Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Міністерство освіти і науки України
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І.Вєркіна
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Резуненко Олександр Вячеславович

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

ЯКІСНІ ВЛАСТИВОСТІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ, ЩО ПОРОДЖЕНІ НЕЛІНІЙНИМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ З ЗАГАЮВАННЯМ

Спеціальність 01.01.03 – “Математична фізика”
(Фізико-математичні науки)

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
О.В.Резуненко

Харків - 2019

АНОТАЦІЯ

Резуненко О.В. Якісні властивості динамічних систем, що породжені нелінійними диференціальними рівняннями у частинних похідних з загаюванням. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико- математичних наук за спеціальністю 01.01.03 – математична фізика (Фізико-математичні науки). – Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України; Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна Національної академії наук України, Харків, 2019.

У дисертаційній роботі розробляються методи дослідження моделей математичної фізики, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями та системами із загаюванням. Затримка, загаювання природньо, виникає у багатьох ситуаціях, коли звертають увагу на те, що процеси в системі не є миттєвими. Одна із природніх ситуацій - коли загаювання використовується для опису реакцій системи на зміни, що розвиваються з плином часу. Реакції часто пов'язані з різного роду сигналами, які, природньо, мають скінченну швидкість поширення. Вивчаються як диференціальні рівняння та системи у частинних похідних (РЧП), так і звичайні. Один із центральних типів систем в наших дослідженнях - це системи реакції-дифузії в обмежених просторових областях. Ми розробляємо методи, які застосовуються до диференціальних рівнянь із обмеженими загаюваннями різних типів: постійні та залежні від стану, дискретні та розподілені, локальні та нелокальні за просторовими координатами.

Основну зацікавленість викликає якісна поведінка систем. Зазвичай ми поділяємо наші дослідження на дві основні частини. Перша стосується доведення коректної розв'язності в сенсі Ж.Адамара відповідної початково крайової задачі. Далі ми будуємо динамічну систему за розв'язками задачі. Друга частина присвячена асимптотичній поведінці динамічної системи коли час прямує до нескінченності. Зазначимо, що у випадку диференціальних рівнянь у частинних похідних із загаюванням, відповідна динамічна система

є нескінченновимірною як за часовою (як система із загаюванням), так і за просторовою (як РЧП) координатами.

Ми використовуємо та поглиблюємо методи для вивчення стійкості за О.М.Ляпуновим, існування Наближених інерційних многовидів (НІМ), інерційних многовидів із загаюванням (IМЗ) та глобальних атракторів аби ці методи могли бути застосовані для випадків рівнянь із загаюванням. Дослідження належать до широкого напрямку - якісної теорії диференціальних рівнянь, яка розроблялася у роботах А.Пуанкаре, О.М.Ляпунова, Г.Д.Біркгофа, О.О.Ладиженської, С.Фояша, Р.Темама, М.І.Вішика, Дж.Хейла, І.Д.Чуєшова та інших математиків.

Спочатку, ми досліджуємо випадок сталого загаювання (розділ 2) та пропонуємо підхід до побудови Інерційних многовидів із загаюванням для РЧП із загаюванням. IМЗ вперше було збудовано для параболічних рівнянь без загаювання в роботі А. Дебуша та Р. Темама у 1996 році. Ці нескінченновимірні множини використовуються для побудови нових родин Наближених інерційних многовидів. Останні є скінченновимірними многовидами із притягуючими околами. Швидкість притяжіння експоненційна для всіх траєкторій системи. Введені НІМ були у 1987 році С.Фояшем, О.Манлі та Р.Темамом. Важливою особливістю нашого підходу є те, що ми будуємо НІМ, які проходять крізь усі стаціонарні точки. Ми називаємо їх стаціонарними НІМ. Важливим технічним інструментом для побудови як інерційних многовидів із загаюванням, так і наближених інерційних многовидів є функція зсуву-продовження, запропонована в нашій роботі. Ми досліджуємо диференціальні рівняння у частинних похідних як першого так і другого порядку за часом та постійним загаюванням. У конкретному випадку параболічних рівнянь без загаювання будується нескінченна послідовність стаціонарних наближених інерційних многовидів. Послідовність має експоненційний порядок, тобто товщина притягуючих околів цих НІМ зменшується експоненційно із збільшенням вимірності поверхонь. Розроблений підхід до побудови НІМ дає можливість посилити результати про скінченну кількість суттєвих мод для загаюванних

РЧП. Цікаво відзначити, що перші спроби побудувати Інерційні многовиди із загаюванням (до винаходу функції зсуву-продовження) привели до спеціальної початково крайової задачі для розривних розв'язків. Ця постановка задачі є цікавою сама по собі.

Центральна частина наших досліджень присвячена диференціальним рівнянням та системам із *загаюванням, що залежить від стану* (ЗЗС), які досліджуються у розділах 3-6. Важливо підкреслити, що для систем із ЗЗС потрібні нові підходи, оскільки класичні методи, розроблені для випадку сталого загаювання, часто не можуть бути використані. Добре відомо, що нелінійні системи є більш складними, ніж лінійні вже тому, що принцип суперпозиції не виконується. Природньо, що лінійні системи є більш вивченими і для них збудовані більш повні теорії, які зображають різні якісні і кількісні властивості розв'язків. В зв'язку з цим, вивчаючи деякий клас рівнянь (систем), корисно проаналізувати, що вже відомо, або може бути отримано, для лінійних рівнянь цього класу. Важливо, що диференціальні рівняння з зосередженим загаюванням, що залежить від стану, по своїй природі, не можуть бути лінійними. Оскільки лінійна теорія відсутня, треба з самого початку використовувати методи нелінійного аналізу.

Дослідження проводяться як з дискретними, так і з розподіленими ЗЗС. Змішаний випадок також охоплений нашими дослідженнями. Дискретні ЗЗС привносять істотні труднощі в дослідження, оскільки відповідні загаювані елементи не є навіть локально Ліпшицевими на класичному просторі неперервних за часом функцій. Цей факт породив плідне обговорення в літературі і привертає багато уваги протягом багатьох років. Природньо, що перші спроби подолати цю перешкоду були зроблені для звичайних рівнянь із загаюванням. Відмітемо роботи Р. Драйвера (R. Driver), Дж. Малле-Паре (J. Mallet-Paret), Р. Насбаум (R. Nussbaum), Х.-О. Вальтер (H.-O. Walther), Т. Кристін (T. Krisztin), Ф. Хартунг (F. Hartung), Дж. Ву (J. Wu) та інші. Наскільки нам відомо, рівняння із загаюваннями, що залежать від стану, зустрічаються вже у 1806 в роботі С.Д.Пуассона (S.D. Poisson).

По-перше, ми розробляємо підходи до узагальнення цих спроб та застосування їх до випадку РЧП. Результати отримані у різних напрямках: підхід у метричних просторах (липшицеві за часом функції) та підхід із многовидом розв'язків (неперервно диференційовні функції).

В роботі пропонується і альтернативний підхід, який ґрунтується на новій ідеї, яка пов'язана з так званою "ігноруючою умовою" на загаювання, що залежить від стану. Якщо ця умова виконується, відповідна початкова задача стає коректно поставленою на всьому просторі неперервних функцій. "Ігноруюча умова" була запропонована в роботі автора у 2009 році, у 2012 році з'явилася "узагальнена ігноруюча умова". Перевагою останньої є те, що ми можемо охопити випадки, коли на частинах фазового простору «ефект ігнорування» відсутній. Продемонстровано, що ігноруюча умова є зручною та природньою особливістю ЗЗС для широкого кола задач, включаючи типи: автономні та неавтономні, локальні та нелокальні за просторовими координатами, за наявності чи відсутності розподілених та змішаних загаювань. Різні постановки задач та результати викладені в пунктах розділу 3.

Різноманітність використовуємих підходів дозволяє вивчати різні типи розв'язків РЧП із ЗЗС: слабкі (різних типів) та класичні. Досліджено як коректну розв'язність, так і асимптотичну поведінку, включно з існуванням глобальних атракторів. У деяких випадках ми доводимо, що атрактори є скінченновимірними. Останній результат отриманий шляхом застосування нещодавно розробленого І.Д. Чуєшовим та І. Лашєцькою методу квазістійких оцінок.

Нас цікавить така біологічна задача, як вірусна динаміка всередині організму. Ця тематика має давню історію і їй присвячена низка робіт та монографій. Десятиліттями дослідники намагаються запропонувати математичні моделі для опису істотних властивостей дуже складної біологічної ситуації. Нелінійна взаємодія сприйнятливих клітин організму, вірусних частинок та різних реакцій імунної системи робить завдання нетривіальним.

Ефекти загаювання закладені в біологічній постановці проблеми. Основний - існує затримка між моментом часу, коли вірусна частинка контактує / потрапляє всередину сприйнятливої клітини і клітина починає виробляти нові віріони. Немає підстав сподіватися, що ця затримка є постійною, вона природньо є залежною від стану. Ми пропонуємо нелінійні моделі вірусної динаміки в організмі. Підходи, які ми розробляємо для загальних систем зі ЗЗС, зараз використовуються для вірусних моделей. Починаємо з випадка функціональної відповіді Д'Анжеліса-Беддінгтона і продовжуємо з більш загальним класом нелінійностей. Ми адаптуємо класичний метод стійкості, заснований на функціоналах О.М.Ляпунова до випадку вірусних моделей із ЗЗС. Спочатку ми тестуємо запропонований підхід на системах звичайних диференціальних рівнянь (розділ 4), а потім застосовуємо його до дифузійних вірусних моделей із ЗЗС (розділ 5). Ми знаходимо умови для локальної стійкості за О.М.Ляпуновим стаціонарних розв'язків (здорового та хронічного режимів). Наш підхід дозволяє системі мати одночасно декілька стаціонарних розв'язків. Зв'язуючи ці дослідження з результатами розділу 3, ми застосовуємо як підхід метричних просторів, так і метод, що базується на ігноруючій умові для ЗЗС.

Ми досліджуємо метод перетворень часу, який був запропонований Х.Брунером та С.Масетом у 2009. В нашій роботі (розділ 6), цей метод є поглиблений та застосований до систем з однією динамічною залежністю загаювання від стану. Останнє означає, що ЗЗС регулюється додатковим диференціальним рівнянням. Метод дозволяє перетворити систему рівнянь із ЗЗС в систему диференціальних та алгебраїчних рівнянь із постійним загаюванням. Поняття еквівалентних часів пропонується та використовується в нашій роботі для зв'язку асимптотичної поведінки початкової задачі та задачі після перетворення часу.

Усі основні результати даються з повним підтвердженням. Отримані результати носять теоретичний характер зі зв'язком із прикладними задачами. Результати роботи поглиблюють наші знання про якісну поведінку розв'язків функціонально диференціальних рівнянь та систем різного типу. Результати та методи дисертації можуть бути використані в різних областях математики, таких як математична фізика, теорія звичайних, частинних та функціонально диференціальних рівнянь, тощо.

Ключові слова: атрактор, загаювання, що залежить від стану, ігноруюча умова, наближений інерційний многовид, система реакції-дифузії, вірусна модель.

ABSTRACT

Oleksandr V. Rezunenko. Qualitative properties of dynamical systems generated by nonlinear delay partial differential equations. – Qualification scientific paper, manuscript.

Thesis for a Doctoral Degree in Physics and Mathematics: Speciality 01.01.03 – Mathematical Physics (Physics and Mathematics). – V. N. Karazin Kharkiv National University, the Ministry of Education and Science of Ukraine; B.I.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2019.

In this thesis, we develop methods to study models of mathematical physics which are described by nonlinear delay differential equations and systems. Delay naturally appears in many situations when ones pays attention that, frequently, processes in a system are not instant. One of natural situations is when a delay is used to describe reactions of the system on changes which develop over time. Reactions are frequently connected with signals which naturally have finite speed of propagation. Both partial and ordinary differential equations and systems are studied. One of central types of systems is the reaction-diffusion ones in bounded domains. We develop methods which are applied to differential equations with bounded delays of different types: constant and state-dependent, discrete and distributed, local and nonlocal in space coordinates.

Main interest is in the qualitative behaviour of systems. We usually split our study on two main parts. The first one deals with the proof of the well-posedness in the sense of J.Hadamard of the corresponding initial boundary-value problem. Next we construct a dynamical system governed by the solutions. The second part is devoted to the long-time asymptotic behaviour of the dynamical system. We mention that in case of delay partial differential equations, the corresponding dynamical system is infinite-dimensional in both time (as delay system) and space (as PDEs) coordinates.

We develop methods to deep the study of Lyapunov stability, existence of Approximate inertial manifolds (AIM), Inertial manifolds with delay (IMD) and global

attractors. Investigations belong to the qualitative theory of differential equations, developed by A. Poincare, O.M. Lyapunov, G.D.Birkhoff, O.O. Ladyzhenskaya, C. Foias, R. Temam, M.I. Vishik, J. Hale, I.D. Chueshov and others.

We start with the constant delay case (chapter 2) and propose an approach to construct Inertial manifolds with delay for delay PDEs. IMDs were introduced by A. Debussche and R. Temam in 1996 for parabolic equations without delay. These infinite-dimensional sets are used to built new families of Approximate inertial manifolds (AIM) which are finite-dimensional manifolds with attracting neighbourhoods. The speed of attraction is exponential for all trajectories of the system. The notion of AIM was proposed by C. Foias, O. Manley and R. Temam in 1987. An important feature of our approach is that we could construct AIMs which contain all the stationary solutions. We call them Stationary AIMs. An important technical tool for construction both Inertial manifolds with delay and Approximate inertial manifolds is the shift-continuation function proposed in the thesis. In chapter 2 we investigate both the first and the second-order in time partial differential equations with constant delay. In the particular case of parabolic equations without delay, an infinite sequence of steady approximate inertial manifolds is constructed. The sequence is of the exponential order, that is, the thickness of the attracting neighbourhoods of the AIMs decreases exponentially with increasing the dimension of the surfaces.

The developed approach of construction of AIMs gives the possibility to strengthen results on finite number of essential modes for delay PDEs.

It is interesting to mention that initial attempts to construct Inertial manifolds with delay (before the introduction of the shift-continuation function) lead to an initial boundary value problem for discontinuous solutions. The problem is interesting by its own.

The central part of our investigations is devoted to *state-dependent delay* differential equations (chapters 3-6). It is important to emphasize that state-dependent delay (SDD) systems need new approaches since classical methods, developed for constant delay situations, in general, cannot be used. It is well known that nonlinear systems are more complex than linear ones because the superposition principle is not fulfilled. Naturally, linear systems are more studied and more complete theories are constructed for them to represent different qualitative and quantitative properties of solutions. In this regard, studying some class of equations (systems), it is useful to analyse what is already known, or can be obtained, for linear equations of this class. Importantly, differential equations with concentrated SDD cannot be linear, by its nature. Since no linear theory exists, methods of nonlinear analysis should be used from the very beginning.

We deal with both discrete and distributed SDDs. The mixed case is also covered by our study. Discrete SDDs bring essential difficulties in the study since the corresponding delay terms are not even locally Lipschitz on the classical space of continuous in time functions. This fact gave birth to fruitful discussion in the literature and attracts much attention for many years. Naturally, first attempts to overcome this obstacle were done for ordinary delay equations. We notice works by R. Driver, J. Mallet-Paret, R. Nussbaum, H.-O. Walther, T. Krisztin, F. Hartung, J. Wu and others. As far as we know, equations with SDD appeared in 1806 in an article by S.D. Poisson.

We pay attention to develop approaches to generalise the attempts and adopt them for PDE case. The results are obtained in different directions: metric space approach (Lipschitz in time functions) and solution manifolds approach (C^1 functions).

An alternative approach is based on a new idea which is connected to the so-called 'ignoring condition' on the state-dependent delay. In case this condition holds, the corresponding initial-value problem becomes well-posed on the whole space of continuous in time functions. The 'ignoring condition' was proposed in the author's article in 2009, in 2012 the 'generalised ignoring condition' appeared. The advantage of the last one is that we could cover cases when on parts of the phase space the 'ignoring effect' is absent. Ignoring conditions have been demonstrated to be a convenient and natural feature of the SDD for a wide range of tasks, including types of problems: autonomous and non-autonomous, local and non-local in space coordinates, in the presence or absence of distributed and mixed delays. Different formulations of the problem and results are described in different sections of chapter 3.

The variety of used approaches allows to study different types of solutions for delay PDEs with SDDs: mild, weak, classical. Both well-posedness and long-time asymptotic behaviour, including the existence of global attractors, are investigated. In some cases we prove that attractors are finite-dimensional. The last result is obtained by applying the recently developed by I. Chueshov and I. Lasiecka the method of quasi-stable estimates.

We are interested in such a biological problem as viral in-host dynamics one. This field has a long history and a number of papers and monographs are devoted to the subject. For decades researchers try to propose mathematical models to describe essential properties of the very complex biological situation. The nonlinear interplay between susceptible host cells, viral particles and different reactions of the immune system makes the task nontrivial. The delay effects are incorporated into the biological formulation of the problem. The main one - there is a time (delay) between a virus particle contacts/ enters the susceptible cell and the cell starts to produce new virions. There are no reasons to hope that this delay is constant, it is naturally state-dependent. We develop nonlinear models of viral in-host dynamics and propose the ones with SDDs. Approaches which we develop for general SDD systems, are now used for viral models. We start with the case of DeAngelis-Beddington functional response and continue with a more general class of nonlinearities. We adopt the classical stability method based on Lyapunov functionals to the SDD case of viral models. First we test the proposed approach on systems of ordinary differential equations (chapter 4) and after apply it to the diffusion viral models with SDDs (chapter 5). We find conditions for local Lyapunov stability of stationary solutions (healthy and chronic regimes). Our approach is general enough and allows the system to have multiple stationary solutions. Connecting the study to the results of chapter 3, we use both the metric space approach and the one based on the ignoring condition.

We study the method of time transformations proposed by H. Brunner and S. Maset in 2009. In our work (chapter 6) the method was deepen and applied to systems with one dynamical state-dependent delay. The last means that the SDD is governed by an additional differential equation. The method allows to convert a system of SDD equations to a system of differential and algebraic equations with constant delay. The notion of equivalent times is proposed and used in our work to connect asymptotic behaviour of the initial system and the one after the time transformation.

All basic results are given with complete proofs. Obtained results are of theoretical character with connections to applied problems. Results of the thesis deepen our knowledge on qualitative behaviour of solutions to functional differential equations and systems of different types. Results and methods of the thesis can be used in various areas of mathematics such as mathematical physics, theory of ordinary, partial and functional differential equations, etc.

Key words: approximate inertial manifold, attractor, ignoring condition, reaction-diffusion system, state-dependent delay, viral in-host model.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації у виданнях, які входять до міжнародних наукометричних баз

1. Rezounenko A.V. Inertial manifolds with delay for retarded semilinear parabolic equations // Discr. Contin. Dynamical Systems. 2000. Vol.6. P.829-840. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH, MathSciNet: MR1788255).

2. Rezounenko A.V. On boundary value problem for a class of retarded nonlinear partial differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2001. Vol. 254. N.2, P.515-523. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH, MathSciNet: MR1805521).

3. Rezounenko A.V. Steady approximate inertial manifolds of exponential order for semilinear parabolic equations // Differential and Integral Equations. 2002. Vol. 15, No.11. P.1345-1356. (Zentralblatt MATH: Zbl 1161.35427, MathSciNet: MR1920691).

4. Rezounenko A.V. A sufficient condition for the existence of approximate inertial manifolds containing the global attractor // C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I. 2002. 334. P.1015-1020. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH, MathSciNet: MR1913727).

5. Rezounenko A.V. Inertial manifolds for retarded second order in time evolution equations // Nonlinear Analysis. 2002. Vol.51, No.6. P. 1045-1054. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1023.35087, MathSciNet: MR1926084).

6. Rezounenko A.V. Approximate inertial manifolds for retarded semilinear parabolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. 282, No.2, P. 614-628. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1039.35133, MathSciNet: MR1989676).

7. Rezounenko A.V. Investigations of retarded PDEs of second order in time using the method of Inertial manifolds with delay // Annales de l'Institut Fourier. 2004. Vol.54. No.5. P.1547-1564. (Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1080.35168, MathSciNet: MR2127857).

8. Rezounenko A.V., Wu J. A non-local PDE model for population dynamics with state-selective delay: local theory and global attractors //Journal of Computational and Applied Mathematics. 2006. Vol.190(1-2). P.99-113. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1082.92039, MathSciNet: MR2209496).

9. Rezounenko A.V. Partial differential equations with discrete and distributed state-dependent delays // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. Vol.326, No.2. P.1031-1045. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1178.35370 MathSciNet: MR2280961).

10. Rezounenko A.V. Stability of positive solutions of local partial differential equations with a nonlinear integral delay term // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. Proc. 8'th Coll. Qualitative Theory of Diff. Equ.. 2008. No.17. P.1-7. (Zentralblatt MATH: Zbl 1208.35160, MathSciNet: MR2509175).

11. Rezounenko A.V. On a class of P.D.E.s with nonlinear distributed in space and time state-dependent delay terms // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2008. Vol. 31, No.13. P.1569-1585. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1148.35095, MathSciNet: MR2437804).

12. Rezounenko A.V. Differential equations with discrete state-dependent delay: uniqueness and well-posedness in the space of continuous functions// Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods and Applications. 2009. Vol.70, No.11. P.3978-3986. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1163.35494, MathSciNet: MR2515314).

13. Rezounenko A.V. Non-linear partial differential equations with discrete state-dependent delays in a metric space // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2010. Vol.73, No.6. P.1707-1714. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1194.35488, MathSciNet: MR2661353).

14. Rezounenko A.V. Non-local PDEs with a state-dependent delay term presented by Stieltjes integral // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (Comptes Rendus Mathematique). 2011. Vol.349, No.3-4, 179-183. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1213.35236, MathSciNet: MR2769904).

15. Rezounenko A.V. A condition on delay for differential equations with discrete state-dependent delay // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2012. Vol.385. No.1. P.506-516. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1242.34136, MathSciNet: MR2834276).

16. Rezounenko A.V. Local Properties of Solutions to Non-Autonomous Parabolic PDEs with State-Dependent Delays // Journal of Abstract Differential Equations and Applications. 2012. Vol. 2, No. 2. P.56-71. (Zentralblatt MATH: Zbl 1330.35493, MathSciNet: MR3010014).

17. Rezounenko A.V., Zagalak P. Non-local PDEs with discrete state-dependent delays: well-posedness in a metric space // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A. 2013. Vol.33, No.2. P.819-835. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1302.35389, MathSciNet: MR2975136).

18. Rezounenko A.V. On time transformations for differential equations with state-dependent delay // Central European Journal of Mathematics. (Open Mathematics). 2014. Vol.12, No.2. P.298-307. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1306.34109, MathSciNet: MR3130684).

19. Chueshov I., Rezounenko A. Dynamics of second order in time evolution equations with state-dependent delay // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2015. Vol.123–124. P.126-149. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1322.35155, MathSciNet: MR3353798).

20. Chueshov I., Rezounenko A. Finite-dimensional global attractors for parabolic nonlinear equations with state-dependent delay // Commun. Pure Appl. Anal. 2015. Vol.14, No.5. P.1685–1704. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1325.35253, MathSciNet: MR3359540).

21. Krisztin T., Rezounenko A. Parabolic partial differential equations with discrete state-dependent delay: Classical solutions and solution manifold // Journal of Differential Equations. 2016. Vol.260, No.5. P.4454–4472. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1334.35374, MathSciNet: MR3437594).

22. Rezounenko A. Continuous solutions to a viral infection model with general incidence rate, discrete state-dependent delay, CTL and antibody immune re-

sponses // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2016. No. 79. P.1–15. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1389.93130, MathSciNet: MR3547455).

23. Rezounenko A. Stability of a viral infection model with state-dependent delay, CTL and antibody immune responses // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B. 2017. Vol.22, No.4. P.1547-1563. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1359.93209, MathSciNet: MR3639177).

24. Rezounenko A. Viral infection model with diffusion and state-dependent delay: Stability of classical solutions // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B. 2018. Vol.23, No.3. P.1091-1105. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1396.92085, MathSciNet: MR3810110).

Публікації, які засвідчують апробацію дисертації

Публікації у матеріалах міжнародних наукових конференцій:

25. Rezunenko A.V. Study of partial differential equations with state-dependent delay// 77th GAMM Annual Meeting 2006: Proceedings of conference, Technical University of Berlin, March 27-31. 2006: Book of Abstracts. P. 90.

26. Rezounenko A. Investigations of partial differential equations with discrete and distributed state-dependent delays // ICMP09 - XVI International Congress on Mathematical Physics: Proceedings of congress, August 3–8, 2009: Abstracts. Prague, Czech Republic. P. 62.

27. Rezounenko A.V. Some approaches to investigations of partial differential equations with state-dependent delays // Ukrainian mathematical congress - 2009, Dedicated to the Centennial of N.N. Bogoliubov, August 27-29, 2009: Abstracts. Kyiv, Ukraine. http://www.imath.kiev.ua/ congress2009 .

28. Rezounenko A.V. Study of well-posedness and qualitative properties of solutions to parabolic partial differential equations with state-dependent delays // The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications: Proceedings of conference, May 25-28, 2010: Book of Abstracts. Dresden, Germany., P. 51.

29. Rezounenko A.V. Some properties of solutions to parabolic partial differential equations with state-dependent delays // The 9th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations: Proceedings of conference, Szeged, Hungary, June 28-July 1, 2011. P. 44.

30. Резуненко О.В. Властивості розв'язків параболічних рівнянь із запізненням, що залежить від стану // Динамічні системи та їх застосування: матеріали конференції, 16-18 травня 2012 р., м. Київ. Тези доповідей, С. 36.

31. Rezounenko A.V. Well-posedness of parabolic partial differential equations with state-dependent delays in different spaces // Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем (DSMSI-2013): матеріали XVI Міжнародної конференції, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, 29-31 травня 2013, Київ, С.71.

32. Rezounenko A. Reaction diffusion systems with different types of delays // The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems Differential Equations and Applications, July 7 - July 11, 2014, Madrid, Spain; Special Session 24: "Qualitative Analysis of Reaction Diffusion Systems": Proceedings of conference. P. 111.

33. Rezounenko A. Local and asymptotic properties of solutions to parabolic partial differential equations with state-dependent delays // The 10th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations: Proceedings of conference, July 1-4, 2015, Bolyai Institute, University of Szeged, Hungary: Abstracts. P. 54.

34. Rezounenko A. Some qualitative properties of solutions to parabolic partial differential equations with state-dependent delays // Differential equations and control theory, dedicated to the 75th anniversary of professor V.I.Korobov: Proceedings of conference, September 26-28, 2016, Kharkiv, Ukraine: Book of abstracts. P. 11.

35. Rezounenko A. Viral infection model with diffusion and state-dependent delay: a case of logistic growth // Equadiff 2017: Proceedings of conference, July 24-28, 2017. Bratislava, Slovakia. P. 53-60. (Web of Science).

36. Rezounenko A. Partial differential equations with state-dependent delays: different types of solutions // VI International Conference "Analysis and mathe-

matical physics" dedicated to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory: Proceedings of conference, Kharkiv, Ukraine, June 18-22, 2018. P. 28-29.

37. Rezounenko A. Stability Properties of Solutions to Nonlinear PDEs and ODEs with State-Dependent Delays // The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications: Proceedings of conference, July 5 – July 9, 2018, Taipei, Taiwan. P. 185.

38. Rezounenko A. Well-posedness and asymptotic properties of solutions to nonlinear PDEs and ODEs in the presence of state-dependent delay // The IFIP TC 7 Conference on System Modelling and Optimization: Proceedings of conference, July 23–27, 2018, Universitat Duisburg-Essen, Essen. Invited talk on the mini-symposium 06: 'Honoring the work of Igor Chueshov'. P. 28.

39. Rezounenko A. Solutions to nonlinear systems of reaction-diffusion equations /ODEs with delay // The 3rd international scientific conference "Differential Equations and Control Theory" (DECT-2018): Proceedings of conference, V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine, 25-27 September 2018. P. 41.

Зміст

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. У наш час відбувається інтенсивний розвиток якісних методів дослідження нескінченновимірних систем. Велика кількість складних фізичних, хімічних, біологічних процесів, які змінюються з часом, вивчаються за допомогою відповідних математичних моделей. Системи, що описуються за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних та функціонально-диференціальних рівнянь, традиційно є відправною точкою для побудови нескінченновимірних динамічних систем. Слово "динамічна", в широкому розумінні, віддзеркалює присутність відокремленої координати - часу та підкреслює зацікавленість у вивченні процесу якісних змін у системі з плином часу. При цьому, в якості фазового простору (простору станів - простору початкових даних) можуть виступати різноманітні множини, традиційно - банахові, метричні простори, многовиди. Задача вибору зручної множини (простору) в якості фазового простору для кожної конкретної системи, є однією з основних задач, що виникають на самому початку досліджень якісної поведінки систем (О.О.Ладиженська [120]). Це питання нерозривно пов'язано з вибором типу розв'язку, який буде вивчатися та, як наслідок, впливає на вибір методів дослідження. Дослідження рівнянь, в яких одночасно присутні як члени, що відображають ефекти загаювання (пам'ять), так і частинні похідні, нелокальні просторові ефекти, належать до сучасної області математики, яка розвивається на основі методів математичної фізики, теорії диференціальних рівнянь різних типів та сучасного функціонального аналізу.

Про важливість вивчення рівнянь із загаюванням, наприклад, відмічає Я.Куанг у вступі до своєї книги [118]: "...так багато процесів, природніх та штучних, в біології, медицині, хімії, інженерії, економіці і т.і. включають загаювання, подобається це чи ні, але загаювання зустрічається так часто, майже в кожній ситуації, що ігнорувати його означає ігнорувати реальність."

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконувалась в рамках досліджень кафедри математичного аналізу та кафедри фундаментальної математики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна у відповідності до держбюджетних НДР: "Аналітичні методи в теорії диференціальних рівнянь та теорії керування" (№ держ. реєстрації 0100U003350, здобувач - виконавець), "Аналітичні та алгебраїчні методи в теорії диференціальних рівнянь та теорії керування" (№ держ. реєстрації 0103U004226, здобувач - виконавець), "Асимптотичні та алгебраїчні методи в теорії диференціальних рівнянь та теорії керування" (№ держ. реєстрації 0106U001561, здобувач - виконавець), "Аналітичні методи в якісній теорії диференціальних рівнянь та теорії керування" (№ держ. реєстрації 0109U001456, здобувач - виконавець), "Аналітичні методи розв'язання якісних задач теорії керування та теорії функціонально-диференціальних рівнянь" (№ держ. реєстрації 0111U010364, здобувач - виконавець), "Дослідження якісної поведінки динамічних систем різної природи" (№ держ. реєстрації 0116U000823, здобувач - виконавець), "Оптимальне керування, стійкість і стабілізація динамічних систем складної природи" (№ держ. реєстрації 0119U002530, здобувач - виконавець).

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є побудова динамічних систем та дослідження їх асимптотичних властивостей для еволюційних задач математичної фізики та біології, які описуються диференціальними рівняннями із загаюваннями різної природи.

Об'єктом дослідження є нелінійні параболічні та гіперболічні рівняння у частинних похідних, а також звичайні диференціальні рівняння із загаюваннями різних типів.

Предметом дослідження цієї роботи є умови побудови та властивості нескінченновимірних динамічних систем, що виникають за розв'язками (нелінійних) систем диференціальних рівнянь із загаюваннями. Така постановка задачі вже означає нескінченновимірність динамічної системи за часовою змінною. Одночасно з цим, системи можуть бути як скінченновимірними так і нескінченновимірними за просторовою координатою, тобто, бути системами звичайних диференціальних рівнянь або системами рівнянь у частинних похідних.

Основні завдання дослідження:

1. Для широкого класу систем параболічних та гіперболічних рівнянь зі сталим розподіленим загаюванням побудувати Інерційний многовид із загаюванням (ІМЗ) без обмежень на спектр лінійної частини системи та для довільного загаювання (загаювання може бути великим або малим).

2. Знайти співвідношення параметрів системи (величина загаювання, інтервал побудови ІМЗ, вимірність проектора) за якими система має скінченне число істотних мод.

3. Для параболічних рівнянь без загаювання побудувати нові родини наближених інерційних многовидів експоненційного типу. Кожний з многовидів має проходити крізь всі стаціонарні точки динамічної системи.

4. Для параболічних рівнянь зі сталим розподіленим загаюванням для довільно малої товщини притягуючого околу побудувати наближені інерційні многовиди, кожен з яких проходить крізь всі стаціонарні точки динамічної системи.

5. Для систем параболічних рівнянь із загаюванням, що залежить від стану, запропонувати різні фазові простори, пов'язані з властивостями систем, в яких початково-крайові задачі є коректно розв'язними за Ж. Адамаром. Розвинути методи дослідження асимптотичної поведінки побудованих систем.

6. Для класичних розв'язків параболічних рівнянь із загаюванням, що залежить від стану, побудувати та дослідити Многовид розв'язків.

7. Розвинути підхід до вивчення моделей вірусних захворювань із урахуванням ефектів загаювання (пам'яті), що залежить від стану, а також відповідей імунної системи. Довести коректну розв'язність та узагальнити метод функцій О.М. Ляпунова для таких систем.

8. Сформулювати та дослідити нові моделі вірусних захворювань із урахуванням ефектів загаювання (пам'яті), що залежить від стану, а також неоднорідностей органу, що заражений.

Методи дослідження. В дисертації для розв'язання поставлених задач використані наступні основні теоретичні методи дослідження: 1. Методи інерційних та наближених інерційних многовидів. 2. Методи теорії сильно-неперервних півгруп у банахових просторах. 3. Методи дослідження звичайних диференціальних рівнянь із загаюванням. 4. Теорія стійкості О.М.Ляпунова. 5. Метод компактності для рівнянь у частинних похідних. 6. Метод перетворення часу для диференціальних рівнянь із загаюванням, що залежить від стану. 7. Методи дослідження асимптотичної поведінки нескінченновимірних дисипативних динамічних систем.

Наукова новизна отриманих результатів.

Всі основні результати є новими. Детальніше, в роботі вперше:

1. Збудовано Інерційний многовид із загаюванням, для параболічних та гіперболічних рівнянь зі сталим загаюванням.

2. Збудована родина наближених інерційних многовидів, які проходять крізь всі стаціонарні точки динамічної системи, що збудована за розв'язками параболічних рівнянь зі сталим загаюванням.

3. Збудовані Інерційний многовид із загаюванням та родина наближених інерційних многовидів, для рівнянь у частинних похідних другого порядку за часом зі сталим загаюванням.

4. Запропонована так звана "ігноруюча умова" на зосереджене загаювання, що залежить від стану, за якої початково-крайова задача для параболічних рівнянь є коректно розв'язною на всьому просторі неперервних функцій. Ця умова є новою навіть для звичайних диференціальних рівнянь із загаюванням, що залежить від стану.

5. Запропонована "узагальнена ігноруюча умова" на зосереджене загаювання, що залежить від стану, за якої початково-крайова задача для параболічних рівнянь є коректно розв'язною на всьому просторі неперервних функцій.

6. Запропоновані та обгрунтовані умови для коректної розв'язності в просторі неперервних вектор-функцій параболічних рівнянь зі змішаними типами загаювання, що залежать від стану.

7. Запропонована та досліджена неавтономна ігноруюча умова для неавтономних нелінійних диференціальних рівнянь.

8. Запропоновані нові постановки задач в метричних нелінійних просторах, в яких коректно розв'язні параболічні рівняння із зосередженими загаюваннями, що залежать від стану.

9. Знайдені умови існування глобальних компактних атракторів для параболічних рівнянь із різними типами загаювань (зосереджені, розподілені, змішані), що залежать від стану.

10. Вперше знайдені умови скінченновимірності глобальних атракторів для рівнянь у частинних похідних із загаюваннями, що залежать від стану.

11. Отримані результати по коректній розв'язності систем, що описують динаміку вірусних захворювань з урахуванням відповідей імунної системи. Системи мають біологічно вмотивовані загаювання, що залежать від стану. Досліджена стійкість стаціонарних (хронічних та здорових) станів системи.

12. Отримані результати по коректній розв'язності та стійкості систем, що описують динаміку вірусних захворювань з урахуванням просторових неоднорідностей органів, що інфіковані.

13. Запропоноване поняття еквівалентності часів у методі трансформації часу.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Разроблені в дисертації математичні методи дослідження широких класів диференціальних рівнянь можуть бути використані для аналізу цілої низки задач математичної фізики та біології, перш за все які пов'язані з процесами реакції-дифузії в обмежених областях. Зокрема, при дослідженні динаміки вірусних захворювань, стійкості стаціонарних (хронічних) станів, прогнозування стану хворих. Частина досліджень, що стосується неперервних розв'язків може бути використана при моделюванні реакції організму на прийом ліків.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи, які винесені на захист, одержані здобувачем особисто. З результатів робіт, що виконані у співавторстві, на захист виносяться лише положення, які одержані автором дисертації. В дисертації використані матеріали, що опубліковані у 24 наукових статтях та тезах 15 конференцій. З 24 статтей 19 робіт опубліковані дисертантом без співавторів, а решта виконані в співавторстві з Чуєшовим І.Д., Ву Дж., Загалаком П., Кристином Т.

В усіх статтях, що видані здобувачем у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у постановці задач, розробці використаних методів дослідження, виконанні досліджень, аналізі отриманих результатів, а також визначенні наступних етапів роботи.

В роботах, що виконані у співавторстві, співавторам належать наступні результати:

В роботі [155] Ву Дж. написав огляд для вступу та прийняв участь в обговоренні результатів. Наведені в дисертації результати належать автору.

В роботі [164] Загалак П. прийняв участь в написанні огляду для вступу та обговоренні результатів. Наведені в дисертації результати належать автору.

В роботі [115] Кристин Т. запропонував доведення леми 1, прийняв участь в обговоренні результатів. Наведені в дисертації результати належать автору.

В роботах [65, 64] Чуєшову І.Д. належать початкові постановки задач без загаювання та зі сталим загаюванням. Резуненко О.В. належать ідеї вибору фазових просторів для задач із загаюваннями, що залежать від стану та класів таких загаювань. Метод квазістійкості належить Чуєшову І.Д. Наведені в дисертації результати належать автору.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи по темі дисертації доповідались та обговорювались на семінарах кафедри математичної фізики та обчислювальної математики Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна (керівник чл.-кор. НАН України І.Д.Чуєшов), математичному семінарі ФТІНТ НАН України (керівник акад. НАН України Є.Я.Хруслов), семінарі, що присвячений 60-ти річчю проф. Г.М.Скляра (керівник проф. В.І.Коробов), двічі на семінарі Математичного інституту Університету м.Гісена, Німеччина (керівник проф. Х.-О.Вальтер), математичному семінарі університету Нью Фаудленда, Канада (керівник проф. К.Зоу), семінарі кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники проф. Т.А.Мельник, проф. В.Г.Самойленко), а також на наступних міжнародних конференціях:

– Symposium in honor of Louis Boutet de Monvel "Equations aux derivees partielles et quantification", Institute of Mathematics of Jussieu, Paris, June 23-27, 2003.

– Математичний симпозіум “Перші Каразінські наукові читання”, присвячений двухсотріччю Харківського університету, Харків, червень 14-16, 2004.

– 77th GAMM Annual Meeting 2006, Technical University of Berlin, March 27-31, 2006.

– The 8th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, June 25–28, 2007, Bolyai Institute, University of Szeged, Hungary.

– ICMP09 - XVI International Congress on Mathematical Physics, August 3–8, 2009, Prague, Czech Republic.

– Український математичний конгрес - 2009 (до 100-річчя від дня народження М.М. Боголюбова), м. Київ, Інститут математики НАН України, 27-29 серпня 2009 р.

– The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, May 25-28, 2010, Dresden, Germany.

– The 9th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, June 28-July 1, 2011, Bolyai Institute, University of Szeged, Hungary.

– Міжнародна конференція "Динамічні системи та їх застосування", м. Київ, Інститут математики НАН України, 16-18 травня 2012.

– XVI Міжнародна конференція "Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем" (DSMSI-2013), м. Київ, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, 29-31 травня 2013.

– The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems Differential Equations and Applications, July 7 – July 11, 2014, Madrid, Spain. Special Session 24: "Qualitative Analysis of Reaction Diffusion Systems".

– The 10th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, July 1–4, 2015, Bolyai Institute, University of Szeged, Hungary.

– Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та теорія керування" присвячена 75-річчю проф. В.І.Коробова, 26-28 вересня 2016 р. Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, Україна.

– International conference "Biomathematics Day", October 24, 2016, Centre of Excellence in Analysis and Dynamics Research, Department of Mathematics and Statistics, Helsinki University, Finland.

– International conference EQUADIFF 2017, Slovak University of Technology, Bratislava, Slovakia, July 24-28, 2017.

– VI International Conference "Analysis and mathematical physics" dedicated to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory, Kharkiv, Ukraine, June 18-22, 2018; Book of Abstracts, p.28-29.

– The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, July 5 – July 9, 2018, Taipei, Taiwan. Invited talk on the Special Session 64: 'Delay Equations in Population Dynamics', Book of abstracts, p.185.

– The IFIP TC 7 Conference on System Modelling and Optimization, July 23–27, 2018, Universitat Duisburg-Essen, Essen, Germany. Invited talk on the mini-symposium 06: 'Honoring the work of Igor Chueshov' (Organizers: I. Lasiecka, J. Webster), Book of abstracts, p.28.

– The 3rd international scientific conference "Differential Equations and Control Theory" (DECT-2018), V.N.Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine, 25-27 September 2018; Book of abstracts, p.41.

– Міжнародні конференції "Кримська осіння математична школа-симпозіум (КРОМШ)", Крим, Ласпі, Україна (2004, 2005, 2007-2009 роки).

Жоден результат кандидатської дисертації автора, захищеної в Інституті математики НАН України, м.Київ, у 1998 році, за спеціальністтю 01.01.03 "Математична фізика", не є включеним в цю дисертаційну роботу.

Публікації. Результати, представлені в дисертації, опубліковані в 39 наукових роботах, з них – 24 наукові статті у фахових наукових виданнях (всі 24 входять до наукометричних баз даних). Серед них 21 статті [148, 149, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 158, 159, 160, 161, 162, 164, 165, 64, 65, 115, 166, 167, 169] входять до наукометричної бази даних Scopus і опубліковані у фахових виданнях, що мають імпакт-фактор. Три інші статті [150, 157, 163] присутні у фахових реферативних базах даних Zentralblatt MATH, MathSciNet. Крім того, 15 тез доповідей на міжнародних наукових конференціях (у тому числі одна публікація в матеріалах конференції [168] входить до наукометричної бази даних Web of Science). Всі згадані 21 статті у виданнях, що віднесені до першого і другого квартилів (Q1 і Q2, Scopus). Зокрема, 11 статтей у виданнях, віднесених до першого квартилю (Q1, Scopus), а також 10 статтей у виданнях, віднесених до другого квартилю (Q2, Scopus) відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, 6 розділів, висновків, списку використаних першоджерел, 4 додатків, та супроводжується анотаціями та списком публікацій здобувача за темою дисертації. В роботі є 6 рисунків. Список використаних джерел побудований в алфавітному порядку прізвищ перших авторів і налічує 226 найменувань. При цьому спочатку цитуються роботи кирилицею, а потім латиницею. Повний обсяг дисертаційної роботи – 370 сторінок. Обсяг основної частини дисертації – 309 сторінок.

Подяки. Автор щиро вдячний професору Чуєшову І.Д. за багаторічну підтримку, допомогу та корисні обговорення методу квазістійких оцінок, професорам Вальтеру Х-О., Кристину Т., Ву Дж., Руесу В. за корисні коментарі та поради.

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ, ІДЕЇ ТА МЕТОДИ. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. Короткий огляд літератури, що стосується теорії рівнянь із загаюванням

Теорія диференціальних рівнянь із загаюванням має багату історію (див. класичні монографії [3, 76, 30]). Ця область математики невіддільна від інших розділів математичної фізики оскільки основа її сучасного розуміння базується на функціональному аналізі нескінченновимірних систем. Нескінченновимірні системи традиційно виникають при зображенні нелокальних процесів, зокрема на мові диференціальних та інтегральних рівнянь із відхилюючим аргументом. В літературі часто можна зустріти терміни "функціонально-диференціальні рівняння" [1], "диференціально-різницеві рівняння" [3], рівняння з запізненням, із пам'яттю, із загаюванням, із післядією. Не заглиблюючись у відмінності, зазначимо, що всі ці назви відображають властивість рівнянь поєднувати в собі значення розв'язку в теперішній час та в моменти (проміжки) часу в минулому. Порівнюючи багато методів, що використовуються, давно підмічено, що їх можна одночасно застосовувати як у випадку відхилення часової змінної (загаювання) так і у випадку відхилення просторової змінної.

У переважній більшості ситуацій введення загаювання до системи не потребує додаткової мотивації, а основні зусилля прикладаються до акуратного аналізу та вибору типу загаювання для кожного конкретного процесу. Загаювання можна поділити на обмежені та необмежені, зосереджені та розподілені, лінійні та нелінійні, локальні та нелокальні, а також змішані. Треба відмітити, що методи досліджень рівнянь із різними типами загаювання можуть суттєво відрізнятися. Це спричинило появу багатої літератури та широкого спектра методів досліджень таких рівнянь.

Основоположний внесок в побудову основи математичної теорії диференціальних рівнянь із загаюванням внесли Н.В. Азбелев, А.М.Зверкін, Г.А.Каменський, В.Б.Колмановський, Н.Н. Красовський, А.Д.Мишкіс, С.Б.Норкін, В.Р. Носов, Л.С. Понтрягин, Б.С. Разуміхін, Л.Э. Ельсгольц, C.I.T. Baker, H.T. Banks, R. Bellman, K.L. Cooke, C. Corduheanu, R.D.Driver, A.Halanay, J.K. Hale, V. Lakshmikatham, V.Volterra та багато інших математиків.

В книзі [3] (Белман Р. та Кук К., 1963, див. с.235) відмічається, що "з диференціально-різницевими рівняннями зустрічалися у XVIII сторіччі, зазвичай у зв'язку з геометричними задачами. Обговорення цих питань див. в книзі [119] (S.F.Lacroix, 1819). Там же [3] (див. с.236), вказується, що неперервна залежність розв'язків від початкових умов для загального класу рівнянь зі змінним загаюванням вивчалась в роботі Каменського Г.А. [10] 1958 р. Огляд багатьох результатів по звичайним рівнянням зі сталим та залежним від часу загаюванням наведений у [7]. Цей огляд, в основному присвячений роботам з 1953 по 1962 роки (всього 10 років) і має список літератури, що налічує 388 пунктів. Як пишуть самі автори (рос.) "Такое обилие работ вынудило авторов сузить свою задачу и не включать в настоящий обзор работ чисто прикладного характера, а также работ по интегро-дифференциальным уравнениям. Не освещены и немногочисленные результаты по теории уравнений в частных производных с отклоняющимися аргументами". Великим поштовхом у розвитку різних напрямків теорії диференціальних рівнянь із загаюванням стала организація Л.Е. Ельсгольцем видання з 1962 р. в Університеті дружби народів "Трудів семінару по теорії диференціальних рівнянь із відхиленим аргументом" [29] (10 томів 1962 - 1977 роки).

Класичними вважаються монографії Н.Н.Красовського (1959) [15] та Дж.Хейла (J. Hale, 1977) [30]. Важливе місце займають роботи Б.С. Разуміхіна по стійкості систем із загаюванням (див., наприклад [26], 1956 р.).

Неможливо навіть перерахувати все різномаіття типів прикладних задач, які вже були досліджені за допомогою рівнянь із загаюванням. Тут можна дати лише посилання. Ось деякі з них - дивовижні книжки [30] (та доповнене друге видання [95]), [22], [1], [76], [3], [110]. В цих книжках зібрані не тільки приклади задач, але викладені і основи теорії рівнянь із загаюванням, що наводяться відомими експертами - авторами багатьох глибоких результатів.

Однією з перших областей, де знайшли своє застосування рівняння із загаюванням, є біологія. Так, доповнення до видання книги Дж. Маррі [19] російською мовою у 1983 році, яке написане В.Г.Бабським та А.Д.Мишкісом, має велику кількість прикладів та включає 83 посилання на роботи 70-х років.

Наведемо лише деякі моделі, які обговорювались у вступі до книги Я.Куанга [118]. Модель хижак-жертва із загаюванням (Лотка-Вольтерра, див., наприклад, [4]), модель із загаюванням в епідеміології (Лотка 1912, епідемія малярії). Зокрема, в роботі [189] Ф.Шарп та А.Лотка розглядали загаювання як інкубаційний ефект. Далі, модель із загаюванням у фізіології - динамічні хвороби (така назва з'явилась в роботі Л.Гласс та М.Макі, 1979 [90], див. також [125]), задача із загаюванням в електродинаміці та інші.

Велике значення має загаювання в різноманітних задачах теорії керування. Наприклад, автоматичне керування в задачі стабілізації корабля [130].

1.2. Базові визначення та ідеї, що пов'язані з асимптотичною поведінкою розв'язків

Важко обійняти всі напрямки, в яких велись та продовжують вестись дослідження моделей, що описуються рівняннями із загаюваннями, зокрема рівняннями математичної фізики із загаюванням. Ми свідомо залишаємо в стороні методи та результати, що відносяться до поведінки окремих розв'язків. Нас, в першу чергу, будуть цікавити питання якісної поведінки множин розв'язків. Ми зосередимось на обговоренні таких математичних питань як коректна розв'язність початково-краєвих задач та асимптотична поведінка розв'язків коли час прямує до нескінченності. Останнє включає дослідження як класичних властивостей стійкості за О.М.Ляпуновим так і питання притягнення розв'язків до інваріантних підмножин фазового простору - глобальних атракторів. Ці дослідження відносяться до якісної теорії диференціальних рівнянь та математичної фізики. Сама ця теорія виникла в основоположних роботах О.М.Ляпунова [18] та А. Пуанкаре (H.Poincare)[24].

Беручи до уваги різномаїття типів рівнянь, ми зосереджуємось, в основному, на рівняннях параболічного типу з обмеженим загаюванням. Але і інші типи рівнянь (другого порядку за часом та звичайні диференціальні рівняння) також будуть нами розглядатися.

Вивчаючи різні методи математичної фізики, теорії рівнянь у частинних похідних та методи рівнянь із загаюванням, часто можна побачити подібність в апараті сучасного функціонального аналізу, який в них використовується. І це цілком природньо. Рівняння у частинних похідних, як правило, описують моделі з розподіленими параметрами (розподіленими за просторовими - геометричними координатам), в той час, як рівняння із загаюванням описують моделі з розподіленою часовою координатою. З цієї точки зору, вивчення рівнянь, в яких одночасно присутні як частинні похідні так і загаювання, є цілком природнім.

Одним з основних понять в наших дослідженнях є поняття динамічної системи.

Визначення 1.1 *Під динамічною системою ми розуміємо [31, 97] пару* (S_t, H)*, яка складається з повного метричного простору* H *та родини неперервних відображень* $(S_t : t \geq 0)$ *простору* H *в себе, яка задовільняє півгруповим властивостям* $S_0 = I, S_{t+\tau} = S_t \circ S_\tau$ *для всіх* $t, \tau \geq 0$*. Тут* I *позначає тотожній оператор. Також припускаємо, що* $y(t) = S_t x$ *є неперервна функція змінної* t *для всіх* $x \in H$*. Тут* H *зветься фазовим простором (або простором станів) та* $\{S_t\}$ *зветься еволюційною півгрупою (еволюційний оператор). Також використовується назва* C^0*-півгрупа [97, с.7].*

З появою загальної теорії C_0-півгруп [144, 82] з'явилась можливість вивчати функціонально-диференціальні рівняння у частинних похідних як абстрактні звичайні диференціальні рівняння у банахових просторах. Загальні питання існування та єдиності розв'язків функціонально-диференціальних рівнянь у частинних похідних були розглянуті в роботах С.Тревиса та Г.Вебба (C.Travis, G.Webb, 1974, 1976; G.Webb, 1976) [202, 203, 215], В.Фитзгіббона [83] (неавтономні рівняння, 1978) та інші. В цих роботах розглядаються достатньо загальні постановки початково-краєвих задач для рівнянь у частинних похідних із постійним загаюванням. Відзначимо також роботи Р.Мартина та Х.Сміта (R.Martin, H.Smith, 1990, 1991) [134, 135], В.Руеса (W. Ruess, 2009) [186]. Більше обговорень див. бібліографічні нотатки в книзі [220, стр. 61-64] Дж. Ву (J. Wu, 1996). Теорія C_0-півгруп для лінійних рівнянь у частинних похідних зі сталим загаюванням розглядається в роботі А.Баткаі та С.Піазера (A.Batkai, S.Piazzera, 2005) [38].

Можливо вивчати різні властивості розв'язків, розглядати різні класи початкових функцій. Але, якщо ми бажаємо будувати динамічну систему, то виникає необхідність розглядати *простори* (метричні, нормовані, а краще банахови) початкових функцій. Таким чином, крім *множини* "припустимих" початкових функцій, ми повинні обирати також і метрику. Потрібно обговорювати *повноту* простору та *неперервність* еволюційного оператора (оператора зсуву за часом) в тій або іншій метриці. Ці питання пов'язані з поняттям коректної розв'язності початкової задачі, коректності за Ж.Адамаром [92, 93] (він називає такі задачі 'можливими та визначеними' - 'possible et déterminé' [92, c.49]). Нагадаємо це поняття.

Визначення 1.2 *Задача зветься коректно розв'язною, якщо виконуються три умови: 1) задача має розв'язок; 2) розв'язок є єдиним; 3) розв'язок неперервно залежить від початкових даних.*

Вочевидь, що всі три властивості безпосередньо залежать від вибора набора початкових даних - вибора фазового простору, включно з вибором метрики. Вибір зручного фазового простору є важливою та непростою задачею.

Тут, не дивлячись на спільність методів та підходів, ми вимушені розділити опис на два напрямки. Один з напрямків включає ідеї та результати, що розвинені для рівнянь математичної фізики (рівнянь у частинних похідних), які, на початкових етапах, не брали до уваги ефекти, які пов'язані із загаюванням. Другий напрямок, включає підходи, які розроблені для звичайних диференціальних рівнянь із загаюванням. Цей поділ виник історично і був цілком природнім. В наш час цей поділ успішно зникає.

Серед різноманітних методів вивчення рівнянь у частинних похідних нас буде цікавити якісна теорія таких рівнянь, фундамент якої був закладений в роботах О.О.Ладиженської [16, 17, 120], А.Бабіна та М.Вішика [2], Р.Темама (R.Temam) [200], Дж.Хейла (J. Hale) [96], І.Д.Чуєшова [31, 59].

В рамках цієї теорії нас перш за все цікавлять питання коректної розв'язності задач та асимптотичної поведінки динамічних систем коли час прямує до нескінченності. Для опису асимптотичної поведінки зручним є поняття ω-граничної (омега-граничної) множини [40, 121, 131].

Визначення 1.3 *Розглянемо динамічну систему* (S_t, H) *та множину* $D \subset H$. *Множина* $\omega(D) \equiv \bigcap_{t>0} Cl\left\{\bigcup_{\tau\geq t} S_\tau D\right\}$ *зветься* ω*-граничною для* D. *Тут* $S_\tau D$ *позначає образ множини, а* $Cl\left\{B\right\}$ *- замкнення множини* $B \subset H$ *в метриці простору* H.

Відзначимо, що для динамічної системи (S_t, H) на повному метричному просторі H справедлива наступна властивість. Точка $y \in \omega(D)$ тоді і тільки тоді, коли існують послідовності $t_k \to +\infty$ та $x_k \in D$ такі, що $S_{t_k}x_k \to y$ при $k \to \infty$.

Одним з центральних об'єктів теорії є глобальний атрактор [2, 200, 96, 31]. Нагадаємо

Визначення 1.4 `Глобальним атрактором` *динамічної системи* (S_t, H) *зветься замкнена обмежена множина* $\mathcal{U}$ *в* H, *яка є строго інваріантною (тобто* $S_t\mathcal{U} = \mathcal{U}$ *для всіх* $t \geq 0$*), та така, що для будь-якої обмеженої множини* $B \subset H$ *виконується* $\lim\limits_{t\to+\infty} \sup\{dist_H(S_t y, \mathcal{U}), y \in B\} = 0$.

Структура атрактора, в загальному випадку, може бути дуже складною та її, як правило, важко описати. Але атрактору завжди належать стаціонарні та періодичні розв'язки. Найпростішим прикладом атрактора може слугувати асимптотично стійкий за О.М.Ляпуновим стаціонарний розв'язок. Не дивлячись на складність опису структури атрактора, в більшості прикладних задач, сам факт його існування несе багато інформації про асимптотичну поведінку системи. При цьому на перше місце виходить питання опису не окремих розв'язків, а якісної поведінки всієї динамічної системи в цілому.

В наш час розроблені достатньо загальні методи доведення існування та скінченновимірності атрактора [2, 96, 31]. Першим кроком в доведенні існування глобального атрактора є встановлення факту дисипативності динамічної системи. Нагадаємо

Визначення 1.5 *Замкнена множина $B \subset H$ зветься* поглинаючою *для динамічної системи $(S_t; H)$, якщо для будь якої обмеженої множини $D \subset H$ існує момент часу t_D такий, що $S_t D \subset B$ для всіх $t \geq t_D$. Динамічна система $(S_t; H)$ зветься (обмежено)* дисипативною *(див. [2, 96, 31]), якщо вона має обмежену поглинаючу множину B.*

Одну з центральних ролей відіграють наступні властивості динамічної системи $(S_t; H)$ на повному метричному просторі H (див. [120, 96]).

Визначення 1.6 *(i) Еволюційний оператор S_t зветься* компактним, *якщо він дисипативний та існує компактна поглинаюча множина.*

(ii) Оператор S_t зветься умовно компактним, *якщо для будь якої обмеженої множини D такої, що $S_t D \subset D$ для $t > 0$ існують $t_D > 0$ та компактна множина K в замкнені $Cl\{D\}$ множини D такі, що $S_t D \subset K$ для всіх $t \geq t_D$.*

(iii) Оператор S_t зветься асимптотично компактним, *якщо виконується наступна умова О.О.Ладиженської (див. [120]): для будь якої обмеженої множини B в H такої, що $\gamma^\tau(B) := \bigcup_{t \geq \tau} S_t B$ є обмеженою для деякого $\tau \geq 0$, маємо, що будь яка послідовність вигляду $\{S_{t_n} x_n\}$ з $x_n \in B$ та $t_n \to \infty$ є відносно компактною.*

(iv) Еволюційний оператор S_t зветься асимптотично гладким, *якщо виконується наступна умова Дж.Хейла (див. [96]): для будь якої обмеженої*

множини D в H такої, що $S_t D \subset D$ для $t > 0$ існує компактна множина K в замкнені $Cl\{D\}$ множини D така, що $S_t D$ рівномірно притягується до K в наступному сенсі

$$\lim_{t \to +\infty} d_H\{S_t D | K\} = 0, \qquad d_H\{A|B\} = \sup_{x \in A} dist_H\,(x, B).$$

Відзначимо, що еволюційнинй оператор S_t на повному метричному просторі H є асимптотично компактним тоді і тільки тоді, коли він є асимптотично гладким. Наступна класична теорема дає умови існування глобального атрактора (див. [2, 200, 96, 31, 59]).

Теорема 1.7 *Нехай $(S_t; H)$ є дисипативною та асимптотично компактною динамічною системою на повному метричному просторі H. Тоді вона має (єдиний) компактний глобальний атрактор $\mathcal{U}$ такий, що*

$$\mathcal{U} = \omega(B_0) = \bigcap_{t>0} \left(Cl \left\{ \bigcup_{\tau \geq t} S_\tau B_0 \right\} \right)$$

для будь якої обмеженої поглинаючої множини B_0 та

$$\lim_{t \to +\infty} \left(d_H\{S_t B_0 | \mathcal{U}\} + d_H\{\mathcal{U} | S_t B_0\} \right) = 0, \qquad d_H\{A|B\} = \sup_{x \in A} dist_H\,(x, B).$$

Тут $\omega(B_0)$ - омега-гранична множина, що згадана вище.

Іншим важливим об'єктом при вивченні асимптотичної поведінки динамічної системи є Інерційний многовид (ІМ).

Визначення 1.8 `Інерційним многовидом` *зветься скінченновимірний многовид M, який є додатньо інваріантним відносно еволюційного оператора, тобто $S_t M \subset M$ для всіх $t \geq 0$ та який притягує всі розв'язки з експоненційною швидкістю, тобто для будь якого початкового даного x існують сталі $c_i > 0$ такі, що $dist(S_t x, M) \leq c_1 \exp(-c_2 t)$.*

Інерційний многовид, якщо він існує, включає (як підмножину) глобальний атрактор. Ідея Інерційного многовида для рівнянь у частинних похідних (без загаювання) була запропонована С.Фояшем, Дж.Селлом та Р.Темамом

(C. Foias, G.R. Sell, R. Temam) в роботах [86, 87] та в подальшому детально вивчена для багатьох рівнянь математичної фізики (див. [200, 52, 88, 66, 31]). У випадку рівнянь параболічного типу зі сталим загаюванням, Інерційний многовид був вперше збудований в роботі [42] у 1998 р. та пізніше для рівнянь другого порядку за часом та із загаюванням в роботі [152]. З точки зору якісної теорії, існування IM каже про те, що динаміка всієї нескінченновимірної системи може бути описана деякою скінченновимірною системою (її часто звуть інерціальною формою). На жаль, існування IM вдається довести за так званої спектральної умови. Ця умова вимагає існування достатньо великого "пропуска в спектрі" лінійної частини. Дещо послабити це обмеження можна вимогою малості сталої Липшиця нелінійності. Для подолання обмежень, що накладає спектральна умова, в роботі [84] С. Фояша, О. Манлі та Р. Темама (C. Foias, O. Manley, R. Temam) було запропоновано поняття Наближеного інерційного многовиду (НІМ).

Визначення 1.9 Наближеним інерційним многовидом *(НІМ) зветься (гладкий) многовид, який має (тонкий) притягуючий окіл, зокрема притяжіння є експоненційним.*

Найбільшу цікавість має побудова скінченновимірного НІМ. Крім того, оскільки "тонкість" притягуючого околу є відносною, то часто будують родину НІМ M_n, кожний з яких має притягуючий (поглинаючий) окіл товщини $\varepsilon_n > 0$. Можлива побудова послідовності НІМ, що мають властивість $\varepsilon_n \to 0$, тобто з ростом n (вимірність многовиду) НІМ M_n дають все більш точні наближення (див. [71]). Про НІМ для різних рівнянь див. також роботи [74, 133, 88, 54, 107, 201, 150]).

Наступним важливим об'єктом, який зображає асимптотичну поведінку системи, є *фрактальний експоненційний атрактор.* Це поняття було запропоновано А.Еденом, С.Фояшем, Б.Ніколаєнко та Р.Темамом (A.Eden, C.Foias, B.Nicolaenko, R.Temam) в роботі [81] (1994 р.).

Визначення 1.10 Фрактальним експоненційним атрактором *зветься скінченовимірна додатньо інваріантна, експоненційно притягуюча множина.*

Ця множина може бути збудована, як розширення глобального атрактора.

Іншим об'єктом, який допомагає уникнути обмежуючої спектральної умови є *Інерційний многовид із загаюванням* (ІМЗ). Тут слова "із загаюванням" відносяться до самого поняття (типу поверхні), а не до типу рівняння. Крім того, спочатку були розглянуті ІМЗ для рівнянь без загаювання. Інерційний многовид із загаюванням, вперше було збудовано для параболічних рівнянь без загаювання в роботі А. Дебуша та Р. Темама (A. Debussche, R. Temam, 1996) [75] (див. також обговорення зв'язку Інерційного многовида та Інерційного многовида із загаюванням в [184], обидва об'єкта будуються для параболічних рівнянь без загаювання). В дисертації ці побудови розповсюджені на випадок параболічних рінянь [148] та на випадок рівнянь другого порядку за часом в [154] (обидва випадки зі сталим загаюванням). Варто відмітити, що важливим технічним засобом виявилось введення та застосування так званої функції "зсуву-продовження" (О. Резуненко [148], 2000 р.).

Базуючись на цих результатах, був запропонований метод побудови родини наближених інерційних многовидів, які проходять крізь всі стаціонарні точки (родина експоненційного типа для рівнянь без загаювання - О.Резуненко [150], 2002 р.) та для випадка сталого загаювання - О.Резуненко [153], 2003 р.

Цікаво відмітити, що родину (скінченновимірних) наближених інерційних многовидів, яка побудована в 1995 р. в роботі І.Д.Чуєшова [54], можна отримати при розрізі (нескінченновимірного) інерційного многовида із загаюванням, який був запропонований у 1996 р. в роботі А.Дебуша та Р.Темама (A.Debussche, R. Temam) [75]. Ця ідея дала нам можливість побудувати нові родини наближених інерційних многовидів [150].

Ще одним важливим наслідком існування ІМЗ є посилення результата С.Фояша та Г.Проді (C.Foias, G.Prodi, 1967) [85] про визначальні моди (див. також роботи [75, 200, 17, 31] для випадка систем без загаювання). Детальніше про визначальні функціонали див. оглядову статтю І.Д.Чуєшова [55] та посилання.

1.3. Особливості випадку загаювання, що залежить від стану

В наш час інтенсивно разробляється теорія рівнянь із *загаюванням, що залежить від стану (ЗЗС)*. Як відмічається в огляді [98], рівняння із загаюванням, що залежить від стану, зустрічаються вже в 1806 році в роботі Пуасона (S.D. Poisson) [146], хоча їх систематичне вивчення почалось відносно нещодавно. В [98] також відмічаються оглядові статті Х. Халаная та Дж. Йорка [94] (H. Halanay, J.A. Yorke, 1971) та А.Д. Мишкіса [23] (1977). Ми радимо важливу оглядову статтю [98] (F.Hartung, T.Krisztin, H.-O.Walther, J.Wu) за методами дослідження звичайних диференціальних рівнянь з ЗЗС. Цей огляд є корисним також великим переліком посилань, що видані до 2006 року.

В дисертації вперше розглядаються рівняння у частинних похідних із загаюванням, що залежить від стану. Коло питань, що пов'язані з таким типом загаювання можна вважати одним з центральних в дисертації. Перші результати отримані в наступній послідовності: коректна розв'язність та асимптотичні властивості (існування атрактора) для випадку розподіленого загаювання в просторі $L^2([-h, 0]; L^2(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ в роботах [155, 156, 158], для випадку зосередженого загаювання в просторі неперервних функцій в [159, 162], а також в нелінійному метричному просторі [160]. В цих дослідженнях були використані та розвинуті як сучасні методи вивчення звичайних диференціальних рівнянь так і нові підходи, що запропоновані автором.

Для опису досліджень рівнянь із загаюванням, що залежить від стану, важливо з'ясувати які труднощі виникають при відмові від обмеження - сталості загаювання. Підкреслимо, що умова сталості загаювання, в більшості випадків (якщо не в усіх), це саме обмеження, яке накладається для спрощення досліджень. Важко навести приклад, в якому опис реального фізичного або біологічного процесу вимагав би сталості загаювання. З іншого боку, практично всі досліджувані моделі, в яких використовувалось стале загаювання, можуть бути узагальнені на випадок загаювання, що залежить від стану, і це узагальнення буде природнім (див., наприклад, обговорення на стор. 10 монографії [32]).

Добре відомо, що нелінійні системи є більш складними, ніж лінійні вже тому, що принцип суперпозиції (розкладання розв'язку на суму розв'язків) не виконується. Природньо, що лінійні системи більш вивчені і для них збудовані більш повні теорії, які зображають різні якісні і кількісні властивості розв'язків. В зв'язку з цим, вивчаючи деякий клас рівнянь (систем), корисно проаналізувати, що вже відомо, або може бути отримано, для лінійних рівнянь цього класу. Повертаючись до обговорення диференціальних рівнянь із загаюванням, що залежить від стану, відмітимо, що такі рівняння, по своїй природі, не можуть бути лінійними. Оскільки лінійна теорія відсутня, треба з самого початку використовувати методи нелінійного аналізу.

Іншою, сформованою історично, особливістю диференціальних рівнянь зі сталим (та залежним від стану) загаюванням, є розподіл на зосереджене та розподілене типи загаювання.

Так найпростішими прикладами рівнянь із зосередженим загаюванням є $\dot{u}(t) = f(u(t), u(t-h))$ та з розподіленим загаюванням $\dot{u}(t) = \int_{-h}^{0} f(u(t), u(t+\theta))\, d\theta$. Обидва типа виникають при узагальнені рівняння без загаювання $\dot{u}(t) = f(u(t))$, коли до уваги приймають ефекти, що пов'язані з пам'яттю (використання інформації про попередні стани системи). Також розглядають і більш загальні типи врахування пам'яті, зокрема, змішані загаювання. Традиційно, зосереджений тип загаювання вважається простішим в дослідженнях. Навіть на перший погляд, до залежності від розв'яку в поточний момент часу $u(t)$ додається залежність від розв'язку лише в один додатковий момент часу в минулому $u(t-h)$. Розгляд же розподіленого загаювання потребує використання значень розв'язку на цілому відрізку часу (в нескінченій кількості моментів часу в минулому).

У випадку сталого загаювання, багато результатів якісної поведінки розв'язків доводяться для зосередженого та розподіленого загаювання одними і тими самими методами. При розгляді загаювань, що залежать від стану, методи істотно вирізняються. Добре відомо, що присутність зосередженого загаювання, що залежить від стану, вносить суттєві складнощі в дослідження. Так, в загальному випадку, класичні методи доведення єдиності розв'язків та їх неперервна залежність від початкових даних, які розроблені для сталих загаювань, не можуть бути застосовані навіть в скалярному випадку. Основною причиной цього є той факт, що член із загаюванням (ЗЗС) в цьому випадку не є липшицевим на класичому просторі неперервних функцій. Таку ситуацію добре ілюструють прості приклади неєдиності (див., наприклад, [77], [216], а також [28]). В монографії [32] на стор. 51 автори посилаються на роботу Р.Драйвера [79] (R.D.Driver, 1963), кажучи, що в ній вперше була відмічена неєдиність розв'язків для рівнянь із загаюванням, що залежить від стану.

Наведемо приклад неєдиності розв'язків початкової задачі для звичайного диференціального рівняння з загаюванням, що залежить від стану. Цей приклад наведений в роботі Р.Драйвера [77] (1963). Просте скалярне рівняння

$$\dot{y}(t) = -2y(t - y(t)) + 5, \quad t > 0 \tag{1.1}$$

з неперервною початковою функцією

$$y(t) = \varphi(t) = |4 + t|^{1/2} + 2, \quad t \le 0 \tag{1.2}$$

має **два** неперервних (навіть нескінченно диференційовних) розв'язка $y^1(t) = 4 + t, t \ge 0$ та $y^2(t) = 4 + t - t^2, t \in [0, 2]$. Перевірка відбувається простою підстановкою в рівняння. Більше обговорення див. в пункті 3.1.

Окремо відмітимо, що до цього часу часто можна зустріти помилкове судження, що умова додатності (необертання в нуль) величини загаювання є достатньою для доведення єдиності розв'язку. Помилка полягає в тому, що в цьому випадку можна застосувати метод кроків [15, 30]. Як чітко показує вищенаведений приклад, метод кроків в цьому випадку не може бути застосований. В цьому прикладі, величина загаювання близька до 4 для малих значень t, тобто неєдиність не викликана ситуацією, коли рівняння із загаюванням вироджується у рівняння без нього.

Як один із можливих шляхів подолання складнощів, які пов'язані з можливою неєдиністю розв'язків в просторі неперервних функцій, для звичайних диференціальних рівнянь раніше був запропонований підхід, заснований на звуженні фазового простору (простору початкових функцій) до простору липшицевих [78] або простору неперервно-диференційовних функцій або його підмножини (так званий, многовид розв'язків), див. [98, 205]. Перехід від простору неперервних функцій до простору липшицевих функцій призводить до того, що сам член із загаюванням стає липшицевмм. Це добре видно при розгляді простої функції $ev(\phi, s) = \phi(s) : C[-h, 0] \times [-h, 0] \to \mathbb{R}$ (див., обговорення на стор. 466 [98]). Ця функція використовується для представлення найпростішого рівняння з загаюванням, що залежить від стану

$$\dot{u}(t) = G(u(t - r(u_t)))$$

в стандартному вигляді $\dot{u}(t) = F(u_t)$, де F задається як композиція $F = G\, o\, ev\, o\, (id \times (-r))$.

Зауваження 1.11 *Тут, як загальноприйнято в теорії рівнянь із загаюванням, ми позначаємо u_t функцію $u_t = u_t(\theta) \equiv u(t + \theta), \theta \in [-h, 0]$, тобто сегмент розв'язку на часовому проміжку $[t - h, t]$, але перенесений на початковий відрізок $[-h, 0]$. Відмітемо, що це важливе та зручне позначення, на думку Р.Д.Драйвера (див. [80, с.286]), було введено С.Н.Шимановим [190] у 1960р. Дійсно, ми зустрічаємо це позначення на с.655 [190]. Однак, слід наголосити, що сама ідея розглядати сегменти розв'язків $\{u(t+\theta), \theta \in [-h, 0]\}$ була чітко сформульована раніше, принаймі в книзі Красовського Н.Н. [15, с.157] (1959).*

Функція $ev(\phi, s) : C[-h, 0] \times [-h, 0] \to \mathbb{R}$ не є локально липшицевою, в той час, як її звуження $Ev(\phi, s) : C^1[-h, 0] \times [-h, 0] \to \mathbb{R}$ є неперервно диференційовним з $D_1 Ev(\phi, s)\chi = Ev(\chi, s)$ та $D_2 Ev(\phi, s)1 = \phi'(s)$.

В нашій роботі цей підхід розвивається для рівнянь у частинних похідних. Запропоновані декілька можливих узагальнень (типів фазових просторів).

Зручним засобом опису розв'язків диференціальних рівнянь є представлення розв'язку, як функції часовой змінної зі значеннями в підходящому метричному просторі X, тобто розв'язок записується як $u : [t_0, T) \to X$. У випадку звичайних диференціальних рівнянь $X = \mathbb{R}^n$. Добре відомо, що важливою рисою рівнянь у частинних похідних (що вирізняє їх від звичайних диференціальних рівнянь) є нескінченновимірність простору X. У зв'язку з цим, відмітемо, що значення похідної за часом належить до іншого простору Y, і питання вибору просторів X та Y є нетривіальними. Неспівпадіння просторів X та Y є однією з труднощів при намаганні розповсюдження на рівняння у частинних похідних методів, що розвинуті для звичайних диференціальних рівнянь. З іншого боку, можливість вибору різних пар X і Y дає додаткову свободу у виборі методів дослідження.

В нашій роботі запропонований і альтернативний підхід (без звуження на підмножини липшицевих за часом функцій). Одну з головних ідей складає введене в дисертації поняття *ігноруючої умови* для загаювання, що залежить від стану [159] та *узагальненої ігноруючої умови* [162]. На основі цих умов ми отримуємо результати про існування, єдиність та неперервну залежність розв'язків від початкових даних, на всьому класичному просторі неперервних функцій. В цьому класичному просторі ми досліджуємо асимптотичну поведінку розв'язків, знаходимо достатні умови існування глобального атрактора. Продемостровано, що ігноруюча умова є зручною та природньою властивісттю ЗЗС для широкого кола задач, включно з постановками для неавтономних, локальних та нелокальних, за наявності чи відсутності розподілених та змішаних загаювань.

1.4. Висновки до розділу 1

Перший розділ присвячений огляду літератури та попереднім відомостям, включає основні визначення, які використовуються в подальших розділах. Також пояснені відмінність та складнощі, які виникають за наявності загаювань, що залежать від стану. Окреслені основні напрямки досліджень та їх ідеї.

РОЗДІЛ 2. РІВНЯННЯ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ЗІ СТАЛИМ ЗАГАЮВАННЯМ

2.1. Попередні відомості.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{du}{dt} + Au = B(u_t) \quad \text{для} \;\; t > \sigma. \tag{2.1}$$

В перших двох розділах ми будемо використовувати наступне припущення **(A1)** на лінійний оператор A та різні припущення на нелінійне відображення B. Відображення B включає загаювання, які можуть бути різних типів - розподіленим, зосередженим, змішаним, а також можуть поділятись на сталі та ті, що залежать від стану. В першій частині ми будемо, в основному, використовувати припущення **(A2)** на відображення B, яке наведене нижче.

(A1) *Лінійний оператор A є додатнім, з дискретним спектром в сепарабельному гільбертовому просторі H із щільною областтю визначення $D(A) \subset H$.* Отже існує ортонормований базис $\{e_k\}$ простору H такий, що

$$Ae_k = \lambda_k e_k, \quad \text{з } 0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty.$$

Позначимо $C(a, b; D(A^\alpha))$ простір сильнонеперервних функцій на $[a, b]$ зі значеннями в області $D(A^\alpha)$, який є банаховим простором з нормою $\sup\{\| A^\alpha v(\theta) \|: \theta \in [a, b]\}$. Тут та далі $\| \cdot \|$ - норма H, та $(\cdot, \cdot)$ відповідний скалярний добуток. Також будемо використовувати $| \cdot |_\alpha \equiv \|A^\alpha \cdot \|$ для короткості.

