\varphi\left(e^{\eta+\frac{\theta_0}{2}e^{i\tau}}\right)\right|d\tau.$$

В силу свойств индикатора ([1, с. 97]) и уточненного порядка ([1, с. 49]) получаем

$$\ln^+\left|\varphi\left(e^{\eta+\frac{\theta_0}{2}e^{i\tau}}\right)\right|\leq\left(h\left(\frac{\theta_0}{2}\sin\tau\right)+\varepsilon\right)\times$$

$$\times e^{\left(\eta+\frac{\theta_0}{2}\cos\tau\right)\rho\left(e^{\eta+\frac{\theta_0}{2}\cos\tau}\right)}\leq C_6\, e^{\eta\rho(e^{\eta})}.$$

Отсюда

$$\left| b^{(j)}(\eta) \right| \leqslant 2^j j!\, \theta_0^{-j}\, C_7\, e^{\eta\rho(e^\eta)},$$

и, в частности, $k = b'(\eta) \leqslant C_3 e^{\eta\rho(e^\eta)}$, что и доказывает (8).

Покажем теперь, что справедливы (9) и (10). Так как $\eta = \eta(k)$ – наименьший из корней уравнения (6), то $b'(\eta) < k$, $\eta < \eta(k)$. Следовательно,

$$b(\eta(k)) = \int\limits_0^{\eta(k)} b'(\eta)\,d\eta + b(0) < k\eta(k) + b(0).$$

Так как $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-\rho(r)} \ln \varphi(r) = h(0) > 0$, а $b(\eta) = \ln\varphi(e^\eta) > 0$, то

$$C_8\, e^{\eta\rho(e^\eta)} < b(\eta) < k\eta + b(0) \leqslant C_9\, e^{\eta\rho(e^\eta)/4}\, k.$$

Отсюда следует (9), а затем (10). Лемма доказана.

Из (10) следует, что $\left| \tau(\xi, \eta) \right| \leqslant C_5\, k^{4/3} \times$

$$\times \sum_{j=3}^{\infty} 2^j |\xi|^j \theta_0^{-j} = C_5 k^{4/3}\, 8\, |\xi|^3 / \left(\theta_0^3 \left(1 - 2\theta_0^{-1} |\xi|\right)\right).$$

Будем считать $|\xi| \leqslant \dfrac{\theta_0}{4}$. Тогда $|\tau(\xi,\eta)| \leqslant C_{10} |\xi|^3 k^{4/3}$. Выберем

$$\delta = \delta(\eta) = \left(\pi / (3C_{10})\right)^{1/3} k^{-4/9} \tag{12}$$

При таком выборе δ будет $|\tau(\xi,\eta)| \leqslant \dfrac{\pi}{3}$, а значит $\cos\tau(\xi,\eta) \geqslant \frac{1}{2}$.

Отсюда, учитывая (10) и (7), имеем

$$I_1 \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \exp\left(-C_{11} k^{4/3} \xi^2 / 2\right) d\xi =$$

$$= \left(2\sqrt{C_{11}}\, k^{2/3}\right)^{-1} \int\limits_{-\sqrt{C_{11}}\, k^{2/3}\delta}^{\sqrt{C_{11}}\, k^{2/3}\delta} \exp\left(-u^2/2\right) du \geqslant C_{12}\, k^{-2/3}. \tag{13}$$

Оценим $|I_2|$ сверху.

$$|I_2| \leqslant 2 \int\limits_{\delta}^{\theta_0/4} \left| \varphi(e^{\eta+i\xi}) / \varphi(e^\eta) \right| d\xi +$$

$$+ 2 \int\limits_{\theta_0/4}^{\pi} \left| \varphi(e^{\eta+i\xi}) / \varphi(e^\eta) \right| d\xi = 2\left(I_2^1 + I_2^2\right).$$

Для оценки I_2^1 понадобится следующая лемма.

Лемма 3.

$$\ln\left|\varphi(re^{i\theta})\right| - \ln\varphi(r) \leqslant -C_{13}\, r^{\rho(r)}\, \theta^2, \tag{14}$$

при $|\theta| \leqslant \dfrac{\theta_0}{4}$, $r \geqslant r_7$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция φ – в.р.р. и не имеет нулей в угле $\{\theta : |\theta| \le \theta_0/2\}$, то при $|\theta| \le \theta_0/2$ справедливо:

$$\ln_{r\to\infty} |\varphi(re^{i\theta})| = Ar^{\rho(r)} \cos(\rho(r)\theta) + o(r^{\rho(r)}).$$

Легко показать, что при $r_0/2 \le r \le 3r_0/2$ выполняется равенство

$$r^{\rho(r)} = r^{\rho(r_0)} (1+o(1)), \qquad r_0 \to \infty.$$

Следовательно,

$$\ln|\varphi(re^{i\theta})| = Ar^{\rho(r_0)} \cos(\rho(r_0)\theta) + o(r^{\rho(r_0)}), \quad r_0 \to \infty.$$

Обозначим

$$\lambda_{r_0}(re^{i\theta}) = \ln|\varphi(re^{i\theta})| - Ar^{\rho(r_0)} \cos(\rho(r_0)\theta) -$$

гармоническую при $|\theta| \le \theta_0/2$ и $r_0/2 \le r \le 3r_0/2$ функцию.
Заметим, что

$$\lambda_{r_0}(re^{i\theta}) = o(r^{\rho(r_0)}), \quad r_0 \to \infty, \quad |\theta| \le \theta_0/2.$$

Так как $\lambda_{r_0}(re^{i\theta}) = \lambda_{r_0}(re^{-i\theta})$, то $\frac{\partial}{\partial\theta}\lambda_{r_0}(re^{i\theta})\Big|_{\theta=0} = 0$, а значит при $|\theta| \le \theta_0/4$ справедливо

$$\lambda_{r_0}(re^{i\theta}) - \lambda_{r_0}(r) = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\lambda_{r_0}(re^{i\theta})\Big|_{\theta=\tau_0} \frac{\theta^2}{2}, \tag{15}$$

где $|\tau_0| < \frac{\theta_0}{4}$.

В силу гармоничности $\lambda_{r_0}(re^{i\theta})$ при $|z| \le \theta_0/4$ имеем

$$\lambda_{r_0}(re^{i(\tau_0+z)}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lambda_{r_0}\left(re^{i(\tau_0+\frac{\theta_0}{4}e^{i\psi})}\right) \times$$
$$\times \operatorname{Re}\frac{\theta_0 e^{i\psi}+4z}{\theta_0 e^{i\psi}-4z}\, d\psi,$$

откуда

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\lambda_{r_0}(re^{i\theta})\Big|_{\theta=\tau_0}\right| = \left|\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda_{r_0}\left(re^{i(\tau_0+\frac{\theta_0}{4}e^{i\psi})}\right)\operatorname{Re}\frac{64\theta_0 e^{i\psi}}{(\theta_0 e^{i\psi}-z)^3}\Big|_{z=0} d\psi\right| \le$$

$$\le o(r^{\rho(r_0)})\, 64/\theta_0^2 = o(r^{\rho(r_0)}) \le$$

$$\le A\rho^2 r^{\rho(r_0)}/\pi^2, \quad r_0 \ge x_1.$$

Откуда, учитывая (15), получаем, что при $|\theta| \le \theta_0/4$

$$\ln|\varphi(re^{i\theta})| - \ln\varphi(r) \le$$

$$\le -2Ar^{\rho(r_0)} \sin^2 \frac{\rho(r_0)\theta}{2} + |A_{r_0}(re^{i\theta}) -$$

$$- A_{r_0}(r)| \le -2A(\rho(r_0))^2 r^{\rho(r_0)} \theta^2/\pi^2 +$$

$$+ A\rho^2 r^{\rho(r_0)} \theta^2/\pi^2 \le -A\rho^2 r^{\rho(r_0)} \theta^2/ \times$$

$$\times/(2\pi^2) \le -A\rho^2 r^{\rho(r)} \theta^2/(4\pi^2), \qquad r \ge x_2,$$

что и требовалось доказать.

В силу леммы при $\delta \le |\xi| \le \theta_0/4$, $\eta \ge \eta_1 > 0$

$$|\varphi(e^{\eta+i\xi})/\varphi(e^\eta)| \le \exp\left(-C_{13} e^{\eta\rho(e^\eta)} \xi^2\right) \le$$

$$\le \exp\left(-C_{13} e^{\eta\rho(e^\eta)} \delta^2\right),$$

откуда, учитывая (8) и (12), получаем

$$|\varphi(e^{\eta+i\xi})/\varphi(e^\eta)| \le \exp(-C_{14} k^{1/9}),$$

$$k \ge k_1,$$

следовательно,

$$I_2^1 \le 2\pi \exp(-C_{14} k^{1/9}), \qquad k \ge k_1. \tag{16}$$

Оценим теперь I_2^2. В силу (3)

$$\ln|\varphi(e^{\eta+i\xi})| - \ln\varphi(e^\eta) \le$$

$$\le (h(\varphi)-h(0)) e^{\eta\rho(e^\eta)} + \sigma(e^\eta) e^{\eta\rho(e^\eta)} +$$

$$+ (h_1(\varphi)-h_1(0)) e^{\eta\rho_1(e^\eta)} + o(e^{\eta\rho_1(e^\eta)}).$$

Так как по условию в) доказываемой теоремы имеем $h(\varphi)-h(0) < 0$, то, обозначая $C_{15} = \min(h_1(0) - h_1(\varphi))$, $\frac{\theta_0}{4} \le \varphi \le \pi$, и учитывая (4), получаем

$$\ln|\varphi(e^{\eta+i\xi})| - \ln\varphi(e^\eta) \le -C_{15} e^{\eta\rho_1(e^\eta)} +$$

$$+ o(e^{\eta\rho_1(e^\eta)}) \le -C_{16} e^{\eta\rho(e^\eta)/2}, \quad \eta \ge \eta_2,$$

откуда в силу (8)

$$\ln|\varphi(e^{\eta+i\xi})| - \ln\varphi(e^\eta) \le -C_{17} k^{1/2}, \qquad k \ge k_2.$$

Следовательно,

$$I_2^2 \le 2\pi \exp\left(-C_{17}\, k^{1/2}\right), \qquad k \ge k_2. \tag{17}$$

Из оценок (16), (17), (13) следует, что коэффициенты c_k в разложении функции φ все, за исключением, возможно, конечного числа, положительны. Тем самым основное предложение доказано.

Для завершения доказательства теоремы 2, покажем, что существует n_0 такое, что для всех $n \ge n_0$ коэффициенты функции $f(z)=(1+z)^n\varphi(z)$ неотрицательны.

Пусть N – натуральное число. Введем обозначения:

$$\varphi_1(z,N)=\sum_{k=0}^{N} c_k z^k, \qquad \varphi_2(z,N)=\sum_{k=N+1}^{\infty} c_k z^k.$$

Выберем N настолько большим, чтобы при $k \ge N$ выполнялось $c_k>0$. Так как $c_N>0$, то существует $x_0>0$ такое, что при $x \ge x_0$ будем иметь $\varphi_1(x,N)>0$. Ясно, что тогда $\varphi_1(x,M)>0$ при всех $M \ge N$. Так как $\varphi(x)>0,\ x\ge 0$, а $\varphi_1(x,M)$ равномерно на любом компакте в $\mathbb{R}$ стремится к $\varphi(x)$ при $M\to\infty$, то существует M_0 такое, что при $M \ge M_0$ выполняется $\varphi_1(x,M)>0,\ 0\le x\le x_0$. Зафиксируем M таким, чтобы $\varphi_1(x,M)>0$ при всех $x\ge 0$. По теореме Полиа ([5, с. 82, № 187]) существует n_0 такое, что при $n \ge n_0$ коэффициенты $(1+z)^n\varphi_1(z,M)$ неотрицательны. Следовательно, коэффициенты функции

$$f(z)=(1+z)^n\varphi(z)=(1+z)^n\varphi_1(z,M)+(1+z)^n\varphi_2(z,M)$$

неотрицательны. Тем самым теорема 2 доказана.

Докажем теперь теорему 1. Пусть h – функция, фигурирующая в условиях теоремы 1 и не являющаяся тригонометрической в окрестности нуля. Покажем, что существует последовательность функций h_n, обладающих свойствами а), б), в), г), и таких, что $h_n \le h$ и $h_n \to h$ при $n\to\infty$. Для этого выберем последовательность $\theta_n \downarrow 0$ такую, что в точках θ_n существует производная $h'(\theta_n)$, и положим

$$h_n(\theta)=\begin{cases} h(\theta), & \theta_n \le |\theta| \le \pi \\ \max\left\{h(\theta)\cos\rho\theta,\ h(\theta_n)+\dfrac{h'(\theta_n)}{\rho}\times\right. & \\ \left.\times\sin\rho(\theta-\theta_n)\right\}, & |\theta|\le\theta_n \end{cases}$$

Нетрудно увидеть, что построенная последовательность является искомой.

По теореме 2 существует целая функция f_n в.р.р. относительно (1) но $\rho(r)$ с неотрицательными коэффициентами и такая, что $h(\theta, f_n) = h_n(\theta)$.

Доказательство завершает ссылка на следующую теорему из [5]

Теорема А. Пусть $\rho(r) \to \rho > 0$ – уточненный порядок, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность целых функций в.р.р. относительно $\rho(r)$, причем $H(\theta) = \sup\{h(\theta, f_k), k \in \mathbb{N}\} < \infty$ для всех θ. Существует последовательность $\{a_k\}$ положительных чисел такая, что ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(z)$$

сходится абсолютно и равномерно на любом компакте с $\mathbb{C}$ и его сумма f является целой функцией нормального типа относительно $\rho(r)$ и $h(\theta, f) \equiv H(\theta)$.

1. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М. : Гостехиздат, 1956. – 632 с.
2. Логвиненко В.Н. Построение целой функции с заданным индикатором при заданном целом уточненном порядке // Функциональный анализ и его приложения. – 1972. – 6, № 4. – С. 90-91.
3. Гольдберг А.А., Островский И.В. Индикаторы целых эрмитово-позитивных функций // Сиб. мат. журн. – 1982. – 23, № 6. – С. 55-73.
4. Гольдберг А.А., Островский И.В. Индикаторы целых абсолютно монотонных функций конечного порядка // Там же. – 1986. – 27, № 6. – С. 33-49.
5. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. – М. : Наука, 1978. – Т. 2. – 428 с.

УДК 517.584

А.Ю.Рашковский

МАЖОРАНТЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ МЕР И РАВНОМЕРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ СЕМЕЙСТВ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Получены интегральные варианты теорем Вольфа и Левинсона – Съоберга о равномерной ограниченности семейств субгармонических функций.

Мы получим здесь новые, интегральные варианты (теоремы 3 и 4) следующих теорем о равномерной ограниченности семейств субгармонических функций.

Теорема А (Вольф [1]). Пусть F – неотрицательная измеримая функция на $(0, \pi)$,

ISBN 5-12-001584-0. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Киев, 1990.

$$\int_0^{\pi} \log^+ F(\theta)\,d\theta < \infty,$$

а субгармоническая в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функция $u(z)$ такова, что $\varlimsup\limits_{z\to x_0,\ z\in\mathbb{C}_+} u(z) \le 0 \quad \forall x_0\in\mathbb{R}$ и

$$\forall\varepsilon>0 \quad \forall r>R(\varepsilon) \quad u(re^{i\theta}) \le \varepsilon r F(\theta), \qquad 0<\theta<\pi. \tag{1}$$

Тогда $u(z) \le 0 \quad \forall z\in\mathbb{C}_+$.

Теорема В (Левинсон [2], Сьоберг [3], Вольф [4])*. Пусть F – неотрицательная измеримая функция на $(-1, 1)$,

$$\int_{-1}^{1} \log^+ F(t)\,dt < \infty,$$

а функция $u(z)$, субгармоническая в квадрате $R=(-1,1)\times(-1,1)$, удовлетворяет условию $u(x+iy) \le F(y) \quad \forall (x,y)\in R$. Тогда для любого компакта $K\subset R$ существует такая не зависящая от функции u константа C_K, что $u(z) \le C_K \quad \forall z\in K$.

