Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Міністерство освіти і науки України

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Сазонова Олена Станиславівна

УДК 533.72

ДИСЕРТАЦІЯ

АСИМЕТРИЧНІ ТА КОНТИНУАЛЬНІ АНАЛОГИ БІМОДАЛЬНИХ РОЗПОДІЛІВ

Спеціальність 01.01.03 — ”Математична фізика”
(Фізико-математичні науки)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
____________ О. С. Сазонова

Науковий керівник: Гордевський Вячеслав Дмитрович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Харків – 2019

АНОТАЦІЯ

Сазонова О.С. Асиметричні та континуальні аналоги бімодальних розподілів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 — математична фізика (Фізико-математичні науки). — Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України; Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна Національної академії наук України, Харків, 2019.

Дисертаційна робота присвячена побудові явних наближених розв'язків нелінійного рівняння Больцмана для моделі твердих куль. Ці розв'язки будуються у вигляді асиметричних та континуальних аналогів бімодальних розподілів з максвелівськими модами різних типів: глобальними та стаціонарними неоднорідними. Величинами, що характеризують ступінь точності тих чи інших наближених розв'язків, є відхили між лівою та правою частинами рівняння, які обчислюються як рівномірно-інтегральна, або чисто-інтегральна норми різниці між ними.

Знайдені явні наближені розв'язки, відмінні від тих, що розглядались раніше. Вони мають вигляд лінійної комбінації стаціонарних неоднорідних максвеліанів при деяких припущеннях про зв'язок між кутовими швидкостями та температурами потоків. Отримані асиметричні аналоги бімодальних розподілів описують нерівномірно остигаючий газ, причому обертання обох ґвинтів сповільнюється, хоча і в різному ступені.

Запропонований новий підхід до пошуку наближених розв'язків. Цей підхід заснований на припущенні, що масова швидкість глобальних та локальних максвеліанів приймає не фіксовані дискретні значення, а стає довільним параметром, що приймає будь-які значення з простору $\mathbb{R}^3$. Також були знайдені наближені розв'язки з довільною густиною. Таким чином, побудовано новий клас наближених розв’язків у вигляді континуальних розподілів.

Для рівномірно-інтегрального та чисто-інтегрального відхилів у випадку асиметричних та континуальних розв’язків отримано оцінку зверху й показано, що ця оцінка має скінченну границю при низькій температурі максвеліанів. Отримані різноманітні достатні умови нескінченної мализни цих границь при спеціальному виборі поведінки параметрів, в тому числі, при великих числах Кнудсена. При цьому всі отримані розподіли не прямують до жодного з максвеліанів (тобто точного розв’язку рівняння Больцмана).

Ключові слова: тверді кулі, рівняння Больцмана, максвеліан, відхил, бімодальний розподіл, континуальний розподіл, ґвинти.

ABSTRACT

Sazonova O.S. Asymmetrical and continual analogues of bimodal distributions. — Qualification scientific paper, manuscript.

The thesis for obtaining the degree of Candidate of Sciences (Ph.D.) in physics and mathematics, speciality 01.01.03 — Mathematical Physics (Physics and Mathematics). — V. N. Karazin Kharkiv National University, the Ministry of Education and Science of Ukraine; B. I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2019.

The thesis is about construction of explicit approximate solutions of the non-linear Boltzmann equation for the model of hard spheres. This solutions are built in the form of assymetrical and continual analogues of bimodal distributions with different Maxwellian modes, namely such as: global and stationary non-homogeneous. A uniform-integral remainder or integral remainder between the sides of the Boltzmann equation are taken for the numerous characteristics of this solution exactness.

The approximate bimodal solutions that differs from those studied before, and which have the form of linear combination of stationary non-homogeneous Maxwellians with some assumptions about the connection between the angular velocities and the flow temperature, are found. The common property of this obtained asymmetrical analogues of bimodal distributions is that they describe the non-uniform cooling gas. Besides, the rotation of both screws decelerates, although in different degrees.

A new approach to the search for explicit approximate solutions based on assuming that the mass velocity of the global and local Maxwellian does not take fixed discrete values but becomes an arbitrary parameter taking any values in $\mathbb{R}^3$ is proposed. Also the approximate distributions with arbitrary density are investigated. So, the new kind of approximate solutions in the form of continual distributions is built.

For uniform integral and pure integral remainders in the case of asymmetrical and continual solutions a top estimate is obtained and it is shown that this estimate has a finite boundary at low Maxwell temperature. Various sufficient conditions for attaining the minimum of these boundaries are obtained in the special choice of the behavior of parameters, including, for large Knudsen numbers. At the same time, all obtained distributions itself do not tend to any of Maxwellians (i.e. to the known exact solution of the Boltzmann equation).

Keywords: hard spheres, Boltzmann equation, Maxwellian, remainder, bimodal distribution, continuum distribution, screws.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

Публікації у фахових виданнях України

1. Сазонова О. С. Асиметричні гвинтові потоки, що мінімізують інтегральний відхил між частинами рівняння Больцмана // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. 2012. № 1030. С. 4–13.

2. Гордевський В. Д., Сазонова О. С. Об одном классе приближенных решений уравнения Больцмана с винтовыми модами // Доповіді НАН України. 2014. № 2. С. 7–12 (Zentralblatt MATH: Zbl 1313.76093).

3. Gordevskyy V. D., Sazonova E. S. Continual approximate solution of the Boltzmann equation with arbitrary density // Matematychni Studii. 2016. Vol. 45, № 2. P. 194–204 (Zentralblatt MATH: Zbl 1362.35202, MathSciNet: MR3618031).

4. Gordevskyy V. D., Sazonova O. S. Continual distribution with screw modes // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. 2016. Т. 84. P. 112–122.

Публікації у виданнях, які входять до міжнародних наукометричних баз

5. Gordevskyy V. D., Sazonova E. S. Asymmetrical Bimodal Distributions with Screw Modes // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2011. Vol. 7, № 3. P. 212–224 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1266.76046, MathSciNet: MR2918488).

6. Гордевский В. Д., Сазонова Е. С. Континуальный аналог бимодальных распределений // Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 171, № 3. С. 483–492 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH:

Zbl 1282.82027, MathSciNet: MR3168728).

Публікації, які засвідчують апробацію дисертації

Публікації у матеріалах міжнародних наукових конференцій:

7. Сазонова Е. С. Асимметричные бимодальные распределения с винтовыми модами // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях : Международная научная конференция, 17–22 апреля 2011 г. : тезисы докладов. Харьков, 2011. С. 201–202.

8. Сазонова О. С. Взаємодія асиметричних гвинтових потоків // Сучасні проблеми механіки і математики : IV Конференція молодих учених імені академіка Я. С. Підстригача, 24–27 травня 2011 р. : тези доповідей. Львів, 2011. С. 153–154.

9. Гордевський В. Д., Сазонова О. С. Континуальний аналог бімодальних розподілів // Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування : матеріали XIV міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука, 19–21 квітня 2012 р., Київ, 2012. С. 135–136.

10. Sazonova O. S. The Continual approximate solution of the Boltzmann equation // Equilibrium and non-equilibrium statistical mechanics : XVII International Congress on Mathematical Physics, 6–11 August 2012. : abstracts. Aalborg, 2012. P. 26.

11. Sazonova O. Asymmetrical screw flows which minimize the integral remainder between the sides of the Boltzmann equation // Differential Equations and Mathematical Physics : International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, 17–21 September 2012. : abstracts of reports. Lviv, 2012. P. 228–229.

12. Gordevskyy V. D., Sazonova O. S. The Continual approximate solution of the Boltzmann equation with arbitrary density // Dynamical system modeling

and stability investigation : XVI International Conference, 29–31 May 2013. : abstracts of conf. reports. Kiev, 2013. P. 157.

13. Gordevskyy V., Sazonova O. Continual distribution with screw modes // Analysis and mathematical physics : International conference, 24–28 June 2013. : book of abstracts. Kharkiv, 2013. P. 24.

14. Гордевский В. Д., Сазонова Е. С. Об одном классе приближенных решений уравнения Больцмана // Современные проблемы математики, механики, информатики : Междунар. школа-конф. ”Тараповские чтения-2013”, 29 сентября — 4 октября 2013 г. : сборник тезисов докладов, Харьков, 2013. С. 93–94.

15. Gordevskyy V., Sazonova O. General form of the Maxwellian distribution with arbitrary density. Conference of young scientists ”Pidstrygachivsky readings — 2015”, 26–28 May 2015. : abstracts of reports. Lviv, 2015. P. 1–2.

16. Sazonova O. S. About one class of continual approximate solutions. 6th Ya.B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications, 18–20 June 2019 : book of abstracts. Vinnytsia, 2019. P. 65–66.

ЗМІСТ

ВСТУП

Для опису переходу розрідженого газу у стан термодинамічної рівноваги використовується інтегро-диференціальне рівняння [7, 8, 64], виведене одним з основоположників статистичної фізики й фізичної кінетики австрійським фізиком Людвигом Больцманом в 1872 році, яке й носить його ім'я. Це рівняння, якому судилося стати фундаментальним рівнянням кінетичної теорії розріджених одноатомних газів, описує часову еволюцію функції розподілу в газі часток, що взаємодіють через парні зіткнення. Воно відігравало й відіграє важливу роль в техніці, формуванні наукового світогляду. Рівняння Больцмана використовувалось для обґрунтування молекулярно-кінетичної теорії, другого закону термодинаміки про зростання ентропії, виведенні рівнянь гідродинаміки. Воно в своїх модифікаціях широко використовується при описанні розрідженого газу, випромінювання, переносу нейтральних часток типу нейтронів, в атмосферній оптиці, для розрахунків реакторів, тощо. Важко вказати інше нелінійне рівняння досить складної структури, що містить в собі такіж глибину і загальність, як рівняння Больцмана.

Обґрунтування вибору теми дослідження. Проблема пошуку точних і наближених розв'язків цього нелінійного інтегро-диференціального рівняння займає дуже важливе місце серед різних напрямів досліджень в кінетичній теорії газів. Дослідженню розв'язків цього рівняння, а також його обґрунтуванню присвячена велика кількість монографій, сбірників статей, оглядів, тощо [1, 2, 4–6, 10, 13, 28, 32–35, 39, 41–45, 51, 53–55, 68, 76, 89]. Зважаючи на складну структуру інтеграла зіткнень на даний момент отримана дуже невелика кількість точних розв'язків цього рівняння. Не дивлячись на те, що велика частина цих розв'язків описує вельми штучні ситуації, вони представляють велику цінність як еталонні розв'язки для апробації наближених методів розрахунку, а також дають важливу інформацію про якісну поведінку розв'язків цього інтегро-диференціального рівняння. Найбільш важливим точним розв'язком є максвелівський розподіл (максвеліан), що характеризує газ, що знаходиться в рівновазі [8, 64, 98, 99]. Це єдиний розв'язок, відомий на даний момент для моделі твердих (пружних) куль в явному вигляді. Перший найпростіший (залежний лише від v) розв'язок було знайдено Максвеллом ще в 1859 році. В подальшому Г. Гредом, Т. Карлеманом, О.Г. Фрідлендером було здобуто узагальнення цього розв'язку: спочатку на неоднорідний випадок (f залежить від v та x), і нарешті — на нестаціонарний (f залежить ще й від t) [32, 52, 88, 89]. Великих успіхів також вдалось досягнути О.В. Бобильову, M. Krook, T. Wu та H.M. Ernst у частковому випадку максвелівських молекул [3, 58, 73, 91, 92, 96]. Зокрема були отримані розв'язки (інколи лише у вигляді формальних рядів) і для деяких більш загальних випадків [9, 38, 40]. Разом з тим, дуже важливо виділити результати, що стосуються існування та єдиності розв'язків задачі Коші для рівняння Больцмана [12, 36, 56, 57, 67, 97, 109]. Методи розвинення в ряди Гільберта, Чепмена-Енскога та Греда також дають недостатню інформацію про вигляд цих розв'язків при скінченних значеннях часу, просторових та швидкісних змінних [29, 37, 49]. Що стосується чисельних методів, то вони також виявились нестрогими [11, 30, 31, 59, 60, 69–71, 74, 100, 103]. Очевидно, що нестаціонарних однорідних максвелівських розв'язків рівняння Больцмана не існує. У зв'язку з цим виникає інтерес до пошуку наближених явних розв'язків нелінійного рівняння Больцмана, що задовольняють йому лише з довільною мірою точності. Такі розв'язки служать доброю апроксимацією деяких точних розв'язків, що описують нерівноважні стани газу, і через свою простоту є зручною моделлю для дійсних розв'язків рівняння Больцмана, які сильно відрізняються від максвеліанів. Відмітимо, що перші спроби в цьому напрямі були зроблені ще в післявоєнні роки у зв'язку з наближеним описом ударної хвилі (розподіл

Тамма–Мотт–Сміта) [50, 66, 72, 90, 93–95, 101, 102, 104, 105]. В подальшому такий підхід неодноразово вивчався й розвивався багатьма авторами. Бімодальний розподіл Тамма–Мотт–Сміта і його модифікації були запропоновані саме з метою описання структури ударної хвилі, але виявилося, що вони ні точно, ні наближено не можуть задовольняти рівняння Больцмана з довільною мірою точності. Це пов'язано з накладанням жорстких умов на гідродинамічні параметри. Все це привело до необхідності побудови таких бімодальних розподілів з довільними гідродинамічними параметрами, які описували б процес взаємодії між двома максвелівськими потоками в газі з тведих куль і водночас задовольняли рівнянню Больцмана з якою завгодно мірою точності. Розв'язок цієї проблеми вперше було запропоновано В.Д. Гордевським в роботах [14–18]. Далі було побудовано різні класи явних наближених розв'язків, що відповідають як глобальним, так і локальним максвелівським модам [19, 20, 22, 23, 78–81]. Актуальність пошуку інших явних наближених розв'язків залишається.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика досліджень дисертаційної роботи була пов'язана з науковою програмою кафедри математичного аналізу Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Дисертація виконувалась у відповідності з тематичними планами державних науково-дослідницьких робіт "Аналітичні методи розв'язання якісних проблем теорії керування та теорії функціонально-диференціальних рівнянь" (номер державної реєстрації 0111U010364), "Асимптотичні і алгебраїчні методи в теорії диференціальних рівнянь та теорії керування" (номер державної реєстрації 0106U001561) і "Аналітичні методи в якісній теорії диференціальних рівнянь та теорії керування" (номер державної реєстрації 0109U001456).

Мета і завдання дослідження. Мета дисертації полягає в побудові явних наближених розв'язків нелінійного рівняння Больцмана для моделі твердих куль. Ці розв'язки будуються у вигляді асиметричних та континуальних аналогів бімодальних розподілів, де в якості мод використовуються різні типи максвеліанів: глобальні та стаціонарні неоднорідні. Величинами, що характеризують ступінь точності тих чи інших наближених розв’язків, є відхили між лівою та правою частинами рівняння, які обчислюються як рівномірно-інтегральна або чисто-інтегральна норми різниці між ними.

Об’єктом дослідження є нелінійне інтегро-диференціальне рівняння Больцмана для моделі твердих куль.

Предметом дослідження є явні наближені бімодальні та континуальні розв’язки з максвелівськими модами різних типів.

Основним завданням, яке доводиться розв’язувати для досягнення вказаної мети, є пошук таких умов, що необхідно накласти на коефіцієнтні функції асиметричних бімодальних та континуальних розподілів і на поведінку всіх наявних параметрів, які були б достатніми для того, щоб відповідний відхил між частинами рівняння міг бути зроблений скіль завгодно малим.

Методи дослідження. В дисертаційній роботі при вивченні поведінки відхилів між частинами рівняння використовувались методи математичного та функціонального аналізу, в тому числі й теорія узагальнених функцій.

Наукова новизна отриманних результатів. Всі результати, отримані в дисертаційній роботі, є новими і полягають в наступному:

1. Вперше побудовані явні наближені розв’язки нелінійного рівняння Больцмана у вигляді асиметричних аналогів бімодальних розподілів та досліджено їх фізичний зміст.

2. Розроблений новий підхід для пошуку явних наближених розв’язків, заснований на припущенні, що масова швидкість глобального максвеліана приймає не фіксовані дискретні значення, а стає довільним параметром, який приймає будь-які значення з $\mathbb{R}^3$. Таким чином, побудований наближений розв’язок у вигляді континуального розподілу,

що відрізняється від бімодальних. На основі цього підходу знайдені континуальні розподіли з довільною густиною.

3. Побудовано новий клас явних наближених розв’язків цього рівняння, який має вигляд континуальної суперпозиції локальних максвеліанів ґвинтового типу. Такі потоки описують стаціонарні рівноважні стани газу, подібні ґвинтам, тобто задають обертання газу як цілого з певною кутовою швидкістю й поступальний рух вздовж осі обертання. Вони задовольняють дане кінетичне рівняння з будь-яким довільним ступенем точності та означають припущення, що теплова складова швидкостей молекули мала, коли збережено довільне значення масової швидкості потоку.

4. Для рівномірно–інтегрального та чисто–інтегрального відхилів у випадку асиметричних та континуальних розв’язків отримано оцінку зверху й показано, що ця оцінка має скінченну границю при низькій температурі максвеліанів. Отримані також різноманітні достатні умови нескінченної мализни цих границь при спеціальному виборі поведінки параметрів, в тому числі, при великих числах Кнудсена.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертаційної роботи мають переважно теоретичне значення. Вони можуть бути використані при подальшому вивченні рівняння Больцмана і властивостей його розв’язків, а також застосовані при дослідженні інших моделей взаємодії між молекулами та інших кінетичних рівнянь. Вони можуть скласти зміст спеціальних курсів, які читаються на факультетах фізико-математичного профілю для студентів та аспірантів університетів та наукових установ НАН України. Разом з тим вони можуть знайти застосування й у таких галузях, як гідро- та аеродинаміка, метеорологія, океанологія та ін. при побудові і дослідженні математичних моделей різних процесів, пов’язаних із взаємодією тих чи інших потоків часток, зокрема при вивченні еволюції ґвинтових течій.

Особистий внесок здобувача. В роботах [24, 25, 82–84], написаних у співавторстві з науковим керівником, В.Д. Гордевському належить визначення напрямку дослідження, постановка задач і обговорення результатів. Основні результати дисертації, винесені на захист, отримано дисертантом самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювалися на міжнародних наукових конференціях:

1. Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках і інформаційних технологіях» (Харків, 2011);

2. IV Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я.С. Підстригача КМУ СПММ–2011 (Львів, 2011);

3. Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені М. Кравчука (Київ, 2012);

4. XVII International Congress on Mathematical Physics (Ольборг, Данія, 2012);

5. Міжнародна конференція присвячена 120-річчю Стефана Банаха (Львів, 2012);

6. International Conference on Fluids And Variational Methods (Лейпциг, Німеччина, 2013);

7. XVI Міжнародна конференція ”Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем” DSMSI-2013 (Київ, 2013);

8. International School on Recent Advances in partial differential equations and applications (Мілан, Італія, 2013);

9. International Conference ”Analysis and Mathematical Physics” (Харків, 2013);

10. Міжнародна школа-конференція ”Тараповські читання — 2013”, присвячена 150-річчу кафедри теоретичної та прикладної механіки Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (Харків, 2013)

11. Конференція молодих учених ”Підстригачівські читання — 2015” (Львів, 2015);

12. 6th Ya.B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications (Вінниця, 2019).

13. Науковий семінар кафедри фундаментальної математики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (керівник семінару — д.ф.–м.н., доцент О. Л. Ямпольський, 2019)

Публикації. Результати дисертації відображені в 16 наукових публікаціях, з яких 6 статей [24, 25, 48, 82–84] у спеціалізованих фахових виданнях (дві статті в журналах з імпакт-фактором) та 10 тез доповідей міжнародних наукових конференцій [26, 27, 46, 47, 85–87, 106–108].

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновку і списку використаних джерел, що складається зі 109 найменувань і займає 12 сторінок. Загальний об’єм дисертації складає 132 сторінки. Основні результати, винесені на захист, містяться в розділах 2–4.

Подяка. Автор виражає щиру подяку за цінні поради, постійну увагу до роботи та підтримку своєму науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору Гордевському Вячеславу Дмитровичу.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ВИБІР НАПРЯМКУ ДОСЛІДЖЕНЬ

В цьому розділі представлено огляд літератури за темою дисертації та обгрунтовано вибір напрямку дослідження, проведеного в даній роботі.

1.1. Огляд літератури за темою дисертації

В класичній кінетичній теорії розріджених одноатомних газів стан газу в момент часу $t \geq 0$ характеризується функцією розподілу $f(x, t, v)$ його молекул за просторовими координатами $x \in \mathbb{R}^3$ і швидкостями $v \in \mathbb{R}^3$. Загалом, функція розподілу задає число часток або молекул, які в момент часу t мають швидкість v і знаходяться в точці простору x, а її часова еволюція описується рівнянням Больцмана. Якщо слідувати Г. Греду [89], його можна записати у вигляді

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, v, t) + (v \cdot \nabla_x) f(x, v, t) = Q(f, f).$$

Якщо б права частина була рівною нулю, то ми мали б рівняння довільного руху. Функція $Q(f, f)$ — білінійний оператор, який називається оператором зіткнень. У зв'язку з тим, що рівняння Больцмана містить часткові похідні функції f за координатами та часом, для його розв'язку потрібно задати початкові та крайові умови, а це означає постановку для рівняння початково-крайової (змішаної) задачі.

Існують два підходи щодо дослідження таких задач. Перший з них пов'язаний з доведенням строгих теорем існування, єдиності, стійкості, неперервної залежності розв'язку від вхідних даних; другий заснований на методах побудови точних або наближених (частіше наближених) розв'язків в тому чи іншому явному вигляді. Не має ніякого сенсу протиставляти ці два підходи: вони обидва важливі як для розуміння особливостей поведінки розв'язку, так і для визначення області застосування самого рівняння. Часткові (точні та наближені) розв'язки дають достатньо повне представлення про поведінку газу в деяких цікавих з фізичної точки зору ситуаціях. Строгі теореми дозволяють судити про те, наскільки вони відображають загальну ситуацію, чи існує розв'язок в цілому.

Сам Больцман спочатку розглядав це рівняння при доведенні того, що в розрідженому газі довільна функція розподілу по швидкостям прямує при $t \to \infty$ до розподілу Максвела-Больцмана. В подальшому було показано, що наслідком цього рівняння є й рівняння гідродинаміки; на його основі побудовані важливі методи, що використовуються в практичних газодинамічних розрахунках. При всіх цих успіхах рівняння Больцмана завжди оточене цілою низкою проблем. На даний час до кінця не з'ясовані його математичні властивості, зокрема не доведена теорема існування розв'язку в цілому. Більш того, навіть з точки зору теоретичної фізики воно має парадоксальну властивість: воно не може бути обереним, хоча в принципі отримане з обернених рівнянь мікроскопічної динаміки. Більш конкретніше це означає наступне: якщо набір функцій $(q_1(t), v_1(t), ..., q_n(t), v_n(t))$ являє собою розв'язок мікроскопічних рівнянь руху, то розв'язком є й набір $(q_1(-t), -v_1(-t), ..., q_n(-t), -v_n(-t))$. І, здавалося б, можна очікувати, що якщо функція $f_t(q, v)$ є розв'яком, то розв'язком буде й функція $f_{-t}(q, -v)$. Проте, окрім спеціальних випадків, це не так.

Важливу роль відіграє ряд досліджень, пов'язаних з доведенням існування в цілому розв'язку задачі Коші. Теорема існування Греда гарантує існування (точного) розв'язку на інтервалі часу $[0, T]$, причому $T \to +\infty$, тільки якщо початкова функція f_0 прямує до максвелівської функції розподілу. Тому природньо очікувати, що найбільш просто існування розв'язку в цілому встановлюється у випадку, коли початковий стан газу мало відрізняється від рівноважного. Історично першою теоремою існування в цілому розв'язку рівняння була теорема, доведена в 1933 р. Т. Карлеманом [32, 67], який розглянув газ, що складається з молекул — твердих куль в просторово-однорідному випадку. В цьому випадку функція розподілу залежить лише від v та t. Також показано, що знайдений розв'язок прямує до глобального максвеліана при нескінченно великому часі в рівномірній за швидкістю нормі.

Результат Т. Карлемана у випадку степеневих потенціалів було узагальнено Н.Б. Масловою та Р.П. Чубенко [36]. А у 1972 році Л. Аркерід [56,57] отримав результат, що стосується існування, єдиності та асимптотичної поведінки розв'язку просторово-однорідного рівняння Больцмана. Йому вдалося узагальнити попередні результати і довести існування більш сильного розв'язку. В дійсності випадок з максвелівською функцією розподілу залишається поки єдиним, для якого вдалось довести існування розв'язку в цілому. Також великий вклад в розвиток вказаних результатів зроблено С. Укаі в роботі [109]. Ця робота присвячена дослідженню в цілому неоднорідного рівняння Больцмана для моделі твердих куль і деяких ступеневих потенціалів в обмеженій просторовій області (періодичні граничні умови). Ці результати відносяться до так званого слабкого нелінійного випадку, коли доводиться накладати досить жорсткі обмеження на норму відхилу початкової умови від глобального максвелівського розподілу. В подальшому цей результат мав розвиток в роботах Р. Кефліша [66]. Також в подальшому був зроблений великий крок вперед Л. Ліонсом [97]. Було доведено досить загальну теорему існування слабких розв'язків повного рівняння Больцмана в широкому класі функцій при "великих" початкових даних (а саме неоднорідних та сильно відмінних від максвеліана). З отриманих ним результатів випливає досить важливий висновок про те, що аналог задачі Коші з максвеліаном в якості "початкової умови на нескінченності" може мати розв'язки, які не обов'язково є малими збуреннями максвелівського розв'язку. Проте відмітимо, що єдиність розв'язку не була доведена.

Вперше математично строге виведення рівняння Больцмана з ньютоновських рівнянь руху часток газу було отримане у 1975 р. О.Е. Ланфордом III. Отримані ним результати стали строгою реалізацією ідей, висунутих Н.Н. Боголюбовим в його відомій роботі ”Проблеми динамічної теорії в статистичній фізиці” (1946 р.). Результат О.Е. Ланфорда важливий тим, що він знімає питання про принципову несумісність рівняння Больцмана з ньютоновськими рівняннями руху часток газу. Тезу про таку несумісність висували деякі вчені початку століття на основі того, що ньютоновські рівняння руху обернені за часом, а рівняння Больцмана ні.

Більш ніж через 100 років після того, як Максвел та Больцман заклали основи кінетичної теорії, відбулось чудове співпадіння. Приблизно в той самий час і незалежно один від одного А.В. Бобильову [3], М. Круку та Т.Т. Ву [96] вдалося побудувати для максвелівських молекул точний автомодальний розв’язок дуже простого виду (БКВ-мода) для задачі про релаксацію максвелівського газу. Спираючись на раніше побудоване та досліджене ним перетворення Фур’є рівняння Больцмана, Бобильов спочатку розв’язав задачу Коші для просторово-однорідного випадку при досить спеціальному виборі початкової умови, а потім застосував до цього однорідного розв’язку перетворення О.О. Нікольського. Круком та Ву в [96] для випадку псевдомаксвелівських молекул з використанням рівнянь збереження знайдено розв’язок задачі, дослідженої в роботі [3]. БКВ-мода справедлива для газу будь-якої розмірності та не залежить від явного вигляду частоти зіткнень (функції $\alpha(x)$). Тому її природньо розглядати і як частковий розв’язок цілого класу модельних рівнянь Больцмана, що відрізняються виглядом функції $\alpha(x)$, яка не обов’язково визначається законами класичної механіки, а може бути вибрана просто з міркувань математичної зручності. Часткові розв’язки (а їх дуже небагато) грають важливу роль в теорії рівняння Больцмана. Такі спеціальні розв’язки, як БКВ-мода, дозволяють досіджувати особливості релаксаційних процесів при всіх значеннях швидкостей молекул, вивчати характер формування високоенергетичного ”хвосту” функції розподілу. Їх значення може зростати ще більше, якщо буде справедливою гіпотеза Крука-Ву. Велику роль у поширенні методу перетворення Фур'є і узагальненні отриманих цим методом результатів зіграли роботи Х. Ернста, Е. Хауге, Е. Престгаарда [74,91,92], в яких аналітично обґрунтовані заперечення проти гіпотези Крука-Ву. Проте не дивлячись на те, що чисельні та аналітичні аргументи проти гіпотези Крука-Ву досить переконливі, в її відношенні до сих пір не зроблено остаточного висновку.

В.О. Веденяпіним також на основі перетворення Фур'є в роботі [9] був отриманий остаточний вид відповідної моментної системи рівнянь у випадку неізотропних за швидкістю просторово-однорідних функцій розподілу. На відміну від ізотропного випадку тепер вдалося знайти розв'язки не в замкнутій формі, а лише у вигляді формальних степеневих рядів.

Відкриття точного розв'язку стимулювало значний інтерес до пошуку часткових розв'язків нелінійного рівняння Больцмана. Також цікаві результати отримали Х. Ернст в роботі [73], М. Барнслей та Х. Корнілл в [58], які розробили метод розв'язку рівняння Больцмана з довільними початковими умовами. Також розглядаються і нові моделі взаємодії між молекулами газа, що допускають порушення законів збереження енергії при зіткненнях. Були знайдені два типи розв'язків: ті, що прямують при великих показниках часу до абсолютного максвеліана (на відміну від БКВ-моди, яка прямує до нуля) та до комбінації максвеліана та осцилюючої у часі функції (”періодичні розв'язки”). Зовнішня сила, що діє на молекулу, передбачається не потенційною, але залежною від швидкості молекули. Таке припущення приводить, зокрема, до виникнення ”великих популяцій” високошвидкісних часток.