Для $r > 0$, ми позначаємо, для короткості, простір $C_\alpha = C([-r, 0]; D(A^\alpha))$ з нормою $|v|_{C_\alpha} \equiv \sup\{\| A^\alpha v(\theta) \|: \theta \in [-r, 0]\}$.

(A2) *Нелінійне відображення $B : C_\alpha \to H$ $(0 \le \alpha \le 1/2)$ має вигляд*

$$v \;\to\; B(v) = B_0(v(0)) + B_1(v), \tag{2.2}$$

де B_0 та B_1 - відображення з $D(A^\alpha)$ (відповідно з C_α) до H такі, що

$$\| B_0(w_1) - B_0(w_2) \| \le M_0 \;\| A^\alpha(w_1 - w_2) \|, \quad \textit{для} \;\; w_1, w_2 \in D(A^\alpha) \tag{2.3}$$

та

$$\| B_1(v_1) - B_1(v_2) \| \le M_1 \,|v_1 - v_2|_{C_\alpha}, \quad \textit{для} \;\; v_1, v_2 \in C_\alpha, \tag{2.4}$$

де M_0 та M_1 - додатні сталі.

Традиційно для рівнянь із загаюванням (див. [30]), маючи функцію $u : [a-r, b] \to H$, для кожного $t \in [a, b]$ ми позначаємо $u_t = u_t(\theta)$ функцію аргумента $\theta \in [-r, 0]$, яка визначається за правилом $u_t(\theta) = u(t+\theta), \theta \in [-r, 0]$.

Метою нашого дослідження в цій частині є динамічна система, яка породжена еволюційним рівнянням (2.1) з початковими даними $u_\sigma \in C_\alpha$ в момент $\sigma \in \mathbb{R}$:

$$u(\sigma + \theta) = u_\sigma(\theta) \quad \text{для } \theta \in [-r, 0]. \tag{2.5}$$

Ми використовуємо класичне

Визначення 2.1 *Функція $u(t) \in C(\sigma - r, T; D(A^\alpha))$ зветься (слабким) розв'язком задачі (2.1) та (2.5) на $[\sigma, T]$, якщо $u(\sigma+\theta) = u_\sigma(\theta)$ для $\theta \in [-r, 0]$ та*

$$u(t) = e^{-(t-\sigma)A}u_\sigma(0) + \int_\sigma^t e^{-(t-\tau)A}B(u_\tau)\, d\tau. \tag{2.6}$$

Використовуючи стандартний метод нерухомої точки (для стискаючих відображень), можна легко довести існування та єдиність розв'язків задачі (2.1), (2.5). Таким чином ми можемо визначити еволюційну півгрупу S_t у просторі C_α за правилом

$$S_t[u_0] \equiv u_t(\theta) = \begin{cases} u(t+\theta), & \text{для } t+\theta > 0, \\ u_0(t+\theta), & \text{для } t+\theta \le 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

де $u(t)$ - єдиний розв'язок (2.1), (2.5) з $\sigma = 0$.

Зафіксуємо натуральне N та позначимо $P = P_N$ ортопроектор на підпростір, збудований першими N власними векторами оператора A (див. (A1) вище). Позначимо $Q = I - P$. Також визначимо N-вимірний проектор $\widehat{P} = \widehat{P}_N$ та проектор $\widehat{Q} = \widehat{Q}_N$ в C_α наступним чином

$$\widehat{P}\phi = (\widehat{P}\phi)(\theta) = \sum_{k=1}^N e^{-\lambda_k\theta}(\phi(0), e_k)e_k \equiv e^{-A\theta}P\phi(0), \quad \widehat{Q} \equiv I - \widehat{P},$$

де $-r \le \theta \le 0$ та $\phi = \phi(\theta)$ елемент простору C_α. Прості обчислення показують, що $\widehat{P}$ є спектральним проектором генератора $\mathcal{A}$ лінійної півгрупи T_t у C_α, що визначена формулою, подібно до (2.7) для задачі (2.1), (2.5) з $B(u) \equiv 0$, тобто

$$(T_t u_0)(\theta) = \begin{cases} e^{-(t+\theta)A} u_0(0), & t+\theta > 0, \\ u_0(t+\theta), & t+\theta \leq 0. \end{cases}$$

Таким чином $(\mathcal{A}u_0)(\theta) \equiv \lim_{t\to 0} t^{-1}(T_t u_0 - u_0)(\theta)$ існує та належить до C_α тоді і тільки тоді, коли

$$u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \equiv \{v \in C_\alpha : v(\theta) \in C^1(-r, 0; D(A^\alpha)),$$

$$v(0) \in D(A^{1+\alpha}),\ v'(0) + Av(0) = 0\}.$$

В цьому випадку $(\mathcal{A}u_0)(\theta) = u_0'(\theta)$ та $\hat{P}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}\hat{P}$.

Пара $(S_t, C)_{t\geq 0}$ складає динамічну систему. Це зокрема означає, що задача за розв'язками якої будується динамічна система, є `коректно поставленою` в просторі C у сенсі Ж.Адамара [92, 93].

2.2. Інерційні многовиди із загаюванням (ІМЗ) для параболічних рівнянь із загаюванням.

Ми розглядаємо систему параболічних рівнянь із розподіленим загаюванням. Доведено існування Інерційного многовиду із загаюванням (ІМЗ). Ми також показуємо, що система має скінченну кількість істотних мод та може бути (асимптотично) реконструйована за допомоою скінченновимірної системи з зосередженими загаюваннями.

Поняття інерційного многовиду відіграє важливу роль в дослідженні асимптотичної поведінки нескінченновимірних динамічних систем (див., наприклад [86, 52, 73, 31] та посилання в цих роботах). Інерційний многовид це інваріантний скінченновимірний многовид у фазовому просторі $\mathcal{H}$ системи, який експоненційно притягує (з експоненційною швидкістю) всі траєкторії. Він, зазвичай будується як графік деякого відображення з $P\mathcal{H}$ в $(I - P)\mathcal{H}$, де P є N-вимірним проектором. Однак існування такого многовиду зазвичай вдається довести при достатньо істотному обмеженні на спектр (див. процитовані вище роботи). Для вивчення випадка, коли це обмеження не має місця, були запропоновані такі поняття як Наближений Інерційний

Многовид (НІМ) (див. [84, 31]) та експоненційний атрактор [81]. Це відкрило нові можливості у чисельному вивченні асимптотичної поведінки динамічних систем.

Поняття інерційного многовиду з загаюванням (ІМЗ) було запропоновано у [75]. ІМЗ не потребує обмежень на спектр, є інваріантною липшицевою поверхнею і виявляється корисним при дослідженнях властивостей динамічної системи.

Нашою найближчою метою є узагальнення результатів [75] на випадок параболічних рівнянь із загаюванням. Для таких рівнянь мінімальним інтервалом, на якому повинні бути визначені функції, повинен бути інтервал довжини $r > 0$ (див., наприклад, [30, 53, 49, 63, 43] та [42], де був збудований Інерційний многовид для РЧП із загаюванням). Як і НІМ, наш ІМЗ будується на деякому інтервалі $[-T, 0]$.

Ми доводимо, що ІМЗ існує для всіх достатньо малих T та для довільних N та r. Найбільш важливим є випадок, коли сталі Липшиця многовида є меншими за одиницю. Ми також представляємо алгоритм вибора T та r в залежності від вимірності N для виконання цієї умови. Також наведені верхня та нижня оцінки для T та верхня оцінка для r в контексті нашого алгоритма.

В частковому випадку $r = 0$ (відсутність загаювання) результати [75] залишаються без змін та при попередніх припущеннях.

Важливим наслідком існування ІМЗ є посилення результата Фояша та Проді [85] про визначні моди (див. також [75, 200, 17, 31] для випадку без загаювання). Ми доводимо, що якщо u^1, u^2 є двома розв'язками, які задовільняють $|P(u^1(t_k) - u^2(t_k))|_{\mathcal{H}} \to 0$, при $t_k \to +\infty$, то $|u^1(t) - u^2(t)|_{\mathcal{H}} \to 0$, при $t \to +\infty$, де властивості часової послідовності $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ залежать тільки від проектора P.

Іншим наслідком (див., також [75] для випадку без загаювання) є наступна властивість. Якщо орбіта визначена для $t \leq 0$ та не зростає занадто швидко на $-\infty$, тоді $(I - P)u(0)$ є функцією $\{Pu(-t_k)\}_{k=1}^{\infty}$, де $t_k \to +\infty$ як раніше. В цьому сенсі початкова нескінченновимірна система (рівняння) із розподіленим на сегменті $[-r, 0]$ загаюванням є еквівалентною скінченновимірній системі з зосередженим в точках $\{-t_k\}_{k=1}^{\infty}$ загаюванням.

Перед викладенням результатів, відзначимо складність, яка пов'язана з присутністю загаювання в системі. Проілюструємо це на наступному прикладі. Для побудови ІМЗ або НІМ на сегменті $[-T, 0]$ зазвичай шукають розв'язок, який є нерухомою точкою деякого відображення, яке діє в просторі функцій, що визначені на $[-T, 0]$. Це відображення зазвичай пов'язано з формулою варіації сталих. Для системи з загаюванням $r > 0$, формула варіації сталих визначає відображення, яке діє з простору функцій, визначених на $[-T-r, 0]$, в простір функцій, визначених на $[-T, 0]$. Таким чином, одразу бачимо, що метод нерухомої точки тут застосувати неможливо. Для подолання цієї перешкоди ми введемо функцію зсуву-продовження, яка є ключовою в наших побудовах.

2.2.1. Існування інерційного многовиду з загаюванням. Головним результатом цієї частини є наступне твердження про існування Інерційного многовиду з загаюванням для задачі (2.1).

Теорема 2.2 . *Існує T_0 таке, що для довільного $T \in (0, T_0]$, довільних $p \in P_N H$ та $\psi \in \widehat{Q}_N C_\alpha$ існує єдиний розв'язок $u(t)$ задачі (2.1), що визначений на $[-T, \infty)$ такий, що*

$$P_N u(0) = p, \quad \widehat{Q}_N\, u_{-T} = \psi.$$

Більш того, якщо ми положимо $\Phi(p, \psi) \equiv \widehat{Q}_N\, u_0$, то це визначає липшицеве відображення з $P_N H \times \widehat{Q}_N C_\alpha$ до $\widehat{Q}_N C_\alpha$ тобто, для довільних $(p^i, \psi^i) \in P_N H \times \widehat{Q}_N C_\alpha, i = 1, 2$ маємо:

$$|\Phi(p^1, \psi^1) - \Phi(p^2, \psi^2)|_{C_\alpha} \;\leq\; L_1(T)|p^1 - p^2|_\alpha + L_2(T)|\psi^1 - \psi^2|_{C_\alpha}. \tag{2.8}$$

Більш того, існує стала $\tilde{c}$ така, що якщо $\lambda_N^{1-\alpha} > \tilde{c}$, то можливо знайти T та $r < T$, такі, що сталі Липшиця $L_i < 1, \; i = 1, 2.$

Ми кажемо, що Φ *визначає многовид* $\mathcal{M}$ *в* $P_N H \times \widehat{Q}_N C_\alpha \times \widehat{Q}_N C_\alpha$*. Цей многовид є інваріантним, тобто якщо* $u(t)$ *є розв'язком (2.1), то*

$$\widehat{Q}_N\, u_t = \Phi\left(P_N\, u(t),\ \widehat{Q}_N\, u_{t-T}\right),\quad t \geq 0.$$

Зауваження 2.3 *Цей многовид із загаюванням існує для довільного* N*, без обмежень на спектр* A *та для довільного загаювання* r *(*r *може бути великим або малим).*

Зауваження 2.4 *Якщо ми положимо* $r = 0$*, то фазовий простір* C_α *перетвориться у* $D(A^\alpha)$ *та проектор* $\widehat{Q}_N$ *стане* Q_N*. Умови, що накладаються на* T *(див. оцінки (2.14), (2.20) та (2.21) нижче) по суті такі самі, як в роботі А.Дебуша та Р.Темама [75] (див. (2.1), (2.4) та (2.5)). В цьому випадку наші результати повторюють результати [75], і тому наша основна увага приділена випадку* $r > 0$*.*

Доведена нижче лема 2.10 дає один з можливих алгоритмів вибора T *та* $r \geq 0$ *в залежності від* N *для отримання* $L_i < 1$*. Також наведені верхня та нижня оцінки для* T *та верхня оцінка для* r *в межах цього алгоритма.*

Зауваження 2.5 *Відзначаємо, що для рівнянь без загаювання існує два широко використовуємих метода побудови інерційних многовидів (див. [86, 52]. Перший метод вимагає розв'язування системи в напрямку спадання часу тобто, маючи початкові умови в* t_0*, необхідно знайти розв'язок для* $t < t_0$*. Для рівнянь із загаюванням це в загальному випадку неможливо.*

Доведення теореми 2.2. Перш за все дамо просту характеристику підпростору $\widehat{Q}_N C_\alpha \subset C_\alpha : \quad \widehat{Q}_N C_\alpha = \{\phi \in C_\alpha \mid P_N\, \phi(0) = 0\}$.

Для фіксованих $T > 0$ та $\psi \in \widehat{Q}_N C_\alpha$ вводимо простори

$$Y_1 \equiv \{y \in C(-T, 0; D(A^\alpha))\ :\ Q_N\, y(-T) = 0\},$$

$$Y_2 = Y_2(\psi) \equiv \{y \in C(-T-r, 0; D(A^\alpha))\ :\ \widehat{Q}_N\, y_{-T} = \psi\}$$

з нормами $|y|_{Y_1} = \sup\limits_{[-T,0]} \parallel A^\alpha y(\cdot) \parallel,\ |y|_{Y_2} = \sup\limits_{[-T-r,0]} \parallel A^\alpha y(\cdot) \parallel$. Відзначимо, що Y_1 - лінійний простір.

Для довільного $\psi \in \widehat{Q}_N C_\alpha$ ми вводимо наступну функцію зсуву-продовження $\mathcal{E} : Y_1 \to Y_2$, яка відіграє ключову роль в наших дослідженнях:

$$\mathcal{E}(y,\psi)(s) \equiv \begin{cases} y(s) + e^{-(s+T)A}\psi(0), & \text{якщо } s \in [-T,0], \\ \psi(s+T) + e^{-(s+T)A}P_N y(-T), & \text{якщо } s \in [-T-r,-T]. \end{cases} \tag{2.9}$$

Нам знадобиться наступна

Лема 2.6 . *Для всіх* $y^i \in Y_1$, $\psi^i \in \widehat{Q}_N C_\alpha, i = 1,2$ *та* $s \in [-T,0]$ *маємо*

$$\|B(\mathcal{E}(y^1,\psi^1)_s) - B(\mathcal{E}(y^2,\psi^2)_s)\|$$

$$\leq (M_0 + M_1)|\psi^1 - \psi^2|_{C_\alpha} + (M_0 + M_1 e^{\lambda_N r})|y^1 - y^2|_{Y_1}. \tag{2.10}$$

Доведення леми 2.6. Для всіх $s \in [-T,0]$

$$\|B(\mathcal{E}(y^1,\psi^1)_s) - B(\mathcal{E}(y^2,\psi^2)_s)\| \leq M_0\|A^\alpha(\mathcal{E}(y^1,\psi^1)(s) - \mathcal{E}(y^2,\psi^2)(s))\|$$

$$+M_1 \max_{\theta\in[-r,0]} \|A^\alpha(\mathcal{E}(y^1,\psi^1)(\theta+s) - \mathcal{E}(y^2,\psi^2)(\theta+s))\|.$$

Використовуючи (2.9), отримуємо

$$\|A^\alpha(\mathcal{E}(y^1,\psi^1)(s) - \mathcal{E}(y^2,\psi^2)(s))\|$$

$$= \|A^\alpha(y^1(s) - y^2(s) + e^{-(s+T)A}(\psi^1(0) - \psi^2(0)))\|$$

та

$$\max_{\theta\in[-r,0]} \|A^\alpha(\mathcal{E}(y^1,\psi^1)(\theta+s) - \mathcal{E}(y^2,\psi^2)(\theta+s))\| =$$

$$= \max\{ \max_{\theta\in[-T-r-s,-T-s]} f(\theta), \quad \max_{\theta\in[-T-s,0]} g(\theta) \},$$

де ми позначили

$$f(\theta) \equiv \|A^\alpha(\psi^1(s+\theta+T) - \psi^2(s+\theta+T) + e^{-(s+\theta+T)A}(y^1(-T) - y^2(-T)))\|,$$

$$g(\theta) \equiv \|A^\alpha(y^1(s+\theta) - y^2(s+\theta) + e^{-(s+\theta+T)A}(\psi^1(0) - \psi^2(0)))\|.$$

Таким чином

$$\max_{\theta\in[-r,0]} \|A^\alpha(\mathcal{E}(y^1,\psi^1)(\theta+s) - \mathcal{E}(y^2,\psi^2)(\theta+s))\|$$

$$\leq |\psi^1 - \psi^2|_{C_\alpha} + e^{\lambda_N r}|y^1 - y^2|_{Y_1}. \tag{2.11}$$

це дає (2.10). Лема 2.6 доведена.

Зафіксуємо $p \in P_N H$ та $\psi \in \widehat{Q}_N C_\alpha$. Введемо відображення $\mathcal{F} : Y_1 \to Y_1$ наступним чином

$$\mathcal{F}(y)(t) \equiv e^{-tA}p + \int_0^t e^{-(t-\tau)A} P_N B(\mathcal{E}(y)_\tau)\, d\tau + \int_{-T}^t e^{-(t-\tau)A} Q_N B(\mathcal{E}(y)_\tau)\, d\tau, \tag{2.12}$$

де $t \in [-T, 0]$ та $\mathcal{E}(y) = \mathcal{E}(y, \psi)$.

Зауваження 2.7 *Для всіх $z \in Y_1$, якщо $y = \mathcal{F}(z)$, то $P_N\, y(0) = p$ та $Q_N\, y(-T) = 0$.*

Якщо ми знайдемо нерухому точку $\mathcal{F}$, тобто $\mathcal{F}(\bar{y}) = \bar{y}$, тоді для $s \in [-T, 0]$

$$\mathcal{E}(\mathcal{F}(\bar{y}))(s) = \mathcal{F}(\bar{y})(s) + e^{-(s+T)A}\psi(0) = \bar{y}(s) + e^{-(s+T)A}\psi(0) = \mathcal{E}(\bar{y})(s)$$

$$= e^{-sA}p + e^{-(s+T)A}\psi(0) + \int_0^s e^{-(s-\tau)A} P_N B(\mathcal{E}(\bar{y})_\tau) d\tau + \int_{-T}^s e^{-(s-\tau)A} Q_N B(\mathcal{E}(\bar{y})_\tau) d\tau.$$

Таким чином $u(s) \equiv \mathcal{E}(\bar{y})(s)$ є розв'язком (2.1) для $s \in [-T, 0]$ з властивостями $P_N u(0) = p$, $\widehat{Q}_N\, u_{-T} = \psi$.

Отже, наша найближча мета - знайти нерухому точку $\mathcal{F}$. Використовуючи наступні оцінки (див., наприклад, [200, 86, 31])

$$\| A^\alpha e^{-tA} P \| \leq \lambda_N^\alpha \cdot e^{\lambda_N |t|},\ t \in R; \quad \| e^{-tA} Q \| \leq e^{-\lambda_{N+1} t},\ t \geq 0;$$

$$\| A^\alpha e^{-tA} Q \| \leq [(\alpha/t)^\alpha + \lambda_{N+1}^\alpha] \cdot e^{-\lambda_{N+1} t}, \quad t > 0, \alpha > 0,$$

маємо

$$\|A^\alpha(\mathcal{F}(y^1)(t) - \mathcal{F}(y^2)(t))\| \leq \int_t^0 \lambda_N^\alpha e^{\lambda_N(\tau - t)} \|B(\mathcal{E}(y^1)_\tau) - B(\mathcal{E}(y^2)_\tau)\| d\tau$$

$$+ \int_{-T}^t \left(\frac{\alpha^\alpha}{(t-\tau)^\alpha} + \lambda_{N+1}^\alpha \right) e^{-\lambda_{N+1}(t-\tau)} \|B(\mathcal{E}(y^1)_\tau) - B(\mathcal{E}(y^2)_\tau)\| d\tau.$$

Лема 2.6 з $\psi^1 = \psi^2 = \psi$ дає

$$\|A^\alpha(\mathcal{F}(y^1)(t) - \mathcal{F}(y^2)(t))\| \leq$$

$$\left[\lambda_N^\alpha e^{-\lambda_N t}\int\limits_t^0 e^{\lambda_N \tau}d\tau + \alpha^\alpha e^{-\lambda_{N+1}t}\int\limits_{-T}^t \frac{e^{\lambda_{N+1}\tau}}{(t-\tau)^\alpha}d\tau + \lambda_{N+1}^\alpha e^{-\lambda_{N+1}t}\int\limits_{-T}^t e^{\lambda_{N+1}\tau}d\tau\right]$$
$$\times\left(M_0 + M_1 e^{\lambda_N r}\right)|y^1 - y^2|_{Y_1} \leq$$
$$\left[\lambda_N^{\alpha-1}(e^{-\lambda_N t}-1) + \frac{\alpha^\alpha}{1-\alpha}(t+T)^{1-\alpha} + \lambda_{N+1}^{\alpha-1}(1-e^{-\lambda_{N+1}(t+T)})\right]$$
$$\times\left(M_0 + M_1 e^{\lambda_N r}\right)|y^1 - y^2|_{Y_1}.$$

Остаточно ми отримуємо

$$|\mathcal{F}(y^1) - \mathcal{F}(y^2)|_{Y_1} \leq \gamma_N(T)\left(M_0 + M_1 e^{\lambda_N r}\right)|y^1 - y^2|_{Y_1},$$

де

$$\gamma_N(T) \equiv \lambda_N^{\alpha-1}(e^{\lambda_N T}-1) + \frac{\alpha^\alpha}{1-\alpha}T^{1-\alpha} + \lambda_{N+1}^{\alpha-1}(1-e^{-\lambda_{N+1}T}). \tag{2.13}$$

Легко бачити, що для довільного N, ми маємо $\gamma_N(T) \to 0$, коли $T \to 0$.

Зауваження 2.8 $\gamma_N(T)$ *не залежить від величини загаювання* r.

Таким чином, якщо ми виберемо T_0 так, що

$$\delta \equiv \gamma_N(T_0)\left(M_0 + M_1 e^{\lambda_N r}\right) < 1, \tag{2.14}$$

то для $T \in (0, T_0]$ отримаємо $|\mathcal{F}(y^1) - \mathcal{F}(y^2)|_{Y_1} \leq \delta |y^1 - y^2|_{Y_1}$.

Тобто існує єдина нерухома точка $\bar{y}$ стискання $\mathcal{F}$.

Тепер ми визначаємо відображення Φ наступним чином. Для фіксованих $p \in P_N H$ та $\psi \in \widehat{Q}_N C_\alpha$ позначимо $\bar{y}$ нерухому точку $\mathcal{F}$, яка отримана для p та ψ. Тоді

$$\Phi(p,\psi) \equiv \widehat{Q}_N \mathcal{E}(\bar{y})_0 \equiv \mathcal{E}(\bar{y})(\theta) - e^{-A\theta}p, \quad \theta \in [-r, 0]. \tag{2.15}$$

Доведемо, що Φ є липшицевим відображенням (див. (2.8)). Нехай y^i такі, що $\mathcal{F}(y^i) = y^i$ для p^i та ψ^i, $i = 1, 2$. Розглянемо

$$y^1(t) - y^2(t) = e^{-tA}(p^1 - p^2)$$

$$+\int_0^t e^{-(t-\tau)A}P_N\left[B(\mathcal{E}(y^1,\psi^1)_\tau) - B(\mathcal{E}(y^2,\psi^2)_\tau)\right]\, d\tau$$

$$+\int_{-T}^{t} e^{-(t-\tau)A} Q_N \left[B(\mathcal{E}(y^1,\psi^1)_\tau) - B(\mathcal{E}(y^2,\psi^2)_\tau) \right] \, d\tau. \tag{2.16}$$

Обчислення та лема 2.6 дають

$$|y^1 - y^2|_{Y_1} \le e^{\lambda_N T} |p^1 - p^2|_\alpha$$

$$+\gamma_N(T) \left[(M_0 + M_1)|\psi^1 - \psi^2|_{C_\alpha} + (M_0 + M_1 e^{\lambda_N r})|y^1 - y^2|_{Y_1} \right],$$

де $\gamma_N(T)$ визначено у (2.13)

$$|y^1 - y^2|_{Y_1} \left[1 - \gamma_N(T)(M_0 + M_1 e^{\lambda_N r}) \right] \le e^{\lambda_N T} |p^1 - p^2|_\alpha$$

$$+\gamma_N(T)(M_0 + M_1)|\psi^1 - \psi^2|_{C_\alpha}.$$

Відзначимо, що існування y^i як нерухомих точок відображення $\mathcal{F}$ було доведено для таких T, що $1 - \gamma_N(T)(M_0 + M_1 e^{\lambda_N r}) > 0$. Таким чином

$$|y^1 - y^2|_{Y_1} \le \left[1 - \gamma_N(T)(M_0 + M_1 e^{\lambda_N r}) \right]^{-1}$$

$$\times \left(e^{\lambda_N T} |p^1 - p^2|_\alpha + \gamma_N(T)(M_0 + M_1)|\psi^1 - \psi^2|_{C_\alpha} \right). \tag{2.17}$$

Тепер розглянемо

$$\Phi(p^1,\psi^1)(\theta) - \Phi(p^2,\psi^2)(\theta) = \mathcal{E}(y^1)(\theta) - \mathcal{E}(y^2)(\theta) - e^{-A\theta}(p^1 - p^2).$$

Використовуючи (2.11), ми отримуємо

$$|\Phi(p^1,\psi^1) - \Phi(p^2,\psi^2)|_{C_\alpha} \le |\psi^1 - \psi^2|_{C_\alpha} + e^{\lambda_N r}|y^1 - y^2|_{Y_1} + e^{\lambda_N r}|p^1 - p^2|_\alpha.$$

З цього та (2.17) отримуємо

$$|\Phi(p^1,\psi^1) - \Phi(p^2,\psi^2)|_{C_\alpha} \le L_1(T)|p^1 - p^2|_\alpha + L_2(T)|\psi^1 - \psi^2|_{C_\alpha},$$

де

$$L_1(T) \equiv e^{\lambda_N r} \left[1 + \frac{e^{\lambda_N T}}{1 - \gamma_N(T)(M_0 + M_1 e^{\lambda_N r})} \right],$$

$$L_2(T) \equiv 1 + \frac{\gamma_N(T) e^{\lambda_N r}(M_0 + M_1)}{1 - \gamma_N(T)(M_0 + M_1 e^{\lambda_N r})}. \tag{2.18}$$

Зауваження 2.9 *Використовуючи* $\gamma_N(T) \to 0$ *для* $T \to 0$, *маємо* $L_1(T) \to 2e^{\lambda_N r}$ *та* $L_2(T) \to 1$ *при* $T \to 0$.

Залишок доведення присвячений випадку $r < T$. В цьому випадку нам треба показати, що L_i можуть бути обрані меншими за 1.

$$\Phi(p^1, \psi^1)(\theta) - \Phi(p^2, \psi^2)(\theta) = \mathcal{E}(y^1)(\theta) - \mathcal{E}(y^2)(\theta) - e^{-A\theta}(p^1 - p^2)$$
$$= y^1(\theta) - y^2(\theta) - e^{-A(\theta+T)}(\psi^1(0) - \psi^2(0)) - e^{-A\theta}(p^1 - p^2)$$
$$= \widehat{Q}_N(y^1(\theta) - y^2(\theta)) - e^{-A(\theta+T)}(\psi^1(0) - \psi^2(0)).$$

Оскільки $r < T$, ми маємо

$$|\Phi(p^1, \psi^1) - \Phi(p^2, \psi^2)|_{C_\alpha} \le |\widehat{Q}_N(y_0^1 - y_0^2)|_{C_\alpha} + |\psi^1(0) - \psi^2(0)|_\alpha e^{-\lambda_{N+1}(T-r)}$$
$$\le |\widehat{Q}_N(y_0^1 - y_0^2)|_{C_\alpha} + |\psi^1 - \psi^2|_{C_\alpha} e^{-\lambda_{N+1}(T-r)}.$$

З (2.16) та леми 2.6 випливає

$$|\widehat{Q}_N(y_0^1 - y_0^2)|_{C_\alpha} \le \gamma_N(r)\big[(M_0+M_1)|\psi^1-\psi^2|_{C_\alpha}+(M_0+M_1 e^{\lambda_N r})|y^1-y^2|_{Y_1}\big] .$$

це та (2.17) дає

$$|\Phi(p^1, \psi^1) - \Phi(p^2, \psi^2)|_{C_\alpha}$$
$$\le |\psi^1 - \psi^2|_{C_\alpha} e^{-\lambda_{N+1}(T-r)} + \gamma_N(r)(M_0 + M_1)|\psi^1 - \psi^2|_{C_\alpha} +$$
$$+ \frac{\gamma_N(r)(M_0 + M_1 e^{\lambda_N r})}{1 - \gamma_N(T)(M_0 + M_1 e^{\lambda_N r})}$$
$$\times \left(e^{\lambda_N T}|p^1 - p^2|_\alpha + \gamma_N(T)(M_0 + M_1)|\psi^1 - \psi^2|_{C_\alpha}\right).$$

Таким чином ми отримуємо властивість Липшиця (2.8) з

$$L_1(T) = \gamma_N(r) e^{\lambda_N T} \frac{e^{\lambda_N T}(M_0 + M_1 e^{\lambda_N r})}{1 - \gamma_N(T)(M_0 + M_1 e^{\lambda_N r})},$$

$$L_2(T) = e^{-\lambda_{N+1}(T-r)} + \gamma_N(r)(M_0 + M_1)\left[1 + \frac{\gamma_N(T)(M_0 + M_1 e^{\lambda_N r})}{1 - \gamma_N(T)(M_0 + M_1 e^{\lambda_N r})}\right]. \quad (2.19)$$

Наступна лема 2.10 дає один з можливих алгоритмів вибора T та r, що залежать від N, для $L_i < 1$.

Лема 2.10 *Оберемо довільне $c > \ln 2$. Припустимо*

$$\lambda_N^{1-\alpha} > (M_0 + M_1 e^c) D_c, \tag{2.20}$$

де $D_c = 4e^c(e^c - e^{-c} + \frac{\alpha^\alpha}{1-\alpha} c^{1-\alpha})$. Тоді, якщо r та T такі, що

$$r + \frac{\ln 2}{\lambda_{N+1}} < T \le \frac{c}{\lambda_{N+1}}, \tag{2.21}$$

тоді сталі Липшиця $L_i < 1$ (див. (2.19)).

Доведення леми 2.10. Спочатку зазначимо, що достатньо довести, що N, T та r задовільняють

$$e^{-\lambda_{N+1}(T-r)} < \frac{1}{2}, \tag{2.22}$$

$$\gamma_N(T) e^{\lambda_N T}(M_0 + M_1 e^{\lambda_N r}) < \frac{1}{4}. \tag{2.23}$$

Дійсно, з (2.23) маємо (2.14) та $\gamma_N(T)(M_0 + M_1 e^{\lambda_N r}) < \frac{1}{2}$, що разом з $r < T$ та (2.23) дає $L_1 < 1$ та $L_2(T) < e^{-\lambda_{N+1}(T-r)} + 2\gamma_N(r)(M_0 + M_1)$. Тоді (2.22) та (2.23) дають $L_2 < 1$. Таким чином ми доведемо, що (2.20),(2.21) дають (2.22),(2.23).

Розглянемо $\gamma_N(T)$, використовуючи $\lambda_{N+1} r \le \lambda_{N+1} T \le c$ (див. (2.21)):

$$\gamma_N(T) \le \frac{e^c - 1}{\lambda_N^{1-\alpha}} + \frac{\alpha^\alpha c^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\lambda_N^{1-\alpha}} + \frac{1 - e^{-c}}{\lambda_N^{1-\alpha}} \le \frac{D_c}{4\lambda_N^{1-\alpha} e^c}.$$

Тепер

$$\gamma_N(T) e^{\lambda_N T}(M_0 + M_1 e^{\lambda_N r}) \le \gamma_N(T) e^c (M_0 + M_1 e^c) \le \frac{D_c(M_0 + M_1 e^c)}{4\lambda_N^{1-\alpha}}.$$

Таким чином (2.23) випливає з (2.20). Легко бачити, що (2.22) є наслідком $r + \frac{\ln 2}{\lambda_{N+1}} < T$ (див. (2.21)). Лема 2.10 доведена. $\square$

Властивість інваріантності Φ є наслідком єдиності розв'язку. Це завершує доведення теореми 2.2. $\blacksquare$

Зауваження 2.11 *З (2.19) ми отримуємо необхідність $r < T$ для $L_2(T) < 1$. Цей факт має пряме пояснення. Дійсно, якщо $r \ge T$, то сегмент $[-T-r, -T]$ початкових даних ψ перетинається з сегментом $[-r, 0]$ визначення $\Phi(\psi)$,* *та можливо обрати* $p^1 = p^2$ *та* ψ^1, ψ^2 *таким чином, що* $|\Phi(\psi^1) - \Phi(\psi^2)|_{C_\alpha} \geq |\psi^1 - \psi^2|_{C_\alpha}$. *Тоді* $L_2(T)$ *буде* ≥ 1. *Це цілком відповідає (2.18).*

Наприклад, ми можемо взяти ψ^1, ψ^2 *так, що* $P_N\psi^i(s) = 0, s \in [-r, 0]$ *та*

$$\max_{\theta\in[-r,T-r]} |Q_N(\psi^1(\theta) - \psi^2(\theta))|_\alpha \leq \max_{\theta\in[T-r,0]} |Q_N(\psi^1(\theta) - \psi^2(\theta))|_\alpha.$$

Тоді $|\psi^1 - \psi^2|_{C_\alpha} = \max_{\xi\in[T-r,0]} |Q_N(\psi^1(\xi) - \psi^2(\xi))|_\alpha$. *З іншого боку*

$$|\Phi(\psi^1) - \Phi(\psi^2)|_{C_\alpha} \geq \max_{\theta\in[-r,-T]} |Q_N(\Phi(\psi^1)(\theta) - \Phi(\psi^2)(\theta))|_\alpha =$$

$$\max_{\theta\in[-r,-T]} |Q_N(\psi^1(\theta+T) - \psi^2(\theta+T))|_\alpha = \max_{\xi\in[T-r,0]} |Q_N(\psi^1(\xi) - \psi^2(\xi))|_\alpha.$$

Тепер ми дамо важливий наслідок теореми 2.2, який стосується скінченності кількості суттєвих мод (для визначення див. [85, 200, 17, 31] та посилання). Для системи з загаюванням (2.1), кажемо, що існує скінченна кількість суттєвих мод, якщо існує N_0 таке, що для всіх $N \geq N_0$ з властивості $|P_N(u^1(t) - u^2(t))|_\alpha \to 0$, при $t \to \infty$ отримуємо $|u^1_t - u^2_t|_{C_\alpha} \to 0$, при $t \to \infty$. Це означає, що тільки скінченна кількість галеркінських координат повністтю визначають асимптотичну поведінку системи. В наступній теоремі 2.12 ми доведемо, що достатньо оцінити ці суттєві (визначальні) координати тільки в послідовності моментів часу.

Теорема 2.12 . *Нехай* T, r *та* N *обрані, як в теоремі 2.2 так, що сталі Липшиця* $L_i < 1$, $i = 1, 2$, *(див. (2.8) та лему 2.10). Розглянемо довільну послідовність* $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, *таку, що* $0 = t_1 < t_2 < .. < t_k \to +\infty$ *та*

$$r + \frac{\ln 2}{\lambda_{N+1}} < t_{i+1} - t_i \leq T, \; i = 1, 2, .. \tag{2.24}$$

Тоді, якщо для довільних двох розв'язків $u^1(t), u^2(t)$ *задачі (2.1) маємо*

$$|P_N(u^1(t_k) - u^2(t_k))|_\alpha \to 0, \qquad \text{при } k \to \infty, \tag{2.25}$$

тоді

$$|u^1_t - u^2_t|_{C_\alpha} \to 0, \qquad \text{при } t \to \infty. \tag{2.26}$$

Доведення теореми 2.12. Ми використовуємо метод доведення, який наведений у [75]. Легко бачити, з (2.19) що $L_i(\widetilde{T}) \le L_i < 1$ для всіх $\widetilde{T} \in (r + \frac{\ln 2}{\lambda_{N+1}}, T]$. Ми використовуємо теорему 2.2 покроково для $\widetilde{T} = t_{i+1} - t_i$.

Для двох розв'язків $u^1(t), u^2(t)$ для (2.1) ми маємо з (2.8)

$$|\widehat{Q}_N(u^1_{t_k} - u^2_{t_k})|_{C_\alpha} \le L_1|P_N(u^1(t_k) - u^2(t_k))|_\alpha + L_2|\widehat{Q}_N(u^1_{t_{k-1}} - u^2_{t_{k-1}})|_{C_\alpha}.$$

Оцінюючи останній член таким самим чином (використовуючи (2.8)), ми отримуємо

$$|\widehat{Q}_N(u^1_{t_k} - u^2_{t_k})|_{C_\alpha} \le L_1 \sum_{j=0}^{k} L_2^{k-j} \cdot |P_N(u^1(t_j) - u^2(t_j))|_\alpha + L_2^k \cdot |\widehat{Q}_N(u^1_0 - u^2_0)|_{C_\alpha}.$$

Властивість (2.25) разом із $L_i < 1$, дають $|\widehat{Q}_N(u^1_{t_k} - u^2_{t_k})|_{C_\alpha} \to 0, \qquad k \to \infty$. Таким чином $|u^1_{t_k} - u^2_{t_k}|_{C_\alpha} \to 0, \quad k \to \infty$. Властивість (2.26) отримуємо одразу. Доведення теореми 2.12 завершено. ■

Зауваження 2.13 *У випадку без загаювання [75] тобто, система (2.1) з $B \equiv B_0, B_1 \equiv 0$ (див. (2.2)), твердження теореми 2.12 (а саме, (2.26) випливає з (2.25) для деяких $\{t_k\}_{k=1}^\infty$) може бути доведено наступним альтернативним способом, без залучення поняття інерційного многовиду із загаюванням.*

Цей спосіб спирається на рекурентну процедуру, яка представлена в [75] (див. доведення теореми 2.12) та наступну оцінку

$$\|Q_N(u^1(t) - u^2(t))\| \le Ce^{-at}\left(1 + \frac{e^{bt}}{\lambda_{N+1}^\alpha}\right)\|u^1(0) - u^2(0)\|,\ a > 0, b > 0. \quad (2.27)$$

Таким чином можна обрати T та N достатньо великі для отримання

$$\|Q_N(u^1(T) - u^2(T))\| \le q\|u^1(0) - u^2(0)\|,\ q < 1.$$

Отже, обираючи, для простоти, $t_k = kT$, ми отримуємо

$$\|Q_N(u^1(kT) - u^2(kT))\| \le q\|u^1((k-1)T) - u^2((k-1)T)\|$$

$$\le q\|P_N(u^1((k-1)T) - u^2((k-1)T))\| + q\|Q_N(u^1((k-1)T) - u^2((k-1)T))\|.$$

Остаточно

$$\|Q_N(u^1(kT)-u^2(kT))\|$$
$$\le \sum_{j=1}^{k} q^{k-j+1}\|P_N(u^1(jT)-u^2(jT))\| + q^k\|u^1(0)-u^2(0)\|.$$

Таким чином (2.25) дає $\|u^1(kT)-u^2(kT)\| \to 0$, *при* $k\to\infty$.

На жаль, у випадку із загаюванням, ми не маємо аналога оцінки (2.27) для проектора $\widehat{Q}_N$. *Таким чином, в цьому випадку для результата теореми 2.12 нам дійсно необхідне поняття інерційного многовиду із загаюванням.*

Як у [75], ми вводимо простір послідовностей в банаховому просторі E:

$$\ell^1_a(E) = \left\{\{u_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} a^n |u_n|_E < \infty\right\}, \ell^\infty(E) = \left\{\{u_n\}_{n=1}^{\infty} : \sup_n |u_n|_E < \infty\right\}.$$

Теорема 2.14 . *Нехай* T, r, N *та послідовність* $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такі як в теоремі 2.12. Розглянемо таке* a, *що* $L_2 < a < 1$.

Тоді для всіх $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *в* $\ell^1_a(P_NH)$ *(відповідно* $\ell^\infty(P_NH)$*), існує єдиний* $u(t)$ *для* $t\le 0$ *такий, що*

(i) $\{\widehat{Q}_N u_{-t_k}\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^1_a(\widehat{Q}_N C_\alpha)$ *(відповідно* $\ell^\infty(\widehat{Q}_N C_\alpha)$*)* .

(ii) Для довільних $k = 1, 2, ..,$ $P_N u(-t_k) = p_k$.

(iii) $\frac{du}{dt} + Au = B(u_t)$ *на довільному сегменті* $[-t_{k+1}, -t_k]$.

Якщо ми позначимо

$$\Phi^\infty(\{p_k\}_{k=1}^{\infty}) \equiv \widehat{Q}_N u_0,$$

то Φ^∞ *є липшицевим відображенням з* $\ell^1_a(P_NH)$ *(відповідно* $\ell^\infty(P_NH)$*) до* $\widehat{Q}_N C_\alpha$.

В цьому сенсі початкове нескінченновимірне рівняння з розподіленим на сегменті $[-r, 0]$ загаюванням є (асимптотично) еквівалентним скінченновимірній системі з зосередженим в точках $\{-t_k\}_{k=1}^{\infty}$ загаюванням.

Доведення теореми 2.14. Ми використовуємо розглядання [75]. Для довільної фіксованої послідовності $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\ell^1_a(P_NH)$ ми визначаємо відображення в просторі $\ell^1_a(\widehat{Q}_N C_\alpha)$ як $\mathcal{F}^\infty : \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \to \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, де $z_k = \Phi(p_k, \xi_{k+1})$, $k = 1, 2, ...$

Використовуючи властивість Липшиця для Φ, легко отримати, що $\mathcal{F}^\infty$ відображає $\ell^1_a(\widehat{Q}_N C_\alpha)$ в себе та є стисканням. Функція $u(t)$ будується на кожному $[-t_{k+1}, -t_k]$, застосовуючи теорему 2.2 з умовами

$$P_N u(-t_k) = p_k, \quad \widehat{Q}_N\, u_{-t_{k+1}} = \psi_{k+1},$$

де $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ - нерухома точка відображення $\mathcal{F}^\infty$ в просторі $\ell^1_a(\widehat{Q}_N C_\alpha)$.

Властивість Липшиця для Φ^∞ також легко випливає. Доведення теореми 2.14 завершено. ■

2.3. Наближені інерційні многовиди (НІМ) для параболічних рівнянь із загаюванням.

Метою цього підрозділу є побудова наближеного інерційного многовиду для параболічних рівнянь у частинних похідних із загаюванням. Наші побудови істотно спираються на поняття інерційного многовиду з загаюванням (ІМЗ) [75], агрументи роботи [54] та техніки, яка розроблена у роботі [148], де ІМЗ збудовано для системи з загаюванням.

Ключовою ідеєю наших побудов є знайдений зв'язок [150] між двома поняттями ІМЗ та НІМ. Детальніше, ми використовуємо відображення з теорії ІМЗ для побудови нової родини НІМ. Як показано в [151], це відображення дозволяє отримати багато різних НІМ, але ми обираємо НІМ, які включають всі стаціонарні розв'язки системи. Ми також досліджуємо залежність НІМ від величини загаювання та доводимо, що загаювані НІМ прямують до НІМ без загаювання, коли величина загаювання прямує до нуля. Відмітемо, що НІМ для нелінійних РЧП із загаюванням будуються вперше.

Основна істотна відмінність (та джерело технічних складнощів) між загаюваними та незагаюваними нелінійними параболічними рівняннями полягає в тому факті, що власні проектори $\widehat{P}_N$ та $\widehat{Q}_N$ (введені раніше) *не* мають властивість експоненційної дихотомії (див., наприклад, [200, (IX.1.12),(IX.1.12)]). Наш підхід заснован на детальному вивченні властивостей ІМЗ та одночасній роботі з власними проекторами в різних просторах (див. проектори $P, Q, \widehat{P}, \widehat{Q}$ нижче). Важливим моментом тут є властивість Липшиця ІМЗ та можливість оцінити сталі Липшиця (див. [148, (3.12)]) в термінах параметрів системи (див. леми 2.16 та 2.22). Ці сталі Липшиця істотним чином залежать від часу загаювання r : член $e^{\lambda_N r}$ у [148, (3.12)]. Як зазвичай для НІМ, для отримання меншої η-товщини притягуючого околу, потрібно збільшити вимірність N, таким чином $e^{\lambda_N r}$ швидко зростає. Ця суттєва залежність від величини загаювання вимагає акуратного аналізу навіть в тих частинах дослідження, які подібні випадку без загаювання.

Ми можемо застосувати наші результати, наприклад, до рівняння реакції-дифузії з загаюванням (див. монографію [220] для конкретних прикладів та обговорень) та отримати, що для системи, яка є нескінченновимірною за обома змінними (часовою та просторовою) існують скінченне число просторових координат (власних векторів лінійної частини) та липшицевий многовид над їх лінійною оболонкою, який наближає асимптотичні режими всієї системи.

Як у випадку без загаювання [103], можна легко довести наступну лему.

Лема 2.15 . *Нехай $u(t) = u^1(t) - u^2(t)$, де $u^1(t)$ та $u^2(t)$ є розв'язками (2.1). Тоді існують додатні сталі a_1 та a_2 такі, що $|u_t|_{C_\alpha} \le a_1 \cdot e^{a_2(t-s)} |u_s|_{C_\alpha}$, $t \ge s$.*

Нагадаємо, що для фіксованого натурального N ми позначили $P = P_N$ ортогональний проектор на підпростір натягнутий на перші N власних векторів A. Далі $Q = I - P$. Нам також знадобляться проектори $\widehat{P} = \widehat{P}_N$ та $\widehat{Q} = \widehat{Q}_N$ у просторі C_α (див. підрозділ 2.1). Ми будемо спиратися на побудову інерційного многовиду з загаюванням (ІМЗ), яке викладене у підрозділі 2.2, зокрема на теорему 2.2 (див. деталі в [148]). Як ми відмічали раніше, само поняття ІМЗ було введено для випадку без загаювання в [75].

2.3.1. НІМ, що проходять крізь всі стаціонарні розв'язки (СНІМ). Нас цікавить випадок, коли обидві сталі Липшиця $L_i(T), i = 1, 2,$ відображення Φ (див. теорему 2.2 та (2.8)) менші за одиницю. Нам знадобиться наступне посилення алгоритма [148, лема 3.2] вибора T та r в залежності від N для того, аби гарантувати малість L_i.

Лема 2.16 . *Оберемо довільні* $\varepsilon, \delta \in (0,1]$. *Для всіх* $c > 0$ *позначимо* $D_c \equiv 4e^c(e^c - e^{-c} + \frac{\alpha^\alpha}{1-\alpha}c^{1-\alpha})$.

(i) Нехай $\lambda_N^{1-\alpha} > \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)(M_0 + M_1e^c)\frac{1}{4}D_c$. *Тоді, якщо* r *та* T *такі, що* $r < T$ *та* $\lambda_{N+1}T \le c$, *то* $L_1(T) < \varepsilon$.

(ii) Нехай $\lambda_{N+1}^{1-\alpha} > \frac{1}{\delta}(M_0 + M_1e^c)D_ce^{-c}$. *Тоді умова* $r + \frac{\ln(2\delta^{-1})}{\lambda_{N+1}} < T \le \frac{c}{\lambda_{N+1}}$, *дає* $L_2(T) < \delta$.

Наслідок 2.17 . *Оберемо довільні* $\varepsilon, \delta \in (0,1]$. *Тоді для всіх* $c > \ln(2\delta^{-1})$ *умови*

$$\lambda_N^{1-\alpha} > (M_0 + M_1e^c)D_c \max\left\{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right); \frac{e^{-c}}{\delta}\right\}, \tag{2.28}$$

$$r + \frac{\ln(2\delta^{-1})}{\lambda_{N+1}} < T \le \frac{c}{\lambda_{N+1}}, \tag{2.29}$$

дають $L_1(T) < \varepsilon$ *та* $L_2(T) < \delta$. *Тут* D_c *визначається як в лемі 2.16.*

Доведення леми 2.16. Нам знадобляться формули для L_i (див. [148, (3.12)]):

$$L_1(T) = \gamma_N(r)\frac{e^{\lambda_N T}(M_0 + M_1e^{\lambda_N r})}{1 - \gamma_N(T)(M_0 + M_1e^{\lambda_N r})},$$

$$L_2(T) = e^{-\lambda_{N+1}(T-r)} + \gamma_N(r)(M_0 + M_1)\left[1 + \frac{\gamma_N(T)(M_0 + M_1e^{\lambda_N r})}{1 - \gamma_N(T)(M_0 + M_1e^{\lambda_N r})}\right].$$

Бачимо, що $\gamma_N(T)e^{\lambda_N T}(M_0 + M_1e^{\lambda_N r}) < \varepsilon(\varepsilon + 1)^{-1}$ дає $L_1(T) < \varepsilon$. Використовуючи $r < T, \lambda_{N+1}T \le c$ та

$$\gamma_N(T) \le \frac{D_c}{4e^c\lambda_N^{1-\alpha}} \tag{2.30}$$

ми отримуємо умову $D_c(M_0 + M_1e^{\lambda_N r})(4\lambda_N^{1-\alpha})^{-1} < \varepsilon(\varepsilon + 1)^{-1}$. Це доводить (i).

Доведемо (ii). Маємо $e^{-\lambda_{N+1}(T-r)} < \delta/2$ тоді і тільки тоді, коли $r + \frac{\ln(2\delta^{-1})}{\lambda_{N+1}} < T$. Як в (i), маємо $\gamma_N(r)(M_0 + M_1) < \delta/2$, якщо $D_c(M_0 + M_1)(4e^c\lambda_{N+1}^{1-\alpha})^{-1} < \delta/4$ та $\lambda_{N+1}r \le c$. Таким чином потрібно $\lambda_{N+1}^{1-\alpha} > \frac{1}{\delta}(M_0 + M_1)D_ce^{-c}$. З іншої сторони, для $\frac{\gamma_N(T)(M_0 + M_1e^{\lambda_N r})}{1 - \gamma_N(T)(M_0 + M_1e^{\lambda_N r})} < 1$ достатньо $\gamma_N(T)(M_0 + M_1e^{\lambda_N r}) < 1/2$. Це можливо якщо $\lambda_N T \leq c$ та $\lambda_{N+1}^{1-\alpha} > \frac{1}{2}(M_0 + M_1 e^c) D_c e^{-c}$. Оскільки $\delta \leq 1$, ми отримуємо (ii). Доведення леми 2.16 завершено. $\square$

Розглянемо N, r та T, які задовільняють (2.28), (2.29). Достатньо взяти $\varepsilon = \delta = 1$ та для довільного $c > \ln 2$ припустити $\lambda_N^{1-\alpha} > (M_0 + M_1 e^c) D_c$ та $\lambda_{N+1} r + \ln 2 < \lambda_{N+1} T \leq c$ (див. [148, лема 3.2]). Оскільки $L_2 < 1$ ми можемо використати відображення Φ (для довільного фіксованого $p \in P_N H$) як стискання в $\widehat{Q}_N C_\alpha$:

$$|\Phi(p, \psi^1) - \Phi(p, \psi^2)|_{C_\alpha} \ \leq \ L_2 |\psi^1 - \psi^2|_{C_\alpha}, \quad L_2 < 1.$$

Розглянемо єдину нерухому точку $\psi \in \widehat{Q}_N C_\alpha$ відображення Φ, побудовану для $p \in P_N H$. Визначаємо відображення $\Psi^T \equiv \Psi^{T,N} : P_N H \to \widehat{Q}_N C_\alpha$ так

$$\Psi^T(p) \equiv \Phi(p, \psi), \text{ де } \psi = \Phi(p, \psi). \tag{2.31}$$

Нашою метою є доведення того, що графік Ψ^T

$$\mathcal{M} \equiv \{e^{-A\theta} p + \Psi^T(p)(\theta) : p \in P_N H\} \subset C_\alpha \tag{2.32}$$

є наближеним інерційним многовидом. Відмітемо, що многовид $\mathcal{M}$ включає всі стаціонарні точки (2.1). З цієї причини, згідно термінології [107], ми називаємо $\mathcal{M}$ *Стаціонарним наближеним інерційним многовидом (СНІМ).*

Зауваження 2.18 *За визначенням, $\mathcal{M}$ включає також всі T-периодичні розв'язки (2.1).*

Ми будемо припускати, що (2.1) має поглинаючу кулю в C_α. Використовуючи існування поглинаючої кулі, ми можемо стандартним чином "урізати" нелінійний член B поза цієї кулі, тобто він буде замінений на функцію, рівну B всередині кулі та має обмежений носій. Позначимо R радіус деякої кулі, яка включає цей носій.

Наступні властивості Ψ^T та $\mathcal{M}$ будуть використані в подальшому.

Лема 2.19 . *Нехай r, T та N задовільняють (2.28), (2.29) для деяких $\varepsilon, \delta \in (0,1)$. Тоді відображення Ψ^T, що визначене в (2.31), задовільняє*

$$|\Psi^T(p^1) - \Psi^T(p^2)|_{C_\alpha} \leq L_1 (1 - L_2)^{-1} |p^1 - p^2|_\alpha, \tag{2.33}$$

де L_1, L_2 сталі Липшиця Φ. Більш того, для всіх $0 \le t \le T$ маємо

$$|\widehat{Q}u_t - \Psi^T(Pu(t))|_{C_\alpha} \le (1-\bar{q})^{-1}\left[C_R^1 \cdot e^{-\gamma T} + C_R^2 \cdot e^{-\gamma t}\right], \qquad (2.34)$$

для довільного розв'язку (2.1) $u = u(t)$ із початковою умовою $u_0 = e^{-A\theta}p + \Psi^T(p) \in C_\alpha$ при $t = 0$. Тут γ є довільне число з $[\lambda_N, \lambda_{N+1}]$, додатні сталі C_R^1 та C_R^2 залежать тільки від радіуса дисипативності, додатня стала $\bar{q}$ визначена як

$$\bar{q} \equiv (M_0 + M_1 e^{\lambda_{N+1} r})\left(\frac{\alpha^\alpha}{1-\alpha}T^{1-\alpha} + T\lambda_{N+1}^\alpha\right) < \frac{1}{2}. \qquad (2.35)$$

Доведення леми 2.19. Властивість (2.33) є наслідком (2.8) та визначення Ψ^T. Доведемо, що $\bar{q} < 1/2$. Відмітемо, що (2.28), (2.29) дає $\lambda_{N+1} r < \lambda_{N+1} T \le c$ та $\lambda_N^{1-\alpha} > (M_0 + M_1 e^c) D_c/2$. Маємо

$$\bar{q} \le (M_0 + M_1 e^c)\left(\frac{\alpha^\alpha}{1-\alpha}c^{1-\alpha} + c\right)\lambda_{N+1}^{\alpha-1} \le \frac{(M_0 + M_1 e^c)D_c}{4\lambda_{N+1}^{1-\alpha}} < \frac{1}{2}.$$

Доведемо властивість (2.34). Для довільного фіксованого $t_0 \in [0, T]$ позначимо $w(t)$ функцію, що визначена на $[-T-r, t_0]$ таку, що $w(t) = u(t)$ для $t \in [0, t_0]$ та $w(t) = v^0(t)$ для $t \in [-T-r, 0]$, де $v^0(t)$ є розв'язком, який використовується для побудови $\Psi^T(p)$ (тобто, $P_N v^0(0) = p$ та $\widehat{Q}v_0^0 = \widehat{Q}v_{-T}^0$). Тепер ми використовуємо формулу варіації сталих та визначення w та $v^0(t)$ для того, аби отримати

$$w(t) = e^{-(t-t_0)A}Pu(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-\tau)A}PB(w_\tau)d\tau + \int_{t_0-T}^{t} e^{-(t-\tau)A}QB(w_\tau)d\tau$$

$$+ e^{-(t+T)A}\Psi^T(Pu(0))(0) + \int_{-T}^{t_0-T} e^{-(t-\tau)A}QB(v_\tau^0)d\tau, \quad \text{для } t \in [t_0 - T, t_0] \qquad (2.36)$$

та $w(t) = v^0(t)$ для $t \in [t_0 - T - r, t_0 - T]$. Тут ми використовуємо

$$Qu(0) = Qv^0(0) = Q\mathcal{E}(\bar{y})(0) = e^{-TA}\Psi^T(Pu(0))(0) + \int_{-T}^{0} e^{\tau A}QB(w_\tau)d\tau.$$

Визначимо функцію v^{t_0} як той розв'язок, який використовується для побудови $\Psi(Pu(t_0))$, але посунутий на час t_0, тобто

$$v^{t_0}(t) = e^{-(t-t_0)A}Pu(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-\tau)A}PB(v_\tau^{t_0})d\tau + \int_{t_0-T}^{t} e^{-(t-\tau)A}QB(v_\tau^{t_0})d\tau$$

$$+ e^{-(t-t_0+T)A}\Psi^T(Pu(t_0))(0) \quad \text{для } t \in [t_0 - T, t_0] \tag{2.37}$$

та $v^{t_0}(t) = \Psi^T(Pu(t_0))(t - t_0 + T) + e^{-(t-t_0+T)A}Pv^{t_0}(t_0 - T)$ для $t \in [t_0 - T - r, t_0 - T]$.

Тепер ми використовуємо (2.36), (2.37) для того, аби отримати

$$w(t) - v^{t_0}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-(t-\tau)A}P\left\{B(w_\tau) - B(v_\tau^{t_0})\right\}d\tau$$

$$+ \int_{t_0-T}^{t} e^{-(t-\tau)A}Q\left\{B(w_\tau) - B(v_\tau^{t_0})\right\}d\tau + e^{-(t+T)A}\Psi^T(Pu(0))(0)$$

$$-e^{-(t-t_0+T)A}\Psi^T(Pu(t_0))(0) + \int_{-T}^{t_0-T} e^{-(t-\tau)A}QB(v_\tau^0)d\tau, \quad \text{для} \quad t \in [t_0 - T, t_0] \tag{2.38}$$

та

$$w(t) - v^{t_0}(t) = v^0(t) - \Psi^T(Pu(t_0))(t - t_0 + T) - e^{-(t-t_0+T)A}Pv^{t_0}(t_0 - T)$$

для $t \in [t_0 - T - r, t_0 - T]$. Розглянемо простір $C(t_0 - T - r, t_0; D(A^\alpha))$ з нормою $|v|_{t_0} \equiv \sup\limits_{t \in [t_0-T-r, t_0]} \{e^{-\gamma(t_0-t)}\|A^\alpha v(t)\|\}$. Легко бачити, що

$$\|A^\alpha(w(t) - v^{t_0}(t))\| \le [q_1(t_0,t) + q_2(t_0,t)]|w - v^{t_0}|_{t_0} + e^{-\lambda_{N+1}(t+T)}\|A^\alpha\Psi^T(Pu(0))(0)\|$$

$$+e^{-\lambda_{N+1}(t-t_0+T)}\|A^\alpha\Psi^T(Pu(t_0))(0)\| + \int_{-T}^{t_0-T}\left(\left(\frac{\alpha}{t-\tau}\right)^\alpha + \lambda_{N+1}^\alpha\right)e^{-\lambda_{N+1}(t-\tau)}\|B(v_\tau^{t_0})\|d\tau, \tag{2.39}$$

де

$$q_1(t_0,t) \equiv (M_0 + M_1 e^{\gamma r})\int_{t_0-T}^{t}\left(\left(\frac{\alpha}{t-\tau}\right)^\alpha + \lambda_{N+1}^\alpha\right)e^{-\lambda_{N+1}(t-\tau)}e^{\gamma(t_0-\tau)}d\tau \tag{2.40}$$

та

$$q_2(t_0,t) \equiv (M_0 + M_1 e^{\gamma r})\lambda_N^\alpha \int\limits_t^{t_0} e^{\lambda_N(\tau - t)} e^{\gamma(t_0-\tau)} d\tau. \tag{2.41}$$

Отримуємо (як у [54]) з (2.40), (2.41) що

$$q_1(t_0,t) + q_2(t_0,t) \le e^{\gamma(t_0-t)}\bar{q}, \quad t \in [t_0 - T, t_0], \quad \bar{q} < 1/2. \tag{2.42}$$

Використовуючи (2.39), це дає

$$\|A^\alpha(w(t) - v^{t_0}(t))\| \le e^{\gamma(t_0-t)}\bar{q}|w - v^{t_0}|_{t_0} + \{\text{ останні три члени у (2.39)}\}.$$

Домножуємо це на $e^{-\gamma(t_0-t)}$

$$\|A^\alpha(w(t) - v^{t_0}(t))\| e^{-\gamma(t_0-t)} \le \bar{q}|w - v^{t_0}|_{t_0} + e^{-\lambda_{N+1}(t+T) - \gamma(t_0-t)}\|A^\alpha \Psi^T(Pu(0))(0)\|$$

$$+ e^{-\lambda_{N+1}(t-t_0+T)-\gamma(t_0-t)}\|A^\alpha\Psi^T(Pu(t_0))(0)\| + e^{-\gamma t_0}\bar{q}M(1+R). \tag{2.43}$$

Зауваження 2.20 *Ми отримали останній член так*

$$e^{-\gamma(t_0-t)} \int\limits_{-T}^{t_0-T} \left(\left(\frac{\alpha}{t-\tau}\right)^\alpha + \lambda_{N+1}^\alpha \right) e^{-\lambda_{N+1}(t-\tau)} \|B(v_\tau^{t_0})\| d\tau$$

$$\le e^{-\gamma(t_0-t)} q_1(0, t_0 - T) e^{\gamma T} \max_{\|z\|_{C_\alpha} \le R} \|B(z)\| \le e^{-\gamma(t_0-t)} e^{-\gamma t}\bar{q} \max \|B(z)\|$$

$$\le e^{-\gamma t_0}\bar{q} \max_{\|z\|_{C_\alpha}\le R} \|B(z)\| \le e^{-\gamma t_0}\bar{q}M(1+R).$$

Ми використовували (2.40), (2.42) та властивості B.

Беремо супремум по $[t_0 - T, t_0]$ в (2.43)

$$\sup e^{-\gamma(t_0-t)}\|A^\alpha(w(t) - v^{t_0}(t))\| \le \bar{q}|w - v^{t_0}|_{t_0} + e^{-\lambda_{N+1}t_0 - \gamma T}\|A^\alpha\Psi^T(Pu(0))(0)\|$$

$$+ e^{-\gamma T}\|A^\alpha\Psi^T(Pu(t_0))\| + \bar{q}e^{-\gamma t_0}M(1+R). \tag{2.44}$$

Тепер розглянемо $[t_0 - T - r, t_0 - T]$. Маємо

$$e^{-\gamma(t_0-t)}\|A^\alpha(w(t) - v^{t_0}(t))\| \le e^{-\gamma(t_0-t)}\|A^\alpha(v^0(t) - \Psi^T(Pu(t_0))(t - t_0 - T))\|$$

$$+ e^{-\lambda_N(t-t_0+T)-\gamma(t_0-t)}\|A^\alpha P v^{t_0}(t_0 - T)\|. \tag{2.45}$$

Оскільки $t \le t_0 - T \le 0$, ми отримуємо $-\gamma(t_0 - t) \le -\gamma t_0$ та $-\lambda_N(t - t_0 + T) - \gamma(t_0 - t) = -\gamma t_0 + (\gamma - \lambda_N)t + \lambda_N(t_0 - T) \le -\gamma t_0$.

Використовуючи це, ми беремо супремум в (2.45) для $t \in [t_0 - T - r, t_0 - T]$. Остаточно ми спираємось на (2.44), дисипативність (2.1) та властивість Липшиця Ψ^T для того, аби отримати $|w - v^{t_0}|_{t_0} \le \bar{q}|w - v^{t_0}|_{t_0} + C_R^1 \cdot e^{-\gamma T} + C_R^2 \cdot e^{-\gamma t_0}$. Оскільки $\widehat{Q}u_{t_0} = \widehat{Q}w_{t_0}$ ми маємо $\widehat{Q}u_{t_0} - \Psi^T(Pu(t_0)) = \widehat{Q}(w_{t_0} - v_{t_0}^{t_0})$. Таким чином остання оцінка дає (2.34). Доведення леми 2.19 завершено. □

Основним результатом цього підрозділу є наступна

Теорема 2.21 . *Оберемо довільне $\eta > 0$. Існують N та r_0 такі, що для довільного $r \in [0, r_0]$ існує N-вимірний наближений інерційний многовид, який включає всі стаціонарні точки задачі (2.1) та товщина його притягуючого околу є η. Детальніше, маємо*

$$|\widehat{Q}u_t - \Psi^T(Pu(t))|_{C_\alpha} \le C_R \cdot exp\left\{-\frac{2}{T}(t - t_*)\ln 2\right\} + \eta,$$

для всіх $t \ge t_* + T/2$ та довільного розв'язку $u = u(t)$ задачі (2.1) такого, що $|u_t|_{C_\alpha} \le R$ для $t_* \le t < \infty$.

Доведення терем 2.21. Ми слідуємо лінії доведення, представленого в [54] та використовуємо леми 2.19 та 2.22. Відмітемо, що ми не можемо безпосередньо застосувати результати [54] до нашого загаюваного випадку оскільки дослідження в [54] суттєво спираються на оцінку (див. [54, лема 2.2])

$$\|QA^\alpha u(t)\| \le \left[e^{-\lambda_{N+1}(t-s)} + M(1+k)a_1\lambda_{N+1}^{-1+\alpha} \cdot e^{a_2(t-s)}\right] \|A^\alpha u(s)\|, \; t > s.$$

На жаль, у випадку із загаюванням, немає аналога останньої оцінки для проектора $\widehat{Q}$ (див. [148, зауваження 3.8]). Замість цього наше доведення спирається на властивості Липшиця відображень Φ та Ψ. Нам знадобиться наступна

Лема 2.22. *Нехай N, T та r задовільняють*

$$\lambda_N^{1-\alpha} > (M_0 + M_1 e^c) D_c \max\left\{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{28}{3}a_1 e^{a_2 T}\right), 4e^{-c}\right\}, \tag{2.46}$$

$$r + \frac{\ln 8}{\lambda_{N+1}} < \frac{T}{2} < T \le \frac{c}{\lambda_{N+1}}, \tag{2.47}$$

для деякого $c > 2\ln 8$ *та сталі* a_1, a_2 *визначені в лемі 2.15. Тоді відображення* Ψ^T *визначене в (2.31) має наступні властивості*

$$|\widehat{Q}u_t - \Psi^T(Pu(t))|_{C_\alpha} \le C_R^1 \cdot exp\{-\frac{2}{T}(t-t_*)\ln 2\} + C_R^2 \cdot exp\{-\frac{1}{2}\lambda_{N+1}T\}, \tag{2.48}$$

для всіх $t \ge t_* + T/2$ *та довільного розв'язку* $u = u(t)$ *задачі (2.1), яке задовільняє* $|u_t|_{C_\alpha} \le R$ *для* $t_* \le t < \infty$.

Доведення леми 2.22. Розглянемо довільний розв'язок $u(t)$ задачі (2.1). Позначимо $\widehat{u}(t)$ розв'язок із початковими умовами $\widehat{u}_0 = e^{-A\theta}Pu(0) + \Psi^T(Pu(0)) \in C_\alpha$. Маємо

$$\widehat{Q}u_t - \Psi^T(Pu(t)) = \widehat{Q}(u_t - \widehat{u}_t) + [\widehat{Q}\widehat{u}_t - \Psi^T(P\widehat{u}(t))] + [\Psi^T(P\widehat{u}(t)) - \Psi^T(Pu(t))].$$

Використовуючи (2.7) та лему 2.22, ми отримуємо для всіх $t \in [T/2, T]$:

$$|\widehat{Q}(u_t - \widehat{u}_t)|_{C_\alpha} \le L_1|P(u(t)-\widehat{u}(t))|_\alpha + L_2|\widehat{Q}(u_0-\widehat{u}_0)|_{C_\alpha} \le \left[L_1 a_1 e^{a_2 T} + L_2\right] |\widehat{Q}(u_0-\widehat{u}_0)|_{C_\alpha}.$$

Властивість Липшиця Ψ^T та лема 2.15 дають

$$|\Psi^T(P\widehat{u}(t)) - \Psi^T(Pu(t))|_{C_\alpha} \le \frac{L_1}{1-L_2}|P(u(t)-\widehat{u}(t))|_\alpha \le \frac{L_1}{1-L_2} a_1 e^{a_2 T}|\widehat{Q}(u_0-\widehat{u}_0)|_{C_\alpha}.$$

Останні дві оцінки та (2.34) дають

$$|\widehat{Q}u_t - \Psi^T(Pu(t))|_{C_\alpha} \le \left[L_1\left(1 + \frac{L_1}{1-L_2}\right)a_1 e^{a_2 T} + L_2\right] |\widehat{Q}u_0 - \Psi^T(Pu(0))|_{C_\alpha} + \beta$$

або коротше

$$d(t) \le \nu \cdot d(0) + \beta, \tag{2.49}$$

де ми позначили $d(t) \equiv |\widehat{Q}u_t - \Psi^T(Pu(t))|_{C_\alpha}$ та

$$\nu \equiv L_1\left(1 + \frac{L_1}{1-L_2}\right)a_1 e^{a_2 T} + L_2, \qquad \beta \equiv (1-\bar{q})^{-1} \times \left[C_R^1 \cdot e^{-\gamma T} + C_R^2 \cdot e^{-\gamma T/2}\right].$$

Можна перевірити, що (2.46), (2.47) дають $\nu \le 1/2$. Дійсно, ми можемо взяти $L_2 < \delta = 1/4$ та $L_1 < \varepsilon = 3/(28 a_1 e^{a_2 T})$ та застосувати наслідок для цих значень δ та ε. Таким чином ми отримуємо для $t_n = t_* + nT/2$

$$d(t_{n+1}) \le \frac{1}{2}d(t_n) + \beta.$$

Ітерація дає

$$d(t_n) \le 2^{-n} d(t_0) + 2\beta. \tag{2.50}$$

Для $t \in [t_n + T/2, t_n + T]$ маємо $d(t) \le \frac{1}{2} d(t_n) + \beta$. Таким чином (2.50) дає для всіх $t \ge t_* + T/2$ оцінку $d(t) \le 2\exp\left\{-\frac{2}{T}(t - t_*)\ln 2\right\} \cdot d(t_*) + 2\beta$. Це дає (2.48) якщо ми виберемо $\gamma = \lambda_{N+1}$. Доведення леми 2.22 завершено. □

Тепер для завершення доведення теореми 2.21 необхідно обрати параметри c, N, T та r_0, що задовільняють умовам леми 2.22 таким чином, аби останній член в (2.48) був меньшим за η. Зробимо це. Візьмемо довільне $\eta > 0$ (товщина притягуючого околу). Оберемо $c > 2\ln 8$ так, що $C_R^2 e^{-c/2} \le \eta$. Тут C_R^2 визначене в (2.48). Потім виберемо N, яке задовільняє (2.46). Тепер обираємо $T \equiv c\lambda_{N+1}^{-1}$ для того, аби виконувалось (див. (2.47)) $\frac{\ln 8}{\lambda_{N+1}} < \frac{T}{2} < T \le \frac{c}{\lambda_{N+1}}$. Тепер легко бачити, що r_0 може бути обрано менше, ніж $\frac{T}{2} - \frac{\ln 8}{\lambda_{N+1}}$ для виконання (2.47). Лема 2.22 завершує доведення теореми 2.21. ■

2.3.2. Залежність СНІМ від часу загаювання. Ми розглянемо задачу без загаювання

$$\frac{du}{dt} + Au = B_0(u) \quad \text{для} \quad t > \sigma, \qquad u(\sigma) = u_\sigma \tag{2.51}$$

як частковий випадок задачі (2.1). В цьому випадку $B(u) \equiv B_0(u(0))$ та $M_1 = 0$. Всі результати, які доведені в попередньому пункті, є вірними та, зокрема, існування НІМ, доведене в теоремі 2.21.

В цьому пункті ми доводимо близкість стаціонарного НІМ задачі з загаюванням (2.1) та задачі без загаювання (2.51).

Теорема 2.23 . *Нехай $\Psi_0^T(p)$ та $\Psi_r^T(p)$ відображення, які визначають стаціонарні НІМ, збудовані в теоремі 2.21 для задач (2.51) та для (2.1). Припустимо, що $B_1(\cdot)$ є "чисто" загаюванним, тобто $B_1(v) = 0$ для всіх $v(\theta) = v \in C_\alpha$, які не залежать від θ. Тоді*

$$|\Psi_0^T(p) - \Psi_r^T(p)|_{C_\alpha} \le C_N r^\beta (1 + \|A^\alpha p\|), \tag{2.52}$$

де $\beta < 1 - \alpha$ та стала C_N не залежать від $r \in [0, r_0]$.

Зауваження 2.24 *Відмітемо [42], що якщо $B_1(\cdot)$ не є "чисто" загаюванним, ми можемо представити нелінійний член в (2.1) так $B(u_t) = \bar{B}_0(u(t)) + \bar{B}_1(u_t)$, де $\bar{B}_0(u(t)) = B_0(u(t)) + \hat{B}_1(u(t))$ та $\bar{B}_1(u_t) = B_1(u_t) - \hat{B}_1(u(t))$. Тут $\hat{B}_1(u)$ визначається як значення $B_1(\cdot)$ на елементі $v(\theta) \equiv u$ з $u \in D(A^\alpha)$, яке не залежить від θ. В цьому випадку $\bar{B}_1$ є "чисто" загаюванним та теорема 2.23 є вірною для системи (2.51) з $\bar{B}_0$ замість B_0.*

Зауваження 2.25 *При зміні r змінюється також наш фазовий простір $C_\alpha = C([-r,0]; D(A^\alpha))$. В цьому випадку ми розглядаємо простір $C_\alpha^{r_0} = C([-r_0,0]; D(A^\alpha))$ для всіх $r \in [0, r_0]$. В цьому сенсі (2.52) дає прямування загаюваного НІМ до незагаюваного НІМ при $r \to 0$.*

Доведення теореми 2.23. Можна переконатися, що метод доведення [42, лема 4.1] дає наступний аналог

Лема 2.26 . *Нехай виконані умови теореми 2.21. Тоді розв'язок (2.1) $u = u(t)$, який визначає $\Psi_r^T(p)$, має наступну властивість неперервності*

$$\sup_{\tau\in[-T,0]} \big(\sup_{\theta\in[-r,0]} \|A^\alpha(u(\tau) - u(\tau+\theta))\|\big) \le C_N(\alpha,\beta) r^\beta e^{2\gamma r}(1 + \|A^\alpha p\|)$$

для довільного $\beta < 1-\alpha$, де стала $C_N(\alpha,\beta)$ не залежить від $r \in [0, r_0]$.