Используемый в работе единый способ получения теоремы 3 и 4 основан на построении области в комплексной плоскости, гармоническая мера которой на части границы мажорируется заданной мерой (теоремы 1 и 2). Эта задача, представляющая, на наш взгляд, и самостоятельный интерес, решается с помощью методов, разработанных Б.Я.Левиным при изучении мажорант в классах субгармонических функций [8].

1. В этом пункте мы по мере ν из некоторого класса N построим каноническую область $\mathcal{R}$, гармоническая мера которой на части $\partial\mathcal{R}$ мажорируется (с некоторой константой) мерой ν.

Пусть $\nu(t)$ – непрерывная строго возрастающая функция на отрезке $[a,b]$. Эту функцию мы отождествляем с мерой ν, полагая $\forall e\subset[a,b] \quad \nu(e)=\int_e d\nu(t)$. Будем говорить, что функция $\nu(t)$ принадлежит классу $N([a,b])$, если обратная к ней функция $\mu(t)$ удовлетворяет следующему условию Дини:

$$\sup_{x\in[a,b]} \int_0^{\delta} \frac{\mu(x+t)-\mu(x-t)}{t}\,dt \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{2}$$

(мы считаем $\mu(t)=\mu(a) \quad \forall t<a$ и $\mu(t)=\mu(b) \quad \forall t>b$).

Сопоставим каждой непрерывной на $[a,b]$ функции φ область

$$\mathcal{R}_\varphi = \left\{ w=u+iv\in\Pi_{a,b} \ :\ v>\varphi(u) \right\}. \tag{3}$$

---

* См. также [5]. Далеко идущие обобщения этой теоремы содержатся в работах Домара [6, 7].

где $\Pi_{a,b} = \{ w \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} w < b \}$; через S_φ обозначим криволинейную часть $\partial\mathcal{P}_\varphi$: $S_\varphi = \{ w \in \overline{\Pi}_{a,b} : v = \varphi(u) \}$.

Теорема I. Для любой функции $\vartheta \in N([a,b])$ существует такая функция $\varphi \in C([a,b])$, что гармоническая мера $\omega(w, e, \mathcal{P}_\varphi)$ любого борелевского множества $e \subset S_\varphi$ в каждой точке произвольного компакта $K \subset \mathcal{P}_\varphi$ удовлетворяет неравенству

$$\omega(w, e, \mathcal{P}_\varphi) \leqslant C(K)\vartheta(\hat{e}), \tag{4}$$

где $\hat{e} = \{ u \in \mathbb{R} : u + iv \in e \}$ – проекция множества e на вещественную ось.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\vartheta : [0,1] \to [0,1]$. Положим

$$v_0(z) = \int_0^1 \log|t - z|\, d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C},$$

где $\mu(t)$ – непрерывная строго возрастающая функция на $[0,1]$, обратная к функции $\vartheta(t)$. Ясно, что функция $v_0(z)$ субгармонична во всей плоскости, гармонична вне отрезка $[0,1]$ и

$$\frac{\partial v_0(x+iy)}{\partial y} = \int_0^1 \frac{y\, d\mu(t)}{(t-x)^2 + y^2} > 0 \qquad \forall y > 0. \tag{5}$$

Несложно убедиться в том, что функция $v_0(z)$ непрерывна всюду в $\mathbb{C}$. В самом деле, ввиду ее полунепрерывности сверху и неравенства (5), достаточно показать, что она полунепрерывна снизу на вещественной оси. Последнее вытекает из условия (2), поскольку $\forall \varepsilon > 0$

$$\int_0^1 \ln|t-x|\, d\mu(t) = \left| \int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^1 \right| \ln|t-x|\, d\mu(t) +$$

$$+ \ln\varepsilon \left[\mu(x+\varepsilon) - \mu(x-\varepsilon) \right] - \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\mu(t)}{t-x}\, dt =$$

$$= v_\varepsilon(x) - \int_0^\varepsilon \frac{\mu(x+t) - \mu(x-t)}{t}\, dt,$$

где функция $v_\varepsilon(x)$ непрерывна по $x \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $u_0(z)$ функцию, гармонически сопряженную к $v_0(z)$ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Из непрерывности функции $\mu(t)$ и соотношения (5) следует, в силу леммы 2.4 из [8], что функция $u_0(z)$ непрерывна в $\overline{\mathbb{C}}_+$, причем

$$u_0(x_2) - u_0(x_1) = \pi\left[\mu(x_2) - \mu(x_1)\right] \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Функция u_0 определена с точностью до постоянной, которую мы выберем так, чтобы $u_0(0)=0$.

Определим, наконец, аналитическую в $\mathbb{C}_+$ функцию

$$w(z)=u(z)+iv(z)=\frac{1}{\pi}\left[u_0(z)+iv_0(z)\right].$$

По доказанному, функция w непрерывна в $\bar{\mathbb{C}}_+$, причем $u(x)=\mu(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ (напомним, что $\mu(x)=0$ $\forall x<0$ и $\mu(x)=1$ $\forall x>1$). Ясно, что она отображает луч $\{x<0,\ y=0\}$ в луч $\{u=0,\ v>v(0)\}$, луч $\{x>1,\ y=0\}$ – в луч $\{u=1,\ v>v(1)\}$, а отрезок $[0,1]$ – в кривую $S=\{u=u(x),\ v=v(x),\ x\in[0,1]\}=\{u+iv:v=v(\nu(u)),\ u\in[0,1]\}$. В силу неравенства (5) отсюда следует, что функция w отображает полуплоскость $\mathbb{C}_+$ на область $\mathcal{D}_\varphi$ вида (3) с $\varphi=v\circ\nu$. Это отображение однолистно ввиду монотонности функции $u(x)$ и непрерывности $w(z)$ в $\bar{\mathbb{C}}_+$ (теорема 2.2 из [8]).

Покажем теперь, что гармоническая мера $\omega(w,e,\mathcal{D}_\varphi)$ удовлетворяет соотношению (4). Пусть точка $w_0\in K\subset\{w\in\mathcal{D}_\varphi:\ dist\,(w,S_\varphi)\geq\delta>0\}$, а множество $e\subset S_\varphi$. Тогда $w^{[-1]}(w_0)=z_0=x_0+iy_0\in\mathbb{C}_+$, $dist\,(z_0,[0,1])\geq c_1(\delta)>0$, $w^{[-1]}(e)=e^*\subset[0,1]$ и

$$\omega(w_0,e,\mathcal{D}_\varphi)=\omega(z_0,e^*,\mathbb{C}_+)=$$

$$=\int_{e^*}\frac{y_0\,dx}{(x-x_0)^2+y_0^2}=\int_{u(e^*)}\frac{y_0\,d\nu(u)}{[\nu(u)-x_0]^2+y_0^2}\leq c_1^{-1}(\delta)\int_{u(e^*)}d\nu(u).$$

Отсюда, поскольку $u(e^*)=u(w^{[-1]}(e))=\hat{e}$, следует соотношение (4). Теорема доказана.

Неясно, является ли введенный класс N наибольшим, для которого справедливо утверждение доказанной теоремы. Однако, как нам кажется, для ряда приложений представляет интерес даже его сужение, фигурирующее в следующей ниже теореме 2. Преимуществом этого подкласса является его более наглядное (по сравнению с условием (2)) описание.

Теорема 2. Пусть $f(s)$ – неотрицательная суммируемая функция на (a,b), удовлетворяющая условию

$$\int_a^b \log^- f(s)\,ds<\infty. \qquad (6)$$

Тогда функция $\nu(t)\overset{def}{=}\int_0^t f(s)\,ds$ принадлежит классу $N([a,b])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По-прежнему будем считать, что $\nu:[0,1]\to[0,1]$. В силу условия (6) функция $\mu(t)$, обратная к $\nu(t)$, является так же абсолютно непрерывной строго возрастающей функцией на $[0,1]$, т.е. $\mu(t)=\int_0 g(s)\,ds$, где g – некоторая неотрицательная функция. Имеем

$$\infty > \int_0^1 \log^- f(s)\,ds = \int_0^1 \log^- \nu'(s)\,ds =$$

$$= \int_0^1 \log^- \frac{1}{\mu'(t)}\,d\mu(t) = \int_0^1 g(t)\log^+ g(t)\,dt \quad ,$$

т.е. $g \in L\log L\,([0,1])$.

Далее обозначим через $\Delta(t)$ модуль непрерывности функции μ, т.е. положим $\Delta(t) = \sup\limits_{|x-y|\le t} |\mu(x)-\mu(y)|$. Заметим, что $\Delta(t) = \int_0^t g^*(s)\,ds$, где g^* – невозрастающая функция на $(0,1)$, равноизмеримая с g. Тогда

$$\int_0^1 \frac{\Delta(t)}{t}\,dt = \int_0^1 t^{-1}\int_0^t g^*(s)\,ds\,dt =$$

$$= \int_0^1 g^*(s)\log s^{-1}\,ds = \int_{E_1\cup E_2} g^*(s)\log s^{-1}\,ds \ ,$$

где $E_1 = \left\{ s\in(0,1) \ : g^*(s) > s^{-\frac{1}{2}} \right\}, \quad E_2 = (0,1)\setminus E_1$.
Поскольку $g^* \in L\log L$, то

$$\int_{E_1} g^*(s)\log s^{-1}\,ds \le 2\int_{E_1} g^*(s)\log g^*(s)\,ds \le$$

$$\le 2\int_0^1 g^*(s)\log^+ g(s)\,ds < \infty \ ;$$

$$\int_{E_2} g^*(s)\log s^{-1}\,ds \le \int_{E_2} s^{-\frac{1}{2}}\log s^{-1}\,ds < \infty \ .$$

Значит $\int_0^1 \frac{\Delta(t)}{t}\,dt < \infty$. Поэтому $\lim\limits_{\delta\to 0}\int_0^\delta \frac{\Delta(t)}{t}\,dt = 0$, откуда и следует соотношение (2). Теорема доказана.

2. Сейчас мы покажем, как с помощью результатов предыдущего пункта получить усиление теоремы А.

Теорема 3. Пусть функция $\nu \in N([0,\pi])$, а субгармоническая в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функция $u(z)$ удовлетворяет условиям

$$\overline{\lim_{z\to x_0,\ z\in\mathbb{C}_+}}\ u(z) \le 0 \qquad x_0 \in \mathbb{R}\ , \qquad \text{[illegible]}$$

$$\lim_{r \to \infty} r^{-1} \int_0^{\pi} u^+ (re^{i\theta}) d\nu(\theta) = 0 . \qquad (8)$$

Тогда $u(z) \leq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}_+$.

Доказательство. По мере $\nu \in N([0,\pi])$ в соответствии с теоремой 1 построим область $\mathcal{R}_\varphi$, гармоническая мера которой удовлетворяет условию (4). Пусть $F(w)$ – конформное отображение полосы $\Pi_{0,\pi}$ на $\mathbb{C}_+$, при котором $|F(u+iv)| \xrightarrow[v \to +\infty]{} 0$, $|F(u+iv)| \xrightarrow[v \to -\infty]{} \infty$, а отрезок $\{u+id : 0 < u < \pi\}(d > \max\{Im\, w : w \in S_\varphi\})$ переходит в полуокружность $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}_+ : |z| = 1\}$. Это отображение переводит кривую S_φ в некоторую кривую $T \subset \{z \in \bar{\mathbb{C}}_+ : |z| > 1\}$, имеющую с каждым лучом $\{\arg z = \theta\}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, ровно одну точку пересечения, т.е. $T = \{re^{i\theta} : r = r(\theta), \ 0 \leq \theta \leq \pi\}$, остальную часть $\partial\mathcal{R}_\varphi$ – в некоторый отрезок (a,b), $a < 0 < b$, а саму область $\mathcal{R}_\varphi$ – в ограниченную область D. При этом $\forall z \in \Gamma$ и $\forall e \subset T$

$$\omega(z,e,D) = \omega(F^{[-1]}(z), F^{[-1]}(e), \mathcal{R}_\varphi) \leq C\nu(e^*) , \qquad (9)$$

где $e^* = \widehat{F^{[-1]}(e)} = \{\theta : (r,\theta) \in e\}$ – радиальная проекция множества e на Γ. Это означает, что для любой неотрицательной суммируемой на T функции ψ и $\forall z \in \Gamma$ выполнено неравенство,

$$\int_T \psi(\zeta)\omega(z,d\zeta,D) \leq C \int_0^{\pi} \psi(r(\theta)e^{i\theta}) d\nu(\theta) . \qquad (10)$$

Нам понадобится еще следующая простая

<u>Лемма 1</u>. Если функция $u(z)$ удовлетворяет условию (8), то

$$\lim_{t \to \infty} t^{-1} \int_0^{\pi} u^+(tr(\theta)e^{i\theta}) d\nu(\theta) = 0 . \qquad (11)$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $R_0 > 0$ так, чтобы

$$\int_0^{\pi} u^+(te^{i\theta}) d\nu(\theta) < \varepsilon t \qquad \forall t > R_0 . \qquad (12)$$

Тогда $\forall R > R_0$

$$\int_R^{2R} \int_0^{\pi} u^+(tr(\theta)e^{i\theta}) d\nu(\theta) = \int_0^{\pi} \int_{Rr(\theta)}^{2Rr(\theta)} u^+(te^{i\theta}) dt\, r^{-1}(\theta) d\nu(\theta) \leq$$

$$\leq \int_0^{\pi}\int_R^{2AR} u^+(te^{i\theta})\,dt\,d\nu(\theta) ,$$

где $A = \sup\{r(\theta) : 0 < \theta < \pi\}$. Последний интеграл в силу (12) не превосходит

$$\int_R^{2AR} \varepsilon t\,dt = C_1(A)\varepsilon R^2 .$$

Поэтому существует $t_0 \in (R, 2R)$ такое, что

$$\int_0^{\pi} u^+(t_0 r(\theta)e^{i\theta})\,d\nu(\theta) \leq C_2(A)\varepsilon t_0 ,$$

откуда и следует (11). Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы. Положим $u_t(z) = t^{-1}u(tz)$, $t > 0$. Из формулы Пуассона – Иенсена, примененной к функции $u_t^+(z)$, субгармонической в области D, с учетом условий (7) и (9), следует, что $\forall z \in \Gamma$

$$u_t^+(z) \leq \int_{\gamma} u_t^+(\zeta)\,\omega(z, d\zeta, D) \leq C\int_0^{\pi} u_t^+\left(r(\theta)e^{i\theta}\right)d\nu(\theta) . \qquad (13)$$

Значит, в силу (13), (11)

$$\varlimsup_{t\to\infty} t^{-1}\max\left\{u^+(z) : |z| = t\right\} = \varlimsup_{t\to\infty} \max\left\{u_t^+(z) : |z| = 1\right\} = 0 ,$$

и по теореме Фрагмена – Линделефа $u(z) \leq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}_+$. Теорема доказана.

Из теорем 2 и 3 очевидным образом вытекает следствие.

Следствие 1. Пусть для субгармонической в $\mathbb{C}_+$ функции $u(z)$ выполнено условие (7) и

$$\varliminf_{r\to\infty} r^{-1}\int_0^{\pi} u^+(re^{i\theta})\,f(\theta)\,d\theta = 0 , \qquad (14)$$

где функция f удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда $u(z) \leq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}_+$.

Отметим, что это утверждение содержит в себе теорему А, поскольку из соотношения (1) следует и соотношение (14) с $f(\theta) = \min\{[F(\theta)]^{-1}, 1\}$.

3. В этом пункте мы докажем интегральный аналог теоремы В.

Теорема 4. Пусть функция $u(z)$, субгармоническая в квадрате $R = (-1, 1) \times (-1, 1)$, удовлетворяет условию

$$\int_{-1}^{1} u^+(x+iy)\,d\nu(y) \le 1 \quad \forall x \in (-1,1) \tag{15}$$

с некоторой мерой $\nu \in N([-1,1])$. Тогда для любого компакта $K \subset R$ существует не зависящая от функции $u(z)$ константа C_K такая, что $u(z) \le C_K \quad \forall z \in K$.