Для просторово однорідного випадку за допомогою перетворення Фур'є і подальшого розділення змінних в роботах Д.Я. Петрини і

О.В. Міщенка [38, 40] побудований явний розв'язок для більш загального випадку, залежного від першого ступені модуля відносної швидкості. Тут розглянутий член зіткнень більш загального вигляду, ніж для максвелівських молекул (а саме, допускається його лінійна або поліноміальна залежність від квадрата відносної швидкості молекул з коефіцієнтами, залежними лише від косинуса прицільового кута). Суттєва відмінність від рівняння Больцмана для максвелівських молекул в тому, що звичайні диференціальні рівняння, що виникають після розділення змінних, залежать від коефіцієнтів зі старшими номерами і тому, на перший погляд, явно не розв'язуються. Після переходу до перетворення Фур'є розв'язок задачі Коші для однорідного рівняння Больцмана шукається у вигляді добутку експоненти та степеневого ряду за просторовою змінною з коефіцієнтами, що залежать тільки від часу. За допомогою методу нормальних форм Пуанкаре [9] лінеаризовано нескінченну систему рівнянь для цих коефіцієнтів та доведено збіжність ряду, що представляє рівняння Больцмана.

В роботах О.В. Бобильова та К. Черчиньяні [61, 62] знову з використанням перетворення Фур'є рівняння Больцмана, доведено існування широкого класу розв'язків з нескінченною енергією, асимптотично близьких до автомодальних розв'язків, у том числі, до БКВ–моди. Показано, що "вічні" розв'язки з кінцевими моментами всіх порядків, відмінні від максвеліана, не можуть бути додатніми, проте всі вони прямують до точних розв'язків типу БКВ–моди при нескінченно великому від'ємному часі.

На жаль, техніка робіт [3, 9, 38, 40, 58, 73, 91, 92, 96] не переноситься на інші моделі взаємодії між молекулами, в тому числі, на модель твердих куль. Тому для них функції типу БКВ-моди та ін. не є точними розв'язками, і єдиним класом таких розв'язків залишаються максвеліани.

Велика кількість робіт Д.Я. Петрини, В.І. Герасименко та К.Д. Петрини присвячена зв'язку між розв'язками ланцюжка рівнянь Н.Н. Боголюбова (ББГКІ–ланцюжка) та рівнянням Больцмана

[5, 6, 10, 33, 41–43, 68, 76]. Розв'язок такої системи рівнянь - досить складна задача. Однак при наявності малих параметрів виявляється можливим обірвати ланцюжок рівнянь та звести тим самим задачу до розв'язку замкнутої системи рівнянь для кінцевого числа скорочених функцій розподілу. В роботі [12] доведено існування глобальних розв'язків для нескінченної одномірної системи твердих куль з обмеженими початковими умовами, а також досліджено питання про існування термодинамічної границі. Досліджено також асимптотичну поведінку розв'язків при великих показниках часу та швидкості. Проте вид цих розв'язків, відмінних від максвелівських, при кінцевому значенні часу та швидкості залишається невідомим.

Дуже важливим є пошук розв'язку кінетичних рівнянь у вигляді функціональних рядів. Найбільш відомими є розкладання Гільберта, Чепмена-Енскога та Греда [2, 4, 13, 28, 29, 32, 34, 35, 37, 45, 49, 51, 53–55], в основу яких покладено теорію збурень, коли в якості малого параметра ε використовується число Кнудсена та функція розподілу f розкладається в ряд по степеням ε:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n.$$

Вперше метод теорії збурень для розв'язку рівняння Больцмана був використаний Гільбертом. Основний результат Гільберта полягає в тому, що якщо припустити можливість розкладання функції розподілу в ряд за ступенями числа Кнудсена, то можна побудувати макроскопічне описання газу в термінах густини, масової швидкості та температури. Це описання є суттєвим при визначенні рівнянь нев'язкої рідини, але містить поправки, які можуть бути знайдені завдяки розв'язку лінеарізованих рівнянь.

Підход Чепмена-Енскога полягає в тому, що замість розкладання розв'язків використовується розкладання рівнянь. Це зводить пошук функції розподілу до розв'язку нескінченної системи інтегральних рівнянь. В подальшому цей підхід отримав цілий ряд модифікацій в роботах багатьох авторів Г. Гредом, В.В. Струмінським, В.А. Мацуком, В.А. Риковим [29, 37, 49]. Найважливішим є те, що завдяки цим методам можливе описання більш реальних нерівноважних станів, коли суттєвим є вплив в'язких членів та має місце теплоперенос. Відомі рівняння гідродинаміки - Ейлера, Навьє-Стокса, Барнетта та ін. виводяться в перших наближеннях методу Чепмена-Енскога. Проте принципово покращити описання розрідженого газу не вдається, оскільки кожне наступне наближення в розкладаннях Гільберта та Чепмена-Енскога набагато складніше попереднього. Проблеми апроксимації точних розв'язків та практичного використання "вищих" рівнянь гідродинаміки детально розглянуті в роботах [4, 29].

Оскільки однією з основних складностей, що виникають при розв'язанні рівняння Больцмана, є складна структура інтеграла зіткнень, були запропоновані більш прості вирази — так звані моделі інтеграла зіткнень. У зв'язку з цим будь-яке рівняння типу рівняння Больцмана з модельним інтегралом зіткнень має назву модельного рівняння або кінетичної моделі. Найбільш відомою є модель Бхатнагара, Гросса та Крука (БГК-модель) [59]. В даному випадку інтеграл зіткнень замінюється виразом, пропорційним різниці між локальним максвеліаном та початковою функцією розподілу. Всі основні властивості залишаються справедливими, проте значення багатьох макроскопічних характеристик газу мало залежать від подробиць двохчасткової взаємодії. Іншими словами, детальна структура оператора зіткнень не враховується і обмежується більш грубим описанням. Звісно, як показано в роботах [4, 35, 54, 55], що нелінійність БГК-моделі набагато гірше, ніж нелінійність інтеграла зіткнень в рівнянні Больцмана. Саме тому інколи виникає необхідність використання її лінеаризованого варіанту. Проте основною перевагою при використанні БГК-оператора є можливість редукції будь-якої задачі до системи інтегральних рівнянь відносно макроскопічних змінних ρ, v і T. Ці рівняння мають сильну нелінійність, проте можуть буди розв'язані чисельно за допомогою різних ітераційних методів, що дає можливість дослідження досить цікавих задач з використанням комп'ютерних технологій.

Серед численних моделей взаємодії між молекулами газу найбільшу увагу досліджень традиційно займають модель твердих (пружних) куль та модель максвелівських молекул (відомі і деякі її узагальнення). В першій з них (вона розглядалась ще в [64]) молекули передбачаються однаковими ідеально круглими та гладкими кулями, що взаємодіють лише в момент зіткнення у відповідності із законами класичної механіки збереження імпульсу та енергії [1, 10, 39, 43, 68, 76]. В другій (була виявлена ще Дж. К. Максвелом) молекули пов'язані силами відштовхування, обернено пропорційними п'ятій степені відстані між центрами [2, 4, 13, 34, 35, 45, 51, 54, 55].

Окремий напрямок в дослідженні рівняння Больцмана займає вивчення моделей, в яких передбачається, що швидкості всіх молекул одновимірні, двовимірні або тривимірні, проте їх можливі напрямки і величини можуть приймати значення з того чи іншого дискретного набору, та при зіткненнях вони змінюються згідно заданими правилами так, щоб залишатись в межах вказаного набору. Це дає можливість перейти до систем диференціальних рівнянь, в яких аналогом інтеграла зіткнень є ті чи інші кінцеві суми, нелінійні відносно шуканих функцій. Система рівнянь Т. Карлемана [32] вважається першою та найпростішою такою моделлю, яка описує лінійний газ, для якого встановлюється аналог H-теореми. В роботі [70] для одновимірної дискретної моделі з двома типами часток та чотирма можливими значеннями швидкостей за умови збереження іпульсу та енергії, а також для деяких двовимірних моделей рівняння Больцмана побудовані точні розв'язки ударної хвилі. Значних результатів у вивченні дискретних кінетичних моделей вдалось досягнути В.І. Герасименко зі співавторами в роботах [11, 65], в яких було досліджено одновимірну та двовимірну дискретні моделі

Бродуелла та побудовано нескінченні системи рівнянь Н.Н. Боголюбова. В роботі [11] для одновимірної моделі Бродуелла доведена сильна неперервність та ізометричність відповідного еволюційного оператора, а також теорема існування та єдиності сильних та слабких розв’язків системи, що є границею деяких ітерацій. Далі отримано нетривіальний аналог рівняння Больцмана у вигляді дискретної системи еволюційних рівнянь Больцмана-Енскога, для якої знайдені точні розв’язки аналогічні максвелівським.

Відомо, що в міру зростання густини газу зростає і роль процесів, при яких в моменті зіткнення приймають участь три, чотири та більше часток. Застосування кінетичного рівняння Больцмана, яке справедливе тільки для розріджених газів, стає неправомірним. Тому для описання більш складних процесів для самого рівняння Больцмана або для моделей взаємодії між частками газу багатьма різними авторами запропоновано велику кількість модифікацій. Так в якості різних граничних випадків отримані рівняння типу Власова та Енскога. Рівняння Власова відмінне від рівняння Больцмана і корисне для описання системи слабо взаємодіючих матеріальних точок протягом короткого проміжку часу; це випадок розрідженого газу, частки якого взаємодіють шляхом порівняно слабких далекодіючих сил, наприклад електрони в іонізованому газі (кулонівська сила) або зірки в зірковій системі (гравітаційна сила). Важливою властивістю рівняння є його нелінійність. Наближене лінеаризоване рівняння Власова дозволяє описати цілий ряд нерівноважних процесів в плазмі. В рівнянні Енскога (більш загальне, ніж рівняння Больцмана-Енскога) на відміну від рівняння Больцмана враховується кореляція між положеннями куль в щільному газі, між якими відбувається зіткнення. В першому наближенні для достатньо м’яких потенціалів ці рівняння дозволяють знайти похідні розв’язків в початковий момент часу, коефіцієнти дифузії, деякі часткові розв’язки у вигляді комбінації експонент та ін. Багатьом модельним рівнянням, які мають точні розв’язки, присвячений огляд М. Ернста [74]. Новим поштовхом в даному напрямку є модель надтвердих часток (”дуже твердих куль”), які мають властивіть при зіткненнях поглинати або знищувати один одного, а також стохастичні моделі, в яких імовірність розльоту часток із заданими параметрами передбачається здатною приймати значення з деякого заданого інтервалу. Рівняння Больцмана-Енскога, що описує динаміку газу малої густини з твердих куль, має так звані мікроскопічні розв’язки. Ці розв’язки є узаглненими функціями (мають вид сум дельта-функцій) і відповідають динаміці системи N куль. Це дає можливість описання динаміки газу не тільки в термінах одночасткової функції щільності розподілу, але й в термінах траєкторії окремих часток. Дослідженню, узагальненню та пошуку розв’язків цих рівнянь, зокрема для моделі твердих куль, присвячені роботи Д.Я. Петрини, К.Д. Петрини, В.І. Герасименка, І.В. Гап’яка, А.С. Трушечкіна та інших [44, 63, 75, 77, 103].

Важливе місце серед неперервного рівняння Больцмана та його дискретних аналогів займають напівнеперервні моделі, в яких модуль швидкості молекули є фіксованою величиною, а її напрямок довільний. Так в роботі О.В. Бобильова та Г. Шпиги [60] знайдено сімейство симетричних однорідних розв’язків шляхом зведення задачі до інтегро-диференціального рівняння. Інше однопараметричне сімейство точних стаціонарних розв’язків отримане для задачі про випаровування-конденсації газу на поверхні фіксованої сфери, де задані визначені граничні умови. Дослідження та описання вибухової хвилі за допомогою дискретних моделей рівняння Больцмана здійснено Р. Монако, Х. Корнілом та К. Черчіньяні в роботах [69, 71, 100].

Досить актуальними на сьогоднішній день є дослідження, які присвячені чисельним методам розв’язання рівняння Больцмана. Основні методи докладно описані в монографії [2]. Загалом чисельні методи розв’язання рівняння Больцмана використовуються для аналізу динаміки розрідженого газу з 60-х років XX сторіччя. В роботі [34] використовується чисельний метод, який описує поведінку розріджених сумішей газів. Згодом була розв’язана задача про структуру кнудсенівського шару за допомогою метода Монте-Карло, що було підтверджено результатами Дж. Берда [2]. Ф.Г. Черемісіним було розроблено консервативний проекційний метод обчислення інтеграла зіткнень, який є одним із перших ефективних прямих методів розв’язку рівняння. Розвиток цього методу для суміші газів при помірному відношенні молекулярних мас компонент показано в спільній з О.І. Додуладом та Ю.Ю. Клосс роботі [30]. Логічне продовження роботи розширення оригінального проекційного метода відображено в роботі [31].

Чисельні методи також широко застосовуються і для дискретних моделей рівняння Больцмана. Проте варто відмітити, що висновки про поведінку точних розв’язків на основі чисельних методів все ж таки досить скрутні, оскільки, як і раніше, дуже мало відомо про можливі властивості рівняння при кінцевих значеннях часу і просторових змінних. Саме тому аналітичні розв’язки рівняння Больцмана є актуальними і мають велике практичне значення.

Історичною датою виникнення кінетичної теорії газів в сучасному розумінні прийнято вважати 1859 р., коли Дж. К. Максвел вперше представив свою доповідь, в якій було використано статистичний підхід до проблеми. Було спростовано припущення про те, що всі молекули газу рухаються з однаковими швидкостями, та враховано випадковий характер молекулярного руху. Загальний вигляд розподілів, що обертають праву частину рівняння, а саме інтеграл зіткнень, в нуль, описаний ним при наявності зовнішніх сил та без яких-небудь припущень стосовно зіткнень між молекулами [98]. Даний розподіл був знайдений Максвелом ще до створення Больцманом кінетичного рівняння і відповідав стаціонарному рівноважному стану газу. Згодом ці результати були також повторені Л. Больцманом в роботах [7,8,64], в яких доведення його H-теореми носило вже більш строгий характер, ніж у Максвела. Спочатку було знайдено лише глобальний, тобто стаціонарний та однорідний максвеліан, гідродинамічні параметри якого (густина, температура, масова швидкість газу) не залежили ні від часу, ні від координат молекули. Цей результат був узагальнений Максвелом в роботі [99], де було отримано загальний вигляд стаціонарних, але неоднорідних максвеліанів при відсутності зовнішніх сил. Стандартна форма запису максвелівської функції розподілу за швидкостями в стані термодинамічної рівноваги має вид: $M(v) = \rho(2\pi T)^{-3/2}exp\left(-\frac{(v-u)^2}{2T}\right)$, де параметри ρ, u і T не залежать від v, але можуть бути функціями від x і t.

Дж. Максвел та Л. Больцман обидва бачили, що правильне визначення кінетичної рівноваги повинно привести до певного спеціального локального максвелівського розв'язку; вони накладали більше або менше обмежень, щоб отримати результат, який узгоджувався би належним чином з аеростатикою. Виявляється, що такий розподіл описує обертання газу як цілого навколо нерухомої осі та його поступальний рух, але лише вздовж цієї ж вісі. Отримаємо так званий ґвинтовий або спіралевидний рух газу, при якому густина швидко зростає в міру віддалення від осі обертання [55].

Подальший розвиток та узагальнення ґвинтового розподілу було здійснено лише в 1949 році Г. Гредом [88]. При відсутності зовнішніх сил було знайдено загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно гідродинамічних параметрів і, таким чином, описана їх можлива залежність від часу і температури. А згодом найбільш загальний (нестаціонарний) локально-максвелівський розв'язок рівняння Больцмана було отримано Т. Карлеманом [32] та О.Г. Фрідлендером [52]. Також в цих робота проведено частковий аналіз фізичного змісту нестаціонарних максвелівських розв'язків. В роботі [52] проаналізовано зв'язок між структурою локально-максвелівських розв'язків та властивістю зовнішніх сил. Проте деякі важливі особливості локальних максвеліанів, такі як форма та швидкість руху потоків газу, що обертається, еволюція гідродинамічних параметрів при кінцевих значеннях часу, розподіл густини в просторі та ін. було досліджено недостатньо.

Описання більш складних явищ в газі не може бути досягнуте за рахунок використання одного максвелівського розподілу в силу відсутності для більшості основних моделей взаємодії між молекулами точних розв'язків, що відповідають певним процесам та явищам. У зв'язку з цим виникла потреба в дослідженні тих чи інших комбінацій максвеліанів з подальшим дослідженням питання про те, чи можуть вони бути точними або наближеними розв'язками рівняння Больцмана.

Найпростіша задача, в якій суттєвим є врахування нелінійного характеру рівняння Больцмана — задача про структуру ударної хвилі. Ударні шари характеризуються різкою зміною гідродинамічних параметрів (такі області виникають, наприклад, в стаціонарному надзвуковому потоці). В наближенні нев'язкого газу ударні шари, або ударні хвилі, описуються як поверхневі розриви. В рамках теорії Нав'є-Стокса ударна хвиля представляє собою область, в якій фізичні величини змінюються гладко, але швидко, а ударний шар має товщину порядку середньої довжини вільного пробігу. Оскільки товщина ударного шару мала, то, строго кажучи, користуватися в них рівнянням Нав'є-Стокса вже не можна. Надійні результати в даному випадку можуть бути отримані лише на основі рівняння Больцмана.

Першим підходом до цієї задачі була робота [50], виконана І.Є. Таммом у 1947 р., хоча і була опублікована значно пізніше. В той самий час в 1951 р. була опублікована Мотт-Смітом робота [101]. Ідея цих робіт полягала в тому, що була представлена апроксимуюча функція розподілу (в подальшому ТМС-розподіл) [50, 101] у вигляді:

$$f = \varphi_-(t,x)M_-(v) + \varphi_+(t,x)M_+(v),$$

де $M_-(v)$ та $M_+(v)$ представляють собою максвеліани з гідродинамічними параметрами, що задовольняють граничним умовам, а $\varphi_-(t,x)$ та $\varphi_+(t,x)$ — коефіцієнтні функції, які визначаються з деяких моментних рівнянь. Оскільки вказаний розподіл має вигляд лінійної комбінації двох максвеліанів спеціального виду, його та інші, що мають таку саму форму, прийнято називати бімодальним. Хоча метод Тамма-Мотт-Сміта якісно коректний, він не точний кількісно. Як і будь-які моментні методи, ТМС-розподіл задовольняє лише необхідним умовам, яким повинен задовольняти будь-який точний розв'язок рівняння Больцмана. За допомогою використання якого-небудь одного моментного рівняння усувається довільність у виборі параметрів та коефіцієнтів функцій. Проте у зв'язку з тим, яке саме моментне рівняння вибирається, результати є неоднозначними. Також суттєвим недоліком є відкрите питання, чи будуть накладені на розподіл умови достатніми для того, щоб він був точним розв'язком рівняння Больцмана. А. Сакураї [104] для доведення цього факту було розглянуте спрощене рівняння і здійснені спроби підібрати параметри розподілу, так щоб мінімізувати різницю між частинами цього рівняння. Проте помилковість цих тверджень була згодом виявлена іншими авторами [72, 95, 102].

Крім того, результати теорії Тамма-Мотт-Сміта для слабких ударних хвиль не узгоджувалися з класичними, або, що рівносильно, з теорією Нав'є-Стокса. У зв'язку з цим багато авторів запропонували різні модифікації розглянутого підходу [93, 105]. Р. Кефлішем в роботі [66] взагалі сказано, що ТМС-розподіл не є точним розв'язком рівняння Больцмана, і доведено теорему про існування гладкого розв'язку задачі про слабку ударну хвилю. При дослідженні хвиль нескінченно великої інтенсивності Г. Гредом [90] було запропоновано одну з двох максвелівських мод замінити на δ-функцію в просторі швидкостей, а інша гладка мода може бути знайдена з деякого рівняння, ще більш складного, ніж саме рівняння Больцмана [35,55]. Але в найпростішому варіанті методу вона залишається максвелівською.

У зв'язку з вказаними недоліками методу багато авторів в подальшому намагались його удосконалити. Пропонували тримодальний аналог ТМС-розподілу (третя, "додаткова" мода містить ще одну, проміжну, масову швидкість та лінійний множник перед експонентою, але ця швидкіть також паралельна першим двом) для опису ударних хвиль в газі з максвелівських молекул. Однак виявилось, що такий перехід пов'язаний з появою значних технічних труднощів, а подальший аналіз стає можливим лише чисельно. Він показує, що для слабких хвиль їх результати суттєво уточнюють результати ТМС-теорії, але для сильних є неадекватними.

Важливе значення для узагальнення ТМС-розподілу, що передбачає використання лінійної комбінації декількох максвелівських функцій, мають результати Р. Нарасімхи та С. Дешпанде [72, 102]. Автори вперше поставили задачу набагато ширше: отримати вираз для прибуткового члену інтеграла зіткнень у випадку моделі твердих куль і довільного бімодального розподілу. В роботі [94] отримані уточнюючі результати відносно товщини ударного шару для моделі твердих куль та максвелівських молекул, які засновані на аналізі H-функції Больцмана, обчисленої за ТМС-розподілом. А в роботі [95] отриманий остаточний висновок, який підтверджує результати [72, 102] про неможливість зробити будь-який бімодальний розподіл, що описує ударну хвилю навіть нескінченної інтенсивності.

Все це привело до небхідності побудови таких бімодальних разподілів з довільними гідродинамічними параметрами, які б описували процес взаємодії між двома максвелівськими потоками в газі з твердих куль і в той самий час задовольняли рівнянню Больцмана з якою завгодно мірою точності. Значний внесок у вирішення та дослідження цього питання зробив В.Д. Гордевський. Ідея підходу полягала в наступному: відмовившись від задчі про ударну хвилю, тобто від жорстких умов на гідродинамічні параметри потоків, які накладались самою постановкою задачі, поставити питання значно ширше, а саме шукати будь-які розв'язки у вигляді лінійної комбінації при будь-яких гідродинамічних параметрах максвеліана так, щоб деякий відхил між частинами рівняння Больцмана міг бути скіль завгодно малим. В роботах [14–18] вперше запропонований пошук наближених бімодальних розв'язків саме таким чином. В подальшому вивчались бімодальні розподіли, що включають як глобальні, так і локальні максвеліани різного часткового виду, що описують ґвинтові [19, 22], вихроподібні [20, 21, 79] та інші рівноважні стани газу. Також були досліджені і деякі багатомодальні розподіли [78]. В роботі [80] проведена детальна класифікація таких розв'язків і досліджено деякі фізичні та геометричні особливості локально-максвелівських розподілів.

1.2. Вибір напрямку досліджень

Зроблений в цьому розділі огляд літератури показує, що рівняння Больцмана є одним з основних інструментів при вивченні складних явищ в багаточасткових системах, зокрема, розрідженому газі. В математичній фізиці відомо не так вже й багато рівнянь, зміст яких з часом неухильно збагачується. Відомі до цього часу точні розв'язки цього рівняння — максвеліани описують тільки рівноважні стани, тому актуальним є пошук тих чи інших наближених розв'язків. Такі розв'язки досліджувались у вигляді бімодальних розподілів з максвелівськими модами різних типів: глобальними, локальними стаціонарними або нестаціонарними. Але, наприклад, у випадку з ґвинтовими модами, з припущенням, що при прямуванні температур потоків до нуля обидві кутові швидкості ведуть себе однаково.

Основним напрямком даної дисертаційної роботи є пошук нових явних наближених розв'язків нелінійного інтегро-диференціального рівняння Больцмана для моделі твердих куль, які узагальнюють бімодальні та відрізняються від них. В якості числових характеристик точності цих розв'язків будуть застосовуватись рівномірно-інтегральний або чисто-інтегральний відхили між частинами рівняння.

1.3. Висновки до розділу

В даному розділі були розглянуті основні методи розв’язання інтегро-диференціального рівняння Больцмана. Підбиваючи підсумки можна сказати, що для цього використовуються переважно наближені та чисельні методи, що, загалом, стосується й інших рівнянь математичної фізики. Але, незважаючи на різноманітність методів та досягнутий завдяки ним прогрес в різних напрямках досліджень, для досить широко вживаної та фізично змістовної моделі твердих куль ніяких нових точних розв’зків повного нелінійного рівняння Больцмана, окрім максвелівських, до цього часу не вдалось знайти. Проте пошук явних наближених розв’язків представляє першочерговий інтерес та стимулює подальші функціональні дослідження в цій області.

РОЗДІЛ 2

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

В цьому розділі наводяться основні означення та огляд основних понять, необхідних для постановки задачі та її розв'язання. Також розглядаються найбільш важливі результати, пов'язані з дослідженням рівняння Больцмана для моделі твердих куль. Зокрема, наводиться строга постановка задачі пошуку явних наближених розв'язків рівняння у вигляді асиметричних бімодальних та континуальних розподілів.

2.1. Рівняння Больцмана для моделі твердих куль

Основною величиною при описанні еволюції газу за допомогою рівняння Больцмана є функція розподілу кількості часток. Вона задає кількість часток або молекул, які в момент часу $t \in \mathbb{R}^1$ мають швидкість $v = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3$ і знаходяться в точці простору $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$. Її означення засноване на імовірнісних поняттях. Будь-який результат, що виражається через цю функцію, характеризує імовірну, або середню, поведінку газу. Саме такий розподіл по швидкостям молекул дозволяє нам вивчати потоки імпульсу та енергії, які відіграють важливу роль в динаміці газу. Через функцію розполілу $f(t, v, x)$ виражаються всі макроскопічні величини, що характеризують стан газу [13, 34, 35, 51, 53–55].

Найпростішою макроскопічною величиною є густина кількості часток $n(t, x)$, яка визначається як число часток, що знаходяться в одиничному об'ємі в точці x в момент часу t. Отже, величина n є інтегралом від f по швидкостям:

$$n(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(t, v, x) dv,$$

тому $\int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} n(t, x) dx$ — повна кількість часток.

Оскільки в простому газі кожна молекула має масу m, густина маси (або просто густина) в точці x в момент t дорівнює

$$\rho(t,x) = mn(t,x).$$

Як правило, в пристроях, які служать для вимірювання макроскопічної швидкості газу, в дійсності вимірюється пов'язаний зі швидкістю імпульс. Тому найбільш доцільно визначати середню швидкість газу через середній імпульс. Оскільки частка, що рухається зі швидкістю v, має імпульс mv і оскільки в момент часу t в елементі об'єму d^3x міститься fd^3xd^3v часток, швидкості яких лежать в елементі d^3v в околі v, то їх повний імпульс дорівнює $mvfd^3xd^3v$. Таким чином, повний імпульс молекул в елементі об'єму d^3x дорівнює

$$d^3x \int mvf(t,v,x)d^3v.$$

Але в нашому випадку розлядається газ, що складається з однакових кулькоподібних часток (молекул) одиничної маси і діаметру d, тому

$$\rho(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(t,v,x)dv.$$

Швидкість, з якою газ рухається як ціле, називається масовою або середньою швидкістю газу $\tilde{v}(\bar{v}) \in \mathbb{R}^3$:

$$\bar{v} = \frac{1}{\rho}\int\limits_{\mathbb{R}^3} vf(t,v,x)dv,$$

а відхиленням кожної індивідуальної молекули від середнього є теплова швидкість

$$v_T = v - \bar{v}.$$

В кінетичній теорії газів температура T — це деяка величина, яка характеризує внутрішню (теплову) енергію газу, e — внутрішня енергія одиниці маси газу: $e = \frac{3}{2}KT$, де $K = 1,38 \cdot 10^{-23}$ — стала Больцмана. Якщо усереднена теплова енергія часток газу визначається співвідношенням

$$e = \frac{1}{2\rho} \int\limits_{\mathbb{R}^3} v_T^2 f(t, v, x) dv,$$

то абсолютна температура визначається формулою

$$T = \frac{2}{3} \frac{e}{K} = \frac{1}{3K\rho} \int\limits_{\mathbb{R}^3} (v - \bar{v})^2 f(t, v, x) dv.$$

Функція розподілу $f(t, v, x)$ повинна задовольняти нелінійному інтегро-диференціальному кінетичному рівнянню Больцмана, яке у випадку довільного закону взаємодії між молекулами та при відсутності зовнішніх сил має вигляд [64]:

$$D(f) = Q(f, f), \tag{2.1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x}, \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} Q(f, f) = \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha B(v - v_1, \alpha) [f(t, v_1', x) f(t, v', x) - \\ - f(t, v_1, x) f(t, v, x)], \end{aligned} \tag{2.3}$$

де $f = f(t, v, x)$ — функція розподілу молекул, яка шукається; $t \in \mathbb{R}^1$ — час; $x = (x^1, x^2, x^3)$ — координата молекули в $\mathbb{R}^3$; $v = (v^1, v^2, v^3)$ — її швидкість; $d > 0$ — діаметр ($\frac{d^2}{2}$ може трактуватися як величина обернена числу Кнудсена, яке характеризує ступінь розрідження газу). Через $\frac{\partial f}{\partial x}$ позначемо просторовий градієнт функції f (інколи для скорочення будемо писати просто f'). Нарешті, вектор α належить одиничній сфері $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, а через v, v_1, v', v_1' позначемо швидкості молекул "до зіткнення" та "після зіткнення" відповідно, B — член зіткнень, який залежить від вибору моделі зіткнення між молекулами.