Розглянемо розв'язок (2.1) $u(t)$, який визначає $\Psi_r^T(p)$ та розв'язок (2.51) $u^0(t)$, який визначає $\Psi_0^T(p)$. Використовуючи визначення відображення $\mathcal{F}$, ми отримуємо для $t \in [-T, 0]$:

$$|u^0(t) - u(t)|_\alpha \le e^{-\lambda_{N+1}(t+T)} |Q(u^0(-T) - u(-T))|_\alpha$$
$$+ \left\{ \int_t^0 \|A^\alpha e^{-(t-\tau)} P\| d\tau + \int_{-T}^t \|A^\alpha e^{-(t-\tau)} Q\| d\tau \right\} \cdot \sup_{\tau\in[-T,0]} \|B_0(u^0(\tau)) - B(u_\tau)\|. \tag{2.53}$$

Оскільки B_1 є цілком загаюваним членом, маємо

$$\|B_0(u^0(\tau)) - B(u_\tau)\| \le M_0 |u^0(\tau) - u(\tau)|_\alpha + M_1 \sup_{\theta\in[-r,0]} |u(\tau) - u(\tau+\theta)|_\alpha$$

та

$$\sup_{\tau\in[-T,0]}\|B_0(u^0(\tau))-B(u_\tau)\| \le M_0|u^0-u|_{Y_2}+M_1\sup_{\tau\in[-T,0]}\big(\sup_{\theta\in[-r,0]}\|A^\alpha(u(\tau)-u(\tau+\theta))\|\big)$$

Використовуючи це, лему 2.26 та (2.13) ми отримуємо з (2.53) що

$$\sup_{t\in[-T,0]}|u^0(t)-u(t)|_\alpha \le |Q(u^0(-T)-u(-T))|_\alpha$$

$$+\gamma_N(T)M_0|u^0-u|_{Y_2}+\gamma_N(T)M_1C_Nr^\beta e^{2\gamma r}(1+|p|_\alpha). \tag{2.54}$$

Ми використовуємо (2.31) для того, аби отримати

$$Qu(-T)=Qu(0)=e^{-TA}Qu(-T)+\int_{-T}^0 e^{\tau A}QB(u_\tau)d\tau$$

та аналогічну формулу для $Qu^0(-T)$. Таким чином

$$|Q(u^0(-T)-u(-T))|_\alpha \le e^{-\lambda_{N+1}T}|Q(u^0(-T)-u(-T))|_\alpha+\gamma_N(T)M_0|u^0-u|_{Y_2}$$

$$+\gamma_N(T)M_1C_Nr^\beta e^{2\gamma r}(1+|p|_\alpha).$$

Ми підставляємо останню оцінку в (2.54) для того, аби отримати

$$\sup_{t\in[-T,0]}|u^0(t)-u(t)|_\alpha \le \left(e^{-\lambda_{N+1}T}+2\gamma_N(T)M_0\right)|u^0-u|_{Y_2}+2\gamma_N(T)M_1C_Nr^\beta e^{2\gamma r}(1+|p|_\alpha).$$

Ми знов використовуємо (2.31) для того, щоб отримати

$$\sup_{t\in[-T-r,-T]}|u^0(t)-u(t)|_\alpha=\sup_{t\in[-r,0]}|u^0(t)-u(t)|_\alpha \le \sup_{t\in[-T,0]}|u^0(t)-u(t)|_\alpha$$

Таким чином, ми можемо записати

$$|u^0-u|_{Y_2} \le \left(e^{-\lambda_{N+1}T}+2\gamma_N(T)M_0\right)|u^0-u|_{Y_2}+2\gamma_N(T)M_1C_Nr^\beta e^{2\gamma r}(1+|p|_\alpha).$$

Оскільки $|\Psi_0^T(p)-\Psi_r^T(p)|_{C_\alpha} \le |u^0-u|_{Y_2}$, остання оцінка дає (2.52) за умови $e^{-\lambda_{N+1}T}+2\gamma_N(T)M_0<1$. Дійсно, (2.46) дає $\lambda_N^{1-\alpha}>M_0D_c/4$. Таким чином (2.30)дає $2\gamma_N(T)M_0<2e^{-c}$. Тепер легко бачити, що $e^{-\lambda_{N+1}T}+2\gamma_N(T)M_0<e^{-c}+2e^{-c}=3e^{-c}<1$ оскільки $c>2\ln 8>\ln 3$ (див. лему 2.22 та доведення теореми 2.21 де ми поклали $c=\lambda_{N+1}T$). Доведення теореми 2.23 завершено.

Зауваження 2.27 *У випадку системи без загаювання (2.51) можна отримати [150] більш сильний результат, ніж сформульований в теоремі 2.21. Детальніше, існує нескінченна родина НІМ експоненційного типу (оцінка подібна до (2.48)). На жаль, для загаюваного випадку (фіксоване значення $r > 0$) ми можемо збудувати тільки скінченне число НІМ. Дійсно, оцінка (2.48) майже "готова" дати послідовність експоненційного типа (порівняйте [150]), але умови (див. лему 2.22) за яких (2.48) має місце показують, що при граничному переході $N \to \infty$ ($\lambda_N \to \infty$) отримуємо $T \to 0$. Але це неможливо оскільки $T > r > 0$ (див. (2.47)). З іншого боку, умова $T > r$ є суттєвою для $L_i < 1$ (див. лему 2.16 та пряме пояснення в [150, зауваження 3.7]).*

2.4. Експоненційна родина наближених інерційних многовидів: параболічні рівняння без загаювання

В цьому підрозділі ми розглянемо частковий випадок параболічних рівнянь без загаювання та покажемо, як ідея (див. підрозділ 2.2 та [148]) використання інерційних многовидів із загаюванням (ІМЗ) допоможе в побудові експоненційних родин наближених інерційних многовидів (НІМ). Ці результати отримані в роботі [150] та є посиленням результатів попереднього підрозділу (див. [153]), які вдається отримати для більш простих систем без загаювання. Слід відзначити, що ці результати є новими навіть для рівнянь без загаювання, хоча для їх отримання ми були змушені використати ІМЗ.

Як і раніше, припускаємо, що лінійний оператор A задовільняє умовам **(A1)** з підрозділу 2.1

Нелінійне відображення B діє з $D(A^\alpha)$ в простір H ($0 \le \alpha < 1$) та задовільняє

$$\| B(w) \| \le M \cdot (1 + \| A^\alpha w \|), \quad w \in D(A^\alpha),$$

$$\| B(w_1) - B(w_2) \| \le M \cdot \| A^\alpha (w_1 - w_2) \|, \quad \text{для } w_1, w_2 \in D(A^\alpha).$$

Нагадаємо, що $\| \cdot \|$ позначає норму в просторі H, та M - додатня стала. Також $| \cdot |_\alpha \equiv \| A^\alpha \cdot \|$ та $(\cdot, \cdot)$ позначає скалярний добуток в H.

Нас цікавить динамічна система, яка буде збудована по розв'язкам наступного еволюційного рівняння *без загаювання*

$$\frac{du}{dt} + Au = B(u) \quad \text{для} \;\; t > \sigma. \tag{2.55}$$

Ми використовуємо стандартне визначення слабкого розв'язку

Визначення 2.28 *Функція* $u(t) \in C(\sigma, T; D(A^\alpha))$ *є слабким розв'язком задачі (2.55) на інтервалі* $[\sigma, T]$ *якщо* $u(t) = e^{-(t-\sigma)A}u(\sigma) + \int_\sigma^t e^{-(t-\tau)A}B(u(\tau))\, d\tau$.

Легко перевірити (див. [200, 54]), що вірна наступна

Лема 2.29 . *Нехай* $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$, *де* $u_1(t)$, $u_2(t)$ *розв'язки задачі (2.55). Тоді* $\|A^\alpha u(t)\| \le a_1 \cdot e^{a_2(t-s)}\|A^\alpha u(s)\|$, $t \ge s$. *Тут* a_1 *та* a_2 *додатні сталі, які залежать тільки від* α, λ_1, M $(a_1 = 1, a_2 = (1/4)M^2\lambda_1^{-1+2\alpha}$, *при* $0 \le \alpha \le 1/2)$.

Доведення є стандартним (див., наприклад, [103]). Зафіксуємо натуральне N та нагадаємо проектори $P = P_N, Q = Q_N$, які введені на с.49. Легко перевірити (див., наприклад, [87, 200]), що

$$\| A^\alpha e^{-tA}P \| \le \lambda_N^\alpha \cdot e^{\lambda_N |t|},\ t \in \mathbf{R}; \quad \| e^{-tA}Q \| \le e^{-\lambda_{N+1}t},\ t \ge 0;$$

$$\| A^\alpha e^{-tA}Q \| \le [(\alpha/t)^\alpha + \lambda_{N+1}^\alpha] \cdot e^{-\lambda_{N+1}t}, \quad t > 0, \alpha > 0. \tag{2.56}$$

оцінки (2.56) та лема 2.29 легко дають наступну

Лема 2.30 . *Позначимо* $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$, *де* $u_1(t)$, $u_2(t)$ *розв'язки задачі (2.55). Тоді* $\|QA^\alpha u(t)\| \le \left[e^{-\lambda_{N+1}(t-s)} + M(1+k)a_1\lambda_{N+1}^{-1+\alpha} \cdot e^{a_2(t-s)}\right] \|A^\alpha u(s)\|$, *де* a_1 *та* a_2 *такі ж, як в лемі 2.29. Тут та нижче* $k = \alpha^\alpha \int_0^\infty \xi^{-\alpha} e^{-\xi} d\xi$ *для* $\alpha > 0$ *та* $k = 0$ *для* $\alpha = 0$.

Наші дослідження використовують поняття інерційного многовиду з загаюванням (ІМЗ), яке було введено А.Дебушем та Р.Темамом (A.Debussche, R. Temam) в роботі [75]. Ми використовуємо версію метода Ляпунова-Перрона, яка запропонована в роботі [52] та наступний варіант [148] основного результата роботи [75].

Теорема 2.31 . *Нехай виконані умови на відображення A, B, що наведені вище. Тоді існує T_0 таке, що для довільного $T \in (0, T_0]$, довільних $p \in P_N H$ та $q \in Q_N D(A^\alpha)$ існує єдиний розв'язок $u(t)$ задачі (2.55), визначений на $[-T, \infty)$ та такий, що виконується*

$$P_N u(0) = p, \quad Q_N u(-T) = q.$$

Більш того, якщо ми положимо $\Phi(p, q) \equiv Q_N u(0)$, то це визначає липшицеве відображення з $P_N H \times Q_N D(A^\alpha)$ до $Q_N D(A^\alpha)$, тобто для довільного $(p^i, q^i) \in P_N H \times Q_N D(A^\alpha), i = 1, 2$ маємо:

$$|\Phi(p^1, q^1) - \Phi(p^2, q^2)|_\alpha \ \leq \ L_1(T)|p^1 - p^2|_\alpha + L_2(T)|q^1 - q^2|_\alpha. \tag{2.57}$$

Крім того, для довільної сталої $c > \ln 2$ наступні дві умови

$$\lambda_N^{1-\alpha} > 4Me^c(e^c - e^{-c} + \frac{\alpha^\alpha}{1-\alpha} c^{1-\alpha}) \tag{2.58}$$

та

$$\ln 2 < \lambda_{N+1} T \leq c \tag{2.59}$$

дають оцінку для сталих Липшиця $L_i < 1$, $i = 1, 2$ в нерівності (2.57).

Відображення Φ було введено в роботі [75] та його графік зветься Інерційним многовидом із загаюванням. Існування та властивості ІМЗ для параболічних рівнянь із загаюванням наведені в підрозділі 2.2 (див. також [148]). Наші побудови Наближених інерційних многовидів слідують підрозділу 2.2 (див. роботу [148]), але потребують деякого уточнення, оскільки зараз нас цікавить частковий випадок рівнянь без загаювання. Для повноти викладення, ми наводимо ці уточнення нижче. Для детального обговорення див. роботи [148, 150].

Для фіксованого $T > 0$ ми визначаємо наступний простір

$$Y_1 \equiv \{y \in C(-T, 0; D(A^\alpha)) \, : \, Q_N \, y(-T) = 0\},$$

з нормою $|y|_{Y_1} = \sup\limits_{[-T,0]} \| A^\alpha y(\cdot) \|$.

Зафіксуємо $p \in P_N H$ та $q \in Q_N D(A^\alpha)$. Визначимо відображення $\mathcal{F} : Y_1 \to Y_1$ наступним чином

$$\mathcal{F}(y)(t) \equiv \mathcal{F}(y; p, q)(t) \equiv e^{-tA}p + \int_0^t e^{-(t-\tau)A} P_N B\left(y(\tau) + e^{-(\tau+T)A}q\right)\, d\tau$$
$$+ \int_{-T}^t e^{-(t-\tau)A} Q_N B\left(y(\tau) + e^{-(\tau+T)A}q\right)\, d\tau \tag{2.60}$$

де $t \in [-T, 0]$.

Легко бачити, що нерухома точка відображення $\mathcal{F}$ тобто, $\mathcal{F}(\bar{y}) = \bar{y}$, має властивість: для $s \in [-T, 0]$ функція $u(s) \equiv \bar{y}(s) + e^{-(s+T)A}q$ є розв'язком задачі (2.55), яке задовільняє $P_N u(0) = p$ та $Q_N u(-T) = q$. Це розв'язок, який ми шукаємо в теоремі 2.31.

Для находження нерухомої точки відображення $\mathcal{F}$ ми використовуємо (2.56) та отримуємо [148]

$$|\mathcal{F}(y^1) - \mathcal{F}(y^2)|_{Y_1} \le \gamma_N(T) M |y^1 - y^2|_{Y_1},$$

де

$$\gamma_N(T) \equiv \lambda_N^{\alpha-1}(e^{\lambda_N T} - 1) + \frac{\alpha^\alpha}{1-\alpha} T^{1-\alpha} + \lambda_{N+1}^{\alpha-1}(1 - e^{-\lambda_{N+1} T}). \tag{2.61}$$

Легко бачити, що для довільного N, виконується $\gamma_N(T) \to 0$, при $T \to 0$. Використовуючи цю властивість, можна обрати достатньо мале T_0 так, що для всіх $T \in (0, T_0]$ маємо $\delta \equiv \gamma_N(T) M < 1$. Таким чином існує єдина нерухома точка $\bar{y}$ відображення стискання $\mathcal{F}$.

Тепер відображення Φ будується наступним чином. Для фіксованих $p \in P_N H$ та $q \in Q_N D(A^\alpha)$ ми позначаємо $\bar{y}(p, q)$ єдину нерухому точку відображення $\mathcal{F}$, яка збудована за p та q. Визначаємо

$$\Phi(p, q) \equiv Q_N \bar{y}(p, q)(0) + e^{-TA} q. \tag{2.62}$$

2.4.1. Стаціонарні наближені інерційні многовиди (СНІМ). Нехай виконані умови (2.58) та (2.59). Тоді [148, теорема 3.1 та лема 3.2] стала Липшиця L_2 відображення Φ є меншою за одиницю (див. (2.57)). Таким чином для довільного фіксованого $p \in P_N H$ ми можемо використати відображення Φ як строге стискання в $Q_N D(A^\alpha)$:

$$|\Phi(p, q^1) - \Phi(p, q^2)|_\alpha \;\le\; L_2 |q^1 - q^2|_\alpha, \quad L_2 < 1.$$

Таким чином, для довільного $p \in P_N H$ існує єдиний розв'язок задачі (2.55) з властивостями $P_N u(0) = p$ та $Q_N u(0) = Q_N u(-T) = q$ для деякого $q \in Q_N D(A^\alpha)$. Визначимо відображення $\Psi^T \equiv \Psi^{T,N} : P_N H \to Q_N D(A^\alpha)$ наступним чином

$$\Psi^T(p) \equiv \Phi(p, q), \text{ де } q = \Phi(p, q). \tag{2.63}$$

Тепер ми маємо можливість визначити *стаціонарний НІМ* як графік відображення Ψ^T :

$$M^T \equiv M^{T,N} = \{p + \Psi^T(p) : p \in P_N H\}. \tag{2.64}$$

Відзначимо, що многовид M^T включає всі стаціонарні розв'язки задачі (2.55). З цієї причини, слідуючи термінології роботи [107], ми називаємо M^T *стаціонарним наближеним многовидом.*

Ми припускаємо, що (2.55) має поглинаючу кулю в $D(A^\alpha)$ (див. [200] для великого числа прикладів). Використовуючи існування поглинаючої кулі, ми можемо стандартним чином "обрізати" нелінійний елемент B поза межами цієї кулі таким чином, що нелінійність буде співпадати із початковим B всередині кулі та мати обмежений носій. Позначимо R радіус деякої кулі, яка включає цей носій.

Наступні властивості Ψ^T та M^T будуть використані в подальшому.

Теорема 2.32 . *Нехай виконані умови (2.58) та (2.59). Тоді вірно наступне*

(i) відображення Ψ^T, визначене в (2.63), задовільняє

$$\|A^\alpha(\Psi^T(p^1) - \Psi^T(p^2))\| \le L_\Psi \|A^\alpha(p^1 - p^2)\|,$$

де стала Липшиця має вигляд

$$L_\Psi \equiv \left[1 - e^{-\lambda_{N+1}T} - \frac{\gamma_N M}{1 - \gamma_N M}\right]^{-1} \cdot \frac{\gamma_N M}{1 - \gamma_N M} e^{\lambda_N T}, \tag{2.65}$$

з γ_N, що визначена у (2.61);

(ii) якщо для фіксованого T оцінки (2.59) та (2.59) виконані для $N = K, K+1, \dots, M$, то

$$M^{T,K} \subset M^{T,K+1} \subset \dots \subset M^{T,M};$$

(iii) якщо додатково, λ_{N+1} та T задовільняють

$$M\left(\frac{\alpha^{\alpha}}{1-\alpha}T^{1-\alpha} \ + T\lambda_{N+1}^{\alpha}\right) \le \bar{q} < 1, \tag{2.66}$$

тоді для всіх $0 \le t \le T$ маємо

$$\|A^{\alpha}(Qu(t) - \Psi^{T}(Pu(t)))\| \le (1-\bar{q})^{-1}\left[C_R^1 \cdot e^{-\gamma T} + C_R^2 \cdot e^{-\gamma t}\right] \tag{2.67}$$

для довільного розв'язку $u(t)$ задачі (2.55) із початковою функцією $u_0 = p + \Psi^T(p)$ при $t = 0$. Тут γ довільне число з інтервалу $[\lambda_N, \lambda_{N+1}]$, $\bar{q} < 1$ що визначене в (2.66), додатні сталі C_R^1 та C_R^2 залежать тільки від радіуса дисипативності.

Зауваження 2.33 *В теоремі 2.34 ми запропонуємо алгоритм вибору λ_{N+1} та T для виконання (2.58), (2.59) та (2.66).*

Доведення теореми 2.32. Доведемо пункт (i). Зафіксуємо довільну $p \in PH$. Легко бачити з (2.63), (2.62) та (2.60), що q та $y \in Y_1$, які використовуються у визначенні Ψ, повинні задовільняти

$$q = e^{-TA}q + \int_{-T}^{0} e^{-\tau A}QB\left(y(\tau) + e^{-(\tau+T)A}q\right)d\tau, y = \mathcal{F}(y; p, q). \tag{2.68}$$

Розглянемо $p^1, p^2 \in PH$. Маємо

$$|\mathcal{F}(y^1; p^1, q^1) - \mathcal{F}(y^2; p^2, q^2)|_{\alpha} \le e^{\lambda_N T}|p^1 - p^2|_{\alpha} + \gamma_N(T)M(|y^1 - y^2|_{Y_1} + |q^1 - q^2|_{\alpha}). \tag{2.69}$$

Таким чином (2.68) дає

$$|q^1 - q^2|_{\alpha} \le e^{-\lambda_{N+1}T}|q^1 - q^2|_{\alpha} + \gamma_N(T)M(|y^1 - y^2|_{Y_1} + |q^1 - q^2|_{\alpha}). \tag{2.70}$$

З (2.69), використовуючи (2.68), отримуємо

$$|q^1 - q^2|_{\alpha} \le e^{-\lambda_{N+1}T}|q^1 - q^2|_{\alpha} + \gamma_N(T)M|q^1 - q^2|_{\alpha}$$

$$+\gamma_N(T)M\left[1-\gamma_N(T)M\right]^{-1}(e^{\lambda_N T}|p^1-p^2|_\alpha+\gamma_N(T)M|q^1-q^2|_\alpha).$$

Таким чином ми довели властивість Липшиця Ψ^T зі сталою Липшиця L_Ψ, що визначена у (2.65).

Доведемо пункт (ii). Розглянемо довільні $z=p^N+\Psi^{T,N}(p^N)\in M^{T,N}$, $p^N\in P_N H$. Визначення $\Psi^{T,N}$ дає існування єдиної функції $u^1(t)\in C(-T,0;D(A^\alpha))$ такої, що $P_N u^1(0)=p^N$ та $Q_N u^1(-T)=Q_N u^1(0)$. Відзначимо, що $u^1(0)=z$. Розглянемо $p^{N+1}\equiv P_{N+1}u^1(0)$. Тепер, визначення $\Psi^{T,N+1}$ дає існування єдиної функції $u^2(t)\in C(-T,0;D(A^\alpha))$ такої, що $P_{N+1}u^2(0)=p^{N+1}$ и $Q_{N+1}u^2(-T)=Q_{N+1}u^2(0)$. Тут $u^2(0)\in M^{T,N+1}$. Оскільки $P_{N+1}u^1(0)=P_{N+1}u^2(0)$, ми отримуємо $u^1(t)\equiv u^2(t)$, $t\in[-T,0]$. Таким чином $z=u^1(0)=u^2(0)\in M^{T,N+1}$.

Для доведення пункта (iii) ми покроково слідуємо доведенню, що наведене в [54, теорема 3.1]. Доведення теореми 2.32 завершено.

Для побудови відображення Ψ ми два рази застосовували теорему про нерухому точку (перший раз - для побудови Φ та другий раз, використовуючи Φ, для отримання Ψ). Ми можемо уникнути цього, розглядаючи для фіксованого $p\in P_N H$ наступне відображення $G(q,y)=(G_1(q,y);G_2(q,y))$:

$$G_1(q,y)=e^{-TA}q+\int_{-T}^{0}e^{-\tau A}QB\left(y(\tau)+e^{-(\tau+T)A}q\right)d\tau,\qquad G_2(q,y)=\mathcal{F}(y;p,q)$$

в просторі $\mathcal{H}\equiv Q_N D(A^\alpha)\times Y_1$ з нормою $|(q,y)|_{\mathcal{H}}\equiv|q|_\alpha+|y|_{Y_1}$. Легко перевірити, що

$$|G(q^1,y^1)-G(q^2,y^2)|_{\mathcal{H}}\le\varepsilon\cdot|(q^1,y^1)-(q^2,y^2)|_{\mathcal{H}},\quad \text{з } \varepsilon\equiv e^{-\lambda_{N+1}T}+2\gamma_N(T)M. \tag{2.71}$$

В [148, лема 3.2] доведено, що (2.58) та (2.59) дають $e^{-\lambda_{N+1}T}<1/2$ та $2\gamma_N(T)M<1/2$. Оскільки G є стискаючим відображенням, ми можемо наближати нерухому точку відображення G за допомогою рекурентної формули

$$(q^n;y^n)=\left(G_1(q^{n-1};y^{n-1});G_2(q^{n-1};y^{n-1})\right),\quad n=1,2,\ldots$$

Тепер ми можемо наближати *стаціонарне HIM* (Steady AIM) M^T, визначене в (2.64), за допомогою послідовності

$$M_n^T = \{p + \Psi_n^T(p) : p \in P_N H\}.$$

Тут відображення $\Psi_n^T : P_N H \to Q_N D(A^\alpha)$ визначені за формулою $\Psi_n^T(p) = Qy^n(0)$, $n = 1, 2, \ldots$ Легко отримати, використовуючи (3.9) та властивість дисипативності (2.55), що $\sup\{\|A^\alpha(\Psi_n^T(p) - \Psi^T(p))\| : \|p\|_\alpha \le R\} \le \varepsilon^n \cdot C_R$, де $\varepsilon < 1$ визначено в (3.9); C_R залежить тільки від радіуса дисипативності. Відзначимо, що M_n^T не обов'язково включає стаціонарні точки та періодичні орбіти.

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема, яка стверджує, що поверхня M^T є наближеним інерційним многовидом.

Теорема 2.34 . *Існують сталі ρ_1 та Λ (залежні тільки від M, α та λ_1) такі, що при виконанні*

$$\lambda_{N+1}^{1-\alpha} \ge \Lambda \rho^{-1}, \quad T = \rho \lambda_{N+1}^{-\alpha}, \quad 0 < \rho \le \rho_1, \tag{2.72}$$

відображення Ψ^T, визначене в (2.63) має наступну властивість

$$\|A^\alpha(Qu(t) - \Psi^T(Pu(t)))\| \le C_R^1 \cdot exp\{-\frac{\sigma_0}{\rho}\lambda_{N+1}^\alpha(t - t_*)\} + C_R^2 \cdot exp\{-\frac{\rho}{2}\lambda_{N+1}^{1-\alpha}\} \tag{2.73}$$

для всіх $t \ge t_* + T/2$. Тут σ_0 є сталою та $u(t)$ - довільний розв'язок (2.55) такий, що $\|A^\alpha u(t)\| \le R$ для $t_* \le t < \infty$.

Зауваження 2.35 *Ця теорема означає, що наші стаціонарні НІМ $M^{T,N}$, що визначені в (2.64), складають послідовність наближених інерційних многовидів експоненційного порядку тобто, околи поверхонь $M^{T,N}$, що мають товщину порядка $exp\{-\frac{\rho}{2}\lambda_{N+1}^{1-\alpha}\}$, експоненційно притягують всі траєкторії системи.*

Зауваження 2.36 *Припущення теореми 2.34 (алгоритм вибора λ_{N+1} та T) має той самий сенс, як і у [54]. Товщина притягуючих околів наших стаціонарних НІМ має той самий порядок, як у [75, 54].*

Доведення теореми 2.34. Ми використовуємо план доведення [54] та теорему 2.32. Розглянемо довільний розв'язок $u(t)$ задачі (2.55). Позначимо $\widehat{u}(t)$ розв'язок із початковою умовою $\widehat{u}(0) = Pu(0) + \Psi^T(Pu(0))$. Маємо

$$Qu(t) - \Psi^T(Pu(t)) = Q(u(t) - \widehat{u}(t)) + [Q\widehat{u}(t) - \Psi^T(P\widehat{u}(t))] + [\Psi^T(P\widehat{u}(t)) - \Psi^T(Pu(t))].$$

Позначимо $d(t) = \|A^\alpha(Qu(t) - \Psi^T(Pu(t)))\|$. Лема 2.30 дає

$$|Q(u(t) - \widehat{u}(t))|_\alpha \le \left[e^{-\lambda_{N+1}t} + M(1+k)a_1\lambda_{N+1}^{\alpha-1} \cdot e^{a_2 t}\right] |Q(u(0) - \widehat{u}(0))|_\alpha.$$

Використовуючи властивість Липшиця для Ψ^T та лему 2.29 отримуємо

$$|\Psi^T(P\widehat{u}(t)) - \Psi^T(Pu(t))|_\alpha \le L_\Psi a_1 e^{a_2 t} \cdot |P\widehat{u}(0) - Pu(0)|_\alpha.$$

Ми використовуємо це та (2.67) для отримання $d(t) \le \alpha_N(t) \cdot d(0) + \beta_N(T)$, де $\alpha_N(t) \equiv e^{-\lambda_{N+1}t} + a_1\left(M(1+k)\lambda_{N+1}^{\alpha-1} + L_\Psi\right) \cdot e^{a_2 t}$, $\beta_N(T) \equiv (\ 1\ -\ \bar{q}\ )^{-1} \times \left[C_R^1 \cdot e^{-\gamma T} + C_R^2 \cdot e^{-\gamma T/2}\right]$. Якщо ми тепер оберемо $t \in [T/2, T]$, то $\alpha_N(t) \le \alpha_{N,T} \equiv e^{-\lambda_{N+1}T/2} + a_1\left(M(1+k)\lambda_{N+1}^{\alpha-1} + L_\Psi\right) \cdot e^{a_2 T}$. Легко бачити, що $\alpha_{N,T} \le 1/2$ при

$$\lambda_{N+1}T > 4\ln 2, \quad \lambda_{N+1}^{\alpha-1} > 16a_1 M(1+k), \quad a_2 T < \ln 2, \quad a_1 L_\Psi < 1/16. \tag{2.74}$$

Оскільки умови (2.72) дають (2.74) ми отримуємо для $t_n = t_* + nT/2$, що $d(t_{n+1}) \le \frac{1}{2}d(t_n) + \beta_N(T)$. Ітерації дають

$$d(t_n) \le 2^{-n}d(t_0) + 2\beta_N(T). \tag{2.75}$$

Для $t \in [t_n + T/2, t_n + T]$ маємо $d(t) \le \frac{1}{2}d(t_n) + \beta_N(T)$. Таким чином (2.75) дає для всіх $t \ge t_* + T/2$ оцінку $d(t) \le 2\exp\left\{-\frac{2}{T}(t - t_*)\ln 2\right\} \cdot d(t_*) + 2\beta_N(T)$. Це дає (2.73), якщо ми положимо $T = \rho\lambda_{N+1}^{-\alpha}$ та $\gamma = \lambda_{N+1}$. Доведення теореми 2.34 завершено.

Ми можемо сформулювати теорему 2.34 в іншому вигляді.

Наслідок 2.37 *Для заданого* $\hat{c} > \ln 4$ *існують сталі* T_0 *та* Λ *(обидві залежать тільки від* M, α, λ_1 *та* $\hat{c}$*) такі, що для всіх* $T \in (0, T_0], \lambda_{N+1} > \Lambda,$

які задовільняють $\lambda_{N+1}T > \hat{c}$, відображення Ψ^T, визначене в (2.63), має наступну властивість

$$\|A^\alpha(Qu(t) - \Psi^T(Pu(t)))\| \le C_R^1 \cdot exp\{-\frac{2}{T}(t - t_*)\ln 2\} + C_R^2 \cdot exp\{-\frac{1}{2}\lambda_{N+1}T\}$$

для всіх $t \ge t_* + T/2$ та довільного розв'язку $u(t)$ задачі (2.55) такого, що $\|A^\alpha u(t)\| \le R$ для $t_* \le t < \infty$.

Зауваження 2.38 *Якщо система має хоч один періодичий розв'язок з періодом T, то його (розв'язку) P-коорината описує замкнену одновимірну криву в N-вимірній множині $P_N B^R$, де B^R є поглинаючою множиною системи. Таким чином (за визначенням $\Psi^{T,N}$), довільний T-періодичний розв'язок $u(t)$ може бути визначений своїми першими N модами $P_N u(t)$ тобто, $u(t) = P_N u(t) + \Psi^{T,N}(P_N u(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Цей факт має наступну інтерпретацію. Хоча НІМ не є інваріантними (на відміну від інерційного многовиду), наше стаціонарне НІМ має інваріантну підмножину, яка включає всі стаціонарні розв'язки та T-періодичні розв'язки.*

2.5. Дослідження рівнянь другого порядку за часом із загаюванням методом інерційних многовидів із загаюванням

Ми досліджуємо наступне рівняння другого порядку за часом

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + Au = B(u_t) \quad \text{для} \;\; t > 0, \quad \varepsilon > 0 \tag{2.76}$$

з початковими умовами

$$u(\theta) = u^0(\theta) \quad \text{для} \;\; \theta \in [-r, 0], \quad \dot{u}\big|_{t=0+} = u^1. \tag{2.77}$$

Припускаємо, що оператор A та нелінійне відображення $B : C_\alpha \to H$ задовільняють припущенням **(A1)**, **(A2)** підрозділу 2.1 (попередні відомості).

Перепишемо (2.76), (2.77) в наступному вигляді:

$$\partial U/\partial t + \mathcal{A}U = \mathcal{B}(U_t), \quad U\big|_{\theta\in[-r,0]} = U_0, \tag{2.78}$$

де $U(t) = (u(t); \dot{u}(t)), U_0 = (u^0; u^1)$. Тут оператор $\mathcal{A}$ та відображення $\mathcal{B}$ визначені так $\mathcal{A}U = (-u^1; Au^0 + 2\varepsilon u^1)$, $\mathcal{B}(U_t) = (0; B(u_t^0))$ для $U = (u^0; u^1)$.

Легко перевірити, що власні значення та власні вектори оператора $\mathcal{A}$ є $\lambda_n^{\pm} = \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \mu_n}, \quad f_n^{\pm} = (e_n; -\lambda_n^{\pm} e_n), \quad n = 1, 2, ..$

Нам знадобиться обмеження $\varepsilon^2 > \mu_{N+1}$, яке зазвичай виникає при дослідженні таких задач (див. [138, 31, 152]). Положимо $E = D(A^{1/2}) \times H$ та розглянемо розкладання $E = E_1 \oplus E_2$, де $E_1 = \text{ Lin } \{(e_k; 0), (0; e_k) : k = 1, .., N\}, E_2 = \text{ Cl Lin } \{(e_k; 0), (0; e_k) : k \geq N+1\}$.

Ми будемо використовувати наступний скалярний добуток [138] в E_1 та E_2 :

$$\langle U, V \rangle_1 = \varepsilon^2(u^0, v^0) - (Au^0, v^0) + (\varepsilon u^0 + u^1, \varepsilon v^0 + v^1),$$

$$\langle U, V \rangle_2 = (Au^0, v^0) - (\varepsilon^2 - 2\mu_{N+1})(u^0, v^0) + (\varepsilon u^0 + u^1, \varepsilon v^0 + v^1).$$

Тут $U = (u^0; u^1), V = (v^0; v^1)$ належать до відповідних підпросторів E_i.

Тепер скалярний добуток в E записується як $\langle U, V \rangle = \langle U^1, V^1 \rangle_1 + \langle U^2, V^2 \rangle_2$, де $U = U^1 + U^2$, $V = V^1 + V^2$; $V^i, U^i \in E_i, i = 1, 2$. Ми будемо використовувати $|U|_E \equiv |U| \equiv \langle U, U \rangle^{1/2}$.

Обчислення дають (див. [31]) для всіх $U = (u; v) \in E$:

$$\| A^\alpha u \| \leq \mu_{N+1}^\alpha \delta_{N,\varepsilon}^{-1} |U|, \quad \text{для } 0 \leq \alpha \leq 1/2, \tag{2.79}$$

де

$$\delta_{N,\varepsilon} \equiv \sqrt{\mu_{N+1}} \min \left\{ 1, \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - \mu_{N+1}}{\mu_{N+1}}} \right\}. \tag{2.80}$$

Використовуючи це та (2.3), (2.4), легко бачити, що

$$|\mathcal{B}(U_t^1) - \mathcal{B}(U_t^2)| \leq \widehat{M}_0 |U^1(t) - U^2(t)| + \widehat{M}_1 \max_{[-r,0]} |U^1(t+\theta) - U^2(t+\theta)|, \tag{2.81}$$

де

$$\widehat{M}_i \equiv M_i \cdot \mu_{N+1}^\alpha \delta_{N,\varepsilon}^{-1} = M_i \cdot \mu_{N+1}^{\alpha - 1/2} \max \left\{ 1, \sqrt{\frac{\mu_{N+1}}{\varepsilon^2 - \mu_{N+1}}} \right\}, \; i = 0, 1. \tag{2.82}$$

Визначення 2.39 *Слабким розв'язком задачі (2.78) зветься функція* $U(t) \equiv (u(t); \dot{u}(t)) \in C(-r, T; E)$, *яка задовільняє* $u(\theta) = u^0(\theta), \theta \in [-r, 0]$; $\dot{u}(0) = u^1$ *та* $U(t) = e^{-t\mathcal{A}}U(0) + \int_0^t e^{-(t-s)\mathcal{A}}\mathcal{B}(U_s)ds$.

Доведення існування та єдиності слабкого розв'язку є стандартним (див. [202]) як і наступна

Лема 2.40 . *Нехай* $U(t) = V(t) - W(t)$, *де* $V(t)$ *та* $W(t)$ *розв'язки (2.78). Тоді* $|U_t|_{C_E} \le a_1 \cdot e^{a_2(t-s)}|U_s|_{C_E}, \quad t \ge s$. *Тут* a_1, a_2 *- додатні сталі.*

Ми визначаємо еволюційну півгрупу S_t в $C_E \equiv C(-r, 0; E)$ наступним чином

$$S_tU_0 \equiv [S_tU_0](\theta) = \begin{cases} U(t+\theta), & t+\theta > 0; \\ U_0(t+\theta), & t+\theta \le 0. \end{cases} \tag{2.83}$$

де $U(t)$ - слабкий розв'язок (2.78). Зафіксуємо натуральне N та розглянемо наступні підпростори $E_1^{\pm} = \text{Lin}\,\{f_k^{\pm} : k \le N\}$, які взаємно ортогональні для скалярного добутка $\langle\cdot,\cdot\rangle$, отже $E_1 = E_1^+ \oplus E_1^-$. Якщо ми позначимо P_{E_i} ортопроектори на відповідні підпростори, то отримаємо (див. [31])

$$|e^{-\mathcal{A}t}P_{E_2}| = e^{-\lambda_{N+1}^- t}, \quad |e^{\mathcal{A}t}P_{E_1^-}| = e^{\lambda_N^- t}, \quad |e^{-\mathcal{A}t}P_{E_1^+}| = e^{-\lambda_N^+ t}, \quad t \ge 0. \tag{2.84}$$

Визначимо $P \equiv P_{E_1^-}$ та $Q = I - P$. Далі ми будемо позначати P проектор на E_1^-, та P^0, P^1, P^2 - елементи з E_1^-. Визначимо N-вимірний проектор $\hat{P}$ в $C_E \equiv C(-r, 0; E)$ так

$$\hat{P}U = (\hat{P}U)(\theta) = \sum_{k=1}^{N} e^{-\lambda_k^- \theta}\langle U(0), f_k^-\rangle f_k^- \equiv e^{-\mathcal{A}\theta}PU(0),$$

де $-r \le \theta \le 0$ та $U = U(\theta)$ є елемент з C_E. Також ми позначаємо $\hat{Q} \equiv I - \hat{P}$. Обчислення показують, що $\hat{P}$ - спектральний проектор генератора лінійної півгрупи T_t в C_E визначений формулою, яка аналогічна до (2.83) для задачі (2.76) та (2.77) з $B(u) \equiv 0$. Дійсно, $(T_tu_0)(\theta) = e^{-(t+\theta)\mathcal{A}}U_0(0)$, якщо $t + \theta > 0$ та $(T_tu_0)(\theta) = U_0(t+\theta)$, якщо $t + \theta \le 0$.

2.5.1. Існування інерційного многовиду з загаюванням. Головним результатом цього пункту є наступне твердження про існування ІМЗ для задачі (2.78).

Теорема 2.41 . *Нехай $\varepsilon^2 > \mu_{N+1}$. Існує T_0 таке, що для довільного $T \in (0, T_0]$, довільних $p \in PE \equiv E_1^-$ та $\psi \in \widehat{Q}C_E$ існує єдиний розв'язок $U(t)$ задачі (2.78), визначений на $[-T, \infty)$ та такий, що*

$$PU(0) = p, \quad \widehat{Q}\, U_{-T} = \psi.$$

Більш того, якщо ми визначимо відображення $\Phi(p, \psi) \equiv \widehat{Q}\, u_0$, то воно є липшицевим з $E_1^- \times \widehat{Q}C_E$ в $\widehat{Q}C_E$, тобто для всіх $(p^i, \psi^i) \in E_1^- \times \widehat{Q}C_E, i = 1, 2$ маємо:

$$|\Phi(p^1, \psi^1) - \Phi(p^2, \psi^2)|_{C_E} \;\le\; L_1(T)|p^1 - p^2| + L_2(T)|\psi^1 - \psi^2|_{C_E}. \qquad (2.85)$$

Ми кажемо, що Φ визначає многовид $\mathcal{M}$ в $E_1^- \times \widehat{Q}C_E \times \widehat{Q}C_E$. Цей многовид є інваріантним, тобто, якщо $U(t)$ є розв'язком (2.78), то

$$\widehat{Q}\, U_t = \Phi\left(P\, U(t),\ \widehat{Q}\, U_{t-T}\right), \quad t \ge 0.$$

Наступні додаткові умови дають оцінки для сталих Липшиця L_i.

Припустимо

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \equiv \eta_0 > 0. \qquad (2.86)$$

Візьмемо довільні $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1]$ та $c > \ln(2\delta_2^{-1})$. Тоді (2.86) дає (детальніше див. лему 3.3) існування достатньо великого N_0, яке задовільняє $\lambda_{N_0}^- > (\widehat{M_0} + \widehat{M_1} e^c) \cdot e^c(e^c - e^{-c})\left(1 + \delta_1^{-1}\right)$, та такого, що для довільних $N \ge N_0$, $\varepsilon^2 \in [2\mu_{N+1}, 2\mu_{N+1} + \mu_N]$ та T, r які задовільняють

$$r + \frac{\ln(2\delta_2^{-1})}{\lambda_{N+1}^-} < T \le \frac{c}{\lambda_{N+1}^-}, \qquad (2.87)$$

ми маємо $L_1(T) < \delta_1$ та $L_2(T) < \delta_2$.

Зауваження 2.42 *Фактично (див. нижче), для $L_i < \delta_i$ нам потрібна наступне умова*

$$\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \mu_N} > \mu_{N+1}^{\alpha - 1/2}(M_0 + M_1 e^c) \max\left\{1, \sqrt{\frac{\mu_{N+1}}{\varepsilon^2 - \mu_{N+1}}}\right\} D_c \cdot \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\delta_1}\right),$$

разом з (2.87). Тут $D_c \equiv 4e^c(e^c - e^{-c})$. *Ми обрали (2.86) в теоремі 2.41 для простоти.*

Доведення теореми 2.41. Ми дотримуємось лінії доведення представленого в [148] та вводимо для фіксованих $T > 0$ та $\psi \in \widehat{Q}C_E$ наступні простори $Y_1 \equiv \{y \in C(-T, 0; E) : Q\, y(-T) = 0\}$, $\quad Y_2 = Y_2(\psi) \equiv \{y \in C(-T - r, 0; E) : \widehat{Q}_N\, y_{-T} = \psi\}$ з sup-нормами.

Для довільного $\psi \in \widehat{Q}C_E$ вводимо наступну функцію зсуву-продовження $\mathcal{E} : Y_1 \to Y_2$, яка є основним технічним інструментом наших досліджень:

$$\mathcal{E}(y, \psi)(s) \equiv = \begin{cases} y(s) + e^{-(s+T)\mathcal{A}}\psi(0), & \text{при } s \in [-T, 0]; \\ \psi(s + T) + e^{-(s+T)\mathcal{A}} P y(-T), & \text{при } s \in [-T - r, -T]. \end{cases} \tag{2.88}$$

Як в [148] (див. підрозділ 2.2), ми доводимо наступну

Лема 2.43 . *Для довільних* $y^i \in Y_1$, $\psi^i \in \widehat{Q}C_E, i = 1, 2$ *та довільного* $s \in [-T, 0]$ *маємо*

$$\begin{aligned} &|\mathcal{B}(\mathcal{E}(y^1, \psi^1)_s) - \mathcal{B}(\mathcal{E}(y^2, \psi^2)_s)| \\ &\le (\widehat{M_0} + \widehat{M_1})|\psi^1 - \psi^2|_{C_E} + (\widehat{M_0} + \widehat{M_1} e^{\lambda_N^- r})|y^1 - y^2|_{Y_1}. \end{aligned} \tag{2.89}$$

Зафіксуємо $p \in E_1^-$ та $\psi \in \widehat{Q}C_E$. Визначимо відображення $\mathcal{F} : Y_1 \to Y_1$ наступним чином

$$\mathcal{F}(y)(t) \equiv e^{-t\mathcal{A}}p + \int_0^t e^{-(t-\tau)\mathcal{A}} P\mathcal{B}(\mathcal{E}(y)_\tau)\, d\tau + \int_{-T}^t e^{-(t-\tau)\mathcal{A}} Q\mathcal{B}(\mathcal{E}(y)_\tau)\, d\tau \tag{2.90}$$

де $t \in [-T, 0]$ та $\mathcal{E}(y) = \mathcal{E}(y, \psi)$.

Якщо ми знайдемо нерухому точку відображення $\mathcal{F}$ тобто $\mathcal{F}(\bar{y}) = \bar{y}$, то $U(s) \equiv \mathcal{E}(\bar{y})(s)$ є розв'язком (2.78) для $s \in [-T, 0]$ з властивостями $PU(0) = p$, $\widehat{Q}\, U_{-T} = \psi$.

Таким чином, нашою найближчою метою є знахоження нерухомої точки $\mathcal{F}$. Використовуючи оцінки (2.84) та лему 2.43 з $\psi^1 = \psi^2 = \psi$ ми отримуємо

$$|\mathcal{F}(y^1) - \mathcal{F}(y^2)|_{Y_1} \le \widehat{\gamma}_N(T) \left(\widehat{M_0} + \widehat{M_1} e^{\lambda_N^- r}\right) |y^1 - y^2|_{Y_1},$$

де

$$\widehat{\gamma}_N(T) \equiv \frac{e^{\lambda_N^- T} - 1}{\lambda_N^-} + \frac{1 - e^{-\lambda_{N+1}^- T}}{\lambda_{N+1}^-}. \tag{2.91}$$

Легко бачити, що для довільного N, ми маємо $\widehat{\gamma}_N(T) \to 0$, при $T \to 0$. Таким чином, якщо ми оберемо T_0 так, що

$$\delta \equiv \widehat{\gamma}_N(T_0) \left(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 e^{\lambda_N^- r}\right) < 1, \tag{2.92}$$

то для всіх $T \in (0, T_0]$ отримаємо $|\mathcal{F}(y^1) - \mathcal{F}(y^2)|_{Y_1} \leq \delta |y^1 - y^2|_{Y_1}$. Таким чином існує єдина нерухома точка $\bar{y}$ стискання.

Тепер визначимо відображення Φ наступним чином. Для фіксованих $p \in E_1^-$ та $\psi \in \widehat{Q}C_E$ позначимо $\bar{y}$ - єдину нерухому точку $\mathcal{F}$, побудовану для p та ψ. Отже

$$\Phi(p, \psi) \equiv \widehat{Q}\mathcal{E}(\bar{y})_0 \equiv \mathcal{E}(\bar{y})(\theta) - e^{-\mathcal{A}\theta} p, \quad \theta \in [-r, 0]. \tag{2.93}$$

Також доводимо, що Φ є липшицевим, тобто отримуємо (2.85) з

$$L_1(T) \equiv e^{\lambda_N^- r} \left[1 + \frac{e^{\lambda_N^- T}}{1 - \widehat{\gamma}_N(T)(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 e^{\lambda_N^- r})}\right],$$

$$L_2(T) \equiv 1 + \frac{\gamma_N(T) e^{\lambda_N^- r}(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1)}{1 - \widehat{\gamma}_N(T)(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 e^{\lambda_N^- r})}. \tag{2.94}$$

В найбільш цікавому випадку $r < T$ ми отримуємо більш точную оцінку (див. [148] та підрозділ 2.2 для технічних деталей в параболічному випадку)

$$L_1(T) = \widehat{\gamma}_N(r) \frac{e^{\lambda_N^- T}(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 e^{\lambda_N^- r})}{1 - \widehat{\gamma}_N(T)(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 e^{\lambda_N^- r})},$$

$$L_2(T) = e^{-\lambda_{N+1}^-(T-r)} + \widehat{\gamma}_N(r)(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1) \left[1 + \frac{\widehat{\gamma}_N(T)(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 e^{\lambda_N^- r})}{1 - \widehat{\gamma}_N(T)(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 e^{\lambda_N^- r})}\right]. \tag{2.95}$$

Нас цікавить випадок, коли обидві сталі Липшиця $L_i(T), i = 1, 2$, відображення Φ (див. (2.85)) меньше 1. Нам знадобиться наступне покращення алгоритма [148, лема 3.2] вибора T та r в залежності від N для задовільнення умови достатньої малості L_i.

Лема 2.44 . *Розглянемо довільні $\delta_1, \delta_2 \in (0,1]$. Для кожного $c > 0$ позначимо $D_c \equiv 4e^c(e^c - e^{-c})$.*

(i) Нехай $\lambda_N^- > \left(1 + \frac{1}{\delta_1}\right)(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 e^c)\frac{1}{4}D_c$. Тоді, якщо r та T задовільняють $r < T$ та $\lambda_{N+1}^- T \leq c$, то $L_1(T) < \delta_1$.

(ii) Нехай $\lambda_N^- > \frac{1}{\delta_2}(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 e^c)D_c e^{-c}$. Тоді умова $r + \frac{\ln(2\delta_2^{-1})}{\lambda_{N+1}^-} < T \leq \frac{c}{\lambda_{N+1}^-}$, дає $L_2(T) < \delta_2$.

Наслідок 2.45 *Розглянемо довільні $\delta_1, \delta_2 \in (0,1]$. Тоді для кожного $c > \ln(2\delta_2^{-1})$ умова (2.87) та*

$$\lambda_N^- > (\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 e^c)D_c \cdot \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\delta_1}\right), \tag{2.96}$$

дають, що $L_1(T) < \delta_1$ та $L_2(T) < \delta_2$. Тут D_c визначено в лемі 2.44.

Доведення леми 2.44. Нам знадобляться явні формули для L_i (див. (2.95), а також [148, (3.12)]). Легко бачити, що $\widehat{\gamma}_N(T)e^{\lambda_N^- T}(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 e^{\lambda_N^- r}) < \delta_1(\delta_1+1)^{-1}$ дає $L_1(T) < \delta_1$. Використовуючи (2.91), $r < T, \lambda_{N+1}^- T \leq c$ та $\widehat{\gamma}_N(T) \leq \frac{D_c}{4e^c\lambda_N^-}$ ми отримуємо умову $D_c(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 e^{\lambda_N^- r})(4\lambda_N^-)^{-1} < \delta_1(\delta_1+1)^{-1}$. Це дає (i).

Доведемо (ii). Маємо $e^{-\lambda_{N+1}^-(T-r)} < \delta_2/2$ тоді і тільки тоді, коли $r + \frac{\ln(2\delta_2^{-1})}{\lambda_{N+1}^-} < T$. Як у (i), ми отримуємо $\widehat{\gamma}_N(r)(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1) < \delta_2/4$, якщо $D_c(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1)(4e^c\lambda_N^-)^{-1} < \delta_2/4$ та $\lambda_{N+1}r \leq c$. Таким чином, необхідно $\lambda_N^- > \frac{1}{\delta_2}(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1)D_c e^{-c}$. З іншої сторони, для $\frac{\widehat{\gamma}_N(T)(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 e^{\lambda_N^- r})}{1 - \widehat{\gamma}_N(T)(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 e^{\lambda_N^- r})} < 1$ достатньо, якщо $\widehat{\gamma}_N(T)(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 e^{\lambda_N^- r}) < 1/2$. Це можливо, якщо $\lambda_N^- T \leq c$ та $\lambda_N^- > \frac{1}{2}(\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 e^c)D_c e^{-c}$. Оскільки $\delta_2 \leq 1$, ми отримуємо (ii). Доведення леми 2.44 завершено. □

Лема 2.46 . *Нехай (2.86) виконано. Візьмемо довільні $\delta_1, \delta_2 \in (0,1]$ та довільне $c > \ln(2\delta_2^{-1})$. Тоді існує достатньо велике N_0 таке, що для довільних $N \geq N_0$, и $\varepsilon^2 \in [2\mu_{N+1}, 2\mu_{N+1} + \mu_N]$ та T, r які задовільняють (2.87), ми маємо $L_1(T) < \delta_1$ та $L_2(T) < \delta_2$.*

Доведення леми 2.46. Наслідок дає $L_1(T) < \delta_1$ та $L_2(T) < \delta_2$ якщо

$$\lambda_N^- \equiv \varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \mu_N} > \mu_{N+1}^{\alpha - 1/2}(M_0 + M_1 e^c)\max\left\{1, \sqrt{\frac{\mu_{N+1}}{\varepsilon^2 - \mu_{N+1}}}\right\} D_c \cdot \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\delta_1}\right),$$

та (2.87) виконуються (див. також визначення $\widehat{M_i}$). Домножимо останню оцінку на $\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \mu_N}$

$$\mu_N > (\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \mu_N}) \cdot \mu_{N+1}^{\alpha - 1/2}(M_0 + M_1 e^c) \max\left\{1, \sqrt{\frac{\mu_{N+1}}{\varepsilon^2 - \mu_{N+1}}}\right\} D_c \cdot \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\delta_1}\right).$$

Для довільного $\varepsilon^2 \in [2\mu_{N+1}, 2\mu_{N+1} + \mu_N]$ маємо $\max\left\{1, \sqrt{\frac{\mu_{N+1}}{\varepsilon^2 - \mu_{N+1}}}\right\} = 1$ та $\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \mu_N} \le \sqrt{2\mu_{N+1} + \mu_N} + \sqrt{2\mu_{N+1}} \le (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot \mu_{N+1}^{1/2}$. Таким чином достатньо, якщо

$$\mu_N > (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot \mu_{N+1}^{\alpha}(M_0 + M_1 e^c) D_c \cdot \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\delta_1}\right).$$

Тепер властивість $\inf \lim_{n \to \infty} \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \equiv \eta_0 > 0$ дає, що для довільного $q \in (0, 1)$ існує достатньо велике n_0 таке, що $\mu_n \ge \eta_0 q \mu_{n+1}$ для $n \ge n_0$. Остаточно, умова

$$\mu_{N+1}^{1-\alpha} > (\eta_0 q)^{-1}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (M_0 + M_1 e^c) D_c \cdot \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\delta_1}\right).$$

забезпечує існування необхідного N_0. Доведення леми 2.46 завершене. □

2.5.2. НІМ, що проходять крізь всі стаціонарні розв'язки (СНІМ). Розглянемо N, r та T, що задовільняють (2.96), (2.87). В цьому випадку, достатньо обрати $\varepsilon = \delta = 1$ та для довільного $c > \ln 2$, припустити $\lambda_N^- > (M_0 + M_1 e^c) D_c$ та $\lambda_{N+1}^- r + \ln 2 < \lambda_{N+1}^- T \le c$ (див. [148, лема 3.2]). Оскільки $L_2 < 1$, ми можемо використати відображення Φ (для довільного фіксованого $p \in E_1^-$) як стискання в $\widehat{Q}C_E$:

$$|\Phi(p, \psi^1) - \Phi(p, \psi^2)|_{C_E} \;\le\; L_2 |\psi^1 - \psi^2|_{C_E}, \quad L_2 < 1.$$

Розглянемо єдину нерухому точку $\psi \in \widehat{Q}C_E$ відображення Φ, побудовану для $p \in P_N H$. Визначимо відображення $\Psi^T \equiv \Psi^{T,N} : E_1^- \to \widehat{Q}C_E$ наступним чином

$$\Psi^T(p) \equiv \Phi(p, \psi), \text{ де } \psi = \Phi(p, \psi). \tag{2.97}$$

Нашою метою є доведення того, що графік Ψ^T

$$\mathcal{M} \equiv \{e^{-\mathcal{A}\theta} p + \Psi^T(p)(\theta) : p \in PE \equiv E_1^-\} \subset C_E. \tag{2.98}$$

є Наближеним інерційним многовидом (НІМ). Відзначимо, що многовид $\mathcal{M}$ включає всі стаціонарні точки (2.78) З цієї причини, дотримуючись термінології [107], ми називаємо $\mathcal{M}$ *стаціонарним наближеним інерційним многовидом (СНІМ).*

Зауваження 2.47 *За визначенням, $\mathcal{M}$ включає також всі T-періодичні розв'язки (2.78) .*

Будемо припускати, що (2.78) є дисипативним тобто, має поглинаючу кулю в C_E. Використовуючи існування поглинаючої кулі для рівняння, ми можемо стандартним чином модифікувати нелінійний член $\mathcal{B}$ поза кулею таким чином, що він замінюється функцією, яка дорівнює $\mathcal{B}$ всередині поглинаючої кулі та має обмежений носій. Позначимо R_d радіус кулі, яка включає цей носій. Для конкретних прикладів дисипативних РЧП другого порядку за часом з загаюванням див., наприклад, [53, 63, 43].

Наступні властивості Ψ^T та $\mathcal{M}$ будуть використані в подальшому.

Лема 2.48 . *Нехай r, T та N задовільняють (2.96), (2.87) для деяких $\delta_1, \delta_2 \in (0,1)$. Тоді відображення Ψ^T, визначене в (2.97), задовільняє*

$$|\Psi^T(p^1) - \Psi^T(p^2)|_{C_E} \leq L_1(1-L_2)^{-1}|p^1 - p^2|, \tag{2.99}$$

де L_1, L_2 - сталі Липшиця відображення Φ. Більш того, для всіх $0 \leq t \leq T$ маємо

$$|\widehat{Q}U_t - \Psi^T(PU(t))|_{C_E} \leq (1-\bar{q})^{-1}\left[C_R^1 \cdot e^{-\gamma T} + C_R^2 \cdot e^{-\gamma t}\right], \tag{2.100}$$

для довільного розв'язку (2.78) $U = U(t)$ із початковою умовою $U_0 = e^{-\mathcal{A}\theta}p + \Psi^T(p) \in C_E$ при $t = 0$. Тут γ - довільне число з $[\lambda_N, \lambda_{N+1}]$, додатні сталі C_R^1 та C_R^2 залежать тільки від радіуса дисипативності R_d, додатня стала $\bar{q}$ визначена наступним чином

$$\bar{q} \equiv (\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 e^{\lambda_{N+1}^{-} r}) \cdot T < \frac{1}{2}. \tag{2.101}$$

Доведення леми 2.48 використовує аргументи, подібні до [153].

Основним результатом цього підрозділу є наступна

Теорема 2.49 . *Оберемо довільне* $\eta > 0$. *Існує* N *та* r_0 *такі, що для всіх* $r \in [0, r_0]$ *та всіх* $\varepsilon^2 \in [2\mu_{N+1}, 2\mu_{N+1} + \mu_N]$ *існує* N*-вимірний наближений інерційний многовид, який включає всі стаціонарні розв'язки (2.78) та товщина притягуючого околу є* η. *Детальніше, маємо*

$$|\widehat{Q}U_t - \Psi^T(PU(t))|_{C_E} \leq C_R \cdot exp\left\{-\frac{2}{T}(t - t_*) \ln 2\right\} + \eta,$$

для всіх $t \geq t_* + T/2$ *та довільного розв'язку* $U = U(t)$ *системи (2.78) такого, що* $|U_t|_{C_E} \leq R$ *для* $t_* \ \leq \ t \ < \ \infty$.

Доведення теореми 2.49. Ми наслідуємо аргументи [54] та використовуємо леми 2.48, 2.50. Слід відмітити, що ми не можемо безпосередньо застосувати результати [54] до нашої загаюванної системи оскільки аргументи в [54] суттєво спираються на оцінку (див. [54, лема 2.2])

$$\|QA^\alpha u(t)\| \leq \left[e^{-\lambda_{N+1}(t-s)} + M(1+k)a_1\lambda_{N+1}^{-1+\alpha} \cdot e^{a_2(t-s)}\right] \|A^\alpha u(s)\|, \, t > s.$$

На жаль, немає аналога останньої оцінки у випадку із загаюванням для проектора $\widehat{Q}$ (див. [148, зауваження 3.8]). Замість цього, наше доведення базується на властивості Липшиця відображень Φ та Ψ. Ми скористаємось аргументами [153] для доведення

Лема 2.50 . *Нехай* N, T *та* r *задовільняють*

$$\lambda_N^- > (\widehat{M}_0 + \widehat{M}_1 e^c) D_c \frac{1}{4}\left(1 + \frac{28}{3}a_1 e^{a_2 T}\right), \tag{2.102}$$

$$r + \frac{\ln 8}{\lambda_{N+1}^-} < \frac{T}{2} < T \leq \frac{c}{\lambda_{N+1}^-}, \tag{2.103}$$

для деяких $c > 2\ln 8$ *та сталих* a_1, a_2, *визначених в лемі 2.40. Тоді відображення* Ψ^T, *визначене в (2.97), має властивість*

$$|\widehat{Q}U_t - \Psi^T(PU(t))|_{C_\alpha} \leq C_R^1 \cdot exp\{-\frac{2}{T}(t-t_*)\ln 2\} + C_R^2 \cdot exp\{-\frac{1}{2}\lambda_{N+1}T\}, \tag{2.104}$$

для всіх $t \geq t_* + T/2$ *та довільного розв'язку* $U = U(t)$ *системи (2.78) такого, що* $|U_t|_{C_E} \leq R$ *для* $t_* \ \leq \ t \ < \ \infty$.

Тепер, для завершення доведення теореми 2.49 ми повинні обрати параметри c, N, T та r_0, що задовільняють умовам леми 2.50 таким чином, аби останній член в (2.104) був меньший, ніж η. Візьмемо довільне $\eta > 0$ (товщина притягуючого околу). Оберемо $c > 2\ln 8$ так, що $C_R^2 e^{-c/2} \le \eta$. Тут C_R^2 визначена в (2.104). Тепер оберемо N, для виконання (2.102). Тепер ми обираємо $T \equiv c\lambda_{N+1}^{-1}$ для виконання (див. (2.103)) $\frac{\ln 8}{\lambda_{N+1}} < \frac{T}{2} < T \le \frac{c}{\lambda_{N+1}}$. Зараз бачимо, що r_0 може бути обрано меньшим, ніж $\frac{T}{2} - \frac{\ln 8}{\lambda_{N+1}}$ для виконання (2.103) Лема 2.50 завершує доведення теореми 2.49. ■

Зауваження 2.51 *Для побудови НІМ (2.98) ми знаходимо нерухомі точки двох стискань: $\mathcal{F}$ (див. (2.90)) для побудови $\Phi(p,\psi)$ та $\Phi(p,\cdot)$, та визначення Ψ^T. Однак ми можемо наблизити графік Ψ^T послідовністю многовидів, які задані (більш) явним чином. Розглянемо для фіксованого $p \in P_N H$ відображення $\Omega(\psi, y) = (\Omega_1(\psi, y); \Omega_2(\psi, y))$ в просторі $\Xi \equiv \hat{Q}_N C_E \times Y_1$ з нормою $|(\psi, y)|_\Xi \equiv |\psi|_{C_E} + |y|_{Y_1}$, де*

$$\Omega_1(\psi, y)(\theta) \equiv e^{-(\theta+T)\mathcal{A}}\psi(0) + \int_0^\theta e^{-(\theta-\tau)\mathcal{A}} P\mathcal{B}\left(\mathcal{E}(y,\psi)_\tau\right) d\tau$$

$$+ \int_{-T}^\theta e^{-(\theta-\tau)\mathcal{A}} Q\mathcal{B}\left(\mathcal{E}(y,\psi)_\tau\right) d\tau,$$

$$\Omega_2(\psi, y)(\theta) \equiv \mathcal{F}(y, \psi)(t).$$

Легко перевірити, що умови (2.87), (2.96) дають властивість стискання для Ω : $|\Omega(\psi^1, y^1) - \Omega(\psi^2, y^2)|_\Xi \le \varepsilon \cdot |(\psi^1, y^1) - (\psi^2, y^2)|_\Xi$, з $\varepsilon \equiv e^{-\lambda_{N+1}^-(T-r)} + \delta < 1$, де $\delta < \frac{1}{2}$ (завдяки (2.87), (2.96)) визначена в (2.92). Ми можемо наблизити нерухому точку відображення Ω за допомогою збіжної послідовності $(\psi^n, y^n) \equiv \Omega(\psi^{n-1}, y^{n-1}), n = 1, 2, ..$ якщо ми визначимо $\Psi_n^T(p) \equiv \hat{Q}\mathcal{E}(y^n, \psi^n)_0 : PE \to \hat{Q}C_E$, ми наближаємо многовид $\mathcal{M}$, визначений в (2.98), за допомогою послідовності $\mathcal{M}_n \equiv \{e^{-\mathcal{A}\theta}p + \Psi_n^T(p)(\theta) : p \in PE \equiv E_1^-\} \subset C_E$.

Вочевидь, що $\sup\{\|A^\alpha(\Psi_n^T(p) - \Psi^T(p))\|_{C_E} : \|p\| \le R\} \le \varepsilon^n \cdot C_R$, де $\varepsilon < 1$, та C_R залежать тільки від радіуса дисипативності R_d.

2.5.3. Скінченна кількість істотних мод. Багато цікавих результатів про скінченну кількість істотних мод (параметрів) для нескінченновимірних динамічних систем (див., наприклад, [31]) було отримано з часу піонерської роботи С.Фояша та Г.Проди [85].

Як в [75] (див. також [148] та підрозділ 2.2 для випадку параболічних рівнянь з загаюванням), використовуючи ІМЗ, ми доводимо результат про скінченну кількість істотних мод.

Теорема 2.52. *Нехай T, r та N такі, як в теоремі 2.41, такі, що сталі Липшиця $L_i < 1,\ i = 1, 2$. Розглянемо довільну послідовність $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ таку, що $0 = t_1 < t_2 < .. < t_k \to +\infty$ та $\quad r + \frac{\ln 2}{\lambda_{N+1}} < t_{i+1} - t_i \le T,\ i = 1, 2, ..$*

Тоді, якщо для двох довільних розв'язків $U^1(t), U^2(t)$ задачі (2.78), виконується

$$|P_N(u^1(t_k) - u^2(t_k))|_\alpha \to 0, \qquad k \to \infty \tag{2.105}$$

тоді

$$|u^1_t - u^2_t|_{C_\alpha} \to 0, \qquad t \to \infty.$$

Цей результат є розвитком результату з [63], де ми використовували $|P_N(u^1(t) - u^2(t))|_\alpha \to 0$, при $t \to \infty$ замість (2.105).

2.5.4. Характеризація $\mathcal{K}$-інваріантного многовиду. В цьому параграфі, використовуючи існування ІМЗ, доведене в теоремі 2.41, ми представляємо характерізацію $\mathcal{K}$-інваріантного многовиду, який було запропоновано М. Табоадой та Юнч. Ю в [199]. Цей многовид лежить у фазовому просторі C_E системи з загаюванням (2.78) та є локально притягуючою поверхнею породженою розв'язками системи *без загаювання* (див. (2.106).

Припустимо **в додаток до (A1), (A2)**, що нелінійний член B_0 (який не включає загаювання) задовільняє

(A3) *B_0 диференційовне за Фреше на $D(A^{\frac{1}{2}})$ та його похідна Фреше є локально липшицева за змінною u.*

(A4) *Для довільного b такого що $0 < b < \infty$ та довільної функції $u \in$*

$C([-r,b);D(A^{\frac{1}{2}}))\cap C^1([0,b);H)$, *маємо наступне*

$$\int_0^t (B_0(u(s)),\dot{u}(s))ds \le C(u^0;u^1) < \infty,$$

де $(\cdot,\cdot)$ *позначає скалярний добуток в* H *та* $C(u^0;u^1)$ *- стала, яка не залежить від* b*, але яка може залежати від початкових даних* $u^0 = u(0)$ *та* $u^1 = \dot{u}(0)$.

Розглянемо наступне рівняння *без загаювання*

$$\partial_t U + \mathcal{A}U = \mathcal{K}(U(t)), \tag{2.106}$$

де нелінійне відображення $\mathcal{K}$ має вигляд

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}^1(U) \\ B_0(u^0) + \mathcal{K}^2(U) \end{pmatrix}. \tag{2.107}$$

Тут, як і раніше, $U = (u^0;u^1) \in E$. Нам стане в нагоді наступне

Визначення 2.53 *[199]. Загаюване еволюційне рівняння має* $\mathcal{K}(\Omega)$*-властивість, якщо існує сильно неперервне відображення* $\mathcal{K}:\Omega\subset E\to E$ *(вигляду (2.107)) таке, що*

$$\mathcal{K}(\xi) = \mathcal{B}(U(\cdot)), \tag{2.108}$$

де $U(\theta)$ *є розв'язок (2.106) для* $\theta\in[-r,0]$ *та початкові дані* $U(0)=\xi\in E$.

Зауваження 2.54 *Ми розглянемо* $\mathcal{K}^i, i = 1,2$*, які є локально липшицевими та локально обмеженими, таким чином единий розв'язок, який розглядається у визначенні, існує.*

Існування такого відображення $\mathcal{K}$ в умовах, що розглядаються, є основним результатом роботи [199].

Теорема 2.55 *[199]. В умовах (A1)-(A4), загаюване еволюційне рівняння (2.78) має* $\mathcal{K}(\Omega)$*-властивість, якщо загаювання* $r>0$ *достатньо мале. Детальніше, для довільного* $d>0$*, існує* $r_0 >$ *таке, що якщо* $0<r\le r_0$*, існує неперервне відображення (вигляду (2.107)*

$$\mathcal{K}:\Omega = \{\xi\in E: \|\xi\|\le d\}\to E,$$

яке задовільняє (2.108). Результат є вірним, якщо замість припущення малості r ми припустимо, що величина сталих Липшиця відображення B_1 достатньо малі (див. (2.2).

Визначення 2.56 *[199]. C^0 многовид $\mathcal{M}$ в банаховому просторі C_E зветься $\mathcal{K}(\Omega)$-інваріантним многовидом для загаюваного рівняння (2.78) якщо:*

(i) Для всіх $U_0 \in \mathcal{M}$, глобальний розв'язок (2.78) існує та завжди належить до $\mathcal{M}$.

(ii) існує сильно неперервне відображення $\mathcal{K} : \Omega \to E$ таке, що $\mathcal{M}$ збудовано слабкими розв'язками рівняння без загаювання (2.106), що пов'язано з цим $\mathcal{K}$ для $t \in [-r, \infty)$.

Достатні умови для існування $\mathcal{K}$-інваріантного многовиду наведені в [199, наслідки 5.4,5.5]. Використовуючи ці результати ми доводимо наступну лему.

Лема 2.57 . *Нехай $\varepsilon^2 > \mu_{N+1}$. Існує T_0 таке, що довільний розв'язок $U(t)$ рівняння (2.78) задовільняє $\widehat{Q}\, U_t = \Phi^r_T \left(P\, U(t),\ \widehat{Q}\, U_{t-T} \right)$, для всіх $T \in (0, T_0]$ та всіх $t \ge 0$. Тут відображення Φ^r_T збудовано в теоремі 2.41 для кожного $T \in (0, T_0]$.*

Нехай виконані (A1)-(A4) та існує r^0 таке, що для довільного $r \in (0, r^0]$ існує $\mathcal{K}$-інваріантний многовид $\mathcal{M}$ (див. [199, наслідки 5.4, 5.5]). Тоді довільний розв'язок $U(t)$ системи (2.78) такий, що $U_t \in \mathcal{M}$ задовільняє

$$\widehat{Q}\, U_t = \widehat{\Phi}^0_T \left(P\, U(t),\ Q\, U(t-T) \right),$$

для всіх $T \in (0, T_0]$ та всіх $t \ge 0$. Тут відображення $\widehat{\Phi}^0_T : PE \times QE \to \widehat{Q}\, C_E$ є липшицевим.

Теорема 2.58 . *Нехай $\varepsilon^2 > \mu_{N+1}$. Припустимо виконані (A1)-(A4) та існує достатньо мале r^0 таке, що для довільного $r \in (0, r^0]$ інваріантний многовид $\mathcal{M}$ існує (див. визн. 6.2 та [199, наслідки 5.4, 5.5]).*

Тоді розв'язок $U(t)$ системи (2.78) задовільняє $U_t \in \mathcal{M}$ тоді та тільки тоді, коли $U(t)$ однозначно визначається значеннями $PU(t_1)$ та $QU(t_2)$ для всіх t_1, t_2 за умови $t_1 - t_2 \in [0, T_0]$. Тут T_0 визначається IMЗ для рівняння без загаювання (2.106).

Зауваження 2.59 **(a)** *Якщо $U_{t_1} \in \mathcal{M}$ для деякого t_1, то $U(t)$ визначене для всіх $t \in R$ та $U_t \in \mathcal{M}$ для кожного $t \in R$.*

(b) *Якщо $U(\cdot)$ однозначно визначене значеннями $PU(t_1)$ та $QU(t_2)$ для деяких t_1, t_2 таких, що $t_1 - t_2 \in [0, T_0]$, то теорема 2.58 та попереднє зауваження дають, що $U(\cdot)$ однозначно визначене значеннями $PU(s_1)$ та $QU(s_2)$ для довільних s_1, s_2 таких, що $s_1 - s_2 \in [0, T_0]$.*

(c) *Відзначимо, що при зміні r (в $(0, r^0]$), многовид $\mathcal{M} = \mathcal{M}^r$ також змінюється. Більш того, простір $C_E = C_E^r$ також змінюється, але це не впливає на критерій в теоремі 2.58 оскільки значення T_0 не залежить від r (див. доведення теореми 2.58).*

(d) *Якщо ми оберемо $t_1 = t_2$, ми отримаємо побудову многовиду $\mathcal{M}$ [199], яке збудовано траєкторіями еволюційного рівняння без загаювання (2.106).*

Доведення теореми 2.58. Розглянемо розв'язок $U(t)$ рівняння (2.78), який задовільняє $U_t \in \mathcal{M}$. За побудови $\mathcal{M}$ [199], $U(t)$ є розв'язок (2.106). Ми застосовуємо теорему 2.41 до (2.106). та визначаємо ІМЗ $\Phi_T^0 : PE \times QE \to QE$ для довільного $T \in (0, T_0^r]$. Тут T_0^r залежить від r. Таким чином $QU(t) = \Phi_T^0 (PU(t),\ QU(t-T))$. Використовуючи розв'язок (2.106), який визначає ІМЗ, ми легко вводимо відображення $\widehat{\Phi}_T^0 : PE \times QE \to \widehat{Q}C_E$, таке, що $\widehat{Q}U_t = \widehat{\Phi}_T^0 (PU(t),\ QU(t-T))$. Це означає, що розв'язок $U(t)$ однозначно визначений значеннями $PU(t)$ та $QU(t-T)$. З доведення теореми 2.41 легко бачити, що існує додатнє $T_0 \equiv \min\{T_0^r : r \in (0, r^0]\} > 0$. Перша частина теореми доведена.

Розглянемо розв'язок $U(t)$ рівняння (2.78) який однозначно визначений значеннями $p \equiv PU(t_1)$ та $q \equiv QU(t_2)$ для деяких t_1, t_2 таких, що $t_1 - t_2 \in [0, T_0]$. Оскільки $t_1 - t_2 \in [0, T_0]$ ми можемо збудувати ІМЗ (для (2.106)) $\Phi_{t_1-t_2}^0$ тобто, $T = t_1 - t_2$ використовуючи *єдиний* розв'язок $\widetilde{U}(t)$ рівняння (2.106) який задовільняє $P\widetilde{U}(t_1) = p$ та $Q\widetilde{U}(t_2) = q$. За побудови, довільний розв'язок (2.106) є розв'язком (2.78), таким чином $\widetilde{U}(t)$ також. Оскільки існує тільки один розв'язок (2.78) який задовільняє властивості $PU(t_1) = p$, $QU(t_2) = q$, ми отримуємо $U(t) \equiv \widetilde{U}(t)$. Таким чином $U(t)$ є розв'язком (2.106) та, за визначенням $\mathcal{M}$, ми отримуємо, що $U_t \in \mathcal{M}$ для всіх t. Доведення теореми 2.58 завершено.

2.6. Про одну крайову задачу, що пов'язана з ІМЗ.

В цьому підрозділі ми розглянемо одну з крайових задач, яка напряму пов'язана з методом побудови Інерційного многовида із загаюванням (ІМЗ). Ця крайова задача розглядалась до появи функції зсуву-продовження [148], яка виявилась ключовим технічним засобом для побудови ІМЗ у випадку рівнянь із загаюванням. Однак крайова задача викликає зацікавленність сама по собі. Для зручності ми спочатку проілюструємо основну ідею на крайовій задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь із загаюванням. Після цього буде розглянута крайова задача для рівняння у частинних похідних із загаюванням.

2.6.1. Система звичайних диференціальних рівнянь із загаюванням. В цьому пункті ми познайомимось з одним з простих формулювань краєвої задачі для рівнянь з загаюванням. Нас цікавить питання існування та єдиності розв'язку наступної краєвої задачі

$$\dot{x}(t) = f(x_t),\, t > 0; \qquad x(\theta) = \varphi(\theta),\, \theta \in [-r, 0); \quad x(\alpha) = x^{\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (2.109)$$

Ми розглядаємо автономне рівняння для простоти.

пояснимо, де можуть виникати такі задачі. При дослідженні неперервних початкових даних $\varphi \in C$ для задачі Коші та неперервних розв'язків, ми отримували, що $\lim_{t\to 0+} x(t) = \varphi(0)$. При дослідженні розривних розв'язків із початковими даними $(\varphi; a) \in Y^m \equiv L^2(-r, 0; \mathbb{R}^m) \times\ R^m$ (див. визначення), ми маємо в загальному випадку $\lim_{t\to 0+} x(t) = a \neq \varphi(0)$, тобто розв'язок може мати розриви в момент часу $t = 0$. Таким чином, ми шукаємо розв'язок, який має властивості $\lim_{t\to 0+} x(t) = a$ та можливо має разрив в точці $t = 0$. З точки зору застосувань, не завжди зручно оцінювать функцію в точці її розрива. Набагато зручніше оцінювати її в довільно "близькій" до неї точці $t = \alpha > 0$, в якій функція неперервна. Саме так ми приходимо до краєвої задачі (2.109). В прикладних задачах, разривні розв'язки виникають, наприклад, при дослідженні механічних систем, з ударами. Детальніше див. книгу [1]. Справедлива наступна

Теорема 2.60 *Нехай функція* $f : L^2(-r,0;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$ *є липшицевою. Тоді для будь-яких* $\varphi \in L^2(-r,0;\mathbb{R}^m)$, $x^\alpha \in \mathbb{R}^m$ *існує* $\alpha_0 > 0$ *таке, що при довільному* $\alpha \in (0,\alpha_0]$ *краєва задача (2.109) має єдиний розв'язок.*

Зауваження 2.61 *Ми розглядаємо глобально липшицеву функцію* f *для простоти. Насправді, достатньо вимагати лише локальну липшицевість.*

Доведення теореми 2.60. Для $a \in \mathbb{R}^m$ розглянемо допоміжну функцію $\bar{\varphi}(a,\tau) \equiv \varphi(\tau)$ для $\tau \in [-r,0)$ та $\bar{\varphi}(a,\tau) \equiv a$ для $\tau \in [0,\alpha]$. Отримуємо $x(t) = y(t) + \bar{\varphi}(x,t)$ де $y_0 \equiv 0$.