Доказательство этого утверждения близко к доказательству теоремы 3, но технически чуть более трудоемко. Установим предварительно несколько простых предложений.

Лемма 2. Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет условию (15). Тогда $\forall d \in (0,1)$ существует такая константа $M_1(d)$, не зависящая от функции $u(z)$, что $\forall y_0 \in (-1,1)$

$$\exists y' \in (-1,1) \cap \{y : |y-y_0| < d\} : \int_{-1}^{1} u^+(x+iy')\,dx < M_1(d).$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $y_0 \ge 0$. Тогда

$$\int_{y_0-d}^{y_0} \int_{-1}^{1} u^+(x+iy)\,dx\,d\nu(y) = \int_{-1}^{1} \int_{y_0-d}^{y_0} u^+(x+iy)\,d\nu(y)\,dx \le 2.$$

Значит, $\exists y' \in (y_0-d, y_0)$:

$$\int_{-1}^{1} u^+(x+iy')\,dx \le 2\left[\nu(y_0) - \nu(y_0-d)\right]^{-1} \le 2\left[\Delta_*(\nu,d)\right]^{-1},$$

где $\quad \Delta_*(\nu,d) = \inf\limits_{t \in (0,1)} \{\nu(t) - \nu(t-d)\} > 0.$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет условию (15). Пусть, далее, $r(y)$ – непрерывная функция на $[\alpha,\beta] \subset [-1,1]$,

$r_1 = \min\limits_{[\alpha,\beta]} r(y) > 0, \quad r_2 = \max\limits_{[\alpha,\beta]} r(y) < 1,$

и пусть $\delta \in (0, 1-r_2)$. Тогда при некотором $t \in (0,\delta)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} u^+(t + r(y) + iy)\,d\nu(y) < M_2(\delta),$$

где константа $M_2(\delta)$ не зависит от функции u.

Доказательство. Имеем

$$\int_0^{\delta}\int_{\alpha}^{\beta} u^+(t + r(y) + iy)\,d\nu(y)\,dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r(y)}^{\delta+r(y)} u^+(s+iy)\,ds\,d\nu(y) \le$$

$$\leq \int_{r_1}^{\delta+r_2} \int_{\alpha}^{\beta} u^+(s+iy)d\nu(y)ds \leq \delta + r_2 - r_1 .$$

Значит, $\exists t \in (0, \delta)$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} u^+(t+r(y)+iy)d\nu(y) \leq \delta^{-1}(\delta + r_2 - r_1).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. В соответствии с теоремой 1 по мере ν построим область $\mathcal{D}_\varphi$ такую, что для любых множеств $E \subset\subset \mathcal{D}_\varphi$, $e \subset S_\varphi$

$$\omega(w, e, \mathcal{D}_\varphi) \leq C(E)\nu(\hat{e}), \quad \forall w \in E, \tag{16}$$

где $\hat{e}$ – проекция множества e на $\mathbb{R}$.

В отличие от ситуации, рассмотренной в теореме 3, мы сейчас не можем подходящим образом конформно отобразить всю область $\mathcal{D}_\varphi$ в квадрат R. Поэтому поступим следующим образом. Пусть K – произвольный компакт в R и пусть $0 < \lambda < \frac{1}{4} dist(K, \partial R)$. Выберем число $\tau \in (0, \lambda)$ так, чтобы модуль непрерывности функции φ в точке 4τ был меньше λ. Построим какое-нибудь покрытие компакта K кругами $B_j = \{z : |z - z_j| < \tau\}$, $z_j \in K$, $1 \leq j \leq n$. Для доказательства теоремы достаточно оценить $u(z)$ в каждом круге B_j.

Положим $R_j = \{z \in R : |Im(z - z_j)| < 2\tau\}$. Ясно, что $B_j \subset R_j$, $dist(B_j, \partial R_j) \geq \tau$. Соответственно этому выделим в области $\mathcal{D}_\varphi$ множества $\mathcal{D}^{(j)} = \{w \in \mathcal{D}_\varphi : |Re(w - z_j)| < 2\tau\}$, $S^{(j)} = S_\varphi \cap \overline{\mathcal{D}^{(j)}} = \{w : v = \varphi(u),\ a_j \leq u \leq b_j\}$.

Рассмотрим семейство областей $\mathcal{D}^{(j)}(h) = \{w \in \mathcal{D}^{(j)} : v < -\varphi(u) + h\}$, где $h \in [\gamma_j, \Gamma_j] = [\tau + 2\max\limits_{[a_j, b_j]} \varphi(u),\ 2 + 2\max\limits_{[a_j, b_j]} \varphi(u)]$. Граница области $\mathcal{D}^{(j)}(h)$ состоит из кривой $S^{(j)}$, двух отрезков прямых $\{u = a_j,\ \varphi(a_j) < v < -\varphi(a_j) + h\}$, $\{u = b_j, \varphi(b_j) < v < -\varphi(b_j) + h\}$ и кривой $S^{(j)}(h) = -S^{(j)} + h$. По принципу расширения области для гармонических мер из (16) следует, что для любых множеств $E \subset \mathcal{D}^{(j)}(h)$ и $e \subset S^{(j)}$

$$\omega(w, e, \mathcal{D}^{(j)}(h)) \leq C(E)\nu(\hat{e}) \quad \forall w \in E.$$

Ясно, что такое же неравенство (с другой константой $C_1(E)$) выполняется и для любого множества $e \subset S^{(j)} + h$. Положим $C_2(E) = \max\{C_1(E),\ C(E)\}$. Тогда для любого множества $e \subset S^{(j)} \cup S^{(j)}(h)$ справедливо соотношение

$$\omega(w, e, \mathcal{R}^{(j)}(h)) \leq C_2(E)\nu(\hat{e}) \quad \forall w \in E \subset\subset \mathcal{R}^{(j)}(h), \tag{17}$$

где $\hat{e}$ – проекция множества e на вещественную ось с учетом кратности.

Выберем теперь вещественное число H_j так, чтобы функция $F_j(w) = iw + H_j$ отображала кривую $S^{(j)}$ на некоторую кривую $T_j = \{ z \in R_j : x = r_j(y) \}$, лежащую в прямоугольнике $R_j \cap \{z : 1 - 2\lambda < x < 1\}$. В силу леммы 3 $\exists t_1 \in (0, \lambda)$:

$$\int_{a_j}^{b_j} u^+(t_1 + r_j(y) + iy)\, d\nu(y) < M_2(\lambda). \tag{18}$$

Выберем также $h_j \in [\gamma_j, \Gamma_j]$ так, чтобы множество $S^{(j)}(h)$ отображением F_j переводилось в кривую $T_j(h_j) = \{z \in R_j : x = -r_j(y)\}$. Тогда, снова по лемме 3, $\exists t_2 \in (0, \lambda)$:

$$\int_{a_j}^{b_j} u^+(-t_2 - r_j(y) + iy)\, d\nu(y) < M_2(\lambda). \tag{19}$$

Область $\mathcal{R}^{(j)}(h)$ при отображении F_j переходит в область $P_j = \{ z \in R_j : -r_j(y) - t_2 < x < r_j(y) + t_1 \}$. По построению $B_j \subset\subset P_j$. Поэтому, в силу (17), для любого множества $e \subset T_j \cup T_j(h_j)$ справедливо неравенство

$$\omega(z, e, P_j) \leq C_2(B_j)\nu(\hat{e}) \quad \forall w \in B_j.$$

Наконец, в соответствии с леммой 2, выберем точки $y_1 \in (a_j, a_j + \tau)$ и $y_2 \in (b_j - \tau, b_j)$ так, чтобы

$$\int_{-1}^{1} u^+(x + iy_m)\, dx \leq M_1(\tau), \qquad m = 1, 2. \tag{20}$$

Положим $D_j = \{ z \in P_j : y_1 < Im\, z < y_2 \}$. Ясно, что $B_j \subset\subset D_j$, поэтому

$$\omega(z, e, D_j) \leq C_2(B_j)\nu(\hat{e}) \qquad \forall z \in B_j \tag{21}$$

для любого множества e на криволинейной части границы области D_j. Если же множество e принадлежит одной из прямолинейных частей ∂D_j, то справедливо, очевидно, неравенство

$$\omega(z, e, D_j) \leq C_3(B_j)\, mes\, e. \tag{22}$$

Теперь у нас все готово для оценки функции $u(z)$ в круге B_j. В силу неравенств (21), (22) и (18)-(20) имеем $\forall z \in B_j$

$$u^+(z) \leq \int_{\partial D_j} u^+(\zeta)\,\omega(z, d\zeta, D_j) \leq$$

$$\leq C_1(B_j)\int_{a_j}^{b_j} u^+(-t_2-r(y)+iy)\,d\nu(y) +$$

$$+ C_2(B_j)\int_{a_j}^{b_j} u^+(t_1+r(y)+iy)\,d\nu(y) +$$

$$+ C_3(B_j)\sum_{m=1}^{2}\int_{-1}^{1} u^+(x+iy_m)\,dx \leq$$

$$\leq 2C_2(B_j)M_2(\lambda) + 2C_3(B_j)\dot{M}_1(\tau) = C_4(B_j,\lambda,\tau).$$

Теорема доказана.

Так же, как и в предыдущем пункте, из доказанной теоремы вытекает следующее усиление теоремы В.

Следствие 2. Пусть $u(z)$ – субгармоническая функция в квадрате $R=(-1,1)\times(-1,1)$,

$$\int_{-1}^{1} u^+(x+iy)f(y)\,dy \leq 1 \qquad \forall x\in(-1,1),$$

где функция f удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда для любого компакта $K\subset R$ существует такая, не зависящая от функции u, константа C_K, что $u(z)\leq C_K$ $\forall z\in K$.

Интерес к данному кругу задач возник у автора благодаря И.В.Островскому, сформулировавшему в качестве гипотезы утверждение типа следствия 1. Автор благодарит А.Э.Еременко, подсказавшего проведенный здесь подход к доказательству теоремы 1, а также Л.И.Ронкина за внимание к работе.

1. Wolf F. An extension of the Phragmen - Lindelöf theorem // J. London Math. Soc. - 1939. - 14. - P. 208-216.
2. Levinson N. Gap and density theorems. Amer. Math. Colloc. Publ. 26. - New York, 1940.
3. Sjoberg N. Sur las minorantes sous harmoniques d'une fonction donnee // Neuvieme Congr. des Math. Scand. 1938. - Helsinki, 1939. - P. 309-319.
4. Wolf F. On majorants of subharmonic and analytic functions// Bull. Amer. Math. Soc. - 1942. - 49. - P. 952.
5. Гурарий В.П. К теореме Н.Левинсона о нормальных семействах аналитических функций // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. - 1970. - 19. - С. 215-220.
6. Domar Y. On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function // Ark. Mat. - 1958. - 3,N5.-P.429-440.
7. Domar Y. Uniform boundness in families related to subharmonic functions // Upps. Univ. Dep. Math. - 1987. - N 3.-P.1-13.

8. Левин Б.Я. Мажоранты в классах субгармонических функций и их приложения. I. - Харьков, 1984. - 52 с. - (Препр. / ФТИНТ АН УССР; 18-84).

УДК 517.977.3+517.974.5

Г.Н.Гестрин

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ФЕЙНМАНА С ПОМОЩЬЮ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ВИНЕРОВСКОГО ИНТЕГРАЛА ПО ВРЕМЕНИ С ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПОЛУОСИ НА МНИМУЮ ОСЬ

Получено представление для винеровского континуального интеграла в виде преобразования Лапласа, параметр которого p связан со временем t соотношением $p=(4t)^{-1}$, что позволяет осуществить непосредственное аналитическое продолжение в комплексную плоскость $Re\, t>0$. При некоторых предположениях о потенциале продолжение возможно вплоть до мнимой оси и приводит к интегралу Фейнмана.

Вероятностные представления, лежащие в основе конструкции меры и интеграла Винера, и его связь с диффузионным уравнением $u_t(\vec{r},t)=\Delta u(\vec{r},t)-v(\vec{r})u(\vec{r},t)$ хорошо известны [1].

Формальный переход к уравнению Шредингера $i\hbar u_t(\vec{r},t) = -\hbar^2\Delta u(\vec{r},t)/2m+v(\vec{r})u(\vec{r},t)$, связанный с заменой t на $i\hbar t/2m$ и $v(\vec{r})$ на $2mv(\vec{r})/\hbar^2$ в винеровском интеграле, привел Р.Феймана к плодотворному понятию интеграла с комплексной мерой Винера, который он сам и многие физики широко использовали в физических исследованиях [2, 3].

Математическое обоснование интеграла Фейнмана наталкивается на значительные затруднения. Эти трудности в известной степени были преодолены в работах [4-6] и др. Представлениям решений нелинейных квантомеханических уравнений и обоснованию комплексной меры в интеграле Фейнмана в импульсном пространстве посвящена работа [7].

В настоящей работе получено такое представление интеграла Винера, которое при определенных предположениях о потенциале позволяет перейти к интегралу Фейнмана прямой заменой t на it.

Доказываемые в § 2 леммы взяты из [8].

§ 1. Используемые обозначения и формулы.

1. R_3 -трехмерное пространство, $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{r}'=(x',y',z')$, $\vec{r}_j=(x_j,y_j,z_j)$ - точки из R_3.

ISBN 5-12-001584-0. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Киев, 1990.

$$\begin{cases} A_k = A_k(\vec r, \vec r_1, \dots, \vec r_k, \vec r\,') = |\vec r - \vec r_1| + |\vec r_1 - \vec r_2| + \dots + |\vec r_{k-1} - \vec r_k| + |\vec r_k - \vec r\,'|, \\ B_k = B_k(\vec r, \vec r_1, \dots, \vec r_k, \vec r\,') = |\vec r - \vec r_1|\,|\vec r_1 - \vec r_2| \dots |\vec r_{k-1} - \vec r_k|\,|\vec r_k - \vec r\,'|, \\ C_k = C_k(\vec r, \vec r_1, \dots, \vec r_k, \vec r\,') = \operatorname{grad}_{\vec r_1 \dots \vec r_k} A_k(\vec r, \vec r_1 \dots \vec r_k, \vec r\,'), \end{cases} \tag{1.1}$$

$d_k S$ – элемент площади $(3k-1)$-мерной поверхности в $3k$-мерном пространстве.

2. Решение $u \equiv u(\vec r, \vec r\,', t)$ задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \varepsilon v(\vec r) u ; \quad u\Big|_{t=+0} = \delta(\vec r - \vec r\,') \tag{1.2}$$

($v(\vec r)$ – непрерывна в R_3, ε – вещественный параметр) дается формулой Фейнмана – Каца [1].

$$u = \int e^{-\varepsilon \int_0^t v(\vec r(s))ds} d_W \vec r(s) = u_0(\vec r, \vec r\,', t) + \sum_1^\infty \frac{(-1)^k \varepsilon^k}{k!} u_k(\vec r, \vec r\,', t),$$

$$u_0(\vec r, \vec r\,', t) = (4\pi t)^{-3/2} \exp\left(-\frac{|\vec r - \vec r\,'|^2}{4t}\right), \tag{1.3}$$

$$u_k(\vec r, \vec r\,', t) = \int \left(\int_0^t v(\vec r(s))ds\right)^k d_W \vec r(s),$$

где интегралы в правых частях взяты по множеству всех непрерывных траекторий $\vec r(s)$, начинающихся в момент времени $s = 0$ в точке $\vec r\,'$ и оканчивающихся в момент времени $s = t$ в точке $\vec r$, по мере Винера.