Саме рівняння Больцмана (2.1)–(2.3) характеризує зміну функції розподілу внаслідок вільного руху часток та парних зіткнень між ними. Передбачається, що будь-які зовнішні сили (гравітаційні, електричні і т.п.), діючі на молекули, на стільки малі порівняно з силами, які з'являються при зіткненні, що при розгляданні динаміки зіткнення їх впливом можна знехтувати. Вираз ”до зіткнення” відноситься до часу до того моменту, коли молекули почнуть суттєво впливати одна на одну, тобто поки кожна з них рухається по прямій лінії або (точніше кажучи) близько до асимптоти орбіти, яку вона описує під впливом іншої молекули. Вираз ”після зіткнення” будемо сприймати аналогічним чином. Для моделі твердих куль (інколи її називають моделлю пружних або жорстких сфер) [7, 8, 64] маємо:

$$v' = v - \alpha(v - v_1, \alpha), \qquad v_1' = v + \alpha(v - v_1, \alpha), \tag{2.4}$$

$$B(v - v_1, \alpha) = |(v - v_1, \alpha)|. \tag{2.5}$$

У випадку даної моделі передбачається, що взаємодія між молекуами не відбувається на відстані, а лише в момент зіткнення, причому в цей момент відбувається миттєвий обмін швидкостями у повній відповідності із законами класичної механіки (тобто зі збереженням сумарного імпульсу та енергії часток). Оскільки молекула представляє собою складне електронне утворення, її зображення у вигляді жорсткої сфери може бути лише наближеним; в дійсності взаємодія між молекулами змінюється неперервно по мірі їх зближення одна з одною. Якщо молекула зображена гладкою сферою, то стає неможливим обмін між внутрішньою енергією та енергією поступального руху. Такі молекули називаються гладкими. Їх внутрішньою енергією можно знехтувати, тому що вона не змінюється з температурою. Саме ідеально круглі та гладкі молекули розглядаються в даній роботі для моделі твердих куль.

2.2. Точний розв’язок рівняння Больцмана

Розв’язками системи

$$\begin{cases} D = 0, \\ Q = 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

тобто розв'язками рівняння (2.1)–(2.5) є максвеліани або рівноважні розподіли [28, 32, 34, 52, 53, 55], які у випадку моделі твердих куль мають вигляд:

$$M(t,v,x) = \rho \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v-\widetilde{v})^2}, \tag{2.7}$$

де $\rho = \rho(t,x)$ — густина числа молекул в точці x в момент часу t, $\beta = \beta(t,x) = \frac{1}{2T(t,x)}$ — обернена температура; $\widetilde{v} = \widetilde{v}(t,x)$ — масова швидкість. В подальшому будуть розглянуті глобальні та локальні максвелівські розподіли. Глобальним максвеліаном називається розподіл M виду (2.7), в якому гідродинамічні параметри не залежать ні від t, ні від x, тобто

$$\rho, \beta, \widetilde{v} = const. \tag{2.8}$$

Максвелівські розв'язки, для яких не виконується умова (2.8), називаються локальними максвеліанами. Локальні максвеліани підрозділяються на: стаціонарні неоднорідні (залежать від x, але не від t), нестаціонарні однорідні (не залежать від x, але залежать від t), нестаціонарні неоднорідні (залежать і від x, і від t). Але ситуація з нестаціонарними однорідними розподілами неможлива, оскільки оберенння інтеграла зіткнень в нуль разом з (2.1) та (2.2) приводить до того, що якщо M не залежить від x, то $\frac{\partial M}{\partial t}$ також дорівнює 0.

Стаціонарні неоднорідні максвелівські розв'язки рівняння Больцмана (в подальшому - ґвинтові моди або просто ґвинти) були відомі ще Максвелу та Больцману [7, 8, 34, 53, 55, 64, 98, 99] і описують стаціонарні рівноважні стани газу. Такі максвеліани мають вигляд:

$$M(v,x) = \rho_0 e^{\beta\omega^2 r^2} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v-\overline{v}-[\omega\times x])^2}. \tag{2.9}$$

З фізичної точки зору розподіл (2.9) описує обертання газу як цілого з кутовою швидкістю $\omega \in \mathbb{R}^3$ навколо осі, що проходить через точку

$$x_0 = \frac{[\omega \times \overline{v}]}{\omega^2}, \tag{2.10}$$

де $x_0 \in \mathbb{R}^3$, а $\beta = \frac{1}{2T}$ — обернена температура, де

$$T = \frac{1}{3\rho} \int\limits_{\mathbb{R}^3} (v - \overline{v})^2 f dv,$$

$$r^2 = \frac{1}{\omega^2} [\omega \times (x - x_0)]^2 \tag{2.11}$$

— квадрат відстані до осі обертання, а

$$\rho = \rho_0 e^{\beta \omega^2 r^2} \tag{2.12}$$

— густина газу (ρ_0 — густина на осі обертання, при $r = 0$), $\overline{v} \in \mathbb{R}^3$ — лінійна масова швидкість в точках x, для яких $x || \omega$, а $\overline{v} + [\omega \times x]$ — масова швидкість в довільній точці x. Формула (2.9) крім обертального задає й поступальний рух вздовж осі обертання, що має наступну лінійну швидкість

$$\frac{(\omega, \overline{v})}{\omega^2} \omega.$$

Таким чином, вона дійсно описує ґвинтоподібний рух газу в цілому, причому розподіл дійсно не залежить від t, а лише від x. В роботі [80] наведена детальна класифікація таких розв'язків, деякі фізичні та геометричні особливості локально-максвелівських розподілів.

2.3. Наближені явні розв'язки рівняння Больцмана для моделі твердих куль

З огляду літератури видно, що існуючі наближені методи (розкладання Гільберта, Чепмена-Енскога, Греда, чисельне моделювання та ін.), хоча й дають в деяких ситуаціях досить корисну інформацію про ті чи інші властивості потоків, що виникають в конкретних фізичних задачах, проте не можуть бути повною заміною строгих аналітичних методів. Це привело до пошуку інших математичних засобів, які б дозволяли описувати деякі процеси явно, і при чому з довільним ступенем точності. Одним з найважливіших таких процесів, що викликають великий інтерес багатьох дослідників, є взаємодія між двома або більше максвелівськими потоками газу. До таких задач відноситься розподіл Тамма-Мотт-Сміта та його узагальнення для описання ударних хвиль [50, 66, 72, 90, 93–95, 101, 102, 104, 105]. Проте виявилося, що він ні точно, ні навіть наближено не задовольняє рівнянню Больцмана з яким завгодно ступенем точності. Це пов'язано з накладанням жорстких умов на гідродинамічні параметри потоків. Саме тому В.Д. Гордевським була запропонована ідея побудови бімодальних розподілів більш загального вигляду [14–18], ніж описані раніше. Принципова відмінність цього підходу полягала в узагальненні і свободі в поведінці як коефіцієнтних функцій, та і конкретного виду максвеліана, а також значень числових параметрів. Як наслідок, відмова від жорстких рамок задачі про плоску ударну хвилю, а також від припущення, що функція розподілу має бути точним розв'язком рівняння Больцмана. Одним з напрямків досліджень даної дисертаційної роботи є узагальнення явних наближених розв'язків рівняння (2.1)–(2.5) у вигляді асиметричних бімодальних розподілів, а саме лінійної комбінації двох максвеліанів спеціального виду:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2 = \sum_{k=1}^{2} \varphi_i M_i. \tag{2.13}$$

Передбачається, що коефіцієнтні функції $\varphi_i, i = 1, 2$ є невід'ємними та гладкими, тобто

$$\varphi_i = \varphi_i(t, x) \geq 0, \qquad \varphi_i \in C^1(\mathbb{R}^4), \qquad i = 1, 2, \tag{2.14}$$

а максвеліани M_i, $i = 1, 2$ можуть бути як глобальними, так і локальними.

Так, наприклад, в роботі [19] було досліджено взаємодію двох ґвинтових потоків типу (2.9) з припущенням, що при прямуванні температур потоків до нуля обидві кутові швидкості поводять себе однаково. В розділі 3 нашою задачею буде узагальнення бімодальних розподілів шляхом нових припущень про зв'язок між кутовими швидкостями та температурами потоків.

Іншим напрямком досліджень дисертації є новий підхід до пошуку явних наближених розв'язків рівняння Больцмана, який оснований на припущенні, що масова швидкість глобального або локального максвеліанів приймає не фіксовані дискретні значення, а стає довільним параметром, який приймає будь-які значення з $\mathbb{R}^3$. Такі розподіли можуть бути названі континуальними. Їх побудові та дослідженню присвячений розділ 4.

Будемо розглядати функцію розподілу наступного вигляду:

$$f = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(t, x, u) M du, \tag{2.15}$$

в яку входять максвеліани $M = M(v, u)$ або $M = M(v, u, x)$, які описують один з можливих типів руху потоків газу.

В якості числових характеристик точності цих явних наближених розв'язків використовуються наступні відхили між частинами рівняння (2.1)–(2.5), які запропоновані В.Д. Гордевським в работах [14, 15, 18]:

–"рівномірно-інтегральний" відхил:

$$\Delta = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f, f)|\, dv, \tag{2.16}$$

–"чисто-інтегральний" відхил:

$$\Delta_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f, f)|\, dv, \tag{2.17}$$

За допомогою вказаних відхилів (2.16) і (2.17) будуть знайдені умови, достатні для того, щоб при відповідному виборі коефіцієнтних функцій і такій поведінці всіх параметрів, хоча б один з вказаних відхилів був при цьому скіль завгодно малим.

Нетривіальна структура нелінійного рівняння Больцмана (2.1)–(2.5) змушує поєднувати різні підходи та методи. Перш за все, інтеграл зіткнень $Q(f, f)$ розбивається на "прибуткову" G та "затратну" L частини (розділ 4) [14, 34, 55], а в підінтегральних виразах доданки перегрупуються зручним чином, після чого проводиться оцінка зверху.

Для здійснення граничних переходів при $\beta \to +\infty$ використовується δ–подібна поведінка максвеліанів.

Розглянемо функцію залежну від параметра:

$$f_\beta(x) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi} e^{-\beta x^2}}.$$

Вона не має границі в класичному сенсі, оскільки

$$\lim_{\beta \to +\infty} f_\beta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0. \end{cases}$$

Візьмемо довільну неперервну функцію $\psi(x)$ і перевіримо, що

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\beta(x)\psi(x)dx \xrightarrow[\beta \to +\infty]{} \psi(0).$$

Оскільки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\beta(x)dx = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1,$$

отримаємо наступне

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\beta(x)\psi(x)dx - \psi(0) \cdot 1 \right| = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\beta(x) \Big(\psi(x) - \psi(0) \Big) dx \right|$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\beta(x) \Big| \psi(x) - \psi(0) \Big| dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{-\delta} f_\beta(x) \Big| \psi(x) - \psi(0) \Big| dx + \int\limits_{-\delta}^{\delta} f_\beta(x) \Big| \psi(x) - \psi(0) \Big| dx$$

$$+ \int\limits_{\delta}^{+\infty} f_\beta(x) \Big| \psi(x) - \psi(0) \Big| dx.$$

$$\int_{\delta}^{+\infty} f_\beta(x)\Big|\psi(x)-\psi(0)\Big|dx \le 2K\int_{\delta}^{+\infty} f_\beta(x)dx$$

$$=2K\sqrt{\frac{\beta}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\beta}}\int_{\delta}^{+\infty} e^{-y^2}dy \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} 0.$$

Розглянемо

$$\int_{-\delta}^{\delta} f_\beta(x)\Big|\psi(x)-\psi(0)\Big|dx.$$

В силу неперервності функції ψ в нулі,

$\forall\varepsilon>0\,,\ \exists\delta>0\,,\ \forall x\colon\ |x|<\delta\,,\ \Big|\psi(x)-\psi(0)\Big|<\varepsilon$, тоді

$$\int_{-\delta}^{\delta} f_\beta(x)\Big|\psi(x)-\psi(0)\Big|dx<\varepsilon\int_{-\delta}^{\delta} f_\beta(x)dx\le\int_{-\infty}^{+\infty} f_\beta(x)dx=\varepsilon.$$

Отже,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\beta(x)\Big|\psi(x)-\psi(0)\Big|dx\le 3\varepsilon.$$

Все доведене вище означає, що

$$f_\beta(x)\xrightarrow[\beta\to+\infty]{}\delta(x), \tag{2.18}$$

в сенсі узагальнених функцій.

Тут під $\delta(x)$ мається на увазі "δ–функція Дірака", яка формально дорівнює

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & x\ne 0,\\ \infty, & x=0;\end{cases}$$

а як функціонал у просторі неперервних функцій діє так:

$$\delta(x):\psi(x)\to\psi(0).$$

З того, що сказано вище, можемо записати наступне:

$$\begin{cases} M(v) & = \rho \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta v^2} \xrightarrow[\beta \to +\infty]{} \rho\delta(v), \\ M_0(v) & = \rho_0 \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta (v-v_0)^2} \xrightarrow[\beta \to +\infty]{} \rho\delta(v-v_0) \end{cases} \tag{2.19}$$

Отримані післяграничні вирази, що містять коефіцієнтні функції, та всі інші параметри, аналізуються з точки зору можливості їх прямування до 0.

2.4. Висновки до розділу

В розділі 2 наведене рівняння Больцмана для моделі твердих куль та всі основні поняття, пов'язані з ним: функція розподілу, максвелівські розподіли (зокрема ґвинтові), бімодальні розподіли, континуальні розподіли, рівномірно-інтегральний та чисто-інтегральний відхили між частинами рівняння Больцмана.

На основі попередніх результатів ще раз показано необхідність пошуку явних наближених розв'язків кінетичного рівняння Больцмана, які б задовольняли його з якою-завгодно мірою точності. Сформульована задача пошуку більш загального вигляду бімодальних розподілів, а саме асиметричних з локальними модами, що описують ґвинтові стаціонарні рівноважні стани газу, в яких встановлений зв'язок між кутовими швидкостями та температурами потоків газу.

Вперше введено поняття континуального розподілу, яке є новим явним наближеним розв'язком рівняння. Запропонований підхід заснований на припущенні, що масова швидкість глобальних або локальних максвеліанів приймає не фіксовані дискретні значення, а стає довільним параметром, що приймає будь-які значення з простору $\mathbb{R}^3$. Таким чином задано новий напрямок досліджень у пошуку розв'язків, відмінних від бімодальних.

РОЗДІЛ 3

АСИМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ БОЛЬЦМАНА

В цьому розділі будуть отримані асиметричні наближені розв'язки, які є узагальненням бімодальних розподілів, в які входять локальні максвеліани часткового виду, що описують ґвинтові стаціонарні рівноважні стани газу (2.9). Здобуто деякі достатні умови для мінімізації рівномірно-інтегрального та інтегрального відхилів між частинами рівняння Больцмана. Також досліджено фізичний зміст отриманих результатів.

3.1. Асиметричні бімодальні розподіли з гвинтовими модами для рівномірно-інтегрального відхилу

Будемо розглядати неоднорідну, нестаціонарну лінійну комбінацію двох максвеліанів, тобто розподіл (2.13), де максвеліани мають вигляд (2.9), а саме

$$M_i(v,x) = \rho_i e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2} \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta_i (v-\widetilde{v_i})^2}. \tag{3.1}$$

$$\widetilde{v_i} = \widetilde{v_i}(x) = \overline{v_i} + [\omega_i \times x],\ i = 1,2. \tag{3.2}$$

Потрібно знайти такі φ_i і таку поведінку всіх наявних параметрів, щоб змішаний відхил (2.16) прямував при цьому до 0.

Коефіцієнтні функції φ_i будемо шукати у вигляді

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x) e^{-\beta_i \omega_i^2 r_i^2},\ i = 1,2, \tag{3.3}$$

де функції ψ_i гладкі та невід'ємні (передбачається, що вони вже не залежать від β_i). Також припустимо, що кутові швидкості мають вигляд:

$$\omega_i = \frac{\omega_{0i} s_i}{\beta_i^{k_i}},\ i = 1,2, \tag{3.4}$$

де $s_i > 0$ — будь які константи, ω_{0i} — довільні фіксовані вектори, $k_i > 0$, $i = 1, 2$ (інші параметри також довільні та фіксовані).

Деякі наближені розв'язки даного вигляду, для яких максвеліани при $i = 1$ та $i = 2$ поводять себе однаково, отримані в роботі [19]. Обидві кутові швидкості ω_1 та ω_2 при цьому прямують до нуля однаково швидко при β_1, $\beta_2 \to +\infty$ (сама швидкість їх прямування до нуля різна і задається певними степенями β_i в (3.4), а саме при 1, $\frac{1}{2}$ або $\frac{1}{4}$).

Наша задача полягає в пошуку наближених розв'язків рівняння (2.1)–(2.5) при інших можливих значеннях k_i, $i = 1, 2$, та асиметричній (тобто для різних степеней при $i = 1$ та $i = 2$) поведінці кутових швидкостей.

Перед формулюванням та доведенням основних результатів роботи введемо наступні позначення, які отримані в роботі [19] з урахуванням заміни змінних $u = \sqrt{\beta}(v - \widetilde{v_i})$ та будуть надалі використані:

$$A_i(u,t,x) = \psi_i \psi_j \rho_j \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dw e^{-w^2} \bigg| \frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + (\overline{v_i} - \overline{v_j}) + [(\omega_i - \omega_j) \times x] - \frac{w}{\sqrt{\beta_j}} \bigg|, \tag{3.5}$$

$$B_i(u,t,x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{v_i} - [\omega_i \times x] \right) + 2\psi_i \sqrt{\beta_i} \{ (u, [\omega_i \times \overline{v_i}]) - [\omega_i \times u][\omega_i \times x] \}. \tag{3.6}$$

З урахуванням всього перерахованого вище перейдемо до формулювання першої теореми.

Теорема 3.1. Нехай виконуються умови (3.3) та (3.4), а наступні функції:

$$\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial t}, \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right|, |[\omega_{0i} \times x]| \psi_i, \left([\omega_{0i} \times x], \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right), \ i = 1, 2 \tag{3.7}$$

обмежені відносно t, x на $\mathbb{R}^4$.

Тоді визначений згідно з (2.16) відхил Δ має сенс й існує така величина Δ', що

$$\Delta \leq \Delta', \tag{3.8}$$

причому якщо

$$\frac{1}{2} < k_i \leq 1,\ i = 1, 2, \tag{3.9}$$

або

$$\frac{1}{4} < k_i \leq \frac{1}{2},\ i = 1, 2, \tag{3.10}$$

та

$$[\omega_{0i} \times \overline{v_i}] = 0,\ i = 1, 2, \tag{3.11}$$

то існує скінченна границя

$$\begin{aligned} L = \lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ i=1,2}} \Delta' = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{2} \rho_i \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \overline{v_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \rho_j \pi d^2 \psi_1 \psi_2 |\overline{v_i} - \overline{v_j}| \right| \\ + 2\pi d^2 \rho_1 \rho_2 |\overline{v_1} - \overline{v_2}| \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} (\psi_1 \psi_2). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Для доведення Теореми 3.1 нам знадобиться наступна Лема [19], що дає достатню умову неперервності супремума спеціального виду функції багатьох змінних, взятого по частині змінних.

Лема 3.1. Нехай функція $g(y,z)\colon\ Y \times Z \to \mathbb{R}^1$; $Y \in \mathbb{R}^p$; $Z \in \mathbb{R}^q$; і виконані наступні умови:

1) $\forall z \in Z$, $g(y,z)$ – обмежена на Y;

2) $g(y,z)$ – неперервна по z рівномірно відносно y, тобто

$$\forall z_0 \in Z, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in Y, \forall z \in Z,$$

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |g(y,z) - g(y,z_0)| < \varepsilon$$

Тоді функція

$$l(z) = \sup_{y \in Y} |g(y,z)|$$

– неперервна на множині Z.

Доведення. З урахуванням (3.5) та (3.6) запишемо наступну нерівність, отриману в [19]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f,f)| dv$$
$$\leq \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[\left| \frac{\partial \psi_i}{t} + B_i(u,t,x) + A_i(u,t,x) \right| \right. \tag{3.13}$$
$$\left. + A_i(u,t,x) \right] \cdot \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} e^{-u^2} du.$$

З (2.16), (3.5), (3.6), (3.7), (3.13) і властивостей супремума випливає існування відхилу Δ, причому

$$\Delta \leq \Delta'$$
$$= \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[\sup_{(t,x)\in R^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{t} + B_i(u,t,x) + A_i(u,t,x) \right| \right. \tag{3.14}$$
$$\left. + \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} A_i(u,t,x) \right] e^{-u^2} du.$$

Якщо підставити (3.4) в (3.5) та (3.6) і ввести нові позначення:

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}}, \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \right), \tag{3.15}$$

то

$$\begin{aligned} A_i(u,t,x) = \psi_i \psi_j \rho_j \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dw e^{-w^2} |\gamma_i u + (\overline{v_i} - \overline{v_j}) + s_i \gamma_i^{2k_i} [\omega_{0i} \times x] \\ - s_j \gamma_j^{2k_j} [\omega_{0j} \times x] - \gamma_j w|, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} B_i(u,t,x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(\gamma_i u + \overline{v_i} + s_i \gamma_i^{2k_i} [\omega_{0i} \times x] \right) \\ + 2\psi_i s_i \gamma_i^{2k_i - 1} \left\{ (u, [\omega_{0i} \times \overline{v_i}]) - s_i \gamma_i^{2k_i} [\omega_{0i} \times u][\omega_{0i} \times x] \right\}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

де $i = 1, 2$, $i \neq j$.

Зстосуємо вище вказану Лему 3.1 до кожного з супремумів, які входять в (3.14). Тут $y = (t,x)$, $Y = \mathbb{R}^4$, $z = (u,\gamma)$, $Z = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2_+$. Перевіримо виконання умови 1). Для цього перевіримо обмеженість (3.16) та (3.17)

$$|A_i(u,t,x)| = \left|\psi_i\psi_j\rho_j\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dwe^{-w^2}|\gamma_i u + (\overline{v_i} - \overline{v_j})\right.$$

$$\left. +s_i\gamma_i^{2k_i}[\omega_{0i}\times x] - s_j\gamma_j^{2k_j}[\omega_{0j}\times x] - \gamma_j w|\right|$$

$$= \frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\rho_j\left|\int\limits_{\mathbb{R}^3} dwe^{-w^2}|\psi_i\psi_j\gamma_i u + \psi_i\psi_j(\overline{v_i} - \overline{v_j})\right.$$

$$\left. +s_i\gamma_i^{2k_i}\psi_i\psi_j[\omega_{0i}\times x] - s_j\gamma_j^{2k_j}\psi_i\psi_j[\omega_{0j}\times x] - \psi_i\psi_j\gamma_j w|\right|$$

$$\leq \frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\rho_j\left|\int\limits_{\mathbb{R}^3} dwe^{-w^2}\Big[\psi_i\psi_j\,|\gamma_i|\,|u| + \psi_i\psi_j\,|\overline{v_i} - \overline{v_j}|\right.$$

$$+s_i\left|\gamma_i^{2k_i}\right|\psi_j\,|[\omega_{0i}\times x]|\,\psi_i$$

$$\left. +s_j\left|\gamma_j^{2k_j}\right|\psi_i\,|[\omega_{0j}\times x]|\,\psi_j - \psi_i\psi_j\,|\gamma_j|\,|w|\,\Big]\right|.$$

Згідно (3.7) величини ψ_i, ψ_j, $|[\omega_{0i}\times x]|\,\psi_i$ та $|[\omega_{0j}\times x]|\,\psi_j$ — обмежені, наприклад, при $\beta_i,\beta_j\to+\infty$, $|\gamma_i|\leq 1$, $|\gamma_j|\leq 1$, $i,j=1,2$, $i\neq j$, а обмеженість по u забезпечується тим, що u має множник e^{-u^2} з (3.14). Отже, $A_i(u,t,x)$ — обмежена на Y відносно t, x.

Розглянемо величину $B_i(u,t,x)$, визначену в формулі (3.17)

$$|B_i(u,t,x)| = \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\Big(\gamma_i u + \overline{v_i} + s_i\gamma_i^{2k_i}[\omega_{0i}\times x]\Big)\right.$$

$$\left. +2\psi_i s_i\gamma_i^{2k_i-1}\Big\{(u,[\omega_{0i}\times\overline{v_i}]) - s_i\gamma_i^{2k_i}[\omega_{0i}\times u][\omega_{0i}\times x]\Big\}\right|$$

$$\leq \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\gamma_i u + \frac{\partial\psi_i}{\partial x}\overline{v_i} + s_i\gamma_i^{2k_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}[\omega_{0i}\times x]\right|$$

$$+\left|2\psi_i s_i\gamma_i^{2k_i-1}(u,[\omega_{0i}\times\overline{v_i}]) - 2\psi_i s_i^2\gamma_i^{4k_i-1}[\omega_{0i}\times u][\omega_{0i}\times x]\right|$$

$$\leq \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right||\gamma_i|\,|u| + \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right||\overline{v_i}| + s_i\left|\gamma_i^{2k_i}\right|\left|\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}[\omega_{0i}\times x]\right)\right|$$

$$+2s_i\left|\gamma_i^{2k_i-1}\right|\psi_i\big|(u,[\omega_{0i}\times\overline{v_i}])\big| + 2s_i^2\left|\gamma_i^{4k_i-1}\right|\big|[\omega_{0i}\times u]\big|\big|[\omega_{0i}\times x]\big|\psi_i.$$

Згідно (3.7) величини ψ_i, $\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|$, $\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}, \left|[\omega_{0i}\times x]\right|\right)$ та $\left|[\omega_{0i}\times x]\right|\psi_i$ — обмежені, наприклад, при $\beta_i \to +\infty$, $|\gamma_i| \le 1$, $i = 1,2$, $|u|e^{-u^2}$ — також обмежене. Отже, $B_i(u,t,x)$ — обмежена на Y відносно t, x.

З того, що $\frac{\partial\psi_i}{\partial x}$ — також обмежена згідно (3.7), випливає, що функції, які знаходяться під знаком супремума, є обмеженими на Y.

Умова 2) Леми 3.1 задовольняється завдяки (3.7), поліноміальній структурі (3.17) відносно змінних u та γ, а також рівномірній збіжності інтегралів (3.16) по u і γ на будь-якому компакті, а по x і t — на всьому просторі $\mathbb{R}^4$. Перевіримо це.