Як раніше, позначимо $\mathcal{A}(\alpha,\beta) = \{y \in C([-r,\alpha];\mathbb{R}^m) : y_0 \equiv 0, \max\{|y(t)|, t \in [0,\alpha]\} \le \beta\}$. На множині $Z \equiv \mathcal{A}(\alpha,\beta) \times \{x \in \mathbb{R}^m : |x - x^\alpha| \le d\}$ ми розглянемо оператор $F : Z \to C([-r,\alpha];\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m$ визначений формулою

$$F(y,x)(t) = \begin{pmatrix} F^1(y,x)(t) \\ F^2(y,x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{ll} \int\limits_0^t f(y_\tau + \bar{\varphi}_\tau(x))d\tau, & t \in [0,\alpha], \\ 0, & \theta \in [-r,0). \end{array} \right. \\ x^\alpha - \int\limits_0^\alpha f(y_\tau + \bar{\varphi}_\tau(x))d\tau \end{pmatrix}.$$

Тут $F^1(y,x)(t)$-функція з $C([-r,\alpha];\mathbb{R}^m)$, $F^2(y,x)$-вектор з $\mathbb{R}^m$. Наша задача-показати, що при достатньо малому $\alpha > 0$ відображення F діє з Z в себе та є стискаючим. Перш ніж приступити до дослідження властивостей F, пояснимо звідки отримана формула, що задає $F^2(y,x)$. В попередньому підрозділі ми шукали розв'язок, маючи початкові дані $(\varphi; a) \in Y^m \equiv L^2(-r,0;\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m$. Зараз функція φ задана, а вектор a є невідомим. Маючи розв'язок (2.109), ми могли б написати $x(t) = a + \int\limits_0^t f(x_\tau)d\tau = a + \int\limits_0^t f(y_\tau + \bar{\varphi}_\tau(a))d\tau$. Розв'язок задовільняє $x(\alpha) = x^\alpha$ тобто $x^\alpha = a + \int\limits_0^\alpha f(y_\tau + \bar{\varphi}_\tau(a))d\tau$ або $a = x^\alpha - \int\limits_0^\alpha f(y_\tau + \bar{\varphi}_\tau(a))d\tau$. Це і є формула, що задає $F^2(y,a)$.

Оцінемо окремо $F^1(y,x)$ та $F^2(y,x)$.

$$|F^1(y^1,x^1) - F^1(y^2,x^2)| \le \alpha L_f \sqrt{r} \left(|y^1 - y^2|_{C([-r,\alpha];\mathbb{R}^m)} + |x^1 - x^2| \right). \quad (2.110)$$

Тут ми використовували оцінки

$$|\bar{\varphi}_\tau(x)|_{L^2(-r,0;\mathbb{R}^m)} \leq \max\{|\varphi|_{L^2(-r,0;\mathbb{R}^m)}; \sqrt{r}|x|\}, \tag{2.111}$$

$$|y_\tau|_{L^2(-r,0;\mathbb{R}^m)} \leq \sqrt{r}|y_\tau|_C \tag{2.112}$$

і, як наслідок,

$$|f(y^1_\tau + \bar{\varphi}_\tau(x^1)) - f(y^2_\tau + \bar{\varphi}_\tau(x^2))| \leq$$
$$\leq L_f \left(|y^1 - y^2|_{L^2(-r,0;\mathbb{R}^m)} + |\bar{\varphi}_\tau(x^1) - \bar{\varphi}_\tau(x^2)|_{L^2(-r,0;\mathbb{R}^m)}\right) \leq$$
$$\leq L_f\sqrt{r}\left(|y^1 - y^2|_{C([-r,\alpha];\mathbb{R}^m)} + |x^1 - x^2|\right).$$

Тепер аналогічно оцінемо

$$|F^2(y^1, x^1) - F^2(y^2, x^2)| \leq \alpha L_f\sqrt{r}\left(|y^1 - y^2|_{C([-r,\alpha];\mathbb{R}^m)} + |x^1 - x^2|\right). \tag{2.113}$$

Таким чином, використовуючи (2.110), (2.113), отримуємо

$$|F(y^1, x^1) - F(y^2, x^2)|_{C([-r,\alpha];\mathbb{R}^m)\times\mathbb{R}^m} \leq 2\alpha L_f\sqrt{r}|(y^1, x^1) - (y^2, x^2)|_{C([-r,\alpha];\mathbb{R}^m)\times\mathbb{R}^m}. \tag{2.114}$$

Для того, аби переконатись, що F відображає Z в себе, оцінемо

$$|F^1(y, x)| \leq \int_0^\alpha (|f(y_\tau + \bar{\varphi}_\tau(x)) - f(0)| + |f(0)|)d\tau$$
$$\leq \alpha\left(L_f\sqrt{r}|y|_{C([-r,\alpha];\mathbb{R}^m)} + \max\{|\varphi|_{L^2(-r,0;\mathbb{R}^m)}; \sqrt{r}|x|\} + |f(0)|\right)$$

та

$$|F^2(y, x)| \leq \alpha\left(L_f\sqrt{r}|y|_{C([-r,\alpha];\mathbb{R}^m)} + \max\{|\varphi|_{L^2(-r,0;\mathbb{R}^m)}; \sqrt{r}|x|\} + |f(0)|\right).$$

Враховуючи, що $y \in \mathcal{A}(\alpha, \beta)$, легко перевірити, що обираючи мале $\alpha > 0$, ми отримуємо, що $F : Z \to Z$ та є стискаючим відображенням. Застосовуємо теорему (принцип стискаючих відображень) та отримуємо нерухому точку $(\hat{y}, \hat{x})$ відображення F дає шуканий розв'язок у вигляді $x(t) = \hat{y}(t) + \bar{\varphi}(\hat{x}, t)$, $t \in [-r, \alpha]$. Теорема 2.60 доведена. ∎

Слід відзначити, що для існування та єдиності розв'язків краєвих задач (як вигляду (2.109), так і задач більш загального типу) важлива малість $\alpha > 0$. Розглянемо наступний

Приклад 2.62 *(Крайова задача з континуумом розв'язків).*

Розглянемо задачу

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t-1), \\ x(\theta) \equiv 0,\ \theta \in [-1, 0), \\ x(2) = 0. \end{cases} \tag{2.115}$$

Для довільного $x^0 \in \mathbb{R}^m$, розв'язок рівняння $\dot{x}(t) = -x(t-1)$ із початковими даними $(0, x^0)$ (тобто $x(\theta) \equiv 0$, $\theta \in [-1, 0)$ та $x(0) = x^0$) має вигляд

$$x(t) = \left[\begin{array}{ll} x^0, & \theta \in [0, 1], \\ x^0(2-t), & \theta \in [1, 2] \end{array} \right.$$

тобто задовільняє умові $x(2) = 0$ (графіки розв'язків (2.115) для скалярного випадку ($m = 1$) зображені на малюнку).

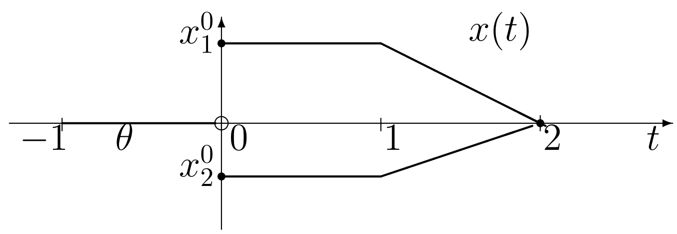

Рис. 3.1. Розв'язки крайової задачі (2.115).

Таким чином, крайова задача (2.115) має континуум розв'язків.

Для подальшого вивчення більш загальних краєвих задач звичайних диференціальних рівнянь з загаюваним аргументом рекомендується, наприклад, книга [1] та підрозділи 6.5, 9.6 книги [30]. В цьому пункті була розглянута краєва задача, яка має узагальнення на випадок рівнянь у частинних похідних з загаюванням (див. [149]).

2.6.2. Диференціальні рівняння у частинних похідних із загаюванням. Тепер ми перейдемо до обговорення краєвої задачі для рівнянь у частинних похідних. Ми обрали простий тип рівняння, хоча підхід може бути легко узагальнений на широкі класи рівнянь. Для подробиць дивись [149].

$$\gamma \dot{u} + \Delta^2 u - f\left(\int_\Omega \left|\nabla u(x,t)\right|^2 dx\right) \Delta u + \rho \frac{\partial u}{\partial x_1} - q(u_t) = d_0(x), \quad x \in \Omega, t > 0 \tag{2.116}$$

з наступними крайовими умовами

$$u\big|_{\partial\Omega} = \Delta u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.117}$$

Тут Ω є обмежена область у $\mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2), \gamma, \rho$ є додатніми параметрами системи, $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$; Δ є оператором Лапласа. Умови на скалярну функцію f наведені нижче.

Розподілене загаювання має вигляд:

$$q(u_t; x) = \frac{1}{2\pi k}\int_{-\infty}^{x_1} d\xi \int_0^{2\pi} d\theta \left[\left(a_\theta \frac{\partial}{\partial x_1} + b_\theta \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 u\right]^* \times$$

$$\left(\xi, x_2 - \frac{x_1 - \xi}{k}\cos\theta, t - \kappa_\theta(x_1 - \xi)\right), \tag{2.118}$$

$$a_\theta = \frac{\nu sin\theta - 1}{\nu - sin\theta}, \quad b_\theta = \frac{k \cdot cos\theta}{\nu - sin\theta}\ , \quad \kappa_\theta(\xi) = \frac{\xi}{k^2}(\nu - \sin\theta).$$

Ми позначили $\Psi^*(x)$ продовження функції $\Psi(x)$ нулем поза межі області Ω, та параметр $\nu > 1$ репрезентує швидкість газу, $k = \sqrt{\nu^2 - 1}$. Формула (2.118) показує, що значення члена q із загаюванням в момент t використовує (залежить від) значення функції $u(s)$ для $s \in (t - t_*, t)$, де $t_* = h = l(\nu - 1)^{-1}$ є величина (найбільшого) загаювання; l є довжина Ω вздовж вісі x_1. Як раніше, ми використовуємо позначення $u_t = u_t(\theta) = u(t + \theta), \theta \in (-t_*, 0)$.

Нам також потрібні початкові умови

$$u\big|_{t=0+} = u_0; \quad u\big|_{t\in(-t_\star,0)} = \varphi(x,t). \tag{2.119}$$

Ми не вимагаємо жодного узгодження між u_0 та φ.

Як і раніше, ми використовуємо проектори P_N та Q_N (див. с.49) у просторах $\mathcal{F}_s = D(A^{s/2})$, нагадаємо, що $\mathcal{F}_0 = L^2(\Omega)$. Тепер ми готові сформулювати початково-крайову задачу

$$u\big|_{t\in(-t_\star,0)} = \varphi(x,t), \quad Q_N u\big|_{t=0+} = q_0 \quad P_N u\big|_{t=b} = p_b, \quad b > 0, \tag{2.120}$$

де N є деяке невід'ємне ціле число.

Зауваження 2.63 *Умови (2.119) є частковим випадком (2.120) при $N = 0$, тобто $Q_N = Id$, умова з P_N відсутня.*

Визначення 2.64 *Сильним розв'язком задачі на інтервалі* $[0, T]$ *є вектор-функція* $u(t) \in C(0, T; \mathcal{F}_1) \cap L^2(-t_*, T; \mathcal{F}_2)$ *з похідною* $\dot{u}(t) \in L^2(0, T; \mathcal{F}_{-2})$, *якщо рівняння (2.116) виконується майже всюди за змінною* t *на* $[0, T]$ *як рівняння у просторі* $\mathcal{F}_{-2}$ *та умови (2.120) виконуються.*

Нашим результатом є наступна

Теорема 2.65 . *Нехай* $q_0 \in Q_N\mathcal{F}_1, p_b \in P_N\mathcal{F}_0, \varphi \in L^2(-h, 0; \mathcal{F}_2), d_0 \in \mathcal{F}_0$ *та функція* f *є локально липшицевою та задовільняє* $\inf \lim_{s\to\infty} f(s) \geq -C_f$, *з деякою сталою* C_f. *Тоді існує* b_0 *таке, що для всіх* $b \leq b_0$ *задача (2.116), (2.117), (2.120) має сильний розв'язок на будь-якому проміжку* $[0, T]$. *Цей розв'язок є единий та задовільняє* $u(t) \in L^2(0, T; \mathcal{F}_3)$.

З економії місця ми наведемо лише основні кроки доведення теореми 2.65. Деталі можна знайти у [149]. Визначимо простір

$$Y \equiv \{C(-h, b; \mathcal{F}_1) \cap L^2(-h, b; \mathcal{F}_2) : y|_{t\in(-h,0)} \equiv 0\} \tag{2.121}$$

з нормою $||y||_Y^2 \equiv \max_{s\in[0,b]} ||y(s)||_1^2 + \int_0^b ||y(t)||_2^2 \, dt$.
У просторі $Y \times P_N L^2(\Omega)$ ми використовуємо наступну норму
$|(y; p_0)|_{YN}^2 \equiv \max_{s\in[0,b]} ||y(s)||_1^2 + \int_0^b ||y(t)||_2^2 \, dt + ||p_0||_1^2$.

Для нас важлива наступна лема (див. [53, 63]).

Лема 2.66 *Якщо* $u(t) \in L^2(-h, T; \mathcal{F}_{2+2\sigma})$, *то*

$$||q(u_t)||_{2\sigma}^2 \leq Ch \int_{t-h}^{t} ||u(\tau)||_{2+2\sigma}^2 \, d\tau, \quad 0 \leq \sigma < \frac{1}{4},$$

та відображення $u \to q(u, t)$ *є лінійним та неперервним з простору* $L^2(-h, T; \mathcal{F}_{2+2\sigma})$ *до* $L^2(0, T; \mathcal{F}_{2\sigma})$

Перепишемо рівняння у формі

$$\dot{u}(t) + Au(t) + M(u_t) = 0. \tag{2.122}$$

Тут $A \equiv (-\Delta_D)^2\gamma^{-1}$ та

$$M(u_t) \equiv \left[-f\left(||\nabla u(t)||^2\right) \Delta u(t) - \rho \frac{\partial u(t)}{\partial x_1} - q(u_t) + d_0 \right] \gamma^{-1}.$$

Записуємо формулу варіації сталих для розв'язку $u(t)$. Якщо ми запишемо $u(t) = y(t) + v(t)$, де

$$v(t) \equiv \begin{cases} e^{-tA}u_0, & \text{якщо } t \geq 0, \\ \varphi(t), & \text{якщо } t \in (-h, 0), \end{cases} \tag{2.123}$$

тоді $y(t)$ повинно задовільняти

$$y(t) \equiv \begin{cases} -\int_0^t e^{-(t-\tau)A} M(y_\tau + v_\tau)\, d\tau, & \text{якщо } t \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } t \in (-h, 0), \end{cases}$$

Лема 2.67 *Нехай $y^i \in Y$ таке, що $||y^i||_Y \leq C_T$ та $p_0^i \in P_N L^2(\Omega)$, $i = 1, 2$. Тоді існує стала $D_T > 0$ така, що для всіх $\tau \in [0, b]$ маємо*

$$||A^{-1/4} \left(M(y_\tau^1 + v_\tau^1) - M(y_\tau^2 + v_\tau^2) \right) || \leq D_T ||(y^1; p_0^1) - (y^2; p_0^2)||_{YN}.$$

Тут v^i є визначеним у (2.123) з $u_0^i = p_0^i + q_0$.

Доведення леми 2.67 можна знайти у [149]. З лем 2.66 та 2.67 ми маємо, що, подібно до скінченновимірного випадка (див. попередній підпункт), можна застосувати теорему Банаха про стискаючий оператор у просторі $Y \times P_N(L^2(\Omega))$ для знаходження нерухомої точки. Відзначимо, що дані для (2.120) ми обираємо з просторів $\varphi \in L^2(-t_*, 0; \mathcal{F}_2), q_0 \in Q_N \mathcal{F}_1$, $p_b \in P_N L^2(\Omega)$. Оскільки доведення детально представлено для скінченновимірного випадка (див. теорему 2.60), ми не будемо повторювати всі кроки тут. Деталі можна знайти у [149, с.518-522].

2.7. Висновки до розділу 2

Для дослідження асимптотичних властивостей розв'язків диференціальних рівнянь у частинних похідних зі сталим обмеженим розподіленим загаюванням развинутий метод інерційних многовидів із загаюванням (ІМЗ). За допомогою цього метода вдалось збудувати нові родини наближених інерційних многовидів (НІМ). Товщина притягуючих околів таких НІМ може бути обрана довільно малою. Всі ці многовиди, на відміну від відомих раніше, проходять крізь всі стаціонарні точки досліджуваних задач. Розглянута залежність НІМ від величини загаювання r. Ми доводимо близкість стаціонарного НІМ задачі з загаюванням та задачі без загаювання, точніше, прямування загаюваного НІМ до незагаюваного НІМ при $r \to 0$. Ми використовуємо версію метода Ляпунова-Перрона.

Метод развинутий як для параболічних рівнянь так і для рівнянь другого порядку за часом з розподіленим сталим загаюванням.

У частковому випадку параболічних рівняннь без загаювання, теорема 2.34 стверджує, що наші стаціонарні НІМ $M^{T,N}$, що визначені в (2.64), формують послідовність наближених інерційних многовидів експоненційного порядку тобто, околи поверхонь $M^{T,N}$, що мають товщину порядка $\exp\{-\frac{\rho}{2}\lambda_{N+1}^{1-\alpha}\}$, експоненційно притягують всі траєкторії системи. Доведена скінченність кількості істотних мод та наведена характеризація K-інваріантного многовиду.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [148, 149, 150, 151, 152, 153, 154].

РОЗДІЛ 3. РІВНЯННЯ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ІЗ ЗАГАЮВАННЯМ, ЩО ЗАЛЕЖИТЬ ВІД СТАНУ

Перш ніж розпочати дослідження рівнянь у частинних похідних із загаюванням, що залежить від стану, розглянемо на простих прикладах звичайних (навіть скалярних) диференціальних рівнянь які складнощі можуть виникати при цьому типі загаювання (залежності загаювання від стану).

Для ілюстрації розглянемо два типа загаювання: розподілене та дискретне. Рівняння з розподіленим загаюванням можуть віддзеркалювати залежність загаюваного члена, наприклад, таким чином:

$$\dot{x}(t) = \int_{-r(x_t)}^{0} x(t+\theta)g(\theta)d\theta, \qquad \text{або} \qquad \dot{x}(t) = \int_{-r(x_t)}^{-d(x_t)} x(t+\theta)g(\theta)d\theta,$$

де $g(\theta)$ – задана функція, а $r(x_t)$, $d(x_t)$ – функції з C або $L^2(-h,0;R^m)$ в R_+ (маємо на увазі, що $r(\varphi) > d(\varphi)$ для всіх φ). В цьому випадку можна вивчати як неперервні, так і L^2-розв'язки (див., наприклад, [27]). Якщо функція $r(x_t)$, яка задає загаювання, обмежена, тобто діє у $(0,h], h > 0$, то останнє рівняння можна переписати у вигляді $\dot{x}(t) = \int_{-h}^{0} x(t+\theta)\xi(\theta;x_t)d\theta$, де інтегрування проводиться по максимальному інтервалу $(-h,0)$, а залежність від стану віддзеркалюється в залежності підінтегральної функції ξ.

Прикладом рівняння з дискретним загаюванням, що залежить від стану, може слугувати

$$\dot{x}(t) = x(t-\eta(x_t)), \quad \eta : C \to [0,h],$$

з одним дискретним загаюванням η або з декількома η^k

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{N} b^k(x(t-\eta^k(x_t))), \quad \eta^k : C \to [0,h],$$

де $b^k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ задані (можливо нелінійні) відображення.

Зрозуміло, можна розглядати і рівняння зі змішаним загаюванням, тобто присутні як елементи з дискретним, так і з розподіленим загаюванням

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{N} b^k(x(t-\eta^k(x_t))) + \sum_{j=1}^{M} \int_{-h}^{0} f^j(x(t+\theta))\xi^j(\theta;x_t)d\theta,$$

але вивчення змішаного загаювання буде зводитись до комбінації методів, що розроблені для цих двох основних типів. В [27] обговорювались деякі найпростіші властивості рівнянь з розподіленим загаюванням, а зараз ми зконцентруємось на вивченні рівнянь з `дискретним` загаюванням, що залежить від стану.

3.1. Приклади неєдиності розв'язків

Важливо відзначити, що навіть у випадку звичайних диференціальних рівнянь (навіть скалярних) відображення вигляду $\widetilde{F}(\varphi) = \widetilde{f}(\varphi(-r(\varphi))) : C([-r_0,0];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, яке представляє собою скалярний випадок одного загаювання (залежного від стану), має одну "незручну" властивість. Автори в [124, с.3] пишуть "Відзначимо, що функціонал $\widetilde{F}$ визначений на $C([-r_0,0];\mathbb{R})$, але зрозуміло, що він не є ані диференційовним ані локально липницевим, яка б не була гладкість $\widetilde{f}$ та r." Як наслідок, задача Коші, збудована за рівнянням з такою нелінійністю "... `не` є коректно поставленою в просторі неперервних функцій, з причини неєдиності розв'язків яка б не була гладкість функцій $\widetilde{f}$ та r" [124, с.2]. див. також детальне обговорення в огляді [98].

Наскільки відомо автору, перший приклад неєдиності розв'язків рівнянь з (дискретним) загаюванням, що залежить від стану був опублікований в роботі Р. Драйвера [77] в 1963 р. Див. (1.1), (1.2) та його два неперервних розв'язки. Наступні аргументи базуються на роботі Еліота Вінстона [216] (1970 г.), де був наведений інший подібний приклад неєдиності розв'язків скалярного рівняння з (дискретним) загаюванням, що залежить від стану. Приведемо та обговоримо детальніше цей приклад. Рівняння

$$\dot{x}(t) = -x(t-|x(t)|) \tag{3.1}$$

із початковою неперервною функцією

$$x(t) = \varphi(t) \equiv \begin{cases} -1, & \text{якщо} \quad t \le -1; \\ \frac{3}{2}(t+1)^{1/3} - 1, & \text{якщо} \quad -1 < t \le -\frac{7}{8}; \\ \frac{10}{7}t + 1, & \text{якщо} \quad -\frac{7}{8} < t \le 0; \end{cases} \tag{3.2}$$

має **два** розв'язки (для малих $t > 0$):

$$x(t) = t + 1 \quad \text{та} \quad x(t) = t + 1 - t^{3/2}. \tag{3.3}$$

В цьому прикладі дискретним загаюванням, що залежить від стану, є $\eta(x_t) = |x(t)|$, тобто $\eta(\psi) = |\psi(0)|$ для довільної $\psi \in C$.

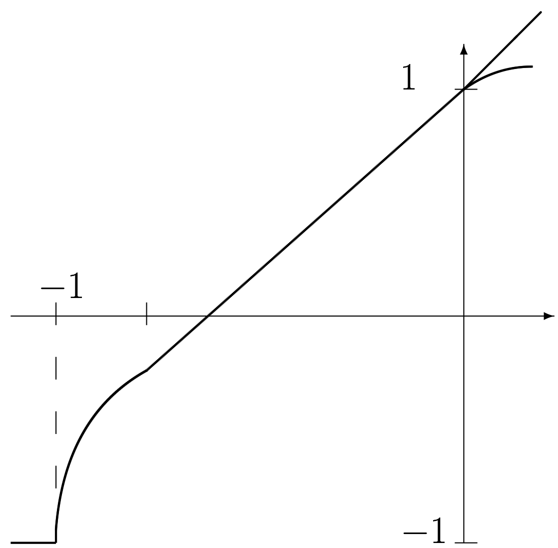

Рис. 4.1. Приклад Е. Вінстона [216].

Приклад Е. Вінстона можна спробувати трохи змінити для кращого розуміння того, які параметри (коефіцієнти) системи "відповідають" за виникнення неєдиності.

Розглянемо рівняння [28]

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{\alpha - 1} \cdot x(t - |x(t)|) + 1 \tag{3.4}$$

із початковою функцією (тут $\alpha \in (0, 1)$)

$$x(t) = \varphi(t) \equiv \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad t \le -1; \\ (t+1)^{\alpha}, & \text{якщо} \quad -1 < t \le 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

яке має **<u>два</u>** розв'язки (для малих $t > 0$):

$$x(t) = t + 1 \quad \text{та} \quad x(t) = t + 1 - t^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{3.6}$$

Розглянемо [28] рівняння (3.4) з початковою функцією (тут $\alpha \in (0,1)$)

$$x(t) = \varphi(t) \equiv \begin{cases} -(-1-t)^{\alpha}, & \text{якщо} \quad -2 \le t \le -1; \\ (t+1)^{\alpha}, & \text{якщо} \quad -1 < t \le 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

яке має **<u>три</u>** розв'язки (для малих $t > 0$):

$$x(t) = t + 1, \quad x(t) = t + 1 - t^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{та} \quad x(t) = t + 1 + t^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{3.8}$$

Як ми бачимо, рівняння (3.4), у випадку з початковою функцією (3.5), та у випадку з початковою функцією (3.7) має два розв'язки (3.6). Чому виникає таке співпадіння? Чому у задачі (3.4), (3.7) виник ще один додатковий (третій) розв'язок? Для відповіді на ці питання достатньо прослідкувати [28] за значеннями загаюваного аргумента (тобто $t - \eta(x_t) = t - |x(t)|$) на кожному з наведених розв'язків. Розглянувши попередні приклади та прослідкувавши за значеннями загаюваного аргумента (тобто $t - \eta(x_t) = t - |x(t)|$) на кожному з наведених розв'язків, ми кожного разу бачили, що неєдиність "виникала" в ситуації (моменти часу), коли загаюваний аргумент попадав в точку порушення липшицевости розв'язку (початкової функції). Це спостереження є важливим для розуміння ситуації. Для простоти викладення, у всіх прикладах точкою порушення липшицевості розв'язку була точка $t = -1$. Стає зрозумілим, що поведінка розв'язку (початкової функції) поза довільного околу точки порушення липшицевості не віддзеркалюється на питанні єдиності розв'язку. В прикладі (3.1), (3.2) автор відступив від точки $t = -1$ на $\frac{1}{8}$ та з'єднав прямою $\frac{10}{7}t + 1$ (для $-\frac{7}{8} < t \le 0$) розв'язок (який задано на $[-1, -\frac{7}{8}]$) з точкою $t = 0$. Легко бачити, що відступити можна було на довільну величину $\rho \in (0,1)$ та з'єднати можна було довільною неперервною функцією (для $t \in [-1+\rho, 0]$).

Повернемося до рівняння (3.1). Оберемо довільне $t_1 \in (-1,0)$ ($t_1 = -1 + \rho$), довільне $\alpha \in (0,1)$ та довільне $c \neq 0$. Розглянемо початкову функцію [28]

$$x(t) = \varphi(t) \equiv \begin{cases} -1, & \text{якщо} \quad t < -1; \\ c \cdot (t+1)^{\alpha} - 1, & \text{якщо} \quad t \in [-1, t_1]; \\ \psi(t), & \text{якщо} \quad t \in (t_1, 0); \\ 1, & \text{якщо} \quad t = 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

де ψ — довільна неперервна на $[t_1, 0]$ функція, яка задовільняє умовам

$$\psi(t_1) = c \cdot (t_1 + 1)^{\alpha} - 1, \qquad \psi(0) = 1. \tag{3.10}$$

Зауваження 3.1 *Легко бачити, що початкова функція (3.2) (з прикладу Е.Вінстона) описується випадком, який розглянутий в останньому прикладі, тобто початкова функція (3.9) при виборі* $t_1 = -\frac{7}{8}$, $c = \frac{3}{2}$, $\alpha = \frac{1}{3}$.

3.2. Рівняння з розподіленим та зосередженим загаюваннями, що залежать від стану

Ми презентуємо першу спробу дослідити РЧП із зосередженим загаюванням, що залежить від стану. Основною ідеєю є наближення члена з зосередженими загаюваннями за допомогою послідовності елементів з розподіленими загаюваннями (всі залежать від стану). Ми досліджуємо локальне існування та асимптотичну поведінку розв'язків. Доводимо, що задача з розподіленим загаюванням має глобальний атрактор, а задача з зосередженим загаюванням має траєкторний атрактор.

Розглянемо наступне (нелокальне) РЧП із зосередженим загаюванням, що залежить від стану

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) + Au(t,x) + du(t,x) \\ &= \int_{\Omega} b(u(t - \eta(u(t), u_t), y)) f(x-y) dy \equiv \big(F(u_t)\big)(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{3.11}$$

Оператор A задовільняє умові **(A1)**, гладка область Ω обмежена в $\mathbb{R}^{n_0}$, $f : \Omega - \Omega \to \mathbb{R}$ обмежена вимірна функція, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ локально липшицева та обмежена ($|b(w)| \leq C_b$ з $C_b \geq 0$), d додатня стала. Функція $\eta(\cdot,\cdot) : L^2(\Omega) \times L^2(-r, 0; L^2(\Omega)) \to \mathbb{R}_+$ представляє зосереджене загаювання, що залежить від стану. Для короткості ми позначаємо $H \equiv L^2(\Omega) \times L^2(-r, 0; L^2(\Omega))$.

Розглянемо наступне (нелокальне) РЧП із розподіленим загаюванням, що залежить від стану

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + Au(t,x) + du(t,x)$$
$$= \int_{-r}^{0} \left\{ \int_\Omega b(u(t+\theta,y)) f(x-y)dy \right\} \xi^n(\theta, u(t), u_t) d\theta \equiv \big(F_n(u_t)\big)(x), x \in \Omega, \tag{3.12}$$

де функція $\xi^n(\cdot,\cdot,\cdot) : [-r,0] \times H \to \mathbb{R}$ представляє *розподілене* загаювання, що залежить від стану.

Ми розглядаємо рівняння (3.11) та (3.12) із початковими умовами

$$u(0+) = u^0 \in L^2(\Omega), \quad u|_{(-r,0)} = \varphi \in L^2(-r,0; L^2(\Omega)). \tag{3.13}$$

Підхід, що викладений тут, може бути застосований до інших класів нелінійних РЧП з загаюванням. Ми обрали частковий вигляд нелінійних загаюваних членів F та F_n для спрощення та з метою проілюструвати підхід на прикладі рівняння Ніколсона.

3.2.1. Розподілене загаювання. В цьому пункті ми досліджуємо існування та властивості розв'язків задачі з розподіленим загаюванням (3.12), (3.13).

Визначення 3.2 *Функція u зветься слабким (weak) розв'язком задачі (3.12) з початковими даними (3.13) на $[0,T]$ якщо $u \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(-r,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; D(A^{\frac{1}{2}}))$, $u(\theta) = \varphi(\theta)$ для $\theta \in (-r,0)$ та*

$$-\int_0^T \langle u, \dot{v} \rangle dt + \int_0^T \langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v \rangle dt + \int_0^T \langle du - F_n(u_t), v \rangle dt = -\langle u^0, v(0) \rangle \tag{3.14}$$

для довільної функції $v \in L^2(0,T; D(A^{\frac{1}{2}}))$ с $\dot{v} \in L^2(0,T; D(A^{-\frac{1}{2}}))$ та $v(T) = 0$.

Наступне твердження дає існування слабкого розв'язку.

Теорема 3.3 . *Припустимо, що*

(i) $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ локально липшицева та обмежена (тобто, існує стала C_b така, що $|b(w)| \le C_b$ для всіх $w \in \mathbb{R}$);

(ii) $f : \Omega - \Omega \to \mathbb{R}$ *обмежена та вимірна;*

(iii) $\xi^n : [-r, 0] \times L^2(\Omega) \times L^2(-r, 0; L^2(\Omega)) \to R$ *задовільняє наступні умови:*

a) *для всіх* $M > 0$ *існує* $L_{\xi,M,n}$ *таке, що для всіх* $(v^i, \psi^i) \in H$, *які задовільняють* $||v^i||^2 + \int_{-r}^{0} ||\psi^i(s)||^2 ds \le M^2, i = 1, 2$ *виконується*

$$\int_{-r}^{0} |\xi^n(\theta, v^1, \psi^1) - \xi^n(\theta, v^2, \psi^2)| d\theta \le L_{\xi,M,n} \cdot \left[||v^1 - v^2||^2 + \int_{-r}^{0} ||\psi^1(s) - \psi^2(s)||^2 ds \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.15}$$

b) *існує* $C_{\xi,1} > 0$ *таке, що*

$$\|\xi^n(\cdot, v, \psi)\|_{L^1(-r,0)} \le C_{\xi,1} \text{ для всіх } (v, \psi) \in H. \tag{3.16}$$

Тоді для довільного $(u^0, \varphi) \in H \equiv L^2(\Omega) \times L^2(-r, 0; L^2(\Omega))$ *задача (3.12) із початковими умовами (3.13) має слабкий розв'язок* $u(t)$ *на довільному сегменті* $[0, T]$, *який задовільняє*

$$u \in C([0, T]; L^2(\Omega)). \tag{3.17}$$

Зауваження 3.4 *Оскільки в наших дослідженнях ми приділяємо основну увагу властивостям залежності загаювання від стану "state-dependent (state-selective)" в рівняннях (3.11) та (3.12), важливо обговорити властивості функції* ξ^n, *яка віддзеркалює цю залежність (див. рівняння (3.12) та припущення (iii)). Найпростіший приклад функції* ξ^n, *яка задовільняє припущенням (iii)-a) та (iii)-b), це композиція* $\xi^n(\theta, v, \varphi) \equiv \exp\{-\alpha(\theta + \eta(v, \varphi))^2\}$, *де* $\eta : L^2(\Omega) \times L^2(-r, 0; L^2(\Omega)) \to \mathbb{R}_+$ *довільна локально липшицева функція. Легко уявити графік функції* $\exp\{-\alpha(\theta + \eta)^2\}$ *(як функції* $\theta \in [-r, 0]$*), який має максимум в точці* $\theta = -\eta$ *та "може рухатись", відповідно до залежності від стану* $\eta(v, \varphi)$. *Цей приклад також задовільняє припущенням теореми 1 з [155]. В цьому пункті нам знадобиться більш широкий клас функцій* ξ^n *(див. (3.30) та малюнок нижче), які не задовільняють ані припущенню (iii)-a) ані припущенню (iii)-b) теореми 1 з [155], але можуть бути вивчені за допомогою теореми 3.3. Цей клас функцій* ξ^n *був описаний в [27] (див. теорему 6 в [27]).*

Доведення теореми 3.3. Нехай $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ є ортонормований базис простору $L^2(\Omega)$ такий, що $Ae_k = \lambda_k e_k$, $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k \to +\infty$.

Визначення 3.5 *Ми кажемо, що функція* $u^m(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{m} g_{k,m}(t)e_k(x)$ *є наближеним (за Галеркіним) розв'язком порядка* m *задачі (3.12), (3.13), якщо*

$$\begin{cases} \langle \dot{u}^m + Au^m + du^m - F_n(u_t^m), e_k\rangle = 0, \quad \forall k = 1,\ldots,m, \\ \langle u^m(0+), e_k\rangle = \langle u^0, e_k\rangle, \ \langle u^m(\theta), e_k\rangle = \langle \varphi(\theta), e_k\rangle, \ \forall \theta \in (-r,0). \end{cases} \tag{3.18}$$

Тут $g_{k,m} \in C^1(0,T;R) \cap L^2(-r,T;R)$ *з* $\dot{g}_{k,m}(t)$ *є абсолютно неперервними.*

Рівняння (3.18) для фіксованих m та n можуть бути переписані як наступна система для m-вимірної вектор-функції $v(t) = v^m(t) = (g_{1,m}(t),\ldots,g_{m,m}(t))^T$:

$$\dot{v}(t) = \hat{f}(v(t)) + \int_{-r}^{0} p(v(t+\theta))\widetilde{\xi}^n(\theta, v(t), v_t)d\theta, \tag{3.19}$$

де функція $\widetilde{\xi}^n$ задовільняє умовам, подібним до (3.15), (3.16) якщо використати $|\cdot|_{\mathbb{R}^m}$ замість $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$. Відмітемо, що $\|u^m(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum\limits_{k=1}^{m} g^2_{k,m}(t) = |v(t)|^2_{\mathbb{R}^m}$.

При цих умовах, функції $\hat{f}$ та p є локально липшицевими, $|p(s)| \le c_2$ для $s \in R$. Таким чином, для довільної початкової функції $\varphi \in L^2(-r,0;\mathbb{R}^m)$, $a \in \mathbb{R}^m$ ми використовуємо наступне твердження для *звичайного* диференціального рівняння з загаюванням (3.19), яке може бути доведено стандартним способом за допомогою теореми про нерухому точку (деталі див. в теоремі 6 та зауваженні 9 з [27]).

Лема 3.6 . *(див. [27]). Нехай виконані наступні умови:*

a) функції $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *та* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *є локально липшицевими та існують* c_1, c_2 *такі, що* $|p(s)| \le c_1|s| + c_2$ *для всіх* $s \in \mathbb{R}$;

b) функція $\widetilde{\xi}^n$ *задовільняє властивість, подібну до (3.15), використовуючи* $|\cdot|_{\mathbb{R}^m}$ *замість* $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, *а також* $\int_{-r}^{0} |\widetilde{\xi}^n(\theta,0,0)|d\theta < +\infty$.

Тоді для довільних початкових $(a;\varphi) \in \mathbb{R}^m \times L^2(-r,0;\mathbb{R}^m)$ *таких, що композиція* $p(\varphi(\theta)), \theta \in [-r,0]$ *є обмеженою, існують* $\alpha > 0$ *та єдиний розв'язок (3.19)* $v \in L^2(-r,\alpha;\mathbb{R}^m)$ *таке, що* $v_0 = \varphi$ *та* $v(0) = a$, *Більш того* $v|_{[0,\alpha]} \in C([0,\alpha];\mathbb{R}^m)$.

З обмеженості b та (3.16) легко отримати

$$|\langle F_n(u_t), v\rangle_{L^2(\Omega)}| \leq M_f|\Omega|^{3/2}C_bC_{\xi,1}\cdot\|v\|. \tag{3.20}$$

Тепер ми отримаємо *апріорну* оцінку для наближених (за Галеркіним) розв'язків задачі (3.12), (3.13). Домножимо (3.18) на $g_{k,m}$ та складаємо для $k = 1,\cdots,m$. Таким чином для $u(t) = u^m(t)$ та $t \in (0,\alpha] \equiv (0,\alpha(m)]$, інтервал локального існування для $u^m(t)$, ми отримуємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \|A^{1/2}u(t)\|^2 + d\|u(t)\|^2 \leq |\langle F_n(u_t), u(t)\rangle|. \tag{3.21}$$

Використовуючи (3.20), отримуємо

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + 2\|A^{1/2}u(t)\|^2 \leq \tilde{k}_1\|u(t)\|^2 + \tilde{k}_3. \tag{3.22}$$

Оскільки $\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + 2\|A^{1/2}u(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|^2 + 2\int_0^t\|A^{1/2}u(\tau)\|^2d\tau + \tilde{k}_3\right)$, ми позначаємо $\chi(t) \equiv \|u(t)\|^2 + 2\int_0^t\|A^{1/2}u(\tau)\|^2d\tau + \tilde{k}_3$ та переписуємо останню оцінку наступним чином $\frac{d}{dt}\chi(t) \leq \tilde{k}_1\cdot\chi(t)$. Домножуючи це на $e^{-\tilde{k}_1t}$, отримуємо $\frac{d}{dt}\left(e^{-\tilde{k}_1t}\chi(t)\right) \leq 0$. Інтегруючи від 0 до t та потім домножуючи на $e^{\tilde{k}_1t}$, отримуємо $\chi(t) \leq \left(\|u(0)\|^2 + \tilde{k}_3\right)e^{\tilde{k}_1t}$. Таким чином, ми приходимо до *апріорної* оцінки

$$\|u(t)\|^2 + 2\int_0^t\|A^{1/2}u(\tau)\|^2d\tau \leq \left(\|u(0)\|^2 + \tilde{k}_3\right)e^{\tilde{k}_1t} - \tilde{k}_3. \tag{3.23}$$

Оцінка (3.23) дає, що для $u^0 \in L^2(\Omega)$ родина наближених розв'язків $\{u^m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ є рівномірно (відносно $m \in \mathbf{N}$) обмеженою в просторі $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;D(A^{1/2}))$, де $D(A^{1/2})$ позначає область визначення оператора $A^{1/2}$ та $[0,T]$ є інтервалом локального існування. З (3.23) ми також отримуємо продовжуваність $u^m(t)$ на довільний інтервал, таким чином (3.23) виконується для довільного $t > 0$.

Використовуючи визначення наближеного розв'язку (3.18) та його властивість (3.23), ми можемо проінтегрувати $\|A^{-1/2}\dot{u}^m(\tau)\|^2$ по $[0,T]$ для отримання $\int_0^T\|A^{-1/2}\dot{u}^m(\tau)\|^2d\tau \leq C_T$ для довільного T. Ці властивості родини $\{u^m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ дають, що $\{(u^m(t);\dot{u}^m(t))\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю в просторі

$$X_T \equiv L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;D(A^{1/2})) \times L^2(0,T;D(A^{-1/2})). \tag{3.24}$$

тоді існує функція $(u(t);\dot{u}(t))$ та підпослідовність $\{u^{m_k}\} \subset \{u^m\}$ такі, що

$$(u^{m_k};\dot{u}^{m_k}) \quad \text{*-слабко збігається до} \quad (u;\dot{u}) \quad \text{в просторі} \quad X_T. \tag{3.25}$$

Стандартним чином (використовуючи сильну збіжність $u^{m_k} \to u$ в просторі $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, яка випливає з (3.25) та теореми Дубінського), показуємо (див. наприклад [122, 31] та також [147]), що довільна *-слабка границя є розв'язком (3.12) та (3.13). Для доведення неперервності слабкого розв'язку ми використовуємо відоме

Твердження 3.7 *(див., наприклад, твердження 1.2 в [191]). Нехай банаховий простір V є щільний та неперервно вкладений в гільбертовий простір X; співставляємо $X = X^*$ так, що $V \hookrightarrow X \hookrightarrow V^*$. Тоді банаховий простір $W_p(0,T) \equiv \{u \in L^p(0,T;V) : \dot{u} \in L^q(0,T;V^*)\}$ (тут $p^{-1}+q^{-1}=1$) є вкладений у $C([0,T];X)$.*

В нашому випадку $X = L^2(\Omega), V = D(A^{1/2}), V^* = D(A^{-1/2}), p = q = 1/2$ (див. (3.24),(3.25)). Таким чином твердження 3.7 дає (3.17). Доведення теореми 3.3 є завершеним. ■

Тепер ми дамо достатню умову єдиності слабкого розв'язку.

Теорема 3.8 . *Нехай функції b та f такі як в теоремі 3.3 (задовільняють властивостям (i),(ii)), функція ξ^n задовільняє (iii)-a) та*

$$\xi^n(\cdot,v,\psi) \in L^\infty(-r,0) \text{ для всіх } (v,\psi) \in H. \tag{3.26}$$

Тоді розв'язок (3.12), (3.13), що збудований в теоремі 3.3, є единим.

Доведення теореми 3.8. Нехай u^1 та u^2 два розв'язки (3.12), (3.13). Для короткості позначимо $w(t) = w^{n,m}(t) = u^{1,n,m}(t) - u^{2,n,m}(t)$ - різниця відповідних наближених розв'язків. Таким чином

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + 2\|A^{1/2}w(t)\|^2 + 2d\|w(t)\|^2 = \langle F_n(u_t^1) - F_n(u_t^2), w(t)\rangle. \tag{3.27}$$

Розглянемо різницю $\langle F_n(u_t^1) - F_n(u_t^2), w(t)\rangle$ детально (див. (3.11), (3.12)).

$$\langle F_n(u_t^1) - F_n(u_t^2), w(t)\rangle \equiv \int_\Omega \left[\int_{-r}^0 \left\{\int_\Omega b(u^1(t+\theta,y))f(x-y)dy\right\}\xi^n(\theta,u^1(t),u_t^1)d\theta - \right.$$

$$\left. - \int_{-r}^0 \left\{\int_\Omega b(u^2(t+\theta,y))f(x-y)dy\right\}\xi^n(\theta,u^2(t),u_t^2)d\theta\right]\cdot w(t,x)dx$$

$$= \int_\Omega \left[\int_{-r}^0 \left\{\int_\Omega b(u^1(t+\theta,y))f(x-y)dy\right\}\xi^n(\theta,u^1(t),u_t^1)d\theta - \right.$$

$$\left. - \int_{-r}^0 \left\{\int_\Omega b(u^2(t+\theta,y))f(x-y)dy\right\}\xi^n(\theta,u^1(t),u_t^1)d\theta\right]\cdot w(t,x)dx,$$

$$+ \int_\Omega \left[\int_{-r}^0 \left\{\int_\Omega b(u^2(t+\theta,y))f(x-y)dy\right\}\xi^n(\theta,u^1(t),u_t^1)d\theta - \right.$$

$$\left. - \int_{-r}^0 \left\{\int_\Omega b(u^2(t+\theta,y))f(x-y)dy\right\}\xi^n(\theta,u^2(t),u_t^2)d\theta\right]\cdot w(t,x)dx.$$

Використовуючи локальну липшицевість b, (3.26) та (3.15), легко перевірити, що існують додатні сталі C_3, C_4 такі, що

$$|\langle F_n(u_t^1) - F_n(u_t^2), w(t)\rangle| \le C_3||w(t)||^2 + C_4\int_{-r}^0 ||w(t+\theta)||^2 d\theta$$

$$\le C_3||w(t)||^2 + C_4\int_{-r}^t ||w(s)||^2 ds = C_3||w(t)||^2 + C_4\left(\int_{-r}^0 ||w(\theta)||^2 d\theta + \int_0^t ||w(s)||^2 ds\right).$$

Остання оцінка, (3.27) та $\|A^{1/2}v\|^2 \ge \lambda_1\|v\|^2$ дають

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + 2(\lambda_1 + d)\|w(t)\|^2 \le C_3||w(t)||^2 + C_4\left(\int_{-r}^0 ||w(\theta)||^2 d\theta + \int_0^t ||w(s)||^2 ds\right).$$

Перепишемо це так $\frac{d}{dt}\left[\|w(t)\|^2 + 2(\lambda_1+d)\int_0^t \|w(s)\|^2 ds\right] \le C_3||w(t)||^2 + C_4\left(\int_{-r}^0 ||w(\theta)||^2 d\theta + \int_0^t ||w(s)||^2 ds\right)$. Таким чином існує $C_5 > 0$, таке, що для $Z(t) \equiv \|w(t)\|^2 + 2(\lambda_1 + d)\int_0^t \|w(s)\|^2 ds$, маємо $\frac{d}{dt}Z(t) \le C_5 Z(t) + C_4\int_{-r}^0 ||w(\theta)||^2 d\theta$. Лема Гронуола дає

$$Z(t) \le \left(\|w(0)\|^2 + C_4 C_5^{-1}\int_{-r}^0 ||w(\theta)||^2 d\theta\right)\cdot e^{C_5 t}. \qquad (3.28)$$

Остання оцінка дозволяє застосувати відоме

Твердження 3.9 *[8, теорема 9]. Нехай X - простір Банаха. Тоді довільна *-слабко збіжна послідовність $\{w_k\}_{n=1}^{\infty} \in X^*$ *-слабко збігається до елементу $w_\infty \in X^*$ та $\|w_\infty\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|w_n\|_X$.*

Таким чином, для різниці $u^1(t) - u^2(t)$ двох розв'язків маємо

$$\|u^1(t) - u^2(t)\|^2 + 2(\lambda_1 + d) \int_0^t \|u^1(s) - u^2(s)\|^2 ds$$
$$\leq \left(\|u^1(0) - u^2(0)\|^2 + C_4 C_5^{-1} \int_{-r}^0 ||\varphi^1(\theta) - \varphi^2(\theta)||^2 d\theta \right) \cdot e^{C_5 t}. \qquad (3.29)$$

Відзначимо, що за (3.17), різниця $\|u^1(t) - u^2(t)\|$ має сенс для всіх $t \in [0,T]$, $\forall T > 0$. Остання оцінка дає єдиність розв'язків та завершує доведення теореми 3.8.

Теореми 3.3 та 3.8 дозволяють визначити еволюційну півгрупу $S_t : H \to H$, з $H \equiv L^2(\Omega) \times L^2(-r, 0; L^2(\Omega))$, за формулою $S_t(u^0; \varphi) \equiv (u(t); u(t+\theta))$, $\theta \in (-r, 0)$, де $u(t)$ є слабким розв'язком (3.12), (3.13). Неперервність півгрупи за часом випливає з (3.17), а за початковими даними з (3.29).

Для зображення асимптотичних властивостей еволюційної півгрупи, ми використовуємо поняття глобального атрактора (див. [2, 200, 31])

Як в [2, 53, 31, 147] (див. також [155]) ми маємо

Теорема 3.10 . *В припущеннях теорем 3.3 та 3.8 динамічна система $(S_t; H)$ має компактний глобальний атрактор $\mathcal{U}$, який є обмеженою множиною в просторі $H_1 \equiv D(A^\alpha) \times W$, де $W = \{\varphi : \varphi \in L^\infty(-r, 0; D(A^\alpha)), \dot{\varphi} \in L^\infty(-r, 0; D(A^{\alpha-1}))\}$, $\alpha \leq \frac{1}{2}$.*

3.2.2. Зосереджене загаювання. Розглянемо функцію $\eta : H \to \mathbb{R}$ (як раніше $H \equiv L^2(\Omega) \times L^2(-r, 0; L^2(\Omega))$), яка представляє *зосереджене* загаювання в рівнянні (3.11). Зафіксуємо додатню послідовність $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ таку, що $\varepsilon_n \to 0_+$ та визначимо послідовність функцій $\xi^n : [-r, 0] \times H \to \mathbb{R}$ наступним чином

$$\xi^n(\theta, a, \varphi) \equiv \left[\begin{array}{ll} 1/\varepsilon_n, & \theta \in [-\eta(a,\varphi) - \varepsilon_n, -\eta(a,\varphi)]; \\ 0, & \theta \notin [-\eta(a,\varphi) - \varepsilon_n, -\eta(a,\varphi)], \end{array} \right. \quad \text{з} \quad \varepsilon_n > 0. \qquad (3.30)$$

Наприклад, такі функції можуть бути отримані як композиції

$$\xi^n(\theta, a, \varphi) = \widetilde{\xi}^n(\theta, -\eta(a, \varphi)), \tag{3.31}$$

де $\widetilde{\xi}^n(\theta, s) : [-r, 0] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функції стрибків (див. малюнок нижче)

$$\widetilde{\xi}^n(\theta, s) \equiv \left[\begin{array}{ll} 1/\varepsilon_n, & \theta \in [s - \varepsilon_n, s]; \\ 0, & \theta \notin [s - \varepsilon_n, s], \end{array} \right. \quad \text{з} \quad \varepsilon_n > 0.$$

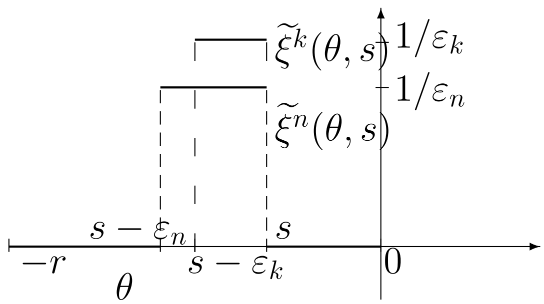

Рис. 4.2. Графіки функцій $\widetilde{\xi}^n(\theta, s)$ та $\widetilde{\xi}^k(\theta, s)$ з $0 < \varepsilon_k < \varepsilon_n$.

Зауваження 3.11 *Легко бачити, що функції ξ^n, що визначені в (3.30), задовільняють всім умовам теореми 3.8 і таким чином, слабий розв'язок (3.12), (3.13) є єдиним для всіх n.*

Наша ідея полягає в тому, аби використати послідовність рівнянь (3.12) з правими частинами F_n (з функціями ξ^n визначеними в (3.30)) для вивчення рівняння (3.11). Ця ідея грунтується на наступному відомому факті.

Розглянемо простір Банаха X, функцію $y \in L^1(0, T; X)$ та визначимо первісну $Y(t) \equiv \int_0^t y(s)ds$, $0 \le t \le T < +\infty$.

Твердження 3.12 *(теорема Лебега) [8, 191]. Для майже всіх $t \in (0, T), Y$ є (сильно) диференційовною з $Y'(t) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1}(Y(t + \varepsilon) - Y(t)) = y(t)$.*

Це дає нам, що для всіх $(a, \varphi) \in H$

$$y(t - \eta(a, \varphi)) = \lim_{n\to\infty} \int_{-r}^{0} y(t+\theta) \cdot \widetilde{\xi}^n(\theta, -\eta(a, \varphi)) d\theta = \lim_{n\to\infty} \int_{-r}^{0} y(t+\theta) \cdot \xi^n(\theta, a, \varphi) d\theta. \tag{3.32}$$

Зауваження 3.13 *Пояснимо як маємо (3.32). Якщо ми оберемо в теоремі Лебега $\varepsilon = -\varepsilon_n < 0$ та $t = s$, то отримаємо*

$$y(s) = \lim_{\varepsilon\to 0_-} \varepsilon^{-1}\int_s^{s+\varepsilon} y(\theta)d\theta = (-\varepsilon)^{-1}\int_{s+\varepsilon}^{s} y(\theta)d\theta = \lim_{\varepsilon\to 0_-}(-\varepsilon)^{-1}\int_{\varepsilon}^{0} y(s+\theta)d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon_n\to 0_+} \varepsilon_n^{-1}\int_{-\varepsilon_n}^{0} y(s+\theta)d\theta = \lim_{\varepsilon_n\to 0_+}\int_{-r}^{0} y(s+\theta)\cdot\widetilde{\xi}^n(\theta,0)d\theta$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\int_{-r}^{0} y(s+h+\theta)\cdot\widetilde{\xi}^n(\theta,-h)d\theta, \quad \forall h\in(0,r).$$

Ми використовуємо останню рівність для $h = \eta(a,\varphi)$ та $s = t - h = t - \eta(a,\varphi)$ для отримання першої рівності в (3.32). Друга рівність в (3.32) випливає з (3.31).

Також, для функції $u \in L^\infty(0,T;X)\cap L^2(-r,T;X)$, маємо $b(u(\cdot)) \in L^\infty(0,T;X)\cap L^2(-r,T;X)\subset L^1(-r,T;X)$ і (3.32) дає, що для всіх $(a,\varphi)\in H$

$$b(u(t-\eta(a,\varphi))) = \lim_{n\to\infty}\int_{-r}^{0} b(u(t+\theta))\cdot\xi^n(\theta,a,\varphi)d\theta \quad \text{для майже всіх } t\in(-r,T).$$

Остання властивість віддзеркалює основну ідею - наблизити нелінійність з зосередженим загаюванням (з загаюванням $\eta(a,\varphi)$) за допомогою послідовності нелінійностей з розподіленими загаюваннями (ср. вигляд нелінійностей F та F_n в (3.11) та (3.12)). В визначеннях 1 та 3 нас цікавить $X = L^2(\Omega)$.

Визначення 3.14 *Функція u зветься* `слабким граничним розв'язком` *задачі (3.11), (3.13) на інтервалі $[0,T]$, якщо $u\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(-r,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;D(A^{1/2}))$, $\dot u\in L^2(0,T;D(A^{-1/2}))$, $u(\theta)=\varphi(\theta)$ для $\theta\in(-r,0)$ та існує послідовність $\{(n,m)\}_{n,m\in\mathbf{N}}$, така, що*

$$(u^{n,m};\dot u^{n,m}) \quad \text{*-слабко збігається до } (u;\dot u) \text{ в просторі } X_T, \text{ при } \min\{n,m\}\to\infty \tag{3.33}$$

(див. (3.24), (3.25)). Тут - $u^{n,m}$ наближені за Галеркіним розв'язки (див. (3.18)) порядка m для задачі (3.12), (3.13) (правою частиною (3.12) є F_n з функціями ξ^n, які визначені в (3.30)).

Зауваження 3.15 *Важливо відзначити, що якщо ми сформулюємо подібним чином визначення для фіксованого n та $m \to \infty$ замість* $\min\{n, m\} \to \infty$ *(див. (3.33)), то ми отримаємо визначення слабкого розв'язку (3.12), (3.13), яке* еквівалентно *визначенню 3.2. Це випливає з (3.25) та единості слабкого розв'язку (див. зауваження 3.11.)*

Зауваження 3.16 *Як ми відзначали раніше, *-слабка збіжність (3.33) дає (за теоремою Ю.Дубінського) сильну збіжність $u^{n,m} \to u$ в просторі* $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Теорема 3.17 . *Нехай функції b та f як в теоремі 3.3 (задовільняють (i),(ii)) та функція $\eta : H \to [0, r]$ локально липшицева тобто для довільного $M > 0$ існує $L_{\eta,M}$ таке, що для всіх $(v^i, \psi^i) \in H$, які задовільняють $||v^i||^2 + \int_{-r}^{0} ||\psi^i(s)||^2 ds \le M^2, i = 1, 2$ маємо*

$$|\eta(v^1, \psi^1) - \eta(v^2, \psi^2)| \le L_{\eta,M} \cdot \left(||v^1 - v^2||^2 + \int_{-r}^{0} ||\psi^1(s) - \psi^2(s)||^2 ds \right)^{1/2}. \tag{3.34}$$

Тоді для довільних $(u^0, \varphi) \in H$ задача (3.11), (3.13) має слабкий граничний розв'язок на кожному $[0, T]$ та задовільняє $u(t) \in C([0, T]; L^2(\Omega))$.

Доведення теореми 3.17. Легко перевірити, що властивість (3.34) дає, що всі функції ξ^n, що визначені в (3.30), задовільняють властивості a), b) теореми 3.3 з $L_{\xi,M,n} = 2\varepsilon_n^{-1} \cdot L_{\eta,M}$ та $C_{\xi,1} = 1$ для всіх n.

Тепер розглянемо фіксовану послідовність $\{(n_i; m_i)\}_{i=1}^{\infty}$ таку, що $\min\{n_i; m_i\} \to \infty$ при $i \to \infty$. Розглянемо родину наближених за Галеркіним розв'язків $\{u^{n_i,m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ (див. (3.18)), всі збудовані для одного й того ж початкового (3.13). Апріорна оцінка (3.23) зі сталими $\tilde{k}_1, \tilde{k}_3$, які не залежать від n та m, дає, що $\{(u^{n_i,m_i}; \dot{u}^{n_i,m_i})\}_{i=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю в просторі X_T (див. (3.24)). Таким чином існує *-слабко збіжна підпослідовність, яка збігається (за визначенням) до слабкого граничного розв'язку задачі (3.11), (3.13). Неперервність слабкого граничного розв'язку випливає з твердження 3.7. Доведення теореми 3.17 є завершеним. ∎

Для вивчення асимптотичних властивостей розв'язків задачі (3.11), (3.13) ми застосуємо теорію траєкторних атракторів (див. [51] та посилання).

Розглянемо банаховий простір

$$\mathcal{F}_+^b \equiv \left\{ w(\cdot)\,|\,w(\cdot) \in L_b^2(\mathbb{R}_+; D(A^{1/2})) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)),\, \dot{w}(\cdot) \in L_b^2(\mathbb{R}_+; D(A^{-1/2})) \right\}$$

з нормою $||w||_{\mathcal{F}_+^b} = ||w||_{L_b^2(\mathbb{R}_+;D(A^{1/2}))} + ||w||_{L^\infty(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega))} + ||\dot{w}||_{L_b^2(\mathbb{R}_+;D(A^{-1/2}))}$, де

$$||w||_{L_b^2(\mathbb{R}_+;D(A^\alpha))} \equiv \sup_{h\geq 0} \int_h^{h+1} ||A^\alpha w(s)||^2 ds, \qquad \text{для } \alpha = 1/2 \text{ та } \alpha = -1/2.$$

Тепер розглянемо більш широкий простір

$$\mathcal{F}_+^{loc} \equiv \Big\{ w(\cdot)\,|\,w(\cdot) \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; D(A^{1/2})) \cap L_{loc}^\infty(R_+; L^2(\Omega)),$$
$$\dot{w}(\cdot) \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; D(A^{-1/2})) \Big\}$$

споряджений локальною *-слабкою топологією та позначимо його Θ_+^{loc}. Детальніше, послідовність $\{w^k\} \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ збігається в Θ_+^{loc} до $w \in \mathcal{F}_+^{loc}$ при $k \to \infty$, якщо для довільного $T > 0$ (див. (3.24))

$$(w^k; \dot{w}^k) \quad ^*\textit{-слабко збігається до} \quad (w; \dot{w}) \quad \text{в просторі} \quad X_T. \tag{3.35}$$

Зауваження 3.18 *Легко бачити, що* $\mathcal{F}_+^b \subset \Theta_+^{loc}$ *та довільна куля* $B_R = \{w(\cdot) \in \mathcal{F}_+^b \quad | \quad ||w||_{\mathcal{F}_+^b} \leq R\}$ *є компактом в* Θ_+^{loc}.

Визначення 3.19 `Півгрупа зсуву` $\{T(h), h \geq 0\}$, *що діє на просторі* $L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; D(A^{1/2})) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$, *визначається як множина зсувів вздовж часової вісі тобто,* $T(h)w(\cdot) \equiv w(\cdot + h), \quad h \geq 0$.

Легко бачити, що родина $\{T(h), h \geq 0\}$ дійсно є півгрупою тобто, $T(h_1 + h_2) = T(h_1)T(h_2)$ для довільних $h_1, h_2 \geq 0$ та $T(0) = Id$ – одиничний оператор. Також легко бачити, що півгрупа $\{T(h), h \geq 0\}$ *неперервна в топології* Θ_+^{loc}.

Визначення 3.20 `Траєкторним простором` $\mathcal{K}^+$ *для рівняння (3.11) є простір функцій* $u \in \mathcal{F}_+^b$ *таких, що для всіх* $T > 0$, *обмеження* $u|_{[0,T]}$ *є слабким граничним розв'язком задачі (3.11), (3.13).*

Зауваження 3.21 *Легко бачити, що траєкторний простір $\mathcal{K}^+$ є інваріантним для півгрупи зсуву $\{T(h), h \geq 0\}$ тобто, $T(h)\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{K}^+$, $\forall h \geq 0$.*

Зауваження 3.22 *За визначенням 3.14 не важко довести, що траєкторний простір $\mathcal{K}^+$ є замкнутим в топології Θ_+^{loc}.*

Визначення 3.23 *Множина $P \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ зветься* притягуючою множиною *для півгрупи $\{T(h), h \geq 0\}$ на $\mathcal{K}^+$ в топології Θ_+^{loc}, якщо для довільної, обмеженої в $\mathcal{F}_+^b$ множини $B \subset \mathcal{K}^+$, маємо $T(h)B \to P$ в топології Θ_+^{loc} при $h \to +\infty$.*

Визначення 3.24 *Множина $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}^+$ зветься* траєкторним атрактором *півгрупи $\{T(h), h \geq 0\}$, якщо*

1) $\mathcal{U}$ обмежено в $\mathcal{F}_+^b$ та компактно в Θ_+^{loc};

2) $\mathcal{U}$ строго інваріантно для півгрупи $\{T(h), h \geq 0\}$ тобто, $T(h)\mathcal{U} = \mathcal{U}$ для всіх $h \geq 0$;

3) $\mathcal{U}$ є притягуючою множиною для півгрупи $\{T(h), h \geq 0\}$ на $\mathcal{K}^+$ в топології Θ_+^{loc}.

Теорема 3.25 . *В припущеннях теореми 3.17 півгрупа $\{T(h), h \geq 0\}$ на $\mathcal{K}^+$ має траєкторний атрактор $\mathcal{U}$.*

Доведення теореми 3.25. Оскільки довільний слабкий граничний розв'язок задачі (3.11), (3.13) є *-слабкою границею послідовності наближених за Галеркіним розв'язків задачі (3.12), (3.13), нам знадобляться деякі оцінки для цих наближених розв'язків.

Використовуючи (3.20) та (3.21), ми маємо для $u(t) = u^{m,n}(t)$:

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + 2\|A^{1/2}u(t)\|^2 + 2d\|u(t)\|^2 \leq 2M_f|\Omega|^{3/2}C_bC_{\xi,1} \cdot \|u(t)\|$$

$$\leq d\|u(t)\|^2 + \frac{M_f^2|\Omega|^3C_b^2C_{\xi,1}^2}{d}.$$

Це та $\|A^{1/2}u(t)\|^2 \geq \lambda_1\|u(t)\|^2$ дають

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + 2(d+\lambda_1)\|u(t)\|^2 \leq \frac{M_f^2|\Omega|^3C_b^2C_{\xi,1}^2}{d}.$$

Домножуючи на $e^{(d+2\lambda_1)t}$ та інтегруючи від 0 до t, отримуємо

$$\|u(t)\|^2 \le \|u(0)\|^2 \cdot e^{-2(d+\lambda_1)t} + \frac{M_f^2|\Omega|^3 C_b^2 C_{\xi,1}^2}{d(d+2\lambda_1)}, \quad t \ge 0. \tag{3.36}$$

Тепер домножуємо (3.18) на $\dot{g}_{k,m}(t)$ і складаємо по $k = 1,..,m$, а потім домножуємо (3.18) на $g_{k,m}(t)$ та знов складаємо по $k = 1,..,m$. Сума отриманих рівнянь є (для $u = u^m$)

$$\begin{aligned} &\langle F_n(u_t), \dot{u}(t) + u(t)\rangle \\ =& \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left\{\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + (d+1)\|u(t)\|^2\right\} + \|\dot{u}(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + d\|u(t)\|^2. \end{aligned}$$

Використовуючи (3.20), отримуємо додатні сталі γ_1, d_1 (не залежать від m та n) такі, що

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) + \gamma_1\Psi(t) \le d_1, \quad \text{де} \quad \Psi(t) \equiv \|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + (d+1)\|u(t)\|^2. \tag{3.37}$$

Домножуючи це на $e^{\gamma_1 t}$ та інтегруючи від $\tau > 0$ до $\tau + h$ $(h > 0)$, отримуємо $\Psi(\tau+h)e^{\gamma_1(\tau+h)} \le \Psi(\tau)e^{\gamma_1(\tau)} + d_1\gamma_1^{-1}e^{\gamma_1(\tau+h)}$. це дає $\Psi(\tau+h) \le \Psi(\tau)e^{-\gamma_1 h} + d_1\gamma_1^{-1}$. Інтегруючи від $\tau = 0$ до $\tau = 1$, отримуємо

$$\textstyle\int_0^1 \Psi(\tau+h)d\tau = \int_h^{h+1}\Psi(s)ds \le \ e^{-\gamma_1 h}\cdot\int_0^1\Psi(s)ds + d_1\gamma_1^{-1}.$$

Використовуючи останню нерівність та визначення Ψ (див. (3.37)), отримуємо

$$\int_h^{h+1}(\|A^{\frac{1}{2}}u(s)\|^2 + (d+1)\|u(s)\|^2)ds \le e^{-\gamma_1 h}\cdot\int_0^1(\|A^{\frac{1}{2}}u(s)\|^2 + (d+1)\|u(s)\|^2)ds + d_1\gamma_1^{-1}.$$

це та оцінка (3.23) дають

$$\int_h^{h+1}\|A^{\frac{1}{2}}u(s)\|^2 ds \le e^{-\gamma_1 h}\cdot\left(d+\frac{3}{2}\right)\left[\left(\|u(0)\|^2 + \tilde{k}_3\right)e^{\tilde{k}_1} - \tilde{k}_3\right] + d_1\gamma_1^{-1}. \tag{3.38}$$

Важливо відзначити, що всі сталі $\gamma_1, d_1, \tilde{k}_1, \tilde{k}_3$ не залежать від m та n.

Також, властивості (3.36), (3.38) дозволяють отримати з (3.18) наступну оцінку

$$\int_h^{h+1}\|A^{-1/2}\dot{u}(s)\|^2 ds \le e^{-\gamma_2 h}\cdot d_2\left(\|u(0)\|^2 + 1\right) + d_3 \tag{3.39}$$

з додатніми сталими γ_2, d_2, d_3, які не залежать від m та n.

Оцінки (3.36), (3.38) та (3.39) дають, що кожний приближений розв'язок $u^m = u^{n,m}$ належить $\mathcal{F}^b_+$. Більш того, існує $R_1 > 0$, таке, що куля $B_{R_1} = \{w(\cdot) \in \mathcal{F}^b_+ \quad | \quad ||w||_{\mathcal{F}^b_+} \leq R_1\}$ є поглинаючою множиною для всіх наближених розв'язків $u^m = u^{n,m}$ задачі (3.12), (3.13).

Стала $R_1 > 0$ не залежить від m та n та це дає, що куля $B_{R_1} = \{w(\cdot) \in \mathcal{F}^b_+ \quad | \quad ||w||_{\mathcal{F}^b_+} \leq R_1\}$ також є поглинаючим для всіх *-слабких границь в просторі X_T (див. (3.24), (3.25)) підпослідовності $\{u^{n_k,m_k}\} \subset \{u^{n,m}\}$. Зокрема, ця куля є поглинаючою для всіх слабких розв'язків (3.12), (3.13) та для всіх слабких граничних розв'язків (3.11), (3.13). Таким чином він є притягуючою (в топології Θ^{loc}_+) множиною та, по зауваженню 3.18 він компактний в Θ^{loc}_+. Ці властивості та зауваження 3.21 та 3.22 дозволяють застосувати теорему 3.1 з [51], що завершує доведення теореми 3.25. ∎

В якості застосування, ми можемо розглянути рівняння Ніколсона (див., наприклад [195, 197]) з загаюванням, що залежить від стану. Детальніше, ми розглядаємо рівняння (3.11) та (3.12), де $-A$ - оператор Лапласа з умовами Дирихле на межі, $\Omega \subset R^{n_0}$ - обмежена гладка область, функція f може бути дельта-функцією Дірака (як в [195, 197]), що приводить до локального за просторовими змінними елементу або, наприклад, $f(s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} e^{-s^2/4\alpha}$, як в [196], що відповідає нелокальному елементу, нелінійна функція b задається $b(w) = p \cdot we^{-w}$. Функція b обмежена та всі умови теорем 3.3 - 3.17 виконані. Ми робимо висновок, що для довільних функцій ξ^n, які задовільняють умовам теорем 3.3 та 3.8, динамічна система (S_t, H) має глобальний атрактор (теорема 3.10). Припускаючи, що зосереджене загаювання η локально липшицеве, ми отримуємо (теорема 3.17) існування слабких граничних розв'язків задачі (3.11), (3.13) та існування траєкторного атрактора (теорема 3.25) у відповідної півгрупи.

3.3. Рівняння з зосередженим загаюванням, що залежить від стану. Основна ігноруюча умова

Розглянемо рівняння

$$\frac{d}{dt}u(t) + Au(t) + du(t) = F(u_t), \tag{3.40}$$

де A задовільняє **(A1)** (див. підрозділ 2.1), Ω - гладка обмежена область в $\mathbb{R}^{n_0}$, d невід'ємна стала. Ми досліджуємо рівняння (3.40) із початковими умовами

$$u|_{[-r,0]} = \varphi \in C \equiv C([-r,0]; L^2(\Omega)). \tag{3.41}$$

Ми використовуємо стандартне визначення слабкого розв'язку.

В цьому підрозділі ми розглянемо один частковий випадок рівняння (3.40), а саме випадок нелокальної нелінійності F, яка включає зосереджене загаювання, що залежить від стану. Вибір цього часткового випадка продиктований бажанням спростити викладення основної ідеї, що пов'язана з так званою "ігноруючою умовою" на загаювання. Більш загальний клас загаюваних нелінійностей (і більш загальна ігноруюча умова) буде розглянуто в підрозділі 3.4. Розглянемо

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + Au(t,x) + du(t,x)$$
$$= \int_\Omega b(u(t-\eta(u_t),y))f(x-y)dy \equiv \big(F(u_t)\big)(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.42}$$

Метод, запропонований тут, може бути застосований до інших типів загаюваних РЧП (як і ЗДУ). Ми обрали частковий вигляд нелінійного члена F для спрощення викладення та для ілюстрації нашого підхода на прикладі рівняння Ніколсона. Нижче ми також відзначаємо можливість застосування цього метода до локальних (за просторовими змінними) задачам.

Сформулюємо умови для *існування слабких розв'язків.*

Твердження 3.26 *Нехай $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ локально липшицева функція, що задовільняє $|b(w)| \le C_1|w| + C_b$ з $C_i \ge 0$, та функція $\eta(\cdot) : C([-r,0]; L^2(\Omega)) \to [0,r] \subset \mathbb{R}_+$ неперервна, $f : \Omega - \Omega \to \mathbb{R}$ обмежена та вимірна. Тоді для* *довільної початкової функції $\varphi \in C$, початкова задача (3.42), (3.41) має глобальний слабкий розв'язок, який задовільняє $u \in C([-r, +\infty); L^2(\Omega))$.*

Існування слабкого розв'язку є наслідком неперервності $F(\varphi) \equiv \int_\Omega b(\varphi(-\eta(\varphi), y)) f(\cdot - y) dy : C \to L^2(\Omega)$ (див. (3.42)), що дає можливість використати стандартний метод Шаудера нерухомої точки (див., наприклад, [220, теорема 2.1, с.46]). Розв'язок є глобальним (визначений для всіх $t \geq -r$) див., наприклад, [220, теорема 2.3, p.49].

3.3.1. Єдиність та коректна розв'язність. Як в попередньому підрозділі, ми припускаємо, що $\eta : C \to [0, r]$ неперервна та $f : \Omega - \Omega \to \mathbb{R}$ обмежена та вимірна функція ($|f(\cdot)| \leq M_f$). Додатково, ми припускаємо виконаною наступну властивість загаювання η

(H) $\exists \eta_{ign} > 0$ таке, що η "ігнорує" значення $\varphi(\theta)$ для $\theta \in (-\eta_{ign}, 0]$, тобто

$$\exists\, \eta_{ign} > 0 : \forall \varphi^1, \varphi^2 \in C : \forall \theta \in [-r, -\eta_{ign}], \Rightarrow \varphi^1(\theta) = \varphi^2(\theta) \quad \Longrightarrow \eta(\varphi^1) = \eta(\varphi^2).$$

Цю умову можна проілюструвати наступним малюнком, на якому дві функції φ^1, φ^2 співпадають на $[-r, -\eta_{ign}]$ та різняться на $(-\eta_{ign}, 0]$, однак ця відмінність "ігнорується" загаюванням, тобто $\eta(\varphi^1) = \eta(\varphi^2)$.

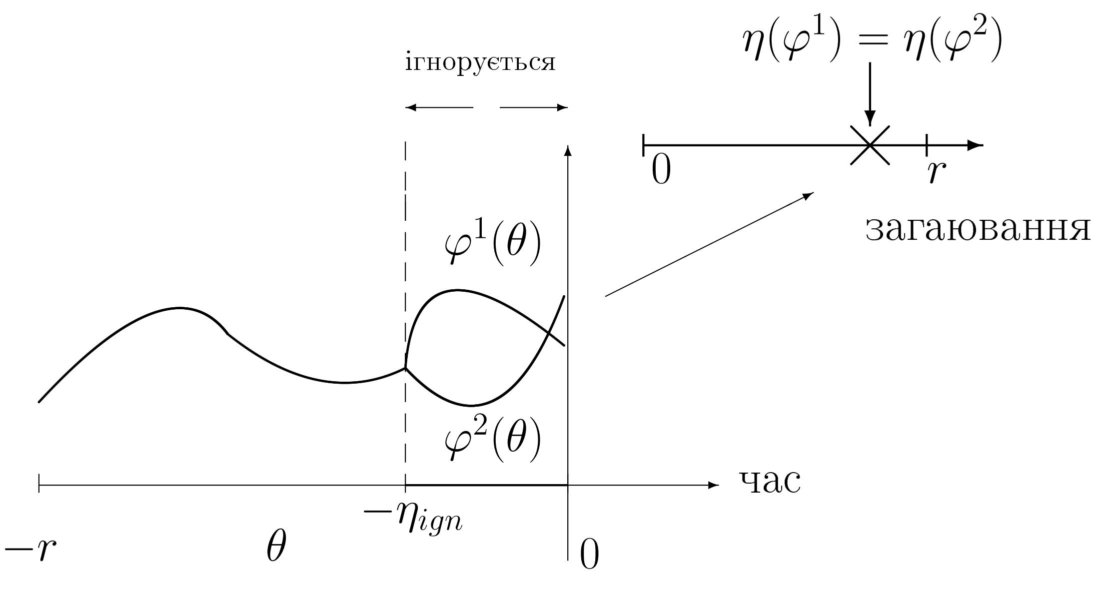

Рис. 4.3. Основна ігноруюча умова.