Очевидно, что

$$u_0(\vec r, \vec r\,', t)\Big|_{t=+0} = \delta(\vec r - \vec r\,'); \; u_k(\vec r, \vec r\,', t)\Big|_{t=0} = 0 ; \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \Delta u_k + k v(\vec r) u_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{1.5}$$

3. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения $\Delta u - p u = 0$ в кубе $-\frac{a}{2} < x, y, z < \frac{a}{2}$ записывается в явном виде $G(x, y, z;$

$$\varepsilon, \eta, \zeta) = \sum_{n_1, n_2, n_3 = -\infty}^{+\infty} \Big(g(r^{(1)}_{n_1 n_2 n_3}) - g(r^{(2)}_{n_1 n_2 n_3}) + g(r^{(3)}_{n_1 n_2 n_3}) - g(r^{(4)}_{n_1 n_2 n_3}) +$$

$$+ g(r^{(5)}_{n_1 n_2 n_3}) - g(r^{(6)}_{n_1 n_2 n_3}) + g(r^{(7)}_{n_1 n_2 n_3}) - g(r^{(8)}_{n_1 n_2 n_3}) \Big),$$

где $g(x) = x^{-1} \exp(-\sqrt{p x})$, $r^{(1)}_{n_1 n_2 n_3} = \Big\{ (x - 2n_1 a - \varepsilon)^2 +$

$$+\left(y-2n_2a-\eta\right)^2+\left(z-2n_3a-\eta\right)^2\Big\}^{1/2};\ \ldots\ r^{(8)}_{n_1n_2n_3}=$$

$$=\left\{\left(x-(2n_1-1)a+\xi\right)^2+\left(y-(2n_2-1)a+\eta\right)^2+\left(z-(2n_3-1)a+\eta\right)^2\right\}^{1/2}.$$

4. Имеет место следующая формула:

$$\left(8\pi^{3/2}\right)^{-1}\int_0^\infty t^{-3/2}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}e^{-pt}\,dt=(4\pi\alpha)^{-1}e^{-\alpha\sqrt{p}} \qquad (1.6)$$

5. Согласно известной теореме Банаха [9] всякий линейный функционал $F(f)$, заданный на пространстве $L_1(\alpha,\beta)(|\alpha|,|\beta|<+\infty)$ функций $f(x)$, суммируемых на интервале (α,β), можно представить в следующем виде:

$$F(f)=\int_\alpha^\beta f(x)\frac{d}{dx}F(\xi_x)dx\ , \qquad (1.7)$$

$\xi_x(u)=1$ при $u<x$, $\xi_x(u)=0$ при $u>x$. Перечисленные в пунктах 1)–5) обозначения и формулы будут использованы ниже.

§ 2. Доказательство основных лемм. Будем предполагать, что потенциал $v(\vec r)$ ограничен во всем пространстве: $|v(\vec r)|<M$.

Лемма 1. Справедливо следующее представление:

$$u_k(\vec r,\vec r',t)=\frac{k!}{(4\pi)^k}\frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\int_{R_3}\cdots\int_{R_3}\frac{e^{-\frac{A_k^2}{4t}}}{\beta_k}A_k\ \times$$

$$\times\ v(\vec r_1)v(\vec r_2)\ldots v(\vec r_k)\,d^3\vec r_1\ \ldots\ d^3\vec r_k\ . \qquad (2.1)$$

Доказательство. Так как $|v(\vec r)|<M$, то

$$|u_k|\le(Mt)^k\int d_W\vec r(s)\le(4\pi)^{-3/2}M^kt^{k-3/2}\ . \qquad (2.2)$$

Пусть $u_k^*=u_k^*(\vec r,\vec r',p)=\int_0^\infty u_k(\vec r,\vec r',t)e^{-pt}dt$ – преобразование Лапласа функции u_k по t. Тогда из (2.2) следует (при условии $Re\,p>0$)

$$|u_k^*|\le\frac{M^k}{(4\pi)^k}\int_0^\infty t^{k-3/2}e^{-Re\,pt}dt=\frac{M^k\Gamma(k-\frac12)}{(4\pi)^k(Re\,p)^{k-\frac12}}.$$

Оценка равномерна относительно $\vec r$ и $\vec r'$.

Переходя в (1.5) к преобразованиям Лапласа и учитывая (1.4), находим $pu_k^*=\Delta u_k^*+kv(\vec r)u_{k-1}^*$, а из (1.6) при $\alpha=|\vec r-\vec r'|$ получаем

$$u_0^*=(4\pi|\vec r-\vec r'|)^{-1}\exp\left(-\sqrt{p}\,|\vec r-\vec r'|\right). \qquad (2.3)$$

Рассматривая полученное уравнение для u_k^*, как уравнение Гельмгольца с правой частью $-kv(\vec{r})u^*_{k-1}$ в кубе $K_a\left(-\frac{a}{2}<x,y,z<\frac{a}{2}\right)$ и используя выписанную выше функцию Грина, находим

$$u^*_k(\vec{r},\vec{r}',p)=\frac{k}{4\pi}\iiint\limits_{K_a} G_a(\vec{r},Q,p)\,v(Q)\,u^*_{k+1}(Q,\vec{r}',p)\,dQ-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma_a} u^*_k(Q,\vec{r},p)\cdot\frac{\partial G_a}{\partial n}\,d_Q S$$

(Γ_a - граница куба K_a). При $a\to\infty$

$$G_a\to|\vec{r}-\vec{r}_Q'|\exp\left(-\sqrt{p}\,|\vec{r}-\vec{r}_Q|\right),\qquad \left.\frac{\partial G_a}{\partial n}\right|_{\Gamma_a}\to 0,$$

$$u^*_k(\vec{r},\vec{r}',p)=\frac{k}{4\pi}\int\limits_{R_3}\frac{e^{-\sqrt{p}|\vec{r}-\vec{r}_1|}v(\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}u^*_{k-1}(\vec{r}_1,\vec{r},p)\,d^3\vec{r}_1=$$

$$=\frac{k!}{(4\pi)^k}\int\limits_{R_3}\!\cdots\!\int\limits_{R_3}\frac{\exp\left(-\sqrt{p}\left\{|\vec{r}-\vec{r}_1|+|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\ldots|\vec{r}_{k-1}-\vec{r}_k|\right\}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|\,|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\ldots|\vec{r}_{k-1}-\vec{r}_k|}v(\vec{r}_1)\ldots v(\vec{r}_k)\times$$

$$\times u^*_0(\vec{r}_k,\vec{r}',p)\,d^3\vec{r}_1\ldots d^3\vec{r}_k=\frac{k!}{(4\pi)^k}\int\limits_{R_3}\!\cdots\!\int\limits_{R_3}\frac{e^{-\sqrt{p}A_k}}{B_k}v(\vec{r}_1)\ldots v(\vec{r}_k)\,d^3\vec{r}_1\ldots d^3\vec{r}_k.$$

Наконец, воспользуемся (1.6) в обратном порядке при $\alpha=A_k$, что дает

$$u^*_k(\vec{r},\vec{r}',p)=\frac{k!}{(4\pi)^k}\int\limits_{R_3}\!\cdots\!\int\limits_{R_3}\int\limits_0^\infty \tau^{-3/2}e^{-\frac{A_k^2}{4\tau}}e^{-p\tau}\,d\tau\;\times$$

$$\times\frac{A_k}{B_k}v(\vec{r}_1)\ldots v(\vec{r}_k)\,d^3\vec{r}_1\ldots d^3\vec{r}_k. \tag{2.4}$$

Легко оправдать перестановку интегралов по τ и $\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_k$ в (2.4). Для этого достаточно доказать, что интеграл от мажорирующей функции $M^k\tau^{-3/2}\exp(-A_k^2/4\tau)\exp(-\mathrm{Re}\,p\tau)A_kB_k^{-1}$ сходится. Действительно, в силу неравенства Буняковского – Шварца, имеем

$$\iint\limits_{R_3\times R_3\times\ldots\times R_3\times[0,+\infty]}\tau^{-3/2}e^{-\frac{A_k^2}{4\tau}}e^{-\mathrm{Re}\,p\,\tau}A_kB_k^{-1}d^3\vec{r}_1\ldots d^3\vec{r}_k\,d\tau\leq$$

$$\leq 2\sqrt{\pi}\iint\limits_{R_3 R_3}e^{-\sqrt{\mathrm{Re}\,p}\,A_k}B_k^{-1}d^3\vec{r}_1\ldots d^3\vec{r}_k=$$

$$=2\sqrt{\pi}\iiint\limits_{R_3R_3R_3}\frac{e^{-\sqrt{p}\{|\vec{r}-\vec{r}_1|+|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\}}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|\,|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}d^3\vec{r}_1\frac{e^{-\sqrt{\mathrm{Re}\,p}\{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|+\ldots+|\vec{r}_k-\vec{r}'|\}}}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|\ldots|\vec{r}_k-\vec{r}'|}\times$$

$$\times d^3\vec{r}_2 \dots d^3\vec{r}_k \leq 2\sqrt{\pi} \iint\limits_{R_3 R_3} \sqrt{\int\limits_{R_3} \frac{e^{-2\sqrt{\operatorname{Re} p}\,|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}\, d^3\vec{r}_1 \int\limits_{R_3} \frac{e^{-2\sqrt{\operatorname{Re} p}\,|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^2}\, d^3\vec{r}_1} \times$$

$$\times \frac{e^{-\sqrt{\operatorname{Re} p}\left(|\vec{r}_2-\vec{r}_3|+\dots+|\vec{r}_k-\vec{r}\,'|\right)}}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|\,|\vec{r}_k-\vec{r}\,'|} d^3\vec{r}_2 \dots d^3\vec{r}_k = 2\sqrt{\pi} \int\limits_{R_3} \frac{e^{-2\sqrt{\operatorname{Re} p}\,|\vec{r}|}}{|\vec{r}|^2}\, d^3\vec{r} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{R_3} \frac{e^{-\sqrt{\operatorname{Re} p}\,|\vec{r}|}}{|\vec{r}|}\, d^3\vec{r} \right)^{k-1} . \qquad (2.5)$$

Сравнив (2.4) после перестановки интегралов с (2.3), видим, что слева и справа оказываются преобразования Лапласа, откуда следует и равенство оригиналов, чем и заканчивается доказательство леммы.

Лемма 2. Справедливо следующее представление:

$$u_k(\vec{r},\vec{r}\,',t) = \frac{k!}{(4\pi)^k} \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \int\limits_{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}^{\infty} e^{-\frac{s}{4t}} \frac{1}{2} \int\limits_{A_k=\sqrt{s}} \frac{v(\vec{r}_1)\dots v(\vec{r}_k)\, d_A s}{B_k C_k}\, ds . \qquad (2.6)$$

Доказательство. Пусть D_3 – произвольная выпуклая область в R_3, α и β – наименьшее и наибольшее значения A_k, когда $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_k$ независимо пробегают область D_3. Рассмотрим функционал

$$F(f) = \int\limits_{D_3} \dots \int\limits_{D_3} f(A_k) \frac{A_k}{B_k} v(\vec{r}_1) \dots v(\vec{r}_k)\, d^3\vec{r}_1 \dots d^3\vec{r}_k , \qquad (2.7)$$

где $f \in L_1(\alpha,\beta)$. Согласно упомянутой в § 1 теореме Банаха, этот функционал можно записать так:

$$F(f) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x) \frac{d}{dx} \int\limits_{D_3} \dots \int\limits_{D_3 \cap (A_k < x)} \frac{A_k}{B_k} v(\vec{r}_1) \dots v(\vec{r}_k)\, d^3\vec{r}_1\, d^3\vec{r}_k\, dx .$$

(Интегрирование ведется по пересечению $3k$-мерной области $D_3 \times D_3 \times \dots \times D_3$ с областью $A_k < x$.) Положим $f(x) = \exp(-x^2/4t)$ и перейдем к пределу, когда область D_3 расширяется до всего пространства R_3. При этом $\alpha = |\vec{r} - \vec{r}\,'|^2$, $\beta = +\infty$, а область интегрирования перейдет в $A_k < x$. Находим

$$\int\limits_{R_3} \dots \int\limits_{R_3} e^{-\frac{A_k^2}{4t}} \frac{A_k}{B_k} v(\vec{r}_1) \dots v(\vec{r}_k)\, d^3\vec{r}_1 \dots d^3\vec{r}_k =$$

$$=\int_{|\vec r-\vec r'|^2}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} \frac{d}{dx}\int\ldots\int_{A_k<x} \frac{A_k v_1(\vec r_1)\ldots v(\vec r_k)}{B_k} d^3\vec r_1 \ldots d^3\vec r_k\, dx \quad . \quad (2.8)$$

Так как для двух бесконечно близких гиперповерхностей $A_k=x$ и $A_k=x+\Delta x$ элемент объема, заключенного между ними, равен $d_k S dh = d_k S\, \Delta x\, |\,\mathrm{grad}\, A_k(\vec r, \vec r_1, \ldots \vec r_k, \vec r')|^{-1}$, то

$$\frac{d}{dx}\int\ldots\int_{A_k<x} A_k B_k^{-1} v(\vec r_1)\ldots v(\vec r_k) d^3\vec r_1\ldots d^3\vec r_k = x\int_{A_k=x} B_k^{-1}C_k^{-1} v(\vec r_1) v(\vec r_k) d_k S \ .$$

Подстановка в (2.8) и (2.1) приводит к доказательству леммы.

Замечание. При $k=1$ имеем

$$u(\vec r,\vec r' t) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\int_{|\vec r-\vec r'|^2}^{\infty} e^{-\frac{s}{4t}}\int_{|\vec r-\vec r_1|+|\vec r_1-\vec r|=\sqrt{s}} B_1^{-1}C_1^{-1} v(\vec r_1)\, dS\, ds \ .$$

Во внутреннем интеграле интегрирование ведется по поверхности эллипсоида вращения, фокусы которого находятся в точках $\vec r$ и $\vec r'$, а большая полуось равна $\sqrt{s}/2$. Если $\vec r=\vec r'$, то эллипсоид превращается в сферу радиуса $\sqrt{s}/2$, $B_1|\vec r-\vec r_1|^2$, $C_1=|\mathrm{grad}\, A_1|=2$.

$$u_1(\vec r,\vec r,t) = (4\pi t)^{-3/2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{4t}}\frac{1}{4} M(\sqrt{s}/2;\vec r; v)\, ds \ , \qquad (2.9)$$

где $M(\sqrt{s}/2, \vec r, v)$ – среднее значение по сфере радиуса $\sqrt{s}/2$ с центром в точке $\vec r$ от функции v.

Лемма 3. Имеет место формула

$$\frac{k!}{(4\pi)^k}\frac{1}{2}\int_{A_k=\sqrt{s}} B_k^{-1}C_k^{-1} d_k S = \frac{1}{4^k \Gamma(k)}\left(s-|\vec r-\vec r'|^2\right)^{k-1} . \qquad (2.10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $v(\vec r)=const=C$, то

$$u(\vec r,\vec r',t) = \int e^{-ct} d_W \vec r(s) = (4\pi t)^{-3/2} e^{-\frac{|\vec r-\vec r'|^2}{4t}}\sum_0^{\infty}\frac{(-ct)^k}{k!} .$$

Следовательно, в этом случае

$$u_k(\vec r,\vec r',t) = (4\pi t)^{-3/2} c^k t^k e^{-\frac{|\vec r-\vec r'|^2}{4t}} .$$

С другой стороны, в соответствии с леммой 2,

$$u_k(\vec r,\vec r',t) = \frac{c^k k!}{(4\pi)^k}(4\pi t)^{-3/2}\int_{|\vec r-\vec r'|^2}^{\infty} e^{-\frac{s}{4t}}\frac{1}{2}\int_{A_k=\sqrt{s}} B_k^{-1}C_k^{-1} d_k S\, ds \ .$$

Сравнивая, получаем

$$\frac{k!}{(4\pi)^k}\int\limits_{|\vec r-\vec r'|^2}^{\infty} e^{-\frac{s}{4t}}\ \frac{1}{2}\int\limits_{A_k=\sqrt{s}} B_k^{-1} C_k^{-1} d_k S\, ds = t^k e^{-\frac{|\vec r-\vec r'|^2}{4t}} .$$

Вводя новую переменную интегрирования $s = u + |\vec r - \vec r'|^2$, найдем

$$\frac{k!}{(4\pi)^k}\int\limits_0^{\infty} e^{-up}\,\frac{1}{2}\int\limits_{A_k=\sqrt{s}} B_k^{-1} C_k^{-1} d_k S\, ds = \frac{1}{4^k p^k} = \frac{1}{4^k\Gamma(k)}\int\limits_0^{\infty} e^{-up}\, u^{k-1}\, du,$$

откуда и следует утверждение леммы 3.