Нехай $\exists K > 0$: $|u| \le K$, $|u_0| \le K$; та, як і раніше, $|\gamma_i| \le 1$, $|\gamma_{0i}| \le 1$, $i = 1,2$. Тоді

$$\Bigg|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \frac{\partial\psi_i}{\partial x}\left(\gamma_i u + \overline{v_i} + s_i\gamma_i^{2k_i}[\omega_{0i}\times x]\right) + 2\psi_i s_i\gamma_i^{2k_i-1}\Big\{(u,[\omega_{0i}\times\overline{v_i}])$$
$$-s_i\gamma_i^{2k_i}[\omega_{0i}\times u][\omega_{0i}\times x]\Big\} + \psi_i\psi_j\rho_j\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dw e^{-w^2}\Big|\gamma_i u + (\overline{v_i}-\overline{v_j})$$
$$+s_i\gamma_i^{2k_i}[\omega_{0i}\times x] - s_j\gamma_j^{2k_j}[\omega_{0j}\times x] - \gamma_j w\Big|$$
$$-\frac{\partial\psi_i}{\partial t} - \frac{\partial\psi_i}{\partial x}\left(\gamma_{0i}u_0 + \overline{v_i} + s_i\gamma_{0i}^{2k_i}[\omega_{0i}\times x]\right) + 2\psi_i s_i\gamma_{0i}^{2k_i-1}\Big\{(u_0,[\omega_{0i}\times\overline{v_i}])$$
$$-s_i\gamma_{0i}^{2k_i}[\omega_{0i}\times u][\omega_{0i}\times x]\Big\} + \psi_i\psi_j\rho_j\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dw e^{-w^2}\Big|\gamma_{0i}u_0 + (\overline{v_i}-\overline{v_j})$$
$$+s_i\gamma_{0i}^{2k_i}[\omega_{0i}\times x] - s_j\gamma_{0j}^{2k_j}[\omega_{0j}\times x] - \gamma_{0j}w\Big|\Bigg|$$

$$= \Bigg|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\Big(\gamma_i u + \gamma_{0i}u_0 + s_i\left(\gamma_i^{2k_i} - \gamma_{0i}^{2k_i}\right)[\omega_{0i}\times x]\Big)$$
$$+2\psi_i s_i\Big\{\gamma_i^{2k_i-1}(u,[\omega_{0i}\times\overline{v_i}]) - \gamma_{0i}^{2k_i-1}(u_0,[\omega_{0i}\times\overline{v_i}])$$
$$-s_i\left(\gamma_i^{2k_i}[\omega_{0i}\times u] - \gamma_{0i}^{2k_i}[\omega_{0i}\times u_0]\right)[\omega_{0i}\times x]\Big\}$$
$$+\psi_i\psi_j\rho_j\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dw e^{-w^2}\Big|\gamma_i u - \gamma_{0i}u_0 + s_i\left(\gamma_i^{2k_i} - \gamma_{0i}^{2k_i}\right)[\omega_{0i}\times x]$$
$$-s_j\left(\gamma_j^{2k_j} - \gamma_{0j}^{2k_j}\right)[\omega_{0j}\times x] - \omega\left(\gamma_j - \gamma_{0j}\right)\Big|\Bigg|$$

$$\leq \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right| |\gamma_i u + \gamma_{0i}u_0| + s_i \left|\gamma_i^{2k_i} - \gamma_{0i}^{2k_i}\right| \left| \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}, [\omega_{0i} \times x]\right) \right|$$

$$+2\psi_i s_i \left[\left|\gamma_i^{2k_i-1}\right| |u| \left|[\omega_{0i} \times \overline{v_i}]\right| + \left|\gamma_{0i}^{2k_i-1}\right| |u_0| \left|[\omega_{0i} \times \overline{v_i}]\right|\right]$$

$$+2s_i^2\left|\gamma_i^{2k_i}[\omega_{0i} \times u] - \gamma_{0i}^{2k_i}[\omega_{0i} \times u_0]\right|[\omega_{0i} \times x]\psi_i$$

$$+\rho_j\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^3} dwe^{-w^2}\left[\psi_i\psi_j\,|\gamma_i u - \gamma_{0i}u_0| + s_i\left|\gamma_i^{2k_i} - \gamma_{0i}^{2k_i}\right|\psi_j\left|[\omega_{0i} \times x]\right|\psi_i\right.\right.$$

$$\left.\left.+s_j\left|\gamma_j^{2k_j} - \gamma_{0j}^{2k_j}\right|\psi_i\left|[\omega_{0j} \times x]\right|\psi_j + \omega\,|\gamma_j - \gamma_{0j}|\,\right]\right|$$

Враховуючи виконання наступних нерівностей:

$$|[\omega_{0i} \times u]| = |\omega_{0i}| \cdot |u| \cdot |sin\angle(\omega_{0i}, u)| \leq |\omega_{0i}| \cdot |u|\,,$$

$$|\gamma_i u - \gamma_{0i}u_0| = |\gamma_i u - \gamma_{0i}u + \gamma_{0i}u - \gamma_{0i}u_0|$$

$$\leq |u| \cdot \underbrace{|\gamma_i - \gamma_{0i}|}_{<\delta} + |\gamma_{0i}| \cdot \underbrace{|u - u_0|}_{<\delta} \leq 2K\delta,$$

де $\delta < \frac{\varepsilon}{2K}$, можемо продовжити міркування.

$$\leq \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right| \cdot 2K\delta + s_i\left[\left|\gamma_i^{2k_i}\right| + \left|\gamma_{0i}^{2k_i}\right|\right] \left|\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}, [\omega_{0i} \times x]\right)\right|$$

$$+2\psi_i s_i\left[K^{2k_i}\left|[\omega_{0i} \times \overline{v_i}]\right| + K^{2k_i}\left|[\omega_{0i} \times \overline{v_i}]\right|\right]$$

$$+2s_i^2\left[\,\left|\gamma_i^{2k_i}\right| |\omega_{0i}|\,|u| + \left|\gamma_{0i}^{2k_i}\right| |\omega_{0i}|\,|u_0|\,\right] |[\omega_{0i} \times x]|\,\psi_i$$

$$+\rho_j\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^3} dwe^{-w^2}\left[\psi_i\psi_j 2K\delta + s_i\left[\,\left|\gamma_i^{2k_i}\right| + \left|\gamma_{0i}^{2k_i}\right|\,\right]\psi_j\left|[\omega_{0i} \times x]\right|\psi_i\right.\right.$$

$$\left.\left.+s_j\left[\,\left|\gamma_j^{2k_j}\right| + \left|\gamma_{0j}^{2k_j}\right|\,\right]\psi_i\,|[\omega_{0j} \times x]|\,\psi_j + \omega\delta\right]\right|$$

$$\leq \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right| \cdot 2K\delta + s_i 2K^{2k_i}\left|\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}, [\omega_{0i} \times x]\right)\right|$$

$$+2\psi_i s_i 2K^{2k_i}\left|[\omega_{0i} \times \overline{v_i}]\right| + 2s_i^2 2K^{2k_i+1}\,|\omega_{0i}|\,|[\omega_{0i} \times x]|\,\psi_i$$

$$+\rho_j\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^3} dwe^{-w^2}\left[\psi_i\psi_j 2K\delta + s_i 2K^{2k_i}\psi_j\left|[\omega_{0i} \times x]\right|\psi_i\right.\right.$$

$$\left.\left.+s_j 2K^{2k_j}\psi_i\,|[\omega_{0j} \times x]|\,\psi_j + \omega\delta\right]\right|$$

$$= 2K\delta\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right| + 2K^{2k_i}s_i\left|\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x},[\omega_{0i}\times x]\right)\right|$$

$$+4K^{2k_i}\psi_i s_i\Big|[\omega_{0i}\times\overline{v_i}]\Big| + 4K^{2k_i+1}s_i^2\,|\omega_{0i}|\,|[\omega_{0i}\times x]|\,\psi_i$$

$$+\rho_j\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^3} dwe^{-w^2}\Big[2K\delta\psi_i\psi_j + 2K^{2k_i}s_i\psi_j\Big|[\omega_{0i}\times x]\Big|\psi_i$$

$$+2K^{2k_j}s_j\psi_i\,|[\omega_{0j}\times x]|\,\psi_j + \omega\delta\Big]\Bigg|.$$

З того, що $\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|$, $\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x},\big|[\omega_{0i}\times x]\big|\right)$ та $\big|[\omega_{0i}\times x]\big|\psi_i$ — обмежені по t, x на $\mathbb{R}^4$ згідно (3.7) умова 2) Леми 3.1 дійсно виконана. В силу довільності K умова виконується на всьому просторі.

Тоді ми бачимо, що кожен з інтегралів у (3.14) береться від функції, неперервної по u, γ, та збігається рівномірно відносно γ на будь-якому компакті за теоремою Вейєрштрасса, тому що існує інтегрована мажоранта (було показано раніше).

Отже, вся величина Δ' неперервна по γ на $\mathbb{R}^2_+$. Значить в (3.14) можно перейти до границі при $\beta_i \to +\infty$, $i = 1, 2$, що рівносильно прямуванню γ_i, $i = 1, 2$, до нуля в (3.16), (3.17).

Таким чином,

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ i=1,2}} \Delta'$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{2}\frac{\rho_i}{\pi^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Bigg[\sup_{(t,x)\in R^4}\Bigg|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \overline{v_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial x} + \psi_i\psi_j\rho_j\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\pi^{3/2}|\overline{v_i}-\overline{v_j}|\Bigg| \tag{3.18}$$

$$+\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\psi_i\psi_j\rho_j\pi d^2|\overline{v_i}-\overline{v_j}|\Bigg]e^{-u^2}du.$$

З (3.18) в результаті інтегрування по u випливає (3.12).

□

В даній теоремі поведінка кутових швидкостей при $i = 1$ та $i = 2$ однакова. Приведемо тепер деякі можливі резльтати для випадку "асиметричної" поведінки ω_1 та ω_2.

Теорема 3.2. Нехай виконуються умови (3.3), (3.4) при

$$k_1 = 1, \qquad k_2 = \frac{1}{2}. \tag{3.19}$$

Тоді при виконанні умов (3.7) вірне твердження (3.8), причому

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ i=1,2}} \Delta' = L + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \rho_2 s_2 |[\omega_{02} \times \overline{v_2}]| \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \psi_2. \tag{3.20}$$

Доведення. Скористаємося оцінкою (3.14), але позначення Δ' для її правої частини поки що не вводимо. В (3.5) та (3.6) підставимо (3.4), знову користуючись позначенням (3.15).

Тоді замість виразів (3.16), (3.17) отримаємо

$$\begin{aligned} A_1(u,t,x) = \psi_1\psi_2\rho_2 \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dw e^{-w^2} |\gamma_1 u + (\overline{v_1} - \overline{v_2}) + s_1\gamma_1^2[\omega_{01} \times x] \\ - s_2\gamma_2^2[\omega_{02} \times x] - \gamma_2 w|, \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} B_1(u,t,x) = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \left(\gamma_1 u + \overline{v_1} + s_1\gamma_1^2[\omega_{01} \times x]\right) \\ + 2\psi_1 s_1 \gamma_1 \left\{(u, [\omega_{01} \times \overline{v_1}]) - s_1\gamma_1^2[\omega_{01} \times u][\omega_{01} \times x]\right\}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} A_2(u,t,x) = \psi_1\psi_2\rho_1 \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dw e^{-w^2} |\gamma_2 u + (\overline{v_2} - \overline{v_1}) + s_2\gamma_2[\omega_{02} \times x] \\ - s_1\gamma_1[\omega_{01} \times x] - \gamma_1 w|, \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} B_2(u,t,x) = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \left(\gamma_2 u + \overline{v_2} + s_2\gamma_2[\omega_{02} \times x]\right) \\ + 2\psi_2 s_2 \left\{(u, [\omega_{02} \times \overline{v_2}]) - s_2\gamma_2[\omega_{02} \times u][\omega_{02} \times x]\right\}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Після підстановки виразів (3.21)–(3.24) в (3.14) оцінемо отриманий вираз зверху:

$$\Delta \le \Delta'$$

$$= \frac{\rho_1}{\pi^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Bigg[\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \Bigg| \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + A_1(u,t,x) + \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(\gamma_1 u + \overline{v_1} + s_1\gamma_1^2[\omega_{01} \times x])$$

$$+2\psi_1\gamma_1 s_1 \left\{(u, [\omega_{01} \times \overline{v_1}]) - s_1\gamma_1^2[\omega_{01} \times u][\omega_{01} \times x]\right\}\Bigg|$$

$$+\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} A_1(u,t,x)\Big]e^{-u^2}du + \frac{\rho_2}{\pi^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Big[\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\Big|\frac{\partial\psi_2}{\partial t} + A_2(u,t,x) \tag{3.25}$$
$$+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}(\gamma_2 u + \overline{v_2} + s_2\gamma_2[\omega_{02}\times x]) - 2\psi_2 s_2^2\gamma_2[\omega_{02}\times u][\omega_{02}\times x]\Big|$$
$$+\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} A_2(u,t,x) + \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} 2\psi_2 s_2|u|\,|[\omega_{02}\times\overline{v_2}]|\Big]e^{-u^2}du.$$

Застосуємо раніше вказану Лему 3.1 до кожного з супремумів в (3.25) (обґрунтування її застосування аналогічне здійсненому при доведенні Теореми 3.1, причому останній доданок під інтегралом в (3.25) взагалі не залежить від β_2, тобто від γ_2) дозволяє перейти в (3.25) до границі при $\beta_i \to +\infty$, $i = 1, 2$. При цьому, очевидно, результат буде відрізнятись від (3.12) лише згаданим останнім доданком, який тривіально обчислюється, що ми і зробимо.

Обчислимо наступний інтеграл:

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^3} |u|\, e^{-u^2} du.$$

Перейдемо до сферичної системи координат:

$$\begin{cases} u^1 = r cos\varphi cos\psi \\ u^2 = r sin\varphi cos\psi, \\ u^3 = r sin\psi \end{cases} \qquad \frac{\partial(u^1,u^2,u^3)}{\partial(r,\varphi,\psi)} = r^2 cos\psi.$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\psi d\psi \int\limits_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2} dr$$
$$= 2\pi\left(sin\frac{\pi}{2} + sin\frac{\pi}{2}\right)\int\limits_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2} dr = 4\pi \int\limits_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2} dr$$
$$= \begin{bmatrix} r^2 = t; & dr = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt \\ r = \sqrt{t}; & \end{bmatrix}$$

$$= 4\pi \int_0^{+\infty} t^{3/2} e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = 2\pi \int_0^{+\infty} te^{-t} dt$$

$$= 2\pi \tilde{A}(2) = 2\pi \cdot 1\tilde{A}(1) = 2\pi.$$

При обчисленні інтегралу скористались тим, що

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt.$$

Все це приводить до (3.20). Теорему доведено.

□

Теорема 3.3. Нехай виконуються умови (3.4) і (3.7) Теореми 3.1 при

$$k_1 = \frac{1}{2}, \qquad k_2 = \frac{1}{4}, \tag{3.26}$$

причому

$$[\omega_{02} \times \overline{v_2}] = 0. \tag{3.27}$$

Тоді справедлив наступний аналог твердження (3.12), причому

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ i=1,2}} \Delta' = L + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \rho_1 s_1 |[\omega_{01} \times \overline{v_1}]| \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \psi_1 \\ + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \rho_2 s_2^2 |\omega_{02}| \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} (|[\omega_{02} \times x]| \psi_2). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Доведення. Знову скористаємось оцінкою (3.14) поки що без введення позначення Δ' для її правої частини. Знову використовуючи позначення (3.15), підставимо (3.4) при $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{1}{4}$ в (3.5) та (3.6).

Тоді отримаємо, що

$$\begin{aligned} A_1(u,t,x) = \psi_1 \psi_2 \rho_2 \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} dw e^{-w^2} |\gamma_1 u + (\overline{v_1} - \overline{v_2}) \\ + s_1 \gamma_1 [\omega_{01} \times x] - s_2 \gamma_2 [\omega_{02} \times x] - \gamma_2 w|, \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} B_1(u,t,x) = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} (\gamma_1 u + \overline{v_1} + s_1 \gamma_1 [\omega_{01} \times x]) \\ + 2\psi_1 s_1 \left\{ (u, [\omega_{01} \times \overline{v_1}]) - s_1 \gamma_1 [\omega_{01} \times u][\omega_{01} \times x] \right\}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$A_2(u,t,x) = \psi_1\psi_2\rho_1\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dwe^{-w^2}|\gamma_2 u + (\overline{v_2} - \overline{v_1}) \\ + s_2\sqrt{\gamma_2}[\omega_{02}\times x] - s_1\sqrt{\gamma_1}[\omega_{01}\times x] - \gamma_1 w|, \tag{3.31}$$

$$B_2(u,t,x) = \frac{\partial\psi_2}{\partial x}\left(\gamma_2 u + \overline{v_2} + s_2\sqrt{\gamma_2}[\omega_{02}\times x]\right) \\ - 2\psi_2 s_2^2[\omega_{02}\times u][\omega_{02}\times x]. \tag{3.32}$$

Після підстановки виразів (3.29)–(3.32) в (3.14) отримаємо оцінку зверху:

$$\Delta \le \Delta' \\ = \frac{\rho_1}{\pi^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Bigg[\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\Big|\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + A_1(u,t,x) \\ +\frac{\partial\psi_1}{\partial x}(\gamma_1 u + \overline{v_1} + s_1\gamma_1[\omega_{01}\times x]) - 2\psi_1 s_1^2[\omega_{01}\times u][\omega_{01}\times x]\Big| \\ + \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} A_1(u,t,x) + \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} 2\psi_1 s_1|u|\big|[\omega_{01}\times\overline{v_1}]\big|\Bigg]e^{-u^2}du \\ +\frac{\rho_2}{\pi^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Bigg[\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\Big|\frac{\partial\psi_2}{\partial t} + A_2(u,t,x) \\ +\frac{\partial\psi_2}{\partial x}(\gamma_2 u + \overline{v_2} + s_2\sqrt{\gamma_2}[\omega_{02}\times x])\Big| + \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} A_2(u,t,x) \\ + \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\big|2\psi_2 s_2^2[\omega_{02}\times u][\omega_{01}\times x]\big|\Bigg]e^{-u^2}du. \tag{3.33}$$

Як видно з (3.29) та (3.31), границя при $\gamma \to 0$ величини $A_2(u,t,x)$ буде аналогічною границі величини $A_1(u,t,x)$, а оцінка зверху для модуля, що входить в (3.13) і містить $B_i(u,t,x)$, приведе до виділення незалежних від γ (тобто $\beta_i, i = 1,2$) двох доданків, в які увійдуть вирази

$$2s_1\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\Big[\psi_1|u|\big|[\omega_{01}\times\overline{v_1}]\big|\Big]\frac{\rho_1}{\pi^{3/2}}e^{-u^2}du, \tag{3.34}$$

$$2s_2^2\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\Big[\psi_2|\omega_{02}||u|\big|[\omega_{02}\times x]\big|\Big]\frac{\rho_2}{\pi^{3/2}}e^{-u^2}du. \tag{3.35}$$

Подальше обчислення (3.34) та (3.35) (аналогічне обчисленню в доведенні Теореми 3.2) приводить до (3.28). Теорема доведена.

□

Теорема 3.4. Нехай виконана умова (3.4) Теореми 3.1 при

$$k_1 = 1, \qquad k_2 = \frac{1}{4}, \tag{3.36}$$

Тоді при виконанні умов (3.7) та (3.27) справедливе твердження (3.8), де

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ i=1,2}} \Delta' = L + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \rho_2 s_2^2 |\omega_{02}| \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} (|[\omega_{02} \times x]| \psi_2). \tag{3.37}$$

Доведення. Проводиться аналогічно доведенню Теореми 3.2, однак тепер завдяки (3.4) при $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{1}{4}$ та (3.27) замість (3.23), (3.24) з (3.5), (3.6) маємо (3.31), (3.32), а $A_1(u,t,x)$ та $B_1(u,t,x)$ мають вигляд (3.21), (3.22). Як видно з (3.31), (3.32) границя при $\gamma \to 0$ величини $A_2(u,t,x)$ залишається такою ж як і в Теоремі 3.3, аналогічною $A_1(u,t,x)$ з Теореми 3.2, а оцінка зверху для модуля, який входить в (3.13) і містить $B_2(u,t,x)$ проведена в доведенні Теореми 3.3. При цьому результат буде відрізнятись від (3.12) лише останнім доданком, визначеним формулою (3.35). Подальше обчислення приводить до (3.37). Теорему доведено.

□

Спираючись на отримані вирази для границь при $\beta_i \to +\infty, i = 1,2$, ми можемо знайти деякі достатні умови прямування відхилу Δ до нуля, які зручно оформити у вигляді наслідків з Теорем 3.1 – 3.4 (у всіх подальших формулюваннях передбачається, що вказаний перехід вже здійснено).

Наслідок 3.1. Нехай виконані всі умови Теореми 3.1. Тоді співвідношення

$$\Delta \to 0 \tag{3.38}$$

справедливе, якщо має місце хоча б одна із наступних умов:

1) для будь-яких функцій $\psi_i(x)$, що задовольняють умовам (3.7),

$$\begin{aligned} &\overline{v_1} = \overline{v_2} = 0, \\ &\psi_i = \psi_i(x), i = 1, 2; \end{aligned} \tag{3.39}$$

2) $\overline{v_1} = \overline{v_2} \neq 0$, виконано (3.11) та

$$\psi_i = C_i\left([x \times \overline{v_i}]\right), i = 1, 2, \tag{3.40}$$

де $C_i \geq 0$ – будь-які гладкі фінітні або швидкоспадаючі функції своїх векторних аргументів;

3) $\overline{v_1} = \overline{v_2} \neq 0$, виконано (3.11) та

$$\psi_i = C_i\left(x - \overline{v_i}t\right), i = 1, 2, \tag{3.41}$$

де $C_i \geq 0$ такі ж як в пункті 2);

4) $\overline{v_1} = 0$, вектори $\overline{v_2}, \omega_{01}, \omega_{02}$ колінеарні,

$$\psi_1 = \psi_1(t, x) = h\left([x \times \overline{v_2}]\right)\left\{\lambda + C\left([x \times \overline{v_2}]\right)\right.$$
$$\left.\times\left[-\pi d^2|\overline{v_2}|h\left([x \times \overline{v_2}]\right)\left(\frac{x^1}{\overline{v}_2^1}\left(\frac{\rho_2}{\mu} + \frac{\rho_1}{\lambda}\right) - \frac{\rho_2}{\mu}t\right)\right]\right\}^{-1}, \tag{3.42}$$

$$\psi_2 = \psi_2(t, x) = \frac{1}{\mu}\Big(h\left([x \times \overline{v_2}]\right) - \lambda\psi_1(t, x)\Big), \tag{3.43}$$

де $\lambda, \mu > 0$ — довільні константи, а функції h та C мають такі ж властивості, як $C_i, i = 1, 2$, в (3.40), а також

$$d \to 0; \tag{3.44}$$

5) $\overline{v}_1 \neq 0, \overline{v}_2 \neq 0$ довільні, виконано (3.11), функції $\psi_i, i = 1, 2$, мають вигляд (3.40) або (3.41), та

$$supp\psi_1 \cap supp\psi_2 = \varnothing; \tag{3.45}$$

6) $\overline{v}_1 \neq 0, \overline{v}_2 \neq 0$ довільні, функції $\psi_i, i = 1, 2$, мають вигляд (3.40) або (3.41) і виконані (3.11) та (3.44).

Доведення. Доведення всіх пунктів спирається на формули (3.11) та (3.12).

1) Усі доданки виразу (3.12), що містять $\overline{v}_i, i=1,2$, стають рівними нклю, $\frac{\partial \psi_i}{\partial t}$ також дорівнює нулю, тому що $\psi_i=\psi_i(x), i=1,2$. Отже, весь вираз (3.12) дорівнює нулю.

2) Доданки, які містять різницю $|\overline{v}_i-\overline{v}_j|, i,j=1,2, i\neq j$, стають рівними нулю завдяки накладеним умовам.

Розглянемо доданок, що містить $\frac{\partial \psi_i}{\partial x}$. З того, що

$$\Big(C\big([x\times a]\big)\Big)'_x=[a\times C'],$$

де a — довільний постійний вектор, випливає:

$$\Big(\overline{v}_i,\big[\overline{v}_i,C'_i\big]\Big)=0.$$

Умова (3.11) означає, що $\omega_{0i}||\overline{v}_i$. Тоді в (3.40) ми можемо замість $\overline{v}_i$ написати ω_{0i}. Таким чином ми отримуємо обмеженість, вказану в (3.7). Те ж саме стосується всіх наступних пунктів цього наслідку.

3) У виразі (3.12) всі доданки крім одного стають рівними нулю завдяки накладеним умовам. Однак ця сума також зникає, оскільки функція виду (3.41) задовольняє наступну систему рівнянь:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t}+\overline{v}_i\frac{\partial \psi_i}{\partial x}=0. \tag{3.46}$$

4) За умов, зазначених вище, функції (3.42) та (3.43) є рішенням наступної системи диференціальних рівнянь (як показано в [17]):

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t}+\overline{v}_i\frac{\partial \psi_i}{\partial x}=-\rho_j\pi d^2\psi_1\psi_2|\overline{v}_2|, i,j=1,2, i\neq j. \tag{3.47}$$

Всі інші доданки дорівнюють нулю завдяки (3.44).

5) Згідно умови (3.45) кожна функція $\psi_i\neq 0, i=1,2$, але добуток $\psi_1\psi_2=0$.

Функції виду (3.40) або (3.41) задовольняють системі рівнянь (3.46). Отже, вираз (3.12) очевидно дорівнює нулю.

6) Умови (3.44) or (3.45) приводять до того, що наступні доданки рівні нулю або прямують до нуля:

$$\rho_j \pi d^2 \psi_1 \psi_2 |\overline{v}_i - \overline{v}_j|, i, j = 1, 2, i \neq j.$$

$$2\pi d^2 \rho_1 \rho_2 |\overline{v}_1 - \overline{v}_2| \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} (\psi_1 \psi_2).$$

Який би вид функції ψ_i, $i = 1, 2$, ми не взяли (3.40) або (3.41), виконується твердження (3.46). Це означає, що рівність нулю виразу (3.12) доведено.

□

Наслідок 3.2. Нехай мають місце всі припущення Теореми 3.2. Тоді справедливо (3.38), якщо виконується хоча б одна з умов Наслідку 3.1, а також хоча б одна з наступних вимог:

1. $s_2 \to 0$;
2. Умова (3.11) при $i = 2$.

Доведення. Очевидне і спирається на (3.20). □

Наслідок 3.3. Нехай мають місце всі припущення Теореми 3.3. Тоді справедливо (3.38), якщо виконується хоча б одна з умов Наслідку 3.1, а також хоча б одна з наступних вимог:

1. $s_i \to 0, i = 1, 2$;
2. $s_2 \to 0$, умова (3.11) при $i = 1$.

Доведення. Очевидне і спирається на (3.28). □

Наслідок 3.4. Нехай виконуються всі припущення Теореми 3.4. Тоді справедливо (3.38), якщо виконується хоча б одна з умов Наслідку 3.1, а також вимога 1 Наслідку 3.2.

Доведення. Тривіально проводиться на основі (3.37). □

3.2. Гвинтові потоки, що мінімізують інтегральний відхил

В даному підрозділі також розглядається неоднорідна, нестаціонарна лінійна комбінація (2.13) двох локальних максвеліанів (3.1)–(3.2), що описують ґвинтові стаціонарні рівноважні стани газу.

Задача полягає в пошуку наближених розв'язків рівняння (2.1)–(2.5) при різних можливих значеннях k_i, $i = 1, 2$, та асиметричній (тобто для різних степеней при $i = 1$ та $i = 2$) поведінці кутових швидкостей. Деякі розв'язки зазначеної задачі були знайдені в попередньому підрозділі, але для звичайного рівномірно-інтегрального ("змішаного") відхилу (2.16).

Потрібно знайти такі коефіцієнтні функції φ_i, $i = 1, 2$, у вигляді (3.3) і таку поведінку всіх наявних параметрів, щоб інтегральний (або "чисто-інтегральний") відхил (2.17) прямував при цьому до 0.

Далі наведемо декілька можливих результатів розв'язання вказаної задачі.

Теорема 3.5. Нехай виконуються умови (3.3), (3.4), а наступні функції належать простору $L_1(\mathbb{R}^4)$:

$$\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial t}, \left|\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right|, |[\omega_{0i} \times x]|\psi_i, \left([\omega_{0i} \times x], \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right), \ i = 1, 2 \tag{3.48}$$

Тоді визначений згідно з (2.17) відхил Δ_1 має сенс й існує така величина Δ_1', що

$$\Delta_1 \leq \Delta_1', \tag{3.49}$$

причому якщо степені k_i, при $i = 1, 2$ приймають такі ж самі значення, як і у Теоремі 3.1, тобто виконуються умови (3.9)–(3.11), то існує скінченна границя

$$L_1 = \lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ i=1,2}} \Delta_1'$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{2} \rho_i \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \overline{v_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \rho_j \pi d^2 \psi_1 \psi_2 |\overline{v_1} - \overline{v_2}| \right| \tag{3.50}$$
$$+ 2\pi d^2 \rho_1 \rho_2 |\overline{v_1} - \overline{v_2}| \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx (\psi_1 \psi_2).$$

Доведення. Згідно з (3.5), (3.6) попереднього підрозділу 3.1. запишемо нерівність:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f,f)| dv \leq \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{R^3} \left[\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + B_i(u,t,x) + A_i(u,t,x) \right| \right.$$
$$\left. + A_i(u,t,x) \right] \cdot \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} e^{-u^2} du. \tag{3.51}$$

Існування інтегрального відхилу Δ_1 випливає з (2.17), (3.5), (3.6), (3.51) та вимоги приналежності виразів (3.48) до $L_1(\mathbb{R}^4)$, причому має місце наступна нерівність:

$$\Delta_1 \leq \Delta_1' = \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_i}{\pi^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + B_i(u,t,x) + A_i(u,t,x) \right| \right.$$
$$\left. + A_i(u,t,x) \right] e^{-u^2} du. \tag{3.52}$$

Якщо підставити (3.4) в (3.5), (3.6) ввести позначення, аналогічне (3.15):

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}}, \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \right),$$

то

$$A_i(u,t,x) = \psi_i \psi_j \rho_j \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dw e^{-w^2} |\gamma_i u + (\overline{v_i} - \overline{v_j})$$
$$+ s_i \gamma_i^{2k_i} [\omega_{0i} \times x] - s_j \gamma_j^{2k_j} [\omega_{0j} \times x] - \gamma_j w|, \tag{3.53}$$

$$B_i(u,t,x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left(\gamma_i u + \overline{v_i} + s_i\gamma_i^{2k_i}[\omega_{0i}\times x]\right) \\ + 2\psi_i s_i \gamma_i^{2k_i-1}\left\{(u,[\omega_{0i}\times\overline{v_i}]) - s_i\gamma_i^{2k_i}[\omega_{0i}\times u][\omega_{0i}\times x]\right\}, \tag{3.54}$$

де $i = 1, 2$, $i \neq j$.

З (3.53), (3.54), (3.48) та гладкості коефіцієнтних функцій, що передбачена з самого початку, ми бачимо, що всі підинтегральні вирази в (3.52) — неперервні функції за змінними t, x, u, γ. Тоді інтеграл (3.52) збігається рівномірно відносно змінної γ на будь-якому компакті завдяки (3.48) та наявності множника e^{-u^2}. Отже, величина Δ_1' — неперервна по γ, і ми можемо в (3.52) перейти до границі при $\gamma \to 0$ (тобто $\beta_i \to +\infty, i = 1, 2$). Це означає те ж саме, що просто покласти $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Після інтегрування за змінними w та u отримаємо (3.50). Теорему доведено.