Зауваження 3.27 *Легко привести багато прикладів загаювання* η, *яке має властивість* **(H)**. *Ось деякі прості*

$$\eta(\varphi) = p_1(\varphi(-r)) \text{ з } p_1 : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}_+;$$

$$\eta(\varphi) = \sum_{k=1}^{N} p_k(\varphi(-r_k)) \text{ з } p_k : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}_+; \quad \min r_k > 0;$$

$$\eta(\varphi) = \int_{-r}^{-\eta_{ign}} p_1(\varphi(\theta))\, d\theta, \quad \text{та} \quad \eta(\varphi) = p_1\left(\int_{-r}^{-\eta_{ign}} \varphi(\theta)\, d\theta\right), \ \eta_{ign} > 0.$$

Зауваження 3.28 *Цікаво відзначити, що у випадку* $\eta_{ign} > r$, *ми отримуємо, що загаювання* η *ігнорує* всі *значення* $\varphi(\theta), \forall\theta \in [-r, 0]$, *таким чином* $\eta(\varphi) \equiv const, \forall\varphi \in C$ *тобто рівняння (3.42) є рівнянням зі сталим загаюванням. З іншого боку, умова аналогічна до* **(H)** *з* $\eta_{ign} = 0$ *є тривіальною оскільки* $\varphi^1(\theta) = \varphi^2(\theta)$ *для всіх* $\theta \in [-r, 0]$ *означає, що* $\varphi^1 = \varphi^2$ *в просторі* C, *таким чином* $\eta(\varphi^1) = \eta(\varphi^2)$.

Зауваження 3.29 *Важливо відмітити, що класичний випадок* сталого *загаювання (див. попереднє зауваження) та відповідна теорія становлять фундамент для обговорюваного тут підходу (заснованого на ігноруючій умові), але відрізняється від підходу* додатнього *загаювання. В нашому випадку, загаювання* η *може обертатись в нуль (ми* **не** *потребуємо існування* $r_0 > 0$ *такого, що* $\eta(\varphi) \geq r_0, \forall\varphi$).

Зауваження 3.30 *З точки зору застосування, загаювані члени в рівняннях часто відображають реакцію системи на стан самої системи. В цьому сенсі ігноруючу умову можна інтерпретувати як деяку "внутрішню інерцію" реакції системи. Наприклад, біологічна система не може миттєво реагувати, в силу скінченності швидкості розповсюдження сигналів (світлових, електричних, хімічних).*

Для того, аби показати, що властивість **(H)** дає *єдиність* слабкого розв'язку, ми будемо використовувати стандартний метод кроків з кроком меньшим, ніж $\eta_{ign} > 0$. Спочатку введемо для довільного $\varphi \in C$ функцію продовження

$$\overline{\varphi}(s) \equiv \left[\begin{array}{ll} \varphi(s) & \text{для } s \in [-r, 0]; \\ \varphi(0) & \text{для } s \in (0, \eta_{ign}) \end{array} \right. .$$

Розглянемо довільний слабкий розв'язок $u(t)$ задачі (3.42), (3.41) та нелінійність $\int_\Omega b(u(t - \eta(u_t), y))f(\cdot - y)dy$. Для всіх $t \in [0, \eta_{ign})$ властивість **(H)** дає $\eta(u_t) = \eta(\overline{\varphi}_t)$. Позначимо $r^\varphi(t) \equiv \eta(\overline{\varphi}_t), t \in [0, \eta_{ign})$.

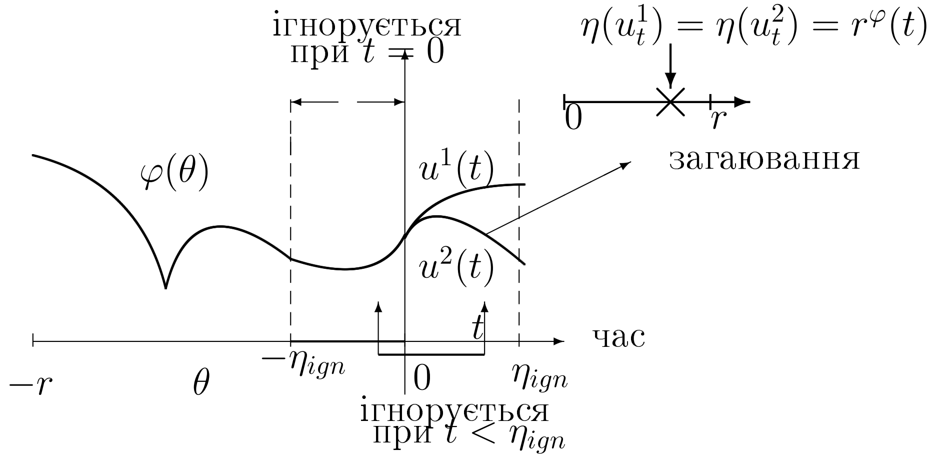

Рис. 4.4. Ігноруюча умова та єдиність розв'язку.

Таким чином довільний слабкий розв'язок $u(t)$ задачі (3.42), (3.41) для всіх значень $t \in [0, \eta_{ign})$ є розв'язком

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}(t) + Au(t) + d \cdot u(t) = \int_\Omega b(u(t - r^\varphi(t), y))f(\cdot - y)dy, \quad t \in [0, \eta_{ign}), \\ u(\theta) = \varphi(\theta), \; \theta \in [-r, 0], \end{array} \right. \tag{3.43}$$

де $r^\varphi(t)$ є залежна від *часу* (а не від *стану*) відома функція для всіх $t \in [0, \eta_{ign})$. Для доведення того, що задача Коші (із загаюванням, залежним від часу) має єдиний розв'язок, достатньо розглянути два довільні розв'язки (3.43) та їх різницю $w(t) \equiv u^1(t) - u^2(t)$, яка задовільняє

$$w(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)} \times$$

$$\left\{ \int_{\Omega} \left[b(u^1(s - r^{\varphi}(s), y)) - b(u^2(s - r^{\varphi}(s), y)) \right] f(\cdot - y) dy - d \cdot w(s) \right\} ds, \tag{3.44}$$

для $t \in [0, \eta_{ign})$.

Обчислення, властивість Липшиця b та $||e^{-A(t-s)}|| \leq 1$ дають

$$||w(t)|| \leq \int_0^t (M_f |\Omega| L_b + d) \max_{s \in [0,t]} ||w(s)|| \, ds \leq t \cdot (M_f |\Omega| L_b + d) \max_{s \in [0,t]} ||w(s)||.$$

Тут ми позначили $|\Omega| \equiv \int_{\Omega} 1 \cdot dx$.

Зауваження 3.31 *Тут ми використовували, що* $\max_{s \in [-r,t]} ||w(s)|| = \max_{s \in [0,t]} ||w(s)||$ *оскільки* $w(s) \equiv 0$ *для* $\theta \in [-r, 0]$ *(*w *- різниця двох розв'язків, обидва задовільняють (3.41)).*

Оберемо достатньо мале $\alpha > 0$ для виконання $\alpha(M_f |\Omega| L_b + d) < 1$. Остання оцінка дає $\max_{s \in [0,\alpha]} ||w(s)|| \leq \alpha \cdot (M_f |\Omega| L_b + d) \max_{s \in [0,\alpha]} ||w(s)|| < \max_{s \in [0,\alpha]} ||w(s)||$, що дає $\max_{s \in [0,\alpha]} ||w(s)|| = 0$. Це означає, що довільні два слабкі розв'язки (3.43) співпадають для $t \in [0, \alpha]$ з $\alpha < (M_f |\Omega| L_b + d)^{-1}$. Повторимо цей алгоритм (якщо необхідно) кроками довжини α для покриття $[0, \eta_{ign})$. Це дає єдиність розв'язку (3.43) і таким чином єдиність розв'язку (3.42), (3.41) для $t \in [0, \eta_{ign})$. Єдиність розв'язку на довільному сегменті $[0, T]$ випливає з аналогічного розглядання на кожному часовому інтервалі $[k \cdot \eta_{ign}, (k+1) \cdot \eta_{ign}), k \in N$ (перевизначаючи функцію $r^{\varphi}(t)$ на кожному інтервалі).

Тепер ми можемо визначити `еволюційний оператор` $S_t : C \to C$ за формулою $S_t \varphi \equiv u_t$, де $u(t)$ - єдиний слабкий розв'язок (3.42), (3.41) із початковою функцією φ.

Основним результатом цього підрозділу є наступна

Теорема 3.32 . *Нехай функція* $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *липшицева та задовільняє* $|b(w)| \leq C_1 |w| + C_b$ *з* $C_i \geq 0$, *загаювання* $\eta : C \to [0, r] \subset \mathbb{R}_+$ *неперервно та задовільняє умові* **(H)** *(див. с.127),* $f : \Omega - \Omega \to \mathbb{R}$ *обмежена та вимірна (*$|f(z)| \leq M_f, \forall z \in \Omega - \Omega$*). Тоді пара* (S_t, C) *складає динамічну систему, тобто має наступні властивості:*

1. *$S_0 = Id$ (тотожній оператор в C);*

2. *$\forall\, t, \tau \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad S_t\, S_\tau = S_{t+\tau}$;*

3. *$t \mapsto S_t$ сильно неперервне в C відображення;*

4. *для кожного $t \geq 0$ еволюційний оператор S_t неперервний в C, тобто для довільної $\{\varphi^n\}_{n=1}^{\infty} \subset C$ такої, що $||\varphi^n - \varphi||_C \to 0$ при $n \to \infty$, маємо $||S_t\varphi^n - S_t\varphi||_C \to 0$ при $n \to \infty$.*

Зауваження 3.33 *Теорема 3.32, зокрема означає, що задача (3.42), (3.41)* `коректно поставлена` *в просторі C в сенсі Ж.Адамара [92, 93].*

Зауваження 3.34 *Важливо підкреслити, що ми не вимагаємо, аби загаювання η було липшицевим (порівняйте з [156]). Ми пропонуємо альтернативний підхід, який будується на умові* **(H)** *(див. с.127), що має іншу природу ніж умова Липшиця для η.*

Доведення теореми 3.32. Властивості 1), 2) є наслідками єдиності слабкого розв'язку (завдяки **(H)**, див. коментарі вище). Властивість 3) доведена у твердженні 3.26 оскільки розв'язок є неперервною функцією $u \in C([-r, T]; L^2(\Omega))$.

Доведемо властивість 4. Зафіксуємо $t_0 \in [0, \eta_{ign})$. Позначимо $u^k(t)$ розв'язок (3.42), (3.41) із початковою функцією φ^k та $u(t)$ - розв'язок (3.42), (3.41) із початковою функцією φ.

Використовуємо формулу варіації сталих для параболічного рівняння (3.43) (з оператором $\widetilde{A} \equiv A + d\cdot$)

$$u(t) = e^{-\widetilde{A}t}u(0) + \int_0^t e^{-\widetilde{A}(t-\tau)} \int_\Omega b(u(\tau - \eta(u_\tau), y))f(\cdot - y)dy\, d\tau, \tag{3.45}$$

$$u^k(t) = e^{-\widetilde{A}t}u^k((0) + \int_0^t e^{-\widetilde{A}(t-\tau)} \int_\Omega b(u^k(\tau - \eta(u^k_\tau), y))f(\cdot - y)dy\, d\tau. \tag{3.46}$$

Використовуючи $||e^{-\widetilde{A}t}|| \leq 1$ та $||e^{-\widetilde{A}(t-\tau)}|| \leq 1$, ми отримуємо

$$||u^k(t) - u(t)|| \leq ||u^k(0) - u(0)||$$

$$+\int_0^t ||\int_\Omega \left[b(u^k(\tau-\eta(u^k_\tau),y)) - b(u(\tau-\eta(u_\tau),y))\right] f(\cdot - y)dy||\, d\tau$$

$$= ||\varphi^k(0)-\varphi(0)|| + J_1^k(t) + J_2^k(t), \tag{3.47}$$

де ми позначили (для $s\geq 0, x\in\Omega$)

$$J_1^k(s) \equiv J_1^k(s)(x) \equiv \int_0^s ||\int_\Omega \left[b(u^k(\tau-\eta(u^k_\tau),y)) - b(u(\tau-\eta(u^k_\tau),y))\right] f(x-y)dy||\, d\tau, \tag{3.48}$$

$$J_2^k(s) \equiv J_2^k(s)(x) \equiv \int_0^s ||\int_\Omega \left[b(u(\tau-\eta(u^k_\tau),y)) - b(u(\tau-\eta(u_\tau),y))\right] f(x-y)dy||\, d\tau. \tag{3.49}$$

Використовуючи властивість Липшиця функції b, легко отримати

$$J_1^k(t) \leq M_f|\Omega|L_b \int_0^t ||u^k(\tau-\eta(u^k_\tau)) - u(\tau-\eta(u^k_\tau))||\, d\tau$$

$$\leq M_f|\Omega|L_b t \max_{s\in[-r,t]} ||u^k(s)-u(s)||. \tag{3.50}$$

Оцінки (3.50), (3.47) та властивість $J_2^k(s) \leq J_2^k(t)$ для $s\leq t\leq t_0 < \eta_{ign}$ дають

$$\max_{t\in[0,t_0]} ||u^k(t)-u(t)|| \leq ||\varphi^k(0)-\varphi(0)|| + M_f|\Omega|L_b t_0 \max_{s\in[-r,t_0]} ||u^k(s)-u(s)|| + J_2^k(t_0).$$

Таким чином

$$\max_{s\in[-r,t_0]} ||u^k(s)-u(s)|| \leq ||\varphi^k-\varphi||_C + M_f|\Omega|L_b t_0 \max_{s\in[-r,t_0]} ||u^k(s)-u(s)|| + J_2^k(t_0).$$

Обираємо $t_0 < [M_f|\Omega|L_b]^{-1}$ (для виконання $M_f|\Omega|L_b t_0 < 1$) та отримуємо

$$(1-M_f|\Omega|L_b t_0) \max_{s\in[-r,t_0]} ||u^k(s)-u(s)|| \leq ||\varphi^k-\varphi||_C + J_2^k(t_0). \tag{3.51}$$

Наша мета - показати, що $J_2^k(t_0)\to 0$ при $k\to\infty$. Властивість Липшиця b дає

$$J_2^k(t_0) \leq M_f|\Omega|L_b \int_0^{t_0} ||u(\tau-\eta(u^k_\tau)) - u(\tau-\eta(u_\tau))||\, d\tau. \tag{3.52}$$

Використовуємо функції продовження

$$\overline{\varphi}(s) \equiv \left[\begin{array}{ll} \varphi(s) & \text{для } s\in[-r,0]; \\ \varphi(0) & \text{для } s\in(0,\eta_{ign}) \end{array}\right. \quad \text{та} \quad \overline{\varphi}^k(s) \equiv \left[\begin{array}{ll} \varphi^k(s) & \text{для } s\in[-r,0]; \\ \varphi^k(0) & \text{для } s\in(0,\eta_{ign}) \end{array}\right. .$$

Легко бачити, що збіжність $||\varphi^k - \varphi||_C \to 0$ дає $||\overline{\varphi}^k_\tau - \overline{\varphi}_\tau||_C \to 0$ для всіх $\tau \in [0, \eta_{ign})$.

З іншої сторони, для довільного $\tau \in [0, \eta_{ign}]$ та довільного $\theta \in [-r, -\eta_{ign}]$ ми маємо $u^k_\tau(\theta) = \varphi^k(\tau + \theta)$, таким чином умова (H) дає $\eta(u^k_\tau) = \eta(\overline{\varphi}^k_\tau)$ для довільного $\tau \in [0, \eta_{ign})$. Аналогічно отримуємо $\eta(u_\tau) = \eta(\overline{\varphi}_\tau)$ для довільного $\tau \in [0, \eta_{ign})$.

Ці обговорення показують, що збіжність $||\varphi^k - \varphi||_C \to 0$ дає $|\eta(u^k_\tau) - \eta(u_\tau)| = |\eta(\overline{\varphi}^k_\tau) - \eta(\overline{\varphi}_\tau)| \to 0$ для всіх $\tau \in [0, \eta_{ign})$. Тут ми використовували неперервність $\eta : C \to \mathbb{R}_+$.

Остання властивість показує, що для всіх $\tau \in [0, \eta_{ign})$ маємо $\tau - \eta(u^k_\tau) \to \tau - \eta(u_\tau)$, при $k \to \infty$. Таким чином неперервність слабкого розв'язку u (сильна неперервність в $L^2(\Omega)$) дає (див. інтергал в (3.52))

$$\forall \tau \in [0, t_0] \Longrightarrow ||u(\tau - \eta(u^k_\tau)) - u(\tau - \eta(u_\tau))|| \to 0, \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.53}$$

З іншого боку, легко бачити, що

$$\forall \tau \in [0, t_0] \Longrightarrow ||u(\tau - \eta(u^k_\tau)) - u(\tau - \eta(u_\tau))|| \leq 2 \max_{s \in [-r, t_0]} ||u(s)|| < +\infty. \tag{3.54}$$

Властивості (3.53) та (3.54) дозволяють нам використати лему Лебега-Фату ([8, c.32]) для скалярної функції $||u(\tau - \eta(u^k_\tau)) - u(\tau - \eta(u_\tau))||$ та прийти до висновку, що

$$\int_0^{t_0} ||u(\tau - \eta(u^k_\tau)) - u(\tau - \eta(u_\tau))|| \, d\tau \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.55}$$

Оцінки (3.55) та (3.52) доводять, що $J^k_2(t_0) \to 0$ при $k \to \infty$.

Оскільки

$$\max_{t \in [0, t_0]} J^k_2(t) \leq J^k_2(t_0) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty,$$

ми підсумовуємо (див. (3.51) та останні властивості), що для всіх $t \in [0, t_0]$:

$$||u^k_t - u_t||_C \equiv \max_{\theta \in [-r, 0]} ||u^k(t + \theta) - u(t + \theta)||_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq [1 - M_f |\Omega| L_b t_0]^{-1} \cdot \left(||\varphi^k - \varphi||_C + J^k_2(t_0) \right) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty. \tag{3.56}$$

Оцінка (3.56) дає $||u_t^k - u_t||_C \to 0$ коли $||\varphi^k - \varphi||_C \to 0$ для всіх $t \in [0, t_0] \subset [0, \min\{[M_f|\Omega|L_b]^{-1}, \eta_{ign}\})$. Це сильна неперервність в просторі C еволюційного оператора S_t для всіх (малих) $t \in [0, t_0] \subset [0, \min\{[M_f|\Omega|L_b]^{-1}, \eta_{ign}\})$.

Для довільного $t \geq 0$ ми представляємо $S_t\varphi$ як композицію відображень

$$S_t\varphi = \underbrace{S_p \circ S_p \circ S_p \circ \ldots \circ S_p}_{q \text{ разів}} \circ S_{t-[t\cdot(2p)^{-1}]}\varphi, \tag{3.57}$$

де $p \equiv \frac{1}{2}\min\{L_b^{-1}, \eta_{ign}\}$, $\quad q \equiv \left[\frac{t}{2p}\right]$. Тут $[\cdot]$ позначає цілу частину дійсного числа. Неперервність S_t випливає з доведеної неперервності S_p та $S_{t-[t\cdot(2p)^{-1}]}$ (оскільки обидва p та $t - \left[t\cdot(2p)^{-1}\right]$ належать $[0, \min\{[M_f|\Omega|L_b]^{-1}, \eta_{ign}\})$). Властивість 4 доведено. Це завершує доведення теореми 3.32.

3.3.2. Асимптотична поведінка. Цей підрозділ присвячений вивченню асимптотичної поведінки динамічної системи (S_t, C), що збудована в теоремі 3.32. Основним результатом є

Теорема 3.35 . *Нехай функція $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є липшицевою та обмеженою ($|b(w)| \leq C_b$ з $C_b \geq 0$) та загаювання $\eta : C \to [0, r]$ неперервно та задовільняє умові* **(H)** *(див. с.127), $f : \Omega - \Omega \to \mathbb{R}$ обмежена та вимірна ($|f(\cdot)| \leq M_f$). Тоді динамічна система (S_t, C) має компактний глобальний атрактор, який є компактною множиною в усіх просторах $C_\delta \equiv C([-r, 0]; D(A^\delta)), \forall\delta \in [0, \frac{1}{2})$.*

Доведення теореми 3.35 проведемо в чотири кроки.

Крок 1. Почнемо з доведення, що для довільного $T > 0$ та довільної обмеженої множини $B \subset C$ існує стала $C_T(B)$ така, що для довільного слабкого розв'язку (3.42), (3.41) із початковими значеннями в B, маємо

$$\forall t \in [0, T] \Longrightarrow ||u(t)|| \leq C_T(B). \tag{3.58}$$

Визначення слабкого розв'язку дає $||u(t)|| \leq ||\varphi(0)|| + \int_0^t (||F(u_s)|| + d||u(s)||)\, ds$. Використовуючи $||F(u_s)|| \leq M_f|\Omega|^{3/2}C_b$, маємо $||u(t)|| \leq ||\varphi(0)|| + d\int_0^t ||u(s)||\, ds + tM_f|\Omega|^{3/2}C_b$. Лема Гронуола дає $||u(t)|| \leq \left(||\varphi(0)|| + tM_f|\Omega|^{3/2}C_b\right) \cdot e^{dt}$. З цього випливає (3.58).

Крок 2. Тепер ми покажемо, що розв'язок стає більш гладким для додатніх t.

Лема 3.36 *Для довільних $0 < \alpha < 1$, $\epsilon > 0$, $T > 0$ та довільної обмеженої множини $B \subset C$ існує стала $C_{\alpha,\epsilon,T}(B)$ така, що для довільного слабкого розв'язку (3.42), (3.41) із початковими значеннями в B, маємо*

$$\|A^{\alpha} u(t)\| \leq C_{\alpha,\epsilon,T}(B) \quad \text{для} \;\; t \in (\epsilon, T]. \tag{3.59}$$

Зокрема, маємо $u(t) \in D(A^{\alpha})$ для всіх $t > \epsilon$.

Доведення леми є стандартним (див., наприклад, [31], а також [147, 155]).

Крок 3. Дисипативність. Як і раніше, ми позначаємо $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормований базис (простора $L^2(\Omega)$), який складається з власних векторів оператора A так, що $Ae_k = \lambda_k e_k$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k \to +\infty$.

Лема дає (ми берем $\alpha = \frac{1}{2} + \delta$), що $u(t) \in D(A^{\frac{1}{2}+\delta}), \forall \delta \in [0, 1/2), t > \varepsilon$. Таким чином , використовуючи $Au = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, e_k \rangle e_k$, легко перевірити, що $Au(t) \in D(A^{-\frac{1}{2}+\delta})$, $\forall \delta \in [0, 1/2), t > \varepsilon$.

Зафіксуємо довільний слабкий розв'язок $u(t)$ та позначимо $g(t) = F(u_t) \in C([0, +\infty); L^2(\Omega))$. Розглянемо наступну початкову задачу (без загаювання)

$$\dot{v}(t) + Av(t) + d \cdot v(t) = g(t), \quad v(\widetilde{\varepsilon}) = u(\widetilde{\varepsilon}), \quad t \geq \widetilde{\varepsilon} > \varepsilon, \tag{3.60}$$

яка має єдиний розв'язок $v(t) = u(t)$. Тепер розглянемо функцію $v^n(t) \equiv P_n v(t)$, де P_n ортопроектор (в $L^2(\Omega)$) на скінченновимірний підпростір, породжений елементами $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Легко перевірити, що v^n задовільняє $\dot{v}^n(t) + Av^n(t) + d \cdot v^n(t) = P_n g(t), \quad P_n v(\widetilde{\varepsilon}) = P_n u(\widetilde{\varepsilon}), \quad t \geq \widetilde{\varepsilon}$. Домножимо останню рівність (в $L^2(\Omega)$) на $A^{2\delta} v^n(t)$ та використовуємо $\langle \dot{v}^n(t), A^{2\delta} v^n(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||A^{\delta} v^n(t)||^2$ аби отримати

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||A^{\delta} v^n(t)||^2 + ||A^{\frac{1}{2}+\delta} v^n(t)||^2 + d \cdot ||A^{\delta} v^n(t)||^2 \leq ||g(t)|| \cdot ||A^{2\delta} v^n(t)||$$

$$\leq M_f |\Omega|^{3/2} C_b \cdot \lambda_1^{2\delta-1} ||A^{\frac{1}{2}+\delta} v^n(t)|| \leq \frac{1}{2} M_f^2 |\Omega|^3 C_b^2 \lambda_1^{4\delta-2} + \frac{1}{2} ||A^{\frac{1}{2}+\delta} v^n(t)||^2.$$

Ми використовуємо $||g(t)|| = ||F(u_t)|| \leq M_f |\Omega|^{3/2} C_b$ (див. вище).

Таким чином $\frac{d}{dt} ||A^{\delta} v^n(t)||^2 + ||A^{\frac{1}{2}+\delta} v^n(t)||^2 + 2d \cdot ||A^{\delta} v^n(t)||^2 \leq M_f^2 |\Omega|^3 C_b^2 \lambda_1^{4\delta-2}$.

Використовуючи $||A^{\frac{1}{2}+\delta} v||^2 \geq \lambda_1 ||A^{\delta} v||^2$, ми отримуємо $\frac{d}{dt} ||A^{\delta} v^n(t)||^2 + (\lambda_1 + 2d) ||A^{\delta} v^n(t)||^2 \leq M_f^2 |\Omega|^3 C_b^2 \lambda_1^{4\delta-2}$.

Ми домножуємо останню оцінку на $\exp\{(\lambda_1 + 2d)t\}$, інтегруємо по $[\widetilde{\varepsilon}, t]$ та домножуємо на $\exp\{-(\lambda_1 + 2d)t\}$. В результаті отримуємо

$$||A^\delta v^n(t)||^2 \le ||A^\delta v^n(\widetilde{\varepsilon})||^2 \cdot \exp\{-(\lambda_1 + 2d)t\} + M_f^2 |\Omega|^3 C_b^2 \lambda_1^{4\delta-2} (\lambda_1 + 2d)^{-1}. \quad (3.61)$$

Тепер ми використовуємо відому властивість $\lim\limits_{n\to\infty} ||A^\delta(P_n v - v)|| = 0$ для отримання аналога оцінки (3.61) для $v(t)$. Оскільки $v(t) = u(t)$ та $u(\widetilde{\varepsilon}) \in D(A^\delta)$ (див. лему 3.36 вище), ми отримуємо наступну властивість

$$\forall \delta \in [0, 1/2) \quad \exists\, C(\delta) > 0 : \forall B - \text{ обмежена у } C, \exists t(B, \delta) :$$

$$\forall t \ge t(B, \delta) \Longrightarrow ||A^\delta u(t)|| \le C(\delta). \quad (3.62)$$

Крок 4. Наша наступна мета - показати, що множина $\{S_t \varphi \,|\, \varphi \in B,\ t > r + \varepsilon\}$ є рівностепенево неперервною родиною в просторі $C_\delta \equiv C([-r, 0]; D(A^\delta)), \forall \delta \in [0, \frac{1}{2})$.

Зауваження 3.37 *В нашому випадку ми не можемо використати [220, теорема 1.8, с.42] оскільки наша нелінійность F не є липшицевою.*

Розглянемо (для $v \in L^2(\Omega)$ та довільних $t_1, t_2 \ge 0$)

$$\|A^\delta \left(e^{-At_1} v - e^{-At_2} v\right) \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda_k t_1} - e^{-\lambda_k t_2}\right)^2 \lambda_k^{2\delta} \cdot v_k^2, \quad (3.63)$$

де $v_k \equiv \langle v, e_k \rangle$. Припускаючи $0 < t_1 < t_2$, можна легко перевірити, що $\left(e^{-\mu t_1} - e^{-\mu t_2}\right)^2 \mu^{2\delta} = |e^{-\mu t_1} - e^{-\mu t_2}| \cdot \left|\left(e^{-\mu t_1} - e^{-\mu t_2}\right) \mu^{2\delta}\right| \le \left|\left(e^{-\mu t_1} - e^{-\mu t_2}\right) \mu^{2\delta}\right|$ $\le |t_1 - t_2| \cdot \max_{\tau \in [t_1, t_2]} \mu^{1+2\delta} e^{-\mu\tau} = |t_1 - t_2| \cdot \mu^{1+2\delta} e^{-\mu t_1}$, $\mu > 0$. Обчислення дають $\max_{\mu > 0} \mu^{1+2\delta} e^{-\mu t_1} = e^{-(1+2\delta)} \left(\frac{1+2\delta}{t_1}\right)^{1+2\delta}$. Таким чином, для кожного $k \in N$, маємо $\left(e^{-\lambda_k t_1} - e^{-\lambda_k t_2}\right)^2 \lambda_k^{2\delta} \le |t_1 - t_2| \cdot e^{-(1+2\delta)} (1 + 2\delta)^{(1+2\delta)} \cdot (\min\{t_1, t_2\})^{-(1+2\delta)}$. Остання оцінка та (3.63) дають

$$\|A^\delta \left(e^{-At_1} v - e^{-At_2} v\right) \| \le D_\delta \left(\min\{t_1, t_2\}\right)^{-\left(\delta + \frac{1}{2}\right)} \cdot \sqrt{|t_1 - t_2|} \cdot ||v||, \quad (3.64)$$

де $D_\delta \equiv e^{-\left(\delta + \frac{1}{2}\right)} (1 + 2\delta)^{\left(\delta + \frac{1}{2}\right)}$.

Таким же чином (див., наприклад, [31, (2.8.6)]), ми отримуємо для довільного $s \ge 0$ оцінку $||A^\delta e^{-As}|| \le (e \cdot s)^{-\delta} \delta^\delta$. Обчислення та остання оцінка дають (для $0 < t_1 < t_2$)

$$\int_{t_1}^{t_2} \|A^\delta e^{-A(t_2-\tau)}\| \, d\tau \le \left(\frac{\delta}{e}\right)^\delta \cdot \frac{|t_1-t_2|^{1-\delta}}{1-\delta}. \tag{3.65}$$

Розглянемо для довільного слабкого розв'язку $u(t)$, функцію $G(t) \equiv F(u_t) + du(t)$ та різницю $u(t_1) - u(t_2)$

$$\|A^\delta \left(u(t_1) - u(t_2)\right)\| \le \|A^\delta \left(e^{-At_1}\varphi(0) - e^{-At_2}\varphi(0)\right)\|$$

$$+ \int\limits_0^{t_1} \|A^\delta \left(e^{-A(t_1-\tau)}G(\tau) - e^{-A(t_2-\tau)}G(\tau)\right)\| \, d\tau + \int\limits_{t_1}^{t_2} \|A^\delta e^{-A(t_2-\tau)}G(\tau)\| \, d\tau.$$

Тут, як і раніше $0 < t_1 < t_2$. Остання оцінка, (3.64) та (3.65) дають

$$\|A^\delta \left(u(t_1) - u(t_2)\right)\| \le L(\delta, t_1, t_2, \varphi) \cdot \sqrt{|t_1 - t_2|}, \tag{3.66}$$

де

$$L(\delta, t_1, t_2, \varphi) \equiv D_\delta \left(\min\{t_1, t_2\}\right)^{-\left(\delta + \frac{1}{2}\right)} ||\varphi(0)||$$

$$+ \left[D_\delta \cdot t_1^{\frac{1}{2}-\delta} \left(\frac{1}{2} - \delta\right)^{-1} + \delta^\delta \left(e^\delta (1-\delta)\right)^{-1}\right] \cdot \max_{\tau \in [0,t_2]} ||F(u_\tau) + du(\tau)||. \tag{3.67}$$

Тут ми використовували

$$\int\limits_0^{t_1} \|A^\delta \left(e^{-A(t_1-\tau)}G(\tau) - e^{-A(t_2-\tau)}G(\tau)\right)\| \, d\tau$$

$$\le D_\delta \sqrt{|t_1 - t_2|} \max_{\tau \in [0,t_2]} ||G(\tau)|| \cdot \int\limits_0^{t_1} (t_1 - \tau)^{-\left(\delta + \frac{1}{2}\right)} \, d\tau$$

$$= D_\delta \sqrt{|t_1 - t_2|} \max_{\tau \in [0,t_2]} ||G(\tau)|| \cdot t_1^{\frac{1}{2}-\delta} \left(\frac{1}{2} - \delta\right)^{-1}.$$

Вочевидь, (3.62) та оцінка $||u|| \le \lambda_1^{-\delta} \cdot ||A^\delta u||$ дають $\max_{\tau \in [0,t_2]} ||F(u_\tau) + du(\tau)|| \le M_f |\Omega|^{3/2} C_b + d \cdot C(\delta) \le C < +\infty$ для довільного слабкого розв'язку, який знаходиться в кулі дисипативності тобто (3.62) виконується. Це, форма сталої $L(\delta, t_1, t_2, \varphi)$ (див. (3.67)) та (3.66) дають, що для довільного часового сегмента

$[a,b] \subset (0,+\infty)$ з $a > t(B,\delta)$ (див. (3.62)), існує стала $L > 0$ така, що для довільного слабкого розв'язку $u(t)$ та довільних $t_1, t_2 \in [a,b]$ маємо

$$\| A^\delta \left(u(t_1) - u(t_2) \right) \| \le L \cdot \sqrt{|t_1 - t_2|}. \tag{3.68}$$

Це дає рівностепеневу неперервність родини $\{u(t+\theta) \,|\, \theta \in [-r,0], t > t(B,\delta)\}$ у всіх просторах $C_\delta \equiv C([-r,0]; D(A^\delta)), \forall \delta \in [0, \frac{1}{2})$.

Остаточно, оцінка (3.68) для $\delta \in [0, \frac{1}{2})$ та оцінка (3.62) для довільного $\delta_1 \in (\delta, \frac{1}{2})$, зокрема означає (за теоремою Арцела-Асколи), що для довільних $\varphi \in B \subset C$ та $t > t(B,\delta)$ (див. (3.62)), маємо $S_t\varphi \in K_\delta$, де K_δ є компактною множиною в усіх просторах $C_\delta \equiv C([-r,0]; D(A^\delta)), \forall \delta \in [0, \frac{1}{2})$.

Це означає, що динамічна система $(S_t; C)$ є дисипативною та асимптотично компактною, таким чином, за класичною теоремою 1.7 про існування атрактора (див., наприклад, [2, 200, 31]) $(S_t; C)$ має компактний глобальний атрактор. Доведення теореми 3.35 завершено. ∎

Зауваження 3.38 *Результати є також вірними для локальної нелінійності, тобто рівняння (3.42) з* $\big(F_\ell(u_t)\big)(x) \equiv b(u(t-\eta(u_t), x)), \quad x \in \Omega.$

3.4. Узагальнена ігноруюча умова

Ми розглядаємо рівняння (3.40) (див. також (2.1)) з попередніми припущеннями **(A1)** на оператор A (з $H = L^2(\Omega)$).

Нелінійне загаюваний елемент $F : C([-r,0]; L^2(\Omega)) \to L^2(\Omega)$ має вигляд

$$F(\varphi) = B(\varphi(-\eta(\varphi))), \tag{3.69}$$

де нелінійне відображення $B : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ є липшицевим

$$||B(v^1) - B(v^2)|| \le L_B || \, v^1 - v^2||, \quad \forall v^1, v^2 \in L^2(\Omega). \tag{3.70}$$

В позначеннях (2.2), маємо $B = B_0$, $\alpha = 0, L_B = M_0$.

Відображення $\eta(\cdot) \; : \; C([-r,0]; L^2(\Omega)) \; \to \; [0,r]$ представляє *зосереджене загаювання, що залежить від стану* (ЗЗС). Важливо підкреслити, що F є *нелінійним* за виключенням випадка, коли η стала (навіть у випадку лінійного B).

Зауваження 3.39 *Представлені тут результати можуть бути легко узагальнені на випадок нелінійності F вигляду $F(\varphi) = \sum_k B^k(\varphi(-\eta^k(\varphi)))$, а також на випадок ЗДР, наприклад, наступного вигляду [28]*

$$\dot{u}(t) + Au(t) + d \cdot u(t) = b(u(t - \eta(u_t))), \quad u(\cdot) \in \mathbb{R}^n,\, d \geq 0. \tag{3.71}$$

В останньому випадку, ми просто замінюємо $L^2(\Omega)$ на $\mathbb{R}^n$ і використовуємо $C \equiv C([-r,0];\mathbb{R}^n)$ замість $C([-r,0];L^2(\Omega))$. Відображення $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ локально липшицеве та задовільняє $||b(w)||_{R^n} \leq C_1||w||_{\mathbb{R}^n} + C_b$ з $C_1, C_b \geq 0$; A - матриця.

Зауваження 3.40 *В якості приклада ми можемо розглянути* нелокальне *загаювання F (див. (3.69)) з наступним відображенням $B(v)(x) \equiv \int_\Omega b(v(y))f(x-y)dy, \quad x \in \Omega$, де $f : \Omega - \Omega \to \mathbb{R}$ обмежена вимірна функція ($|f(z)| \leq M_f, \forall z \in \Omega - \Omega$) та $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - (локально) липшицеве відображення, що задовільняє $|b(w)| \leq C_1|w| + C_b$ з $C_i \geq 0$. Можна легко перевірити, що B задовільняє (3.70) з $L_B \equiv L_b M_f |\Omega|$, де L_b - стала Липшиця b, та $|\Omega| \equiv \int_\Omega 1\, dx$.*

*Іншим прикладом може слугувати (*локальне*) загаювання F (див. (3.69)) з $B(v)(x) \equiv b(v(x)), x \in \Omega$. Прості підрахунки показують, що (3.70) виконується з $L_B \equiv L_b$.*

Метод, який ми використовуємо, може бути застосований до інших типів загаюваних рівнянь у частинних похідних (а також до ЗДР). Ми обрали часткову форму загаюваного елемента F для зручності та для ілюстрації нашого метода, наприклад, для рівняння Ніколсона.

3.4.1. Існування слабких розв'язків.

Твердження 3.41 *[159]. Нехай відображення B є липшицевим (див. (3.70)) та загаювання $\eta(\cdot) : C([-r,0];L^2(\Omega)) \to [0,r] \subset \mathbb{R}_+$ є неперервним. Тоді для довільної початкової функції $\varphi \in C$, початкова задача (3.40), (3.41) має глобальний слабкий розв'язок, який задовільняє $u \in C([-r,+\infty);L^2(\Omega))$.*

Існування слабкого розв'язку є наслідком неперервності $F : C \to L^2(\Omega)$ (див. (3.40)), яка дає можливість використати стандартний метод, що спирається на принцип Шаудера нерухомої точки (див. наприклад, [220, теорема 2.1, с.46]). Розв'язок є глобальним (тобто визначений для всіх $t \geq -r$) оскільки (3.70) дає $||F(\varphi)|| \leq L_B ||\varphi||_C + ||B(0)||$ та можна використати, наприклад, [220, теорема 2.3, с.49]. Про існування розв'язків для загаюваних РЧП, див. наприклад [185] та посилання.

Зауваження 3.42 *Про вивчення розв'язків рівнянь з ЗЗС у просторі $C([-r, 0]; E)$ з можливо нескінченновимірним банаховим простором E див., наприклад, [36].*

Ми зосередимось на умовах коректної розв'язності початкової задачі (3.40), (3.41).

3.4.2. Єдиність та коректна розв'язність. Як і раніше, ми припускаємо неперервність $\eta : C \to [0, r]$ та липшицевість B (див. (3.70)). На відміну від існування розв'язків, єдиність є більш складним питанням в присутності зосередженого ЗЗС (див. класичний приклад неєдиності в [216]).

Пригадаємо важливу умову **(H)** (див. с.127) на загаювання η, яка була введена в пункті 3.3.1 (див. [159]). Приклади загаювань, які задовільняють **(H)**, та доведення *єдиності* слабких розв'язків як і коректності початкової задачі (3.40), (3.41), можна знайти в пункті 3.3.1 та [159].

В умові **(H)** (див. с.127) напівінтервал $(-\eta_{ign}, 0]$ фіксований (нагадаємо, що стала η_{ign} може бути довільно малою).

Нашою метою є узагальнення підходу, заснованого на умові **(H)**, для більш широкого класу загаюваних функцій, де величина η_{ign} вже не є сталою, а є функцією стану. Більш того, як додаткове узагальнення, ми дозволяємо і іншій межі загаюваного сегмента бути залежною від стану. Детальніше, ми розглядаємо дві функції $\Theta^u, \Theta^\ell : C \to [0, r]$, що задовільняють

$$\forall \varphi \in C \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \Theta^\ell(\varphi) \leq \Theta^u(\varphi) \leq r.$$

Ми готові ввести [28] наступну ігноруючу умову, що залежить від *стану* для загаювання $\eta : C \to [0, r]$ (порівняйте з **(H)** с.127):

- η "ігнорує " значення $\varphi(\theta)$ для $\theta \notin [-\Theta^u(\varphi), -\Theta^\ell(\varphi)]$, тобто

$$\forall\,\psi \in C : \forall\theta \in [-\Theta^u(\varphi), -\Theta^\ell(\varphi)] \Rightarrow \psi(\theta) = \varphi(\theta) \quad \Longrightarrow \quad \eta(\psi) = \eta(\varphi). \quad (3.72)$$

Ми можемо проілюструвати введену умову наступним чином

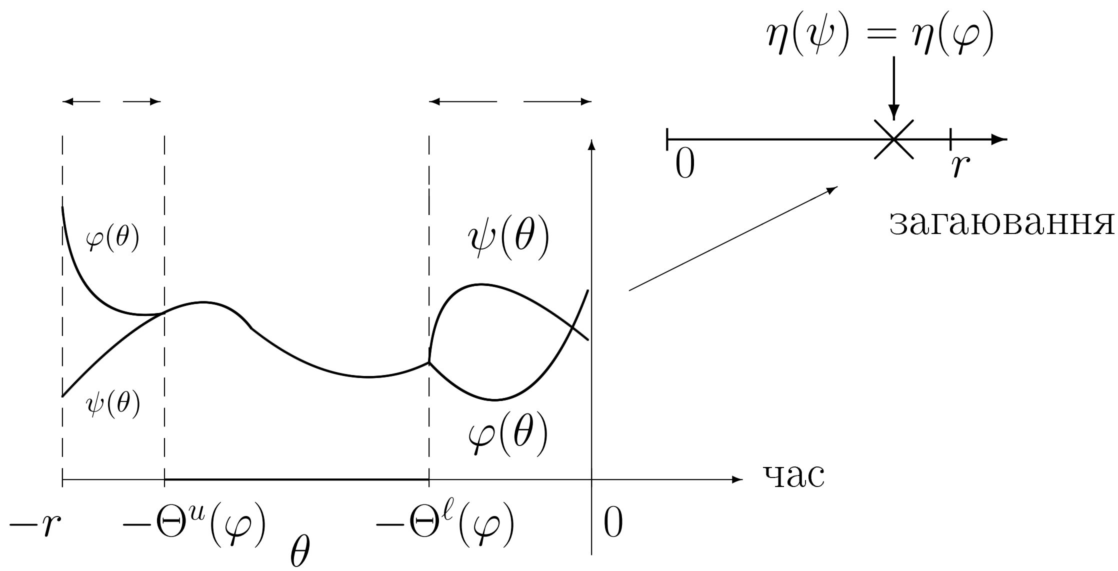

Рис. 4.5. Узагальнена ігноруюча умова.

Зауваження 3.43 *Умова* **(H)** *(див. с.127) є частковим випадком (3.72) з* $\Theta^\ell(\varphi) \equiv \eta_{ign}$ *та* $\Theta^u(\varphi) \equiv r, \forall\varphi \in C$.

Приклад 3.44 *Можна привести багато прикладів загаювань* η, *які задовільняють (3.72). Наведемо декілька простіших.*

$$\eta(\varphi) = p_1\left(\varphi(-\chi(\varphi(-r)))\right) \text{ з } p_1 : L^2(\Omega) \to [0, r] \quad (3.73)$$

та заданих $\chi : L^2(\Omega) \to [0, r]$. *Тут* $\Theta^\ell(\varphi) \equiv \chi(\varphi(-r))$ *та* $\Theta^u(\varphi) = r$. *Легко бачити, що приведене загаювання* η *(3.73) ігнорує значення* φ *в точках* $\theta \in (-r, -\chi(\varphi(-r))) \cup (-\chi(\varphi(-r)), 0]$ *та використовує тільки два значення функції* φ *в точках* $\theta = -r, \theta = -\chi(\varphi(-r))$. *В наших позначеннях, загаюваний сегмент* $[-\Theta^u(\varphi), -\Theta^\ell(\varphi)] = [-r, -\chi(\varphi(-r))]$ *залежить від стану. Аналогічно маємо*

$$\eta(\varphi) = \sum_{k=1}^{N} p_k\left(\varphi(-\chi^k(\varphi(-r)))\right) \text{ з } p_k, \chi^k : L^2(\Omega) \to [0, r].$$

В цьому випадку $[-\Theta^u(\varphi), -\Theta^\ell(\varphi)] = [-r, -\min_k\{\chi^k(\varphi(-r))\}]$. *Більш загальний приклад*

$$\eta(\varphi) = \sum_{k=1}^{N} p_k \left(\varphi(-\chi^k(\varphi(-r^k)))\right) \text{ з } p_k, \chi^k : L^2(\Omega) \to [0,r], \quad \min r^k \in (0,r].$$

Тут $\Theta^u(\varphi) = \max\{r^1, \ldots, r^N, \chi^1(\varphi(-r^1)), \ldots, \chi^N(\varphi(-r^N))\}$ *та* $\Theta^\ell(\varphi) = \min\{r^1, \ldots, r^N, \chi^1(\varphi(-r^1)), \ldots, \chi^N(\varphi(-r^N))\}$.

Також можна привести приклади інтегральних загаюваних функцій

$$\eta(\varphi) = \int_{-\chi^2(\varphi(-r^2))}^{-\chi^1(\varphi(-r^1))} p_1(\varphi(\theta)) g(\theta)\, d\theta, \text{ та } \quad \eta(\varphi) = p_1\left(\int_{-\chi^2(\varphi(-r^2))}^{-\chi^1(\varphi(-r^1))} \varphi(\theta) g(\theta)\, d\theta\right).$$

Аналогічно попередньому прикладу, $\Theta^u(\varphi) = \max\Big\{r^1, r^2, \chi^1(\varphi(-r^1)), \chi^2(\varphi(-r^2))\Big\}$ *та* $\Theta^\ell(\varphi) = \min\left\{r^1, r^2, \chi^1(\varphi(-r^1)), \chi^2(\varphi(-r^2))\right\}$.

Зауваження 3.45 *Цікаво відзначити, що умова, подібна до існування верхньої функції* $\Theta^u(\cdot)$ *використовується в [208] для ЗДР з ЗЗС (властивість локально обмеженого загаювання). З іншого боку, умова, подібна до (H), використовується в [99, 207] для нейтральних ЗДР (див. (A4)(ii) в [99]), але одночасно з іншою умовою на ЗЗС - бути обмеженим знизу деякою сталою* $r_0 > 0$.

Аналогічно [159, теорема 1], маємо

Теорема 3.46. *Нехай обидві функції* $\Theta^u, \Theta^\ell : C \to [0,r]$ *неперервні та* $\Theta^\ell(\varphi) > 0$ *для всіх* $\varphi \in C$. *Припустимо, що загаювання* $\eta : C \to [0,r]$ *неперервно та задовільняє (3.72); відображення B липшицеве (див. (3.70)).*

Тоді для довільної початкової функції $\varphi \in C$, *задача (3.40), (3.41) має* єдиний *слабкий розв'язок* $u : [-r, \infty) \to L^2(\Omega)$.

Якщо ми визначимо еволюційний оператор $S_t : C \to C$ *за правилом* $S_t\varphi \equiv u_t$, *де* u *- єдиний слабкий розв'язок задачі (3.40), (3.41) із початковою функцією* φ, *тоді* (S_t, C) *є динамічною системою.*

Доведення випливає з розглядів [159, теорема 1] (див. доведення теореми 3.32), беручи до уваги, що умова $\Theta^\ell(\varphi) > 0, \forall\varphi \in C$ дає для довільного фіксованого $\varphi \in C$, завдяки неперервності $\Theta^\ell : C \to [0, r]$, існування околу $U(\varphi) \subset C$ такого, що для всіх $\psi \in U(\varphi)$ маємо $\Theta^\ell(\psi) \geq \frac{1}{2}\Theta^\ell(\varphi) > 0$. Це означає, що в $U(\varphi) \subset C$ виконується умова **(H)** (що незалежить від стану) з $\eta_{ign} = \frac{1}{2}\Theta^\ell(\varphi) > 0$ та доведення [159, теорема 1] може бути легко перенесено на наш випадок. Для доведення глобального (за часом) результату ми використовуємо твердження 3.41 (яке дає глобальне існування розв'язків для довільного фіксованого $\xi \in C$) та припускаємо, що існує $\tau > 0$ таке, що для початкової функції $\varphi = S_\tau\xi$ єдиність порушується. Ми одразу приходимо до протиріччя оскільки $\Theta^\ell(\varphi) > 0$ та локальний результат, що доведений раніше, дає єдиність. Аналогічно отримуємо неперервність S_t для всіх $t > 0$. Як в [159, с.3981], властивості 1, 2 випливають з єдиності слабких розв'язків. Властивість 3 дано в твердженні 3.41 оскільки розв'язок є неперервним.

Зауваження 3.47 *Ми* не *припускаємо, що функції Θ^u, Θ^ℓ (які використовуються в $(\widehat{H})$ для опису загаюваного сегмента $[-\Theta^u(\varphi), -\Theta^\ell(\varphi)]$), є функціями, які задають найменший загаюваний сегмент. Детальніше, можливо існують інші функції $\widetilde{\Theta}^u, \widetilde{\Theta}^\ell$ такі, що для всіх $\varphi \in C$ виконується $0 \leq \Theta^\ell(\varphi) \leq \widetilde{\Theta}^\ell(\varphi) \leq \widetilde{\Theta}^u(\varphi) \leq \Theta^u(\varphi) \leq r$ та також загаювання η задовільняє $(\widehat{H})$ з $\widetilde{\Theta}^u, \widetilde{\Theta}^\ell$.*

Нашим наступним кроком у вивченні *залежної від стану* ігноруючої умови (3.72) буде спроба уникнути умови $\Theta^\ell(\varphi) > 0, \forall\varphi \in C$. Ми вивчаємо загальний випадок $\Theta^\ell(\varphi) \geq 0, \forall\varphi \in C$ з непустою множиною $Z \equiv \{\varphi \in C \colon \Theta^\ell(\varphi) = 0\} \neq \emptyset$.

Теорема 3.48 . *Нехай відображення B липшицеве (див. (3.70)).*

Більш того, нехай наступні умови виконані:

1) обидві ігноруючі функції $\Theta^u, \Theta^\ell : C \to [0, r]$ неперервні;

2) існує $L > 0$ таке, що
$Z \equiv \{\varphi \in C : \Theta^\ell(\varphi) = 0\} \subset C\mathcal{L}_L \equiv \left\{\varphi \in C : \sup\limits_{t\neq s} \frac{||\varphi(t)-\varphi(s)||}{|t-s|} \leq L\right\}$;

3) загаювання $\eta : C \to [0, r]$ неперервно та задовільняє (3.72);

4) для всіх $\varphi \in Z$ маємо $\eta(\varphi) > 0$;

5) існують $\omega > 0$ та $L_\eta > 0$ такі, що для всіх $\varphi, \psi \in U_\omega(Z) \equiv \{\chi \in C : \exists \nu \in Z : ||\chi - \nu||_C \leq \omega\}$ маємо $|\eta(\varphi) - \eta(\psi)| \leq L_\eta \cdot ||\varphi - \psi||_C$.

Тоді для довільної початкової функції $\varphi \in C$, задача (3.40), (3.41) має **єдиний** *слабкий розв'язок $u(t), t \geq 0$. Більш того, пара (S_t, C) є динамічною системою.*

Доведення теореми 3.48. Ми почнемо зі спостереження, що довільний розв'язок u в довільний момент часу $t \geq 0$ задовільняє або $u_t \in Z$ або $u_t \in C \setminus Z$. Більш того, довільний розв'язок є глобальний та для різних моментів часу $t^1, t^2 \geq 0$ можливо $u_{t^1} \in Z$ та $u_{t^2} \in C \setminus Z$. Таким чином ми ділемо наше доведення на два випадки: $\varphi \in Z$ та $\varphi \in C \setminus Z$.

Розглянемо $\varphi \in C$, яке є початковою функцією (див. (3.41)). Ми починаємо з простого випадка $\varphi \notin Z$. За визначенням множини Z, ми маємо $\Theta^\ell(\varphi) > 0$. Якщо існує таке $\tau > 0$, що $S_\tau\varphi \in Z$, ми перейдемо до випадку $\varphi \in Z$, розглядаючи $S_\tau\varphi$ як початкову φ. В протилежному випадку, доведення може бути проведено як в теоремі з основною ігноруючою умовою (умова (H) задовільняється локально).

Частина доведення, що залишилась, присвячена випадку $\varphi \in Z$ і організована наступним чином. Для всіх $t \geq 0$ ми позначаємо $u^k(t)$ *довільний* розв'язок (3.40), (3.41) з початковою функцією φ^k та $u(t)$ *довільний* розв'язок (3.40), (3.41) із початковою функцією φ. Ми обираємо два довільні розв'язки та шукаємо оцінку для $||u^k(t) - u(t)||$ в термінах $||\varphi^k - \varphi||_C$. Кінцева оцінка (див. (3.84) нижче) дасть єдиність та неперервну залежність.

Нагадаємо оцінки, подібні оцінкам (6)-(13) в роботі [159]. Ми використовуємо формулу варіації сталих для параболічного рівняння (з $\widetilde{A} \equiv A + d \cdot E$, де E одиничний оператор з $L^2(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$)

$$u(t) = e^{-\widetilde{A}t}u(0) + \int_0^t e^{-\widetilde{A}(t-\tau)}B(u(\tau - \eta(u_\tau)))\,d\tau, \tag{3.74}$$

$$u^k(t) = e^{-\widetilde{A}t}u^k(0) + \int_0^t e^{-\widetilde{A}(t-\tau)}B(u^k(\tau - \eta(u^k_\tau)))\,d\tau. \tag{3.75}$$

Оскільки оператор A додатній та $d \geq 0$ ми використовуємо (див. [31, 103]) $||e^{-\widetilde{A}t}|| \leq 1$ та $||e^{-\widetilde{A}(t-\tau)}|| \leq 1$ для того, аби

$$||u^k(t) - u(t)|| \leq ||u^k(0) - u(0)|| + \int_0^t ||B(u^k(\tau - \eta(u^k_\tau))) - B(u(\tau - \eta(u_\tau)))||\, d\tau$$
$$\leq ||\varphi^k(0) - \varphi(0)|| + J_1^k(t) + J_2^k(t), \tag{3.76}$$

де ми позначаємо (для $s \geq 0$)

$$J_1^k(s) \equiv \int_0^s ||B(u^k(\tau - \eta(u^k_\tau))) - B(u(\tau - \eta(u^k_\tau)))||\, d\tau, \tag{3.77}$$

$$J_2^k(s) \equiv \int_0^s ||B(u(\tau - \eta(u^k_\tau))) - B(u(\tau - \eta(u_\tau)))||\, d\tau. \tag{3.78}$$

Використовуючи властивість Липшиця (3.70) відображення B, отримуємо

$$J_1^k(t) \leq L_B \int_0^t ||u^k(\tau - \eta(u^k_\tau)) - u(\tau - \eta(u^k_\tau))||\, d\tau \leq L_B t \max_{s\in[-r,t]} ||u^k(s) - u(s)||. \tag{3.79}$$

Оцінки (3.47), (3.50) та властивість $J_2^k(s) \leq J_2^k(t)$ для $s \leq t \leq t_0$ дає

$$\max_{t\in[0,t_0]} ||u^k(t) - u(t)|| \leq ||\varphi^k(0) - \varphi(0)|| + L_B t_0 \max_{s\in[-r,t_0]} ||u^k(s) - u(s)|| + J_2^k(t_0).$$

Таким чином

$$\max_{s\in[-r,t_0]} ||u^k(s) - u(s)|| \leq ||\varphi^k - \varphi||_C + L_B t_0 \max_{s\in[-r,t_0]} ||u^k(s) - u(s)|| + J_2^k(t_0). \tag{3.80}$$

Тепер ми вивчимо властивості J_2^k, які суттєво відрізняються від властивостей в [159] оскільки **(H)** не виконано. Властивість Липшиця B дає

$$J_2^k(t_0) \leq L_B \int_0^{t_0} ||u(\tau - \eta(u^k_\tau)) - u(\tau - \eta(u_\tau))||\, d\tau. \tag{3.81}$$

Оскільки $\varphi \in Z$, властивість 4) дає $\eta(\varphi) > 0$. Завдяки неперервності η (див. 3)), існує $\alpha > 0$ таке, що для всіх $\psi \in U_\alpha(\varphi) \equiv \{\psi \in C : ||\varphi - \psi||_C \leq \alpha\}$ маємо

$$\eta(\psi) \geq \frac{3}{4}\eta(\varphi) > 0. \tag{3.82}$$

Обираємо $\alpha < \omega$ (див. властивість 5). За визначенням, розв'язок неперервний (в нормі простору $L^2(\Omega)$), таким чином для довільних двох розв'язків $u(t)$ та $u^k(t)$ існують два моменти часу $t_\varphi, t_{\varphi^k} > 0$ такі, що для всіх $t \in (0, t_\varphi]$ маємо $u_t \in U_\alpha(\varphi)$ та для всіх $t \in (0, t_{\varphi^k}]$ маємо $u^k_t \in U_\alpha(\varphi)$.

Зауваження 3.49 *Детальніше, ми припускаємо існування $N_\alpha \in N$ такого, що для всіх $k \geq N_\alpha$ маємо $\varphi^k \in U_{\alpha/2}(\varphi)$ та таким чином існує момент часу $t_{\varphi^k} \in (0, t_0]$ такий, що для всіх $t \in (0, t_{\varphi^k}]$ маємо $u_t^k \in U_\alpha(\varphi)$. Це припущення (на N_α) не є обмежуючим оскільки для единості розв'язків маємо $\varphi^k = \varphi$, а для неперервності за початковими даними (див. нижче) маємо $\varphi^k \to \varphi$ у просторі C.*

Зауваження 3.50 *Важливо підкреслити, що ми обираємо* `довільний` *розв'язок з множини розв'язків задачі (3.40), (3.41) із початковою функцією φ (та позначаємо його $u(t)$) та обираємо* `довільний` *розв'язок з множини розв'язків задачі (3.40),(3.41) із початковою функцією φ^k (та позначаємо його $u^k(t)$) тобто значення t_φ, t_{φ^k} можуть залежати від вибору цих* `двох` *розв'язків.*

Таким чином (3.82) дає, що для всіх $\tau \in [0, t_1]$, з $t_1 \leq \min\{t_\varphi; t_{\varphi^k}; \frac{3}{4}\eta(\varphi)\}$ отримуємо $\tau - \eta(u_\tau) \leq 0, \tau - \eta(u_\tau^k) \leq 0$ та $u(\tau - \eta(u_\tau)) = \varphi(\tau - \eta(u_\tau)), u(\tau - \eta(u_\tau^k)) = \varphi(\tau - \eta(u_\tau^k))$. Таким чином, див. (3.52) та властивості 2), 5),

$$J_2^k(t_1) \leq L_B \int_0^{t_1} ||\varphi(\tau - \eta(u_\tau^k)) - \varphi(\tau - \eta(u_\tau))||\, d\tau \leq L_B L \int_0^{t_1} |\eta(u_\tau^k) - \eta(u_\tau)|\, d\tau$$
$$\leq L_B L L_\eta t_1 \max_{s \in [-r, t_1]} ||u^k(s) - u(s)||.$$

Остаточно, ми отримуємо (див. останню оцінку та (3.51))

$$(1 - L_B t_1 [1 + L L_\eta]) \max_{s \in [-r, t_1]} ||u^k(s) - u(s)|| \leq ||\varphi^k - \varphi||_C.$$

Обираючи достатньо мале $t_1 > 0$ (для $1 - L_B t_1 [1 + L L_\eta] > 0$), тобто

$$t_1 \equiv \min\left\{t_\varphi; t_{\varphi^k}; \frac{3}{4}\eta(\varphi); q L_B [1 + L L_\eta])^{-1}\right\} \text{ для довільного фікс. } q \in (0, 1), \tag{3.83}$$

отримуємо

$$\max_{s \in [-r, t_1]} ||u^k(s) - u(s)|| \leq (1 - L_B t_1 [1 + L L_\eta])^{-1} ||\varphi^k - \varphi||_C. \tag{3.84}$$

Легко бачити, що (3.84), зокрема, дає *единість* слабких розв'язків задачі (3.40), (3.41) у випадку $\varphi^k = \varphi$.

Ми маємо можливість визначити **еволюційний оператор** $S_t : C \to C$ за правилом $S_t\varphi \equiv u_t$, де $u(t)$ - єдиний слабкий розв'язок (3.40), (3.41) з початковою функцією φ.

Наша наступна мета - довести, що пара (S_t, C) складає **динамічну систему**. Як в [159, с.3981], властивості 1, 2 є наслідками єдиності розв'язків. Властивість 3 випливає з твердження оскільки розв'язок є неперервний.

Доведемо властивість 4. Розглянемо довільну послідовність $\{\varphi^k\}_{k=1}^{\infty} \subset C$, яка збігається (в просторі C) до φ. Позначимо $u^k(t)$ (єдиний!) слабкий розв'язок (3.40),(3.41) із початковою функцією φ^k та $u(t)$ (єдиний!) слабкий розв'язок (3.40),(3.41) із початковою функцією φ.

Може виникнути враження, що (3.84) забезпечує неперервну залежність від початкових даних, але є важлива технічна властивість, яка використовувалась під час виводу (3.84), тобто вибір t_1 (див. (3.83)). На відміну від попередніх розглядань, тепер ми маємо нескінченну множину функцій $\{\varphi^k\}_{k=1}^{\infty} \subset C$, т.ч. можливий випадок, коли $t_1 = t_1^k \to 0$ при $k \to \infty$.

Ми нагадаємо (див. текст після (3.82)), що **два** моменти часу $t_\varphi, t_{\varphi^k} > 0$ обиралися аби для всіх $t \in (0, t_\varphi]$ мати $u_t \in U_\alpha(\varphi)$ та для всіх $t \in (0, t_{\varphi^k}]$ мати $u_t^k \in U_\alpha(\varphi)$. Зараз наша задача - показати, що нескінченне число моментів t_φ, $\{t_{\varphi^k}\}_{k=1}^{\infty}$ може бути обраним таким чином, що

$$t_2 \equiv \inf\{t_\varphi, t_{\varphi^1}, t_{\varphi^2}, \ldots, t_{\varphi^k}, \ldots\} > 0 \text{ та } u_t, u_t^k \in U_\alpha(\varphi) \text{ для всіх } t \in (0, t_2].$$

Для цього ми використовуємо стандартне доведення існування слабких розв'язків за методом нерухомої точки (див., наприклад [220, с.46, теор. 2.1]). Детальніше, нехай U - відкрита підмножина C та $\widetilde{F} : [0, b] \times U \to L^2(\Omega)$ неперервно. Ми використовуємо наступні позначення з [220, с.46]. Сталі $\delta > 0$ та $N > 0$ такі, що $||\widetilde{F}(\psi)|| \le N$ для всіх $\psi \in \overline{B_\delta(\varphi)} \equiv \{\psi \in C : ||\psi - \varphi||_C \le \delta\}$. Оскільки оператор $\widetilde{A}$ додатній, ми використовуємо $||e^{-\widetilde{A}t}|| \le M = 1$ для всіх $t \ge 0$. Момент $t' < r$ обраний так, що якщо $0 \le t \le t'$ то $||\varphi(t+\theta) - \varphi(\theta)|| < \delta/3$ для всіх $\theta \in [-r, 0]$ та $||e^{-\widetilde{A}t}\varphi(0) - \varphi(0)|| < \delta/3$. Позначимо $t_3 \equiv \min\{t'; b; \delta/(3N); \delta\}$ та $Y_1 \equiv \{y \in C([-r, t_3]; L^2(\Omega)) : y(0) = \varphi(0))\}$. Для

$\varphi \in C$ та довільного $y \in Y_1$ ми розглядаємо наступне продовження $\hat{y}$

$$\hat{y}(s) \equiv \left[\begin{array}{ll} \varphi(s), & \text{для } s \in [-r, 0]; \\ y(t), & \text{для } s \in (0, t_3] \end{array} \right. .$$

Нехай $Y_2 \equiv \{y \in Y_1 : \hat{y}_t \in \overline{B_\delta(\varphi)} \text{ для } t \in [0, t_3]\}$. Розглянемо відображення G на Y_2

$$G(y)(t) \equiv e^{-\widetilde{A}t}\varphi(0) + \int_0^t e^{-\widetilde{A}(t-\tau)}\widetilde{F}(\hat{y}_\tau)\, d\tau.$$

Можна перевірити (див. [220, с.46,47, теор. 2.1]), що G відображає Y_2 в себе. Розв'язок є нерухомою точкою $y = G(y)$. Для нашої мети достатньо обрати $\delta \le \alpha$ та $t_2 \le t_3$ для $u_t, u_t^k \in U_\alpha(\varphi)$ для всіх $t \in (0, t_2]$. Тут ми використовуємо φ^k замість φ коли необхідно. Важливим моментом є можливість обрати t' (і таким чином t_3 та t_2) незалежно від $k \in N$. Вибір $t' < r$ так, що якщо $0 \le t \le t'$, то $||\varphi(t+\theta) - \varphi(\theta)|| < \delta/3$ та $||\varphi^k(t+\theta) - \varphi^k(\theta)|| < \delta/3$ для всіх $k \in N$ та всіх $\theta \in [-r, 0]$ можливий завдяки збіжності φ^k (до φ в C). Оскільки елементи збіжної послідовності створюють предкомпактну множину в C, то вони рівностепенево неперервні. Тепер оцінка (3.84) може бути використана для нашого випадка та це завершує доведення властивості 4 та теореми 3.48.

Обговорюючи умови теореми 3.48, ми можемо надати конструктивний *приклад* функції Θ^ℓ, яка задовільняє умові 2). Розглянемо довільну компактну та опуклу множину $K_C \subset C\mathcal{L}_L \subset C$. Наприклад, для довільної компактної та опуклої множини $K \in L^2(\Omega)$, множина $\{\varphi \in C\mathcal{L}_L : \forall\theta \in [-r, 0], \varphi(\theta) \in K\}$ є компактною (за теоремою Арцела-Асколі) та опуклою. По-перше, будуючи Θ^ℓ, ми визначаємо $\Theta^\ell(\varphi) = 0$ для всіх $\varphi \in K_C$. По-друге, ми беремо довільне $p \in (0, r]$ та визначаємо $\Theta^\ell(\varphi) = p$ для всіх $\varphi \in C$ таких, що $\mathrm{dist}_C(\varphi, K_C) \ge 1$. Далі, для всіх $\varphi \in C$ таких, що $\mathrm{dist}_C(\varphi, K_C) \in (0, 1)$ ми визначаємо $\Theta^\ell(\varphi) = p \cdot \mathrm{dist}_C(\varphi, K_C) \in (0, p)$. За побудови, Θ^ℓ задовільняє 2).

3.4.3. Асимптотична поведінка. Далі, ми досліджуємо асимптотичну поведінку динамічної системи (S_t, C), яка збудована в теоремах 3.46 та 3.48. Подібно [159, теорема 2], ми маємо наступний результат.

Теорема 3.51 . *Нехай всі припущення теореми 3.46 або 3.48 виконані та додатково відображення B (див. (3.69)) обмежене. Тоді динамічна система (S_t, C) має компактний глобальний атрактор $\mathcal{A}$, який є компактною множиною в усіх просторах $C_\delta \equiv C([-r,0]; D(A^\delta)), \forall\delta \in [0, \frac{1}{2})$.*

Лема 3.52 . *Нехай всі припущення теореми 3.48 виконані та відображення B обмежене. Тоді існує стала $\widetilde{L} > 0$ така, що глобальний атрактор $\mathcal{A}$ (див. теорему 3.51) є підмножиною $C\mathcal{L}_{\widetilde{L}}$ (порівняйте з умовою 2 теореми 3.48).*

Зауваження 3.53 *Лема 3.52 дає можливість розглядати систему (3.40), (3.41) з загаюванням η, залежним від стану, таким яке не ігнорує ніякі значення свого аргументу φ для всіх елементів $\varphi \in \mathcal{A}$.*

Доведення леми 3.52. Розглянемо довільний розв'язок $u_t \in \mathcal{A}$. Позначимо $f(t) \equiv F(u_t)$ та покажемо, що f є гельдеровою функцією.

Нагадаємо, що для дисипативної динамічної системи [200], (S_t, C) маємо множину $B_1 \subset C$ (куля $B_1 \equiv \{\psi : ||\psi||_C \leq R_0\}$) таку, що для всіх $\varphi \in C$ існує $t_\varphi \geq 0$ таке, що $S_t\varphi \in B_1$ для всіх $t \geq t_\varphi$ (деталі див. в [31, 200]). Нам знадобиться наступна властивість, доведена в [159, оцінка (29) з $\delta = 0$]

$$||u(t_1) - u(t_2)|| \leq L_0|t_1 - t_2|^{1/2} \tag{3.85}$$

для довільного розв'язку, що належить до B_1 (зокрема, для довільного розв'язку, що належить до атрактора $\mathcal{A} \subset B_1$). В (3.85) стала L_0 не залежить від розв'язку u. Можна перевірити, що

$$||f(t_1) - f(t_2)|| \leq L_B \cdot ||u(t_1 - \eta(u_{t_1})) - u(t_2 - \eta(u_{t_2}))||. \tag{3.86}$$

Використовуючи (3.85), липшицевість η (див. 5 в теоремі 3.48), ми отримуємо з (3.86), що

$$||f(t_1) - f(t_2)|| \leq L_B L_0 \cdot |t_1 - \eta(u_{t_1}) - (t_2 - \eta(u_{t_2}))|^{1/2}$$

$$\leq L_B L_0 \cdot (|t_1 - t_2| + |\eta(u_{t_1}) - \eta(u_{t_2})|)^{1/2} \leq L_B L_0 \cdot (|t_1 - t_2| + L_\eta||u_{t_1} - u_{t_2}||)^{1/2}$$

$$\leq L_B L_0 \cdot \Big[|t_1 - t_2| + L_\eta L_0 |t_1 - t_2|^{1/2}\Big]^{1/2} \leq L_B L_0 \cdot \Big[|t_1 - t_2|^{1/2} + (L_\eta L_0)^{1/2}|t_1 - t_2|^{1/4}\Big].$$

Отже
$$||f(t_1) - f(t_2)|| \le L_B L_0 \cdot \left\{1 + (L_\eta L_0)^{1/2}\right\} |t_1 - t_2|^{1/4}. \tag{3.87}$$

Розглянемо довільне $\psi \in \mathcal{A}$. Добре відомо, що атрактор складається з повних траєкторій, тобто $u_s \in \mathcal{A}$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Обираємо довільне $t_0 > r > 0$ та отримуємо $\varphi \in \mathcal{A}$ таке, що $S_{t_0}\varphi = \psi$. Розглянемо формулу варіації сталих для параболічного рівняння (з $\widetilde{A} \equiv A + d \cdot E$, див. (3.45))
$$u(t) = e^{-\widetilde{A}t}\varphi(0) + \int_0^t e^{-\widetilde{A}(t-\tau)} F(u_\tau)\, d\tau. \tag{3.88}$$

Для оцінки першого елемента в попередній формулі (3.88) ми спочатку доведемо, що
$$||e^{-\widetilde{A}t_1}v - e^{-\widetilde{A}t_2}v|| \le \frac{1}{et_1}|t_1 - t_2| \cdot ||v||, \quad 0 < t_1 < t_2. \tag{3.89}$$

Оскільки A та $\widetilde{A}$ щільно визначені самоспряжені додатні лінійні оператори в $L^2(\Omega)$ з компактною резольвентою, ми розглянемо ортонормований базис (в $L^2(\Omega)$) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ який складається з власних функцій оператора $\widetilde{A}$, тобто
$$\widetilde{A}e_k = \lambda_k e_k, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k \to +\infty.$$

Розглянемо для довільного $v \in L^2(\Omega)$ та довільних $t_2 > t_1 > 0$
$$||e^{-\widetilde{A}t_1}v - e^{-\widetilde{A}t_2}v||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda_k t_1} - e^{-\lambda_k t_2}\right)^2 v_k^2, \tag{3.90}$$

де $v_k \equiv \langle v, e_k \rangle_{L^2(\Omega)}$. Легко бачити, що для довільного $\mu > 0$ маємо
$$|e^{-\mu t_1} - e^{-\mu t_2}| \le |t_2 - t_1| \cdot \max_{\tau \in [t_1, t_2]} \mu e^{-\mu\tau} = |t_2 - t_1| \cdot \mu e^{-\mu t_1}$$

та $\sup_{k \in N} |e^{-\lambda_k t_1} - e^{-\lambda_k t_2}| \le |t_2 - t_1| \cdot \sup_{\mu > 0} \mu e^{-\mu t_1} = \frac{1}{et_1}|t_1 - t_2|$. Підставляємо це та $||v||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^2$ в (3.90) та отримуємо (3.89).

Оцінка (3.89) дає рівномірну (відносно $\varphi \in \mathcal{A}$) властивість Липшиця першого елементу $e^{-\widetilde{A}t}\varphi(0)$ в (3.88) для $t > t_0 > 0$. Як обговорювалось (див. текст перед (3.85)), ми маємо $||\varphi(0)|| \le R_0$ для всіх $\varphi \in \mathcal{A}$ завдяки дисипативності динамічної системи $(S_t; C)$ (для деталей див. [159, оцінка (23)]).

Для доведення липшицевості другого члена в (3.88) для $t > t_0$ нам знадобиться

Визначення 3.54 *[103, визн. 1.3.1]. Лінійний оператор A в банаховому просторі X зветься* `секторіальним оператором`*, якщо він замкнений, щільно визначений та такий, що для деякого ψ в $(0, \pi/2)$ та деяких $M \geq 1$ та дійсного a, сектор*

$$S_{a,\psi} = \{\lambda : \psi \leq |arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}$$

знаходится в резольвентній множині A та

$$||(\lambda - A)^{-1}|| \leq M/|\lambda - a| \text{ для всіх } \lambda \in S_{a,\psi}.$$

Нам потрібне наступне

Твердження 3.55 *[103, лема 3.2.1]. Нехай $\widetilde{A}$ секторіальний оператор в банаховому просторі X. Нехай функція $f : (0,T) \to X$ локально гельдерова та $\int_0^\rho ||f(s)||_X \, ds < \infty$ для деякого $\rho > 0$. Позначимо $\Phi(t) \equiv \int_0^t e^{-\widetilde{A}(t-s)} f(s) \, ds$ для $t \in [0,T)$. Тоді функція $\Phi(\cdot)$ неперервна на $[0,T)$, неперервно диференційовна на $(0,T)$, $\Phi(t) \in D(\widetilde{A})$ для $0 < t < T$ та $d\Phi(t)/dt + \widetilde{A}\Phi(t) = f(t)$ для $0 < t < T$ та $\Phi(t) \to 0$ в X при $t \to 0+$.*

Зауваження 3.56 *Наш оператор $\widetilde{A}$ є секторіальним оскільки довільний самоспряжений щільно визначений та обмежений знизу оператор в гільбертовому просторі є секторіальним (див. [103, приклад 2, с.26]).*

Ми використовуємо це твердження 3.55 для $f(t) \equiv F(u_t)$ та використовуємо (3.87). Властивість $\int_0^\rho ||f(s)||_X \, ds < \infty$ для деякого $\rho > 0$ випливає з дисипативності $||u(t)|| \leq R_0$, неперервності $F : C \to L^2(\Omega)$ та неперервності слабкого розв'язку u. Використовуємо неперервну диференційовність Φ на $[t_0 - r, t_0] \subset (0,T)$, яка дає $\max_{t \in [t_0 - r, t_0]} ||\Phi'(t)|| \equiv M_{\Phi;1} < \infty$. В нашому випадку Φ представляє другий елемент в (3.88), та ми довели, що воно є липшицевим зі сталою Липшиця $M_{\Phi;1}$, яка не залежить від u.

Відмітемо, що незалежність $M_{\Phi;1}$ від розв'язків на атракторі випливає з детального доведення твердження 3.55 [103, лема 3.2.1], використовуючи обмеженість $\mathcal{A} \subset C$.

З іншого боку, ми також можемо використати наступне

Твердження 3.57 *[103, лема 3.5.1]. Нехай $\widetilde{A}$ - секторіальний оператор в банаховому просторі X та $f : (0,T) \to X$ задовільняє*

$$||f(t) - f(s)|| \leq K(s)(t-s)^{\gamma} \quad \text{для} \quad 0 < s < t < T < \infty,$$

де $K : (0,T) \to \mathbb{R}$ неперервна з $\int_0^T K(s)\, ds < \infty$.

Тоді для довільного $\beta \in [0,\gamma)$, функція

$$\Phi : (0,T) \ni t \mapsto \int_0^t e^{-\widetilde{A}(t-s)} f(s)\, ds \in X^{\beta} \equiv D(\widetilde{A}^{\beta})$$

неперервно диференційовна з

$$\left\| \frac{d\Phi(t)}{dt} \right\|_{\beta} \leq Mt^{-\beta}||f(t)|| + M \int_0^t (t-s)^{\gamma-\beta-1} K(s)\, ds \tag{3.91}$$

для $0 < t < T$. Тут M - стала, незалежна від $\gamma, \beta, f(\cdot)$.