Лемма 4. В ряде

$$u(\vec r,\vec r{}',t) = u_0(\vec r,\vec r{}',t) + \sum_1^{\infty}\frac{(-1)^k\varepsilon^k}{(4\pi)^k(4\pi t)^{3/2}}\int\limits_{|\vec r-\vec r'|^2}^{\infty} e^{-\frac{s}{4t}}\int\limits_{A_k=\sqrt{s}}\frac{v(\vec r_1)\dots v(\vec r_k)d_k S}{B_k C_k}\, ds ,$$

сходящемся при любом комплексном ε, интегрирование по s и суммирование по k перестановочны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя лемму 3 и очевидное неравенство $\Gamma(N+(l-1)) > (N-2)!\,\Gamma(l+1)$ $(N > 2)$, получаем цепочку оценок:

$$\left|\int\limits_{|\vec r-\vec r'|^2}^{\infty} e^{-\frac{s}{4t}}\sum_{k=N}^{\infty}\frac{(-1)^k\varepsilon^k}{(4\pi)^k}\int\limits_{A_k=\sqrt{s}}\frac{v(\vec r_1)\dots v(\vec r_k)}{B_k C_k}\, d_k S\, ds\right| \le$$

$$\le \int\limits_{|\vec r-\vec r'|^2}^{\infty} e^{-\frac{s}{4t}}\sum_{k=N}^{\infty}\frac{|\varepsilon|^k M^k (s-|\vec r-\vec r'|^2)^{k-1}}{4^k\,\Gamma(k)\,k!}\, ds \le$$

$$\le \frac{|\varepsilon M|^N}{4^N[(N-2)!]^2}\int\limits_{|\vec r-\vec r'|^2}^{\infty} e^{-\frac{s}{4t}}\left(s-|\vec r-\vec r'|^2\right)^{N-1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{|\varepsilon|^l M^l (s-|\vec r-\vec r'|^2)^l}{4^l\Gamma^2(l+1)}\, ds \le$$

$$\le \frac{|\varepsilon M|^N}{4^N[(N-2)!]^2}\int\limits_{|\vec r-\vec r'|^2}^{\infty} e^{-\frac{s}{4t}}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{|\varepsilon| M (s-|\vec r-\vec r'|^2)}\right)^l}{l!}\right)^2 (s-|\vec r-\vec r'|^2)\, ds^{N-1} =$$

$$= \frac{|\varepsilon M|^N}{4^N[(N-2)!]^2}\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{s}{4t}}\, e^{\sqrt{\varepsilon M s}}\, s^{N-1} ds\; e^{\frac{-|\vec r-\vec r'|^2}{4t}} \le$$

$$\le \frac{|\varepsilon M|^N}{4^N[(N-2)!]^2}\, e^{\frac{\varepsilon M}{4\alpha}-\frac{|\vec r-\vec r'|^2}{4t}}\int\limits_0^{\infty} e^{\left(\frac{1}{4t}-\alpha\right)s}\, s^{N-1}\, ds ,$$

где $\alpha < \frac{1}{4t}$. Следовательно, оцениваемое выражение не превышает величины $\left(|\varepsilon| M 4^{-1}((4t)^{-1}-\alpha)^{-1}\right)^N (N-1)\left[(N-2)!\right]^{-1} \gamma(t,\vec r,\vec r\,';\varepsilon)$, которая стремится к нулю при $N\to\infty$ (для любого $t>0$). Лемма доказана.

Следствие. Решение задачи Коши (1.2) представимо в виде

$$u(\vec r,\vec r\,',t)=u_0(\vec r,\vec r\,',t)+(4\pi t)^{-3/2}\int\limits_{|\vec r-\vec r\,'|^2}^{\infty} e^{-\frac{s}{4t}}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\varepsilon^k}{(4\pi)^k}\int\limits_{\Lambda_k=\sqrt{s}}\frac{v(\vec r_1)\dots v(\vec r_k)d_k s}{B_k C_k}ds. \tag{2.11}$$

Поскольку правая часть (2.11) является с точностью до множителя $(4\pi t)^{-3/2}$ преобразованием Лапласа (с параметром $p=(4t)^{-1}$), то она аналитична по t в открытой правой полуплоскости $Re\,t>0$.

Замечание. Лемма 4 доказана в предположении ограниченности потенциала во всем пространстве. Можно показать, что если $v(\vec r)$ непрерывна в R_3 и существуют постоянные $a>0$, $b>0$ и $0\leqslant\alpha<2$ такие, что при всех $\vec r$ $v(\vec r)<a|\vec r|^\alpha+b$, то ряд (1.3) сходится при всех $t>0$ и любом комплексном ε и интегрирование по s и суммирование по k перестановочны. Утверждение следует из леммы 5, которую приводим без доказательства.

Лемма 5. Если $3k$-мерная точка $\vec r_1,\dots,\vec r_k$ удовлетворяет уравнению $\Lambda_k=\sqrt{s}$, то для всех j $(j=1,2,\dots,k)$

$$|\vec r-\vec r_j| < \frac{1}{2}\left(\sqrt{s}+|\vec r-\vec r\,'|\right).$$

Лемма 6. Пусть $v(\vec r)$ непрерывна в R_3 и тождественно равна нулю при $|\vec r|>d_0$. Тогда функция

$$\varphi_k(s)=\int\limits_{\Lambda_k=\sqrt{s}} B_k^{-1}C_k^{-1}v(\vec r_1)\dots v(\vec r_k)d_k\,s \tag{2.12}$$

равна нулю при $\sqrt{s}>|\vec r|+|\vec r\,'|+2kd_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если для всех j $|\vec r_j|<d_0$, то

$$\sqrt{s}=|\vec r-\vec r_1|+|\vec r_1-\vec r_2|+\dots+|\vec r_k-\vec r\,'|<|\vec r|+|\vec r\,'|+2kd_0.$$

Если же $\sqrt{s}>|\vec r|+|\vec r\,'|+2kd_0$, то хотя бы одно из условий $|\vec r_j|<d_0$ не выполняется и соответствующий множитель $v(\vec r_j)$ в подынтегральном выражении (2.12) обращается в нуль, что и требовалось доказать.

§ 3. Переход от интеграла Винера к интегралу Фейнмана. Принимая предположения леммы 6, заменим в (2.11) t на it и оценим общий член полученного ряда, используя леммы 3 и 6.

$$\left| \frac{\varepsilon^k}{(4\pi)^k} \int\limits_{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}^{\infty} e^{-\frac{s}{4t}} \frac{1}{2} \int\limits_{A_k=\sqrt{s}} B_k^{-1} C_k^{-1} v(\vec{r}_1) \dots v(\vec{r}_k) d_k S ds \right| \leq$$

$$\leq \frac{|\varepsilon|^k}{(4\pi)^k} \int\limits_{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}^{(2kd_0+|\vec{r}|+|\vec{r}'|)^2} \frac{1}{2} \left| \int\limits_{A_k=\sqrt{s}} B_k^{-1} C_k^{-1} v(\vec{r}_1) \dots v(\vec{r}_k) d_k S \right| ds \leq$$

$$\leq \frac{|\varepsilon|^k M^k}{4^k \Gamma(k) k!} \int\limits_{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}^{(2kd_0+|\vec{r}|+|\vec{r}'|)^2} \left(s - |\vec{r}-\vec{r}'|^2\right)^{k-1} ds \leq \frac{(2kd_0+\vec{r}+\vec{r}')^{2k} |\varepsilon|^k M^k}{4^k \Gamma(k) k! \, k} .$$

При больших значениях k следует учесть формулу Стирлинга, что дает окончательную оценку общего члена X_k ряда

$$|X_k| \leq C(\vec{r}, \vec{r}', \varepsilon) \left(d_0^2 e^{-2} |\varepsilon| M\right)^k k^{-1} . \tag{3.1}$$

Приведенная оценка общего члена ряда тем более остается в силе для комплексного t с положительной вещественной частью. Сформулируем теперь основные теоремы.

Теорема 1. Пусть $v(\vec{r})$ – ограниченная и непрерывная в R_3 функция. Тогда для решения $u = u(\vec{r}, \vec{r}', t)$ задачи Коши

$$u_t = \Delta u - \varepsilon v(\vec{r}) u; \quad u|_{t=+0} = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

справедливы такие представления:

$$u(\vec{r}, \vec{r}', t) = u_0(\vec{r}, \vec{r}', t) + (4\pi t)^{-3/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \varepsilon^k}{(4\pi)^k} \int\limits_{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}^{\infty} e^{-\frac{s}{4t}} \frac{1}{2} \int\limits_{A_k=\sqrt{s}} \frac{v(\vec{r}_1)\dots v(\vec{r}_k) d_k S}{B_k C_k} ds, \tag{3.2}$$

$$u(\vec{r}, \vec{r}', t) = u_0(\vec{r}, \vec{r}', t) + (4\pi t)^{-3/2} \int\limits_{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}^{\infty} e^{-\frac{s}{4t}} \sum_{k=1}^{\infty} \times$$

$$\times \frac{(-1)^k \varepsilon^k}{(4\pi)^k} \frac{1}{2} \int\limits_{A_k=\sqrt{s}} \frac{v(\vec{r}_1)\dots v(\vec{r}_k) d_k S}{B_k C_k} ds . \tag{3.3}$$

При этом ряд в (3.2) сходится равномерно относительно t в каждой ограниченной замкнутой области из правой полуплоскости $\operatorname{Re} t > 0$, в которую непосредственно продолжается аналитически по t с вещественной положительной полуоси и правая часть (3.3). Во всякой такой области правые части (3.2) и (3.3) совпадают.

Доказательство. Положим $t = \alpha + i\beta$ $(\alpha > 0)$. Тогда

$$\left| \frac{\varepsilon^k}{(4\pi)^k} \int\limits_{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}^{\infty} e^{-\frac{s}{4(\alpha+i\beta)}} \int\limits_{A_k=\sqrt{s}} B_k^{-1} C_k^{-1} v(\vec{r}_1) \dots v(\vec{r}_k) d_k S ds \right| \leq$$

$$\leq \frac{|\varepsilon|^k M^k}{4^k \Gamma(k) k!} \int\limits_{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}^{\infty} e^{-\frac{s\alpha}{4(\alpha^2+\beta^2)}} \left(s - |\vec{r}-\vec{r}'|^2\right)^{k-1} ds \leq$$

$$\leq \frac{|\varepsilon|^k M^k (\alpha^2+\beta^2)^k}{4^k k! \, \alpha^k} \, .$$

Отсюда следует утверждение о равномерной сходимости ряда и так как каждый член ряда есть преобразование Лапласа с абсциссой сходимости, равной нулю, то сумма его является аналитической функцией в рассматриваемой области. Из оценок леммы 4 видно, что подынтегральное выражение в (3.3) (кроме множителя $exp(-s/4t)$) при больших s может расти не быстрее, чем $exp(\nu\sqrt{s})$ и, следовательно, интеграл Лапласа в правой части (3.3) также имеет нулевую абсциссу сходимости и продолжается аналитически той же формулой в рассматриваемую область. Так как обе аналитические функции совпадают на отрезке вещественной оси, пересекающей эту область, то они совпадают и всюду в ней (множитель $t^{-3/2}$ продолжается в комплексную плоскость как однозначная ветвь аналитической функции, определяемая разрезом, идущим по лучу $-\infty < Re\, t < 0$ и значением, равным единице в точке $t = 1$). Теорема доказана.

Из замечания, сделанного в начале § 3, и теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Если $v(\vec{r})$ непрерывна в R_3, $v(\vec{r}) \equiv 0$ при $|\vec{r}| > d_0$ и выполнено условие $d_0^2 e^{-2} |\varepsilon| M < 1$, то

$$\lim_{\alpha \to 0} u(\vec{r}, \vec{r}', \alpha + i\beta) = u(\vec{r}, \vec{r}', i\beta) = u_0(\vec{r}, \vec{r}', i\beta) +$$

$$+ \lim_{\alpha \to 0} (4\pi i\beta)^{-3/2} \int\limits_{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}^{\infty} e^{-\frac{s}{4(\alpha+i\beta)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \varepsilon^k}{(4\pi)^k} \frac{1}{2} \int\limits_{\Lambda_k=\sqrt{s}} \frac{v(\vec{r}_1)\ldots v(\vec{r}_k) d_k S}{B_k C_k} ds =$$

$$u_0(\vec{r}, \vec{r}', i\beta) + (4\pi i\beta)^{-3/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \varepsilon^k}{(4\pi)^k} \int\limits_{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}^{\infty} e^{-\frac{s}{4i\beta}} \frac{1}{2} \int\limits_{\Lambda_k=\sqrt{s}} \frac{v(\vec{r}_1)\ldots v(\vec{r}_k) d_k S}{B_k C_k} ds \, . \tag{3.4}$$

Доказательство. Согласно замечанию, сделанному в начале § 3, ряд в правой части (3.2) сходится равномерно по параметру α (при любом фиксированном β) в каждом замкнутом промежутке $0 \leq \alpha \leq \mu$ ($\mu > 0$ – произвольно) и при $\alpha = 0$ превращается в ряд правой части (3.4), что дает право сделать в нем почленный предельный переход при $\alpha \to 0$. Так как теорема 1 верна и без принятого сейчас условия $d_0^2 e^{-2}|\varepsilon|M$, то существует предел при $\alpha \to 0$ средней части (3.4) и тем самым оправдано (3.4).

Замечание 1. В дополнение к теореме 1 следует отметить, что уравнение $u_t = \Delta u - \varepsilon v(\vec{r})u$ будет справедливо и при комплексном t и может быть получено с помощью аналитического продолжения с полуоси $t > 0$ в комплексную область подобно тому, как доказывалась теорема 1. Подробная проверка этого факта и переход на мнимую ось, а также учет начального условия после такого перехода в задаче Коши достаточно громоздки и здесь проводиться не будут. Аналитическое продолжение на мнимую ось с помощью (3.3) при общем условии ограниченности и непрерывности $v(\vec{r})$ в R_3, очевидно, требует привлечения обобщенных функций (мы имеем здесь дело с преобразованием Фурье быстро растущих функций).

Замечание 2. Доказанные теоремы дают основание для введения интеграла Винера от функционала вида: $F\left(\int_0^t v(\vec{r}(s))ds\right)$, где $F(x)$ – произвольная функция с ограниченным спектром, сосредоточенным в интервале $(-a, +a)$. Сохраняя предположения о потенциале из сформулированных выше теорем, имеем

$$\int F\left(\int_0^t v\left(\vec{r}(s)\right)ds\right)d_W\vec{r}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{+a} F(\lambda)\int e^{i\lambda\int_0^t v(\vec{r}(s))ds}d_W\vec{r}(s)d\lambda .$$

Здесь $F(\lambda)$ – преобразование Фурье для $F(x)$. Вопрос о существовании там определенного интеграла сводится к обычному случаю интеграла Винера от функционала $exp\left(-\varepsilon\int_0^t v\left(\vec{r}(s)\right)ds\right)(-\varepsilon = i\lambda)$.

1. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. – М. : Мир, 1965. – 406 с.
2. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. – М. : Мир, 1968. – 382 с.
3. Фейнман Р. Статистическая механика. – М. : Мир, 1975. – 407 с.
4. Далецкий Ю.Л. Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями // Успехи мат. наук. – 1962. – 17, вып. 5. – С. 3–115.
5. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Обобщенные меры в функциональных пространствах // Теория вероятностей и ее применения. – 1965. – 10, вып. 2. – С. 329–343.
6. Trotter H.F. On the product of semigroups of operators // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1959. – 10, N 4.
7. Маслов В.П. Комплексные марковские цепи и континуальные интегралы Фейнмана для нелинейных уравнений. – М. : Наука, 1976. – 191 с.
8. Гестрин Г.Н. О применениях континуальных интегралов к решению некоторых обратных задач для трехмерного уравнения Шредингера. – Харьков, 1986. – 36 с. – (Препр. / ФТИНТ АН УССР; 56-86).
9. Банах С.С. Курс функціонального аналізу. – Київ : Рад. шк., 1948. – 214 с.