□

Теорема 3.6. Нехай виконуються умови (3.4) та (3.48) Теореми 3.5 при

$$k_1 = 1, \qquad k_2 = \frac{1}{2}.$$

Тоді має місце нерівність (3.49), причому

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty \\ i=1,2}} \Delta_1' = L_1 + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\rho_2 s_2 |[\omega_{02}\times\overline{v_2}]| \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\psi_2. \tag{3.55}$$

Доведення. Використаємо оцінку (3.52), причому позначення Δ_1' для її правої частини поки що не вводимо. Знову використовуючи (3.15), підставимо в (3.5) та (3.6) вираз (3.4). Тепер замість виразів (3.53), (3.54) отримаємо

$$A_1(u,t,x) = \psi_1\psi_2\rho_2\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dw e^{-w^2}|\gamma_1 u + (\overline{v_1} - \overline{v_2}) \\ + s_1\gamma_1^2[\omega_{01}\times x] - s_2\gamma_2^2[\omega_{02}\times x] - \gamma_2 w|, \tag{3.56}$$

$$B_1(u,t,x) = \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\left(\gamma_1 u + \overline{v_1} + s_1\gamma_1^2[\omega_{01}\times x]\right)$$
$$+ 2\psi_1 s_1\gamma_1\left\{(u,[\omega_{01}\times\overline{v_1}]) - s_1\gamma_1^2[\omega_{01}\times u][\omega_{01}\times x]\right\}, \qquad (3.57)$$

$$A_2(u,t,x) = \psi_1\psi_2\rho_1\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dwe^{-w^2}|\gamma_2 u + (\overline{v_2} - \overline{v_1})$$
$$+ s_2\gamma_2[\omega_{02}\times x] - s_1\gamma_1[\omega_{01}\times x] - \gamma_1 w|, \qquad (3.58)$$

$$B_2(u,t,x) = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}\left(\gamma_2 u + \overline{v_2} + s_2\gamma_2[\omega_{02}\times x]\right)$$
$$+ 2\psi_2 s_2\left\{(u,[\omega_{02}\times\overline{v_2}]) - s_2\gamma_2[\omega_{02}\times u][\omega_{02}\times x]\right\}. \qquad (3.59)$$

Після підстановки (3.56)–(3.59) в праву частину виразу (3.52) ми можемо отримати наступну оцінку

$$\Delta_1 \le \Delta_1'$$
$$= \frac{\rho_1}{\pi^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^1} dt\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Bigg[\Bigg|\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + A_1(u,t,x)$$
$$+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}(\gamma_1 u + \overline{v_1} + s_1\gamma_1^2[\omega_{01}\times x]) + 2\psi_1\gamma_1 s_1\Big\{(u,[\omega_{01}\times\overline{v_1}])$$
$$-s_1\gamma_1^2[\omega_{01}\times u][\omega_{01}\times x]\Big\}\Bigg| + A_1(u,t,x)\Bigg]e^{-u^2}du$$
$$+\frac{\rho_2}{\pi^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^1} dt\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Bigg[\Bigg|\frac{\partial\psi_2}{\partial t} + A_2(u,t,x) \qquad (3.60)$$
$$+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}(\gamma_2 u + \overline{v_2} + s_2\gamma_2[\omega_{02}\times x]) - 2\psi_2 s_2^2\gamma_2[\omega_{02}\times u][\omega_{02}\times x]\Bigg|$$
$$+A_2(u,t,x) + 2\psi_2 s_2|u|\,|[\omega_{02}\times\overline{v_2}]|\Bigg]e^{-u^2}du.$$

Далі перейдемо до границі при $\gamma \to 0$ (можливість такого переходу обґрунтовується так само, як і в доведенні Теореми 3.5). Отриманий результат буде відрізнятися від (3.50) лише останнім доданком, який не залежить від γ. Інтеграл від цього доданку легко обчислюється за допомогою переходу до сферичної системи координат. Все це приводить до виразу (3.55). Теорему доведено. □

Теорема 3.7. Нехай виконуються умови (3.4) при

$$k_1 = \frac{1}{2}, \qquad k_2 = \frac{1}{4},$$

а також справедлива умова (3.27), а саме

$$[\omega_{02} \times \overline{v_2}] = 0.$$

Тоді, якщо виконуються умови (3.48) Теореми 3.5 та має місце нерівність (3.49), справедлив наступний аналог твердження (3.50)

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ i=1,2}} \Delta_1' = L + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \rho_1 s_1 |[\omega_{01} \times \overline{v_1}]| \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \psi_1 \\ + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \rho_2 s_2^2 |\omega_{02}| \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx (|[\omega_{02} \times x]| \psi_2). \end{aligned} \tag{3.61}$$

Доведення. Знову використаємо оцінку (3.52) без позначення Δ_1' для її правої частини. Далі підставимо вираз (3.4) при $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{1}{4}$ в (3.5) та (3.6), враховуючи позначення (3.15).

Тоді ми отримаємо

$$\begin{aligned} A_1(u,t,x) = \psi_1 \psi_2 \rho_2 \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dw e^{-w^2} |\gamma_1 u + (\overline{v_1} - \overline{v_2}) \\ + s_1 \gamma_1 [\omega_{01} \times x] - s_2 \gamma_2 [\omega_{02} \times x] - \gamma_2 w|, \end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned} B_1(u,t,x) = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} (\gamma_1 u + \overline{v_1} + s_1 \gamma_1 [\omega_{01} \times x]) \\ + 2\psi_1 s_1 \left\{ (u, [\omega_{01} \times \overline{v_1}]) - s_1 \gamma_1 [\omega_{01} \times u][\omega_{01} \times x] \right\}, \end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned} A_2(u,t,x) = \psi_1 \psi_2 \rho_1 \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dw e^{-w^2} |\gamma_2 u + (\overline{v_2} - \overline{v_1}) \\ + s_2 \sqrt{\gamma_2} [\omega_{02} \times x] - s_1 \sqrt{\gamma_1} [\omega_{01} \times x] - \gamma_1 w|, \end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned} B_2(u,t,x) = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} (\gamma_2 u + \overline{v_2} + s_2 \sqrt{\gamma_2} [\omega_{02} \times x]) \\ - 2\psi_2 s_2^2 [\omega_{02} \times u][\omega_{02} \times x]. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Далі підставимо (3.62)–(3.65) в (3.52) та отримаємо наступну оцінку:

$$
\begin{gathered}
\Delta_1 \leq \Delta_1' \\
= \frac{\rho_1}{\pi^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Bigg[\Big| \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + A_1(u,t,x) \\
+ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} (\gamma_1 u + \overline{v_1} + s_1 \gamma_1 [\omega_{01} \times x]) - 2\psi_1 s_1^2 [\omega_{01} \times u][\omega_{01} \times x] \Big| \\
+ A_1(u,t,x) + 2\psi_1 s_1 |u| \big| [\omega_{01} \times \overline{v_1}] \big| \Bigg] e^{-u^2} du \\
\\
+ \frac{\rho_2}{\pi^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Bigg[\Big| \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + A_2(u,t,x) \\
+ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} (\gamma_2 u + \overline{v_2} + s_2 \sqrt{\gamma_2} [\omega_{02} \times x]) \Big| + A_2(u,t,x) \\
+ \big| 2\psi_2 s_2^2 [\omega_{02} \times u][\omega_{01} \times x] \big| \Bigg] e^{-u^2} du.
\end{gathered} \tag{3.66}
$$

З виразів (3.62) та (3.64) ми бачимо, що границя при $\gamma \to 0$ величини $A_2(u,t,x)$ така, як і границя величини $A_1(u,t,x)$, а оцінка для модуля, що входить до (3.51) та включає $B_i(u,t,x)$ приводить до виділення двох доданків, які не залежать від γ. Ці доданки містять вирази

$$
2s_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big| \psi_1 |u| \big| [\omega_{01} \times \overline{v_1}] \big| \Big| \frac{\rho_1}{\pi^{3/2}} e^{-u^2} du, \tag{3.67}
$$

$$
2s_2^2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big| \psi_2 |\omega_{02}| |u| \big| [\omega_{02} \times x] \big| \Big| \frac{\rho_2}{\pi^{3/2}} e^{-u^2} du. \tag{3.68}
$$

Подальше обчислення (3.67) та (3.68) приводить до твердження (3.61). Теорему доведено. □

Теорема 3.8. Нехай кутові швидкості мають вигляд (3.4) при

$$
k_1 = 1, \qquad k_2 = \frac{1}{4}.
$$

Тоді, якщо виконуються умови (3.27) та (3.48), має місце нерівність (3.49), де

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ i=1,2}} \Delta_1' = L + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\rho_2 s_2^2|\omega_{02}| \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx(|[\omega_{02}\times x]|\psi_2). \tag{3.69}$$

Доведення. Проводиться аналогічно доведенню Теореми 3.6, але тепер, враховуючи (3.4) зі степенями $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{1}{4}$ й умову (3.27), замість виразів (3.58), (3.59) ми отримаємо (3.64), (3.65) з (3.5) та (3.6). Завдяки виразам (3.64), (3.65) ми бачимо, що границя при $\gamma \to 0$ величини $A_2(u,t,x)$ така, як і в Теоремі 3.7, а для величини $A_1(u,t,x)$ така, як в Теоремі 3.6. Зокрема, оцінка для модуля, що входить до виразу (3.51) і містить $B_2(u,t,x)$, здобута в доведенні Теореми 3.7. Отже, отриманий результат відрізнятиметься від (3.50) тільки останнім доданком, визначеним у (3.68). Подальше обчислення приводить до (3.69). Теорему доведено.

□

Завдяки цим результатам щодо границь при $\beta_i \to +\infty, i = 1,2$ ми можемо сформулювати наслідки з Теорем 3.5–3.8, які дають певні достатні умови для прямування інтегрального відхилу Δ_1 до нуля. Але спочатку наведемо деякі означення, які нам знадобляться.

Означення 3.1. Нехай G — множина в $\mathbb{R}^n$ така, що число компонент зв'язності перерізу G з якою завгодно прямою, паралельною деяким координатним осям, скінченне. Позначимо через G_δ $(\delta > 0)$ δ–окіл G, тобто множину всіх точок, відстань від яких до G не перевищує δ.

При $n = 4$ та позначенні координат, як t, x^k $(k = 1,2,3)$, ми будемо позначати через G^x проекцію G на гіперплощину $t = 0$, а через G^k — на гіперплощину $x^k = 0$ $(k = 1,2,3)$.

Означення 3.2. Нехай $G \subset \mathbb{R}^4$; $\delta > 0$. Ми будемо називати як «δ–плато» на множині G таку функцію $\varphi_\delta(G,t,x) \in C^1(\mathbb{R}^4)$, для якої виконкуються наступні умови:

$$\varphi_\delta(G,t,x) = \begin{cases} 1, & (t,x) \in G, \\ 0, & (t,x) \in \mathbb{R}^4 \setminus G_\delta, \\ 0 \le \varphi_\delta \le 1, & (t,x) \in G_\delta \setminus G, \end{cases} \tag{3.70}$$

і, крім того, на будь-якій прямій лінії, паралельній деяким координатним осям, φ_δ має не більш, ніж скінченну кількість строгих екстремумів.

Наслідок 3.5. Нехай виконані всі умови Теореми 3.5. Тоді співвідношення

$$\Delta_1 \to 0 \tag{3.71}$$

має місце, якщо виконується хоча б одна із наступних умов:

1) для будь-яких функцій $\psi_i(x)$, що задовольняють умовам (3.48), виконується умова (3.39) Наслідку 3.1;

2) нехай функції $\psi_i, i = 1,2$ мають вигляд фінітних плато, тобто згладжених спеціальним чином характеристичних функцій деяких обмежених областей в $\mathbb{R}^4$ таких, що міра проекцій їх носіїв на гіперплощину $t = 0$ прямує до нуля, і добуток величин $\overline{v_i}^k$ та мір проекцій їх носіїв на гіперплощини $x^k = 0, k = 1,2,3$ також прямує до нуля. Крім того, нехай виконана хоча б одна з вимог:

$a)$ умова (3.44) Наслідку 3.1, а саме $d \to 0$,

$$b)\overline{v_1} = \overline{v_2} \neq 0, \tag{3.72}$$

$$c) mes \left(supp\psi_1 \bigcap supp\psi_2 \right) \to 0, \tag{3.73}$$

зокрема, може виконуватись умова (3.45) Наслідку 3.1, тобто $supp\psi_1 \bigcap supp\psi_2 = \emptyset$.

Доведення. Доведення спирається на (3.50) та результати роботи [78]. Воно зводиться до перевірки того, що функції $\psi_i, i = 1,2$, для яких виконуються умови Наслідку 3.5, задовольняють вимогам (3.48). $\square$

Наслідок 3.6. Нехай вірні всі припущення Теореми 3.6. Тоді твердження (3.71) має місце, якщо виконується хоча б одна з умов 1) або 2) Наслідку 3.5, а також принаймні одна з вимог Наслідку 3.2:

1. $s_2 \to 0$;
2. Умова (3.11) при $i = 2$.

Доведення. Доведення очевидне й спирається на (3.55). □

Наслідок 3.7. Нехай виконуються всі припущення Теореми 3.7. Тоді має місце твердження (3.71), якщо виконується хоча б одна з умов Наслідку 3.5, і, крім того, одна з вимог:

1. $s_i \to 0, i = 1, 2$;
2. $s_2 \to 0$, умова (3.11) при $i = 1$.

Доведення. Доведення очевидне й спирається на (3.61). □

Наслідок 3.8. Нехай виконуються всі припущення Теореми 3.8. Тоді має місце твердження (3.71), якщо виконується хоча б одна з умов Наслідку 3.5, і, крім того, перша вимога Наслідку 3.6.

Доведення. Легко проводиться, спираючись на твердження (3.69). □

3.3. Фізичний зміст знайдених розв'язків

Проаналізуємо тепер отримані результати з точки зору їх фізичного змісту. Слід зазначити, що точними розв'язками рівняння Больцмана, які мають добре відомий фізичний зміст, є самі ґвинтові максвелівські розподіли (3.1)–(3.2). А бімодальні розподіли (2.13), які розглянуті в даному розділі дисертації, лише наближено описують взаємодію таких ґвинтів і задовольняють рівнянню Больцмана також наближено, в сенсі мінімізації "рівномірно-інтегрального" Δ (2.16) та "чисто-інтегрального" Δ_1 (2.17) відхилів між частинами рівняння. Тим не менш вони можуть бути трактовані фізично.

Всі знайдені розподіли, в тому числі й асиметричні, мають спільну властивість, вони описують газ, який остигає нерівномірно ($\beta_i \to +\infty$, $i = 1, 2$), причому обертання обох ґвинтів сповільнюється ($\omega_i \to 0$, $i = 1, 2$), хоча і з різною швидкістю, у відповідності з (3.4) та різними степенями $k_i \in (\frac{1}{4}, 1]$. Як показують Наслідки 3.1–3.8, в деяких випадках передбачається також виконання умови 1 Наслідку 3.3 не залежно від вибору типу відхилу між лівою та правою частинами рівняння Больцмана. При цьому розподіл $f(t, v, x)$ не прямує до жодного з максвеліанів (тобто точного розв'язку рівняння Больцмана).

Нагадаємо також, що умова (3.44) відповідає навколодовільномолекулярній течії (газ, близький до кнудсенівського), а умова $x_{0i} = 0$, рівносильна (3.11), означає, що $\overline{v}_i$ паралельне $\overline{\omega}_{0i}$ та вісь обертання ґвинта проходить через початок координат (зокрема, це вірно при $\overline{v}_i = 0$). Далі, виконання умови (3.45) відповідає стратифікації об'єктів ("згустків газу") в $\mathbb{R}^4$. А умови $\overline{v}_i = 0$ або $\overline{v}_i \to 0$ означають, що i–ий ґвинт обертається навколо своєї осі, не здійснюючи при цьому поступальний рух вздовж неї (або сповільнюючи цей рух).

З урахуванням всього вище сказаного можна виділити декілька випадків, які забезпечують мализну рівномірно-інтегрального та чисто-інтегрального відхилів, тобто виконання (3.38) та (3.71):

1. Великі числа Кнудсена ($d \to 0$, достатньо висока ступінь розрідженості газу):

   а) стаціонарні обертові циліндри з осями, що перетинаються в початку координат, масові швидкості вздовж осей довільні, густини задаються (3.40);

   б) нестаціонарні обертові згустки газу, що рухаються з довільними швидкостями через початок координат, густини описані в (3.41);

   в) два стаціонарних ґвинти, які знову ж таки мають вигляд (2.9) з осями, що перетинаються в початку координат, їх густини розподілені згідно з умовою 2 Наслідку 3.5, тобто вони мають неповну розмірність та представляють собою: або згустки, які знаходяться в спокої, або циліндричні (зокрема — плоскі) млини, молекули яких летять вздовж осей відповідних циліндрів (або вздовж площин, яким ці млини належать). Одним з прикладів таких розподілень може бути достатньо малий окіл частини обертової циліндричної поверхні ("ґвинтова" трубка);

2. Довільні числа Кнудсена (будь-яке $d > 0$):

   а) обидва ґвинти знаходяться в спокої, вісі проходять через початок координат, густини стаціонарні та довільні (задані в (3.39));

   б) коаксіальні стаціонарні ґвинти з довільними рівними лінійними швидкостями, густини задаються (3.40);

   в) обертові згустки з довільними швидкостями та осями, які перетинаються в точці початку координат, що не стикаються між собою (у зв'язку з (3.45)), густини задаються в (3.41);

   г) стаціонарні ґвинти, що задовольняють умові 2 Наслідку 3.5, з довільними осями та швидкостями, які частково або повністю стратифіковані, а саме виконана вимога (3.73) або (3.45);

І нарешті, можливі й деякі "змішані" варіанти поведінки об'єктів при різних значеннях $i = 1, 2$, окрім асиметричних кутових швидкостей, (наприклад, один об'єкт може бути стаціонарним циліндром та описуватися співвідношенням (3.40), а інший — нестаціонарним згустком виду (3.41) і т.п.).

3.4. Висновки до розділу

Розділ 3 перш за все присвячений дослідженню асиметричних бімодальних розподілів з локальними модами, що описують ґвинтові стаціонарні рівноважні стани газу. Теорема 3.1 та Теорема 3.5 присвячені випадку рівних степеней у найбільш загальному випадку. Як видно з Теорем 3.2–3.4 та 3.6–3.8, розгляд різних степеней β_i при $i = 1, 2$ привів до "гибридних" варіантів граничних виразів для Δ' та Δ'_1, в яких приймають участь різні доданки, що зустрічаються в теоремах, розглянутих в [19].

Для моделі твердих куль побудований бімодальний розподіл, який має вигляд лінійної комбінації стаціонарних неоднорідних максвеліанів при деяких припущеннях про зв'язок між кутовими швидкостями та температурами потоків. Знайдені різні граничні випадки, в яких асиметричні бімодальні розподіли мінімізують рівномірно-інтегральний (підрозділ 3.1.) та інтегральний (підрозділ 3.2.) відхили між частинами рівняння Больцмана.

Основні результати даного розділу опубліковані в роботах [48, 82].

РОЗДІЛ 4

КОНТИНУАЛЬНІ НАБЛИЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ БОЛЬЦМАНА

Даний розділ присвячений побудові нового класу явних наближених розв'язків рівняння Больцмана для моделі твердих куль у вигляді континуального розподілу (2.15), в який входять як глобальні, так і локальні максвеліани. Також досліджений континуальний розв'язок з довільною густиною, яка приймає будь-які значення з $\mathbb{R}^3$. Знайдено деякі достатні умови довільної мализни рівномірно-інтегральної (2.16) та інтегральної (2.17) норм різниці між лівою та правою частинами рівняння.

4.1. Континуальний аналог бімодальних розподілів

В цьому пункті пропонується новий підхід до пошуку явних наближених розв'язків рівняння (2.1)–(2.5), заснований на припущенні, що масова швидкість глобального максвеліана приймає не фіксовані дискретні значення, а стає довільним параметром, що приймає будь-які значення з $\mathbb{R}^3$. Такі розподіли можуть бути названі континуальними.

Будемо розглядати функцію розподілу у вигляді (2.15), а саме

$$f = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(t, x, u) M(v, u) du, \tag{4.1}$$

в яку входять глобальні максвеліани:

$$M(v, u) = \rho \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v-u)^2}, \tag{4.2}$$

де густина ρ і обернена температура β — довільні невід'ємні сталі.

Передбачається, що коефіцієнтна функція $\varphi(t, x, u)$ є невід'ємною та належить $C^1\left(\mathbb{R}^7\right)$. Задача полягає в тому, що необхідно знайти такі функції $\varphi(t,x,u)$ і таку поведінку всіх наявних параметрів, щоб рівномірно-інтегральний відхил (2.16) прямував до нуля.

Далі сформулюємо і детально доведемо основну теорему цього підрозділу.

Теорема 4.1. Нехай виконані умови (4.1) та (4.2). Припустимо, що функції: φ, $|\frac{\partial\varphi}{\partial t}|$, $|\frac{\partial\varphi}{\partial x}|$ обмежені по t, x, u на $\mathbb{R}^7$, а величини

$$\varphi,\ |u|\varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ u\frac{\partial\varphi}{\partial x} \in L_1(\mathbb{R}^3) \tag{4.3}$$

по змінній u рівномірно відносно t, x на $\mathbb{R}^4$.

Тоді визначена у відповідності з формулою (2.16) величина Δ має сенс (тобто існують вказані там кінцевий інтеграл та кінцевий супремум) та існує таке Δ', що виконується оцінка зверху (3.8)

$$\Delta \le \Delta',$$

причому

$$\lim_{\beta\to+\infty} \Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^3} \rho \left| \frac{\partial\varphi}{\partial t} + u\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right| du \right. \tag{4.4}$$
$$\left. +2\pi d^2\rho \int\limits_{\mathbb{R}^6} \varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2)|u_1-u_2|du_1du_2 \right].$$

Для доведення теореми нам знадобиться Лема 3.1, сформульована в Розділі 3.

Доведення. Підставимо вираз (4.1) в рівняння Больцмана (2.1)–(2.5), тоді отримаємо

$$D(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + v\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) M(v,u)du. \tag{4.5}$$

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v-v_1,\alpha)|$$
$$\times \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^3} du_1 \varphi(t,x,u_1) M(v_1', u_1) \int\limits_{\mathbb{R}^3} du_2 \varphi(t,x,u_2) M(v', u_2) \tag{4.6}$$
$$- \int\limits_{\mathbb{R}^3} du_1 \varphi(t,x,u_1) M(v_1, u_1) \int\limits_{\mathbb{R}^3} du_2 \varphi(t,x,u_2) M(v, u_2)\Bigg].$$

Враховуючи формули (4.5) та (4.6) перепишемо вираз (2.16) в наступному вигляді:

$$\Delta = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) M(v,u) du$$
$$-\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v-v_1,\alpha)| \int\limits_{\mathbb{R}^6} \varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2)$$
$$\times \big[M(v_1',u_1)M(v',u_2) - M(v_1,u_1)M(v,u_2)\big] du_1 du_2 \Bigg| dv$$
$$\leq \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| M(v,u) du$$
$$+\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v-v_1,\alpha)| \int\limits_{\mathbb{R}^6} \varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2)$$
$$\times \big|M(v_1',u_1)M(v',u_2) - M(v_1,u_1)M(v,u_2)\big| du_1 du_2 \Bigg] dv$$
$$\leq \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| M(v,u) du$$
$$\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v-v_1,\alpha)| \int\limits_{\mathbb{R}^6} \varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2) \tag{4.7}$$
$$\Big[M(v_1',u_1)M(v',u_2) + M(v_1,u_1)M(v,u_2)\Big] du_1 du_2 \Bigg] dv.$$

Отже,

$$\Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^6}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| M(v,u)dudv$$

$$+\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dv\int\limits_{\mathbb{R}^3}dv_1\int\limits_{\Sigma}d\alpha|(v-v_1,\alpha)|\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2)$$

$$\times\big[M(v_1',u_1)M(v',u_2)+M(v_1,u_1)M(v,u_2)\big]du_1du_2\Bigg]$$

$$=\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^6}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| M(v,u)dvdu+\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}du_1du_2$$

$$\times\varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2)\int\limits_{\mathbb{R}^6}dvdv_1\int\limits_{\Sigma}d\alpha|(v-v_1,\alpha)|$$

$$\times\big[M(v_1',u_1)M(v',u_2)+M(v_1,u_1)M(v,u_2)\big]\Bigg]$$

$$=\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^6}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| M(v,u)dvdu$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^6}du_1du_2\varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2)\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[G(M_1,M_2)+M_2L(M_1)\right]dv\Bigg], \qquad (4.8)$$

де, ми скористалися відомими поняттями ”прибуткової” G та ”затратної” L частин інтегралу зіткнень Q [14, 34, 55]:

$$G(f,g)=\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dv_1\int\limits_{\Sigma}d\alpha|(v-v_1,\alpha)|f(t,v_1',x)g(t,v_1,x), \qquad (4.9)$$

$$L(g)=\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dv_1\int\limits_{\Sigma}d\alpha|(v-v_1,\alpha)|g(t,v_1,x), \qquad (4.10)$$

а також ввели позначення $M_i = M(v,u_i),\ i=1,2$. В формулі (4.8) була також виконана перестановка порядку інтегрувань, законність якої можна обґрунтувати наступним чином.

В першому доданку підінтегральна функція неперервна, та

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| M(v,u)du$$

збігається рівномірно на $\mathbb{R}^3$ (за теоремою Вейєрштрасса):

$$\left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|\cdot\rho\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}e^{-\beta(v-u)^2}\right|$$
$$\leq\rho\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}e^{-\beta(v-u)^2}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|+|v|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|\right)$$

і інтегровано, тому що виконана умова (4.3).

У другому інтегралі підінтегральна функція неперервна завдяки виконанню умов теореми, а внутрішній інтеграл рівномірно відносно u_1, u_2 збігається за теоремою Вейєрштрасса, бо існує інтегрована мажоранта. Отже, ми можемо і тут поміняти місцями порядок інтегрування.

Оскільки, як відомо [55],

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}Q(f,g)dv=0,$$

то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}G(M_1,M_2)dv=\int\limits_{\mathbb{R}^3}M_1L(M_2)dv. \tag{4.11}$$

В силу рівності (4.11) вираз (4.8) спрощується та, використовуючи властивість супремума, можна записати

$$\Delta'=\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^6}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|\rho\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\beta(v-u)^2}dvdu\right]$$
$$+\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2)\right.$$
$$\left.\times\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[M_1L(M_2)+M_2L(M_1)\right]dvdu_1du_2\right].$$

Проведемо заміну $\sqrt{\beta}(v-u)=w$, $v=\frac{w}{\sqrt{\beta}}+u$. Тоді

$$\Delta'=\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\left[\rho\pi^{-3/2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}}+u\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|e^{-w^2}dwdu\right]$$

$$+\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2)\right. \tag{4.12}$$

$$\left.\times\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[M_1L(M_2)+M_2L(M_1)\right]dwdu_1du_2\right].$$

Застосуємо Лему 3.1 до кожного з супремумів, що входять до рівняння (4.12). Тут $y=(t,x), Y=\mathbb{R}^4, z=\gamma$, де $\gamma=\frac{1}{\sqrt{\beta}}$, $Z=\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^1_+$. Перевіримо виконання умови 1) для першого доданку, скориставшись умовою (4.3) і тим, що $|\gamma|\leq 1$ при $\beta\to+\infty$:

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^6}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(w\gamma+u)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|e^{-w^2}dwdu\right|$$

$$\leq\int\limits_{\mathbb{R}^6}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|+|w||\gamma|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|+\left|u\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|\right)e^{-w^2}dwdu$$

$$\leq\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\pi^{3/2}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|+2\pi\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|+\pi^{3/2}\left|u\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|\right)du$$

рівномірно обмежений в силу умов Теореми 4.1 (другий інтеграл легко обчислюється після переходу до сферичної системи координат: $\int\limits_{\mathbb{R}^3}|w|e^{-w^2}dw=2\pi$).

Таким чином, функція, яка входить в перший супремум, обмежена на Y відносно t,x. Тепер для першого доданку перевіримо виконання умови 2) Леми 3.1:

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^6}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(w\gamma+u)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|e^{-w^2}dwdu-\int\limits_{\mathbb{R}^6}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(w\gamma_0+u)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|e^{-w^2}dwdu\right|$$

$$=\left|\int\limits_{\mathbb{R}^6}e^{-w^2}\left[\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(w\gamma+u)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|-\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(w\gamma_0+u)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|\right]dwdu\right|$$

$$\leq\int\limits_{\mathbb{R}^6}e^{-w^2}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(w\gamma+u)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-(w\gamma_0+u)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|dwdu$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int\limits_{\mathbb{R}^6} e^{-w^2} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right| |w||\gamma-\gamma_0| dw du \\
&\le \delta \int\limits_{\mathbb{R}^6} e^{-w^2} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right| |w| dw du \\
&= 2\pi\delta \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right| du,
\end{aligned}
$$

тобто завдяки теоремі друга умова Леми 3.1 дійсно виконана.