Для визначення та властивостей просторів X^{β} ми посилаємось на [103]. В нашому випадку ми використовуємо твердження 3.57 з $\gamma = \frac{1}{4}, K(s) \equiv L_B L_0 \cdot \left\{1 + (L_{\eta} L_0)^{1/2}\right\}$ (див. (3.87)) та $\beta = 0$ (тобто $X^{\beta} = X^0 = L^2(\Omega)$). Обмеженість глобального атрактора дає $||f(t)|| \leq C$ з C, незалежною від розв'язку. Таким чином (3.91) дає рівномірну обмеженість $\left\| \frac{d\Phi(t)}{dt} \right\| \leq \widehat{C}$ для $t \in [t_0 - r, t_0] \subset \mathbb{R}_+$ та гарантує незалежність $M_{\Phi;1}$ від розв'язків. Доведення леми 3.52 завершено.

В якості застосування, ми можемо розглянути рівняння Ніколсона (див., наприклад, [197]) із загаюванням, що залежить від стану. Детальніше, рівняння (3.40) де $-A$ оператор Лапласа з умовами Дирихле на межі, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_0}$ обмежена область із гладкою межею, функція f може бути, наприклад, $f(s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} e^{-s^2/4\alpha}$, як в [196] (для нелокальної по просторовим змінним нелінійності) або дельта-функція Дірака для локальної по просторовим змінним нелінійності. Нелінійна функція b задана як $b(w) = p \cdot we^{-w}$. Функція

b обмежена. Таким чином, для довільного неперервного загаювання η, яке задовільняє $(\widehat{H})$, умови теорем 3.46, 3.48 виконані. Таким чином, ми робимо висновок, що початкова задача (3.40), (3.41) коректна в C та динамічна система (S_t, C) має глобальний атрактор (теорема 3.51).

В якості іншого застосування розглядається дифузійна модель кроветворення з ЗЗС:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Delta u(t,x) - du(t,x) + \frac{\beta u(t-\eta(u_t),x)}{1+u^m(t-\eta(u_t),x)}, \quad (t,x) \in \Omega, \beta \in \mathbb{R}, m \geq 1$$

з граничними умовами Неймана $\frac{\partial u(t,x)}{\partial n} = 0, x \in \partial\Omega$. Для випадку сталого загаювання $\eta(u_t) \equiv \tau > 0$ див. [209]. Ця модель при u, незалежному від просторової змінної $x \in \Omega$, була вперше запропонована Л.Гласс та М.Маки (M. Mackey, L.Glass, 1979) [125]. Легко перевірити, що нелінійність B (див. (3.69)), яка задана $B(v) = \beta v\,(1+v^m)^{-1}$, обмежена та глобально липшицева при $m = 2k, k \in \mathbb{N}$.

На останок, відзначимо, що в нашій роботі ми робимо акцент на загаювання та його властивості, а не на оператори, що породжені частинними похідними.

Ми сподіваємось, що запропонований тип загаювань, що залежать від стану, який вивчений в цьому пункті, є важливим та природнім типом для РЧП, що описують прикладні задачі.

3.5. Рівняння у частинних похідних зі змішаним загаюванням, що залежить від стану

В цьому підрозділі ми представимо дослідження параболічних РЧП із ЗЗС загального вигляду. Останнє означає, що загаюваний елемент представлений інтегралом Стілт'єса, який одночасно включає як розподілені так і зосереджені загаювання, залежні від стану.

Більш того, всі умови на загаювання (див. AM1–AM5 нижче) дозволяють динаміку, в якій вздовж одного розв'язку число та величини зосереджених загаювань можуть змінюватись, всі зосереджені та/або розподілені елементи можуть зникати та з'являтись знов.

Ця властивість дозволяє вивчати моделі, в яких деякі підмножини фазового простору зображаються рівняннями з чисто зосередженими ЗЗС, а інші підмножини зображаються рівняннями з чисто розподіленими ЗЗС і, також існують підмножини, які зображаються рівняннями з комбінованими ЗЗС. В таких моделях розв'язок може бути в різних типах підмножин в різні проміжки часу. Ця властивість, зокрема означає, що не тільки величина загаювання є залежна від стану, а і тип самого загаювання є залежним від стану. Ми досліджуємо слабкі розв'язки та їх асимптотичні властивості (включно з існуванням компактного глобального атрактору в зручному фазовому просторі). Результати можуть бути застосовані до рівняння Ніколсона із загаюваннями, що залежать від стану.

3.5.1. Модель зі змішаним загаюванням та її основні властивості. Розглянемо наступне нелокальне рівняння у частинних похідних із загаюваним елементом F, який представлений інтегралом Стілт'єса

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + Au(t,x) + du(t,x) = \big(F(u_t)\big)(x), \tag{3.92}$$

з

$$\big(F(u_t)\big)(x) \equiv \int_{-r}^{0} \left\{ \int_{\Omega} b\left(u(t+\theta,y)\right) f(x-y)dy \right\} \cdot dg(\theta,u_t), \quad x\in\Omega, \tag{3.93}$$

де оператор A задовільняє умові (A1) (див. вступ) $\Omega\subset\mathbb{R}^{n_0}$ гладка обмежена область, $f:\Omega-\Omega\to\mathbb{R}$ - обмежена вимірна функція, $b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ є локально липшицевою функцією $d\in\mathbb{R}, d\geq 0$ та функція $g:[-r,0]\times C([-r,0];L^2(\Omega))\to[0,r]\subset\mathbb{R}_+$ представляє *змішане загаювання, що залежить від стану.*

Ми розглядаємо рівняння (3.92) з традиційними початковими даними

$$u|_{[-r,0]} = \varphi \in C \equiv C([-r,0];L^2(\Omega)). \tag{3.94}$$

Припустимо наступне.

AM1) *Для кожного $\varphi\in C$, функція $g:[-r,0]\times C([-r,0];L^2(\Omega))\to\mathbb{R}$ має обмежену варіацію на $[-r,0]$. Варіація $V_{-r}^{0}g$ функції g є* `рівномірно обмеженою`, *тобто*

$$\exists M_{Vg}>0 : \forall\varphi\in C \quad\Rightarrow\quad V_{-r}^{0}g(\varphi)\leq M_{Vg}. \tag{3.95}$$

Відомо [14, с. 347], що міра Лебега-Стілт'єса (див. g) може бути розкладена на суму трьох мір: дискретну, абсолютно неперервну та сингулярну. Ми будемо позначати відповідне розбиття g наступним чином

$$g(\theta, \varphi) = g_d(\theta, \varphi) + g_{ac}(\theta, \varphi) + g_s(\theta, \varphi), \tag{3.96}$$

де $g_d(\theta, \varphi)$ відповідає дискретній мірі (функція стрибків див. [14, с. 322, 336]), $g_{ac}(\theta, \varphi)$ - абсолютно неперервна та $g_s(\theta, \varphi)$ сингулярна (неперервна) (див. [14, с. 347] для деталей). Ми також будемо позначати неперервну частину $g_c \equiv g_{ac} + g_s$.

Припустимо далі

AM2) *Для кожного* $\theta \in [-r, 0]$, *функції* g_{ac} *та* g_s *є неперервними за своїми другими координатами, тобто* $\forall \theta \in [-r, 0] \quad \forall \varphi^n, \varphi \in C : ||\varphi^n - \varphi||_C \to 0 \, (n \to +\infty) \Rightarrow g_{ac}(\theta, \varphi^n) \to g_{ac}(\theta, \varphi)$ *та* $g_s(\theta, \varphi^n) \to g_s(\theta, \varphi)$.

Зауваження 3.58 *Відзначимо, що дискретне загаювання, що залежить від стану не задовільняє умові* **AM2)**. *Детальніше, розглянемо дискретне ЗЗС* $\eta : C \to [0, r]$, *яке представлено функцією стрибків* $g(\theta, \varphi) = 0$ *для* $\theta \in [-r, -\eta(\varphi)]$ *и* $g(\theta, \varphi) = 1$ *для* $\theta \in (-\eta(\varphi), 0]$ *(один стрибок). Легко бачити, що для довільної послідовності* $\{\varphi^n\} \subset C$ *такої, що* $\eta(\varphi^n) \to \eta(\varphi)$ *та* $\eta(\varphi^n) > \eta(\varphi)$ *маємо для значення* $\theta_0 = -\eta(\varphi)$, *що* $g(\theta_0, \varphi^n) \equiv 1 \neq 0 \equiv g(\theta_0, \varphi)$, *тобто* **AM2)** *не виконується.*

AM3) *Функція стрибків* $g_d(\theta, \varphi)$ *є неперервною за своєю другою координатою в наступному сенсі - розриви функції* $g_d(\theta, \varphi)$ *в точках* $\{\theta_k\} \subset [-r, 0]$ *задовільняють властивості: існують* неперервні *функції* $\eta_k : C \to [0, r]$ *та* $h_k : C \to \mathbb{R}$ *такі, що* $\theta_k = -\eta_k(\varphi)$ *та* $h_k(\varphi)$ *є стрибками* g_d *в точках* $\theta_k = -\eta_k(\varphi)$, *тобто* $h_k(\varphi) \equiv g_d(\theta_k + 0, \varphi) - g_d(\theta_k - 0, \varphi)$.

Враховуючи, що g_d *може, в загальному випадку, мати нескінченну (злічену) кількість точок розриву* $\{\theta_k\}$, *ми припускаємо, що ряд* $\sum_k h_k(\varphi)$ *збігається* абсолютно *та* рівномірно на довільній обмеженій підмножині C.

Зауваження 3.59 *Відзначимо, що* **AM3)** *означає, що для довільного* $\chi \in C$ *маємо* $\Phi_d(\chi) \equiv \int_{-r}^{0} \chi(\theta)\, dg_d(\theta,\varphi) = \sum_k \chi(\theta_k) \cdot h_k(\varphi) = \sum_k \chi(-\eta_k(\varphi)) \cdot h_k(\varphi)$.

Лема 3.60 . *Нехай функція* b *є липшицевою* ($|b(s) - b(t)| \le L_b|s-t|$) *та задовільняє* $|b(s)| \le C_1|s| + C_2, \forall s \in \mathbb{R}$ *з* $C_i \ge 0$; *функція* f *вимірна та обмежена* ($|f(x)| \le M_f$). *За умов* **AM1)– AM3)**, *нелінійне відображення* $F : C \to L^2(\Omega)$, *визначене в (3.93), є неперервним.*

Зауваження 3.61 *Підкреслимо, що нелінійне відображення* F *НЕ є липшицевим в присутності дискретного ЗЗС, тобто при* $g \ne g_c$). *Доведення леми 3.60 засновано на властивостях рівномірно збіжних рядів та першій теоремі Хеллі [14, с. 359, 366].*

Доведення леми 3.60. Спочатку розіб'ємо нашу g на неперервну $g_c \equiv g_{ac} + g_s$ та дискретну g_d частини (див. (3.96)). Це розбиття дає відповідне розбиття $F = F_c + F_d$, де F_c відповідає неперервній частині $g_c \equiv g_{ac} + g_s$.

Спочатку розглянемо *частину* F_c. Запишемо

$$F_c(\varphi) - F_c(\psi) = I_1 + I_2, \tag{3.97}$$

де ми позначили

$$I_1 = I_1(x) \equiv \int_{-r}^{0} \left\{ \int_\Omega [b(\varphi(\theta,y)) - b(\psi(\theta,y))]\, f(x-y)\, dy \right\} dg_c(\theta,\varphi), \tag{3.98}$$

$$I_2 = I_2(x) \equiv \int_{-r}^{0} \left\{ \int_\Omega b(\psi(\theta,y)) f(x-y)\, dy \right\} d\,[g_c(\theta,\varphi) - g_c(\theta,\psi)], \quad x \in \Omega. \tag{3.99}$$

Можна перевірити, що

$$||I_1|| \le L_b M_f |\Omega| \cdot ||\varphi - \psi||_C \cdot V_{-r}^{0} g(\varphi). \tag{3.100}$$

Ця оцінка та **AM1)** показують, що $||I_1|| \to 0$ при $||\varphi - \psi||_C \to 0$. Аби показати, що $||I_2|| \to 0$ при $||\varphi - \psi||_C \to 0$ ми використовуємо припущення **AM1)** та **AM2)** для застосування першої теореми Хеллі [14, с. 359].

$\Diamond$ Тепер доведемо неперервність F_d (*дискретні загаювання*). Зафіксуємо довільне $\varphi \in C$ та розглянемо послідовність $\{\varphi^n\} \subset C$ таку, що $||\varphi^n - \varphi||_C \to 0$ при $n \to \infty$. Наша мета - довести, що $||F_d(\varphi^n) - F_d(\varphi)|| \to 0$.

Використовуючи позначення **AM3)** (див. також зауваження вище), ми записуємо $F_d(\varphi) = F_d(\varphi)(x) = \sum_k \int_\Omega b(\varphi(-\eta_k(\varphi), y))f(x-y)dy \cdot h_k(\varphi)$ та розкладаємо наступним чином $F_d(\varphi^n) - F_d(\varphi) \equiv K_1^n + K_2^n + K_3^n$, де

$$K_1^n = K_1^n(x) \equiv \sum_k \int_\Omega \left[b(\varphi^n(-\eta_k(\varphi^n), y)) - b(\varphi(-\eta_k(\varphi^n), y))\right] f(x-y)dy \cdot h_k(\varphi^n),$$

$$K_2^n = K_2^n(x) \equiv \sum_k \int_\Omega b(\varphi(-\eta_k(\varphi^n), y))f(x-y)dy \cdot \left[h_k(\varphi^n) - h_k(\varphi)\right],$$

$$K_3^n = K_3^n(x) \equiv \sum_k \int_\Omega \left[b(\varphi(-\eta_k(\varphi^n), y)) - b(\varphi(-\eta_k(\varphi), y))\right] f(x-y)dy \cdot h_k(\varphi).$$

Використовуючи властивість Липшиця функції b, можна перевірити, що

$$||K_1^n|| \leq L_b M_f |\Omega|^{3/2} ||\varphi^n - \varphi||_C \cdot \sum_k |h_k(\varphi^n)|. \tag{3.101}$$

Тепер обговоримо K_2^n. Умова росту b дає $|b(\varphi(-\eta_k(\varphi^n), y))f(x-y)| \leq (C_1|\varphi(-\eta_k(\varphi^n), y)| + C_2)M_f$. Таким чином $|\int_\Omega b(\varphi(-\eta_k(\varphi^n), y))f(x-y)dy| \leq C_1 M_f \int_\Omega |\varphi(-\eta_k(\varphi^n), y)|dy + C_2 M_f |\Omega| \leq M_f(C_1|\Omega|^{1/2}||\varphi||_C + C_2|\Omega|)$. Тут ми використовували нерівність Коші-Шварца для $\int_\Omega |\varphi(-\eta_k(\varphi^n), y)|dy \leq ||\varphi(-\eta_k(\varphi^n))|| \cdot |\Omega|^{1/2} \leq ||\varphi||_C \cdot |\Omega|^{1/2}$. Бачимо, що

$$|K_2^n(x)| \leq M_f(C_1|\Omega|^{1/2}||\varphi||_C + C_2|\Omega|) \sum_k |h_k(\varphi^n) - h_k(\varphi)|.$$

Оскільки права частина останньої оцінки не залежить від x, ми отримуємо

$$||K_2^n|| \leq M_f(C_1|\Omega| \cdot ||\varphi||_C + C_2|\Omega|^{3/2}) \sum_k |h_k(\varphi^n) - h_k(\varphi)|. \tag{3.102}$$

Аналогічно ми отримуємо

$$||K_3^n|| \leq M_f L_b |\Omega| \sum_k |h_k(\varphi)| \cdot ||\varphi(-\eta_k(\varphi^n)) - \varphi(-\eta_k(\varphi)||. \tag{3.103}$$

Тепер ми повинні пояснити чому $||K_j^n|| \to 0$ при $n \to \infty$ для $j = 1, 2, 3$. Перша властивість $||K_1^n|| \to 0$ випливає з **AM3)** та (3.101). В (3.102), ряд збігається рівномірно за n оскільки умова $||\varphi^n - \varphi||_C \to 0$ дає, що $\{\varphi, \varphi^n\}$ є обмеженою підмножиною простору C. Умова **AM3)** гарантує, що кожне $|h_k(\varphi^n) - h_k(\varphi)|$ неперервно по φ^n та прямує до нуля при $n \to \infty$. Завдяки рівномірній збіжності, ми отримуємо $||K_2^n|| \to 0$. Для доведення $||K_3^n|| \to 0$ ми також відзначаємо, що кожне $|h_k(\varphi)| \cdot ||\varphi(-\eta_k(\varphi^n)) - \varphi(-\eta_k(\varphi)||$ (див. (3.103)) є неперервним за φ^n та прямує до нуля при $n \to \infty$ завдяки **AM3)** та неперервності $\varphi \in C$. Рівномірна збіжність (по φ^n) ряду в (3.103) випливає з оцінки $|h_k(\varphi)| \cdot ||\varphi(-\eta_k(\varphi^n)) - \varphi(-\eta_k(\varphi)|| \leq |h_k(\varphi)| \cdot 2||\varphi||_C$ (права частина не залежить від n!) та теореми Вейрштраса про мажоровану (рівномірну) збіжность. Ми отримуємо, що $||K_3^n|| \to 0$. Оскільки всі $||K_j^n|| \to 0$ при $n \to \infty$ для $j = 1, 2, 3$, ми довели властивість $||F_d(\varphi^n) - F_d(\varphi)|| \to 0$. Доведення леми 3.60 завершено.

3.5.2. Слабкі розв'язки та їх властивості. Ми використовуємо стандартне визначення слабкого розв'язку (mild solution)

Теорема 3.62 . *В умовах леми 3.60, початкова задача (3.92), (3.94) має слабкий розв'язок для всіх $\varphi \in C$.*

Існування слабкого розв'язку є наслідком неперервності $F : C \to L^2(\Omega)$, яке гарантовано лемою 3.60, що дає можливість використати стандартний метод, заснований на теоремі Шаудера про нерухому точку (див., наприклад, [220, теорема 2.1, с.46]). Розв'язок є глобальним (визначений для всіх $t \geq -r$), див., наприклад, [220, теорема 2.3, с. 49].

Для отримання єдиності нам знадобляться наступні додаткові припущення.

AM4) *Повна варіація функції $g_c \equiv g_{ac} + g_s$ задовільняє умові*

$$V_{-r}^0[g_c(\cdot, \varphi) - g_c(\cdot, \psi)] \leq L_{Vg_c}||\varphi - \psi||_C. \tag{3.104}$$

AM5) *Дискретна породжуюча функція g_d задовільняє* `рівномірній ігноруючій умові`, *тобто*

- $\exists \eta_{ign} > 0$ *таке, що* `всі` η_k *та* h_k `"ігнорують"` *значення* $\varphi(\theta)$ *для* $\theta \in$

$(-\eta_{ign}, 0]$, *тобто*

$$\exists\, \eta_{ign} > 0 : \forall \varphi^1, \varphi^2 \in C : \forall \theta \in [-r, -\eta_{ign}], \Rightarrow \varphi^1(\theta) = \varphi^2(\theta) \quad \Longrightarrow$$

$$\eta_k(\varphi^1) = \eta_k(\varphi^2),\ h_k(\varphi^1) = h_k\varphi^2).$$

Зауваження 3.63 *Умова* **AM5)** *є природнім узагальненням (на випадок багатьох дискретних загаювань, що залежать від стану) ігноруючої умови, яка була введена в роботі [159] (див. підрозділ 3.3.1).*

Теорема 3.64 . *Нехай функція b є липшицевою ($|b(s) - b(t)| \leq L_b|s - t|$), задовільняє $|b(s)| \leq M_b$, $\forall s \in \mathbb{R}$ та f є вимірною та обмеженою ($|f(x)| \leq M_f$). При виконанні умов* **AM1)– AM5)***, початкова задача (3.92), (3.94) має єдиний слабкий розв'язок для всіх $\varphi \in C$. Розв'язок неперервно залежить від початкової функції, тобто $||\varphi^n - \varphi||_C \to 0$ дає $||u_t^n - u_t||_C \to 0$ для всіх $t \geq 0$.*

Доведення теореми 3.64. Доведення засновано на лемі Гронуола, теоремі про середнє значення для інтеграла Стілт'єса, властивостях g_d (ігноруюча умова) та лемі Лебега-Фату [8, с.32].

Для простоти, ми спочатку розглянемо частковий випадок генеруючої функції $g = g_c \equiv g_{ac} + g_s$, тобто випадок відсутності дискретних загаювань.

Можна перевірити (див. (3.99)), що

$$||I_2|| \leq M_b M_f |\Omega|^{\frac{3}{2}} \cdot V_{-r}^0[g_c(\varphi) - g_c(\psi)]. \tag{3.105}$$

Таким чином (3.95), (3.97), (3.100), (3.105) та **AM4)** (див. (3.104)) дають

$$||F_c(\varphi) - F_c(\psi)|| \leq L_{F_c}||\varphi - \psi||_C \quad \text{з } L_{F_c} \equiv M_f|\Omega| \left(L_b M_{V g_c} + M_b |\Omega|^{\frac{1}{2}} L_{V g_c} \right). \tag{3.106}$$

Таким чином

$$||u_t^1 - u_t^2||_C \leq ||\varphi - \psi||_C + L_{F_c} \cdot \int_0^t ||u_s^1 - u_s^2||_C\, ds.$$

Остання оцінка (по лемі Гронуола) дає $||u_t^1 - u_t^2||_C \leq e^{L_{F_c} t} \cdot ||\varphi - \psi||_C$. Таким чином

$$||u_t^1 - u_t^2||_C \leq C_T \cdot ||\varphi - \psi||_C, \quad \forall t \in [0, T], \qquad \text{з } C_T \equiv e^{L_{F_c} T}. \tag{3.107}$$

Ми показали єдиність слабкого розв'язку та неперервну залежність від початкових даних у випадку $g = g_c$.

Другий частковий випадок $g = g_d$ (тільки одне дискретне загаювання) був детально розглянутий в [159]. Там було доведено [159], що умова **AM5)** дає бажаний результат.

Тепер розглянемо загальний випадок (присутність розподіленого та дискретного загаювань, включно з випадком багатьох дискретних загаювань). Розглянемо послідовність $\{\varphi^n\} \subset C$ таку, що $||\varphi^n - \varphi||_C \to 0$ та позначимо відповідні слабкі розв'язки $u^n(t) = u^n(t;\varphi^n)$ та $u(t) = u(t;\varphi)$. Використовуючи розбиття $F = F_d + F_c$, ми маємо, за визначенням,

$$u^n(t) - u(t) = e^{-At}(\varphi^n(0) - \varphi(0)) + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \{F_d(u^n_\tau) - F_d(u_\tau)\}\, d\tau$$
$$+ \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \{F_c(u^n_\tau) - F_c(u_\tau)\}\, d\tau.$$

Використовуючи (3.106), отримуємо

$$||u^n(t) - u(t)|| = ||\varphi^n(0) - \varphi(0)| + \int_0^t ||F_d(u^n_\tau) - F_d(u_\tau)||\, d\tau + L_{F_c} \int_0^t ||u^n_\tau - u_\tau||_C\, d\tau.$$

Таким чином

$$||u^n_t - u_t||_C = ||\varphi^n - \varphi||_C + \int_0^t ||F_d(u^n_\tau) - F_d(u_\tau)||\, d\tau + L_{F_c} \int_0^t ||u^n_\tau - u_\tau||_C\, d\tau$$
$$= G^n(t) + L_{F_c} \int_0^t ||u^n_\tau - u_\tau||_C\, d\tau, \tag{3.108}$$

де $G^n(t) \equiv ||\varphi^n - \varphi||_C + \int_0^t ||F_d(u^n_\tau) - F_d(u_\tau)||\, d\tau$ є неспадаючою функцією.

Домножимо останню оцінку на $e^{-L_{F_c} t}$ та отримаємо

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-L_{F_c} t} \int_0^t ||u^n_\tau - u_\tau||_C\, d\tau\right) \le e^{-L_{F_c} t} G^n(t),$$

що, після інтегрування від 0 до t, дає, що ($G^n(t)$ є неспадаючою функцією) $e^{-L_{F_c} t} \int_0^t ||u^n_\tau - u_\tau||_C\, d\tau \le \int_0^t e^{-L_{F_c}\tau} G^n(\tau)\, d\tau \le G^n(t) \int_0^t e^{-L_{F_c}\tau}\, d\tau = G^n(t)\left(1 - e^{-L_{F_c} t}\right) L_{F_c}^{-1}$. Маємо $L_{F_c} \int_0^t ||u^n_\tau - u_\tau||_C\, d\tau \le G^n(t)\left(e^{L_{F_c} t} - 1\right)$. Підставляємо останню оцінку в (3.108) та отримуємо

$$||u^n_t - u_t||_C \le G^n(t) \cdot e^{L_{F_c} t}. \tag{3.109}$$

Тепер наша задача - показати, що для кожного фіксованого $t \in [0, \eta_{ign})$ маємо $G^n(t) \to 0$ при $n \to \infty$ (тобто $||\varphi^n - \varphi||_C \to 0$). Розглянемо функції продовження

$$\overline{\varphi}(s) \equiv \left[\begin{array}{ll} \varphi(s), & s \in [-r, 0]; \\ \varphi(0), & s \in (0, \eta_{ign}) \end{array} \right. \quad \text{та} \quad \overline{\varphi}^n(s) \equiv \left[\begin{array}{ll} \varphi^n(s), & s \in [-r, 0]; \\ \varphi^n(0), & s \in (0, \eta_{ign}) \end{array} \right. .$$

Як у [159], *ігноруюча умова* **AM5)** дає, що для всіх $t \in [0, \eta_{ign})$ ми маємо $F_d(u_t) = F_d(\overline{\varphi}_t)$ та $F_d(u_t^n) = F_d(\overline{\varphi}_t^n)$. Легко бачити, що збіжність $||\varphi^n - \varphi||_C \to 0$ дає $||\overline{\varphi}_\tau^n - \overline{\varphi}_\tau||_C \to 0$ для всіх $\tau \in [0, \eta_{ign})$. Таким чином неперервність F_d дає $||F_d(\overline{\varphi}_\tau^n) - F_d(\overline{\varphi}_\tau)|| \to 0$ для всіх $\tau \in [0, \eta_{ign})$. Це дозволяє використати лему Лебега-Фату (див. [8, с.32]) для скалярної функції $||F_d(\overline{\varphi}_\tau^n) - F_d(\overline{\varphi}_\tau)||$ та прийти до висновку, що $G^n(t) \to 0$ при $n \to \infty$ (для довільного фіксованого $t \in [0, \eta_{ign})$). Таким чином, ми показали неперервність слабкого розв'язку за початковою функцією для всіх $t \in [0, \eta_{ign})$. Зокрема, це дає єдиність розв'язків. Для великих значень часу ми використовуємо композицію малих кроків за часом (для кроків, які не перебільшують, наприклад, $\eta_{ign}/2$. Детальніше, ми позначаємо $q \equiv \left[\frac{2t}{\eta_{ign}} \right]$ (тут $[\cdot]$ - ціла частина дійсного числа) та записуємо $u(t; \varphi) = u(\underbrace{\eta_{ign}/2; u(\eta_{ign}/2; \ldots}_{q \text{ разів}}; u(t - q \cdot \eta_{ign}/2; \varphi)))$. Композиція неперервних відображень є неперервною. Доведення теореми 3.64 завершено.

Стандартним чином ми визначаємо *еволюційну півгрупу* $S_t : C \to C$ за правилом $S_t\varphi \equiv u_t$, де u є єдиний слабкий розв'язок задачі (3.92), (3.94).

Зауваження 3.65 *Неперервність S_t за часом випливає з визначення слабкого розв'язку (розв'язок $u \in C([-r, T]; L^2(\Omega))$). Це і неперервність S_t відносно початкової функції (див. теорему 3.64), зокрема означає, що за умов* **AM1)-AM5)***, початкова задача (3.92), (3.94) є* `коректно поставленою` *у просторі C у сенсі Ж.Адамара [92, 93]. Зокрема це означає, що пара (S_t, C) породжує динамічну систему.*

Слідуючи плану доведення [159, теореми 2], ми показуємо, що динамічна система (S_t, C), порождена задачею (3.92), (3.94), має компактний глобальний атрактор (деталі про атрактори можна знайти, наприклад у [2, 200, 31, 59]).

Точніше, ми маємо наступний результат.

Теорема 3.66 . *Нехай функція* $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *є липшицевою та обмеженою та* $f : \Omega - \Omega \to \mathbb{R}$ *є обмеженою та вимірною. Припустимо умови* **AM1)–AM5)** *є виконаними. Тоді динамічна система* (S_t, C) *має компактний глобальний атрактор, який є компактною множиною в кожному просторі* $C_\delta \equiv C([-r, 0]; D(A^\delta)), \forall \delta \in [0, \frac{1}{2})$.

Доведення засновано на класичній теоремі про існування компактного глобального атрактора у дисипативної та асимптотично компактної півгрупи [2, 200, 31, 59] та техніки, що розроблена в [159, теорема 2].

В якості застосування ми можемо розглянути рівняння Ніколсона (див., наприклад, [197]) з загаюванням, що залежить від стану, тобто рівняння (3.92), де $-A$ оператор Лапласа з умовами Дирихле на межі, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_0}$ обмежена область з гладкою межею, нелінійна функція (функція народжуваності) b має вигляд $b(w) = p \cdot we^{-w}$. Функція b обмежена, таким чином при умовах AM1-AM5, ми отримуємо, що задача (3.92) та (3.94) коректно поставлена в просторі C та динамічна система (S_t, C) має компактний глобальний атрактор (теорема 3.66).

3.6. Неавтономні рівняння у частинних похідних із загаюванням, що залежить від стану

В цьому підрозділі ми розглянемо більш загальну постановку задачі, а саме, неавтономні рівняння. Нас будуть цікавити, в першу чергу локальні властивості розв'язків (коректна розв'язність), а також питання інваріантності множин в просторі початкових функцій. Дані результати представлені в [163]. Основні припущення на загаюваний елемент є узагальненнями на неавтономний випадок умов, що обговорювалися у попередньому розділі.

Розглядаємо неавтономне параболічне РЧП із загаюванням. На відміну від попередніх досліджень, ми розглянемо модель, в якій одночасно присутні два різних типа загаювань (зосереджене та розподілене), які описуються за допомогою інтеграла Стілт'єса. Загаювання обох типів залежать від стану.

Перша мета цього підрозділу - вивчення базових властивостей розв'язків - існування та єдиність, а також узагальнення фундаментального принципа інваріантності на випадок рівнянь у частинних похідних із загаюваннями, залежними від стану. Другою метою роботи є притягування уваги дослідників (які працюють, наприклад, в області біології та фізики) до обговорюваному широкому класу рівнянь із загаюванням та акцентування уваги на важливій "внутрішній властивості" на загаювання (див. (AJ5) нижче). Ця властивість є узагальненням основної "ігноруючої умови" та може бути корисною для широкого спектру задач із загаюванням (як ЗДР так і РЧП).

Існування та єдиність для часткового автономного випадка були отримані в [161]. Для огляду існуючої літератури по принципу інваріантності (РЧП) див., наприклад, [186]. Ми робимо акцент на загаюванних елементах, а не на РЧП. Наскільки нам відомо, принцип інваріантності для рівнянь у частинних похідних із загаюваннями, що залежать від стану, раніше не вивчався.

3.6.1. Постановка задачі та приклади. Позначимо X - простір Банаха з нормою $||\cdot||$, та $r > 0$ стала. Подібно попереднім позначенням, $C \equiv C([-r,0];X)$ - простір неперервних функцій $\varphi : [-r,0] \to X$ з нормою супремума $||\cdot||_C$. Як зазвичай, див. [30, 95], для довільних $a \le b, t \in [a,b]$ та неперервній функції $u : [a-r,b] \to X$, ми позначаємо u_t елемент простору C, який визначений за формулою $u_t = u_t(\theta) \equiv u(t+\theta)$ для $\theta \in [-r,0]$. Розглянемо генератор $-A$ (компактної) C_0 півгрупи $\{e^{-At}\}_{t\ge 0} \equiv \{\widehat{T}(t)\}_{t\ge 0}$ на X яка задовільняє $||\widehat{T}(t)|| \le e^{\omega t}$ для всіх $t \ge 0$, де $\omega \in \mathbb{R}$ - стала.

Ми досліджуємо наступне неавтономне параболічне рівняння у частинних похідних із загаюваннями, залежними від стану (ЗЗС)

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = B\bigl(t, u_t\bigr), \quad t \ge a \tag{3.110}$$

із початковими умовами

$$u_a = u|_{[a-r,a]} = \varphi \in C \equiv C([-r,0];X). \tag{3.111}$$

Загаюваний елемент $B : \mathbb{R} \times C \to X$ має вигляд

$$B\bigl(t,\psi\bigr) \equiv G\bigl(t, \psi(0), F(t,\psi)\bigr), \tag{3.112}$$

де $G : \mathbb{R} \times X \times X \to X$ - неперервне відображення та загаюваний функціонал $F : \mathbb{R} \times C \to X$ представлений інтегралом Стілт'єса (одночасно включає в себе дискретні та розподілені ЗЗС)

$$F(t, \psi) \equiv \int_{-r}^{0} p\left(t, \psi(\theta)\right) \cdot dg(\theta, t, \psi), \quad p : \mathbb{R} \times X \to X. \tag{3.113}$$

Умови на g сформульовані нижче (див. (AJ1)-(AJ5)).

Класс рівнянь, що описані (3.110), (3.112), (3.113) є дуже широким та включає багато рівнянь, які інтенсивно вивчалися впродовж останніх десятиліть (без врахування залежності загаювань від стану). Нижче ми відмічаємо тільки два приклади та відсилаємо читача до джерел [220, 155] для подальших посилань та обговорень.

Приклад 1. Нехай $X = L^2(\Omega)$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ - гладка обмежена область. Оператор A, як і раніше, задовільняє умові **(A1)** з областю $D(A) \subset L^2(\Omega)$ якщо ми позначимо $G(t, u, v) = v - du$ ($d \geq 0$ стала), то $B\big(t, u_t\big) = F(t, u_t) - du$ та рівняння (3.110) приймає вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + Au(t, x) + du(t, x) = \big(F(u_t)\big)(x), \tag{3.114}$$

з, наприклад,

$$\big(F(\psi)\big)(x) \equiv \int_{-r}^{0} \left\{ \int_{\Omega} p\left(\psi(\theta, y)\right) f(x - y) dy \right\} \cdot dg(\theta, \psi), \quad x \in \Omega, \tag{3.115}$$

де $f : \Omega - \Omega \to \mathbb{R}$ - обмежена вимірна функція, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Це нелокальне *автономне* рівняння досліджувалося в [161]. Легко бачити, що інтегральний загаюваний елемент, який представлений (3.115) включає випадки:

a) чисто зосереджене ЗЗС: $\big(F(\psi)\big)(x) = \sum_k \int_\Omega p\left(\psi(-\eta_k(\psi), y)\right) f(x - y)\, dy$;

b) чисто розподілене ЗЗС: $\big(F(\psi)\big)(x) = \int_{-r}^{0} \left\{ \int_\Omega p\left(\psi(\theta, y)\right) f(x - y) dy \right\} \xi(\theta, \psi) d\theta$.

Ці випадки вивчалися в роботах автора [155, 156, 159]. Також можна розглядати *локальні* загаювання (зосереджене та /або розподілене ЗЗС)

$$\big(F(\psi)\big)(x) \equiv \int_{-r}^{0} p\left(\psi(\theta, x)\right) \cdot dg(\theta, \psi), \quad x \in \Omega. \tag{3.116}$$

Вище згадані типи рівнянь включають рівняння Ніколсона з дифузією (див., наприклад, [197]) з ЗЗС тобто, рівняння (3.114) з $-A$ - оператор Лапласа з граничними умовами Дирихле або Неймана, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ - обмежена область з гладкою межею, нелінійна функція (функція народжуваності) p має вигляд $p(w) = p_1 \cdot we^{-w}$, $p_1 \in \mathbb{R}$.

Приклад 2 (`система реакції-дифузії з загаюванням`). Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ - обмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$, $\triangle$ оператор Лапласа на Ω. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \frac{\partial u^i}{\partial t}(x,t) = d_i \triangle u^i(x,t) + G^i(t, F^i(t, u_t^1(x,\cdot), \ldots, u_t^m(x,\cdot))), & t > a,\ x \in \Omega, \\ \alpha^i(x) u^i(x,t) + \partial_n u^i(x,t) = 0, & t > a,\ x \in \partial\Omega, \\ u^i(x, a+\theta) = \varphi^i(x,\theta), & \theta \in [-r, 0],\ x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.117}$$

де $i = 1, \ldots, m$. В (3.117), $d_i \geq 0$ та $d_i = 0$ ми не накладаємо граничні умови на u^i, $\alpha^i \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega), \alpha \in (0,1)$. Функції $G^i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є локально липшицеві та загаювані функціонали $F^i : \mathbb{R} \times C([-r,0]; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ представлені інтегралами Стілт'єса (одночасно включають зосереджені та розподілені ЗЗС) подібно (3.113). Система (3.117) може бути представлена у вигляді (3.110)-(3.112) наступним чином. Позначимо $X \equiv C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ та (див., наприклад у, [135, p.5], [134] та посилання в цих работах). Нехай A_i^0 оператор, визначений $A_i^0 y_i = d_i \Delta y_i$ (або $A_i^0 y_i = 0$ у випадку $d_i = 0$) на області визначення $D(A_i^0) \equiv \{y_i \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega);\ \alpha^i y^i + \partial_n y^i = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$ (або $D(A_i^0) \equiv C(\bar{\Omega})$ у випадку $d_i = 0$)). Оператор A_i є замкненням оператора A_i^0 на $C(\bar{\Omega})$ та $A \equiv (A_i)_{i=1}^m$. Позначимо $\{T_i(t)\}_{t \geq 0}$ (сильно-неперервну) C_0-півгрупу на $C(\bar{\Omega})$, породжену оператором A_i та $\widehat{T} \equiv (T_i)_{i=1}^m$. Відомо [134], що $\widehat{T}$ є C_0-півгрупою на $X = C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$, яка є аналітичною (та компактною якщо всі $d_i > 0$) та A є її генератором. Початкова функція $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$ в (3.117) належить $C([-r,0]; X)$. Система (3.117) вивчалася (без ЗЗС), наприклад, в [134].

В якості ще одного застосування, ми можемо розглянути наступну модель

Лотки-Вольтерра (з дифузією) для n видів

$$\begin{cases} \frac{\partial u^i}{\partial t}(x,t) = d_i \triangle u^i(x,t) + b_i u^i(t,x)\left[1 - \sum_{j=1}^n c_{ij}\int_{-r}^0 u^j(x,t+\theta))\, dg_{ij}(\theta,u_t)\right], \\ \partial_n u^i(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u^i(x,a+\theta) = \varphi^i(x,\theta), \quad \theta \in [-r,0],\, x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.118}$$

де b_i, c_{ij} - додатні сталі та g_{ij} є неспадаючими за своєю першою координатою функціями та задовільняють $g_{ij}(0,\cdot) - g_{ij}(-r,\cdot) = 1$. Багато цікавих властивостей цієї системи (автономної та без ЗЗС) обговорювались в роботі [135] (див. також посилання цієї роботи).

Підхід, розвинутий в нашій роботі може бути застосований до більш загальних класів рівнянь вигляду (3.110) з нелінійностю B, наприклад у, такої формі (порівняйте (3.112)) $B\big(t,u_t\big) \equiv G\big(t, F^1(t,u_t),\ldots,F^k(t,u_t)\big)$, з F^i як у (3.113). Ми формулюємо наші результати для B, заданої в (3.112), для простоти викладення та виходячи з мотивації (3.118).

3.6.2. Локальне існування та єдиність розв'язків. Наступні припущення на загаювання, яке залежить від *часу* та *стану* є узагальненнями на неавтономний випадок умов, що запропоновані в попередньому пункті (див. [161]).

(AJ1) *Для кожного фіксованого* $(t,\varphi) \in \mathbb{R}\times C$, *функція* $[-r,0] \ni g(\cdot,t,\varphi) \to \mathbb{R}$ *має обмежену варіацію на* $[-r,0]$. *Варіація* $V_{-r}^0 g$ *функції* g *є* `рівномірно обмеженою`, *тобто*

$$\exists M_{Vg} > 0 \,:\, \forall (t,\varphi) \in \mathbb{R}\times C \quad \Rightarrow \quad V_{-r}^0 g(\cdot,t,\varphi) \le M_{Vg}.$$

Відомо, що довільна міра Лебега-Стілт'єса (яка пов'язана з функцією g) може бути представлена як сума мір: зосередженої (дискретної), абсолютно неперервної та сингулярної. Ми позначаємо відповідне розбиття функції g наступним чином

$$g(\theta,t,\varphi) = g_d(\theta,t,\varphi) + g_{ac}(\theta,t,\varphi) + g_s(\theta,t,\varphi) = g_d(\theta,t,\varphi) + g_c(\theta,t,\varphi), \tag{3.119}$$

де $g_d(\theta,t,\varphi)$ відповідає дискретній мірі (функція стрибків), $g_{ac}(\theta,t,\varphi)$ абсолютно неперервна та $g_s(\theta,t,\varphi)$ є сингулярною неперервною функцією, кожна як функція своєї першої координати (див. [14] для деталей). Також ми позначаємо неперервну частину $g_c \equiv g_{ac} + g_s$.

Нашими наступними припущеннями є

(AJ2) *Для кожного* $\theta \in [-r, 0]$, *функція* g_c *неперервна за своїми другій і третій координатами, тобто* $\forall \theta \in [-r, 0], \quad \forall (t, \varphi), (t^n, \varphi^n) \in \mathbb{R} \times C$: $(t^n, \varphi^n) \to (t, \varphi)$ *у* $\mathbb{R} \times C$ $(n \to +\infty) \Rightarrow g_c(\theta, t^n, \varphi^n) \to g_c(\theta, t, \varphi)$.

(AJ3) *Функція* $g_d(\theta, t, \varphi)$ *неперервна відносно* (t, φ) *в тому сенсі, що розриви функції* $g_d(\theta, t, \varphi)$ *в точках* $\{\theta_k\} \subset [-r, 0]$ *задовільняють умові: існують* неперервні *функції* $\eta_k : \mathbb{R} \times C \to [0, r]$ *та* $h_k : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}$ *такі, що* $\theta_k = -\eta_k(t, \varphi)$ *та* $h_k(t, \varphi)$ *є стрибком функції* g_d *в точці* $\theta_k = -\eta_k(t, \varphi)$, *тобто* $h_k(t, \varphi) \equiv g_d(\theta_k + 0, t, \varphi) - g_d(\theta_k - 0, t, \varphi)$.

Враховуючи, що g_d *може, в загальному випадку, мати нескінченне (злічене) число точок розриву* $\{\theta_k\}$, *ми припускаємо, що ряд* $\sum_k h_k(t, \varphi)$ *збігається* абсолютно *та* рівномірно на довільній обмеженій множині в $\mathbb{R} \times C$.

Використовуючи позначення (3.119), ми отримуємо, що **(AJ3)** означає, що для довільного $(t, \chi) \in \mathbb{R} \times C$ маємо $\Phi_d(t, \chi) \equiv \int_{-r}^{0} \chi(\theta)\, dg_d(\theta, t, \varphi) =$ $\sum_k \chi(\theta_k) \cdot h_k(t, \varphi) = \sum_k \chi(-\eta_k(t, \varphi)) \cdot h_k(t, \varphi)$. Тут всі η_k та h_k є неперервними функціями.

Першим результатом є наступна (порівн. [161, лема 1])

Теорема 3.67 . *Припустимо, що* $G : \mathbb{R} \times X \times X \to X$ *неперервне відображення* $p : \mathbb{R} \times X \to X$ *(див. (3.113)) є липшицевим* $(||p(t, u) - p(s, v)|| \le L_p(|s - t| + ||u - v||)$, *та задовільняє* $||p(s, u)|| \le C_1||u|| + C_2, \forall (s, u) \in \mathbb{R} \times X$ *з деякими* $C_i \ge 0$. *В умовах* **(AJ1)**– **(AJ3)**, *нелінійне відображення* $B : \mathbb{R} \times C \to X$, *визначене в (3.112), є неперервним.*

Зауваження 3.68 *Важливо підкреслити, що нелінійне відображення* B *не є липшицевим в присутності зосереджених ЗЗС.*

Доведення теореми 3.67. Оскільки композиція неперервних відображень є неперервним, достатньо (див. (3.112)) довести неперервність відображення F, визначеного в (3.113).

Спочатку ми розділяємо g на неперервну та розривну частини $g_c \equiv g_{ac} + g_s$ та g_d, відповідно (див. (3.119)). Це розділення дає відповідне розділення $F = F_c + F_d$, де F_c відповідає неперервній частині $g_c \equiv g_{ac} + g_s$.

Випадок 1. Спочатку розглянемо *частину* F_c. Запишемо

$$F_c(t^1, \varphi) - F_c(t^2, \psi) = I_1 + I_2, \tag{3.120}$$

де ми позначаємо

$$I_1 = I_1(\varphi, \psi) \equiv \int_{-r}^{0} \left[p(t^1, \varphi(\theta)) - p(t^2, \psi(\theta))\right] \, dg_c(\theta, t^1, \varphi), \tag{3.121}$$

$$I_2 = I_2(\varphi, \psi) \equiv \int_{-r}^{0} p(t^2, \psi(\theta)) \, d\left[g_c(\theta, t^1, \varphi) - g_c(\theta, t^2, \psi)\right]. \tag{3.122}$$

Використовуючи властивість Липшиця функції p та (AJ1), можна перевірити, що

$$||I_1|| \leq L_p(|t^1 - t^2| + ||\varphi - \psi||_C) \cdot M_{Vg}. \tag{3.123}$$

це показує , що $||I_1|| \to 0$ при $|t^1 - t^2| + ||\varphi - \psi||_C \to 0$.

Для того, аби показати, що $||I_2|| \to 0$ (при $t^1 \to t^2$ та $\varphi \to \psi$ в просторі C) ми використовуємо припущення (AJ1) та (AJ2) та застосовуємо першу теорему Хеллі [14, стр. 359].

Випадок 2. Тепер доведемо неперервність F_d (*зосереджені загаювання*). Зафіксуємо довільні $\varphi \in C, t \in \mathbb{R}$ та розглянемо довільні послідовності $\{\varphi^n\} \subset C$ та $\{t^n\} \subset \mathbb{R}$ такі, що $||\varphi^n - \varphi||_C \to 0$ и $t^n \to t$ при $n \to \infty$. Нашою метою є доведення того, що $||F_d(t^n, \varphi^n) - F_d(t, \varphi)|| \to 0$.

Слідуючи позначенням (AJ3), маємо

$$F_d(t, \varphi) = \sum_k p(t, \varphi(-\eta_k(t, \varphi))) \cdot h_k(t, \varphi)$$

та нагадуємо, що це може бути ряд або скінченна сума. Розділяємо наступним чином

$$F_d(t^n, \varphi^n) - F_d(t, \varphi) \equiv K_1^n + K_2^n + K_3^n \in X, \tag{3.124}$$

де

$$K_1^n \equiv \sum_k \left\{p(t^n, \varphi^n(-\eta_k(t^n, \varphi^n))) - p(t, \varphi(-\eta_k(t^n, \varphi^n)))\right\} \cdot h_k(t^n, \varphi^n),$$

$$K_2^n \equiv \sum_k p(t, \varphi(-\eta_k(t^n, \varphi^n))) \cdot [h_k(t^n, \varphi^n) - h_k(t, \varphi)],$$

$$K_3^n \equiv \sum_k \{p(t, \varphi(-\eta_k(t^n, \varphi^n))) - p(t, \varphi(-\eta_k(t, \varphi)))\} \cdot h_k(t, \varphi).$$

Використовуючи властивість Липшиця функції p, можна перевірити, що

$$||K_1^n|| \leq L_p(|t^n - t| + ||\varphi^n - \varphi||_C) \cdot \sum_k |h_k(t^n, \varphi^n)|. \tag{3.125}$$

Тепер обговоримо K_2^n. Умова на зріст функції p дає $||p(t, \varphi(-\eta_k(t^n, \varphi^n)))|| \leq (C_1||\varphi||_C + C_2)$. Таким чином

$$||K_2^n|| \leq (C_1||\varphi||_C + C_2) \cdot \sum_k |h_k(t^n, \varphi^n) - h_k(t, \varphi)|. \tag{3.126}$$

Аналогічно отримуємо

$$||K_3^n|| \leq L_p \sum_k |h_k(t, \varphi)| \cdot ||\varphi(-\eta_k(t^n, \varphi^n)) - \varphi(-\eta_k(t, \varphi)||. \tag{3.127}$$

Тепер покажемо, що $||K_j^n|| \to 0$ при $n \to \infty$ для $j = 1, 2, 3$. Перша властивість $||K_1^n|| \to 0$ випливає з (AJ3) та (3.125). В (3.126), ряд збігається рівномірно відносно n оскільки умова $||\varphi^n - \varphi||_C + |t^n - t| \to 0$ дає, що $\{(t, \varphi), (t^n, \varphi^n)\}$ є обмеженою множиною в $\mathbb{R} \times C$. Умова (AJ3) гарантує, що кожне $|h_k(t^n, \varphi^n) - h_k(t, \varphi)|$ є неперервним відносно (t^n, φ^n) та прямує до нуля при $n \to \infty$. Завдяки рівномірній збіжності ряду в (3.126) (див. (AJ3)), ми отримуємо $||K_2^n|| \to 0$. Для доведення $||K_3^n|| \to 0$ ми відзначаємо, що кожне $|h_k(t, \varphi)| \cdot ||\varphi(-\eta_k(t^n, \varphi^n)) - \varphi(-\eta_k(t, \varphi)||$ (див. (3.127)) є неперервним за (t^n, φ^n) та прямує до нуля при $n \to \infty$ завдяки (AJ3) та сильній неперервності функції $\varphi \in C$. Рівномірна збіжність (відносно (t^n, φ^n)) ряда в (3.127) випливає з оцінки $|h_k(t, \varphi)| \cdot ||\varphi(-\eta_k(t^n, \varphi^n)) - \varphi(-\eta_k(t, \varphi)|| \leq |h_k(t, \varphi)| \cdot 2||\varphi||_C$ (права частина не залежить від n !) та теореми Вейерштрасса про (рівномірну) мажоровану збіжності. Ми заключаємо, що $||K_3^n|| \to 0$. Оскільки всі $||K_j^n|| \to 0$ при $n \to \infty$ для $j = 1, 2, 3$ ми довели властивість $||F_d(t^n, \varphi^n) - F_d(t, \varphi)|| \to 0$. Таким чином обидва відображення F_c та F_d є неперервними. Доведення теореми 3.67 завершено.

Ми використовуємо стандартне

Визначення 3.69 *Функція $u \in C([a-r,T];X)$ зветься слабким розв'язком на інтервалі $[a-r,T]$ початкової задачі (3.110), (3.111) якщо вона задовільняє (3.111) та $u(t) = e^{-A(t-a)}\varphi(0) + \int_a^t e^{-A(t-s)}B(s,u_s)\,ds, \quad t \in [a,T]$.*

Теорема 3.70 . *В припущеннях теореми 3.67, початкова задача (3.110), (3.111) має слабкий розв'язок для довільного $\varphi \in C$.*

Існування слабкого розв'язку є наслідком неперервності відображення $B : \mathbb{R} \times C \to X$, доведеній в попередній теоремі. Це дає можливість використати стандартний метод, заснований на теоремі Шаудера про нерухому точку (див. [83, теорема 3.1, с.4]).

Теорема 3.71 . *Нехай виконані всі умови теореми 3.67. Якщо додатково $||G(t,u,v)|| \le k_1(t)(||u|| + ||v||) + k_2(t)$, де k_i є локально інтегровними на $[a,\infty)$, то слабкий розв'язок є глобальним, тобто визначений для всіх $t \ge a$.*

Твердження випливає з теореми 3.70 (порівняйте [220, теорема 2.3, с. 49]).

Для єдиності слабкого розв'язку нам знадобляться наступні додаткові припущення.

(AJ4) *Повна варіація функції $g_c \equiv g_{ac} + g_s$ задовільняє умові*

$$\exists L_{Vg_c} \ge 0 : \forall t^1, t^2 \ge a \Rightarrow V^0_{-r}[g_c(\cdot,t^1,\varphi) - g_c(\cdot,t^2,\psi)] \le L_{Vg_c}(|t^1 - t^2| + ||\varphi - \psi||_C). \tag{3.128}$$

(AJ5) *Дискретна породжуюча функція g_d задовільняє наступній умові:*

- *існує неперервна функція $\eta_{ign}(t) > 0$, така, що* всі *η_k та h_k* "ігнорують" *значення функцій $\varphi(\theta)$ для $\theta \in (-\eta_{ign}(t), 0]$, тобто*

$$\exists\, \eta_{ign}(t) > 0 : \forall t \ge a, \forall \varphi^1, \varphi^2 \in C : \forall \theta \in [-r, -\eta_{ign}(t)],\ \varphi^1(\theta) = \varphi^2(\theta) \quad \Longrightarrow$$
$$\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad \eta_k(t,\varphi^1) = \eta_k(t,\varphi^2) \quad \text{та} \quad h_k(t,\varphi^1) = h_k(t,\varphi^2).$$

Зауваження 3.72 *Умова* **(AJ5)** *є природнім узагальненням на неавтономний випадок багатьох зосереджених загаювань, що залежать від стану, умови, яка була запропонована в роботі [159]. В [159, 161] функція $\eta_{ign}(t)$ була сталою $\eta_{ign}(t) \equiv \eta_{ign} > 0$. Для деталей та прикладів див. [159] та [161].*

Теорема 3.73 . *Припустимо, що умови* **(AJ1)**– **(AJ5)** *виконані, p як в теоремі 3.67, відображення $G : \mathbb{R} \times X \times X \to X$ неперервне та локально липшицеве по своїх другій та третій координатах, тобто для довільного $R > 0$ існує $L_{G,R} > 0$ таке, що для всіх $t > a, ||u^i||, ||v^i|| \leq R$ виконується*

$$||G(t, u^1, v^1) - G(t, u^2, v^2)|| \leq L_{G,R} \left(||u^1 - u^2|| + ||v^1 - v^2||\right). \qquad (3.129)$$

Тоді для довільного $\varphi \in C$ існує $b = b_\varphi > a$ таке, що початкова задача (3.110), (3.111) має **єдиний** *слабкий розв'язок для $t \in [a, b_\varphi)$. Розв'язок неперервно залежить від початкових даних, тобто для довільної послідовності $\{\varphi^n\}_{n=1}^{\infty} \subset C$, яка задовільняє $||\varphi^n - \varphi||_C \to 0$, існує $T > a$ таке, що $b_\varphi \geq T, b_{\varphi^n} \geq T$ та $||u_t^n - u_t||_C \to 0$ для всіх $t \in [a, T)$. Тут u^n - єдиний розв'язок (3.110), (3.111) із початковою функцією φ^n замість φ.*

Доведення теореми 3.73. Для спрощення, ми спочатку розглянемо частковий випадок, коли породжуюча функція $g = g_c \equiv g_{ac} + g_s$, тобто $F = F_c$ не включає зосереджені загаювання (ЗЗС).

Нехай $(t^1, \varphi), (t^2, \psi)$ належать обмеженій множині $\mathcal{B} \subset \mathbb{R} \times C$. Ми використовуємо розкладання (3.120). Можна побачити, що (див. (3.122))

$$||I_2|| \leq M_{\mathcal{B}} \cdot V_{-r}^0[g_c(t^1, \varphi) - g_c(t^2, \psi)]. \qquad (3.130)$$

Умова **(AJ4)** та (3.123) дають локальну липшицевість F_c, тобто для довільного $R > 0$ існує $L_{F_c,R} > 0$ таке, що для всіх $||\varphi||_C \leq R$, $||\psi||_C \leq R$, $a \leq t^1, t^2 \leq a + R$ виконується

$$||F_c(t^1, \phi) - F_c(t^2, \psi)|| \leq L_{F_c,R} \left(|t^1 - t^2| + ||\phi - \psi||_C\right). \qquad (3.131)$$

Розглянемо послідовність $\{\varphi^n\} \subset C$ таку, що $||\varphi^n - \varphi||_C \to 0$ при $n \to \infty$. Позначимо $u(t) = u(t; \varphi)$ *довільний* слабкий розв'язок (3.110), (3.111) та позначимо $u^n(t) = u^n(t; \varphi^n)$ *довільний* слабкий розв'язок (3.110), (3.111) із початковою функцією $\varphi^n \in C$. Існування цих розв'язків доведено в теоремі 3.70. Теорема Шаудера про нерухому точку (див., наприклад, у [220, теорема 2.1, с.46]), яка використовується в доведенні теореми 3.70, дає можливість вибору $R > 0$ та $T > a$ для виконання $||\varphi^n||_C \le R$, $||u^n(t;\varphi^n)|| \le R$ для всіх $t \in [a,T]$ та n достатньо великого.

Відзначимо, що компактність $\{\varphi^n\}_{n=1}^{\infty} \subset C$ та детальне доведення [220, теорема 2.1, с.46]) дають існування $T > a$ такого, що $b_\varphi \ge T$ та $b_{\varphi^n} \ge T$.

Використовуючи локальну властивість Липшиця (3.129) відображення G , (3.131) та вигляд (3.112), ми отримуємо

$$||B(t,\varphi) - B(t,\psi)|| \le L_{G,R}(1 + L_{F_c,R})||\varphi - \psi||_C. \tag{3.132}$$

Таким чином для довільного $t \in [a,T]$ маємо (нагадаємо, що $||\widehat{T}(t)|| \equiv ||e^{-At}|| \le e^{\omega t}$ та $F = F_c$)

$$||u_t - u_t^n||_C \le e^{\omega(T-a)}||\varphi - \varphi^n||_C + L_{G,R}(1 + L_{F_c,R})e^{\omega(T-a)} \cdot \int_a^t ||u_s - u_s^n||_C\, ds.$$

Остання оцінка (за допомогою леми Гронуола) дає

$$||u_t - u_t^n||_C \le e^{L_{G,R}(1+L_{F_c,R})e^{\omega(T-a)}} e^{\omega(T-a)} \cdot ||\varphi - \varphi^n||_C.$$

Таким чином

$$||u_t - u_t^n||_C \le C_T \cdot ||\varphi - \varphi^n||_C,\ \forall t \in [a,T],\ C_T \equiv e^{\omega(T-a)} \exp\{L_{G,R}(1 + L_{F_c,R})e^{\omega(T-a)}\}. \tag{3.133}$$

це дає єдиність слабкого розв'язку та неперервну залежність від початкової функції у випадку $g = g_c$.

Другий частковий випадок $g = g_d$ (цілком зосереджене загаювання) та тільки одна точка разриву був детально розглянутий в роботі [159] (автономний випадок). Було доведено [159], що (AJ5) дає бажаний результат.

Зараз ми розглянемо загальний випадок - обидва типи загаювання, зосереджене та розподілене, включно з випадком багатьох зосереджених ЗЗС.

Використовуючи розщеплення $F = F_d + F_c$, ми маємо, за визначенням слабкого розв'язку, що

$$u^n(t) - u(t) = e^{-A(t-a)}(\varphi^n(0) - \varphi(0)) + \int_a^t e^{-A(t-\tau)} \{F_d(\tau, u_\tau^n) - F_d(\tau, u_\tau)\}\, d\tau$$

$$+ \int_a^t e^{-A(t-\tau)} \{F_c(\tau, u_\tau^n) - F_c(\tau, u_\tau)\}\, d\tau.$$

Використовуючи (3.131), отримуємо для всіх $t \in [a, T]$

$$||u^n(t)-u(t)|| \le ||\varphi^n(0)-\varphi(0)||e^{\omega(T-a)}+e^{\omega(T-a)}L_{G,R}\int_a^t ||F_d(\tau,u_\tau^n)-F_d(\tau,u_\tau)||\,d\tau$$

$$+L_{G,R}(1+L_{F_c,R})e^{\omega(T-a)}\int_a^t ||u_\tau^n-u_\tau||_C\,d\tau$$

$$= G^n(t)+L_{G,R}(1+L_{F_c,R})e^{\omega(T-a)}\int_a^t ||u_\tau^n-u_\tau||_C\,d\tau, \qquad (3.134)$$

де

$$G^n(t) \equiv ||\varphi^n(0)-\varphi(0)||e^{\omega(T-a)}+L_{G,R}e^{\omega(T-a)}\int_a^t ||F_d(\tau,u_\tau^n)-F_d(\tau,u_\tau)||\,d\tau \qquad (3.135)$$

є неспадаючою (за часовою змінною) функцією. За допомогою леми Гронуола, отримуємо

$$||u_t^n-u_t||_C \le G^n(t)\cdot e^{(t-a)L_{G,R}(1+L_{F_c,R})e^{\omega(T-a)}}. \qquad (3.136)$$

Зафіксуємо довільне $c > T$ та позначимо $\eta_{ign} \equiv \min\{\eta_{ign}(t) : t \in [a,c]\}$. За умови **(AJ5)**, $\eta_{ign}(t) > 0$ неперервна, таким чином $\eta_{ign} > 0$. Позначимо $\sigma \equiv \min\{T, a+\eta_{ign}\} > a$.

Тепер наша задача - показати, що для довільного фіксованого $t \in [a,\sigma)$ ми маємо $G^n(t) \to 0$ при $n \to \infty$ (нагадаємо, що $||\varphi^n - \varphi||_C \to 0$).

Розглянемо функції продовження

$$\overline{\varphi}(s) \equiv \left[\begin{array}{ll} \varphi(s), & s \in [-r,0]; \\ \varphi(0), & s \in (0,\sigma) \end{array}\right. \quad \text{та} \quad \overline{\varphi}^n(s) \equiv \left[\begin{array}{ll} \varphi^n(s), & s \in [-r,0]; \\ \varphi^n(0), & s \in (0,\sigma) \end{array}\right. .$$

Важливим наслідком умови **(AJ5)** є рівність $F_d(t,u_t) = F_d(t,\bar{\varphi}_t)$ для всіх $t \in [a,\sigma)$ та довільного слабкого розв'язку $u : [a-r,\sigma) \to X$, що задовільняє $u_a = \varphi$. Таким самим чином $F_d(t,u_t^n) = F_d(t,\bar{\varphi}_t^n)$ для всіх $t \in [a,\sigma)$. Таким чином, неперервність відображення F_d дає $||F_d(\tau,\overline{\varphi}_\tau^n)-F_d(\tau,\overline{\varphi}_\tau)|| \to 0$ для всіх $\tau \in [a,\sigma)$.

Зауваження 3.74 *Відзначимо, що цей випадок є простішим, ніж в доведенні теореми 3.67 (див. (3.124)) оскільки ми оцінюємо F_d при однакових перших координатах (моментах часу $\tau \in [a,\sigma)$).*

Властивість $||F_d(\tau,\overline{\varphi}^n_\tau)-F_d(\tau,\overline{\varphi}_\tau)||\to 0$ для всіх $\tau\in[a,\sigma)$ та рівномірна обмеженість елемета дозволяють нам застосувати класичну лему Лебега-Фату (див. [8, с.32]) для скалярної функції $||F_d(\tau,\overline{\varphi}^n_\tau)-F_d(\tau,\overline{\varphi}_\tau)||$ та отримати, що $G^n(t)\to 0$ при $n\to\infty$ (для довільного фіксованого $t\in[a,\sigma)$). Таким чином, (3.136) дає неперервну залежність слабкого розв'язку від початкової функції для всіх $t\in[a,\sigma)$. Зокрема, це дає єдиність розв'язку. Для великих значень часу ми використовуємо композицію (завдяки єдиності) для кроків менших та рівних, скажімо $(\sigma-a)/2$ (більше деталей в [159]). Оскільки композиція неперервних відображень є неперервним, доведення теореми 3.73 завершено.

Зауваження 3.75 *Обговорюючи доведення теореми 3.73, ми бачимо, що у випадку $g=g_c$ (відсутні зосереджені ЗЗС) загаюване відображення $F=F_c$ є локально липшицевим (див. (3.131)) та, як наслідок, маємо стандартну оцінку для різниці двох розв'язків (3.133) в термінах різниці початкових функцій $||\varphi-\varphi^n||_C$. У випадку присутності зосереджених ЗЗС, ми маємо оцінку (3.136) з G^n, визначеною в (3.135), та для застосування леми Лебега-Фату було достатньо властивості $||F_d(\tau,\overline{\varphi}^n_\tau)-F_d(\tau,\overline{\varphi}_\tau)||\to 0$, яке не дає інформації про різницю $||F(t,\varphi^n)-F(t,\varphi)||$ в термінах $||\varphi-\varphi^n||_C$ (це точно не властивість Липшиця!). Можливим способом отримати таку інформацію є використання модуля неперервності $\omega_f(\delta;Y)$. Нагадаємо визначення цього поняття $\omega_f(\delta;Y)\equiv\sup\{||f(x)-f(y)||\,:\,x,y\in Y,||x-y||\le\delta\}$. Для простоти викладення ми розглянемо F_d з одним зосередженим ЗЗС. Маємо (див. (3.124) з $t=t^n=\tau$)*

$$F_d(\tau,\varphi^n)-F_d(\tau,\varphi)=p(\tau,\varphi^n(-\eta(\tau,\varphi^n)))\cdot h(\tau,\varphi^n)-p(\tau,\varphi(-\eta(\tau,\varphi)))\cdot h(\tau,\varphi). \tag{3.137}$$

оцінки для $K^n_i, i=1,2,3$ (див. (3.125)- (3.127) з $k=1$) показують, що

$$||F_d(\tau,\varphi^n)-F_d(\tau,\varphi)||\le L_pV^0_{-r}g_d\cdot||\varphi-\varphi^n||_C$$

$$+(C_1||\varphi||_C+C_2)\cdot\omega_h\left(||\varphi-\varphi^n||_C;\tilde{Y}\right)+L_pV^0_{-r}g_d\cdot\omega_\varphi\left(\omega_\eta\left(||\varphi-\varphi^n||_C;\tilde{Y}\right);[-r,0]\right),$$

де ми позначаємо $\tilde{Y}\equiv\{(t,\bar{\varphi}_t),(t,\bar{\varphi}^n_t):t\in[a,\sigma_1],n\in\mathbb{N}\}$, з $a<\sigma_1<\sigma$.

За властивістю **(AJ1)** *маємо* $V^0_{-r} g_d \leq M_{Vg}$ *та*

$$||F_d(\tau,\varphi^n) - F_d(\tau,\varphi)|| \leq L_p M_{Vg} \cdot \Big[||\varphi - \varphi^n||_C + \omega_\varphi \Big(\omega_\eta \Big(||\varphi - \varphi^n||_C; \tilde{Y} \Big); [-r,0] \Big) \Big]$$
$$+ (C_1 ||\varphi||_C + C_2) \cdot \omega_h \Big(||\varphi - \varphi^n||_C; \tilde{Y} \Big). \tag{3.138}$$

Оскільки $\varphi^n \to \varphi$ *в просторі* C, *ми бачимо, що* $\tilde{Y}$ *є компактом. Використовуючи* **(AJ3)** *та класичну теорему Кантора, ми знаємо, що* h *та* η *є рівномірно неперервними на* $\tilde{Y}$ *та* $\omega_h \Big(||\varphi - \varphi^n||_C; \tilde{Y} \Big) \to 0$ *та* $\omega_\eta \Big(||\varphi - \varphi^n||_C; \tilde{Y} \Big) \to 0$ *при* $||\varphi - \varphi^n||_C \to 0$. *Нагадаємо, що* $F_d(t,u_t) = F_d(t,\bar{\varphi}_t)$, $F_d(t,u^n_t) = F_d(t,\bar{\varphi}^n_t)$ *та скористаємось* $||\bar{\varphi}_t - \bar{\varphi}^n_t||_C \leq ||\varphi - \varphi^n||_C$. *Остаточно, ми підставляємо оцінку (3.75) в (3.135), а потім оцінку для* G^n *в (3.136) для отримання оцінки різниці двох розв'язків в термінах різниці початкових функцій* $||\varphi - \varphi^n||_C$.

Зауваження 3.76 *В теорії* звичайних *диференціальних рівнянь з ЗЗС [205, 98], є звичайним обмежувати клас початкових функцій* φ *до класа липшицевих функцій (див. перший підхід до рівняннь з ЗЗС в нашій роботі). В цьому випадку зазвичай обмежується множина ЗЗС (обидва* η *та* h*) до множини липшицевих функцій. В такій постановці попереднє зауваження, вочевидь, дає властивість Липшиця відображення* F_d *та таким чином відображення* F. *Це випливає з властивості* $f \in \mathcal{L}ip(L_f;Y) \Longrightarrow \omega_f(\delta;Y) \leq L_f \cdot \delta$ *та оцінок, що наведені вище.*

3.6.3. Принцип інваріантності.

Цей пункт присвячений фундаментальному принципу інваріантності [134] та його узагальненню на випадок рівнянь у частинних похідних з дискретним (зосередженим) загаюванням, що залежить від стану.

Також відмітемо роботу [186] В.Руеса (W.Ruess, 2009) в якій обговорюються важливі узагальнення принципа інваріантності (випадки без ЗЗС) та представлений огляд існуючої на той час літератури на цю тему. В наших дослідженнях, як відмічалось раніше, основний акцент зроблений на загаюванні елементи, а не на узагальнення операторів, що включають частинні похідні.

Слідуючи роботі [134], в якій доведений принцип інваріантності для рівнянь у частинних похідних зі сталим загаюванням, ми припускаємо виконаними наступні припущення:

(H1) D є замкненою підмножиною $[a-r,\infty)\times X$ та $D(t)\equiv\{x\in X:(t,x)\in D\}$ не пусте для кожного $t\geq a-r$.

(H2) $\mathcal{D}$ є замкненою підмножиною $[a,\infty)\times C$, визначеною $\mathcal{D}\equiv\{(t,\varphi):\varphi(\theta)\in D(t+\theta)$ для всіх $-r\leq\theta\leq 0\}$. Також, $\mathcal{D}(t)\equiv\{\varphi\in C:(t,\varphi)\in\mathcal{D}\}$ для кожного $t\geq a$, та ми припускаємо, що множина $\mathcal{D}(t)$ не пуста для кожного $t\geq a$.

(H3) Для кожного $b>a$ існують $\hat{K}(b)>0$ та неперервна неспадаюча функція $\eta_b:[0,b-a)\to[0,\infty)$, що задовільняє $\eta_b(0)=0$ та властивість, що якщо $a\leq t_1<t_2\leq b, x_1\in D(t_1)$, та $x_2\in D(t_2)$, то існує неперервна функція $w:[t_1,t_2]\to X$ така, що $w(t_1)=x_1, w(t_2)=x_2, w(t)\in D(t)$ для $t_1<t<t_2$, та

$$|w(t)-w(s)|\leq\eta_b(|t-s|)+\hat{K}(b)|t-s|\frac{|x_2-x_1|}{t_2-t_1}$$

для всіх $s,t\in[t_1,t_2]$.

(H4) B неперервне відображення з $D(B)$ в X, де $\mathcal{D}\subset D(B)\subset[a,\infty)\times C$.

Зауваження 3.77 *[134, с. 16]. Якщо D* опукле*, то (H3) виконується автоматично, визначаючи*

$$w(t)=\frac{(t_2-t)x_1+(t-t_1)x_2}{(t_2-t_1)}\quad \text{для}\quad t_1\leq t\leq t_2.$$

Ми бачимо, що $||w(t)-w(s)||=\left\|\frac{(s-t)x_1+(t-s)x_2}{(t_2-t_1)}\right\|\leq\frac{||x_1-x_2||}{(t_2-t_1)}|t-s|$ для $t_1\leq s<t\leq t_2$ і таким чином (H3) виконано з $\hat{K}(b)\equiv 1$ та $\eta_b=0$.

Ми будемо використовувати позначення

$$d(x;D(t))\equiv\inf\{|x-y|:y\in D(t)\}\quad \text{для}\quad x\in X, t\geq a.$$

Фундаментальним критерієм інваріантності множини $\mathcal{D}$, який зветься *субтангенціальною умовою* (subtangential condition), (див. [134, (2.2)]), є наступне

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\,d\left(e^{-Ah}\varphi(0)+\int_t^{t+h}e^{-A(t+h-s)}B(t,\varphi)\,ds\,;D(t+h)\right)=0 \text{ для } (t,\varphi)\in\mathcal{D}. \tag{3.139}$$

Наступна теорема узагальнює [134, теорема 2] на випадок загального загаювання, що залежить від стану.

Теорема 3.78 . *Припускаємо, що* **(AJ1)**–**(AJ5)**, **(H1)**–**(H4)** *та (3.139) виконані. Нехай p як в теоремі 3.67 та припустимо, що відображення $G:\mathbb{R}\times X\times X\to X$ задовільняє: для кожного $R>0$ існують стала $L_{G,R}>0$ та неперервна функція $\nu_R:[0,\infty)\to[0,\infty)$ такі, що $\nu_R(0)=0$ та*

$$||G(t^1,u^1,v^1)-G(t^2,u^2,v^2)||\le \nu_R(|t^1-t^2|)+L_{G,R}\left(||u^1-u^2||+||v^1-v^2||\right) \tag{3.140}$$

для всіх $||u^i||,||v^i||\le R$ та $a\le t^1,t^2\le a+R$.

Тоді для довільного $\varphi\in C$ існує $b=b_\varphi>a$ таке, що початкова задача (3.110), (3.111) має єдиний слабкий розв'язок для $t\in[a,b)$. Якщо додатково $\varphi\in\mathcal{D}(a)$, тоді $u_t\in\mathcal{D}(t)$ для $a\le t<b$ та якщо $b<+\infty$, то $||u_t||_C\to\infty$ при $t\to b-0$.

Зауваження 3.79 *На відміну від ситуації в [134, теоремі 2], нелінійний елемент B в рівнянні (3.110) не є липшицевим (за другою коодинатою, порівн. [134, властивість (2.3), стор.18]) у випадку присутності дискретного загаювання, що залежить від стану. З цієї причини [134, теорема 2] не може бути застосована в нашому випадку. Навпаки, умова* **(AJ5)** *забезпечує єдиність слабких розв'язків та рятує хід доведення, яке запропоновано в [134].*

Доведення теореми 3.78 слідує доведенню [134, теорема 2]. Останнє складається з восьми лем та завершуючої частини, які займають сторінки 35-43 оригінальної роботи. Немає необхідності повторювати ці леми оскільки вони не спираються на властивість Липшиця відображення B (таким чином не страждають від її відсутності в нашому випадку) та ми просто посилаємося на оригінальний текст [134], включаючи всі позначення та деталі.

Тут ми тільки нагадаємо основні кроки оригінального доведення [134] та наведемо нову частину доведення, яка спирається на умову **(AJ5)**.

Для фіксованих $\sigma > a, \varepsilon_0 > 0$ та довільного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ будується ε-наближений розв'язок w. Це робиться акуратними побудовами (див. [134] для деталей) зростаючої послідовності $\{t_i\}_0^\infty \subset [a, \sigma + \varepsilon_0]$ такої, що $w(t_i) \in D(t_i)$ та (див. [134, (4.6)])

$$\left\| e^{-A(t_{i+1}-t_i)} w(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-A(t_{i+1}-s)} B(t_i, w_{t_i})\, ds \; - w(t_{i+1}) \right\| \quad \leq \varepsilon(t_{i+1} - t_i). \tag{3.141}$$

Нехай $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$ спадаюча послідовність така, що $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ та для кожного $n \geq 1$ нехай w^n та $\{t_i^n\}_{i=0}^\infty$ є як при побудові вище з $\varepsilon = \varepsilon_n, t_i = t_i^n$, та $w = w^n$. Позначимо $\gamma^n : [a, \sigma] \to [a, \sigma]$ функцію $\gamma^n(t) = t_i^n$ для $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$.

Зауваження 3.80 *В додаток до обговорень в роботі [134], ми припускаємо, що $\sigma + \varepsilon_0 - a < \eta_{ign} \equiv \min_{t \in [a,c]} \eta(t)$ для деякого фіксованого $c > a$. Оскільки ми доводимо локальне існування, c може бути обрано довільно та* **(AJ5)** *дає $\eta_{ign} > 0$ ($\eta(t)$ є неперервною).*

Для зручності допоміжна функція v^n для w^n визначена наступним чином (див. [134, (4.9)])

$$v^n(t) = e^{-A(t-a)} \varphi(0) + \int_a^t e^{-A(t-s)} B(\gamma^n(s), w^n_{\gamma^n(s)})\, ds \quad \text{для } t \in [a, \sigma]. \tag{3.142}$$

та $v^n(a + \theta) = \varphi(\theta)$ для $\theta \in [-r, 0]$.

Показано (див. [134, леми 4.6 та 4.7]), що

$$||v^n(t) - w^n(t)|| \leq \hat{P} \max\{\varepsilon_n, \eta_b(\varepsilon_n)\} \quad \text{для} \quad t \in [a - r, \sigma],\, n = 1, 2, \ldots,\; \hat{P} > 0, \tag{3.143}$$

$$||w^n_t - w^n_{\gamma^n(t)}||_C \leq \hat{Q} \max\{\varepsilon_n, \eta_b(\varepsilon_n)\} \quad \text{для} \quad t \in [a, \sigma],\, n = 1, 2, \ldots,\; \hat{Q} > 0, \tag{3.144}$$

з $\hat{P}, \hat{Q} > 0$ обидва незалежні від t та n.