УДК 517.9

И.Д.Чуешов

О СВОЙСТВАХ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МОДИФИЦИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

Доказана теорема единственности задачи Коши для уравнения Хопфа, отвечающего модифицированной системе уравнений Кармана с диссипацией. Показано, что при некоторых условиях любое стационарное решение уравнения Хопфа является инвариантной мерой, сосредоточенной в аттракторе системы.

1. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$
\begin{gathered}
(1-\alpha\Delta)\ddot{u} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2\Delta)\dot{u} + \Delta^2 u - [u+f, v+\theta] + \rho\frac{\partial u}{\partial x_1} = p(x), \\
\Delta^2 v + [u+2f, u] = 0, \quad x \in \Omega, \ t > 0, \\
u\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = v\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \ u\Big|_{t=0} = u_0, \ \dot{u}\Big|_{t=0} = u_1 .
\end{gathered} \tag{1}
$$

Здесь Ω – гладкая ограниченная область в R^2, $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $\alpha > 0$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho \geq 0$,

$$
[u,v] = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\cdot\partial x_2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_2} .
$$

Предполагается, что $f(x) \in H^3(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$, $\theta(x) \in H^4(\Omega)$, $u_1(x) \in H_0^1(\Omega)$, $u_0(x) \in H_0^2(\Omega)$, $p(x) \in L^2(\Omega)$, $H^m(\Omega)$ – соболевское пространство порядка m. Такая система возникает при изучении колебаний упругой пологой оболочки в сверхзвуковом потоке газа [1]. Параметр α определяется скоростью потока. Случай $\alpha > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ отвечает учету инерции вращения элементов оболочки [2].

Для системы (1) имеет место теорема существования и единственности [2], позволяющая определить (см. [3, 4]) в фазовом пространстве $F = H_0^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ сильно непрерывную нелинейную группу S_t, действующую по формуле

$$
S_t\,y_0 = (u(t); \dot{u}(t)), \tag{2}
$$

где $y_0 = (u_0; u_1)$ – начальные условия, $u(t)$ – слабое решение задачи (1). Группа S_t обладает компактным максимальным аттрактором конечной хаусдорфовой размерности [3]. При $\rho = 0$ аттрактор имеет регулярную структуру [4].

В настоящей работе рассматриваются пространственные статистические решения системы (1), т.е. вероятностные меры на фазовом

ISBN 5-12-001584-0. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Киев, 1990.

пространстве системы, удовлетворяющие соответствующему уравнению Хопфа (об уравнении Хопфа, см., например, [5]). Доказана теорема единственности задачи Коши для уравнения Хопфа. Из этой теоремы, в частности, вытекает, что при некоторых условиях любое стационарное статистическое решение является инвариантной относительно S_t мерой. Показано также, что любая инвариантная мера сосредоточена в аттракторе. В случае регулярного аттрактора носитель такой меры лежит в множестве неподвижных точек системы, а объединение носителей инвариантных мер дает все множество неподвижных точек.

2. Определим норму в $H_0^1(\Omega)$ формулой $\|u\|_1^2=((1-\alpha\Delta)u,u)$, а в пространстве $H_0^2(\Omega)$ формулой $\|u\|_2^2=(\Delta u,\Delta u)$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Пусть H_- – пополнение пространства $H_0^1(\Omega)$ по норме

$$\|f\|_-=\sup\left\{(f,u):\ u\in H_0^2(\Omega),\ \|u\|_2=1\right\}.$$

Пространство H_- может быть описано равенством

$$H_-=\left\{v=\sum c_k e_k\ :\ \|v\|_-^2=\sum \mu_k^{-1}c_k^2<\infty\right\},$$

где $e_k\in H_0^2(\Omega)$ – собственные функции задачи

$$\Delta^2 v=\mu(1-\alpha\Delta)v,\quad v\Big|_{\partial\Omega}=\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0\ , \tag{3}$$

а μ_k – соответствующие собственные числа. Можно считать, что

$$(e_k,e_j)_1=\delta_{kj},\qquad (e_k,e_j)_2=\mu_k\delta_{kj}\ .$$

Запишем задачу (1) как систему первого порядка в пространстве F:

$$\dot{y}(t)=L(y(t)),\quad y\Big|_{t=0}=y_0\ . \tag{4}$$

Здесь $y(t)=(u(t);\ \dot{u}(t)),\ y_0=(u_0;\ u_1),$

$$L(y)=(\dot{u};\ -K\dot{u}-Au-M(u)),$$

где линейные операторы $K: H_0^1(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$, $A: H_0^2(\Omega)\to H_-$ и нелинейное отображение $M: H_0^2(\Omega)\to H_-$ определяются из условий:

$$(Kv,w)_1=((\varepsilon_1-\varepsilon_2\Delta)v,w),\quad (Aw,v)_1=(\Delta w,\Delta v)\ ,$$

$$(M(u),w)_1=\left(-[u+f,\ v(u)+\theta]+\rho\frac{\partial u}{\partial x_1}-p,\ w\right),$$

величина $v(u)$ является решением задачи

$$\Delta^2 v+[u+2f,u]=0,\quad v\Big|_{\partial\Omega}=\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0\ . \tag{5}$$

Свойства скобки $[u, v]$ (см., например, [3]) позволяют показать, что $L(y) \in \hat{F} = H_0^1(\mathcal{R}) \times H_-$, если $y \in F$. При этом отображение $y \to L(y)$ является непрерывным и справедлива оценка

$$\| L(y) \|_{\hat{F}} \leq C(1 + E_0(y)), \tag{6}$$

где $y = (u_0; u_1)$, $E_0(y) = \frac{1}{2}\left(\|u_1\|^2 + \|\Delta u_0\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta v(u_0)\|^2\right)$. Вектор-функция $y(t) = S_t y_0$ является решением задачи (4). Равенство (4) следует понимать как равенство обобщенных функций.

Пусть $\mathcal{B}(F)$ – σ-алгебра борелевских множеств пространства F. $B(F)$ – множество вероятностных мер на этой σ-алгебре. Семейство $\{\mu_t, \ t \geq 0\}$ из $B(F)$ называется решением задачи Коши с начальным условием μ для уравнения Хопфа, отвечающего (1), если $\langle L(y), w \rangle$ при $w \in \hat{F}^* = H_0^1(\mathcal{R}) \times H_0^2(\mathcal{R})$ абсолютно интегрируема относительно μ_t и

$$\frac{d}{dt} \chi(\mu_t, w) = i \int_F \langle L(y), w \rangle e^{i\langle y, w \rangle} \mu_t(dy), \tag{7}$$

$$\chi(\mu_t, w)\Big|_{t=0} = \chi(\mu, w), \tag{8}$$

где

$$w = (w_1; w_2) \in \hat{F}^*, \qquad \langle y, w \rangle = (y_1, w_1)_1 + (y_2, w_2)_1,$$

$\chi(\nu, w)$ – характеристический функционал меры ν, т.е.

$$\chi(\nu, w) = \int_F exp(i\langle y, w \rangle)\nu(dy), \qquad w \in \hat{F}^*.$$

Пусть $\mu_t = S_t^* \mu$ – семейство мер из $B(F)$, определяемое для любой непрерывной на F функции $f(y)$ соотношением

$$\int_F f(y)\mu_t(dy) = \int_F f(S_t y)\mu(dy).$$

Свойства группы S_t (см. [3, 4]) позволяют легко установить следующее утверждение.

<u>Теорема 1</u>. Пусть $\mu \in B(F)$ и

$$E_0(\mu) = \int_F E_0(y)\mu(dy) < \infty. \tag{9}$$

Тогда семейство мер $\mu_t = S_t^* \mu$ является решением задачи Коши (7), (8). Для каждой из мер μ_t величина $E_0(\mu_t)$ конечна.

Пусть в (1) $\varepsilon_2 > 0$. Тогда, как показано в [3], при некотором достаточно малом $\nu > 0$ функционал

$$V(y) = E_0(y) - \frac{1}{2}\left(\left[u_0 + 2f, u_0\right], \theta\right) + \nu\left[(u_1, u_0)_1 + \frac{1}{2}(Ku_0, u_0)\right], \ y = (u_0; u_1)$$

непрерывен на F и обладает свойствами

$$c_1(1+E_0(y)) \le V_d(y) \le c_2(1+E_0(y)), \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt} V(S_t y) + \nu V(S_t y) \le D, \tag{11}$$

где $V_d = V + d$, d – некоторая константа. Из (11) при этом вытекает, что

$$[V_d(S_t y)]^k \le [V_d(y)]^k e^{-\nu_k t} + D_k .$$

Отсюда, в частности, следует, что если начальное распределение μ обладает свойством

$$\int_F \exp\left\{\sigma[V_d(y)]^2\right\} \mu(dy) < \infty \tag{12}$$

при некотором $\sigma > 0$, то для $\mu_t = S_t^* \mu$ справедлива оценка

$$\int_F \exp\left\{\sigma\left[V_d(y)\right]^2\right\} \mu_t(dy) \le C^\sigma \int_F \exp\left\{\sigma\left[V_d(y)\right]^2\right\} \mu(dy) . \tag{13}$$

3. В дальнейшем предполагается, что $\varepsilon_2 = \alpha\varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$.

Пусть $\mathcal{P}_\sigma$, $\sigma > 0$ – множество семейств $\{\mu_t, t \ge 0\}$ вероятностных мер из $B(F)$ таких, что для каждого $R > 0$

$$\int_0^R dt \int_F \exp\left\{\sigma\left[V_d(y)\right]^2\right\} \mu_t(dy) < \infty . \tag{14}$$

Теорема 2. Пусть начальное распределение $\mu \in B(F)$ обладает для некоторого $\sigma > 0$ свойством (12). Тогда задача Коши (7), (8) при $\varepsilon_2 = \alpha\varepsilon_1 = 0$ в классе $\mathcal{P}_\sigma$ имеет единственное решение.

Для доказательства этой теоремы воспользуемся методом, применяемым в [7] (см. также [8]).

Пусть

$$\varphi(t,y) = -\int_t^T r(\tau) \exp\left(i\langle S_{\tau-t}y, w\rangle\right) d\tau, \quad T > 0, \tag{15}$$

где $r(\tau) \in C_0^1(0,T)$, $y \in F$, $w \in \hat{F}^* = H_0^1(\mathcal{R}) \times H_0^2(\mathcal{R})$.

Лемма 1. Для каждого $t \in [0,T]$ функционал $\varphi(t,y)$ ограничен на F, непрерывно дифференцируем по t, обладает производной Фреше по y, лежащей в $\hat{F}^* = H_0^1(\mathcal{R}) \times H_0^2(\mathcal{R})$ и допускает оценки:

$$\left|\frac{d}{dt} \varphi(t,y)\right| \le C_1 (1 + E_0(y)), \tag{16}$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y} \varphi(t,y)\right\|_{\hat{F}^*} \le C_2 \exp\left(C_3(T-t)(1+E_0(y))\right) . \tag{17}$$

Кроме того, имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\varphi(t,y)+\left\langle\frac{\delta}{\delta y}\varphi(t,y),\,L(y)\right\rangle=r(t)\,e^{i\langle y,\,w\rangle}\ . \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $\langle S_t y, w\rangle$ непрерывно дифференцируема по t [3, 4]. Поэтому существует производная $\frac{d}{dt}\varphi(t,y)$ и

$$\frac{d}{dt}\varphi(t,y)=r(t)e^{i\langle y,w\rangle}+i\int_t^T r(\tau)\left\langle L\left(S_{\tau-t}y\right),w\right\rangle e^{i\langle S_{\tau-t}y,\,w\rangle}d\tau\ .$$

Отсюда с помощью (6) получаем оценку (16). При этом используется неравенство

$$E_0(S_t y)\le C_1E_0(y)e^{-\nu t}+C_2\,, \tag{19}$$

вытекающее из (10), (11). Из результатов работы [4] следует существование производной Фреше $S_t'[y]=\frac{\delta}{\delta y}S_t y$, являющейся непрерывным отображением из F в F. Она удовлетворяет условию Липшица по y и является эволюционным оператором уравнения в вариациях, отвечающего задаче (1). Можно показать, что оператор $S_t'[y_0]$ продолжается по непрерывности на пространство $\hat F$ и допускает оценку

$$\|S_t'[y_0]\|_{\mathcal{L}(\hat F,\hat F)}\le exp\left\{c\int_0^t\left(1+\|u(\tau)\|_2^2\right)d\tau\right\}\ , \tag{20}$$

где $u(t)$ – решение задачи (1) с начальными условиями $y_0=(u_0;u_1)$. Указанные свойства оператора $S_t'[y]$ позволяют утверждать, что

$$\left\langle\frac{\delta}{\delta y}\varphi(t,y),h\right\rangle=-i\int_t^T r(\tau)\left\langle S'_{\tau-t}[y]h,w\right\rangle e^{i\langle S_{\tau-t}y,\,w\rangle}d\tau\ . \tag{21}$$

Оценка (17) при этом вытекает из неравенств (19), (20). Кроме того, с помощью оценки (20) можно в (21) выполнить предельный переход $h_n\to L(y)$ при $n\to\infty$ по норме пространства $\hat F$. Таким образом, для того чтобы установить (18), достаточно проверить, что

$$\langle S_t'[y]L(y),\,w\rangle=\langle L(S_t y),\,w\rangle,\quad t>0,\quad w\in\hat F^*\ .$$

Сделать это можно, воспользовавшись структурой функции $L(S_t y)$.

Пусть $\mu_t\in\mathcal{P}_\sigma$ – какое-либо решение задачи (7), (8). Тогда для $\{\mu_t\}$ выполняется уравнение Хопфа в форме Фояша (см. [5]):

$$\int_F F(\tau,y)\mu_\tau(dy)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}=\int_0^t d\tau\left\{\int_F\left(\frac{dF}{dt}+\left\langle\frac{\delta F}{\delta y},L(y)\right\rangle\mu_\tau(dy)\right\}\right. \tag{22}$$

для любой функции вида

$$F(t,y) = \sum_{k=1}^{N} c_k(t) \exp\left\{ i \langle y, w_k \rangle \right\}, \tag{23}$$

где $w_k \in F^*$, $c_k(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $k = 1,2,\dots,N$. Докажем (22) для $0 \le t \le T$ и $F(t,y) = \varphi(t,y)$, где $\varphi(t,y)$ задается формулой (15), а T – достаточно мало. Рассуждать можно следующим образом. Пусть $\psi(s)$ – бесконечно дифференцируемая функция на $[0,\infty)$ такая, что $0 \le \psi(s) \le 1$, $\psi(s) = 1$ при $0 \le s \le 1$, $\psi(s) = 0$ при $s \ge 2$. Положим

$$G_M(t, P_N y) = \varphi(t, P_N y) \psi(M^{-1} \| P_N y \|_F^2),$$

P_N – оператор ортогонального проектирования в F на линейную оболочку элементов вида $(c_1 e_k;\ c_2 e_k)$, $k = 1,2,\dots,N$, e_k – собственные функции задачи (3). Удается проверить (22) для $F = G_M(t, P_N y)$.

Так как $E_0(P_N y) \le C(1 + \|y\|_F^2 + \|u_0\|_2^4)$, то из (17) вытекает, что

$$\left\| \frac{\delta}{\delta y} \varphi(t, P_N y) \right\|_{F^*} \le C \exp\left\{ \frac{\sigma}{2} [V_d(y)]^2 \right\}$$

для достаточно малых $T > 0$. Эта оценка позволяет выполнить предельный переход сначала по M, а затем по N. При этом используется неравенство

$$\left| \left\langle \frac{\delta}{\delta y} \varphi(t, P_N y) - \frac{\delta}{\delta y} \varphi(t,y),\ L(y) \right\rangle \right| \le$$

$$\le C \left(\|(1 - P_N) L(y)\|_{\hat{F}} + \|(1 - P_N) y\|_F \right) \exp\left\{ cT [V_d(y)]^2 \right\};$$

вытекающее из свойств уравнения в вариациях, отвечающего задаче (1).