Перед тим як перевірити виконання умов Леми 3.1 для другого супремума у виразі (4.12), розглянемо його підінтегральний вираз:

$$
\begin{aligned}
M_1 L(M_2) &= M\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1, u_1\right) \\
\times \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha &\left|\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1 - v_1, \alpha\right)\right| M(v_1, u_2) \\
&= M\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1, u_1\right) \frac{d^2}{2}\rho \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \\
\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha &\left|\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1 - v_1, \alpha\right)\right| e^{-\beta(v_1-u_2)^2}.
\end{aligned}
$$

Введемо заміну

$$
\sqrt{\beta}(v_1 - u_2) = s; \qquad v_1 = \frac{s}{\sqrt{\beta}} + u_2.
$$

$$
\begin{aligned}
M_1 L(M_2) = &M(w\gamma + u_1, u_1) \frac{d^2}{2} \rho \pi^{3/2} \\
&\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} ds \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(w\gamma + u_1 - s\gamma - u_2, \alpha)| e^{-s^2}.
\end{aligned}
$$

Нехай θ — кут між векторами $(w\gamma + u_1 - s\gamma - u_2)$ і α. Тоді

$$
\begin{aligned}
M_1 L(M_2) = &M(w\gamma + u_1, u_1) \frac{d^2}{2} \rho \pi^{3/2} \\
&\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} ds e^{-s^2} \int\limits_{\Sigma} d\alpha |w\gamma + u_1 - s\gamma - u_2| |\cos\theta|.
\end{aligned}
$$

Вісь z направимо вздовж вектора $(w\gamma + u_1 - s\gamma - u_2)$ та введемо на Σ сферичну систему координат, тоді очевидне інтегрування по кутам θ і φ дає:

$$M_1 L(M_2) = M(w\gamma + u_1, u_1)\frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dse^{-s^2}|w\gamma + u_1 - s\gamma - u_2|.$$

Аналогічно

$$M_2 L(M_1) = M(w\gamma + u_2, u_2)\frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dse^{-s^2}|w\gamma + u_2 - s\gamma - u_1|.$$

Перевіримо виконання умови 1) Леми 3.1 для другого супремума у виразі (4.12):

$$\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi_1\varphi_2\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Bigg[M(w\gamma + u_1, u_1)\gamma^{-3/2}\frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dse^{-s^2}|w\gamma + u_1 - s\gamma - u_2|$$

$$+M(w\gamma + u_2, u_2)\gamma^{-3/2}\frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dse^{-s^2}|w\gamma + u_2 - s\gamma - u_1|\Bigg]dwdu_1du_2\Bigg|$$

$$=\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi_1\varphi_2\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Bigg[\rho\pi^{-3/2}e^{-w^2}\frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dse^{-s^2}|w\gamma + u_1 - s\gamma - u_2|$$

$$+\rho\pi^{-3/2}e^{-w^2}\frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dse^{-s^2}|w\gamma + u_2 - s\gamma - u_1|\Bigg]dwdu_1du_2\Bigg|$$

$$\leq 2\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi_1\varphi_2\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[e^{-w^2}\frac{d^2\rho^2}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dse^{-s^2}\big(|\gamma||w-s| + |u_1| + |u_2|\big)\right]dwdu_1du_2$$

$$\leq \frac{2d^2\rho^2}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi_1\varphi_2\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[e^{-w^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dse^{-s^2}\big(|w| + |s| + |u_1| + |u_2|\big)\right]dwdu_1du_2$$

$$\leq \frac{2d^2\rho^2}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi_1\varphi_2\left[4\pi^{5/2} + \pi^3\big(|u_1| + |u_2|\big)\right]du_1du_2$$

$$= 2d^2\rho^2\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi_1\varphi_2\Big[4\sqrt{\pi} + \pi\big(|u_1| + |u_2|\big)\Big]du_1du_2.$$

Значить, функція, яка входить у другий супремум, також обмежена на Y відносно t, x завдяки умовам теореми.

Тепер перевіримо виконання умови 2) Леми 3.1 для другого супремума у виразі (4.12):

$$\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi_1\varphi_2\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Bigg[\rho\pi^{-3/2}e^{-w^2}\frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dse^{-s^2}|w\gamma+u_1-s\gamma-u_2|$$

$$+\rho\pi^{-3/2}e^{-w^2}\frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dse^{-s^2}|w\gamma+u_2-s\gamma-u_1|\Bigg]dwdu_1du_2$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi_1\varphi_2\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Bigg[\rho\pi^{-3/2}e^{-w^2}\frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dse^{-s^2}|w\gamma_0+u_1-s\gamma_0-u_2|$$

$$+\rho\pi^{-3/2}e^{-w^2}\frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dse^{-s^2}|w\gamma_0+u_2-s\gamma_0-u_1|\Bigg]dwdu_1du_2\Bigg|$$

$$=\frac{d^2\rho^2}{\pi^2}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi_1\varphi_2\int\limits_{\mathbb{R}^3}e^{-w^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dse^{-s^2}$$

$$\times\Bigg[\big(|w\gamma+u_1-s\gamma-u_2|-|w\gamma_0+u_1-s\gamma_0-u_2|\big)$$

$$+\big(|w\gamma+u_2-s\gamma-u_1|-|w\gamma_0+u_2-s\gamma_0-u_1|\big)\Bigg]dwdu_1du_2\Bigg|$$

$$\le\frac{d^2\rho^2}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi_1\varphi_2\int\limits_{\mathbb{R}^3}e^{-w^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dse^{-s^2}$$

$$\times\Bigg[|w\gamma+u_1-s\gamma-u_2-w\gamma_0-u_1+s\gamma_0+u_2|$$

$$+|w\gamma+u_2-s\gamma-u_1-w\gamma_0-u_2+s\gamma_0+u_1|\Bigg]dwdu_1du_2$$

$$\le 2\frac{d^2\rho^2}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi_1\varphi_2\int\limits_{\mathbb{R}^3}e^{-w^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dse^{-s^2}|w-s||\gamma-\gamma_0|dwdu_1du_2$$

$$\le 2\delta\frac{d^2\rho^2}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi_1\varphi_2\int\limits_{\mathbb{R}^3}e^{-w^2}\int\limits_{R^3}dse^{-s^2}\big(|w|+|s|\big)dwdu_1du_2$$

$$=4\pi^{5/2}\cdot 2\delta\frac{d^2\rho^2}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi_1\varphi_2du_1du_2=8\delta d^2\rho^2\sqrt{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\varphi_1\varphi_2du_1du_2,$$

Отже, завдяки умовам Теореми 4.1 умова 2) Леми 3.1 дійсно виконана.

Оскільки для кожного із згаданих супремумів виконані умови Леми, вся величина Δ' неперервна по γ на $\mathbb{R}^1_+$. Отже, можна перейти до границі при $\beta \to +\infty$, що рівносильно прямуванню γ до нуля. Для зручності здійснення граничного переходу розглянемо вираз для Δ' до заміни змінних, а саме

$$\Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial t} + v\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right| M(v,u)dvdu \right]$$
$$+ \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^6} \varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2) \int\limits_{\mathbb{R}^3} \big[M_1 L(M_2) + M_2 L(M_1)\big] dvdu_1du_2 \right].$$

Скористаємось тим, що в сенсі узагальнених функцій, очевидно,

$$M(v,u) \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \rho\delta(v-u). \tag{4.13}$$

Тоді

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial t} + v\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right| M(v,u)dv \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial t} + v\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right| \rho\delta(v-u)dv$$
$$\xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \rho \left| \frac{\partial\varphi}{\partial t} + u\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|,$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^3} M_1 L(M_2)dv &\xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \int\limits_{\mathbb{R}^3} M(v,u_1)d^2\pi\rho|v-u_2|dv \\
&\xrightarrow[\beta\to+\infty]{} d^2\rho^2\pi|u_1-u_2|, \\
\int\limits_{\mathbb{R}^3} M_2 L(M_1)dv &\xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \int\limits_{\mathbb{R}^3} M(v,u_2)d^2\pi\rho|v-u_1|dv \\
&\xrightarrow[\beta\to+\infty]{} d^2\rho^2\pi|u_1-u_2|,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

в силу чого отримаємо рівняння (4.4). Теорему доведено.

□

Далі, спираючись на отриманий вираз для границі при $\beta \to +\infty$, знайдемо достатню умову прямування відхилу Δ до нуля, яке оформимо у вигляді наслідку з Теореми 4.1.

Наслідок 4.1. Нехай виконані всі умови Теореми 4.1. Тоді справедливе співвідношення (3.38), а саме прямування величини Δ до нуля, якщо коефіцієнтна функція φ має наступний вигляд:

$$\varphi = C(x-ut)\left(\frac{P}{\pi}\right)^{3/2} e^{-P(u-u_0)^2}, \tag{4.15}$$

де C — будь-яка гладка, додатня та обмежена разом зі своїми похідними функція, $u_0 \in \mathbb{R}^3$ — довільний фіксований вектор, а $P \to +\infty$.

Доведення. Скористаємось граничним виразом (4.4) і підставимо в нього вираз (4.15). Підінтегральний вираз першого доданку стає рівним нулю:

$$C'(x-ut)(-u) + uC'(x-ut) = 0.$$

Розглянемо інтеграл, який входить в другий доданок (нехай існує $M > 0\colon\ |C| \le M$):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^6} C(x-u_1t)\left(\frac{P}{\pi}\right)^{3/2} e^{-P(u_1-u_0)^2}$$

$$\times C(x-u_2t)\left(\frac{P}{\pi}\right)^{3/2} e^{-P(u_2-u_0)^2}|u_1-u_2|du_1du_2$$

$$\le M^2\left(\frac{P}{\pi}\right)^3 \int\limits_{\mathbb{R}^6} e^{-P(u_1-u_0)^2}e^{-P(u_2-u_0)^2}|u_1-u_2|du_1du_2$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{P}(u_1-u_0) = w_1; \;\; u_1 = \frac{w_1}{\sqrt{P}} + u_0 \\ \sqrt{P}(u_2-u_0) = w_2; \;\; u_2 = \frac{w_2}{\sqrt{P}} + u_0 \end{bmatrix}$$

$$= M^2\left(\frac{P}{\pi}\right)^3 \frac{1}{P^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-{w_2}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-{w_1}^2}\left|\frac{w_1}{\sqrt{P}} + u_0 - \frac{w_2}{\sqrt{P}} - u_0\right| dw_1dw_2$$

$$\le \frac{M^2}{\pi^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-{w_2}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-{w_1}^2}\frac{|w_1|}{\sqrt{P}}dw_1dw_2 + \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-{w_1}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-{w_2}^2}\frac{|w_2|}{\sqrt{P}}dw_2dw_1$$

$$= \frac{M^2}{\pi^3}\left[\pi^{3/2}\frac{2\pi}{\sqrt{P}} + \pi^{3/2}\frac{2\pi}{\sqrt{P}}\right] = \frac{4M^2}{\sqrt{P\pi}} \xrightarrow[P\to+\infty]{} 0.$$

Тут ми скористалися інтегралом Ейлера-Пуасона і значеннями інтегралів, обчислених раніше. Таким чином, ми довели збіжність інтегралу, який входить в другий доданок, та його прямування до нуля при $P \to +\infty$. Наслідок доведений. $\square$

Зауваження 4.1. Співвідношення (3.38) залишається в силі і при фіксованому P в (4.15), але при додатковій умові: $d \to 0$ (навколокнудсенівський газ)

Зауваження 4.2. У виразі (4.15), очевидно, можна було б замість першого множника $C(x-ut)$ розглянути й такий: $C\big([u\times x]\big)$, а замість другого — інші δ–подібні функції.

Зауваження 4.3. З точки зору фізичного змісту отриманих результатів відмітимо, що Теорема 4.1 є лише деякою математичною абстракцією. Реально співвідношення (3.8) та (4.4) разом з прямуванням Δ до нуля можна трактувати наступним чином: оцінка зверху (3.8) та знаходження границі у виразі (4.4) служать для забезпечення подальшої довільної мализни норми Δ при відповідних коефіцієнтних функціях та достатньо низькій абсолютній температурі, що означає лише припущення про мализну теплової складової швидкостей молекул при збереженні довільної величини масової швидкості потоку.

4.2. Наближені розв'язки з гвинтовими модами

В даному пункті буде побудований клас явних наближених розв'язків рівняння (2.1)–(2.5), який має вигляд континуальної суперпозиції локальних максвеліанів ґвинтового типу. Така структура локальних максвеліанів є цікавою і була розглянута у попередньому Розділі 3 для випадку бімодальних розподілів.

4.2.1. Випадок рівномірно-інтегрального відхилу

В попередньому підрозділі 4.1. був досліджений новий підхід до пошуку явних наближених розв'язків, а саме континуальний вигляд функції розподілу. При цьому передбачається, що масова швидкість глобального максвеліана приймає не фіксовані дискретні значення, а стає довільним параметром, який приймає будь-які значення з $\mathbb{R}^3$.

Тепер нашою метою є дослідження поведінки континуального розподілу, в який входять локальні максвеліани часткового випадку, які описують стаціонарні рівноважні стани газу, подібні ґвинтам (2.9). Кожен такий максвеліан буде мати вигляд:

$$M(v,u,x) = \rho_0 e^{\beta\omega^2 r^2} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v-u-[\omega\times x])^2}. \tag{4.16}$$

Фізичний зміст розподілу (4.16) описано в підрозділі 2.2., але тепер $\overline{v} = u \in \mathbb{R}^3$ – довільний параметр (лінійна масова швидкість в точках x), звідси і залежність локального максвеліана не лише від v та x, а й від u.

Будемо розглядати функцію розподілу у вигляді (2.15), а саме

$$f = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(t,x,u) M(v,u,x) du, \tag{4.17}$$

Потрібно знайти такі коефіцієнтні функції $\varphi(t,x,u)$ (невід'ємні та належать $C^1\left(\mathbb{R}^7\right)$) і таку поведінку всіх наявних параметрів, щоб рівномірно-інтегральноий відхил (2.16) прямував при цьому до нуля.

Далі отримаємо асимптотичні вирази деяких оцінок зверху для норми Δ при великих значеннях β і різних припущеннях про поведінку вектора кутової швидкості ω.

Перед тим як сформулювати основні результати, необхідно трохи перетворити праву частину (2.16). Перед усім обчислимо та оцінимо інтеграл по змінній v, підставляючи розподіли (4.16), (4.17) в (2.1)–(2.5) та враховуючи, що

$$D(M) = Q(M,M) = 0.$$

Отримуємо, що

$$D(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} D(\varphi) M \, du = \int\limits_{\mathbb{R}^3} D(\varphi) e^{\beta\omega^2 r^2} \widetilde{M} \, du \tag{4.18}$$

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| e^{2\beta\omega^2 r^2}$$

$$\times \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^3} du_1 \varphi(t,x,u_1) \widetilde{M}(v_1', u_1, x) \int\limits_{\mathbb{R}^3} du_2 \varphi(t,x,u_2) \widetilde{M}(v', u_2, x) \tag{4.19}$$

$$- \int\limits_{\mathbb{R}^3} du_1 \varphi(t,x,u_1) \widetilde{M}(v_1, u_1, x) \int\limits_{\mathbb{R}^3} du_2 \varphi(t,x,u_2) \widetilde{M}(v, u_2, x) \Bigg],$$

де введено позначення

$$\widetilde{M} = \widetilde{M}(v,u,x) = \rho \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v - \tilde{u})^2} \tag{4.20}$$

$$\tilde{u} = \tilde{u}(x) = u + [\omega \times x].$$

Тоді

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f,f)| \, dv$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) e^{\beta\omega^2 r^2} \widetilde{M} \, du$$

$$- \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v - v_1, \alpha)| e^{2\beta\omega^2 r^2} \int\limits_{\mathbb{R}^6} \varphi(t,x,u_1) \varphi(t,x,u_2) \tag{4.21}$$

$$\times \big[\widetilde{M}(v_1', u_1, x) \widetilde{M}(v', u_2, x) - \widetilde{M}(v_1, u_1, x) \widetilde{M}(v, u_2, x) \big] du_1 du_2 \Bigg| dv.$$

Введемо, як і раніше, розбиття інтегралу зіткнень Q на "прибуткову" G (4.9) та "затратну" L (4.10) частини. А оскільки, як відомо [55]:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} G(M_1, M_2) dv = \int\limits_{\mathbb{R}^3} M_1 L(M_2) dv, \tag{4.22}$$

отримаємо наступну оцінку зверху

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f,f)|\, dv \\
&\le \int\limits_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| e^{\beta\omega^2 r^2} \widetilde{M}\, du dv \\
&+ e^{2\beta\omega^2 r^2} \int\limits_{\mathbb{R}^6} \varphi(t,x,u_1)\varphi(t,x,u_2) \\
&\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[\widetilde{M}_1 L(\widetilde{M}_2) + \widetilde{M}_2 L(\widetilde{M}_1)\right] du_1 du_2 dv.
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

Згідно (4.23) для коректної визначеності відхилу (2.16) на коефіцієнтні функції необхідно накласти нові умови швидкого спадання по просторовій змінній x. Тому введемо нове позначення

$$
\varphi(t,x,u) = \psi(t,x,u)e^{-\beta\omega^2 r^2}, \tag{4.24}
$$

де функції неперервно-диференційовані та невід'ємні. Тоді враховуючи (4.23), (4.24) та (2.11) оцінка (4.23) буде мати вигляд

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f,f)|\, dv \\
&\le \int\limits_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + v \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - 2\beta\psi\left[[\omega \times (x - x_0)] \times \omega\right] \right) \right| \widetilde{M}\, du dv \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^6} \psi(t,x,u_1)\psi(t,x,u_2) \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[\widetilde{M}_1 L(\widetilde{M}_2) + \widetilde{M}_2 L(\widetilde{M}_1)\right] du_1 du_2 dv.
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

Теорема 4.2. Нехай виконані умови (4.16), (4.20), (4.24) а також

$$
\omega = \frac{\omega_0 s}{\beta^k}, \tag{4.26}
$$

де $s > 0$ — будь-яка постійна величина, ω_0 — довільний фіксований вектор (інші параметри також довільні і фіксовані). Також припустимо, що наступні функції:

ψ, $|\frac{\partial\psi}{\partial t}|$, $|\frac{\partial\psi}{\partial x}|$, $|[\omega_0 \times x]|\psi$, $\Big([\omega_0 \times x], \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big)$ — обмежені по t, x і u на $\mathbb{R}^7$, а величини

$$\psi,\ |u|\psi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t},\ \frac{\partial\psi}{\partial x},\ u\frac{\partial\psi}{\partial x} \in L_1(\mathbb{R}^3) \tag{4.27}$$

по змінній u рівномірно відносно t і x на $\mathbb{R}^4$.

Тоді визначена згідно з (2.16) величина Δ має сенс (тобто існують вказані там кінцевий інтеграл та кінцевий супремум) та існує таке Δ', що виконується нерівність (3.8), а саме

$$\Delta \leq \Delta'.$$

Причому якщо

$$\frac{1}{2} < k \leq 1,$$

або

$$\frac{1}{4} < k \leq \frac{1}{2},$$

та

$$[\omega_0 \times u] = 0, \tag{4.28}$$

тоді існує кінцева границя

$$L = \lim_{\beta \to +\infty} \Delta'$$
$$= \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left[\rho \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial\psi}{\partial t} + u\frac{\partial\psi}{\partial x} \right| du \right. \tag{4.29}$$
$$\left. + 2\pi^3 d^2 \rho^2 \int\limits_{\mathbb{R}^6} \psi(t,x,u_1)\psi(t,x,u_2)|u_1 - u_2| du_1 du_2 \right].$$

Для доведення Теореми 4.2 знову скористаємося Лемою 3.1, яка була сформульована в Розділі 3.

Доведення. З (2.16), (4.25), (4.27) та властивостей супремума випливає існування відхилу Δ, причому

$$\Delta \le \Delta'$$

$$= \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + v \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - 2\beta\psi \big[[\omega \times (x - x_0)] \times \omega \big] \right) \right| \widetilde{M} \, dv du \tag{4.30}$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^6} \psi(t,x,u_1)\psi(t,x,u_2) \int\limits_{\mathbb{R}^3} \big[\widetilde{M}_1 L(\widetilde{M}_2) + \widetilde{M}_2 L(\widetilde{M}_1) \big] dv du_1 du_2 \Bigg].$$

В (4.30) була також виконана перестановка порядку інтегрвання, законність якої обгрунтовується так.

В першому доданку підінтегральна функція неперервна завдяки умовам теореми, а

$$\int\limits_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + v \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - 2\beta\psi \big[[\omega \times (x - x_0)] \times \omega \big] \right) \right| \widetilde{M} \, du$$

— збігається рівномірно в $\mathbb{R}^3$ (за теоремою Вейєрштрасса),

$$\Bigg| \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + v \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - 2\beta\psi \big[[\omega \times (x - x_0)] \times \omega \big] \right) \right|$$

$$\times \rho \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta(v-\tilde{u})^2} \Bigg|$$

$$\le \rho \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta(v-\tilde{u})^2} \left(\left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right| \right.$$

$$\left. + |v| \left(\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| + 2\beta\psi \Big| \big[[\omega \times (x - x_0)] \times \omega \big] \Big| \right) \right)$$

— інтегроване, тому що виконана умова (4.27).

У другому інтегралі підінтегральна функція неперервна завдяки виконанню умов теореми, а внутрішній інтеграл збігається рівномірно відносно u_1 та u_2 за теоремою Вейєрштрасса, тому що існує інтегрована мажоранта. Отже, ми можемо і тут поміняти місцями порядок інтегрування.

Введемо заміну змінних:

$$\sqrt{\beta}(v - \widetilde{u}) = w; \qquad v = \frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u} = \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u + [\omega \times x] \, .$$

Тоді

$$\begin{aligned}\Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\Bigg[\rho\pi^{-3/2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\Bigg|\frac{\partial\psi}{\partial t} + \left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u + [\omega\times x]\right)\\ \times\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - 2\beta\psi\big[[\omega\times(x-x_0)]\times\omega\big]\right)\Bigg|e^{-w^2}dwdu\Bigg]\\ + \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^6}\psi(t,x,u_1)\psi(t,x,u_2)\\ \times\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[\widetilde{M}_1L(\widetilde{M}_2) + \widetilde{M}_2L(\widetilde{M}_1)\right]dwdu_1du_2\Bigg].\end{aligned}\tag{4.31}$$

Розглянемо підінтегральний вираз другого супремума у виразі (4.31)

$$\begin{aligned}&\widetilde{M}_1L(\widetilde{M}_2)\\ &= \widetilde{M}\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_1, u_1, x\right)\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}dv_1\int\limits_{\Sigma}d\alpha\left|\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_1 - v_1, \alpha\right)\right|\widetilde{M}(v_1, u_2, x)\\ &= \widetilde{M}\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_1, u_1, x\right)\frac{d^2}{2}\rho\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}\\ &\times\int\limits_{\mathbb{R}^3}dv_1\int\limits_{\Sigma}d\alpha\left|\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_1 - v_1, \alpha\right)\right|e^{-\beta(v_1-\tilde{u}_2)^2}.\end{aligned}$$

Введемо заміну змінних:

$$\sqrt{\beta}(v_1 - \tilde{u}_2) = z;$$
$$v_1 = \frac{z}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_2 = \frac{z}{\sqrt{\beta}} + u_2 + [\omega\times x].$$

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_1L(\widetilde{M}_2) = \widetilde{M}\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_1, u_1, x\right)\\ \times\frac{d^2}{2}\rho\pi^{3/2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}ds\int\limits_{\Sigma}d\alpha\left|\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_1 - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - \tilde{u}_2, \alpha\right)\right|e^{-z^2}.\end{aligned}$$

Нехай θ — це кут між векторами $\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_1 - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - \tilde{u}_2\right)$ та α. Тоді отримуємо

$$\widetilde{M_1}L(\widetilde{M_2}) = \widetilde{M}\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_1, u_1, x\right)\frac{d^2}{2}\rho\pi^{3/2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dze^{-z^2}$$
$$\times \int\limits_{\Sigma} d\alpha \left|\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1 + [\omega\times x] - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - u_2 - [\omega \times x]\right| |\cos\theta|.$$

Вісь z направимо вздовж вектора $(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1 - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - u_2)$ та введемо на Σ сферичну систему координат. Далі завдяки інтегруванню по кутам θ та φ, ми очевидно отримуємо

$$M_1L(M_2)$$
$$= M\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1, u_1\right)\frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dze^{-z^2}\left|\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1 - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - u_2\right|.$$

Аналогічно, маємо

$$M_2L(M_1)$$
$$= M\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_2, u_2\right)\frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dze^{-z^2}\left|\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_2 - \frac{w}{\sqrt{\beta}} - u_1\right|.$$

Отже, приходимо до наступних виразів

$$\int\limits_{\mathbb{R}^6}\psi_1\psi_2\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[M\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1, u_1\right)\beta^{3/2}\frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}}\right.$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^3} dze^{-z^2}\left|\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1 - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - u_2\right| + M\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_2, u_2\right)\beta^{3/2}\frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}}$$
$$\left.\times\int\limits_{\mathbb{R}^3} dze^{-z^2}\left|\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_2 - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - u_1\right|\right] dwdu_1du_2$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^6}\psi_1\psi_2\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[\rho\pi^{-3/2}e^{-w^2}\frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dze^{-z^2}\left|\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1 - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - u_2\right|\right.$$
$$\left.+\rho\pi^{-3/2}e^{-w^2}\frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dze^{-z^2}\left|\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_2 - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - u_1\right|\right] dwdu_1du_2$$

$$= 2\int\limits_{\mathbb{R}^6} \psi_1\psi_2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[e^{-w^2}\frac{d^2\rho^2}{\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz e^{-z^2} \left| \frac{(w-z)}{\sqrt{\beta}} + u_1 - u_2 \right| \right] dw du_1 du_2.$$

Для спрощення виразу (4.31) введемо деякі позначення:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \tag{4.32}$$

$$A(w,u,t,x) = \rho\frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dz e^{w^2} \left| w\gamma + (u_1 - u_2) - z\gamma \right|, \tag{4.33}$$

$$\begin{gathered} B(w,u,t,x) \\ = \left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u + [\omega \times x]\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - 2\beta\psi\big[[\omega \times (x - x_0)] \times \omega\big]\right) \\ = \left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u + [\omega \times x]\right) \times \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ +2\beta\psi\left(\omega\left(\omega, x - x_0\right) - \omega^2\left(x - \frac{[\omega \times u]}{\omega^2}\right)\right) \\ = \left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u + [\omega \times x]\right) \times \frac{\partial\psi}{\partial x} + 2\beta\psi\big(\omega\left(\omega, x\right) - x\omega^2 + [\omega \times u]\big) \\ = \frac{\partial\psi}{\partial x}\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u + [\omega \times x]\right) \\ +2\psi\sqrt{\beta}\left\{(\omega, w)(\omega, x) - \omega^2(x, w) + (w, [\omega \times u])\right\} \\ = \frac{\partial\psi}{\partial x}\left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u + [\omega \times x]\right) \\ +2\psi\sqrt{\beta}\left\{-[\omega \times w][\omega \times x] + (w, [\omega \times u])\right\}. \end{gathered} \tag{4.34}$$

Використовуючи вирази (4.27) та (4.32), отримаємо наступне:

$$\begin{aligned} B(w,u,t,x) = {} & \frac{\partial\psi}{\partial x}\left(w\gamma + u + \gamma^2 s[\omega_0 \times x]\right) \\ & + 2\psi\gamma s\left\{(w, [\omega_0 \times u]) - s\gamma^2[\omega_0 \times w][\omega_0 \times x]\right\}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Враховуючи (4.33) та (4.35), перепишемо вираз (4.31) в наступному вигляді:

$$\Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\left[\rho\pi^{-3/2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x} + B(w,u,t,x)\right| e^{w^2}dwdu\right]$$
$$+ \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\left[2\rho\pi^{-3/2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\psi(t,x,u_1)\psi(t,x,u_2)\right. \tag{4.36}$$
$$\left.\times\int\limits_{\mathbb{R}^3}A(w,u_1,u_2,t,x)dwdu_1du_2\right].$$

Застосуємо вказану Лему 3.1 до кожного з супремумів, які входять в (4.36), де $y = (t,x), Y = \mathbb{R}^4, z = (w,\gamma)$, $Z = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1_+$. Виконання умов 1) та 2) Леми 3.1 випливає із співвідношень (4.27), (4.33), (4.35) та умов теореми.

Оскільки для кожного зі згаданих супремумів умови Леми 3.1 виконані, вся величина Δ' неперервна по γ в $\mathbb{R}^1_+$. Отже, в (4.36) можна перейти до границі при $\beta \to +\infty$, що рівносильно прямуванню γ до нуля. При цьому залежність від z і w зводиться лише до виразів e^{z^2} в (4.33) та e^{w^2} в (4.36). В результаті інтегрування по z і w приходимо до (4.29).

□

Далі, спираючись на отриманий вираз для границі при $\beta \to +\infty$, знайдемо достатні умови прямування відхилу Δ до нуля, які оформимо у вигляді наслідку з Теореми 4.2.

Наслідок 4.2. Нехай виконані всі припущення Теореми 4.2. Тоді справедливе (3.38), а саме

$$\Delta \to 0,$$

якщо функція ψ, визначена у виразі (4.24) має такий самий вигляд, як і функція φ у Наслідку 4.1

$$\psi(t,x,u) = C(x-ut)\left(\frac{P}{\pi}\right)^{3/2} e^{-P(u-u_0)^2}, \tag{4.37}$$

де C — будь-яка гладка, додатня і обмежена функція разом зі своїми похідними функція, $u_0 \in \mathbb{R}^3$ — довільний фіксований вектор, і $P \to +\infty$.

Доведення. Скористаємось граничним виразом (4.29) та підставимо в нього вираз (4.37). Підінтегральний вираз першого доданку стає рівним нулю.

$$C'(x-ut)(-u) + uC'(x-ut) = 0.$$

Розглянемо інтеграл, який входить у другий доданок (обґрунтування збіжності інтегралу та його прямування до нуля при $P \to +\infty$) аналогічне проведеному в доведенні Наслідку 4.1. Наслідок доведено.

□

Зауваження 4.4. Як і в підрозділі 4.1. співвідношення (3.38) залишається в силі, якщо

а) P в (4.37) приймає фіксовані значення при додатковій умові: $d \to 0$ (навколокнудсенівський газ);

б) замість першого множника $C(x-ut)$ у виразі (4.37) можна розглянути $C\big([u \times x]\big)$, а замість другого — інші δ–подібні функції.

Зауваження 4.5. Отримані розподіли описують остигаючий газ ($\beta \to +\infty$). Крім того, обертання ґвинта сповільнюється $(\omega \to 0)$ у відповідності з (4.26) при відповідних степенях $k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ та $k \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ при умові (4.28), тобто вісь обертання ґвинта проходить через початок координат. Як показує Наслідок 4.2, оцінка зверху (3.8) та границя у виразі (4.29) забезпечують подальшу довільну мализну норми Δ для заданих коефіцієнтних функцій та достатньо маленькій абсолютній температурі, що знову ж означає лише припущення, що теплова складова швидкостей молекули мала, коли збережено довільне значення масової швидкості потоку. Те, що розподіл f сам по собі не прямує до жодного з максвеліанів визначається виразами (4.37), (4.17), (4.16).