Далі, [134, лема 4.8] показує, що *якщо* існує функція $u : [a-r, \sigma] \to X$ така, що $u(t) = \lim_{n\to\infty} w^n(t)$ рівномірно по $t \in [a-r, \sigma]$, *то* $(t, u(t)) \in D$ та функція u є *розв'язком* задачі (3.110), (3.111) на $[a, \sigma]$.

Тепер ми надамо фінальну частину доведення, яка використовує властивість **(AJ5)** замість властивості Липшиця відображення B. По-перше, нам потрібна оцінка для $||B(t^1, u_{t^1}) - B(t^2, u_{t^2})||$. Розглянемо розщеплення загаюваного елемента F на неперервну та дискретну частини $F = F_c + F_d$ (у відповідності до (3.119)) та використовуємо липшицевість F_c (завдяки **(AJ4)**, див. (3.131)). Детальніше, використовуємо локальну липшицевість (3.140) відображення G, (3.131) та форму (3.112), ми отримуємо

$$
\begin{aligned}
&||B(t^1, u_{t^1}) - B(t^2, u_{t^2})|| \\
&\le \nu_R\left(|t^1 - t^2|\right) + L_{G,R}L_{F_c,R}\cdot|t^1 - t^2| + L_{G,R}(1 + L_{F_c,R})\cdot||u_{t^1} - u_{t^2}||_C \\
&\qquad + L_{G,R}\,||F_d(t^1, u_{t^1}) - F_d(t^2, u_{t^2})||. \qquad (3.145)
\end{aligned}
$$

Оскільки $|t - \gamma^n(t)| \le \varepsilon_n$ маємо, що

$$
|\gamma^n(t) - \gamma^m(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty \quad \text{рівномірно для} \quad t \in [a, \sigma]. \qquad (3.146)
$$

Використовуючи (3.143), (3.144) ($\{w^n\}$ збіжна, як відмічалося раніше), розглянемо $\bar{R} > 0$ таке, що $||w^n(t)|| \le \bar{R}$ для всіх $n \ge 1$ та $t \in [a - r, \sigma]$. Таким чином (3.145) дає

$$
\begin{aligned}
&||B(\gamma^n(s), w^n_{\gamma^n(s)}) - B(\gamma^m(s), w^m_{\gamma^m(s)})|| \\
&\le \nu_R\left(|\gamma^n(s) - \gamma^m(s)|\right) + L_{G,R}L_{F_c,R}\cdot|\gamma^n(s) - \gamma^m(s)| + L_{G,\bar{R}}(1 + L_{F_c,R})||w^n_{\gamma^n(s)} - w^m_{\gamma^m(s)}||_C \\
&+ L_{G,\bar{R}}||F_d(\gamma^n(s), w^n_{\gamma^n(s)}) - F_d(\gamma^m(s), w^m_{\gamma^m(s)})|| \le [\text{оцінки (3.143), (3.144) дають}] \\
&\le L_{G,\bar{R}}(1 + L_{F_c,R})||v^n_s - v^m_s||_C + L_{G,\bar{R}}||F_d(\gamma^n(s), w^n_{\gamma^n(s)}) - F_d(\gamma^m(s), w^m_{\gamma^m(s)})|| + \widetilde{\varepsilon}_{n,m},
\end{aligned}
$$

де $\widetilde{\varepsilon}_{n,m} \to 0$ при $n, m \to \infty$ (завдяки (3.146)). Використовуючи (3.142), ми отримуємо

$$
||v^n(t) - v^m(t)|| \le \int_a^t M L_{G,\bar{R}}(1 + L_{F_c,R})||v^n_s - v^m_s||_C \, ds
$$

$$+\int_a^t ML_{G,\bar{R}}||F_d(\gamma^n(s), w^n_{\gamma^n(s)}) - F_d(\gamma^m(s), w^m_{\gamma^m(s)})||\,ds + \hat{\varepsilon}_{n,m}, \tag{3.147}$$

де $\hat{\varepsilon}_{n,m} \to 0$ при $n, m \to \infty$.

Тепер наша мета - показати, що другий інтеграл в (3.147) прямує до нуля при $n, m \to \infty$. Позначимо $\bar{\varphi}$ функцію продовження $\bar{\varphi}(a + \theta) = \varphi(\theta)$ для $\theta \in [-r, 0]$ та $\bar{\varphi}(s) = \varphi(0)$ для $s \in (a, \sigma]$. Нагадаємо, що $\sigma - a < \eta_{ign}$ (див. зауваження вище). Важливим наслідком властивості **(AJ5)** є наступна рівність $F_d(t, u_t) = F_d(t, \bar{\varphi}_t)$ для всіх $t \in [a, \sigma]$ та довільної неперервної функції $u : [a - r, \sigma] \to X$, яка задовільняє $u_a = \varphi$. Оскільки всі w^n, за побудови, є неперервними та задовільняють $w^n_a = \varphi$, ми приходимо до властивості $F_d(t, w^n_t) = F_d(t, \bar{\varphi}_t)$ для всіх $t \in [a, \sigma]$. Таким чином (див. другий інтеграл в (3.147)) $G^{n,m}_d(s) \equiv ||F_d(\gamma^n(s), w^n_{\gamma^n(s)}) - F_d(\gamma^m(s), w^m_{\gamma^m(s)})|| = ||F_d(\gamma^n(s), \bar{\varphi}_{\gamma^n(s)}) - F_d(\gamma^m(s), \bar{\varphi}_{\gamma^m(s)})||$.

Неперервність F_d та (3.146) дають $G^{n,m}_d(s) \to 0$ при $n, m \to \infty$ для всіх $s \in [a, \sigma]$. Оскільки $G^{n,m}_d(s)$ обмежена, класична лема Лебега-Фату дає

$$\int_a^t G^{n,m}_d(s)\,ds \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Остання властивість дає (див. (3.147))

$$||v^n(t) - v^m(t)|| \le \int_a^t ML_{G,\bar{R}}(1 + L_{F_c,R})||v^n_s - v^m_s||_C\,ds + \varepsilon_{n,m}, \tag{3.148}$$

де $\varepsilon_{n,m} \to 0$ при $n, m \to \infty$.

Залишок доведення дослівно випливає з розглядання в [134, с. 43]. Позначаючи $q_{n,m}(t) \equiv \max\{||v^n(s) - v^m(s)|| : a - r \le s \le t\}$, ми бачимо, що для кожного $t \in [a, \sigma]$ існує $\alpha(t) \in [a - r, t]$ таке, що

$$q_{n,m}(t) = ||v^n(\alpha(t)) - v^m(\alpha(t))|| \le \int_a^{\alpha(t)} ML_{G,\bar{R}}(1 + L_{F_c,R})||v^n_s - v^m_s||_C\,ds + \varepsilon_{n,m}$$

$$\le \int_a^{\alpha(t)} ML_{G,\bar{R}}(1 + L_{F_c,R})\,q_{n,m}(s)\,ds + \varepsilon_{n,m}.$$

Нерівність Гронуола та той факт, що $\varepsilon_{n,m} \to 0$ при $n, m \to \infty$ показують, що $q_{n,m}(t) \to 0$ при $n, m \to \infty$, та таким чином $\{v^n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ є послідовністю

Коші (рівномірно) на $[a-r,\sigma]$. Це дає те, що $\{w^n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ є послідовністю Коші (рівномірно) на $[a-r,\sigma]$ та таким чином початкова задача (3.110), (3.111) має слабкий (mild) розв'язок на $[a-r,\sigma]$ (див. обговорення вище та [134, лема 4.8]). Єдиність розв'язку маємо завдяки **(AJ5)** та забезпечується теоремою 3.71. Стандартна процедура продовження дає розв'язок на максимальному інтервалі. Доведення теореми 3.78 завершено.

Наступний важливий наслідок залишається вірним за наявності загаювань, що залежать від стану.

Наслідок 3.81 *(порівн. [134, стор. 18]). Нехай K є замкненою, опуклою підмножиною в X та всі умови теореми 3.78 виконані з $D(t)\equiv K$ для всіх $t\geq a$. Припустимо далі, що*

(a) *$T(t): K\to K$ для $t\geq 0$ та*

(b) *$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}d(\varphi(0)+hB(t,\varphi);K)=0$ для $(t,\varphi)\in\mathcal{D}$.*

Тоді (3.110), (3.111) має єдиний непродовжуваний слабкий розв'язок u на $[a,b)$ для деякого $b>a$ та $u(t)\in K$ для всіх $t\in[a-r,b)$.

Оскільки ми цікавимось біологічними моделями (див. приклад вище), наступне зауваження особливо важливе для нас.

Зауваження 3.82 *(порівн. [134, стор. 7]). Розглянемо систему (3.117). Якщо $K=[0,\infty)^m$, то умова (a) попереднього наслідку виконана та умова (b) виконується тільки у випадку, коли $G=(G^i)_1^m$ є квазіпозитивною (quasipositive): якщо $k\in\{1,\ldots,m\}$ та $(t,\varphi)\in[a,\infty)\times C([-r,0];C(\bar{\Omega})^m)$ с $\varphi^i(\theta,x)\geq 0$ для всіх $-r\leq\theta\leq 0, x\in\bar{\Omega}$ та $i=1,\ldots,m$, тоді $\varphi^i(0,\cdot)=0$ дає $G^i(t,F^i(t,\varphi(\cdot,x)))\geq 0$ для всіх $x\in\bar{\Omega}$. Ця умова дає критерій для визначення чи залишається розв'язок задачі (3.117) невід'ємним якщо початкова функція невід'ємна.*

3.7. Рівняння у частинних похідних із загаюванням, що залежить від стану, в метричному просторі

Наступна властивість розв'язків РЧП (з або без загаювання) є важливою при вивченні рівнянь із зосередженим загаюванням, що залежить від стану. Розглядаючи різні типи розв'язків які мають властивості $u \in C([a, b]; X)$, ми, в загальному випадку, не можемо гарантувати, що розв'язок є липшицевою функцією $u : [a, b] \to X$. Цей факт складає основну перешкоду при спробі узагальнити підходи, які розроблені для ЗДР (зокрема при доведенні єдиності та неперервної залежності від початкових даних). З цієї причини, в попередніх дослідженнях ми запропонували альтернативні підходи, тобто наближення розв'язку РЧП з зосередженим загаюванням послідовностями розв'язків РЧП із розподіленими загаюваннями [155, 156] або використання "ігноруючої умови" для зосередженого загаювання [159].

Основною метою цього підрозділу є спроба розвинути метод, розроблений для ЗДР із ЗЗС [204, 205, 98], та перенести його на випадок РЧП. Наша ідея складається в пошуку більш широкого простору $Y \supset X$ такого, що розв'язок $u : [a, b] \to Y$ буде липшицевим (за часом) в більш слабкій нормі простору Y та потім збудувати динамічну систему на підмножині простору $C([a, b]; Y)$. Цікаво відмітити, що на відміну від попередніх досліджень, динамічна система будується в метричному просторі, який **не є лінійним** простором.

Структура підрозділу наступна. Спочатку ми вводимо модель та доводимо існування та єдиність розв'язків для початкових функцій з банахова простору. Далі, ми будуємо еволюційний оператор S_t та досліджуємо його асимптотичні властивості. Тут ми звужуємо клас початкових функцій до більш вузького метричного простору та отримуємо неперервність S_t, якій не було в початковому банаховому просторі. В останній частині ми обговорюємо частковий випадок загаювання, яке не залежить від стану та порівнюємо результати з загальним випадком ЗЗС.

3.7.1. Обговорення моделі та початкові властивості. В цьому підрозділі ми пропонуємо підхід для вивчення наступного РЧП із зосередженим загаюванням, що залежить від стану

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + Au(t,x) + du(t,x) = b\left([Bu(t-\eta(u_t),\cdot)](x)\right) \equiv \big(F(u_t)\big)(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.149}$$

де оператор A, як і раніше, задовільняє припущенням **(A1)** (див. 2.1). Відображення $B : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ обмежене і має властивості, які обговорюються нижче, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - локально липшицеве відображення та d - невід'ємна стала. Функція $\eta(\cdot) : C([-r,0]; L^2(\Omega)) \to [0,r] \subset \mathbb{R}_+$ представляє *зосереджене* загаювання, що залежить від стану.

Зауваження 3.83 *Наприклад, оператор B може мати наступний вигляд (лінійні приклади)*

$$[Bv](x) \equiv \int_\Omega v(y)\widetilde{f}(x,y)dy, \quad x \in \Omega, \tag{3.150}$$

або простіше

$$[Bv](x) \equiv \int_\Omega v(y)f(x-y)\ell(y)dy, \quad x \in \Omega, \tag{3.151}$$

де $f : \Omega - \Omega \to \mathbb{R}$ гладка функція, $\ell \in C_0^\infty(\Omega)$. В останньому випадку нелінійний елемент в (3.149) приймає вигляд

$$\big(F(u_t)\big)(x) \equiv b\left(\int_\Omega u(t-\eta(u_t),y)f(x-y)\ell(y)dy\right), \quad x \in \Omega, \tag{3.152}$$

Ми розглядаємо рівняння (3.149) із початковими умовами

$$u|_{[-r,0]} = \varphi. \tag{3.153}$$

Основні припущення:

(H.B) Відображення B задовільняє наступній умові Липшиця

$$\exists L_B > 0 : \forall u, v \in L^2(\Omega) \Rightarrow ||Bu - Bv|| \le L_B \cdot ||A^{-1/2}(u-v)||. \tag{3.154}$$

(H.η) Зосереджене загаювання $\eta : C \to [0,r]$ задовільняє

$$\exists L_\eta > 0 : \forall \varphi, \psi \in C \Rightarrow |\eta(\varphi) - \eta(\psi)| \le L_\eta \cdot \max_{\theta\in[-r,0]} ||A^{-1/2}(\varphi(\theta) - \psi(\theta))||. \tag{3.155}$$

Зауваження 3.84 *Для елементів вигляду (3.151), припускаючи для всіх (майже всіх) $x \in \Omega \Rightarrow f(\cdot - x)\ell(\cdot) \in D(A^{1/2})$ та $u \in L^2(\Omega) \subset D(A^{-1/2})$ маємо $|\langle u, f(\cdot - x)\ell(\cdot)\rangle| \leq ||A^{-1/2}u|| \cdot ||A^{1/2}f(\cdot - x)\ell(\cdot)||$, що дає*

$$\left(\int_\Omega \Big| \int_\Omega u(y)f(y-x)\ell(y)dy\Big|^2 dx\right)^{1/2} \leq ||A^{-1/2}u|| \cdot \left(\int_\Omega ||A^{1/2}f(\cdot - x)\ell(\cdot)||^2 dx\right)^{1/2}.$$

Таким чином, властивість (H.B) (див. (3.154)) виконується з $L_B \equiv \left(\int_\Omega ||A^{1/2}f(\cdot - x)\ell(\cdot)||^2 dx\right)^{1/2}$. Для більш загального вигляду (3.150) також виконується з $L_B \equiv \left(\int_\Omega ||A^{1/2}\widetilde{f}(x,\cdot)||^2 dx\right)^{1/2}$.

Введемо

Визначення 3.85 *Вектор-функція $u(t) \in C([-r,T]; D(A^{-1/2})) \cap C([0,T]; D(A^{1/2})) \cap L^2(0,T; D(A))$ з похідною $\dot{u}(t) \in L^\infty(0,T; D(A^{-1/2}))$ зветься розв'язком задачі (3.149), (3.153) на сегменті $[0,T]$, якщо*

- *$u(\theta) = \varphi(\theta)$ для $\theta \in [-r, 0]$;*
- *для довільної функції $v \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$ такої, що $\dot{v} \in L^2(0,T; D(A^{-1}))$ та $v(T) = 0$, виконується*

$$-\int_0^T \langle u(t), \dot{v}(t)\rangle dt + \int_0^T \langle A^{1/2}u(t), A^{1/2}v(t)\rangle dt = \langle \varphi(0), v(0)\rangle + \int_0^T \langle F(u_t) - du(t), v(t)\rangle dt. \tag{3.156}$$

Введемо наступний простір

$$\mathcal{L} \equiv \left\{ \varphi \in C([-r,0]; D(A^{-\frac{1}{2}})) \mid \sup_{s \neq t} \left\{ \frac{||A^{-\frac{1}{2}}(\varphi(s) - \varphi(t))||}{|s-t|} \right\} < +\infty;\ \varphi(0) \in D(A^{\frac{1}{2}}) \right\} \tag{3.157}$$

з природньою нормою

$$||\varphi||_{\mathcal{L}} \equiv \max_{s \in [-r,0]} ||A^{-1/2}\varphi(s)|| + \sup_{s \neq t} \left\{ \frac{||A^{-\frac{1}{2}}(\varphi(s) - \varphi(t))||}{|s-t|} \right\} + ||A^{\frac{1}{2}}\varphi(0)||. \tag{3.158}$$

Тепер ми доведемо наступну теорему існування та єдиності розв'язків.

Теорема 3.86 . *Нехай виконані умови* **(H.B)** *та* **(H.**η**)** *(див. (3.154), (3.155)). Припустимо, що функція $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є локально липшицевою та обмеженою ($b(\cdot) \le M_b$). Тоді для довільної початкової функції $\varphi \in \mathcal{L}$ (простір $\mathcal{L}$ визначено в (3.157)) задача (3.149), (3.153) має єдиний розв'язок на довільному сегменті $[0, T]$. Розв'язок задовільняє $\dot{u} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.*

Зауваження 3.87 *Ми не припускаємо, що $\varphi \in L^2(-r, 0; D(A))$, але визначення розв'язку дає, що*

$$u_t \in L^2(-r, 0; D(A)), \quad \forall t \ge r. \tag{3.159}$$

Доведення теореми 3.86. Як і раніше, ми позначаємо $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормований базис простору $L^2(\Omega)$ такий, що $Ae_k = \lambda_k e_k$, $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k \to +\infty$.

Розглянемо наближені за Галеркіним розв'язки порядка $m: u^m = u^m(t, x) = \sum_{k=1}^{m} g_{k,m}(t) e_k$, такі, що

$$\begin{cases} \langle \dot{u}^m + Au^m + du^m - F(u_t^m), e_k \rangle = 0, \\ \langle u^m(\theta), e_k \rangle = \langle \varphi(\theta), e_k \rangle, \ \forall \theta \in [-r, 0] \end{cases} \tag{3.160}$$

$\forall k = 1, \ldots, m$. Тут $g_{k,m} \in C^1(0, T; R) \cap L^2(-r, T; R)$ з абсолютно неперервними $\dot{g}_{k,m}(t)$.

Система (3.160) є (звичайним) диференціальним рівнянням в $\mathbb{R}^m$ із зосередженим загаюванням для невідомої вектор-функції $U(t) \equiv (g_{1,m}(t), \ldots, g_{m,m}(t))$ (відповідна теорія для ЗДР викладається, наприклад, у [205, 206] та також в нещодавньому огляді [98]).

Умова $\varphi \in \mathcal{L}$ дає, що початкова функція $U(\cdot)|_{[-r,0]} \equiv P_m \varphi(\cdot)$ є липшицевою як функція з $[-r, 0]$ в $\mathbb{R}^m$. Тут, як і раніше, P_m - ортогональний проектор на підпростір $span\,\{e_1, \ldots, e_m\} \subset L^2(\Omega)$. Таким чином ми можемо застосувати теорію ЗДР із загаюванням, що залежить від стану (див. [98]) для отримання локального існування та єдиності розв'язків (3.160).

Тепер ми отримаємо апріорну оцінку для продовження розв'язків u^m системи (3.160) на довільний інтервал $[0, T]$ і потім для доведення (за допомогою метода компактності, див. [122]) існування розв'язків (3.149), (3.153).

Домножимо перше рівняння в (3.160) на $\lambda_k g_{k,m}$ та складемо для $k = 1, \dots, m$ для отримання

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||A^{1/2}u^m(t)||^2 + ||Au^m(t)||^2 + d \cdot ||A^{1/2}u^m(t)||^2 = \langle P_m F(u_t^m), Au^m(t)\rangle$$
$$\leq \frac{1}{2}||P_m F(u_t^m)||^2 + \frac{1}{2}||Au^m(t)||^2.$$

Оскільки функція b обмежена ($b(\cdot) \leq M_b$), ми маємо $||F(u_t^m)||^2 \leq M_b^2|\Omega|$ (тут $|\Omega| \equiv \int_\Omega 1\, dx$) та в результаті, ми приходимо до

$$\frac{d}{dt}||A^{1/2}u^m(t)||^2 + ||Au^m(t)||^2 \leq M_b^2|\Omega|. \tag{3.161}$$

Інтегруємо (3.161) по t, використовуємо властивості $\varphi(0) \in D(A^{1/2})$, $u^m(0) = P_m\varphi(0) \in D(A^{1/2})$ та $||A^{1/2}u^m(0)|| = ||A^{1/2}P_m\varphi(0)|| \leq ||A^{1/2}\varphi(0)||$ для отримання апріорної оцінки

$$||A^{1/2}u^m(t)||^2 + \int_0^t ||Au^m(\tau)||^2\, d\tau \leq ||A^{1/2}\varphi(0)||^2 + M_b^2|\Omega| \cdot T,\ \forall m, \forall t \in [0, T]. \tag{3.162}$$

Оцінка (3.162) означає, що

$$\{u^m\}_{m=1}^\infty \text{ є обмеженою множиною в } L^\infty(0, T; D(A^{1/2})) \cap L^2(0, T; D(A)).$$

Використовуючи це та (3.160), ми отримуємо, що

$$\{\dot{u}^m\}_{m=1}^\infty \text{ є обмеженою множиною в } L^\infty(0, T; D(A^{-1/2})) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Таким чином родина $\{(u^m; \dot{u}^m)\}_{m=1}^\infty$ є обмеженою множиною в

$$Z_1 \equiv \Big(L^\infty(0, T; D(A^{1/2})) \cap L^2(0, T; D(A))\Big) \times \Big(L^\infty(0, T; D(A^{-1/2})) \cap L^2(0, T; L^2(\Omega))\Big). \tag{3.163}$$

Таким чином існує підпослідовність $\{(u^k; \dot{u}^k)\}$ та елемент $(u; \dot{u}) \in Z_1$ такі, що

$$\{(u^k; \dot{u}^k)\} \text{ *-слабко збігається до } (u; \dot{u}) \text{ в } Z_1. \tag{3.164}$$

Доведення того, що довільна *-слабка границя є розв'язок є стандартним.

Тепер ми доведемо єдиність розв'язків. Використовуючи властивості $\varphi \in \mathcal{L}$, визначення розв'язку v та $\dot{v}(t) \in L^\infty(0, T; D(A^{-1/2}))$ (див. (3.164)) ми маємо, що для довільного такого розв'язку v та довільного $T > 0$ існує $L_{v,T} > 0$ таке, що

$$||A^{-1/2}(v(s^1) - v(s^2))|| \le L_{v,T} \cdot |s^1 - s^2|, \quad \forall s^1, s^2 \in [-r, T]. \tag{3.165}$$

Розглянемо два розв'язки u та v задачі (3.149), (3.153) (не обов'язково з однаковими початковими функціями).

Припущення (H.B) (див. (3.154)) та властивість Липшиця функції b дають

$$\begin{aligned} ||F(u_{s^1}) - F(v_{s^2})||^2 &= \int_\Omega |\, b\left([Bu](s^1 - \eta(u_{s^1}), x)\right) - b\left([Bv](s^2 - \eta(u_{s^2}), x)\right) |^2\, dx \\ &\le L_b^2 \int_\Omega |\, [Bu](s^1 - \eta(u_{s^1}), x) - [Bv](s^2 - \eta(u_{s^2}), x)|^2\, dx \\ &= L_b^2 \cdot ||\, [Bu](s^1 - \eta(u_{s^1}), \cdot) - [Bv](s^2 - \eta(u_{s^2}), \cdot)||^2 \\ &\le L_b^2 L_B^2 \cdot ||A^{-1/2}(u(s^1 - \eta(u_{s^1})) - v(s^2 - \eta(u_{s^2}))||^2. \end{aligned} \tag{3.166}$$

Тепер, для довільних двох розв'язків ми маємо

$$F(u_t) - F(v_t) = b(Bu(t - \eta(u_t))) - b(Bv(t - \eta(v_t))) \pm b(Bv(t - \eta(u_t))).$$

Використовуючи властивість Липшиця b, B та η (див. (3.154), (3.155)), та (3.165), (3.166), отримуємо

$$\begin{aligned} &||F(u_t) - F(v_t)|| \\ &\le L_b L_B \left(\max_{s\in[t-r,t]} ||A^{-1/2}(u(s) - v(s))|| + ||A^{-1/2}(v(t - \eta(u_t)) - v(t - \eta(v_t)))|| \right) \\ &\le L_b L_B \left(||A^{-1/2}(u_t - v_t)||_C + L_{v,T} \cdot |\eta(u_t)) - \eta(v_t)| \right) \\ &\le L_b L_B \left(1 + L_{v,T} \cdot L_\eta\right) \cdot ||A^{-1/2}(u_t - v_t)||_C. \end{aligned} \tag{3.167}$$

Ми позначаємо для зручності

$$C_{v,T} \equiv L_b L_B \left(1 + L_{v,T} \cdot L_\eta\right). \tag{3.168}$$

Тепер стандартна формула варіації сталих $u(t) = e^{-At}u(0) + \int_0^t e^{-A(t-\tau)}F(u_\tau)\, d\tau$ та (3.167) дають

$$||A^{-1/2}(u_t - v_t)||_C \le ||A^{-1/2}(u_0 - v_0)||_C + C_{v,T} \cdot \int_0^t e^{-\lambda_1(t-\tau)} ||A^{-1/2}(u_\tau - v_\tau)||_C\, d\tau.$$

Остання оцінка (по лемі Гронуола) дає

$$||A^{-1/2}(u_t - v_t)||_C \leq ||A^{-1/2}(u_0 - v_0)||_C \cdot \left[1 + \frac{C_{v,T}}{C_{v,T} - \lambda_1}\left(e^{(C_{v,T}-\lambda_1)t} - 1\right)\right], \quad (3.169)$$

і це дає єдиність розв'язків задачі (3.149), (3.153). Доведення теореми 3.86 завершено.

Зауваження 3.88 *Важливо відмітити, що елемент* $\left[1 + \frac{C_{v,T}}{C_{v,T}-\lambda_1}\left(e^{(C_{v,T}-\lambda_1)t} - 1\right)\right]$ *в (3.169) прямує до* $+\infty$, *при* $L_{v,T} \to +\infty$, *за виключенням випадка* $L_\eta = 0$ *(див. (3.168)).*

Отримаємо додаткову оцінку для розв'язків. Стандартна формула варіації сталих $u(t) = e^{-At}u(0) + \int_0^t e^{-A(t-\tau)}F(u_\tau)\,d\tau$, (3.167), (3.168) та оцінка $||A^\alpha e^{-tA}|| \leq \left(\frac{\alpha}{t}\right)^\alpha e^{-\alpha}$ (див., наприклад [31, (1.17), с.84]) дають

$$||A^{1/2}(u(t)-v(t))|| \leq e^{-\lambda_1 t}||A^{1/2}(u(0)-v(0))|| + \int_0^t ||A^{1/2}e^{-A(t-\tau)}|| \cdot ||F(u_\tau)-F(v_\tau)||d\tau$$

$$\leq e^{-\lambda_1 t}||A^{1/2}(u(0)-v(0))|| + 2t^{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} e^{-1/2} \cdot C_{v,T} \cdot ||A^{-1/2}(u_0 - v_0)||_C. \quad (3.170)$$

Тут використано $||A^{1/2}e^{-A(t-\tau)}|| \leq \left(\frac{1/2}{t-\tau}\right)^{1/2} e^{-1/2}$ та $\int_0^t (t-\tau)^{-1/2}d\tau = 2t^{1/2}$.

Тепер оцінки (3.169), (3.170) дають

$$||A^{1/2}(u(t) - v(t))|| + ||A^{-1/2}(u_t - v_t)||_C$$

$$\leq e^{-\lambda_1 t}||A^{1/2}(u(0) - v(0))|| + D_{v,T} \cdot ||A^{-1/2}(u_0 - v_0)||_C. \quad (3.171)$$

Тут ми позначаємо

$$D_{v,T} \equiv 2T^{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} e^{-1/2} \cdot C_{v,T} + \left[1 + \frac{C_{v,T}}{C_{v,T} - \lambda_1}\left(e^{(C_{v,T}-\lambda_1)T} - 1\right)\right]. \quad (3.172)$$

3.7.2. Асимптотична поведінка. В цій частині ми досліджуємо асимптотичну поведінку розв'язків задачі (3.149), (3.153). Завдяки теоремі 3.86 ми визначаємо стандартним чином еволюційну півгрупу $S_t : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (простір $\mathcal{L}$ визначено в (3.157)) за формулою $S_t\varphi \equiv u_t$, $t \geq 0$, де $u(t)$ - єдиний розв'язок задачі (3.149), (3.153).

Зауваження 3.89 *Слід підкреслити, що еволюційна півгрупа $S_t : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ не є динамичною системою в стандартному сенсі (див., наприклад [2, 200, 31] оскільки S_t не є неперервним відображенням в топології $\mathcal{L}$, тобто задача (3.149), (3.153) не є коректно поставленою в сенсі Ж.Адамара [92, 93].*

Нашою першою метою є довести наступну лему.

Лема 3.90 . *Нехай всі умови теореми 3.86 виконані. Тоді для довільного $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, існує обмежена в просторі $C^1([-r, 0]; D(A^{-1/2})) \cap C([-r, 0]; D(A^{\alpha}))$ множина $\mathcal{B}V_{\alpha}$, яка поглинає довільний розв'язок задачі (3.149), (3.153) з довільної початковою функцією $\varphi \in \mathcal{L}$.*

Доведення леми 3.90. Використовуючи $||A^{1/2}v||^2 \le \lambda_1^{-1} \cdot ||Av||^2$, ми отримуємо з (3.161), що $\frac{d}{dt}||A^{1/2}u^m(t)||^2 + \lambda_1||A^{1/2}u^m(t)||^2 \le M_b^2|\Omega|$. Домножуємо останню оцінку на $e^{\lambda_1 t}$ та інтегруємо по $[0, t]$ для отримання

$$||A^{1/2}u^m(t)||^2 \le ||A^{1/2}u^m(0)||^2 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_1^{-1} M_b^2|\Omega| \le ||A^{1/2}\varphi(0)||^2 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_1^{-1} M_b^2|\Omega|. \tag{3.173}$$

Це та (3.160) дають $||A^{-1/2}\dot{u}^m(t)||^2 \le 2||A^{1/2}\varphi(0)||^2 e^{-\lambda_1 t} + 2\lambda_1^{-1} M_b^2|\Omega| + M_b^2|\Omega|$. Останні дві оцінки дають

$$||A^{1/2}u^m(t)||^2 + ||A^{-1/2}\dot{u}^m(t)||^2 \le 3||A^{1/2}\varphi(0)||^2 e^{-\lambda_1 t} + (1 + 3\lambda_1^{-1}) M_b^2|\Omega|. \tag{3.174}$$

Ми отримуємо аналогічну оцінку для розв'язку задачі (3.149), (3.153), використовуючи відоме твердження 3.9 (див. [8, теорема 9]).

Розглянемо простір $V \equiv C^1([-r, 0]; D(A^{-1/2})) \cap C([-r, 0]; D(A^{1/2}))$, зафіксуємо довільне додатнє ε_0 та отримаємо, що куля $\mathcal{B}_0$ простору V

$$\mathcal{B}_0 \equiv \left\{ v \in V : ||v||_V^2 \le R_0^2 \equiv (1 + 3\lambda_1^{-1}) M_b^2|\Omega| + \varepsilon_0 \right\} \tag{3.175}$$

є поглинаючою для довільного розв'язку задачі (3.149), (3.153) (див. (3.174)).

Тепер ми скористаємось обговореннями з [31, лема 2.4.1, с.101] та отримаємо (для довільного $\frac{1}{2} < \alpha < 1$) існування поглинаючої кулі

$$\mathcal{B}_{\alpha} \equiv \left\{ v \in C([-r, 0]; D(A^{\alpha})) : ||v||_{C([-r,0];D(A^{\alpha}))} \le R_{\alpha} \right\}, \tag{3.176}$$

де $R_\alpha \equiv (\alpha - 1/2)^{\alpha-1/2} \cdot \left[\lambda_1^{-1/2} M_b \sqrt{|\Omega|} + \varepsilon\right] + \frac{\alpha^\alpha}{1-\alpha} \cdot M_b \sqrt{|\Omega|}$ з довільним фіксованим $\varepsilon > 0$. Детальніше, стандартна формула варіації сталих $u(t) = e^{-At}u(0) + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} F(u_\tau)\, d\tau$ та оцінка $||A^\alpha e^{-tA}|| \le \left(\frac{\alpha}{t}\right)^\alpha e^{-\alpha}$ (див., наприклад [31, (1.17), с.84]) дають

$$||A^\alpha u(t+1)|| \le (\alpha - 1/2)^{\alpha-1/2} ||A^{1/2}u(t)|| + \int_t^{t+1} \left(\frac{\alpha}{t+1-\tau}\right)^\alpha ||F(u_\tau)||\, d\tau.$$

Розглянемо довільну в $\mathcal{L}$ множину $\hat{B}$. Оцінка (3.173) та твердження 3.9 дають $||A^{1/2}u(t)|| \le \left[\lambda_1^{-1/2} M_b \sqrt{|\Omega|} + \varepsilon\right]$ для всіх $t \ge t_{\hat{B}}$ (тут $t_{\hat{B}}$ залежить тільки від $\hat{B}$). Це та оцінка $||F(u_\tau)|| \le M_b \sqrt{|\Omega|}$ дають (3.176).

Оцінки (3.175), (3.176) показують існування підмножини (кулі) простору $V_\alpha \equiv C^1([-r,0]; D(A^{-1/2})) \cap C([-r,0]; D(A^\alpha))$ (тут $\frac{1}{2} < \alpha < 1$)

$$\mathcal{B}V_\alpha \equiv \left\{ v \in V_\alpha : ||v||_{V_\alpha} \le \widehat{R}_\alpha \right\}, \tag{3.177}$$

такої, що для довільного розв'язку, який починається в φ з довільної обмеженої множини $\hat{B} \subset \mathcal{L}$, існує $t_{\hat{B}} \ge 0$ таке, що

$$S_t\varphi \in \mathcal{B}V_\alpha, \qquad \text{для всіх} \qquad t \ge t_{\hat{B}}. \tag{3.178}$$

Доведення леми 3.90 завершено.■

Ми будемо використовувати позначення

$$|||\varphi||| \equiv \sup_{s \ne t} \left\{ \frac{||A^{-1/2}(\varphi(s) - \varphi(t))||}{|s-t|} \right\} \text{ для } \varphi \in \mathcal{L}.$$

Зафіксуємо $R^0 > 0$ та розглянемо метричний простір $\mathcal{L}_{R^0}$ який є множиною $\left\{\varphi \in \mathcal{L} : |||\varphi||| \le R^0\right\}$ споряджений метрикою (порівняйте з (3.158))

$$\rho(\varphi, \phi) \equiv \max_{s \in [-r,0]} ||A^{-1/2}(\varphi(s) - \phi(s))|| + ||A^{1/2}(\varphi(0) - \phi(0))||. \tag{3.179}$$

Легко переконатися, що $(\mathcal{L}_{R^0}; \rho)$ є повним метричним простором та довільна множина $\left\{\varphi \in \mathcal{L} : |||\varphi||| \le R^1 < R^0\right\}$ є замкненою.

Нам знадобиться наступне (технічне) припущення

(H.I) *Існує $R^0 > \widehat{R}_\alpha$ ($\widehat{R}_\alpha$ визначене в (3.177)) таке, що множина*

$\{\varphi \in \mathcal{L} \,:\, |||\varphi||| \le R^0\}$ *є додатньо інваріантною для півгрупи* S_t *тобто*

$$\forall \varphi \in \mathcal{L} : |||\varphi||| \le R^0 \quad \Rightarrow \quad |||S_t\varphi||| \le R^0, \quad \forall t > 0. \tag{3.180}$$

Нашим наступним кроком є

Теорема 3.91 . *Нехай (H.I) та всі припущення теореми 3.86 виконані. Тоді еволюційна півгрупа* $S_t : \mathcal{L}_{R^0} \to \mathcal{L}_{R^0}$ *має глобальний атрактор в метричному просторі* $(\mathcal{L}_{R^0}; \rho)$.

Доведення теореми 3.91. Зараз ми зосередимось на метричному просторі $(\mathcal{L}_{R^0}; \rho)$ (тут $R^0 > \widehat{R}_\alpha$). Причиною цього є той факт, що еволюційна півгрупа S_t **не** є неперервною на всьому просторі $\mathcal{L}$ (див. зауваження вище.) З іншого боку, ми відмічаємо:

Зауваження 3.92 *Оцінка (3.171) дає, що еволюційна півгрупа* S_t *є неперервним відображенням в топології* $(\mathcal{L}_{R^0}; \rho)$ *тобто* $\rho(S_t\varphi, S_t\phi) \le D_{v,T} \cdot \rho(\varphi, \phi)$ *для* $\varphi, \phi \in \mathcal{L}_{R^0}$*, та* $t \in [0, T]$*. Тут* $D_{v,T}$ *визначено в (3.172) (див. також (3.168)) з* $L_{v,T} = R^0$ *(порівн. (3.165)).*

Наслідок 4 з роботи [188] дає, що $\mathcal{B}V_\alpha$ є предкомпактом в $C([-r, 0]; D(A^{-1/2}))$ (див. також [188, лема 1]). Цей факт та властивість $||A^\alpha\varphi(0)|| \le \widehat{R}_\alpha, \frac{1}{2} < \alpha < 1$ для всіх $\varphi \in \mathcal{B}V_\alpha$ дає, що $\mathcal{B}V_\alpha$ є предкомпактом в топології $(\mathcal{L}_{R^0}; \rho)$.

Розглянемо наступну множину $K \equiv Cl\,[\mathcal{B}V_\alpha]_{(\mathcal{L}_{R^0};\rho)}$, де $Cl\,[\cdot]_{(\mathcal{L}_{R^0};\rho)}$ є замкненням в топології $(\mathcal{L}_{R^0}; \rho)$. Згадані властивості показують, що K є компактом в $(\mathcal{L}_{R^0}; \rho)$.

Ми отримуємо (див. (3.178)), що для довільного розв'язку, який починається в φ з довільної обмеженої множини $\widetilde{B} \subset \mathcal{L}_{R^0}$, існує $t_{\widetilde{B}} \ge 0$ таке, що

$$S_t\varphi \in \mathcal{B}V_\alpha \subset K, \qquad \text{для всіх} \qquad t \ge t_{\widetilde{B}}.$$

В результаті, ми підсумовуємо, що еволюційна півгрупа S_t є асимптотично компактною (та дисипативною) в $(\mathcal{L}_{R^0}; \rho)$. Таким чином, на основі класичної теореми 1.7 про існування глобального атрактора (див., наприклад, [2, 200, 31]) ми отримуємо, що $(S_t; (\mathcal{L}_{R^0}; \rho))$ має компактний глобальний атрактор. Доведення теореми 3.91 завершено. ∎

3.7.3. Рівняння з модифікованою нелінійністтю. Обговорюючи технічне припущення (H.I), ми підмітемо, що навіть у випадку невиконання (H.I) для початкової задачі, лема 3.90 дозволяє розглядати модифіковану задачу без зміни асимптотичної поведінки S_t (див. [75]). Детальніше, виберемо [75, с.545] деяку C^∞-функцію $\chi : [0, +\infty) \to [0, 1]$ таку, що

$$\begin{cases} \chi(s) = 1, & s \in [0, 1]; \\ \chi(s) = 0, & s \in [2, +\infty); \\ 0 \le \chi(s) \le 1, & s \in [1, 2] \end{cases}$$

та позначимо

$$\widetilde{F}(\varphi) \equiv \chi\left(\frac{||\varphi||_{H,d}}{\widehat{R}_\alpha}\right) \cdot F(\varphi).$$

Для зручності, ми позначаємо $||\varphi||_{H,d} \equiv ||A^{1/2}\varphi(0)|| + d \cdot ||A^{-1/2}\varphi||_C$.

В результаті, модифікована задача (3.149) (з $\widetilde{F}(\varphi)$ замість $F(\varphi)$) має таку саму поведінку всередині (поглинаючої) множини $\mathcal{B}V_\alpha$ (фактично поведінка не змінюється всередині більшої множини $\{\varphi : ||\varphi||_{H,d} \le \widehat{R}_\alpha\}$).

Тепер, використовуючи $||\widetilde{F}(\varphi)|| \le ||F(\varphi)|| \le M_b\sqrt{|\Omega|}$ та оцінку $||A^{-1/2}\dot{u}(t)|| \le ||A^{1/2}u(t)|| + d||A^{-1/2}u(t)|| + M_b\sqrt{|\Omega|}$, ми отримуємо, що множина

$$\mathcal{L}(\widehat{R}_\alpha) \equiv \left\{\varphi \in \mathcal{L} \quad : \quad ||\varphi||_{H,d} \le 2\widehat{R}_\alpha; \quad |||\varphi||| \le 2\widehat{R}_\alpha + M_b\sqrt{|\Omega|}\ \right\}$$

є додатньо інваріантною для еволюційного оператора, побудованого за розв'язками (3.149) з модифікованою нелінійностью $\widetilde{F}(\varphi)$. Відмітемо, що $\mathcal{B}V_\alpha \subset \mathcal{L}(\widehat{R}_\alpha) \subset \{\varphi : ||\varphi||_{H,d} \le 2\widehat{R}_\alpha\}$.

Ця інваріантність множини $\mathcal{L}(\widehat{R}_\alpha)$ дає можливість визначити еволюційний оператор $\widetilde{S}_t : \mathcal{L}(\widehat{R}_\alpha) \to \mathcal{L}(\widehat{R}_\alpha)$ за розв'язками (3.149) з модифікованою нелінійностью $\widetilde{F}$.

Слідуючи аргументам, представленим в теоремі 3.91, ми доводимо наступний аналог теореми 3.91.

Теорема 3.93 . *Нехай* **(H.I)** *та всі припущення теореми 3.86 виконані. Тоді еволюційна півгрупа $\widetilde{S}_t : \mathcal{L}(\widehat{R}_\alpha) \to \mathcal{L}(\widehat{R}_\alpha)$ має глобальний атрактор в метричному просторі $(\mathcal{L}(\widehat{R}_\alpha); \rho)$. Тут, як і раніше, ρ - метрика, яка визначена в (3.179).*

Зауваження 3.94 *Обговорюючи звуження розглядів з лінійного простору $\mathcal{L}$ до метричного простору $(\mathcal{L}_{R^0};\rho)$ або $(\mathcal{L}(\widehat{R}_\alpha);\rho)$, ми відмічаємо, що це природній крок навіть для звичайних диференціальних рівнянь з зосередженим загаюванням, що залежить від стану. Наприклад, в [204, твердження 1 та наслідок 1] показано, що максимальні розв'язки скалярного рівняння з загаюванням складають півпотік на множині* $\{\phi : Lip(\phi) \le k, ||\phi|| < w\} \subset C([-r,0],\mathbb{R})$. *Тут* $Lip(\phi) = \sup_{x\neq y} |\phi(x) - \phi(y)| \cdot |x-y|^{-1}$.

3.7.4. Частковий випадок сталого загаювання (η = const). В цьому частковому випадку, припущення (H.η) (див. (3.155)) виконується автоматично з $L_\eta = 0$. Слідуючи доведенню теореми 3.86, ми бачимо, що припущення $\sup\limits_{s\neq t}\left\{||A^{-1/2}(\varphi(s)-\varphi(t))|| \cdot |s-t|^{-1}\right\} < +\infty$ не використовується у випадку $\eta = \text{const}$. Це дає, що для довільної початкової функції $\varphi \in H$ (порівняйте з (3.157)),

$$H \equiv \left\{\varphi \in C([-r,0]; D(A^{-1/2})) \mid \varphi(0) \in D(A^{1/2})\right\} \tag{3.181}$$

задача (3.149), (3.153) має розв'язок. Єдиність розв'язків випливає з (3.171) та факта, що $L_\eta = 0$ дає $D_{v,T}$ (визначене в (3.172)) обмежено для довільного $\varphi \in H$ (пор. зауваження 3.88) та це дає неперервність $S_t : H \to H$ (порівн. зауваження 3.89) та, як наслідок, пара $(S_t; H)$ складає динамічну систему.

Слідуючи доведенню леми 3.90 та теореми 3.91, ми маємо наступний результат.

Теорема 3.95 . *Нехай $\eta = const$, припущення* **(H.B)** *виконано та функція $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є локально липшицевою та обмеженою. Тоді для довільної початкової функції $\varphi \in H$ задача (3.149), (3.153) має єдиний розв'язок на довільному інтервалі $[0,T]$. Розв'язок має властивість $\dot{u} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.*

Більш того, пара $(S_t; H)$ складає динамічну систему, яка має глобальний атрактор. Атрактор є обмеженою множиною в $C^1([-r,0]; D(A^{-1/2})) \cap C([-r,0]; D(A^\alpha))$ для довільного $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Тепер ми можемо порівняти два випадки (загаювань, які залежать та не залежать від стану), припускаючи

- умова **(H.B)** виконана та
- функція $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ локально липшицева та обмежена.

Таблиця 3.1

	загаювання η, що залежить від стану	η незалежне від стану
існування та єдиність розв'язків	$\varphi \in \mathcal{L} \subset H$ та (H.η)	$\varphi \in H$
неперервність S_t та існування атрактора	$S_t : (\mathcal{L}_{R^0}; \rho) \to (\mathcal{L}_{R^0}; \rho)$ $\widetilde{S}_t : (\mathcal{L}(\widehat{R}_\alpha); \rho) \to (\mathcal{L}(\widehat{R}_\alpha); \rho)$	$S_t : H \to H$

Зауваження 3.96 *Відмітемо, що $\mathcal{L}_{R^0} \subset \mathcal{L} \subset H$ та метрика ρ є природньою метрикою простору H.*

Щодо застосування (для обох випадків загаювання, що залежить від стану та сталого загаювання) ми можемо розглянути дифузійне рівняння Ніколсона (див., наприклад, [197, 195]) з ЗЗС. Більш детально, ми розглядаємо рівняння (3.149) де $-A$ - є оператором Лапласа з умовою Дирихле на межі, $\Omega \subset R^{n_0}$ є обмеженою множиною з гладкою межею, функція f може бути, наприклад, $f(s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} e^{-s^2/4\alpha}$, як у [196]. Нелінійна функція (народжуваності) b визначається як $b(w) = p \cdot we^{-w}$. Функція b є обмеженою, отже для довільної функції загаювання η, яка задовільняє $(H.\eta)$, умови теорем виконані (за умови виконання припущення **(H.I)**). В результаті, ми отримуємо, що початкова задача (3.149), (3.153) є коректно поставленою та динамічна система $(S_t, (\mathcal{L}_{R^0}; \rho))$ має глобальний атрактор. Якщо необхідно, ми можемо модифікувати систему (як пояснено вище) та отримати існування глобального атрактору для динамічної системи $\left(\widetilde{S}_t; (\mathcal{L}(\widehat{R}_\alpha); \rho)\right)$.

3.8. Рівняння з розподіленим у просторі та часі загаюванням, що залежить від стану

В цьому підрозділі ми пропонуємо новий клас нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних із загаюваннями, які є розподіленими як у часі так і у просторі, і одночасно є залежними від стану. Ми пропонуємо підходящі умови на кореневу функцію, яка репрезентує ЗЗС та обговорюємо переваги цього класу рівнянь. Ми досліджуємо асимптотичну поведінку розв'язків, включно з доведенням існування глобального атрактору, а також доведенням принципа лініаризованої стійкості.

Проілюструємо основне питання, яке ми досліджуємо в цьому підрозділі, на спрощенному прикладі з локальним в просторі загаюваним елементом. Розглянемо наступний загаюваний елемент (розподілений в часі) $\int_{-r}^{0} b(u(t+\theta,x))\xi(\theta)d\theta$. Тут функція ξ належить деякому простору дійснозначних функцій, визначених на загаюваному інтервалі $(-r,0)$. Ця (коренева) функція ξ представляє правило за яким інформація про минулі стани системи (функція u) використовується для моделювання процеса. Як обговорювалось (див., наприклад, [155, 156]), це правило може змінюватись в залежності від стану системи. Позначимо $v \in H$ фазову координату, де H позначає фазовий простір. В цих позначеннях правило вибору загаювання, залежного від стану, виглядає як $\xi(\theta,v) : (-r,0) \times H \to R$ та відповідний загаюваний елемент записується як $\int_{-r}^{0} b(u(t+\theta,x))\xi(\theta,v)d\theta$. Це спрощений (локальний) приклад загаюваного елемента, який вивчався у наших роботах [155, 156]. Як буде видно пізніше, вивчаючи деякі питання (наприклад, стаціонарні розв'язки), виникає необхідність у використанні більш широкого класу функцій ξ (загаюваних правил), які розподілені в просторі, тобто $\xi(\theta,x,v)$. Наприклад, розглядаючи деяку біологічну систему, де $u(t,x)$ представляє щільність популяції в момент часу t в точці простору $x \in \Omega$, загаюване правило $\xi(\theta,v)$ одне і те саме для всіх точок x області Ω, а загаюване правило $\xi(\theta,x,v)$ залежить від точок $x \in \Omega$ (наприклад, залежність ресурсів від точок простору в Ω). Це показує, що загаюване правило $\xi(\theta,x,v)$ є більш реалістичним з біологічної точки зору і, як ми побачимо далі, з матиматичної. Враховуючи викладену мотивацію, нам потрібно знайти підходящий клас функцій ξ, концентируючись на характері залежності ξ від координати $x \in \Omega$. Це є основною метою цього підрозділу. Цікаво відмітити, що всупереч тому факту, що в кожен момент часу $t \geq 0$ розв'язки $u(t)$ належать простору $L^2(\Omega)$ та фазова координата $(u(t); u(t+\theta))$ належить простору $L^2(\Omega) \times L^2(-r, 0; L^2(\Omega))$, але значення функції ξ (як функції зміної x) не обов'язково належить простору $L^2(\Omega)$. Вони належать більш широкому простору $D(A^{-1/2}) \supset L^2(\Omega)$ (для деталей див. теореми 3.98 та 3.100 нижче).

Модель, яка пропонується, має істотню перевагу перед моделями, що були розглянуті раніше (див. [155, 156]), надаючи можливість розглядати випадки скінченної або навіть нескінченної кількості ізольованих стаціонарних розв'язків. Ми також пропонуємо алгоритм побудови такого загаюваного елемента (з ЗЗС). Результати цього підрозділу були викладені в роботі [158].

Результати можуть бути використані при вивченні рівняння Ніколсона з дифузією. Детальніше, пропонується широкий клас рівнянь у частинних похідних з загаюваними елементами, які дають додаткову можливість використати інформацію (наприклад, отриману з експериментів) про множину стаціонарних розв'язків. Такої можливості не було в раніше досліджуваних моделях (див., наприклад, [197, 195, 196, 155, 156]), де для прийняття до уваги нової стаціонарної точки, було необхідно переформулювати всю модель. В нашому випадку, достатньо лише змінити кореневу функцію ξ в околі стаціонарної точки. Ми також сподіваємось, що умови на кореневу функцію, знайдені в цій роботі, можуть бути корисні для чисельного дослідження моделі.

3.8.1. Постановка задачі та основні властивості розв'язків. Розглянемо наступне нелокальне рівняння у частинних похідних із загаюванням, розподіленим в просторі та часі та залежним від стану

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) + Au(t,x) + du(t,x)\\ &= \int_{-r}^{0} \left\{\int_\Omega b(u(t+\theta,y)) f(x-y)dy\right\} \xi(\theta, x, u(t), u_t)d\theta \equiv \big(F(u_t)\big)(x), x \in \Omega\end{aligned} \tag{3.182}$$

де A задовільняє (A1), Ω гладка обмежена область у $\mathbb{R}^{n_0}$, $f : \Omega - \Omega \to \mathbb{R}$ обмежена функція, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є локально липшицевою та обмеженою ($|b(w)| \leq C_b$ з $C_b \geq 0$), d є додатня стала. Функція $\xi(\cdot,\cdot,\cdot) : [-r, 0] \times \Omega \times H \to \mathbb{R}$ представляє *розподілене* загаювання, що залежить від стану. Для скорочення позначимо $H \equiv L^2(\Omega) \times L^2(-r, 0; L^2(\Omega))$ та будемо використовувати позначення $\| \cdot \|$ та $\langle \cdot, \cdot \rangle$ для норми та скалярного добутка в просторі $L^2(\Omega)$.

Розглянемо рівняння (3.182) із початковими умовами

$$u(0+) = u^0 \in L^2(\Omega), \quad u|_{(-r,0)} = \varphi \in L^2(-r, 0; L^2(\Omega)). \tag{3.183}$$

Таким чином, ми пишемо $(u^0, \varphi) \in H$.

Зараз ми обговоримо існування та властивості розв'язків задачі з загаюванням (3.182), (3.183).

Визначення 3.97 *Функція u зветься слабким розв'язком задачі (3.182) із початковими умовами (3.183) на інтервалі $[0, T]$, якщо $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(-r, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; D(A^{\frac{1}{2}}))$, $u(\theta) = \varphi(\theta)$ для $\theta \in (-r, 0)$ та*

$$-\int_0^T \langle u, \dot{v} \rangle dt + \int_0^T \langle A^{\frac{1}{2}} u, A^{\frac{1}{2}} v \rangle dt + \int_0^T \langle du - F(u_t), v \rangle dt = -\langle u^0, v(0) \rangle \tag{3.184}$$

для довільної функції $v \in L^2(0, T; D(A^{\frac{1}{2}}))$ з $\dot{v} \in L^2(0, T; D(A^{-\frac{1}{2}}))$ та $v(T) = 0$.

Теорема 3.98 . *Припустимо, що*

(i) $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є локально липшицевою та обмеженою тобто, існує стала C_b така, що $|b(w)| \le C_b$ для всіх $w \in \mathbb{R}$;

(ii) $f : \overline{\Omega - \Omega} \to R$ обмежена та вимірна ($|f(\cdot)| \le M_f$);

(iii) $\xi : [-r, 0] \times \Omega \times L^2(\Omega) \times L^2(-r, 0; L^2(\Omega)) \to \mathbb{R}$ задовільняє наступній умові:

a) *для довільного $M > 0$ існує $L_{\xi,M}$ таке, що для всіх $(v^i, \psi^i) \in H$, які задовільняють $||v^i||^2 + \int_{-r}^0 ||\psi^i(s)||^2 ds \le M^2, i = 1, 2$, виконується*

$$\int_{-r}^0 ||\xi(\theta, \cdot, v^1, \psi^1) - \xi(\theta, \cdot, v^2, \psi^2)||_{D(A^{-1/2})} \, d\theta$$
$$\le L_{\xi,M} \cdot \left[||v^1 - v^2||^2 + \int_{-r}^0 ||\psi^1(s) - \psi^2(s)||^2 ds \right]^{1/2}, \tag{3.185}$$

b) *існує $C_{(\xi,-1/2)} > 0$ таке, що*

$$\int_{-r}^0 \|\xi(\theta, \cdot\,, v, \psi)\|_{D(A^{-1/2})} \, d\theta \le C_{(\xi,-1/2)} \text{ для всіх } (v, \psi) \in H. \tag{3.186}$$

Тоді для довільного $(u^0,\varphi) \in H \equiv L^2(\Omega) \times L^2(-r,0;L^2(\Omega))$ *задача* (3.182) *із початковими умовами* (3.183) *має слабкий розв'язок* $u(t)$ *на кожному інтервалі* $[0,T]$ *та цей розв'язок задовільняє*

$$u(t) \in C([0,T];L^2(\Omega)). \tag{3.187}$$

Зауваження 3.99 *Умови (iii)-a) та (iii)-b) означають, що* ξ *як функція своїх третьої та четвертої координат* $(v,\psi) \in H$ *є (нелінійним) локально липшицевим та глобально обмеженим відображенням* $\xi : H \to L^1(-r,0;D(A^{-\frac{1}{2}}))$.

Доведення теореми 3.98. Як і раніше, ми позначаємо $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормований базис простору $L^2(\Omega)$ такий, що $Ae_k = \lambda_k e_k$, $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k \to +\infty$. Ми називаємо функцію $u^m(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{m} g_{k,m}(t)e_k(x)$ *наближеним розв'язком (за Галеркіним) порядку* m *для задачі* (3.182),(3.183), якщо

$$\begin{cases} \langle \dot{u}^m + Au^m + du^m - F(u_t^m), e_k\rangle = 0, \\ \langle u^m(0+), e_k\rangle = \langle u^0, e_k\rangle,\ \langle u^m(\theta), e_k\rangle = \langle \varphi(\theta), e_k\rangle,\ \forall \theta \in (-r,0) \end{cases} \tag{3.188}$$

$\forall k = 1,\ldots,m$. Тут $g_{k,m} \in C^1(0,T;R) \cap L^2(-r,T;R)$ з абсолютно неперервними функціями $\dot{g}_{k,m}(t)$.

Рівняння (3.188) для фіксованого m можуть бути переписані як система для m-вимірної вектор-функції $v(t) = v^m(t) = (g_{1,m}(t),\ldots,g_{m,m}(t))^T$. Відмітемо, що $\|u^m(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum\limits_{k=1}^{m} g^2_{k,m}(t) = |v(t)|^2_{R^m}$.

Стандартна техніка (див., наприклад, [30]) дає, що для довільної початкової функції $\varphi \in L^2(-r,0;R^m)$, $a \in R^m$ існують $\alpha > 0$ та єдиний розв'язок задачі (3.188) $v \in L^2(-r,\alpha;R^m)$ такий, що $v_0 = \varphi$ и $v(0) = a$, $v|_{[0,\alpha]} \in C([0,\alpha];R^m)$ (для подальших деталей див. теорему 6 та зауваження 9 з [27], а також лему з [156]).

Легко бачити з (3.186) та обмеженості функцій b та f, що

$$|\langle F(u_t), v\rangle_{L^2(\Omega)}| = \left| \int_\Omega \left\{ \int_{-r}^{0} \left[\int_\Omega b(u(t+\theta,y)) f(x-y)dy \right] \xi(\theta,x,u(t),u_t)d\theta \right\} v(x)dx \right|$$

$$= \left| \int_{-r}^{0} \left[\int_{\Omega} b(u(t+\theta, y)) \left\{ \int_{\Omega} f(x-y)\xi(\theta, x, u(t), u_t)v(x)dx \right\} dy \right] d\theta \right|$$

$$\le C_b M_f |\Omega| \int_{-r}^{0} \|\xi(\theta, \cdot, u(t), u_t)\|_{D(A^{-1/2})} d\theta \cdot ||v||_{D(A^{1/2})}.$$

Використовуючи (3.186), отримуємо

$$|\langle F(u_t), v\rangle_{L^2(\Omega)}| \le C_b M_f |\Omega| C_{(\xi,-1/2)} \cdot \|A^{1/2}v\|. \tag{3.189}$$

Тепер ми отримаємо *апріорну* оцінку для галеркінских наближених розв'язків задачі (3.182),(3.183). Беремо добуток (3.188) та $g_{k,m}$ та сумуємо для $k = 1, \cdots, m$. Таким чином, для $u(t) = u^m(t)$ та $t \in (0, \alpha] \equiv (0, \alpha(m)]$, інтервал локального існування для $u^m(t)$, ми отримуємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \|A^{1/2}u(t)\|^2 + d\|u(t)\|^2 \le |\langle F(u_t), u(t)\rangle|. \tag{3.190}$$

Використовуючи (3.189), (3.190), отримуємо

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \|A^{1/2}u(t)\|^2 + 2d\|u(t)\|^2 \le C_b^2 M_f^2 |\Omega|^2 C^2_{(\xi,-1/2)} \equiv \tilde{k}_1. \tag{3.191}$$

Оскільки $\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \|A^{1/2}u(t)\|^2 + 2d\|u(t)\|^2 = \frac{d}{dt}(\|u(t)\|^2 + \int_0^t \|A^{1/2}u(\tau)\|^2 d\tau + 2d\int_0^t \|u(\tau)\|^2 d\tau)$, ми позначаємо $\chi(t) \equiv \|u(t)\|^2 + \int_0^t \|A^{1/2}u(\tau)\|^2 d\tau + 2d\int_0^t \|u(\tau)\|^2 d\tau$ та переписуємо останню оцінку наступним чином $\frac{d}{dt}\chi(t) \le \tilde{k}_1$. Отримуємо $\chi(t) \le \chi(0) + \tilde{k}_1 t = \|u(0)\|^2 + \tilde{k}_1 t$. Таким чином, ми прийшли до *апріорної* оцінки

$$\|u(t)\|^2 + \int_0^t \|A^{1/2}u(\tau)\|^2 d\tau + 2d\int_0^t \|u(\tau)\|^2 d\tau \le \|u(0)\|^2 + \tilde{k}_1 t. \tag{3.192}$$

Оцінка (3.192) дає, що для $u^0 \in L^2(\Omega)$ родина наближених розв'язків $\{u^m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ є рівномірно (по $m \in \mathbf{N}$) обмеженим в просторі $L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; D(A^{1/2}))$, де $D(A^{1/2})$ область визначення оператора $A^{1/2}$ та $[0,T]$ є інтервалом локального існування. З (3.192) ми також отримуємо продовжуванність функцій $u^m(t)$ на довільний інтервал, тобто (3.192) виконується для всіх $t > 0$.

Використовуючи визначення наближених галеркінских розв'язків (3.188) та властивість (3.192), ми можемо проінтегрувати по $[0,T]$ та отримати

$\int_0^T \|A^{-1/2}\dot{u}^m(\tau)\|^2 d\tau \leq C_T$ для довільного T. Ці властивості родини $\{u^m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ дають, що $\{(u^m(t); \dot{u}^m(t))\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю в просторі

$$X_T \equiv L^{\infty}(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; D(A^{1/2})) \times L^2(0,T; D(A^{-1/2})). \tag{3.193}$$

Тоді існують функція $(u(t); \dot{u}(t))$ та підпослідовність $\{u^{m_k}\} \subset \{u^m\}$ такі, що

$$(u^{m_k}; \dot{u}^{m_k}) \quad {}^*\text{-слабко збігається до} \quad (u; \dot{u}) \quad \text{у просторі} \quad X_T. \tag{3.194}$$

Стандартні обговорення (використовуючи сильну збіжність $u^{m_k} \to u$ в просторі $L^2(0,T; L^2(\Omega))$, яка випливає з (3.194) та теореми Ю.А.Дубінського (див., наприклад, [6], [188, наслідок 4]), можна показати (див. [122, 31, 147], що довільна *-слабка границя є розв'язком (3.182) із початковими умовами (3.183). Для доведення неперервності слабких розв'язків ми використовуємо відоме твердження 3.7 (див. [191, твердження 1.2], [123, теорема 1.3.1]). В нашому випадку у твердженні 3.7: $X = L^2(\Omega), V = D(A^{1/2}), V^* = D(A^{-1/2}), p = q = 1/2$ (див. (3.193),(3.194)). Це дає (3.187). Доведення теореми 3.98 завершено. ■

Тепер ми дамо достатню умову єдиності слабкого розв'язку.

Теорема 3.100 . *Нехай функції b та f такі, як в теоремі 3.98 (задовільняють властивостям (i),(ii)), функція ξ задовільняє властивості (iii)-a) та*

$$\xi(\cdot,\cdot,v,\psi) \in L^{\infty}(-r,0; D(A^{-1/2})) \text{ для всіх } (v,\psi) \in H. \tag{3.195}$$

Тоді розв'язок задачі (3.182), (3.183), знайдений в теоремі 3.98, є єдиним.

Доведення теореми 3.100. Нехай u^1 та u^2 два розв'язки задачі (3.182), (3.183). В подальшому, для простоти, ми позначимо $w(t) = w^m(t) = u^{1,m}(t) - u^{2,m}(t)$ - різниця відповідних наближень Галеркіна. Таким чином

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + 2\|A^{1/2}w(t)\|^2 + 2d\|w(t)\|^2 = \langle F(u_t^1) - F(u_t^2), w(t)\rangle. \tag{3.196}$$

Розглянемо різницю $\langle F(u_t^1) - F(u_t^2), w(t)\rangle$ детальніше (див. (3.182)).

$$\langle F(u_t^1) - F(u_t^2), w(t)\rangle \equiv \int_{\Omega} \left[\int_{-r}^{0} \left\{ \int_{\Omega} b(u^1(t+\theta,y)) f(x-y) dy \right\} \xi(\theta,x,u^1(t),u_t^1) d\theta\right.$$

$$-\int_{-r}^{0}\left\{\int_{\Omega}b(u^2(t+\theta,y))f(x-y)dy\right\}\xi(\theta,x,u^2(t),u_t^2)d\theta\Bigg]\cdot w(t,x)dx$$

$$=\int_{\Omega}\Bigg[\int_{-r}^{0}\left\{\int_{\Omega}b(u^1(t+\theta,y))f(x-y)dy\right\}\xi(\theta,x,u^1(t),u_t^1)d\theta-$$

$$-\int_{-r}^{0}\left\{\int_{\Omega}b(u^2(t+\theta,y))f(x-y)dy\right\}\xi(\theta,x,u^1(t),u_t^1)d\theta\Bigg]\cdot w(t,x)dx,$$

$$+\int_{\Omega}\Bigg[\int_{-r}^{0}\left\{\int_{\Omega}b(u^2(t+\theta,y))f(x-y)dy\right\}\xi(\theta,x,u^1(t),u_t^1)d\theta-$$

$$-\int_{-r}^{0}\left\{\int_{\Omega}b(u^2(t+\theta,y))f(x-y)dy\right\}\xi(\theta,x,u^2(t),u_t^2)d\theta\Bigg]\cdot w(t,x)dx.$$

Використовуючи локальну липшицевість функції b, (3.195) і (3.185), ми отримуємо

$$|\langle F(u_t^1)-F(u_t^2),w(t)\rangle|$$

$$\leq L_bM_f\int_{-r}^{0}\left\{\int_{\Omega}|w(t+\theta,y)|\,dy\cdot\int_{\Omega}|\xi(\theta,x,u^1(t),u_t^1)|\cdot|w(t,x)|\,dx\right\}d\theta$$

$$+C_bM_f|\Omega|\int_{-r}^{0}||\xi(\theta,\cdot,u^1(t),u_t^1)-\xi(\theta,\cdot,u^2(t),u_t^2)||_{D\left(A^{-1/2}\right)}d\theta\cdot||A^{1/2}w(t)||$$

$$\leq L_bM_f\sqrt{|\Omega|}\int_{-r}^{0}||w(t+\theta,\cdot)||\cdot||\xi(\theta,\cdot,u^1(t),u_t^1)||_{D\left(A^{-1/2}\right)}\cdot||A^{1/2}w(t)||\,d\theta$$

$$+C_bM_f|\Omega|L_{\xi,M}\left[||w(t)||^2+\int_{-r}^{0}||w(t+s)||^2ds\right]^{1/2}\cdot||A^{1/2}w(t)||$$

$$\leq L_bM_f\sqrt{|\Omega|}\quad\operatorname*{ess\,sup}_{\theta\in(-r,0)}||\xi(\theta,\cdot,u^1(t),u_t^1)||_{D\left(A^{-1/2}\right)}\cdot\int_{-r}^{0}||w(t+\theta,\cdot)||\cdot||A^{1/2}w(t)||\,d\theta$$

$$+\frac{1}{2}||A^{1/2}w(t)||^2+\frac{1}{2}C_b^2M_f^2|\Omega|^2L_{\xi,M}^2\left[||w(t)||^2+\int_{-r}^{0}||w(t+s)||^2ds\right]$$

$$\leq\frac{1}{2}||A^{1/2}w(t)||^2+\frac{1}{2}L_b^2M_f^2|\Omega|\,r\left[\operatorname*{ess\,sup}_{\theta\in(-r,0)}||\xi(\theta,\cdot,u^1(t),u_t^1)||_{D\left(A^{-1/2}\right)}\right]^2\times$$

$$\times\int_{-r}^{0}||w(t+\theta,\cdot)||^2\,d\theta+\frac{1}{2}||A^{1/2}w(t)||^2+\frac{1}{2}C_b^2M_f^2|\Omega|^2L_{\xi,M}^2\left[||w(t)||^2+\int_{-r}^{0}||w(t+s)||^2ds\right].$$

Остаточно ми отримуємо існування додатніх сталих C_1, C_2 таких, що

$$|\langle F(u_t^1)-F(u_t^2),w(t)\rangle|\leq||A^{1/2}w(t)||^2+C_1\int_{-r}^{0}||w(t+\theta)||^2d\theta+C_2||w(t)||^2.$$

Остання оцінка та (3.196) дають $\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + 2\|A^{1/2}w(t)\|^2 + 2d\|w(t)\|^2 \le$ $||A^{1/2}w(t)||^2 + C_1\int_{-r}^0 ||w(t+\theta)||^2 d\theta + C_2||w(t)||^2 \le ||A^{1/2}w(t)||^2$ $+C_1\left(\int_{-r}^0 ||w(\theta)||^2 d\theta + \int_0^t ||w(s)||^2 ds\right) + C_2||w(t)||^2$.

Таким чином $\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + \|A^{1/2}w(t)\|^2 + 2d\|w(t)\|^2 \le C_1\left(\int_{-r}^0 ||w(\theta)||^2 d\theta\right.$ $\left.+\int_0^t ||w(s)||^2 ds\right) + C_2||w(t)||^2$ і властивість $\|A^{1/2}v\|^2 \ge \lambda_1\|v\|^2$ дають

$$\frac{d}{dt}\left[\|w(t)\|^2 + (\lambda_1 + 2d)\int_0^t \|w(s)\|^2 ds\right]$$

$$\le C_1\left(\int_{-r}^0 ||w(\theta)||^2 d\theta + \int_0^t ||w(s)||^2 ds\right) + C_2||w(t)||^2.$$

Це дає існування $C_3 > 0$, такого, що для $Z(t) \equiv \|w(t)\|^2 + (\lambda_1 + 2d)\int_0^t \|w(s)\|^2 ds$, ми отримуємо $\frac{d}{dt}Z(t) \le C_3 Z(t) + C_1\int_{-r}^0 ||w(\theta)||^2 d\theta$. Лема Гронуолла дає

$$Z(t) \le \left(\|w(0)\|^2 + C_1 C_3^{-1}\int_{-r}^0 ||w(\theta)||^2 d\theta\right)\cdot e^{C_3 t}. \tag{3.197}$$

Остання оцінка дозволяє застосувати відоме твердження 3.9 (див. [8, теорема 9]). Таким чином для різниці $u^1(t) - u^2(t)$ двох розв'язків ми маємо

$$\|u^1(t) - u^2(t)\|^2 + 2(\lambda_1 + d)\int_0^t \|u^1(s) - u^2(s)\|^2 ds$$

$$\le \left(\|u^1(0) - u^2(0)\|^2 + C_1 C_3^{-1}\int_{-r}^0 ||\varphi^1(\theta) - \varphi^2(\theta)||^2 d\theta\right)\cdot e^{C_3 t}. \tag{3.198}$$

Відмітемо, що за (3.187), різниця $\|u^1(t) - u^2(t)\|$ має сенс для всіх $t \in [0, T]$, $\forall T > 0$. Остання оцінка дає єдиність розв'язків та завершує доведення теореми 3.100.■

Теореми 3.98 та 3.100 дозволяють визначити еволюційну півгрупу $S_t : H \to H$, де $H \equiv L^2(\Omega)\times L^2(-r, 0; L^2(\Omega))$, за формулою $S_t(u^0; \varphi) \equiv (u(t); u(t+\theta))$, $\theta \in (-r, 0)$, де $u(t)$ є слабким розв'язком задачі (3.182),(3.183). Неперервність півгрупи за часом випливає з (3.187), а неперервність за початковими даними з (3.198).

Для вивчення асимптотичної поведінки еволюційної півгрупи ми використовуємо поняття глобального атрактора (див., наприклад, [2, 200, 31])

Теорема 3.101 . *Нехай функції b та f задовільняють властивостям (i), (ii) теореми 3.98. Нехай функція ξ задовільняє властивості (iii)-a) теореми 3.98, (3.195), а також існує $C_{(\xi,0)} > 0$ таке, що (див. (3.186))*

$$\int_{-r}^{0} \|\xi(\theta, \cdot, v, \psi)\| \, d\theta \leq C_{(\xi,0)} \text{ для всіх } (v, \psi) \in H. \tag{3.199}$$

Тоді динамічна система $(S_t; H)$ має компактний глобальний атрактор $\mathcal{U}$, який є обмеженою множиною в просторі $H_1 \equiv D(A^\alpha) \times W$, де $W = \{\varphi : \varphi \in L^\infty(-r, 0; D(A^\alpha)), \dot{\varphi} \in L^\infty(-r, 0; D(A^{\alpha-1}))\}$, $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Доведення теореми 3.101. Для доведення існування глобального атрактора ми використовуємо класичну теорему 1.7, відповідно для якої, для динамичної системи (S_t, H) достатньо задовільняти властивостям дисипативності та асимптотичної компактності (див. [2, 200, 31]).

Властивість (3.199) дає більш сильну оцінку, ніж (3.189):

$$|\langle F(u_t), v\rangle_{L^2(\Omega)}| \leq C_b M_f |\Omega| C_{(\xi,0)} \cdot \|v\| \tag{3.200}$$

яка є необхідною для дисипативності $(S_t; H)$. Останок доведення, включно з властивістю асимптотичної компактності, є стандартним (див., наприклад, [2, 31, 147] а також [155, 156]).

3.8.2. Стаціонарні розв'язки. Для простоти викладення, в цьому підпункті ми розглядаємо оператор $A = (-\Delta_D) > 0$, де Δ_D - оператор Лапласа в $L^2(\Omega)$ з умовами Дирихле на межі області. В цьому випадку (який є достатнім для застосування, наприклад, до рівняння Ніколсона), ми маємо $D(A) = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, $D(A^{1/2}) = H^1_0(\Omega)$, $D(A^{-1/2}) = H^{-1}(\Omega)$. Для подальших деталей про цей класичний простір Соболева дивись, наприклад, [123].

В цьому підпункті ми зосередимось на стаціонарних розв'язках. Перш за все, за визначенням (слабкого розв'язку), $u(t, x) \in L^2(0, T; D(A^{1/2})) = L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$, тобто для стаціонарного розв'язку $u(t, x) \equiv u^{st}(x)$, маємо $u^{st} \in H^1_0(\Omega)$.

Розглянемо довільну функцію $u^{st} \in H^1_0(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Наша мета - знайти умови на функцію $\xi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ так, аби система (3.182) мала б стаціонарний розв'язок $u(t) \equiv u^{st} \in H_0^1(\Omega)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Позначимо $\overline{u^{st}} \equiv \overline{u^{st}}(\theta) \equiv u^{st}, \theta \in [-r, 0]$.

Оскільки для $u^{st} = 0 \in H_0^1(\Omega)$ ми можемо обрати $\xi(\cdot,\cdot,0,0) \equiv 0$, ми зосередимось далі на випадку $u^{st} \neq 0 \in H_0^1(\Omega)$.

З (3.182) та $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) \equiv 0$, отримуємо

$$Au^{st}(x) + d \cdot u^{st}(x) = \int_\Omega b(u^{st}(y))f(x-y)dy \cdot \int_{-r}^0 \xi(\theta, x, u^{st}, \overline{u^{st}})d\theta, \quad x \in \Omega. \tag{3.201}$$

Як ми покажемо, для коректного визначення значення ξ достатньо визначити тільки для другої та третьої координати, які дорівнюють $(u^{st}, \overline{u^{st}}) \in H \equiv L^2(\Omega) \times L^2(-r, 0; L^2(\Omega))$. Ми пропонуємо шукати значення у вигляді добутка

$$\xi(\theta, x, u^{st}, \overline{u^{st}}) = \chi(\theta) \cdot \hat{v}(x), \quad \theta \in [-r, 0], \quad x \in \Omega. \tag{3.202}$$

Тепер рівняння (3.201) записується як

$$Au^{st}(x) + d \cdot u^{st}(x) = \textstyle\int_\Omega b(u^{st}(y))f(x-y)dy \cdot \hat{v}(x) \cdot \int_{-r}^0 \chi(\theta)d\theta, \quad x \in \Omega. \tag{3.203}$$

Нам знадобиться наступна елементарна

Лема 3.102 . *Нехай $u^{st} \neq 0 \in L^2(\Omega)$. Припустимо, що функція f додатня та $f \in C^\infty(\overline{\Omega - \Omega})$. Нехай функція b обмежена та задовільняє $b(w) > 0$ для всіх $w \neq 0$. Тоді функція*

$$p(x) \equiv \int_\Omega b(u^{st}(y))f(x-y)dy \tag{3.204}$$

задовільняє: $p \in C(\overline{\Omega})$, $\inf\{p(x) : x \in \overline{\Omega}\} \equiv p_{min} > 0$ та $\sup\{\frac{\partial}{\partial x_i}p(x) : x \in \overline{\Omega}, i = 1, ..., n_0\} \equiv p'_{max} < \infty$.