В силу (18) и того, что $\varphi(T,y) = 0$, из (22) получаем

$$-\int_F \varphi(0,y)\mu(dy) = \int_0^T r(\tau) \left\{ \int_F \exp(i \langle y, w \rangle) \mu_\tau(dy) \right\} d\tau .$$

Поэтому, если μ_t^1 и μ_t^2 – два решения уравнения Хопфа из класса P_σ с начальным условием μ, то

$$\int_0^T r(\tau) d\tau \int_F \exp(i \langle y, w \rangle)(\mu_\tau^1 - \mu_\tau^2)(dy) = 0$$

для всех $r(\tau) \in C_0^1(0,T)$. Отсюда вытекает, что $\mu_t^1 = \mu_t^2$ при $t \in [0,T]$. Таким образом, решение на интервале $[0,T]$ единственно и совпадает с решением, даваемым теоремой 1. Рассмотрим теперь уравнение Хопфа на интервале $[T, 2T]$ и возьмем в качестве начальной меры μ_T. В силу (13) для μ_T выполнено (12) с тем же показателем $\sigma>0$. Поэтому приведенные выше рассуждения дают теорему единственности на интервале $[T,2T]$. После конечного числа подобных шагов получаем теорему единственности для временного интервала произвольной длины.

4. Метод усреднения Крылова – Боголюбова и теорема 1 позволяют построить и стационарные решения уравнения Хопфа, отвечающего системе (1) при $\varepsilon_2>0$. Схема такого построения достаточно стандартна и в случае бесконечномерных систем подробно изложена, например, в [5]. Применительно к рассматриваемой здесь ситуации она выглядит следующим образом. Пусть $\mu\in B(F)$ удовлетворяет условию

$$E_0^\delta(\mu)=\int_F[E_0(y)]^\delta\mu(dy)<\infty,\quad \delta>1. \tag{24}$$

Определим семейство вероятностных мер $\{\mu_S\}$ формулой

$$\int_F f(y)\mu_S(dy)=\frac{1}{S}\int_0^S\Big[\int_F f\,(S_\tau y)\,d\mu(y)\Big]d\tau \tag{25}$$

для любой непрерывной и ограниченной функции f на F. Меры μ и μ_S можно продолжить на $F_{-\gamma}=H_0^{2-\gamma}(\Omega)\times H_{-\gamma}$, где $H_{-\gamma}$ – пополнение пространства $H_0^1(\Omega)$ по норме $\|A^{-\gamma/2}\cdot\|_1$, $\gamma>0$. Ясно, что F компактно вложено в $F_{-\gamma}$.

<u>Теорема 3</u>. Пусть $\varepsilon_2>0$ и $\{s_k\}$ – последовательность, стремящаяся к бесконечности. Тогда семейство мер $\{\mu_{s_k}\}$, определяемых формулой (25) является слабо компактным в $F_{-\gamma}$, $0<\gamma<\frac{1}{2}$. Каждая предельная точка $\bar\mu$ этого семейства обладает свойством (24), сосредоточена на F и является стационарным решением уравнения Хопфа, т.е.

$$\int_F\langle L(y),\varphi\rangle e^{i\langle y,\varphi\rangle}\mu(dy)=0,\qquad \varphi\in\hat F^* \ . \tag{26}$$

Доказательство. Из (10), (11), (24) вытекает, что при $s\geqslant 0$ $E_0^\delta(\mu_S)\leqslant C$, где константа C от s не зависит. Это позволяет, используя компактность вложения F в $F_{-\gamma}$ и теорему Ю.В.Прохорова (см., например, [5, с. 62]), доказать слабую компактность семейства $\{\mu_{s_k}\}$. Для того чтобы установить (24), (26) для предельной точки $\bar\mu$, необходимо построить непрерывные и ограниченные на $F_{-\gamma}$ аппроксимации функций $E_0(y)$ и $\langle L(y),\varphi\rangle$. Такими аппроксимациями являются последовательности

$$f_N\Big(\frac{1}{2}\|P_n u_1\|_1^2+\frac{1}{2}\|P_n A^{1/2}u_0\|_1^2+\frac{1}{L}\|\Delta V(u_0)\|^2\Big),$$

$$f_N(\langle L(y),\varphi\rangle),\quad \varphi\in C_0^\infty(\mathscr{D}),$$

где P_n – ортопроектор в $H_0^1(\mathscr{D})$ на $Lin\{e_1,\dots,e_n\}$, а функция $f_N(x)$ определяется соотношениями $f_N(x)=x$ при $|x|\leq N$, $f_N(x)=N$ при $x>N$, $f_N(x)=-N$ при $x<-N$. При доказательстве (26) используется также оценка вида

$$\left|\int_F\left(\langle L(y),\varphi\rangle - f_N(\langle L(y),\varphi\rangle)\right)e^{i\langle y,\varphi\rangle}\mu_{s_k}(dy)\right|\leq$$
$$\leq CN^{1-\delta}\sup_s\left(1+E_0(\mu_s)\right),$$

доказываемая с помощью неравенства Чебышева.

Отметим, что если распределение μ при некотором $\sigma>0$ обладает свойством (12), то (13) позволяет показать, что таким же свойством обладает и каждая предельная точка $\bar\mu$ семейства $\{\mu_s\}$. При этом в случае $\mathcal{E}_2=\alpha\mathcal{E}_1$ в силу теоремы 2 каждое стационарное решение уравнения Хопфа, удовлетворяющее при некотором $\sigma>0$ условию (12), является инвариантной относительно группы S_t мерой, т.е.

$$\bar\mu(S_t B)=\bar\mu(B),\quad B\in\mathscr{B}(F).$$

Что касается инвариантных мер, то для них легко получить следующее утверждение.

Теорема 4. Любая инвариантная мера из $B(F)$ сосредоточена в аттракторе системы (1). Если аттрактор регулярен (см. определение в [9]), то инвариантная мера сосредоточена в множестве неподвижных точек группы S_t.

Таким образом, в регулярном случае любая инвариантная мера представляет собой выпуклую комбинацию δ-мер μ_k, каждая из которых сосредоточена в некоторой неподвижной точке группы S_t. В общем случае можно показать, что множество инвариантных мер является выпуклым компактом относительно слабой топологии в пространстве вероятностных мер на $F_{-\gamma}$. Однако вопрос о структуре крайних точек этого компакта остается открытым.

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М. : Физматгиз, 1961. – 340 с.
2. Морозов Н.Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1978. – 182 с.
3. Чуешов И.Д. Конечномерность аттрактора в некоторых задачах нелинейной теории оболочек // Мат. сб. – 1987. – 133, № 4. – С. 419–428.
4. Чуешов И.Д. Структура максимал ного аттрактора модифицированной системы уравнений Кармана // Теория функц., функц. анализ и их приложения. – 1987. – Вып. 47. – С. 99–104.
5. Вишик М.И., Фурсиков А.В. Математические задачи статистической гидромеханики. – М. : Наука, 1980. – 440 с.
6. Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений с

частными производными и оценка их размерности // Успехи мат. наук. – 1983. – 38, № 4. – С. 133–187.
7. Соболев С.И. Теорема единственности статистических решений одного нелинейного гиперболического уравнения // Там же. – 1983. – 38, № 6. – С. 121–122.
8. Вишик М.И., Комеч А.И. Об уравнениях Колмогорова, соответствующих двумерной стохастической системе Навье – Стокса // Труды Моск. мат. о-ва. – 1983. – 46. – С. 3–43.
9. Babin A.V., Vishik M.J. Regular attractors of semigroups and evolution equations // J. Math. pures et appl. – 1983. – 62.– P. 441–491.

УДК 517.941+517.52

В.П.Гурарий, В.И.Мацаев, Н.Т.Рузматова

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ И СПЕКТР АНГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

На примере задачи об ангармоническом осцилляторе демонстрируется эффективный метод нахождения множителей Стокса для линейного дифференциального уравнения второго порядка.

В [1] изучалось дифференциальное уравнение вида

$$y'' = \left(\frac{q_1(x)}{\rho^2} + \frac{q_2(x)}{\rho}\right) y, \tag{1}$$

где
$$q_1(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

$$q_2(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m, \quad (n, m = 0, \pm 1, \ldots), \tag{2}$$

причем $n \geq 2m+2$*, а ρ – комплексный параметр, $\rho = O(1)$.

Лучи вида

$$\left\{ x : Re \frac{\sqrt{a_0}\, x^{\frac{n}{2}+1}}{\rho\left(\frac{n}{2}+1\right)} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \ldots \right\},$$

называемые лучами раздела для уравнения (1), разбивают всю комплексную плоскость (точнее, риманову поверхность функции ln) на секторы (углы), раствор каждого из которых равен $\frac{2\pi}{n+2}$.

Каждому из этих секторов, обозначим их через Σ_p, $p = 0, \pm 1, \ldots$,

---

* Условие (2) можно заменить более общим, считая, что $q_1(x)$ и $q_2(x)$ аналитичны в окрестности бесконечно удаленной точки и имеют степенной рост на бесконечности. Условие $n \geq 2m+2$ также можно ослабить.

ISBN 5-12-001584-0. Аналитические методы в теории вероятностей и теории операторов. Киев, 1990.

однозначно сопоставляется решение $y = y_\rho(x)$, $\rho = 0, \pm 1, \dots$, уравнения (1), имеющее в любом внутреннем подсекторе Σ'_ρ соответственно ВКБ-асимптотику вида

$$y_\rho(x) \sim \frac{1}{\sqrt{q_1(x)}} \exp\left(\pm \int_{x_0}^{x} \sqrt{q_1(x)}\,dx\right), \tag{3}$$

где x_0 – некоторое фиксированное число, а знаки плюс или минус перед интегралом в (3) выбираются так, чтобы функция y_ρ в секторе Σ'_ρ была ограниченной.

В силу линейной независимости решений $y_{\rho+1}$ и $y_{\rho+2}$ можно написать, что

$$y_\rho(x) = y_{\rho+2}(x) + T_\rho y_{\rho+1}(x), \qquad \rho = 0, \pm 1, \dots, \tag{4}$$

где T_ρ $(\rho = 0, \pm 1, \dots)$ – постоянные, обычно их называют множителями Стокса. Знание всех постоянных T_ρ, $\rho = 0, \pm 1, \dots$, позволяет находить асимптотику $y_\rho(x)$ при $|x| \to \infty$ на любом луче римановой поверхности логарифма.

В [1] указаны формулы для вычисления T_ρ в виде

$$T_\rho = \int_{\Gamma_\rho} \exp\left(\mp \frac{2\mu(x)}{\rho}\right) a_\mp(t) f(t)\,dt, \tag{5}$$

где

$$\mu(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{q_0(t)}\,dt \tag{6}$$

(x_0 – фиксированное комплексное число),

$$a_\mp(x) = \left(\pm \frac{q_2(x)}{\sqrt{q_1(x)}} + \frac{q_1'(x)}{4q_1(x)}\right) \exp\left(\pm \int_{x_0}^{x} \frac{q_2(t)}{\sqrt{q_1(t)}}\,dt\right), \tag{7}$$

Γ_ρ – спрямляемый контур, ограничивающий область, которая содержит весь сектор Σ_ρ, за исключением его конечной части, и не пересекающий ни одного луча раздела, который не является границей сектора Σ_ρ, (см. рис. 1, где l_ρ, $l_{\rho+1}$ – лучи раздела, образующие сектор Σ_ρ. Контур Γ_ρ не пересекает соседние лучи раздела $l_{\rho-1}$ и $l_{\rho+2}$). Направление обхода Γ_ρ выбирается таким, чтобы бесконечная часть Σ_ρ при движении по контуру оставалась справа. Обозначим через $f_\pm$ – решения уравнения

$$f'' + \left(\pm \frac{2\mu'}{\rho} - \frac{a'_\pm}{a_\pm}\right) f' = a_- a_+ f, \tag{8}$$

где функции μ и $a_\mp$ определены формулами (6) и (7), соответ-

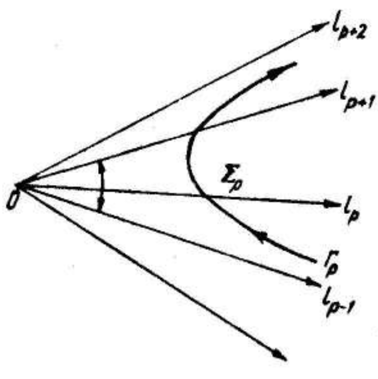

Рис. 1

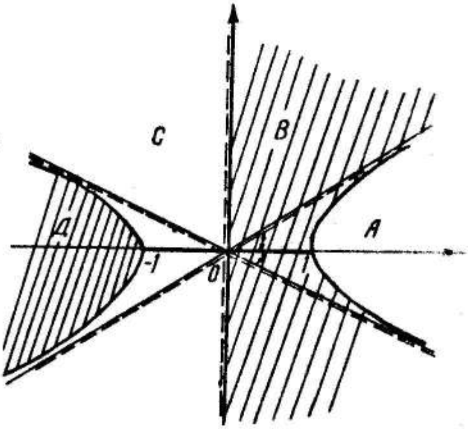

Рис. 2

ственно, представимые при больших x ($arg\,\rho$ предполагается фиксированным) асимптотическим рядом вида

$$f = f(x,\rho) \sim 1 + \rho^2 f(x) + \rho^2 f(x) + \dots \quad (9)$$

Оказывается, что ряд (9) можно формально подставить в уравнение (8) и после формальной замены порядка интегрирования получить формулу

$$T_\rho = T_\rho(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \int_{\Gamma_\rho} exp\left(\mp \frac{2\mu(t)}{\rho}\right) a_{\mp}(t) f_k(t)\,dt \ . \quad (10)$$

Если в ряд (10) вместо интегралов по Γ_ρ подставить главные члены их асимптотических разложений, вычисленные по методу перевала при $\rho = o(1)$, то получившийся ряд окажется сходящимся, при этом сумма будет представлять собой главный член асимптотики $T_\rho = T_\rho(\rho)$ при $\rho = o(1)$.

Замечание. Если условие $n \geqslant 2m+2$ не выполнено, то получившийся ряд может расходиться. Тем не менее этот ряд, как по существу указано в [5], всегда допускает суммирование по Пуассону.

В качестве примера рассмотрим задачу об ангармоническом осцилляторе

$$y'' = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\lambda x^4 - E\right)y, \quad y(-\infty) = y(\infty) = 0 \ , \quad (11)$$

где $\lambda = o(1)$ – так называемая константа связывания, E – собственное значение задачи (11). Известно, что $E_n(0) = n + \frac{1}{2}$, а при $\lambda \to 0$, $\lambda > 0$, $E_n(\lambda) \to n + \frac{1}{2}$.

Нас интересует характер $E_n(\lambda)$ при комплексных значениях λ. Оказывается, что $E_n(\lambda)$ есть аналитическая функция от λ, но только при условии, что $|\arg \lambda| < \frac{3\pi}{\lambda}$.

Для изучения зависимости $E_n(\lambda)$ при $|\arg\lambda| = \frac{3\pi}{2}$ сделаем замены

$$r = x\cdot e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad \rho = \lambda e^{-\frac{3\pi i}{2}}, \quad \varepsilon = 4iE,$$

приводящие задачу (11) к следующей задаче:

$$y''(r) = \frac{1}{4}(\rho r^4 - r^2 + \varepsilon)y(r), \qquad y(\infty) = y(-\infty) = 0. \tag{12}$$

После замены $r \to \frac{r}{\sqrt{\rho}}$ в уравнении (12), приходим к уравнению

$$y''(r) = \left(\frac{r^4 - r^2}{4\rho^2} + \frac{\varepsilon}{4\rho}\right)y(r), \quad y(\infty) = y(-\infty) = 0, \tag{13}$$

для которого применимы описанные выше (см. [1]) результаты. В этом случае

$$q_1(r) = \frac{r^4 - r^2}{4}, \qquad q_2(r) = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Пусть выполняется условие $\varepsilon\rho = o(1)$. Тогда для решения уравнения (13) могут быть написаны ВКБ-асимптотики при $r \to \infty$

$$y(r) = y(r,\rho) \sim \frac{C_1}{r}\exp\left(\frac{(r^2-1)^{3/2}+i}{6\rho}\right) + \frac{C_2}{r}\exp\left(-\frac{(r^2-1)^{\frac{3}{2}}+i}{6\rho}\right), \tag{14}$$

причем коэффициенты C_1 и C_2 зависят от того, в каком из секторов комплексной плоскости, ограниченном соседними лучами раздела, меняется переменная r.