4.2.2. Випадок інтегрального відхилу

Як і в попередньому пункті 4.2.1. наша задача полягає в побудові явних наближених розв'язків інтегро-диференціального рівняння Больцмана (2.1)–(2.5), які мають вигляд континуальної суперпозиції локальних максвеліанів ґвинтового типу (2.9). Такі потоки описують стаціонарні рівноважні стани газу, а саме задають обертання газу як цілого з певною кутовою швидкістю й поступальний рух вздовж осі обертання. Така структура локальних максвеліанів є цікавою і була розглянута в Розділі 3 для випадку асиметричних бімодальних розподілів. Також знайдемо деякі достатні умови довільної мализни інтегральної норми (2.17) різниці між лівою та правою частинами рівняння Больцмана та розглянемо їх фізичний зміст. В пункті 4.2.1. були отримані результати для рівномірно-інтегральної норми (2.16).

Будемо розглядати континуальну функцію розподілу $f(t, v, x)$ у вигляді (4.17), в яку входять ґвинтові моди вигляду (4.16). Потрібно знайти такі коефіцієнтні функції $\varphi(t, x, u)$ (невід'ємні та належать $C^1\left(\mathbb{R}^7\right)$) і таку поведінку всіх наявних параметрів, щоб інтегральноий відхил (2.17) між частинами рівняння (2.1)–(2.5) був скіль завгодно малим. Коефіцієнтні функції будуть мати вигляд (4.24).

Асимптотичні вирази деяких оцінок зверху для норми Δ_1 при великих значеннях β із введенням розбиття інтегралу зіткнень Q на "прибуткову" G (4.9) та "затратну" L (4.10) частини, а саме (4.21), (4.23), (4.25), будуть мати такий самий вигляд, як і в пункті 4.2.1. Також візьмемо позначення для максвеліанів (4.20)

Теорема 4.3. Нехай виконуються умови (4.16), (4.20) та (4.24), а кутова швидкість має вигляд (4.26), тобто

$$\omega = \frac{\omega_0 s}{\beta^k},$$

де $s > 0$ — будь-яка постійна величина, ω_0 — довільний фіксований вектор (інші параметри також довільні і фіксовані). Тоді, якщо наступні функції:

$$\psi, |u|\psi, \frac{\partial\psi}{\partial t}, \frac{\partial\psi}{\partial x}, u\frac{\partial\psi}{\partial x} \, |[\omega_0 \times x]|\psi, \left([\omega_0 \times x], \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \in L_1(\mathbb{R}^7), \qquad (4.38)$$

то визначена у відповідності з (2.17) величина Δ_1 має сенс та існує таке Δ_1', що вірна оцінка зверху (3.49)

$$\Delta_1 \leq \Delta_1'.$$

Причому якщо $k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, то існує кінцева границя

$$L_1 = \lim_{\beta\to+\infty} \Delta_1' = \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \left[\rho \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial\psi}{\partial t} + u\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| du \right.$$
$$\left. + 2\pi^3 d^2 \rho^2 \int\limits_{\mathbb{R}^6} \psi(t,x,u_1)\psi(t,x,u_2)|u_1 - u_2| du_1 du_2 \right]. \qquad (4.39)$$

Доведення. Існування інтегрального відхилу Δ_1 випливає з (2.17), (4.25) и (4.38), причому має місце наступна нерівність

$$\Delta_1 \leq \Delta_1' = \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \left[\int\limits_{\mathbb{R}^6} \left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right.\right.$$
$$\left. + v\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - 2\beta\psi\left[[\omega \times (x - x_0)] \times \omega\right]\right)\right| \widetilde{M} \, dvdu \qquad (4.40)$$
$$\left. + \int\limits_{\mathbb{R}^6} \psi(t,x,u_1)\psi(t,x,u_2) \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[\widetilde{M}_1 L(\widetilde{M}_2) + \widetilde{M}_2 L(\widetilde{M}_1)\right] dvdu_1du_2 \right].$$

В (4.40) була також виконана перестановка порядку інтегрування, законність якої легко обґрунтовується з урахуванням умов Теореми 4.3.

Введемо заміну змінних:

$$\sqrt{\beta}(v - \widetilde{u}) = w;$$
$$v = \frac{w}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u} = \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u + [\omega \times x].$$

Тоді

$$\Delta_1' = \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \left[\rho\pi^{-3/2} \int\limits_{\mathbb{R}^6} \left|\frac{\partial\psi}{\partial t} + \left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u + [\omega \times x]\right)\right.\right.$$

$$\times \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - 2\beta\psi\big[[\omega\times(x-x_0)]\times\omega\big]\right)\Bigg|e^{-w^2}dwdu\Bigg]$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^6} \psi(t,x,u_1)\psi(t,x,u_2) \tag{4.41}$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[\widetilde{M}_1 L(\widetilde{M}_2) + \widetilde{M}_2 L(\widetilde{M}_1)\right] dwdu_1du_2\Bigg].$$

Здійснивши тут ще одну заміну змінних:

$$\sqrt{\beta}(v_1 - \tilde{u}_2) = z;$$
$$v_1 = \frac{z}{\sqrt{\beta}} + \tilde{u}_2 = \frac{z}{\sqrt{\beta}} + u_2 + [\omega\times x]$$

отримаємо:

$$M_1L(M_2) = M(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1, u_1)\frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dze^{-z^2}|\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_1 - \frac{z}{\sqrt{\beta}} - u_2|.$$

Аналогічно

$$M_2L(M_1) = M(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_2, u_2)\frac{d^2\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dze^{-z^2}|\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u_2 - \frac{w}{\sqrt{\beta}} - u_1|.$$

Для спрощення виразу (4.41) введемо позначення (4.32), а саме

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$$

Тоді отримаємо наступні вирази:

$$A(w,u,t,x) = \rho\frac{d^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dze^{-z^2}\left|w\gamma + (u_1-u_2) - z\gamma\right|, \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned} B(w,u,t,x) = {} & \frac{\partial\psi}{\partial x}\left(w\gamma + u + \gamma^2 s[\omega_0\times x]\right) \\ & + 2\psi\gamma s\left\{(w,[\omega_0\times u]) - s\gamma^2[\omega_0\times w][\omega_0\times x]\right\}. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Маючи на увазі (4.42) та (4.43) перепишемо вираз (4.41) в наступному вигляді:

$$\Delta_1' = \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \Bigg[\rho\pi^{-3/2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x} + B(w,u,t,x)\right| e^{-w^2}dwdu$$

$$+2\rho\pi^{-3/2}\int\limits_{\mathbb{R}^6}\psi(t,x,u_1)\psi(t,x,u_2) \tag{4.44}$$

$$\left.\times\int\limits_{\mathbb{R}^3}A(w,u_1,u_2,t,x)e^{-w^2}dwdu_1du_2\right].$$

Підінтегральні функції двох доданків виразу Δ_1' неперервні за змінними t,x,u та β завдяки умовам Теореми 4.3. Отже, інтеграл (4.44) збігається рівномірно відносно змінної γ на будь-якому компакті завдяки умові (4.38) і наявності множника e^{-w^2}. Значить вся величина Δ_1' неперервна по γ і ми можемо перейти до границі при $\gamma\to 0$ ($\beta\to+\infty$). Після інтегрування по змінним z та w приходимо до (4.39). Теорему доведено.

□

Далі, спираючись на отриманий вираз для границі при $\beta\to+\infty$, знайдемо достатні умови для мализни відхилу Δ_1.

Наслідок 4.3. Нехай виконані всі припущення Теореми 4.3. Тоді справедливе (3.71), а саме прямування величини Δ_1 до нуля, якщо функція ψ, визначена у виразі (4.24) має вигляд:

$$\psi(t,x,u)=g(t,x)\left(\frac{P}{\pi}\right)^{3/2}e^{-P(u-u_0)^2}, \tag{4.45}$$

де функція $g(t,x)$ має вигляд фінітного "плато" (див. Означення 3.2), $u_0\in\mathbb{R}^3$ — довільний фіксований вектор, а $P\to+\infty$.

Доведення. Скористаємось граничним виразом (4.39) і підставимо в нього (4.45). Підінтегральний вираз першого доданку прямує до нуля. Завдяки умовам наслідку, інтеграл другого доданку збігається і прямує до нуля. Наслідок доведений. □

4.3. Суперпозиція глобальних максвеліанів з довільною густиною

В даному підрозділі поставимо задачу більш широко. Тепер будуть досліджені континуальні розподіли вигляду (2.15), в яких густина також приймає не фіксовані дискретні значення, а стає довільним параметром, що приймає будь-які значення з $\mathbb{R}^1_+$. Таким чином, побудуємо явні наближені розв'язки у вигляді суперпозиції глобальних максвеліанів з довільною густиною. В якості норм різниці між лівою та правою частинами рівняння (2.1)–(2.5) будуть використані як рівномірно-інтегральний (2.16), так і чисто-інтегральний (2.17) відхили.

Підход до пошуку континуальної функції розподілу вперше запропонований в Підрозділі 4.1.. Тепер розглянемо випадок, коли густина також приймає довільні значення.

Отже, розглянемо функцію розподілу наступного вигляду:

$$f = \int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_0^{+\infty} d\rho\, \varphi(t, x, u, \rho) M(v, u, \rho), \tag{4.46}$$

до якої входять глобальні максвеліани

$$M(v, u, \rho) = \rho \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v-u)^2}, \tag{4.47}$$

де ρ — густина, u — масова швидкість, а обернена температура β — довільна невід'ємна стала.

Передбачається, що коефіцієнтна функція $\varphi(t, x, u, \rho)$ є невід'ємною та належить $C^1\left(\mathbb{R}^4\right)$ по t, x та $C\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1_+\right)$ по u, ρ. Необхідно знайти такі функції $\varphi(t, x, u, \rho)$ і таку поведінку всіх наявних параметрів, щоб рівномірно-інтегральний (2.16) та чисто-інтегральний (2.17) відхили були нескінченно малими.

Введемо нове позначення для коефіцієнтних функцій φ:

$$\psi(t, x, u, \rho) = \varphi(t, x, u, \rho) \cdot \rho, \tag{4.48}$$

тоді функція розподілу буде мати вигляд:

$$f = \int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_0^{+\infty} d\rho\, \psi(t, x, u, \rho) \widetilde{M}(v, u), \tag{4.49}$$

де

$$\widetilde{M}(v,u) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v-u)^2} \tag{4.50}$$

Теорема 4.4. Нехай виконані умови (4.48)–(4.50). Припустимо, що функції: ψ, $|\frac{\partial\psi}{\partial t}|$, $|\frac{\partial\psi}{\partial x}|$ — обмежені по t, x, u та ρ на $\mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^1_+$, а величини

$$\psi,\ |u|\psi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t},\ \frac{\partial\psi}{\partial x},\ u\frac{\partial\psi}{\partial x} \in L_1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1_+) \tag{4.51}$$

по змінним u та ρ рівномірно відносно t, x на $\mathbb{R}^4$.

Тоді величина Δ в (2.16) коректно визначена й існує таке Δ', що виконується нерівність (3.8)

$$\Delta \leq \Delta',$$

причому

$$\lim_{\beta\to+\infty} \Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_{\mathbb{R}^1_+} d\rho \left| \frac{\partial\psi}{\partial t} + u\frac{\partial\psi}{\partial x} \right| \right.$$

$$\left. +2\pi d^2 \int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2 \psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2)|u_1-u_2| \right]. \tag{4.52}$$

Для доведення Теореми 4.4 знову скористаємося Лемою 3.1 (див. Розділ 3), яка дає достатню умову неперервності супремуму спеціального вигляду функції багатьох змінних, взятого по частині змінних.

Доведення. Підставимо вираз (4.49) у рівняння Больцмана (2.1)–(2.5), тоді отримаємо

$$D(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_0^{+\infty} d\rho \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + v\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \widetilde{M}(v,u,\rho). \tag{4.53}$$

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v-v_1,\alpha)|$$

$$\times \left[\int\limits_{\mathbb{R}^3} du_1 \int\limits_0^{+\infty} d\rho_1 \psi(t,x,u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v_1',u_1,\rho_1) \right. \tag{4.54}$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} du_2 \int\limits_0^{+\infty} d\rho_2 \psi(t,x,u_2,\rho_2)\widetilde{M}(v',u_2,\rho_2)$$

$$- \int\limits_{\mathbb{R}^3} du_1 \int\limits_0^{+\infty} d\rho_1 \psi(t,x,u_1)\widetilde{M}(v_1,u_1,\rho_1)$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} du_2 \int\limits_0^{+\infty} d\rho_2 \psi(t,x,u_2,\rho_2)\widetilde{M}(v,u_2,\rho_2)\Bigg].$$

Згідно з (4.53) та (4.54) перепишемо вираз (2.16) як

$$\Delta = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_0^{+\infty} d\rho \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + v\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \widetilde{M}(v,u,\rho)$$

$$- \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v-v_1,\alpha)|$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2 \psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2)$$

$$\left[\widetilde{M}(v_1',u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v',u_2,\rho_2) - \widetilde{M}(v_1,u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v,u_2,\rho_2)\right]\Bigg| dv$$

$$\leq \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_0^{+\infty} d\rho \left| \frac{\partial\psi}{\partial t} + v\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| \widetilde{M}(v,u,\rho)$$

$$+ \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v-v_1,\alpha)|$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2 \psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2)$$

$$\times \left|\widetilde{M}(v_1',u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v',u_2,\rho_2) - \widetilde{M}(v_1,u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v,u_2,\rho_2)\right|\Bigg] dv$$

$$\leq \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_0^{+\infty} d\rho \left| \frac{\partial\psi}{\partial t} + v\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| \widetilde{M}(v,u,\rho)$$

$$+\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha|(v-v_1,\alpha)|$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2 \psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2) \tag{4.55}$$

$$\times\left[\widetilde{M}(v_1',u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v',u_2,\rho_2)+\widetilde{M}(v_1,u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v,u_2,\rho_2)\right]\Bigg]dv.$$

Отже,

$$\Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^6} dvdu \int\limits_0^{+\infty} d\rho \left|\frac{\partial\psi}{\partial t}+v\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|\widetilde{M}(v,u,\rho)$$

$$+\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha|(v-v_1,\alpha)|$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2 \psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2)$$

$$\times\left[\widetilde{M}(v_1',u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v',u_2,\rho_2)+\widetilde{M}(v_1,u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v,u_2,\rho_2)\right]\Bigg]$$

$$= \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_{\mathbb{R}^1_+} d\rho \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv \left|\frac{\partial\psi}{\partial t}+v\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|\widetilde{M}(v,u,\rho)$$

$$+\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2 \psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2)$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^6} dvdv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha|(v-v_1,\alpha)|$$

$$\times\left[\widetilde{M}(v_1',u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v',u_2,\rho_2)+\widetilde{M}(v_1,u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v,u_2,\rho_2)\right]\Bigg].$$

$$\Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_{\mathbb{R}^1_+} d\rho \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv \left|\frac{\partial\psi}{\partial t}+v\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|\widetilde{M}(v,u,\rho)$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2 \psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2) \tag{4.56}$$

$$\left.\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[G(\widetilde{M_1},\widetilde{M_2}) + \widetilde{M_2} L(\widetilde{M_1})\right] dv \right],$$

де, як і раніше, ми ввели розбиття інтегралу зіткнень Q на "прибуткову" G (4.9) та "затратну" L (4.10) частини, а також позначили $\widetilde{M_i} = \widetilde{M}(v,u_i,\rho_i),\ i = 1,2$. В (4.56) була виконана перестановка порядку інтегрування, законність якої обґрунтовується так.

В першому доданку підінтегральна функція неперервна завдяки умовам Теореми 4.4, а

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1_+} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| M(v,u,\rho) du d\rho$$

— збігається рівномірно в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1_+$ (за теоремою Вейєрштрасса).

$$\left| \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + v\frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \cdot \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta(v-u)^2} \right|$$

$$\leq \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta(v-u)^2} \left(\left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right| + |v| \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \right)$$

— інтегроване, тому що виконана умова (4.51).

У другому інтегралі підінтегральна функція неперервна завдяки виконанню умов Теореми 4.4, а внутрішній інтеграл збігається рівномірно відносно u_1, u_2, ρ_1 and ρ_2 за теоремою Вейєрштрасса в силу існування інтегрованої мажоранти. Отже, ми можемо і тут змінити порядок інтегрування.

А оскільки, як відомо [55]:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} Q(f,g) dv = 0,$$

тоді

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} G(\widetilde{M_1},\widetilde{M_2}) dv = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \widetilde{M_1} L(\widetilde{M_2}) dv. \tag{4.57}$$

Згідно з (4.57) вираз (4.56) може бути спрощений та, користуючись властивістю супремума, можемо записати:

$$\Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_{\mathbb{R}^1_+} d\rho \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v-u)^2} \right]$$
$$+ \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2 \, \psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2) \right.$$
$$\left. \times \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[\widetilde{M_1} L(\widetilde{M_2}) + \widetilde{M_2} L(\widetilde{M_1}) \right] dv \right].$$

Якщо введемо заміну змінних

$$\sqrt{\beta}(v-u) = w; \qquad v = \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u,$$

отримаємо

$$\Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left[\pi^{-3/2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_{\mathbb{R}^1_+} d\rho \int\limits_{\mathbb{R}^3} dw \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| e^{-w^2} \right]$$
$$+ \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2 \, \psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2) \right. \tag{4.58}$$
$$\left. \times \int\limits_{\mathbb{R}^3} dw \left[\widetilde{M_1} L(\widetilde{M_2}) + \widetilde{M_2} L(\widetilde{M_1}) \right] \right].$$

Застосуємо Лему 3.1 до кожного із супремумів, що входять в (4.58) (перевірка виконання умов повністю аналогічна проведеній в доведенні Теореми 4.1). Оскільки для кожного зі згаданих супремумів умови Леми 3.1 виконані, вся величина Δ' неперервна по γ в $\mathbb{R}^1_+$. Отже, можна перейти до границі при $\beta \to +\infty$, що рівносильно прямуванню γ до нуля. Для зручності здійснення граничного переходу розглянемо вираз для Δ' до заміни змінних, а саме

$$\Delta' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_{\mathbb{R}^1_+} d\rho \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv \left| \frac{\partial\psi}{\partial t} + v\frac{\partial\psi}{\partial x} \right| \widetilde{M}(v,u,\rho) \right]$$

$$+ \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2\, \psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2) \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[\widetilde{M}_1 L(\widetilde{M}_2) + \widetilde{M}_2 L(\widetilde{M}_1)\right] dv \right].$$

Скористаємось тим, що в сенсі узагальнених функцій, очевидно,

$$\widetilde{M}(v,u,\rho) \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \delta(v-u). \tag{4.59}$$

Таким чином,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial\psi}{\partial t} + v\frac{\partial\psi}{\partial x} \right| \widetilde{M}(v,u,\rho) dv \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial\psi}{\partial t} + v\frac{\partial\psi}{\partial x} \right| \delta(v-u) dv$$

$$\xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \left| \frac{\partial\psi}{\partial t} + u\frac{\partial\psi}{\partial x} \right|,$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \widetilde{M}_1 L(\widetilde{M}_2) dv &\xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \widetilde{M}(v,u_1,\rho_1) d^2\pi |v-u_2| dv \\ &\xrightarrow[\beta\to+\infty]{} d^2\pi|u_1-u_2|, \\ \int\limits_{\mathbb{R}^3} \widetilde{M}_2 L(\widetilde{M}_1) dv &\xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \widetilde{M}(v,u_2,\rho_2) d^2\pi |v-u_1| dv \\ &\xrightarrow[\beta\to+\infty]{} d^2\pi|u_1-u_2|, \end{aligned} \tag{4.60}$$

в силу чого отримуємо (4.52). Теорема доведена.

□

Наслідок 4.4. Нехай виконані всі умови Теореми 4.4. Тоді співвідношення (3.38) справедливе, тобто мализна рівномірно-інтегрального відхилу, якщо функція ψ, визначена у виразі (4.48), має вигляд

$$\psi(t,x,u,\rho) = C(x-ut)\left(\frac{P}{\pi}\right)^{3/2} e^{-P(u-u_0)^2} h(\rho), \tag{4.61}$$

де C — будь-яка гладка, додатня і обмежена разом зі своїми похідними функція, $u_0 \in \mathbb{R}^3$ — довільний фіксований вектор, $h(\rho)$ — неперервна, невід'ємна функція в $L_1(\mathbb{R}^1_+)$ з коренем $\rho = 0$ не нижче 1-го ступеня, а $P \to +\infty$.

Доведення. Скористаємось граничним виразом (4.52) і підставимо в нього (4.61). Підінтегральний вираз першого доданку стає рівним нулю,

$$C'(x-ut)(-u) + uC'(x-ut) = 0.$$

Розглянемо інтеграл, який входить у другий доданок (нехай $\exists M > 0 :$ $|C| \le M$):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} C(x-u_1t)\left(\frac{P}{\pi}\right)^{3/2} e^{-P(u_1-u_0)^2} h(\rho_1) C(x-u_2t)$$
$$\times \left(\frac{P}{\pi}\right)^{3/2} e^{-P(u_2-u_0)^2} h(\rho_2)|u_1-u_2| d\rho_1 d\rho_2$$
$$\le M^2 \left(\frac{P}{\pi}\right)^3 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} h(\rho_1)h(\rho_2) \int\limits_{\mathbb{R}^6} e^{-P(u_1-u_0)^2} e^{-P(u_2-u_0)^2} |u_1-u_2| du_1 du_2 d\rho_1 d\rho_2$$
$$= \begin{bmatrix} \sqrt{P}(u_1-u_0) = w_1; & u_1 = \frac{w_1}{\sqrt{P}} + u_0 \\ \sqrt{P}(u_2-u_0) = w_2; & u_2 = \frac{w_2}{\sqrt{P}} + u_0 \end{bmatrix}$$
$$= M^2 \left(\frac{P}{\pi}\right)^3 \frac{1}{P^3} \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} h(\rho_1)h(\rho_2) \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-{w_2}^2}$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-{w_1}^2} \left| \frac{w_1}{\sqrt{P}} + u_0 - \frac{w_2}{\sqrt{P}} - u_0 \right| dw_1 dw_2 d\rho_1 d\rho_2$$
$$\le \frac{M^2}{\pi^3} \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} h(\rho_1)h(\rho_2) \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-{w_2}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-{w_1}^2} \frac{|w_1|}{\sqrt{P}} dw_1 dw_2 d\rho_1 d\rho_2$$
$$+ \frac{M^2}{\pi^3} \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} h(\rho_1)h(\rho_2) \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-{w_1}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-{w_2}^2} \frac{|w_2|}{\sqrt{P}} dw_2 dw_1 d\rho_1 d\rho_2$$

$$= \frac{M^2}{\pi^3}\left[\pi^{3/2}\frac{2\pi}{\sqrt{P}} + \pi^{3/2}\frac{2\pi}{\sqrt{P}}\right]\int\limits_{\mathbb{R}^1_+} h(\rho_2)\int\limits_{\mathbb{R}^1_+} h(\rho_1)d\rho_1 d\rho_2$$

$$= \frac{4M^2}{\sqrt{P\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}^1_+} h(\rho_2)\int\limits_{\mathbb{R}^1_+} h(\rho_1)d\rho_1 d\rho_2 \xrightarrow[P\to+\infty]{} 0.$$

Тут ми сористалися інтегралом Ейлера-Пуассона та значеннями інтегралів, обчислених раніше. Таким чином, завдяки умовам наслідку, очевидною є збіжність інтегралу, який входить в другий доданок та його прямування до нуля при $P \to +\infty$. Значить, спрямлення виразу (4.52) до нуля доведено. □

Зауваження 4.6. З точки зору фізичного змісту отриманих результатів відмітимо, що Теорема 4.4 також є лише деякою математичною абстракцією. Нерівність $\Delta \le \Delta'$ та знаходження границі у виразі (4.52) служать для забезпечення подальшої довільної мализни норми Δ при відповідних коефіцієнтних функціях та збереженні довільної величини масової швидкості потоку враховуючи низьку температуру газу.

Теорема 4.5. Нехай виконані умови (4.48)–(4.50). Припустимо, що наступні функції:

$$\psi,\ |u|\psi,\ |\frac{\partial\psi}{\partial t}|,\ |\frac{\partial\psi}{\partial x}|,\ u\frac{\partial\psi}{\partial x}\ \in L_1(\mathbb{R}^7\times\mathbb{R}^1_+) \tag{4.62}$$

по змінним t, x, u та ρ.

Тоді інтеграл Δ_1 в (2.17) збігається та існує таке Δ'_1, що виконується нерівність (3.49), а саме

$$\Delta_1 \le \Delta'_1,$$

де

$$\lim_{\beta\to+\infty}\Delta'_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt\int\limits_{\mathbb{R}^3} dx\left[\int\limits_{\mathbb{R}^3} du\int\limits_{\mathbb{R}^1_+} d\rho\left|\frac{\partial\psi}{\partial t} + u\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|\right.$$

$$+2\pi d^2 \int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2 \psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2)|u_1-u_2| \Bigg]. \qquad (4.63)$$

Для доведення Теореми 4.4 знову скористаємося Лемою 3.1, яка була сформульована в Розділі 3. Вона дає достатню умову неперервності супремуму спеціального вигляду функції багатьох змінних, взятого по частині змінних.

Доведення. Враховуючи вирази (4.53) and (4.54), отримані при доведенні Теореми 4.4, перепишимо (2.17) як

$$\Delta_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_0^{+\infty} d\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \widetilde{M}(v,u,\rho)$$

$$- \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v-v_1,\alpha)|$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2 \psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2)$$

$$\times \big[\widetilde{M}(v_1',u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v',u_2,\rho_2) - \widetilde{M}(v_1,u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v,u_2,\rho_2) \big] \Bigg| dv$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_0^{+\infty} d\rho \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \widetilde{M}(v,u,\rho)$$

$$+ \frac{d^2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v-v_1,\alpha)|$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2 \psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2)$$

$$\times \big| \widetilde{M}(v_1',u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v',u_2,\rho_2) - \widetilde{M}(v_1,u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v,u_2,\rho_2) \big| \Bigg] dv$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_0^{+\infty} d\rho \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \widetilde{M}(v,u,\rho)$$

$$+\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v-v_1,\alpha)|$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2 \psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2)$$

$$\times \left[\widetilde{M}(v_1',u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v',u_2,\rho_2)+\widetilde{M}(v_1,u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v,u_2,\rho_2)\right]\Bigg] dv. \tag{4.64}$$

Отже,

$$\Delta_1' = \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^6} dv du \int\limits_0^{+\infty} d\rho \left|\frac{\partial\psi}{\partial t}+v\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| \widetilde{M}(v,u,\rho)$$

$$+\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v-v_1,\alpha)|$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2 \psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2)$$

$$\times \left[\widetilde{M}(v_1',u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v',u_2,\rho_2)+\widetilde{M}(v_1,u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v,u_2,\rho_2)\right]\Bigg]$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_{\mathbb{R}^1_+} d\rho \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv \left|\frac{\partial\psi}{\partial t}+v\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| \widetilde{M}(v,u,\rho)$$

$$+\frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2 \psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2)$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^6} dv dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v-v_1,\alpha)|$$

$$\times \left[\widetilde{M}(v_1',u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v',u_2,\rho_2)+\widetilde{M}(v_1,u_1,\rho_1)\widetilde{M}(v,u_2,\rho_2)\right]\Bigg]$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_{\mathbb{R}^1_+} d\rho \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv \left|\frac{\partial\psi}{\partial t}+v\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| \widetilde{M}(v,u,\rho)$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2 \psi(t,x,u_1,\rho_1)\psi(t,x,u_2,\rho_2)$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[G(\widetilde{M_1}, \widetilde{M_2}) + \widetilde{M_2} L(\widetilde{M_1}) \right] dv \Bigg], \qquad (4.65)$$

де, як і раніше, ми використали позначення (4.9) та (4.10) для частин інтегралу зіткнень. В (4.65), ми також змінили порядок інтегрування (аналогічно в доведенні Теореми 4.1).

Згідно з (4.57) перепишео вираз (4.65) як

$$\Delta_1' = \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_{\mathbb{R}^1_+} d\rho \int\limits_{\mathbb{R}^3} dv \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v-u)^2}$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2 \, \psi(t, x, u_1, \rho_1) \psi(t, x, u_2, \rho_2)$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[\widetilde{M_1} L(\widetilde{M_2}) + \widetilde{M_2} L(\widetilde{M_1}) \right] dv.$$

Якщо ввести позначення

$$\sqrt{\beta}(v - u) = w; \qquad v = \frac{w}{\sqrt{\beta}} + u,$$

можемо записати

$$\Delta_1' = \pi^{-3/2} \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \int\limits_{\mathbb{R}^3} du \int\limits_{\mathbb{R}^1_+} d\rho \int\limits_{\mathbb{R}^3} dw \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left(\frac{w}{\sqrt{\beta}} + u \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| e^{-w^2}$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^1} dt \int\limits_{\mathbb{R}^3} dx \int\limits_{\mathbb{R}^6} du_1 du_2 \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} d\rho_1 d\rho_2 \, \psi(t, x, u_1, \rho_1) \psi(t, x, u_2, \rho_2) \qquad (4.66)$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^3} dw \left[\widetilde{M_1} L(\widetilde{M_2}) + \widetilde{M_2} L(\widetilde{M_1}) \right].$$

Підінтегральні функції в двох доданках виразу Δ_1' неперервні по змінним t, x, u, ρ та β завдяки умовам (4.62). Далі, інтеграл (4.66) збігається рівномірно відносно змінної β на будь-якому компакті завдяки (4.62) знову та наявності множника e^{-w^2}. Отже, значення Δ_1' неперервне по β та можна перейти до границі при $\beta \to +\infty$. Для зручності переходу розглянемо вираз для Δ' до заміни змінних. З (4.59) та (4.60) ми отримуємо (4.63). Теорема доведена.