Для уравнения (13) могут быть введены так называемые линии Стокса, см. [2]. Эти линии зависят от параметра ρ и в нулевом приближении по ρ, $\rho = o(1)$, задаются уравнением

$$Re\,\frac{(r^2-1)^{\frac{3}{2}}+i}{6\rho} = 0. \tag{15}$$

На рис. 2 изображены все линии Стокса для уравнения (13) при $\rho = o(1)$ и лучи раздела, задаваемые при $|x| \to \infty$ уравнением

$$Re\,\frac{r^3}{3\rho} = 0$$

Ясно, что эти лучи раздела являются асимптотами для линий Стокса (15), уходящих на бесконечность.

Рассмотрим четыре области A, B, C и D, изображенные на рис. 2, где пунктирные линии – линии раздела, сплошные – линии Стокса. Мнимая ось является одновременно линией Стокса и линией раздела. Угол между соседними лучами раздела равен $\frac{\pi}{3}$. Область A имеет своей границей линии Стокса (15), асимптотически приближающиеся к лучам раздела $|\arg r| = \frac{\pi}{6}$. Область B ограничена линией Стокса (15), уходящей из точки 1 на бесконечность и асимптотически приближающейся к лучу раздела $\arg r = \frac{\pi}{6}$, отрезком $[0,1]$ вещественной оси и положительным лучом мнимой оси. Области C и D симметричны соответственно с областями B и A.

В каждой из этих областей выбираются решения $y_A(r)$, $y_B(r)$, $y_C(r)$ и $y_D(r)$ уравнения (13), соответственно имеющие следующие ВКБ-асимптотики при $|r| \to \infty$:

$$y_A(r) \sim \frac{1}{r} e^{-\frac{r^3}{3\rho}}, \quad r \in A; \qquad y_C(r) \sim \frac{1}{r} e^{-\frac{r^3}{3\rho}}, \quad r \in C,$$

$$y_B(r) \sim \frac{1}{r} e^{\frac{r^3}{3\rho}}, \quad r \in B; \qquad y_D(r) \sim \frac{1}{r} e^{\frac{r^3}{3\rho}}, \quad r \in D.$$

В соответствии с формулами (4) можно написать равенства

$$y_A(r) = T_1 y_D(r) + (1 + T_1 T_2) y_C(r). \tag{16}$$

В нашем случае

$$T_1 = \int_{\Gamma_1} e^{-\frac{2\mu(r)}{\rho}} a_-(r) f_-(r)\, dr, \tag{17}$$

$$T_2 = \int_{\Gamma_2} e^{\frac{2\mu(r)}{\rho}} a_+(r) f_+(r)\, dr, \tag{18}$$

где в соответствии с (6) и (7)

$$\mu(r) = \frac{(r^2-1)^{3/2} + i}{6},$$

$$a_\mp(r) = \left(\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r}\right)^{\pm\frac{\varepsilon}{2i}} \left(\pm\frac{\varepsilon}{4r\sqrt{r^2-1}} + \frac{r}{2(r^2-1)} + \frac{1}{2r}\right),$$

а функции $f_\mp(r)$ определяется в соответствии с уравнением (8) и условием (9).

Для того чтобы функция $y_A(r)$ была решением задачи (13), необходимо, чтобы она оставалась ограниченной при аналитическом продолжении ее в область D. Из равенства (16) следует, что для этого должно выполняться условие

$$1+T_1 T_2 = 0, \tag{19}$$

которое является определяющим для изучения характера зависимости собственного значения E_n от параметра λ.

Вычислим T_1 и T_2. Контуры Γ_1 и Γ_2 охватывают соответственно бесконечные части областей B и C.

Основной вклад в асимптотику интеграла в правой части (17) вносят окрестности точек поворота $r = 0$, $r = 1$*.

В окрестности точки $r = 0$ уравнение (13) может быть приведено к уравнению Вебера

$$y'' = \left(-\frac{r^2}{4\rho^2} + \frac{\varepsilon}{4\rho} \right) y, \tag{20}$$

и поэтому вклад точки $r = 0$ в асимптотику интеграла (17) будет выражаться формулой $aT_1(0)$, где $a = e^{-\frac{i\varepsilon}{4}\ln 4}$, а $T_1(0)$ соответствующий множитель Стокса для уравнения (20), который равен (см. например, [3])

$$\frac{\sqrt{2\pi}\, \rho^{\frac{i\varepsilon}{4}} e^{-\frac{\pi\varepsilon}{8}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\varepsilon}{4}\right)}.$$

Вклад точки $r = 1$ представляется в виде $bT_1(1)$, где $b = e^{\frac{i}{3\rho}}$, а $T_1(1)$ – множитель Стокса для следующего уравнения Эйри, полученного из (13) при условии, что r находится вблизи точки 1,

$$y'' = \frac{r-1}{2\rho^2}\, y.$$

Все постоянные Стокса для уравнения Эйри равны i, т.е. $T_1(1) = i$ [3].

Поэтому можно написать, что

$$T_1 = aT_1(0) + bT_2(-1) = \frac{\sqrt{2\pi}\, i \rho^{\frac{i\varepsilon}{4}} e^{-\frac{i\varepsilon}{4}\ln 4}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\varepsilon}{2}\right)}\, e^{-\frac{\pi\varepsilon}{8}} + i e^{-\frac{i}{3\rho}} \tag{21}$$

Аналогично находим, что

$$T_2 = cT_2(0) + dT_2(-1),$$

---

* Всюду в дальнейшем мы ограничимся нулевым приближением по ρ.

где $c = e^{\frac{i\varepsilon}{4}\ln 4}$, $d = e^{\frac{i}{3\rho}} e^{\frac{\pi\varepsilon}{2}}$, а $T_1(-1)$ и $T_2(0)$ – множители Стокса соответственно для уравнений Эйри

$$y'' = \frac{r+1}{2\rho^2} y$$

и Вебера

$$y'' = \left(-\frac{r^2}{4\rho^2} + \frac{\varepsilon}{4\rho}\right) y,$$

отвечающие области С

$$T_1(-1) = i, \qquad T_2(0) = \frac{\sqrt{2\pi}\, i\rho^{-\frac{i\varepsilon}{4}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{i\varepsilon}{4}\right)} e^{\frac{3\pi\varepsilon}{8}} .$$

Поэтому

$$T_2 = \frac{\sqrt{2\pi}\, i\rho^{-\frac{i\varepsilon}{4}} e^{\frac{i\varepsilon}{4}\ln 4}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{i\varepsilon}{4}\right)} e^{\frac{3\pi\varepsilon}{8}} + i e^{\frac{i}{3\rho}} e^{\frac{\pi\varepsilon}{8}}. \tag{22}$$

Подставляя (21) и (22) в (19), получаем

$$-2e^{\frac{3\pi\varepsilon}{8}}\left[e^{\frac{\pi\varepsilon}{8}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\exp\left(-\frac{i}{3\rho} - \frac{i\varepsilon}{4}\ln\frac{\rho}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{i\varepsilon}{4}\right)} + \frac{\exp\left(\frac{i}{3\rho} + \frac{i\varepsilon}{4}\ln\frac{\rho}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\varepsilon}{4}\right)}\right)\right] = 0$$

Таким образом, мы приходим к следующему соотношению, связывающему ε и ρ :

$$e^{\frac{\pi\varepsilon}{8}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\exp\left(-\frac{i}{3\rho} - \frac{i\varepsilon}{4}\ln\frac{\rho}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{i\varepsilon}{4}\right)} + \frac{\exp\left(\frac{i}{3\rho} + \frac{i\varepsilon}{4}\ln\frac{\rho}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\varepsilon}{4}\right)}\right] = 0. \tag{23}$$

Нули целой функции аргумента ε в левой части равенства (23) и есть точки спектра задачи (13). Уравнение (23) позволяет получить полную информацию о зависимости ε от ρ при $\varepsilon\rho = O(1)$.

Интересно сравнить предложенный нами метод со стандартным методом сращивания асимптотик, которым пользуются Бендер и Ву (см. [4]) для уравнения (12).

В [4] рассматриваются отдельно асимптотики четного и нечетного решений. Пусть например, $y(r)$ – четная функция. Выделяются четыре области A′, B′, C′ и D' таким образом, что

$$A' = \{r : 0 < |r| < r_0\}, \qquad C' = \{r : |r_0| << |r| << |r_1|\},$$

$$B' = \{r : r_0 << |r| << r_1\}, \quad D' = \{r : |r| \sim |r_1|\},$$

где r_0, r_1 – точки поворота уравнения (12),

$$r_0=\left\{[1-(1-4\rho\varepsilon)^{1/2}](2\rho)^{-1}\right\}^{1/2}\sim\varepsilon^{1/2},$$

$$r_1=\left\{[1+(1-4\rho\varepsilon)^{1/2}](2\rho)^{-1}\right\}^{1/2}\sim\rho^{-1/2}.$$

В области A' уравнение (12) заменяется уравнением Вебера

$$y''=\left(-\frac{r^2}{4}+\frac{\varepsilon}{4}\right)y,$$

для четного решения которого может быть найдена ВКБ-асимптотика

$$y_{A'}(r)\sim\frac{C_1}{r}\left\{\frac{\exp\left[\frac{i}{4}\left(r^2-\varepsilon\ln r+\frac{\varepsilon}{2}\ln 2-\frac{\pi}{2}\right)\right]}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\varepsilon}{8}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\exp\left[-\frac{i}{4}\left(r^2-\varepsilon\ln r+\frac{\varepsilon}{2}\ln 2-\frac{\pi}{2}\right)\right]}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\varepsilon}{8}\right)}\right\}. \qquad (24)$$

В области B' можно написать ВКБ-асимптотику для этого же решения

$$y_{B'}(r)\sim\left(-\varepsilon+r^2-\rho r^4\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{C_2\exp\left[\frac{i}{2}\int_{r_0}^{r}\left(-\varepsilon+r^2-\rho r^4\right)^{\frac{1}{2}}dr\right]+\right.$$

$$\left.+C_3\exp\left[-\frac{i}{2}\int_{r_0}^{r}\left(-\varepsilon+r^2-\rho r^4\right)^{\frac{1}{2}}dr\right]\right\}, \qquad (25)$$

преобразующуюся, в силу условия $r_0<<|r|<<r_1$, к виду

$$y_{B''}(r)\sim\frac{1}{\sqrt{r}}\left\{C_2\exp\left[\frac{i}{4}\left(r^2-\varepsilon\ln r-\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon\ln\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+C_3\exp\left[-\frac{i}{4}\left(r^2-\varepsilon\ln r-\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon\ln\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\right)\right]\right\}. \qquad (26)$$

Сравнивая (24) и (25), получаем соотношение

$$\frac{C_2}{C_3}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i\varepsilon}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\varepsilon}{4}\right)}\exp\left[\frac{i}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\ln\frac{8}{\varepsilon}-\frac{\pi}{2}\right)\right]. \qquad (27)$$

Преобразуя выражение (25) для $r\in C'$, и учитывая, что в C' r близко к r_1, получаем асимптотику для $y_{C'}(r)$,

$$y_{C'}(r)\sim 2^{-\frac{1}{4}}\rho^{\frac{1}{8}}R^{-\frac{1}{4}}\left\{C_2\exp\left[-\frac{i}{3}\sqrt{2}\rho^{-\frac{1}{4}}R^{\frac{3}{2}}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{i}{6\rho}-\frac{i\varepsilon}{8}\left(\ln\frac{1}{\rho\varepsilon}+4\ln 2+1\right)\right]+$$

$$+ C_3 exp\left[\frac{i}{3}\sqrt{2}\rho^{-\frac{1}{4}}R^{\frac{3}{2}} - \frac{i}{8\rho} + \frac{i\varepsilon}{8}\left(ln\frac{1}{\rho\varepsilon} + 4ln2 + 1\right)\right]\Bigg\}, \tag{28}$$

где $R = r_1 - r$. В области C' уравнение (12) сводится к уравнению Эйри

$$y' = -\frac{1}{2} R\rho^{-\frac{1}{2}} y, \quad (R = r_1 - r),$$

решение которого $y_{D'}(r)$ удовлетворяет условию $y(-\infty) = y(\infty) = 0$. В этом случае для $y_{D'}(r)$ находим асимптотическое представление вида

$$y_{D'}(r) \sim C_4 R^{-\frac{1}{4}}\Big[exp\left(\frac{i}{3}\sqrt{2}\rho^{-\frac{1}{4}}R^{\frac{3}{2}} - \frac{i\pi}{4}\right) +$$

$$+ exp\left(-\frac{i}{3}\sqrt{2}\rho^{-\frac{1}{4}}R^{\frac{3}{2}} + \frac{i\pi}{4}\right)\Big]. \tag{29}$$

Сравнивая асимптотики (28) и (29) получаем

$$\frac{C_2}{C_3} = exp\left[i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3\rho} + \frac{\varepsilon}{4}ln\frac{16}{\rho\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{4}\right)\right]. \tag{30}$$

Объединяя (27) и (30), находим

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{i\varepsilon}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{i\varepsilon}{8}\right)} = exp\left[\frac{5i\pi}{4} + \frac{i}{3\rho} + \frac{i\varepsilon}{4}ln\frac{\rho}{2}\right]. \tag{31}$$

Аналогично для нечетного решения (12) можно получить соотношение

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{i\varepsilon}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{i\varepsilon}{8}\right)} = exp\left[\frac{i}{3\rho} - \frac{5i\pi}{4} + \frac{i\varepsilon}{4}ln\frac{\rho}{2}\right]. \tag{32}$$

Уравнение (31) и (32) сведем в одно и окончательно получим

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{exp\left(-\frac{i}{3\rho} - \frac{i\varepsilon}{4}ln\frac{\rho}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{i\varepsilon}{4}\right)} + \frac{exp\left(\frac{i}{3\rho} + \frac{i\varepsilon}{4}ln\frac{\rho}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\varepsilon}{4}\right)}\right] + e^{\frac{\pi\varepsilon}{8}} = 0.$$

Таким образом, оба метода дают один и тот же результат. Однако при сравнении их видно, что первый обладает некоторыми преимуществами. Во-первых, он допускает строгое обоснование, а во-вторых, быстрее приводит к цели.

Предложенный нами метод нахождения множителей Стокса имеет достаточно общий характер. Результаты статьи [5] позволяют распространить этот метод на системы из n уравнений, когда $n > 2$.

В применении к ангармоническому осциллятору мы ограничились нулевым приближением по ρ, однако ясно, что метод позволяет в принципе вычислять приближения любого порядка.

1. Гурарий В.П., Мацаев В.И., Рузматова Н.Т. Об одном подходе к изучению спектра ангармонического осциллятора. Деп. в УзНИИТИ, № 1 (159).
2. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. - М., 1983. - 352 с.
3. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). - М., 1965.
4. Bender C.M., Wu T.T. // Phys. Rev. - 1969. - 183, N 5. - P. 1231-1260.
5. Гурарий В.П., Мацаев В.И. Множители Стокса для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Докл. АН СССР. Сер. мат. - 1985. - 280, № 2. - С. 272-276.

Научное издание

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ

Сборник научных трудов

Художественный редактор Л.А.Комяхова
Технический редактор Е.А.Яровая
Оператор В.Ф.Политова
Корректоры Л.В.Белокопытова, В.А.Подолянчук

ИБ № 10999

Сдано в набор 15.05.90. Подп. в печ. 18.10.90. Формат 60x84/16.
Бум. офс. № 1. Офс. печ. Усл. печ. л. 9,07. Усл. кр.-отт. 9,30.
Уч.-изд. л. 9,22. Тираж 710 экз. Заказ 0-786. Цена 1 р. 80 к.

Оригинал-макет подготовлен в издательстве "Наукова думка".
252601 Киев 4, ул. Репина, 3.
Киевская книжная типография научной книги. 252004 Киев 4,
ул. Репина, 4.