$\square$

Наслідок 4.5. Нехай виконані всі умови Теореми 4.5. Тоді справедливе співвідношення (3.71), а саме $\Delta_1 \to 0$, якщо коефіцієнтна функція ψ визначена у виразі (4.48) має вигляд

$$\psi(t, x, u, \rho) = g(t, x) \left(\frac{P}{\pi} \right)^{3/2} e^{-P(u-u_0)^2} h(\rho), \tag{4.67}$$

де $g(t, x)$ має вигляд фінітного "плато" (див. Означення 3.2), такого, що міра проекцій множин $suppg(t, x)$ на гіперплощину $t = 0$ прямує до нуля (у випадку, коли g не залежить від t) та

$$u^k mess(suppg)^k \to 0, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{4.68}$$

де G^k — проекція множини $G \subset \mathbb{R}^4$ на гіперплощину $x^k = 0$ ($k = 1, 2, 3$), $u_0 \in \mathbb{R}^3$ — довільний фіксований вектор, $h(\rho)$ — неперервна, невід'ємна функція в $L_1(\mathbb{R}^1_+)$ з коренем $\rho = 0$ не нижче 1-го ступеня, а $P \to +\infty$.

Доведення. Використаємо граничний вираз (4.63) і підставимо в нього (4.67). Підінтегральний вираз першого доданку прямує до нуля. Завдяки умовам наслідку, інтеграл другого доданку збігається і теж прямує до нуля (доведення аналогічне проведеному в Наслідку 4.4). Наслідок доведений. $\square$

4.4. Висновки до розділу

В розділі побудовано новий клас явних наближних розв'язків рівняння Больцмана (2.1)–(2.5), який має вигляд континуальної суперпозиції глобальних (4.1) та локальних максвеліанів ґвинтового типу (4.17). Такі потоки описують стаціонарні рівноважні стани газу, подібні ґвинтам, тобто задають обертання газу як цілого з певною кутовою швидкістю й поступальний рух вздовж осі обертання. Така структура локальних максвеліанів є цікавою і була розглянута в попередньому розділі у випадку асиметричних бімодальних розподілів. Знайдено деякі достатні умови довільної мализни рівномірно-інтегральної (підрозділ 4.2.1.) та інтегральної (підрозділ 4.2.2.) норми різниці між лівою та правою частинами рівняння Больцмана та досліджено їх фізичний зміст. Також побудовані наближені розв’язки у вигляді континуальних розподілів з довільною густиною та знайдені різні граничні випадки, в яких вони мінімізують відповідні норми між частинами рівняння (підрозділ 4.3.).

Основні результати розділу були опубліковані в [24, 25, 83, 84]

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена пошуку явних наближених розв'язків нелінійного інтегро-диференціального рівняння Больцмана. Для моделі твердих куль вперше побудовані такі розв'язки у вигляді асиметричних бімодальних розподілів при деяких припущеннях про зв'язок між кутовими швидкостями та температурами потоків, а також новий клас наближених розв'язків у вигляді континуальних суперпозицій глобальних та локальних максвеліанів. Для рівномірно-інтегрального та чисто-інтегрального відхилів у випадку асиметричних та континуальних розв'язків отримана оцінка зверху й показано, що ця оцінка має скінченну границю при низькій температурі максвеліанів. Отримані також різноманітні достатні умови нескінченної мализни цих границь при спеціальному виборі поведінки параметрів, в тому числі, при великих числах Кнудсена.

Отже, основні результати даної дисертації:

- Побудовані наближені бімодальні розв'язки рівняння Больцмана у випадку, коли максвелівські моди є ґвинтовими з різними ступенями мализни їх кутових швидкостей. Вони описують нерівномірно остигаючий газ, причому обертання обох ґвинтів сповільнюється, хоча і з різною швидкістю. Здобуто деякі достатні умови мінімізації рівномірно-інтегрального відхилу між частинами рівняння;
- Знайдені ґвинтові потоки з різними ступенями мализни їх кутових швидкостей, які мінімізують інтегральний відхил між частинами рівняння;
- Розроблений новий підхід для пошуку явних наближених розв'язків рівняння Больцмана, заснований на припущенні, що масова швидкість глобального максвеліана приймає не фіксовані дискретні значення, а стає довільним параметром, який приймає будь-які значення з $\mathbb{R}^3$. Та-

ким чином, побудовано новий наближений розв'язок у вигляді континуального розподілу, що відрізняється від бімодальних;

- Досліджений континуальний розв'язок з довільною густиною та знайдені відповідні достатні умови мінімізації інтегрального та рівномірно-інтегрального відхилів між частинами рівняння;

- Побудовано новий клас явних наближених розв'язків цього рівняння, який має вигляд континуальної суперпозиції локальних максвеліанів ґвинтового типу. Вони задовольняють дане кінетичне рівняння з якою завгодно мірою точності та означають припущення, що теплова складова швидкостей молекул мала, коли збережено довільне значення масової швидкості потоку.

Результати дисертаційної роботи носять переважно теоретичний характер. Вони мають наукове значення при подальшому вивченні рівняння Больцмана і властивостей його розв'язків. Знайдені наближені розв'язки можуть в подальшому бути застосовані при дослідженні інших моделей взаємодії між молекулами та інших кінетичних рівнянь. Зокрема можуть бути застосовані й у таких галузях, як гідро- та аеродинаміка, метеорологія, океанологія та ін. при побудові і дослідженні математичних моделей різних процесів, пов'язаних із взаємодією тих чи інших потоків часток, зокрема при вивченні еволюції ґвинтових течій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Арсеньев А. А. Лекции о кинетических уравнениях. Москва: Наука, 1992. 214 с.
2. Берд Дж. Молекулярная газовая динамика / пер. с англ. Москва: Мир, 1981. 319 с.
3. Бобылев А. В. О точных решениях уравнения Больцмана // ДАН СССР. 1975. Т. 225, № 6. С. 1296–1299.
4. Бобылев А. В. Точные и приближенные методы в теории нелинейных кинетических уравнений Больцмана и Ландау. Москва: ИПМ АН СССР, 1987. 251 с. (Препринт / АН СССР: ИПМ им М.В.Келдыша, 1987. 322 с.)
5. Боголюбов Н. Н., Петрина Д. Я., Хацет Б. И. Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля // Теорет. и мат. физика. 1969. Т. 1, № 2. С. 251–274.
6. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике // Избранные труды в 3-х томах. Киев: Наукова думка. 1970. Т. 2. С. 101–196.
7. Больцман Л. Лекции по теории газов / пер. с нем. Москва: Гостехиздат, 1956. 554 с.
8. Больцман Л. Избранные труды / пер. с нем. Москва: Наука, 1984. 590 с.
9. Веденяпин В. В. Анизотропные решения нелинейного уравнения Больцмана для максвелловских молекул // ДАН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 338–342.

10. Герасименко В. И., Петрина Д. Я. Существование предела Больцмана-Грэда для бесконечной системы упругих шаров // Теоретическая и математическая физика. 1990. Т. 83, № 1. С. 92–114.

11. Герасименко В. І., Горунович В. В. Рівняння Боголюбова для дискретної моделі одновимірної системи часток // ДАН УРСР. 1991. № 8. С. 31–35.

12. Герасименко В. И. О существовании глобальных решений задачи Коши для уравнений Боголюбова // ДАН УССР. 1991. № 9. С. 41–45.

13. Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей / пер. с англ. Москва: ИЛ, 1961. 929 с.

14. Гордевский В. Д. Приближенное бимодальное решение уравнения Больцмана для твердых сфер // Математическая физика, анализ, геометрия. 1995. Т. 2, № 2. С. 168–176.

15. Гордевский В. Д. Критерий малости невязки для бимодального решения уравнения Больцмана // Математическая физика, анализ, геометрия. 1997. Т. 4, № 1/2. С. 46–58.

16. Гордевський В. Д. Загальний вигляд наближених бімодальних розв'язків рівняння Больцмана типу розбиття одиниці // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. Київ: Ін-т математики НАН України. 1997. Вип. 15. С. 30–39.

17. Гордевський В. Д. Деякі класи наближених бімодальних розв'язків нелінійного рівняння Больцмана // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. Київ: Ін-т математики НАН України. 1997. Вип. 16. С. 54–64.

18. Гордевский В. Д. Приближенное двухпотоковое решение уравнения Больцмана // Теоретическая и математическая физика. 1998. Т. 114, № 1. С. 126–136.

19. Гордевский В. Д. Двухпотоковое распределение с винтовыми модами // Теоретическая и математическая физика. 2001. Т. 126, № 2. С. 283–300.

20. Гордевский В. Д. Взаимодействие вихреобразных потоков газа твердых сфер // Доповіді НАН України. 2002. № 9. С. 7–12.

21. Гордевский В. Д. Вихри в газе из твердых сфер // Теоретическая и математическая физика. 2003. Т. 135, № 2. С. 303–314.

22. Гордевский В. Д. Винтовые потоки с ускорением и уплотнением для модели твердых сфер // Теоретическая и математическая физика. 2009. Т. 161, № 2. С. 278–286.

23. Гордевский В. Д. Приближенные решения уравнения Больцмана в пространстве с весом // Докл. НАН Украины. Серия: Матем., естествознание и техн. науки. 2009. № 11, С. 13–16.

24. Гордевский В. Д., Сазонова Е. С. Континуальный аналог бимодальных распределений // Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 171, № 3. С. 483–492.

25. Гордевський В. Д., Сазонова Е. С. Об одном классе приближенных решений уравнения Больцмана с винтовыми модами // Доповіді НАН України. 2014. № 2. С. 7–12.

26. Гордевський В. Д., Сазонова О. С. Континуальний аналог бімодальних розподілів // Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування : матеріали XIV міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука, 19–21 квітня 2012 р., Київ, 2012. С. 135–136.

27. Гордевский В. Д., Сазонова Е. С. Об одном классе приближенных решений уравнения Больцмана // Современные проблемы математики, механики, информатики : Междунар. школа-конф. ”Тараповские чтения-2013”, 29 сентября — 4 октября 2013 г. : сборник тезисов докладов, Харьков, 2013. С. 93–94.

28. Грэд Г. Кинетическая теория газов // Термодинамика газов. Москва: Машиностроение, 1970. С. 5–109.

29. Грэд Г. Асимптотическая теория уравнения Больцмана I, II // Некоторые вопросы кинетической теории газов. Москва: Мир, 1965. С. 7–129.

30. Додулад О.И., Клосс Ю.Ю., Черемисин Ф.Г. Расчеты структуры ударной волны в смеси газов на основе решения уравнения Больцмана // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2013. Т. 14, № 1. С. 1–17.

31. Додулад О.И., Клосс Ю.Ю., Потапов А. П., Черемисин Ф. Г., Шувалов П. В. Моделирование течений разреженного газа на основе решения кинетического уравнения Больцмана консервативным проекционным методом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, № 6. С. 1008—1024.

32. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов / пер с франц. Москва: ИЛ, 1960. 120 с.

33. Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. Москва: Наука, 1982. 608 с.

34. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. Москва: Наука, 1967. 440 с.

35. Ланфорд О. Э., Гринберг У., Полевчак Я., Цвайфель П. Ф., Эрнст М. Х., Черчиньяни К., Кэфлиш Р. Э., Шпон Г. Неравновес-

ные явления: уравнение Больцмана / пер с англ. Москва: Мир, 1986. 269 с.

36. Маслова Н. Б., Чубенко Р. П. Предельные свойства решений уравнения Больцмана // ДАН СССР. 1972. Т. 202, № 4. С. 800–803.

37. Мацук В. А., Рыков В. А. О методе Чепмена-Энског‌а для смеси газов // ДАН СССР. 1977. Т. 233, № 1. С. 49–51.

38. Мищенко А. В., Петрина Д. Я. О линеаризации и точных решениях одного класса уравнений Больцмана // Теоретическая и математическая физика. 1988. Т. 77, № 1. С. 135–153.

39. Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В. Математические основы классической статистической механики. Київ: Наукова думка, 1985. 262 с.

40. Петрина Д. Я., Мищенко А. В. О точных решениях одного класса уравнений Больцмана // ДАН СССР. 1988. Т. 298, №2. С. 338–342.

41. Петрина Д. Я., Герасименко В. І. Про граничну теорему Больцмана-Греда // ДАН УРСР. Серія А. 1989. № 11. С. 12–16.

42. Петрина Д. Я. Термодинамический предел решений уравнений Боголюбова // Труды мат. ин-та АН СССР. 1989. № 191. С. 192–200.

43. Петрина Д. Я., Герасименко В. И. Математические проблемы статистической механики системы упругих шаров // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 3. С. 135–182.

44. Петрина Д. Я., Петрина К. Д. Існування рівноважних станів систем пружних куль в границі Больцмана-Енскога // Доповіді НАН України. 1996. № 2. С. 30–34.

45. Резибуа П., Де Ленер М. Классическая кинетическая теория жидкостей и газов / пер с франц. Москва: Мир, 1980. 420 с.

46. Сазонова Е. С. Асимметричные бимодальные распределения с винтовыми модами // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях : Международная научная конференция, 17–22 апреля 2011 г. : тезисы докладов. Харьков, 2011. С. 201–202.

47. Сазонова О. С. Взаємодія асиметричних гвинтових потоків // Сучасні проблеми механіки і математики : IV Конференція молодих учених імені академіка Я. С. Підстригача, 24–27 травня 2011 р. : тези доповідей. Львів, 2011. С. 153–154.

48. Сазонова О. С. Асиметричні гвинтові потоки, що мінімізують інтегральний відхил між частинами рівняння Больцмана // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. 2012. № 1030. С. 4–13.

49. Струминский В. В. О некотором обобщении кинетической теории газов // ДАН СССР. 1966. Т. 171, № 3. С. 541–544.

50. Тамм И. Е. О ширине ударных волн большой интенсивности // Труды ФИАН. 1965. Т. 29. С. 239–249. (Выполн. в 1947).

51. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах / пер. с англ. Москва: Мир, 1976. 554 с.

52. Фридлендер О. Г. Локально-максвелловские решения уравнения Больцмана // Прикл. мат. и мех. 1965. Т. 29, Вып. 5. С. 973–977.

53. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов / пер. с англ. Москва: ИЛ, 1960. 510 с.

54. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов / пер. с англ. Москва: Мир, 1973. 245 с.

55. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана / пер. с англ. Москва: Мир, 1978. 495 с.

56. Arkeryd L. On the Boltzmann equation. Part I: existence // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1972. Vol. 45, № 1. P. 1–16.

57. Arkeryd L. On the Boltzmann equation. Part II: the full initial value problem // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1972. Vol. 45, № 1. P. 17–34.

58. Barnsley M., Cornille H. On a class of solutions of the Krook-Wu model of the Boltzmann equation // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21, № 5. P. 1176–1193.

59. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A Model of Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems // Phys. Rev. 1954. Vol. 94, № 3. P. 511–525.

60. Bobylev A. V., Spiga G. Exact and asymptotic stationary solutions of the semicontinuous Boltzmann equation // Appl. Math. Lett. 1996. Vol. 9, № 3. P. 47–52.

61. Bobylev A. V., Cercignani C. Exact Eternal Solutions of the Boltzmann equation // J. Statist. Phys. 2002. Vol. 106, № 5/6. P. 1019–1038.

62. Bobylev A. V., Cercignani C. Self-Similar Solutions of the Boltzmann Equation and Their Applications // J. Statist. Phys. 2002. Vol. 106, № 5/6. P. 1039–1071.

63. Bodineau T., Gallagher I., Saint-Raymond L., Simonella S. One-sided convergence in the Boltzmann-Grad limit // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. Ser. 2018. Vol. 27, № 5. P. 985–1022.

64. Boltzmann L. Weitere Studien uber das Warmegleichgrewicht unter Gasmoleculen. Wien: Acad. Sitzungsber, 1872. Bd. 66. P. 275–370.

65. Borgioli G., Gerasimenko V., Lauro G., Monaco R. Many particles dynamical system formulation for the discrete Enskog gas // Transp. Theory Statist. Phys. 1996. Vol. 25, № 3–5. P. 581–592.

66. Caflish R., Nicolaenko B. Shock profile solutions of the Boltzmann equation // Comm. Math. Phys. 1982. Vol. 86, № 2. P. 161–194.

67. Carleman T. On the theory of the integro-differential Boltzmann equation // Acta Math. 1933. Vol. 60. P. 91–146.

68. Cercignani C., Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya. Many-particle dynamics and kinetic equations. Dortrecht.: Kluver Academic Publisher Group, 1997. 244 p.

69. Cercignani C., Cornille H. Shock waves for a discrete velocity gas mixtures // J. Statist. Phys. 2000. Vol. 99, № 1/2. P. 115–140.

70. Cornille H. Construction of positive exact (2 + 1)-dimensional shock wave solutions for two discrete Boltzmann models // J. Statist. Phys. 1988. Vol. 52, № 3–4. P. 897–949.

71. Cornille H. Shock waves for discrete velocity nonconservative (except mass) models // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. Vol. 32. P. 6479–6501.

72. Deshpande S. M., Narasimha R. The Boltzmann collision integrals for a combination of Maxwellians // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 36, № 3. P. 545–554.

73. Ernst H. M. Exact solutions of the nonlinear Maxwell-Boltzmann equations for Maxwell models // Phys. Lett. 1979. Vol. 69A. P. 390–395.

74. Ernst M. H. Nonlinear Model-Boltzmann Equations and Exact Solutions // Phys. Rep. 1981. Vol. 78, № 1. P. 1–169.

75. Gapyak I. V. The kinetic equations of a hard sphere system with initial correlations // Proc. Inst. Math. NASU. 2014. Vol. 11, № 1. P. 166—177.

76. Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya. On the generalized kinetic equation // Доповіді НАН України. 1997. № 7. С. 7–12.

77. Gerasimenko V. I., Gapyak I. V. Hard sphere dynamics and the Enskog eqation // Kinet. Relat. Mod. 2012. Vol. 5, № 3. P. 459—484.

78. Gordevsky V. D. Trimodal Approximate Solutions of the Non-linear Boltzmann Equation // Math. Meth. Appl. Sci. 1998. Vol. 21. P. 1479–1494.

79. Gordevskyy V. D. Transitional regime between vortical states of a gas // Nonlinear Analysis (NA 3752). 2003. Vol. 53, № 3–4. P. 481–494.

80. Gordevskyy V. D. On the non-stationary Maxwellians // Math. Meth. Appl. Sci. (MMA 455) 2004. Vol. 27, № 2. P. 231–247.

81. Gordevskyy V. D., Andriyasheva N. V. Interaction between ”accelarating-packing” flows in low-temperature gas // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2009. Vol. 5. № 1. P. 38–53.

82. Gordevskyy V. D., Sazonova E. S. Asymmetrical Bimodal Distributions with Screw Modes // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2011. Vol. 7, № 3. P. 212–224.

83. Gordevskyy V. D., Sazonova E. S. Continual approximate solution of the Boltzmann equation with arbitrary density // Matematychni Studii. 2016. Vol. 45, № 2. P. 194–204.

84. Gordevskyy V. D., Sazonova O. S. Continual distribution with screw modes // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. 2016. Т. 84. С. 112–122.

85. Gordevskyy V. D., Sazonova O. S. The Continual approximate solution of the Boltzmann equation with arbitrary density // Dynamical system modeling and stability investigation : XVI International Conference, 29–31 May 2013. : abstracts of conf. reports. Kiev, 2013. P. 157.

86. Gordevskyy V., Sazonova O. Continual distribution with screw modes // Analysis and mathematical physics : International conference, 24–28 June 2013. : book of abstracts. Kharkiv, 2013. P. 24.

87. Gordevskyy V., Sazonova O. General form of the Maxwellian distribution with arbitrary density. Conference of young scientists ”Pidstrygachivsky readings — 2015”, 26–28 May 2015. : abstracts of reports. Lviv, 2015. P. 1–2.

88. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases // Comm. Pure and Appl. Math. 1949. Vol. 2, № 4. P. 331–407.

89. Grad H. Principles of the Kinetic Theory of Gases // Handbuch der Physik. Vol. 12. Berlin: Springer-Verlag, 1958. P. 205–294.

90. Grad H. Singular and nonuniform limits of solutions of the Boltzmann equation // Transport Theory (Bellman R.I. et al. cds). Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 1. P. 269–308.

91. Hauge E. H. The Krook-Wu Conjecture and the Tion Phenomenon // Phys. Lett. 1979. Vol. 74A. P. 183–187.

92. Hauge E. H., Praestgaard E. The Bobylev Approach to the Nonlinear Boltzmann Equation // J. Statist. Phys. 1981. Vol. 24. P. 21–32.

93. Holway L. H. Kinetic theory of shock structure using an ellipsoidal distribution function // Rarefied Gas Dynamics. New York: Academic Press, 1965. Vol. l. P. 193—215.

94. Hosokawa I., Inage S. Local Entropy Balance through the Shock Wave // J. Phys. Soc. Japan. 1986. Vol. 55, № 10. P. 3402–3409.

95. Hosokawa I., Yamamoto K. Nonexistence of Any Exact Bimodal Solution for the Shock Wave Structure at M = infinity // J. Phys. Soc. Japan. 1988. Vol. 57, № 6. P. 1865–1867.

96. Krook M., Wu T. T. Exact Solutions of the Boltzmann Equation // Phys. Fluids. 1977. Vol 20, № 10 (1). P. 1589–1595.

97. Lions P. L. On Boltzmann equation and its applications // Recent advances in Partial Diff. Eqs., Venice 1996. : Proc. Sympos. Appl. Math., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1998. P. 211–236.

98. Maxwell J. C. On the final state of a system of molecules in motion subject to forces of any kind // Nature. 1873. Vol. 8. P. 537–553.

99. Maxwell J. C. The kinetic theory of gases // Nature. 1877. Vol. 16. P. 242–246.

100. Monaco R., Bianchi M., Soares A. J. Steady detonation waves in classical and discrete kinetic theory // Comm. Appl. Nonlinear Anal. 1996. Vol. 3, № 3. P. 1–19.

101. Mott-Smith H. M. The Solution of the Boltzmann Equation for a Shock Wave // Phys. Rev. 1951. Vol. 82, № 6. P. 885–890.

102. Narasimha R., Deshpande S.M. Minimum error solution of the Boltzmann equation for shock structure // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 36, №3. P. 555–570.

103. Pulvirenti M., Simonella S., Trushechkin A. Microscopic solutions of the Boltzmann-Enskog equation in the series representation // Kinet. Relat. Models. 2018. Vol. 11, № 4. P. 911—931.

104. Sakurai A. A note on Mott-Smith's solution of the Boltzmann equation for a shock wave // J. Fluid Mech. 1957. Vol. 3, № 3. P. 255–260.

105. Salwen H., Grosh C., Ziering S. Extension of the Mott-Smith Method for a One-Dimensional Shock Wave // Phys. Fluids. 1964. Vol. 7, № 2. P. 180–189.

106. Sazonova O. S. The Continual approximate solution of the Boltzmann equation // Equilibrium and non-equilibrium statistical mechanics : XVII International Congress on Mathematical Physics, 6–11 August 2012. : abstracts. Aalborg, 2012. P. 26.

107. Sazonova O. Asymmetrical screw flows which minimize the integral remainder between the sides of the Boltzmann equation // Differential Equations and Mathematical Physics : International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, 17–21 September 2012. : abstracts of reports. Lviv, 2012. P. 228–229.

108. Sazonova O. S. About one class of continual approximate solutions. 6th Ya.B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications, 18–20 June 2019 : book of abstracts. Vinnytsia, 2019. P. 65–66.

109. Ukai S. On the existence of global solutions of mixed problem for nonlinear Boltzmann equation // Proc. Japan Acad. 1974. Vol. 50, № 3. P. 179-184.

ДОДАТОК А. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

Публікації у фахових виданнях України

1. Сазонова О. С. Асиметричні гвинтові потоки, що мінімізують інтегральний відхил між частинами рівняння Больцмана // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. 2012. № 1030. С. 4–13.

2. Гордевський В. Д., Сазонова О. С. Об одном классе приближенных решений уравнения Больцмана с винтовыми модами // Доповіді НАН України. 2014. № 2. С. 7–12 (Zentralblatt MATH: Zbl 1313.76093).

3. Gordevskyy V. D., Sazonova E. S. Continual approximate solution of the Boltzmann equation with arbitrary density // Matematychni Studii. 2016. Vol. 45, № 2. P. 194–204 (Zentralblatt MATH: Zbl 1362.35202, MathSciNet: MR3618031).

4. Gordevskyy V. D., Sazonova O. S. Continual distribution with screw modes // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. 2016. Т. 84. P. 112–122.

Публікації у виданнях, які входять до міжнародних наукометричних баз

5. Gordevskyy V. D., Sazonova E. S. Asymmetrical Bimodal Distributions with Screw Modes // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2011. Vol. 7, № 3. P. 212–224 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1266.76046, MathSciNet: MR2918488).

6. Гордевский В. Д., Сазонова Е. С. Континуальный аналог бимодальных распределений // Теоретическая и математическая физика.

2012. Т. 171, № 3. С. 483–492 (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1282.82027, MathSciNet: MR3168728).

Публікації, які засвідчують апробацію дисертації

Публікації у матеріалах міжнародних наукових конференцій:

7. Сазонова Е. С. Асимметричные бимодальные распределения с винтовыми модами // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях : Международная научная конференция, 17–22 апреля 2011 г. : тезисы докладов. Харьков, 2011. С. 201–202.

8. Сазонова О. С. Взаємодія асиметричних гвинтових потоків // Сучасні проблеми механіки і математики : IV Конференція молодих учених імені академіка Я. С. Підстригача, 24–27 травня 2011 р. : тези доповідей. Львів, 2011. С. 153–154.

9. Гордевський В. Д., Сазонова О. С. Континуальний аналог бімодальних розподілів // Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування : матеріали XIV міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука, 19–21 квітня 2012 р., Київ, 2012. С. 135–136.

10. Sazonova O. S. The Continual approximate solution of the Boltzmann equation // Equilibrium and non-equilibrium statistical mechanics : XVII International Congress on Mathematical Physics, 6–11 August 2012. : abstracts. Aalborg, 2012. P. 26.

11. Sazonova O. Asymmetrical screw flows which minimize the integral remainder between the sides of the Boltzmann equation // Differential Equations and Mathematical Physics : International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, 17–21 September 2012. : abstracts of reports. Lviv, 2012. P. 228–229.

12. Gordevskyy V. D., Sazonova O. S. The Continual approximate solution of the Boltzmann equation with arbitrary density // Dynamical system modeling

and stability investigation : XVI International Conference, 29–31 May 2013. : abstracts of conf. reports. Kiev, 2013. P. 157.

13. Gordevskyy V., Sazonova O. Continual distribution with screw modes // Analysis and mathematical physics : International conference, 24–28 June 2013. : book of abstracts. Kharkiv, 2013. P. 24.

14. Гордевский В. Д., Сазонова Е. С. Об одном классе приближенных решений уравнения Больцмана // Современные проблемы математики, механики, информатики : Междунар. школа-конф. ”Тараповские чтения-2013”, 29 сентября — 4 октября 2013 г. : сборник тезисов докладов, Харьков, 2013. С. 93–94.

15. Gordevskyy V., Sazonova O. General form of the Maxwellian distribution with arbitrary density. Conference of young scientists ”Pidstrygachivsky readings — 2015”, 26–28 May 2015. : abstracts of reports. Lviv, 2015. P. 1–2.

16. Sazonova O. S. About one class of continual approximate solutions. 6th Ya.B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications, 18–20 June 2019 : book of abstracts. Vinnytsia, 2019. P. 65–66.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на наступних наукових конференціях та семінарах:

1. Міжнародна наукова конференція ”Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках і інформаційних технологіях”, Харків, 17–22 квітня 2011 (форма участі: доповідь).

2. IV Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача КМУ СПММ–2011, Львів, 24–27 травня 2011 (форма участі: доповідь).

3. Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені М. Кравчука, Київ, 19–21 квітня, 2012 (форма участі: доповідь).

4. XVII International Congress on Mathematical Physics, Aalborg, Denmark, August, 6–11, 2012 (форма участі: доповідь).
5. Міжнародна конференція присвячена 120-річчю Стефана Банаха, Львів, 17–21 вересня 2012 (форма участі: доповідь).
6. International Conference on Fluids And Variational Methods, Leipzig, Germany, January 27 — February 2, 2013 (форма участі: доповідь).
7. XVI Міжнародна конференція ”Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем” (DSMSI-2013), Київ, 29–31 травня 2013 (форма участі: доповідь).
8. International School on Recent Advances in partial differential equations and applications, Milan, Italy, June 17–21, 2013 (форма участі: доповідь).
9. International Conference ”Analysis and mathematical physics”, Kharkiv, June 24 – 28, 2013 (форма участі: доповідь).
10. Міжнародна школа-конференція ”Тараповські читання — 2013”, присвячена 150-річчу кафедри теоретичної та прикладної механіки Харківського наці-онального університету імені В.Н. Каразіна, Харків, 29 сентября – 4 октября 2013 (форма участі: доповідь).
11. Conference of young scientists ”Pidstrygachivsky readings — 2015”, Lviv, May 26–28, 2015 (форма участі: доповідь).
12. 6th Ya.B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications, Vinnytsia, 18–20 June 2019 (форма участі: доповідь).
13. Науковий семінар кафедри фундаментальної математики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (керівник семінару — д.ф.–м.н., доцент О. Л. Ямпольський) 27 серпня 2019 (форма участі: доповідь).