Неперервність p на $\overline{\Omega}$ одразу випливає з неперервності f та нерівності Коші-Шварца

$$\begin{aligned} |p(x^1) - p(x^2)| &= \left| \int_\Omega b(u^{st}(y)) \left[f(x^1 - y) - f(x^2 - y) \right] dy \right| \\ &\leq ||b(u^{st}(\cdot))|| \cdot \left[\int_\Omega \left| f(x^1 - y) - f(x^2 - y) \right|^2 dy \right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.205}$$

Ми також використовуємо, що для всіх $y \in \Omega$ маємо $\left|(x^1 - y) - (x^2 - y)\right| = \left|x^1 - x^2\right|$.

Властивості $b(w) > 0$ для всіх $w \neq 0$, $u^{st} \neq 0 \in L^2(\Omega)$ та додатність f дають, що $p(x) > 0$ для всіх $x \in \overline{\Omega}$. Таким чином, неперервність p та теорема Вейерштрасса дають $\inf\{p(x) : x \in \overline{\Omega}\} \equiv p_{min} > 0$. Обмеженість частинних похідних функції p випливає з $f \in C^\infty(\overline{\Omega - \Omega})$.

Припустимо далі

$$\int_{-r}^{0} \chi(\theta) d\theta \neq 0. \tag{3.206}$$

В припущеннях леми та (3.206) ми маємо $p(x) \cdot \int_{-r}^{0} \chi(\theta) d\theta \neq 0$ для всіх $x \in \Omega$. Таким чином, ми можемо записати (див. (3.203))

$$\hat{v}(x) = \frac{Au^{st}(x) + d \cdot u^{st}(x)}{\int_\Omega b(u^{st}(y)) f(x-y) dy \cdot \int_{-r}^{0} \chi(\theta) d\theta}. \tag{3.207}$$

Відмітемо, що (3.207) є рівністтю в просторі $D(A^{-1/2}) = H^{-1}(\Omega)$ (в сенсі розподілень). Як ми бачили, за визначенням (слабких розв'язків), $u(t,x) \in L^2(0,T; D(A^{1/2})) = L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, тобто для стаціонарного розв'язку $u(t,x) \equiv u^{st}(x)$, маємо $u^{st} \in H_0^1(\Omega)$. Це дає $Au^{st} \in H^{-1}(\Omega) = D(A^{-1/2})$ та $Au^{st} + d \cdot u^{st} \in H^{-1}(\Omega)$. Для доведення, що $\hat{v} \in H^{-1}(\Omega)$ ми нагадаємо наступне

Твердження 3.103 *[123, теорема 12.1]. Нехай m - натуральне число. Тоді довільний елемент $h \in H^{-m}(\Omega)$ може бути представлений (неєдиним чином) у вигляді*

$$h = \sum_{|j| \leq m} D^j h_j, \quad h_j \in L^2(\Omega).$$

Тут $D^\alpha \equiv \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\quad \alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

В нашому випадку $m = 1$ та, якщо ми позначимо $h = Au^{st} + d \cdot u^{st} \in H^{-1}(\Omega)$ та $q(x) \equiv p^{-1}(x)$, то $\hat{v} \in H^{-1}(\Omega)$ читається як $qh \in H^{-1}(\Omega)$. Використовуючи останнє твердження 3.103, ми пишемо $h = h_0 + \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\partial}{\partial x_i} h_i$, $\quad h_i \in L^2(\Omega)$. Таким чином,

$$\hat{v} = qh = qh_0 + \sum_{i=1}^{n_0} q \frac{\partial}{\partial x_i} h_i = qh_0 + \sum_{i=1}^{n_0} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(qh_i) - h_i \frac{\partial}{\partial x_i} q \right]. \tag{3.208}$$

Зауваження 3.104 *Відмітемо, що всі похідні (у тв. 3.103 та (3.208)) розуміються в сенсі розподілень (див. [198, 14, 123]). Вираз $q \cdot h$ розуміється як розподілення, яке отримано добутком розподілення h та нескінченно диференційовної функції q (за визначенням, $(q \cdot h, \varphi) \equiv (h, q \cdot \varphi), \forall \varphi \in D$ як у [198, 14]), оскільки операція добутка не визначена для двох розподілень. Використовуючи це визначення, легко перевірити, що $\frac{\partial}{\partial x_i}(q \cdot h) = h \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} q + q \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} h$.*

За останнім твердженням, для отримання $\hat{v} \in H^{-1}(\Omega)$ достатньо показати (див. (3.208)), що

$$qh_i \in L^2(\Omega), \qquad h_i \frac{\partial}{\partial x_i} q \in L^2(\Omega). \tag{3.209}$$

Перше включення в (3.209) випливає з останньої леми і

$$\int_\Omega |q(x)h_i(x)|^2 \, dx \leq \left[\sup\{|q(x)| : x \in \overline{\Omega}\}\right]^2 \cdot ||h_i||^2 = p_{min}^{-2} \cdot ||h_i||^2 < +\infty.$$

Друге включення в (3.209) вірно завдяки

$$\int_\Omega |h_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} q(x)|^2 \, dx \leq \left[\sup\left\{\left|\frac{\partial}{\partial x_i} q(x)\right| : x \in \overline{\Omega}, i = 1, ..., n_0\right\}\right]^2 \cdot ||h_i||^2$$

$$\leq \left[\frac{p'_{max}}{p_{min}^2}\right]^2 \cdot ||h_i||^2 < +\infty.$$

Тут ми використовуємо (див. останню лему)

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} q(x)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x_i} p^{-1}(x)\right| = \left|-\frac{\partial p(x)}{\partial x_i} \cdot p^{-2}(x)\right|$$

$$\leq \sup\left\{\left|\frac{\partial}{\partial x_i} q(x)\right| : x \in \overline{\Omega}, i = 1, ..., n_0\right\} p_{min}^{-2} \leq p'_{max} \cdot p_{min}^{-2}.$$

Таким чином ми отримали властивість $\hat{v} \in H^{-1}(\Omega) = D(A^{-1/2})$, яка важлива для нашого вибору припущень на функцію (залежну від стану) ξ (тобто вибора класа функцій ξ) в наших дослідженнях. Тепер ми бачимо, припускаючи (додатково до (3.206)), що $\int_{-r}^0 |\chi(\theta)| \, d\theta < \infty$, функція ξ, яка визначена в (3.202) з $\hat{v}$, визначеним в (3.207), має властивість (3.186).

В результаті, ми підсумовуємо, що для довільної (скінченної або нескінченної) послідовності *ізольованих* точок $\{u^{st,k}\} \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$

ми можемо визначити функцію ξ (залежну від стану), яка задовільняє припущенням теореми 3.98 та така, що система (3.182) з цією функцією ξ має всі точки $\{u^{st,k}\} \subset H^1_0(\Omega)$ в якості своїх стаціонарних розв'язків $u^k(t) \equiv u^{st,k}, t \in \mathbb{R}$. Остання властивість означає, що наша модель з розподіленим у просторі та часі загаюваними елементами, що залежать від стану, може бути використана, маючи інформацію (наприклад з експеріментів) про довільну множину ізольованих стаціонарних розв'язків.

Відмітемо, що визначення значень функції $\xi(\cdot,\cdot,u^{st,k},\overline{u^{st,k}})$ на основі (3.202), (3.207) на множині ізольованих точок, не протирічить властивості (3.185) оскільки останнє відноситься до випадку збіжної послідовності в просторі H.

3.8.3. Принцип лінеарізованої стійкості. Розглянемо ізольований стаціонарний розв'язок $u(t) \equiv u^{st}$ задачі (3.182). Наша мета - знайти умови на функцію ξ для виконання принципа лінеаризованної стійкості задачі (3.182) в цій точці u^{st}. Розглянемо функцію $\xi : H \to L^2((-r,0)\times\Omega)$ та позначимо (якщо існує) $\big((D\xi)[u^{st}_0]v\big)(\theta,x)$ її похідну Фреше в точці $(u^{st},u^{st}_0) \in H$, таким чином $\big((D\xi)[u^{st}_0]v\big) : H \to L^2((-r,0)\times\Omega)$ - лінійне відображення. Розглянемо наступне (линеарізоване) рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + Au(t,x) + du(t,x) = \big((DF)[u^{st}_0]u_t\big)(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.210}$$

де

$$\big((DF)[u^{st}_0]u_t\big)(x) = \big((DF_1)[u^{st}_0]u_t\big)(x) + \big((DF_2)[u^{st}_0]u_t\big)(x), \tag{3.211}$$

$$\big((DF_1)[u^{st}_0]v_0\big)(x) \equiv \int_{-r}^{0}\left\{\int_\Omega b'(u^{st}(\theta,y))v(\theta,y)f(x-y)dy\right\}\xi(\theta,x,u^{st},u^{st}_0)d\theta, \tag{3.212}$$

$$\big((DF_2)[u^{st}_0]v_0\big)(x) \equiv \int_{-r}^{0}\left\{\int_\Omega b(u^{st}(\theta,y))f(x-y)dy\right\}\big((D\xi)[u^{st}_0]v\big)(\theta,x)d\theta. \tag{3.213}$$

Теорема 3.105 . *Нехай всі припущення теорем 3.98 та 3.100 виконані. Нехай функція ξ задовільняє*

$$\forall (v,\varphi) \in H \Longrightarrow \xi(\cdot,\cdot,v,\varphi) \in L^2((-r,0)\times\Omega); \tag{3.214}$$

$$\int_{-r}^{0} ||\xi(\theta,\cdot,u^{st}+v,u_0^{st}+v_0)-\xi(\theta,\cdot,u^{st},u_0^{st})||^2\, d\theta \le L_\xi ||v||_H^\gamma \text{ для деякого } \gamma>0; \quad (3.215)$$

існує похідна Фреше

$$(D\xi)[u_o^{st}] \text{ функції } \xi : H \to L^2((-r,0)\times\Omega) \text{ в точці } (u^{st},u_0^{st}); \quad (3.216)$$

а також

$$b \in C^2(R), \quad \sup\{|b^{''}(\eta)| : \eta\in\mathbb{R}\} < +\infty. \quad (3.217)$$

Тоді асимптотична стійкість нульового розв'язку лінійного рівняння (3.210) дає асимптотичну стійкість розв'язку $u(t) \equiv u^{st}$ *нелінійного рівняння (3.182). Більш того, асимптотична стійкість* $u(t) \equiv u^{st}$ *для (3.182) визначається асимптотичною стійкістю нульового розв'язку рівняння*

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)+Au(t,x)+du(t,x)=\big((DF_1)[u_0^{st}]u_t\big)(x), \quad (3.218)$$

за умови, що норма $||(D\xi)[u_o^{st}]||_{\mathcal{L}(H;L^2((-r,0)\times\Omega))}$ *достатньо мала.*

Зауваження 3.106 *Перша частина теореми дає необхідні умови на функції* ξ *та* b *для стандартного принципу лінеаризованої стійкості, сформульованого для задачі, залежної від стану (3.182). Друга частина показує, що за природніх умов, асимптотична стійкість стаціонарного розв'язку задачі, залежної від стану (3.182), може бути отримана з асимптотичної стійкості задачі (3.218),* незалежної *від стану, (третя та четверта координати функції* ξ *фіксовані* (u^{st},u_0^{st})*).*

Зауваження 3.107 *Легко бачити, що умова (iii)-a) теореми 3.98 випливає з (3.215), якщо* $\gamma\ge 1$.

Доведення теореми 3.105. Почнемо, для зручності, з неперервного $v_0 \in C_X \equiv C([-r,0] : L^2(\Omega))$ та покажемо, що відображення DF, визначене в (3.211), є похідною Фреше в просторі C_X відображення F (див. (3.182)), тобто

$$||F(u_0^{st}+v_0)-F(u_0^{st})-(DF)[u_0^{st}]v_0|| = \bar{o}\left(||v_0||_{C_X}\right) \text{ при } ||v_0||_{C_X}\to 0. \quad (3.219)$$

Розглянемо

$$F(u_0^{st}+v_0)-F(u_0^{st})-(DF)[u_0^{st}]v_0\equiv I_1+I_2\equiv I_1+I_{21}+I_{21},$$

де

$$I_1\equiv\int_{-r}^{0}\left\{\int_\Omega\left[b(u^{st}(\theta,y)+v(\theta,y))-b(u^{st}(\theta,y))-b'(u^{st}(\theta,y))\cdot v(\theta,y)\right]f(x-y)dy\right\}$$
$$\times\,\xi(\theta,x,u^{st},u_0^{st})d\theta,$$

$$I_{21}\equiv\int_{-r}^{0}\left\{\int_\Omega\left[b(u^{st}(\theta,y)+v(\theta,y))-b(u^{st}(\theta,y))\right]f(x-y)dy\right\}\times$$
$$\times\left[\xi(\theta,x,u^{st}+v,u_0^{st}+v_0)-\xi(\theta,x,u^{st},u_0^{st})\right]d\theta,$$

$$I_{22}\equiv\int_{-r}^{0}\left\{\int_\Omega b(u^{st}(\theta,y))f(x-y)dy\right\}\times$$
$$\times\left[\xi(\theta,x,u^{st}+v,u_0^{st}+v_0)-\xi(\theta,x,u^{st},u_0^{st})-\left((D\xi)[u_0^{st}]v_0\right)(\theta,x)\right]d\theta.$$

Можна перевірити, що (3.217) дає $||I_1||=\bar{o}\,(||v_0||_{C_X})$ при $||v_0||_{C_X}\to 0$. Умови (3.214), (3.215) дають $||I_{21}||^2\le||v||_H^{2+\gamma}L_\xi L_b^2M_f^2|\Omega|$ та умова (3.216) дає $||I_{22}||^2=\bar{o}\left(||v_0||_H^2\right)$ при $||v_0||_H\to 0$. Ці властивості дають (3.219).

Позначимо $u^N(t)(v,\varphi)$ (для всіх $(v,\varphi)\in H$) розв'язок *нелінійного* рівняння (3.182) із початковими умовами $(v,\varphi)\in H$ та $u^L(t)(v,\varphi)$ - відповідний розв'язок *лінійного* рівняння (3.210). Для всіх $\varphi\in C_X\equiv C([-r,0]:L^2(\Omega))$ маємо $(\varphi(0);\varphi)\in H$, та ми позначаємо, для короткості, $u^N(t)(\varphi)$ та $u^L(t)(\varphi)$ відповідні розв'язки задач (3.182) та (3.210) з початковими умовами $(\varphi(0),\varphi)\in H$.

Тепер ми запишемо визначення асимптотичної (експоненціальної) стійкості u^{st} як розв'язку рівняння (3.182) та нульового розв'язку рівняння (3.210) та розділемо (будемо розрізняти) випадки початкових умов (та норм) в просторах H та C_X. Під принципом лінеаризованої стійкості в точці u_0^{st} в просторі C_X ми розуміємо імплікацію $(A)\Longrightarrow(B)$, де

(A) *існують* $M_1>1,\alpha_1>0$ *такі, що для всіх* $\varphi\in C_X$ *та* $t\ge 0$ *виконується*

$$||u_t^L(\varphi)||_{C_X}\le M_1e^{-\alpha_1 t}\cdot||\varphi||_{C_X}; \tag{3.220}$$

(B) *існують* $\varepsilon_2 > 0, M_2 > 1, \alpha_2 > 0$ *такі, що для всіх* $t \geq 0$ *та* $\varphi \in C_X$ *таких, що* $||\varphi - u_0^{st}||_{C_X} \leq \varepsilon_2$ *виконується*

$$||u_t^N(\varphi) - u_0^{st}||_{C_X} \leq M_2 e^{-\alpha_2 t}||\varphi - \bar{u}_0||_{C_X}. \tag{3.221}$$

Нашою метою є аналогічний принцип в точці (u^{st}, u_0^{st}) в просторі H тобто імплікація $(C) \Longrightarrow (D)$, де

(C) *існують* $M_3 > 1, \alpha_3 > 0$ *такі, що для всіх* $(v, \varphi) \in H$ *та* $t \geq 0$ *виконується*

$$||\left(u^L(t)(v,\varphi); u_t^L(v,\varphi)\right)||_H \leq M_3 e^{-\alpha_3 t}||(v,\varphi)||_H; \tag{3.222}$$

(D) *існують* $\varepsilon_4 > 0, M_4 > 1, \alpha_4 > 0$ *такі, що для всіх* $t \geq 0$ *та* $(v, \varphi) \in H$ *таких, що* $||(v,\varphi) - (u^{st}, u_0^{st})||_H \leq \ \varepsilon_4$, *виконується*

$$||\left(u^N(t)(v,\varphi); u_t^N(v,\varphi)\right) - (u^{st}, u_0^{st})||_H \leq M_4 e^{-\alpha_4 t}||(v,\varphi) - (u^{st}, u_0^{st})||_H. \tag{3.223}$$

Оскільки норми просторів H та $C_X \equiv C([-r, 0] : L^2(\Omega))$ не є еквівалентними, нам потрібні додаткові властивості розв'язків для встановлення зв'язку між принципами лінеаризованої стійкості в просторах C_X та H.

Ми доведемо наступний ланцюжок імплікацій $(C) \Longrightarrow (A) \Longrightarrow (B) \Longrightarrow (D)$.

Доведемо, що $(C) \Longrightarrow (A)$. Розглянемо довільне $\varphi \in C_X$ та $(\varphi(0); \varphi) \in H$. Властивість (C) дає (див. (3.222)): $||\left(u^L(t)(\varphi(0),\varphi); u_t^L(v,\varphi)\right)||_H \leq M_3 e^{-\alpha_3 t}||(\varphi(0),\varphi)||_H$, таким чином $||u_t^L(\varphi)||_{C_X} \equiv \max\limits_{\theta\in[-r,0]} ||u^L(t+\theta)(\varphi(0),\varphi)|| \leq \max\limits_{\theta\in[-r,0]} M_3 e^{-\alpha_3 t}||(\varphi(0),\varphi)||_H = M_3 e^{\alpha_3 r} e^{-\alpha_3 t}||(\varphi(0),\varphi)||_H \leq M_3 e^{\alpha_3 r}\sqrt{1+r} \cdot e^{-\alpha_3 t}||\varphi||_{C_X}$. Остання нерівність випливає з

$$||(\varphi(0),\varphi)||_H \leq \sqrt{1+r} \cdot ||\varphi||_{C_X} \quad \text{для всіх} \quad \varphi \in C_X. \tag{3.224}$$

Таким чином ми отримали властивість (A) з $\alpha_1 \equiv \alpha_3$ та $M_1 \equiv M_3 e^{\alpha_3 r}\sqrt{1+r}$.

Імплікація $(A) \Longrightarrow (B)$ є вірною завдяки властивості (3.219) та принципу лінеаризованої стійкості в C_X (див. [141], а також [220, теорема 4.1, с.123]).

Ми будемо використовувати наступну властивість, яка є наслідком (3.198):

$$||u_r^N(v^1;\varphi^1) - u_r^N(v^2;\varphi^2)||_{C_X} \le C_r \cdot ||(v^1;\varphi^1) - (v^2;\varphi^2)||_H, \tag{3.225}$$

де $C_r \equiv \sqrt{\max\{1, C_1 C_3^{-1}\}} \cdot \exp\{\frac{1}{2}C_3 r\}$ (див. (3.198)).

Імплікація $(B) \Longrightarrow (D)$. Розглянемо $\forall (v,\widetilde{\varphi}) \in H : ||(v,\widetilde{\varphi}) - (u^{st}, u_0^{st})||_H \le \varepsilon_4$ з $\varepsilon_4 = \varepsilon_2/C$. Тут стала C визначена в (3.225). Згідно з (3.187), ми можемо визначити $\varphi \equiv u_r(v,\widetilde{\varphi}) \in C_X$ та використати (3.225) для отримання $||u_r(v,\widetilde{\varphi}) - u_0^{st}||_{C_X} \le C \cdot ||(v,\widetilde{\varphi}) - (u^{st}, u_0^{st})||_H \le C\varepsilon_4 = \varepsilon_2$. Використовуючи (3.221), отримуємо

$$||u_t^N(\varphi) - u_0^{st}||_{C_X} \le M_2 e^{-\alpha_2 t}||\varphi - \bar{u}_0||_{C_X} \le M_2 C e^{-\alpha_2 t}||(v,\widetilde{\varphi}) - (u^{st}, u_0^{st})||_H.$$

Оскільки $u_t^N(\varphi) \equiv u_{t+r}^N(v,\widetilde{\varphi})$ (за єдиності розв'язків), ми отримуємо (див. (3.224), (3.225)):

$$||(u^N(t+r)(v,\widetilde{\varphi}); u_{t+r}^N(v,\widetilde{\varphi})) - (u^{st}, u_0^{st})||_H \le \sqrt{1+r} \cdot ||u_t^N(\varphi) - u_0^{st}||_{C_X}$$

$$\le \sqrt{1+r} \cdot M_2 e^{-\alpha_2 t}||\varphi - u_0^{st}||_{C_X} \le \sqrt{1+r} \cdot M_2 C e^{-\alpha_2 t}||(v,\widetilde{\varphi}) - (u^{st}, u_0^{st})||_H.$$

Позначимо $s \equiv t + r \ge r$ та перепишемо останню нерівність як

$$||(u^N(s)(v,\widetilde{\varphi}); u_s^N(v,\widetilde{\varphi})) - (u^{st}, u_0^{st})||_H$$

$$\le \sqrt{1+r} \cdot M_2 C e^{\alpha_2 r} e^{-\alpha_2 s}||(v,\widetilde{\varphi}) - (u^{st}, u_0^{st})||_H, \quad s \ge r. \tag{3.226}$$

Для $s \in [0, r]$ ми використовуємо (3.198), (3.225) аби отримати

$$||(u^N(s)(v,\widetilde{\varphi}); u_s^N(v,\widetilde{\varphi})) - (u^{st}, u_0^{st})||_H \le C||(v,\widetilde{\varphi}) - (u^{st}, u_0^{st})||_H$$

$$\le C e^{\alpha_2 r} e^{-\alpha_2 s}||(v,\widetilde{\varphi}) - (u^{st}, u_0^{st})||_H, \quad s \in [0, r]. \tag{3.227}$$

Остаточно, об'єднуючи (3.226) та (3.227), ми отримуємо властивість (D) з $\alpha_4 \equiv \alpha_2$ та $M_4 \equiv \max\{\sqrt{1+r} \cdot M_2 C e^{\alpha_2 r}, C e^{\alpha_2 r}\} = \sqrt{1+r} \cdot M_2 C e^{\alpha_2 r}$.

Таким чином, ми довели, що (C) дає (D) (див. (3.222), (3.223)), що є першим твердженням теореми 3.105. Друге твердження доводиться таким самим чином з незначними змінами в доведенні принципа лінеаризованної стійкості (в просторі C_X), яке приведено в [141] (див. також [220, теорема 4.1, с.123]).

Ми не будемо повторювати ці розглядання тут. Доведення теореми 3.105 завершено.

Щодо застосування, ми розглянемо дифузійне рівняння Ніколсона (the diffusive Nicholson's blowflies equation) (див., наприклад, [197, 195]) з ЗЗС Детальніше, ми розглянемо рівняння (3.182), де $-A$ є оператором Лапласа з умовою Дирихле на межі, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_0}$ є обмежена область з гладкою межею, функція f може бути сталою, як у [197, 195], що приводить до локального за просторовими координатами члена або, наприклад, $f(s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} e^{-s^2/4\alpha}$, як у [196], що відповідає нелокальній ситуації; нелінійна функція b визначена як $b(w) = p \cdot we^{-w}$. Функція b є обмеженою та $b(w) > 0$ для всіх $w \neq 0$. Як наслідок, ми приходимо до висновку, що для довільної функції ξ, яка задовільняє умовам теорем 3.100 та 3.101, динамічна система (S_t, H) має глобальний атрактор (теорема 3.101).

Таким чином, наша система (3.182) з розподіленим у просторі та часі ЗЗС може бути успішно використана для дослідження рівняння Ніколсона з довільною множиною ізольованих стаціонарних розв'язків.

3.9. Скінченновимірний глобальний атрактор для параболічних рівнянь із зосередженим загаюванням, що залежить від стану

Ми досліджуємо клас нелінійних параболічних еволюційних рівнянь із загаюванням, що залежать від стану. Цей клас включає декілька важливих моделей з РЧП, що виникають в біології. По-перше ми доводимо коректну розв'язність в деякому просторі функцій, які є липшицевими за часом. Це дозволяє нам показати, що модель породжує еволюційний оператор (півгрупу) S_t. Оператори S_t є замкненими для всіх $t \geq 0$ та неперервними для досить великих t. Наш основний результат показує, що півгрупа S_t має компактний глобальний атрактор та експоненціальний атрактор скінченної фрактальної вимірності. Аргументи базуються на нещодавно розвинутому методі квазістійких оцінок (quasi-stability estimates, більше деталей у [56]) та включають деякі узагальнення теорії глобальних атракторів на випадок замкнених еволюційних операторів. Основні результати опрелюднені в роботі [65].

Наш перший результат (теорема 3.111) дає коректну розв'язність задачі та дозволяє визначити еволюційну півгрупу S_t замкнених відображень на деякому просторі Банаха функцій на загаюваному інтервалі часу зі значеннями у відповідному просторі Гільберта. У деякому сенсі, ці результати узагальнюють результати про коректну розв'язність у роботах [159, 162, 164] до більш загальних загаюваних елементів. Головний результат підрозділу (теорема 3.117) дає існування *скінченновимірного* глобального атрактору, об'єкту, який відповідальний за асимптотичну динаміку. Ми також показуємо, що модель має експоненційний фрактальний атрактор (див. визначення в пункті B 'Додаткові теоретичні матеріали').

Хоча для деяких параболічних задач із ЗЗС існування компактного глобального атрактора було доведено в попередніх роботах [159, 164], але, наскільки нам відомо, результати про *скінченновимірну* поведінку для параболічних задач із ЗЗС отримані нами вперше. Головна складність (див. вступ) полягає у факті, що відповідний загаюваний елемент не є липшицевим на природньому просторі енергетичного балансу.

Ми відмічаємо, що еволюційні оператори S_t, які ми будуємо, не є неперервними відображеннями у фазовому просторі для малих значень t. Таким чином для доведення існування компактного глобального атрактора ми використовуємо узагальнення стандартної теорії, яке запропоноване у роботі [142]. Щодо результатів для вимірності, ми використовуємо ідею метода квазістійких оцінок, який розроблений раніше у [57, 58, 59, 60] для еволюційних моделей другого порядку за часом, які породжують неперервні еволюційні півгрупи. Це є можливим в нашому випадку завдяки неперервності еволюційного оператора для великих значень часу. Ми відмічаємо, що для випадку із загаюванням, метод квазістійкості був використаний раніше у [61, 62, 64] для моделей другого порядку за часом, див. також [56, частина 6].

3.9.1. Опис моделі. Ми досліджуємо коректну розв'язність та асимптотичну динаміку абстрактного еволюційного рівняння із загаюванням наступного вигляду

$$\dot{u}(t) + Au(t) + F(u_t) + G(u(t)) = h, \quad t > 0, \tag{3.228}$$

в деякому гільбертовому просторі H. Тут точка над елементом позначає похідну за часом, A - лінійний та F, G нелінійні оператори, $h \in H$. Елемент $F(u_t)$ представляє (нелінійні) загаювані ефекти в динаміці.

Припущення 3.108 (основні) *В наших дослідженнях ми припускаємо наступне:*

(A) *Оператор A задовільняє* **(A1)** *(див. п. 2.1, с.48),*

(F) *Загаюваний елемент $F(u_t)$ має вигляд $F(u_t) \equiv F_0(u(t - \eta(u_t)))$, де* ***(a)*** *$F_0 : H_\alpha \mapsto H_\alpha$ глобально липшицева для $\alpha = 0$ та $\alpha = -1/2$, тобто, існує $L_F > 0$ таке, що*

$$\|F_0(v) - F_0(u)\|_\alpha \le L_F \|v - u\|_\alpha, \quad v, u \in H_\alpha, \quad \alpha = 0, -1/2; \tag{3.229}$$

та ***(b)*** *$\eta : C \equiv C([-r, 0]; H) \mapsto [0, r] \subset \mathbb{R}$ глобально липшицева:*

$$|\eta(\phi) - \eta(\psi)| \le L_\eta |\phi - \psi|_C, \quad \phi, \psi \in C([-r, 0]; H). \tag{3.230}$$

(G) *$G : H_{1/2} \mapsto H$ локально липшицева, тобто*

$$\|G(v) - G(u)\| \le L_G(R) \|v - u\|_{1/2}, \quad v, u \in H_{1/2}, \quad \|v\|_{1/2}, \|u\|_{1/2} \le R, \tag{3.231}$$

де $L_G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ є неспадаючою функцією. Ми також припускаємо, що G є потенціальним відображенням, тобто існує диференційовний (за Фреше) функціонал $\Pi(u) : H_{1/2} \to \mathbb{R}$ такий, що $G(u) = \Pi'(u)$ у наступному сенсі

$$\lim_{\|v\|_{1/2} \to 0} \|v\|_{1/2}^{-1} \big[\Pi(u + v) - \Pi(u) + \langle G(u), v \rangle \big] = 0.$$

Більш того, ми припускаємо, що

(a) *існують додатні сталі c_1 та c_2 такі, що*

$$\langle G(u), Au\rangle \geq -c_1\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 - c_2, \quad u \in D(A); \tag{3.232}$$

та ***(b)*** *існують $\delta > 0$ та $m \geq 0$ такі, що $G : H_{1/2-\delta} \mapsto H_{-m}$ неперервно.*

Наш основний мотиваційний приклад системи з зосередженим загаюванням, що залежить від стану, є рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) - \Delta u(t,x) + b\left(B[u(t-\eta(u_t),\cdot)](x)\right) + g(u(t,x)) = h(x), \quad x \in \Omega, \ \ t > 0, \tag{3.233}$$

в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, де $B : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ обмежений оператор та $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є липшицевим відображенням. Функція $\eta : C([-r,0]; L^2(\Omega)) \to [0,r] \subset \mathbb{R}_+$ позначає *загаювання, що залежить від стану.* Оператор Немицького $u \mapsto g(u)$ з C^1 функцією g представляє нелінійний елемент реакції без загаювання та $h(x)$ представляє джерело. Форма загаюваного елемента вмотивована моделями з популяційної динаміки, де функція b є функцією народжуваності (наприклад, $b(s) = c_1 s \cdot e^{-c_2 s}$, зі сталими $c_1, c_2 > 0$) та загаювання η представляє вік відтворення. Більше деталей та прикладів (рівняння Ніколсона з дифузією, рівняння Макки-Гласса - рівняння утворення клітин крові, рівняння Ласота-Важевска-Чижевска) можна знайти в [91] та [164] (див. посилання в цих статтях). Також відмітемо, що декілька спеціальних класів моделі вигляду (3.233) були досліджені в наших роботах [159, 160, 162, 164]). Наприклад, в роботі [164] ми припускали, що $g(s) \equiv 0$, $b(s)$ обмежена функція, та B є (інтегральним, компактним) лінійним оператором. Це приводило до нелокальних (за просторовими змінними) моделям. В цій частині ми також включаємо некомпактний випадок. Тут ми можемо обрати, наприклад, $b(s) = s$ та $B = Id$ (тотожній оператор). Ми також відмічаємо, що у випадку рівняння (3.233) з граничними умовами Дирихле, властивість (дисипативності) (3.232) виконується при $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$ та обмеженою знизу похідною $g'(s)$. Це випливає зі стандартного інтегрування частинами. Таким чином, моделі популяційної динаміки з нелінійними елементами типу джерело / стік можуть також бути влючені у розгляд. Для цього класу біологічних моделей, але з загаюванням, яке *не* залежить від стану, ми відсилаємо до монографії [220].

Ми споряджуємо рівняння (3.228) початковими умовами

$$u(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-r, 0], \tag{3.234}$$

та для початкової функції φ розглядаємо простір

$$\mathcal{C}L \equiv \left\{ \varphi \in C([-r,0]; H) \;\middle|\; \mathrm{Lip}_{[-r,0]}(A^{-\frac{1}{2}}\varphi) < +\infty; \;\; \varphi(0) \in D(A^{\frac{1}{2}}) \right\}, \tag{3.235}$$

де

$$\mathrm{Lip}_{[a,b]}(\varphi) \equiv \sup_{s \neq t} \left\{ \frac{\|\varphi(s) - \varphi(t)\|}{|s-t|} \;:\; s, t \in [a,b], \; s \neq t \right\}$$

позначає відповідну сталу Липшиця. Можна показати, що простір $\mathcal{C}L$ складається з неперервних функцій φ на $[-r, 0]$ зі значеннями в H таких, що $\varphi(0) \in H_{1/2}$ та які абсолютно неперервні в $H_{-1/2}$. Останнє означає, що існує похідна $\dot{\varphi} \in L^\infty(-r, 0; H_{-1/2})$ така, що $\varphi(s) = \varphi(0) - \int_s^0 \dot{\varphi}(\xi) d\xi, \;\; s \in [-r, 0]$, та

$$\mathrm{Lip}_{[-r,0]}(A^{-\frac{1}{2}}\varphi) = \operatorname{ess\,sup} \left\{ \|A^{-\frac{1}{2}}\dot{\varphi}(s)\| \;:\; s \in [-r, 0] \right\} \equiv |\dot{\varphi}|_{L^\infty(-r,0;H_{-1/2})}.$$

Ми розглядаємо в просторі $\mathcal{C}L$ стандартну норму

$$|\varphi|_{\mathcal{C}L} \equiv \max_{s \in [-r,0]} \|\varphi(s)\| + \mathrm{Lip}_{[-r,0]}(A^{-\frac{1}{2}}\varphi) + \|A^{\frac{1}{2}}\varphi(0)\|. \tag{3.236}$$

Відмітемо, що загаюваний елемент $F(\varphi) \equiv F_0(\varphi(-\eta(\varphi)))$ в (3.228) є коректно визначений для кожного $\varphi \in C$ та має властивість (дивись (3.229) для $\alpha = 0$) $\|F(\varphi) - F(0)\| \leq L_F \|\varphi(-\eta(\varphi))\| \leq L_F |\varphi|_C$, таким чином

$$\|F(\varphi)\| \leq c_1 + c_2 |\varphi|_C, \quad \varphi \in C, \tag{3.237}$$

з $c_1 = \|F(0)\|$ та $c_2 = L_F$. Однак цей елемент не є липшицевим на просторі C. Можна тільки показати, що загаюваний елемент F задовільняє нерівності

$$\|F(\varphi) - F(\psi)\|_{-1/2} \leq L_F \left(1 + L_\eta \mathrm{Lip}_{[-r,0]}(A^{-\frac{1}{2}}\varphi)\right) |\varphi - \psi|_C \tag{3.238}$$

для довільного $\varphi \in \mathcal{C}L$ та $\psi \in C$. Використовуючи термінологію [126], ми можемо назвати це відображення F "майже липшицевим" з C до $H_{-1/2}$, див. також обговорення в [98].

3.9.2. Коректна розв'язність. В цій частині ми доводимо теорему існування та єдиності, а також досліджуємо властивості розв'язків. Далі ми будуємо еволюційну півгрупу за розв'язками системи. Введемо наступне визначення.

Визначення 3.109 (Сильний розв'язок) . Вектор-функція

$$u(t) \in C([-r,T];H) \cap C([0,T];H_{1/2}) \cap L^2(0,T;H_1) \tag{3.239}$$

зветься (сильним) розв'язком задачі (3.228) та (3.234) на $[0,T]$, якщо

(a) $u(\theta) = \varphi(\theta)$ для $\theta \in [-r,0]$;

(b) $\forall v \in L^2(0,T;H)$ таких, що $\dot{v} \in L^2(0,T;H_{-1})$ та $v(T) = 0$ ми маємо

$$\begin{aligned} &-\int_0^T \langle u(t), \dot{v}(t)\rangle\, dt + \int_0^T \langle Au(t), v(t)\rangle\, dt \\ &\quad + \int_0^T \langle F(u_t) + G(u(t)), v(t)\rangle\, dt = \langle \varphi(0), v(0)\rangle + \int_0^T \langle h, v(t)\rangle\, dt. \end{aligned} \tag{3.240}$$

Зауваження 3.110 *Нехай $u(t)$ є сильним розв'язком на $[0,T]$ з деякою початковою функцією $\varphi \in C$. Тоді з (3.239), а також з (3.231) та (3.237) випливає, що $F(u_t)+G(u(t))-h \in L^\infty(0,T;H)$. Це дозволяє зробити висновок з (3.239) та (3.240), що*

$$\dot{u}(t) \in L^\infty(0,T;H_{-1/2}) \cap L^2(0,T;H). \tag{3.241}$$

Більш того, рівність (3.240) дає, що $u(t)$ задовільняє (3.228) для майже всіх $t \in [0,T]$ як рівність в H. Ми також відмічаємо, що властивості (3.239) та (3.241) дають

$$u_t \in \mathcal{C}L \;\; \textit{для всіх} \;\; t \in [0,T] \;\; \textit{та} \quad \max_{[0,T]} |u_t|_{\mathcal{C}L} < +\infty \tag{3.242}$$

для кожного сильного розв'язку u із початковою функцією φ з простору $\mathcal{C}L$, визначеного в (3.235).

Наш перший результат стосується існування та єдиності розв'язків.

Теорема 3.111 *Нехай виконані припущення 3.108. Припустимо $\varphi \in \mathcal{C}L$, див. (3.235). Тоді початкова задача (3.228) та (3.234) має єдиний сильний розв'язок на довільному проміжку $[0,T]$. Цей розв'язок має властивість*

$$\dot{u}(t) \in C([0,T]; H_{-1/2}) \cap L^2(0,T;H) \tag{3.243}$$

та задовільняє оцінці

$$\|A^{-1/2}\dot{u}(t)\|^2 + \|A^{1/2}u(t)\|^2 + \int_0^t \left[\|\dot{u}(\tau)\|^2 + \|Au(\tau)\|^2\right] d\tau \le C_T(R) \tag{3.244}$$

для всіх $t \in [0,T]$ та $\|A^{1/2}\varphi(0)\|^2 + |\varphi|_C^2 \le R^2$. Більш того, для кожних двох сильних розв'язків u^1 та u^2 з початковими функціями φ^1 та φ^2 з $\mathcal{C}L$ ми маємо

$$\sup_{\tau\in[0,t]} \|u^1(\tau)-u^2(\tau)\|^2+\int_0^t\|A^{1/2}(u^1(\tau)-u^2(\tau))\|^2\,d\tau \le C_R(T)|\varphi^1-\varphi^2|_C^2, \ \ \forall t \in [0,T], \tag{3.245}$$

для всіх φ^i таких, що $|\varphi^i|_{\mathcal{C}L} \le R$.

Доведення теореми 3.111. Для отримання існування, ми використовуємо стандартний метод компактності [122], що заснований на наближених за Галеркіним розв'язках відносно базиса з власних функцій $\{e_k\}$ оператора A.

Ми визначаємо наближені за Галеркіним розв'язки порядка m за формулою $u^m = u^m(t) = \sum_{k=1}^m g_{k,m}(t)e_k$, де функції $g_{k,m}$ визначені на $[-r,T]$, абсолютно неперервні на $[0,T]$ та задовільняють наступним рівнянням

$$\begin{cases} \langle \dot{u}^m + Au^m + F(u_t^m) + G(u^m) - h, e_k\rangle = 0, \quad t > 0, \\ \langle u^m(\theta), e_k\rangle = \langle \varphi(\theta), e_k\rangle, \ \forall\theta \in [-r,0], \quad \forall k = 1,\dots,m. \end{cases} \tag{3.246}$$

Рівняння в (3.246) є система (звичайних) диференціальних рівнянь в $\mathbb{R}^m$ з зосередженним (дискретним) ЗЗС (для загальних фактів теорії таких рівнянь див. [98]) для вектор-функції $U(t) \equiv (g_{1,m}(t),\dots,g_{m,m}(t))$.

Умова $\varphi \in \mathcal{C}L$ дає те, що функція $U(\cdot)|_{[-r,0]} \equiv P_m\varphi(\cdot)$, яка задає початкові дані, є липшицева як функція з $[-r,0]$ в $\mathbb{R}^m$. Тут P_m є ортогональний проектор на підпростір $\mathrm{Span}\,\{e_1,\dots,e_m\}$. Таким чином ми маємо змогу застосувати теорію звичайних диференціальних рівнянь із ЗЗС (див., наприклад [98]) для того аби отримати *локальне* існування розв'язків для (3.246).

Далі, ми отримуємо апріорну оцінку, яка дозволяє продовжити розв'язки u^m для (3.246) на довільний інтервал часу $[0, T]$. Ми також використовуємо апріорну оцінку для доведення компактності множини наближених розв'язків.

Домножимо перше рівняння в (3.246) на $\lambda_k g_{k,m}$ та розглянемо суму для $k = 1, \dots, m$ для того аби отримати

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|A^{1/2}u^m(t)\|^2 + \|Au^m(t)\|^2 + \langle F(u_t^m) + G(u^m(t)) - h, Au^m(t)\rangle = 0.$$

Завдяки (3.237) та (3.232) це дає

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\|A^{1/2}u^m(t)\|^2 + \int_0^t \|Au^m(\tau)\|^2 d\tau\right] &\le c\big[1 + |u_t^m|_C^2 + \|A^{1/2}u^m(t)\|^2\big] \\ &\le c_0\big[1 + |\varphi|_C^2\big] + c_1 \max_{\tau\in[0,t]} \|A^{1/2}u^m(\tau)\|^2.\end{aligned}$$

Інтегруючи останню нерівність, ми покажемо, що функція

$$\Psi(t) = \max_{\tau\in[0,t]} \|A^{1/2}u^m(\tau)\|^2 + \int_0^t \|Au^m(\tau)\|^2 d\tau$$

задовільняє нерівності

$$\Psi(t) \le 2\|A^{1/2}\varphi(0)\|^2 + 2tc_0\big[1 + |\varphi|_C^2\big] + 2c_1\int_0^t \Psi(\tau)d\tau.$$

Таким чином лема Гронуола дає апріорну оцінку

$$\|A^{1/2}u^m(t)\|^2 + \int_0^t \|Au^m(\tau)\|^2\, d\tau \le 2e^{at}\left[\|A^{1/2}\varphi(0)\|^2 + bt\big[1 + |\varphi|_C^2\big]\right], \quad (3.247)$$

для всіх t з інтервалу існування, де a та b є додатні сталі. Ця апріорна оцінка дозволяє продовжити наближені розв'язки на довільний інтервал часу $[0, T]$ таким чином, що (3.247) залишається вірною для всіх $t \in [0, T]$.

Зараз ми отримаємо додаткову апріорну оцінку. Використовуючи (3.247), (3.231) та (3.237) з першого рівняння в (3.246) ми отримуємо

$$\|\dot{u}^m(t) + Au^m(t)\| \le \|F(u_t^m)\| + \|G(u^m(t))\| + \|h\| \le C(R, T), \quad t \in [0, T],$$

за умови $\|A^{1/2}\varphi(0)\|^2 + |\varphi|_C^2 \le R^2$. Отже з (3.247) ми отримуємо оцінку

$$\|A^{1/2}u^m(t)\|^2 + \int_0^t \left[\|\dot{u}^m(\tau)\|^2 + \|Au^m(\tau)\|^2\right] d\tau \le C_T(R) \tag{3.248}$$

для всіх $t \in [0,T]$ та $\|A^{1/2}\varphi(0)\|^2 + |\varphi|_C^2 \le R^2$. Також з (3.246) випливає, що

$$\sup_{t\in[0,T]} \|A^{-1/2}\dot{u}^m(t)\|^2 \le C_T(R). \tag{3.249}$$

Таким чином

$$\{u^m\}_{m=1}^{\infty} \text{ є обмежена множина в } W_1 \equiv L^\infty(0,T;H_{1/2}) \cap L^2(0,T;D(A))$$

та $\{\dot{u}^m\}_{m=1}^{\infty}$ є обмежена множина в $W_2 \equiv L^\infty(0,T;H_{-1/2}) \cap L^2(0,T;H)$. Отже, існують підпослідовність $\{(u^k;\dot{u}^k)\}$ та елемент $(u;\dot{u}) \in Z_1 \equiv W_1 \times W_2$ такі, що

$$\{(u^k;\dot{u}^k)\} \text{ *-слабко збігається до } (u;\dot{u}) \text{ в } Z_1.$$

Використовуючи теорему Обена-Дубінського (Aubin-Dubinski theorem) [188, наслідок 4] ми також маємо $u^k \to u$ в $C(0,T;H_{1/2-\delta}))\cap L^2(0,T;H_{1-\delta})$ коли $k \to +\infty$. Тепер доведення того, що кожна *-слабка границя $u(t)$ є розв'язком є стандартним. Для граничного переходу у нелінійних членах F та G ми використовуємо зв'язок (3.238) та умову 3.108**(Gb)**.

Властивість $u(t) \in C([0,T];H_{1/2}))$ випливає з добре відомого неперервного вкладання (див. [123, теорема 1.3.1] або [191, твердження 1.2]):

$$\{u \in L^2(0,T;H_1) : \dot{u} \in L^2(0,T;H)\} \subset C([0,T];H_{1/2}).$$

Неперервність $\dot{u}$ у $H_{-1/2}$ випливає з рівняння (3.228) та з неперервності u в $H_{1/2}$. Таким чином існування сильного розв'язку доведено. Легко бачити з (3.248) та (3.249), що побудований розв'язок задовільняє (3.244).

Тепер ми доведемо єдиність. Нехай u^1 та u^2 - два розв'язка (зараз ми не потребуємо аби вони мали однакову початкову функцію). Тоді різниця $z = u^1 - u^2 \in C([0,T];H_{1/2}) \cap L^2(0,T;H_1)$ є сильним розв'язком для лінійного параболічного рівняння (без загаювання)

$$\dot{z}(t) + Az(t) = f(t), \quad t > 0, \quad \text{з} \quad f(t) \equiv F(u_t^2) - F(u_t^1) + G(u^2(t)) - G(u^1(t)). \tag{3.250}$$

Маємо завдяки зауваженню 3.110 $f \in L^\infty(0,T;H)$. З (3.231) та (3.238), використовуючи (3.242) ми також маємо

$$\|G(u^2(t)) - G(u^1(t))\| \le L_G(\varrho)\|z(t)\|_{1/2}, \quad t \in [0,T],$$

та $\|A^{-1/2}(F(u_t^2) - F(u_t^1))\| \le L_F(1 + L_\eta\varrho)|z_t|_C, \quad t \in [0,T]$, для кожного $\varrho \ge \max_{[0,T]}\left\{|u_t^1|_{\mathcal{C}L} + |u_t^2|_{\mathcal{C}L}\right\}$. Таким чином

$$\begin{aligned}|\langle f(t), z(t)\rangle| \le& L_F(1 + L_\eta\varrho)|z_t|_C\|z(t)\|_{1/2} + L_G(\varrho)\|z(t)\|_{1/2}\|z(t)\| \\ \le& \frac{1}{2}\|z(t)\|_{1/2}^2 + C(\varrho)|z_t|_C.\end{aligned}$$

Отже використовуючи стандартний множник z в (3.250) ми отримуємо

$$\frac{d}{dt}\|z(t)\|^2 + \|A^{1/2}z(t)\|^2 \le C(\varrho)\|z_t\|_C^2 \le C(\varrho)\left[|\varphi^1 - \varphi^2|_C^2 + \sup_{\tau\in[0,t]}\|z(\tau)\|^2\right]$$

для кожного $\varrho \ge \max_{[0,T]}\left\{|u_t^1|_{\mathcal{C}L} + |u_t^2|_{\mathcal{C}L}\right\}$. Використовуючи лему Гронуола, отримуємо

$$\sup_{\tau\in[0,t]}\|u^1(\tau)-u^2(\tau)\|^2+\int_0^t\|A^{1/2}(u^1(\tau)-u^2(\tau))\|^2d\tau \le C(\varrho)|\varphi^1-\varphi^2|_C^2, \ \forall\, t \in [0,T], \tag{3.251}$$

Це дає єдиність сильних розв'язків. Як наслідок єдиності маємо, що будь-який сильний розв'язок задовільняє (3.244). Таким чином ми можемо застосувати (3.251) з деякою $\varrho = \varrho(R,T)$ та отримати (3.245). Доведення теореми 3.111 завершене.

Теорема 3.111 дозволяє визначити еволюційну півгрупу S_t на просторі $\mathcal{C}L$ (див. (3.235)) за допомогою формули

$$S_t\varphi \equiv u_t, \quad t \ge 0, \tag{3.252}$$

де $u(t)$ є єдиний розв'язок задачі (3.228) та (3.234). Відмітемо, що (3.245) дає, що S_t є *майже* локально липшицевим на C, тобто,

$$|S_t\varphi^1 - S_t\varphi^2|_C \le C_R(T)|\varphi^1 - \varphi^2|_C \ \text{ для всіх } \ \varphi^i \in \mathcal{C}L, \ \ |\varphi^i|_{\mathcal{C}L} \le R, \ \ t \in [0,T].$$

Однак, схоже, що подібна властивість не має місця в просторі $\mathcal{C}L$. Ми лише можемо гарантувати, що $\varphi \mapsto S_t\varphi$ є неперервним відображенням на $\mathcal{C}L$ для всіх

$t > r$. Більш того, наступне твердження показує, що відображення $\varphi \mapsto S_t\varphi$ є навіть $\frac{1}{2}$-гельдеровим на $\mathcal{C}L$ як функція від φ коли $t > r$.

Твердження 3.112 (залежність від початкових даних в просторі $\mathcal{C}L$) *Нехай виконані умови теореми 3.111. Нехай u^1 та u^2 є два розв'язки на $[0, T]$ із початковими функціями φ^1 та φ^2 з $\mathcal{C}L$. Тоді різниця $z = u^1 - u^2$ задовільняє оцінці*

$$(t-r)\left[\|A^{-1/2}\dot{z}(t)\|^2 + \|A^{1/2}z(t)\|^2\right] + \int_r^t (\tau - r)\left[\|\dot{z}(\tau)\|^2 + \|Az(\tau)\|^2\right] d\tau \le C_T(R)|\varphi^1 - \varphi^2|_C \quad (3.253)$$

для всіх $t \in [r, T]$ та для всіх початкових функцій φ^i таких, що $|\varphi^i|_{\mathcal{C}L} \le R$. Це дає, що для всіх $t > r$ еволюційна півгрупа S_t є $\frac{1}{2}$-гельдеровою в нормі $\mathcal{C}L$. У випадку коли $t \in (0, r]$ ми можемо гарантувати тільки замкненість еволюційного оператора S_t. Це означає (див., наприклад, [142]) що властивості $\varphi_n \to \varphi$ та $S_t\varphi_n \to \psi$ в нормі простору $\mathcal{C}L$ при $n \to \infty$ дають, що $S_t\varphi = \psi$.

Доведення. Помножимо (3.250) на Az та використовуючи (3.244) та (3.231) ми отримуємо, що

$$\frac{d}{dt}\|A^{1/2}z(t)\|^2 + \|Az(t)\|^2 \le \|F(u_t^2) - F(u_t^1)\|^2 + C_R(T)\|A^{1/2}z(t)\|^2,\ t > 0.$$

З (3.244), (3.229) та (3.230) ми також маємо

$$\|F(u_t^2) - F(u_t^1)\|^2 \le 2L_F^2\left[\left|\int_{t-\eta(u_t^1)}^{t-\eta(u_t^2)} \|\dot{u}^2(\xi)\| d\xi\right|^2 + |u_t^2 - u_t^1|_C^2\right]$$

$$\le 2L_F^2\left[\left|\eta(u_t^1) - \eta(u_t^2)\right| \int_{t-r}^t \|\dot{u}^2(\xi)\|^2 d\xi + |u_t^2 - u_t^1|_C^2\right] \le C_T(R)|u_t^2 - u_t^1|_C^2 \quad (3.254)$$

для кожного $t \ge r$. Таким чином

$$\frac{d}{dt}\|A^{1/2}z(t)\|^2 + \|Az(t)\|^2 \le C_T(R)\left[\max_{[0,t]}\|z(s)\|^2 + \|A^{1/2}z(t)\|^2\right]^{1/2},\quad t \ge r.$$

Інтегруючи на інтервалі $[\tau, t]$ з $\tau \geq r$ та використовуючи (3.245), ми отримуємо, що

$$\|A^{1/2}z(t)\|^2 + \int_\tau^t \|Az(\xi)\|^2 d\xi \leq \|A^{1/2}z(\tau)\|^2 + C_T(R)|\varphi^1 - \varphi^2|_C, \quad t \geq \tau \geq r. \tag{3.255}$$

Зараз ми інтегруємо (3.255) за змінною τ на $[r, t]$, змінюємо порядок інтегрування, та використовуємо (3.245) знову для отримання

$$(t-r)\|A^{1/2}z(t)\|^2 + \int_r^t (\xi - r)\|Az(\xi)\|^2 \, d\xi \leq C_T(R)|\varphi^1 - \varphi^2|_C, \quad t \geq r.$$

Використовуючи вигляд для $\dot{z}$ з (3.250), а також оцінку в (3.245) та (3.254) ми маємо, що $\|\dot{z}(t) + Az(t)\|^2 + \|A^{-1/2}\dot{z}(t)\|^2 \leq C_T(R)\left[\|A^{1/2}z(t)\|^2 + |\varphi^1 - \varphi^2|_C\right]$, $t \geq r$. Це дає (3.253).

Властивість $\frac{1}{2}$-гьольдеровості еволюційного оператора S_t в нормі $\mathcal{C}L$ випливає з (3.253). Замкненість оператора S_t для $t \in (0, r]$ легко випливає з (3.245). Доведення завершено.

Зауваження 3.113 *Як випливає з* (3.254) *ми можемо отримати властивість $\frac{1}{2}$-гельдеровості подібно до* (3.253) для всіх $t \geq 0$ *якщо ми додатково припустимо, що одне з початкових даних φ^i має властивість $\dot{\varphi}^i \in L_2(-r, 0; H)$. В цьому випадку аргументи, що наведені вище, дають співвідношення*

$$\begin{aligned} \|A^{-1/2}\dot{z}(t)\|^2 + \|A^{1/2}z(t)\|^2 + \int_0^t \left[\|\dot{z}(\tau)\|^2 + \|Az(\tau)\|^2\right] d\tau \\ \leq C_T(R)\left[\|A^{1/2}(\varphi^1(0) - \varphi^2(0))\| + |\varphi^1 - \varphi^2|_C\right] \end{aligned} \tag{3.256}$$

для всіх $t \in [0, T]$ та для всіх початкових функцій φ^i таких, що $|\varphi^i|_{\mathcal{C}L} + |\dot{\varphi}^i|_{L^2(-r,0;H)} \leq R$. Більш того, можна також побачити, що множина

$$\mathcal{C}L_0 = \left\{\varphi \in \mathcal{C}L \, : \, \dot{\varphi} \in L^2(-r, 0; H)\right\} \tag{3.257}$$

є додатньо інваріантною для S_t. Таким чином $\varphi \mapsto S_t\varphi$ є $\frac{1}{2}$-гельдеровим відображенням для кожного $t \geq 0$ на банаховому просторі $\mathcal{C}L_0$, що споряджений нормою $|\varphi|_{\mathcal{C}L_0} = |\varphi|_{\mathcal{C}L} + |\dot{\varphi}|_{L^2(-r,0;H)}$. Таким чином, виникає *динамічна система (в класичному розумінні, див., наприклад, [2, 31, 200]) $(\mathcal{C}L_0, S_t)$. Однак ми пропонуємо не спиратись на властивість (умову) $\dot\varphi \in L_2(-r,0;H)$ у визначенні фазового простору. Головне пояснення полягає в тому, що наша мета - асимптотична динаміка і добре відомо (див., наприклад, [2, 31, 200]), що існування асимптотичних об'єктів (множин) потребує певних властивостей компактності. На жаль, ми не можемо гарантувати ці властивості (компактності) в просторі $\mathcal{C}L_0$ без суттєвих обмежень відносно члена із загаюванням. Саме тому ми пропонуємо скористатись підходом, що запропонований в [142] щодо асимптотичної динаміки замкнених еволюційних півгруп.*

Зауваження 3.114 *Подібну проблему, як вище, ми маємо з неперервністю* за часом *еволюційного оператора S_t. Легко бачити з (3.239) та (3.243), що $t \mapsto S_t\varphi$ є неперервним для кожного $\varphi \in \mathcal{C}L$ при $t > r$. Для того аби гарантувати неперервність $t \mapsto S_t\varphi$* для всіх *$t \geq 0$ ми потребуємо подальші умови, обмеження (ми відсилаємо до обговорення у [160, 164] для відповідних моделей з РЧП) на початкові функції. Головним обмеженням є умова узгодженості (compatibility condition) в момент часу $t = 0$. Для опису цієї умови ми вводимо наступний (повний) метричний простір*

$$X \equiv \left\{ \varphi \in C^1([-r,0];H_{-1/2}) \cap C([-r,0];H) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi(0) \in H_{1/2}; \\ \dot\varphi(0) + A\varphi(0) + F(\varphi) + G(\varphi(0)) = h \end{array} \right\} \tag{3.258}$$

Тут умову узгодженості $\dot\varphi(0) + A\varphi(0) + F(\varphi) + G(\varphi(0)) = h$ треба розуміти як рівність у просторі $H_{-1/2}$. Відстань в X задається як

$$\mathrm{dist}_X(\varphi,\psi) = \max_{[-r,0]} \|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\| + Lip_{[-r,0]} \|A^{-1/2}(\varphi - \psi)\| + \|A^{1/2}(\varphi(0) - \psi(0))\|. \tag{3.259}$$

Ми бачимо, що X є замкненою множиною в просторі Банаха $\mathcal{C}L$ та топологія, що породжена метрикою dist_X співпадає з топологією $\mathcal{C}L$, див. (3.236).

В наступному твердженні ми збираємо декілька динамічних властивостей еволюційної півгрупи S_t, які є прямими наслідками теореми 3.111, твердження 3.112 та зауваження 3.114.

Твердження 3.115 *При виконанні умов теореми 3.111, задача (3.228) породжує еволюційну півгрупу S_t замкнених відображень на $\mathcal{C}L$ таку, що*

(a) *$S_t\mathcal{C}L \subset X$ для кожного $t \geq r$ та множина S_tB є обмеженою у просторі X для кожного $t \geq r$ коли B є обмеженою у просторі $\mathcal{C}L$;*

(b) *множина X є додатньо інваріантною: $S_tX \subset X$;*

(c) *відображення $\varphi \mapsto S_t\varphi$ є $\frac{1}{2}$-гельдеровим на $\mathcal{C}L$ (і таким чином на X) для всіх $t > r$;*

(d) *траєкторії $t \mapsto S_t\varphi$ є неперервними для $t > r$ та $\varphi \in \mathcal{C}L$. Якщо $\varphi \in X$, Тоді ці траєкторії є неперервними для всіх $t \geq 0$.*

Ця частина є принципово важливою для наших досліджень. Тут ми вивчаємо асимптотичну динаміку моделі із загаюванням, що породжується (3.228) та (3.234). Головним результатом нижче є теорема 3.117, що досліджує скінченновимірні глобальний та експоненційні атрактори. Ми відсилаємо до пункта B 'Додаткові теоретичні матеріали' для відповідних визначень та допоміжних фактів, які ми використовуємо в наших дослідженнях.

Спочатку ми висуваємо стандартні умови (див., наприклад, [200]) щодо нелінійного члена (без загаювання) типу джерело/стік G.

Припущення 3.116 *Нелінійне відображення $G : H_{1/2} \to H$ має форму $G(u) = \Pi'(u)$. Тут $\Pi(u) = \Pi_0(u) + \Pi_1(u)$, де $\Pi_0(u) \geq 0$ є обмежене на обмежених множинах у $H_{1/2}$ та $\Pi_1(u)$ задовільняє властивості*

$$\forall\, \eta > 0\, \exists\, C_\eta > 0 : \quad |\Pi_1(u)| \leq \eta \left(\|A^{1/2}u\|^2 + \Pi_0(u) \right) + C_\eta, \qquad u \in H_{1/2}. \quad (3.260)$$

Більш того, ми припускаємо, що

(a) *існують сталі $\eta \in [0, 1), c_4, c_5 > 0$ такі, що*

$$-\langle u, G(u) \rangle \leq \eta \|A^{1/2}u\|^2 - c_4\Pi_0(u) + c_5, \quad u \in H_{1/2}; \quad (3.261)$$

(b) *для кожного* $\widetilde{\eta} > 0$ *існує* $C_{\widetilde{\eta}} > 0$ *таке, що*

$$\|u\|^2 \leq C_{\widetilde{\eta}} + \widetilde{\eta}\left(\|A^{1/2}u\|^2 + \Pi_0(u)\right), \quad u \in H_{1/2}. \tag{3.262}$$

У випадку параболічних моделей подібних до (3.233), приклади функцій $g(u)$ таких, що відповідний оператор Немицького задовільняє умовам 3.108(G) та 3.116, можуть бути знайдені у [2] та [200]. Найпростіший приклад є $g(u) = u^3 + a_1u^2 + a_2u$ з довільними $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ у випадку, коли Ω є 3D область.

Наш головний результат є наступна

Теорема 3.117 *Нехай умови 3.108 та 3.116 виконані. Припустимо, що* S_t *є еволюційною півгрупою, що породжена у* $\mathcal{CL}$ *задачею* (3.228) *та* (3.234). *Тоді існує* $\ell_0 > 0$ *таке, що ця півгрупа має компактний зв'язний глобальний атрактор* $\mathfrak{A}$ *за умови* $m_F r < \ell_0$, *де* r *є найбільше загаювання та* m_F *є стала лінійного зростання для* F_0 *у* H, *яка визначається таким чином*

$$m_F = \limsup_{\|u\|\to+\infty} \frac{\|F_0(u)\|}{\|u\|}. \tag{3.263}$$

Більш того, для кожних $0 < \beta \leq 1$ *та* $\alpha < \min\{\beta, 1/2\}$ *цей атрактор належить множині*

$$D^R_{\alpha,\beta} = \left\{ \varphi \in X \;\middle|\; \begin{array}{r} |A^{1-\beta}\varphi|_C + |A^{-\beta}\dot{\varphi}|_C + \mathrm{Hold}_\alpha(A^{1-\beta}\varphi) + \mathrm{Hold}_\alpha(A^{-\beta}\dot{\varphi}) \\ + \left[\int_{-r}^{0} \left(\|A\varphi(\theta)\|^2 + \|\dot{\varphi}(\theta)\|^2\right) d\theta\right]^{1/2} \leq R \end{array} \right\} \tag{3.264}$$

для деякого $R = R(\alpha, \beta)$, *де півнорма Гьольдера* $\mathrm{Hold}_\alpha(\psi)$ *задана як* $\mathrm{Hold}_\alpha(\psi) = \sup\left\{ \|\psi(t_1) - \psi(t_2)\| / |t_1 - t_2|^\alpha \;:\; t_1 \neq t_2,\; t_1, t_2 \in [-r, 0]\right\}.$

Нехай додатково існують $\gamma, \delta \in (0, 1/2]$ *такі, що*

(a) *відображення* F_0 *є глобально липшицевим з* $H_{-\gamma}$ *до* $H_{-1/2+\delta}$, *тобто*

$$\|F_0(u) - F_0(v)\|_{-1/2+\delta} \leq c\|u - v\|_{-\gamma}, \quad u, v \in H_{-\gamma}; \tag{3.265}$$

та **(b)** *відображення* G *є майже локально липшицевим (almost locally Lipschitz) з* $H_{1/2-\gamma}$ *до* $H_{-1/2+\delta}$ *у наступному сенсі*

$$\|G(u) - G(v)\|_{-1/2+\delta} \leq c(R)\|u - v\|_{1/2-\gamma}, \quad u, v \in H_{1/2}, \quad \|u\|_{1/2}, \|v\|_{1/2} \leq R. \tag{3.266}$$

Тоді: (A) глобальний атрактор $\mathfrak{A}$ має скінченну фрактальну вимірність.

(B) Існує фрактальний експоненційний атрактор $\mathfrak{A}_{\exp}$.

Ми присвячуємо наступні декілька підпунктів доведенню теореми 3.117.

3.9.3. Існування глобального атрактора. Для доведення існування глобального атрактора достатньо показати, що еволюційний оператор має компактну поглинаючу множину. В цьому випадку ми маємо змогу скористатись стандартним результатом існування з роботи [142] для замкнених півгруп (див. в пункті B 'Додаткові теоретичні матеріали' для деталей). Ми починаємо з існування компактної поглинаючої множини.

Твердження 3.118 (Обмежена дисипативність) *Нехай $u(t)$ розв'язує (3.228) та (3.234) з $\varphi \in \mathcal{C}L$. Тоді можна знайти $\ell_0 > 0$ таке, що для кожного загаювання r такого, що $m_F r < \ell_0$, виконується наступна властивість: існує R_* таке, що для кожної обмеженої множини B у $\mathcal{C}L$ існує t_B таке, що*

$$\|A^{-1/2}\dot{u}(t)\|^2 + \|A^{1/2}u(t)\|^2 + \int_t^{t+1} \left[\|\dot{u}(\tau)\|^2 + \|Au(\tau)\|^2\right] d\tau \leq R_*^2 \qquad (3.267)$$

для всіх $t \geq t_B$ та для всіх початкових функцій $\varphi \in B$. Це означає, що еволюційна півгрупа S_t є дисипативною на обох просторах $\mathcal{C}L$ та X за умови $m_F r < \ell_0$.

Доведення. Ми використовуємо метод О.М.Ляпунова для отримання результату. Для цього ми розглянемо наступний функціонал

$$\widetilde{V}(t) \equiv \frac{1}{2}\left[\|u(t)\|^2 + \|A^{1/2}u(t)\|^2\right] + \Pi(u(t)) + \frac{\mu}{r}\int_0^r \left\{\int_{t-s}^t \|\dot{u}(\xi)\|^2 d\,\xi\right\} ds,$$

що визначений на сильних розв'язках $u(t)$ для $t \geq r$. Додатній параметер μ буде обраний пізніше. Ми відмічаємо, що головна ідея для включення додаткового члена із загаюванням у $\widetilde{V}$ є знайти компенсатор для члена із загаюванням у (3.228). Ця ідея є цілком природньою для рівнянь із загаюванням та була застосована, наприклад, у роботі [64] до моделі другого порядку за часом та із ЗЗС. Дивись також [59, с.480] та [61] для випадку моделі взаємодії потік-пластина, що має лінійний член з постійним загаюванням та з критичною просторовою регулярністю. Відповідний компенсатор залежить від вигляду моделі.

Можна побачити з (3.260), що існують $0 < c_0 < 1$ та $c, c_1 > 0$ такі, що

$$
\begin{aligned}
c_0 \left[\|A^{1/2}u(t)\|^2 + \Pi_0(u(t)) \right] - c \le \widetilde{V}(t) \\
\le c_1 \left[\|A^{1/2}u(t)\|^2 + \Pi_0(u(t)) \right] + \mu \int_0^r \|\dot{u}(t-\xi)\|^2 d\xi + c. \quad (3.268)
\end{aligned}
$$

Ми розглянемо похідну за часом вздовж розв'язків $\widetilde{V}$. Можна легко перевірити, що

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\widetilde{V}(t) = \langle u(t), \dot{u}(t)\rangle + \langle Au(t), \dot{u}(t)\rangle + \langle G(u(t)), \dot{u}(t)\rangle + \frac{\mu}{r}\int_0^r \left\{ \|\dot{u}(t)\|^2 - \|\dot{u}(t-s)\|^2 \right\} ds \\
= \langle \dot{u}(t) + Au(t) + G(u(t)), \dot{u}(t)\rangle - \langle \dot{u}(t), \dot{u}(t)\rangle + \langle u(t), \dot{u}(t)\rangle + \mu\|\dot{u}(t)\|^2 \\
-\frac{\mu}{r}\int_0^r \|\dot{u}(t-\xi)\|^2 d\xi = -\langle F(u_t) - h, \dot{u}(t)\rangle - (1-\mu)\|\dot{u}(t)\|^2 - \frac{\mu}{r}\int_0^r \|\dot{u}(t-\xi)\|^2 d\xi \\
-\|A^{1/2}u(t)\|^2 - \langle F(u_t) + G(u(t)) - h, u(t)\rangle.
\end{aligned}
$$

Останній член є завдяки (3.228):

$$
\langle u(t), \dot{u}(t)\rangle = -\langle Au(t), u(t)\rangle - \langle F(u_t) + G(u(t)) - h, u(t)\rangle.
$$

За визначенням m_F у (3.263), для будь-якого числа M_F більшого ніж m_F, ми можемо знайти $C(M_F)$ таке, що

$$
\|F(u_t)\| = \|F_0(u(t-\eta(u_t)))\| \le M_F\|u(t-\eta(u_t))\| + C(M_F).
$$

Таким чином

$$
\begin{aligned}
\|F(u_t)\| \le & M_F\|u(t-\eta(u_t)) - u(t)\| + M_F\|u(t)\| + C(M_F) \\
= & M_F \left\| \int_{t-\eta(u_t)}^t \dot{u}(\theta) d\theta \right\| + M_F\|u(t)\| + C(M_F),
\end{aligned}
$$

отже маємо

$$
\|F(u_t)\| \le M_F \cdot \left[\|u(t)\| + \int_0^r \|\dot{u}(t-\xi)\| d\xi \right] + C(M_F), \quad t \ge r.
$$

Оскільки

$$\int_0^r \|\dot u(t-\xi)\| d\,\xi \le r^{1/2} \left(\int_0^r \|\dot u(t-\xi)\|^2 d\,\xi \right)^{1/2},$$

ми маємо, що

$$\begin{aligned} |\langle F(u_t)-h, \dot u(t)\rangle| \le & \frac{1}{2}\|\dot u(t)\|^2 + c_0\|h\|^2 + c_1 M_F^2 \|u(t)\|^2 \\ & + c_2 M_F^2 r \int_0^r \|\dot u(t-\xi)\|^2 d\,\xi + C(M_F), \quad t \ge r. \end{aligned}$$

Таким самим чином ми отримуємо

$$|\langle F(u_t)-h, u(t)\rangle)| \le c_1 M_F^2 r \int_0^r \|\dot u(t-\xi)\|^2 d\,\xi + C(M_F)(1+\|u(t)\|^2).$$

Отже

$$\begin{aligned} & |\langle F(u_t)-h, \dot u(t)\rangle| + |\langle F(u_t)-h, u(t)\rangle)| \\ & \qquad \le \frac{1}{2}\|\dot u(t)\|^2 + c_0 M_F^2 r \int_0^r \|\dot u(t-\xi)\|^2 d\,\xi + c_1(M_F)(1+\|u(t)\|^2). \end{aligned}$$

Властивості у (3.261) та (3.262) з достатньо малим $\widetilde{\eta} > 0$ (та $\eta \in [0,1)$) дають

$$c_1(M_F)(1+\|u\|^2) - \|A^{1/2}u\|^2 - \langle u, G(u)\rangle \le -a_0 \left[\|A^{1/2}u\|^2 + \Pi_0(u) \right] + a_1(M_F)$$

для деяких $a_i > 0$ з a_0, що не залежить від M_F. Отже з цих властивостей випливає

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\widetilde{V}(t) \le & -\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\|\dot u(t)\|^2 \\ & - a_0\left[\|A^{1/2}u\|^2 + \Pi_0(u) \right] + a_1(M_F) + \left[-\frac{\mu}{r} + a_2 M_F^2 r \right] \int_0^r \|\dot u(t-\xi)\|^2 d\,\xi \end{aligned}$$

для деяких a_i. Використовуючи праву нерівність у (3.268) ми приходимо до властивості

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\widetilde{V}(t) + \gamma\widetilde{V}(t) \le & -\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\|\dot u(t)\|^2 - (a_0 - \gamma c_1)\left[\|A^{1/2}u\|^2 + \Pi_0(u) \right] \\ & + \left[-\frac{\mu}{r} + \mu\gamma + a_2 M_F^2 r \right] \int_0^r \|\dot u(t-\xi)\|^2 d\,\xi + a_1(M_F). \end{aligned} \tag{3.269}$$

Таким чином, обираючи $\mu = 1/4$ та фіксуючи $\gamma \le a_0 c_1^{-1}$, ми отримуємо, що

$$\frac{d}{dt}\widetilde{V}(t) + \gamma\widetilde{V}(t) + \frac{1}{4}\|\dot u(t)\|^2 \le C, \quad t \ge r, \tag{3.270}$$

за умови $\gamma r + 4a_2 M_F^2 r^2 \le 1$. Отже, за умови $4a_2 m_F^2 r^2 < 1$ ми можемо обрати $\gamma \in (0, a_0 c_1^{-1}]$ та $M_F > m_F$ такі, що (3.270) виконується. Зокрема ми маємо

$$\frac{d}{dt}\widetilde{V}(t) + \gamma \widetilde{V}(t) \le C, \quad t \ge r,$$

що дає

$$\widetilde{V}(t) \le \widetilde{V}(r) e^{-\gamma(t-r)} + \frac{C}{\gamma}(1 - e^{-\gamma(t-r)}), \quad t \ge r, \tag{3.271}$$

якщо $m_F r < \ell_0$. Використовуючи (3.268) та (3.244) ми можемо прийти до висновку, що $|\widetilde{V}(r)| \le C_B$ для всіх початкових функцій з обмеженої множини B у $\mathcal{C}L$. Таким чином (див. (3.228)) існує R таке, що для кожної початкової функції з обмеженої множини B у $\mathcal{C}L$ ми маємо

$$\|A^{1/2}u(t)\| + \|A^{-1/2}\dot{u}(t)\| + \|\dot{u}(t) + Au(t)\| \le R \quad \text{для всіх} \ \ t \ge t_B.$$

Більш того, з (3.270) випливає, що $\int_t^{t+1} \|\dot{u}(\tau)\|^2 d\tau \le C_R \quad$ для всіх $\ t \ge t_B$. Аби отримати це, треба домножити (3.270) на $e^{\gamma t}$, проінтегрувати по $[t, t+1]$ та домножити на $e^{-\gamma t}$. Тоді фінальна обмеженість $\widetilde{V}(t)$ (див. (3.271)) та властивість $1 \le e^{\gamma(\tau - t)}$ для $\tau \ge t$ дають останню оцінку (вище). Ці властивості дають (3.267) та дозволяють нам завершити доведення твердження 3.118.

Зауваження 3.119 *Якщо відображення F_0 має підлінійне зростання (sublinear growth) у H, тобто, існує $\beta < 1$ таке, що $\|F_0(u)\| \le c_1 + c_2\|u\|^\beta$, $\ u \in H$, тоді параметр лінійного зростання m_F, що визначений у* (3.263) *дорівнює нулю. Отже в цьому випадку ми НЕ маємо обмежень на максимальне загаювання r в формулюванні твердження 3.118. Зокрема це вірно у випадку обмеженого відображення F_0. Більш того, в останньому випадку аргументи суттєво спрощуються (ми можемо використовувати функцію О.М.Ляпунова без члена із загаюванням). Для більше деталей дивись статті [160, 164] та попередні пункти дисертації.*

Ми використовуємо твердження 3.118 для отримання наступного результату, який означає, що еволюційна півгрупа S_t є (фінально) компактною.

Твердження 3.120 (Компактна дисипативність) *Як у твердженні 3.118 ми припускаємо, що $m_F r < \ell_0$. Тоді еволюційний оператор S_t має компактну поглинаючу множину. Точніше, для кожних $0 < \beta \leq 1$ та $\alpha < \min\{\beta, 1/2\}$ множина $D^R_{\alpha,\beta}$, яка задана у (3.264) є поглинаючою для деякого R. Ця множина $D^R_{\alpha,\beta}$ є компактною у просторі X за умови $0 < \alpha < \beta < 1/2$.*

Доведення твердження 3.120. Ми по-перше відмічаємо, що компактність для $D^R_{\alpha,\beta}$ у $X \subset \mathcal{C}L$ для $0 < \alpha < \beta < 1/2$ випливає з теореми Арцела-Асколі у банахових просторах (див., наприклад, [188]).

Зараз ми покажемо, що множина $D^R_{\alpha,\beta}$ є поглинаючою. Використовуючи слабку форму задачі, а також оцінку (обмеження) з (3.237) можна показати

$$\|A^{1-\delta}u(t)\| + \|A^{-\delta}\dot{u}(t)\| \leq C_{R*}(\delta) \quad \text{для всіх} \;\; t \geq t_B, \tag{3.272}$$

для кожного $\delta > 0$, де $u(t)$ є розв'язок, що має властивість (3.267).

Тепер ми розглянемо різницю $u(t_1)-u(t_2)$ з $t_1 > t_2$. А саме, використовуючи слабку форму ми отримуємо

$$\begin{aligned}\|A^{1-\beta}(u(t_1) - u(t_2))\| \leq & \|A^{1-\beta}(e^{-A(t_1-t_2)} - 1)u(t_2)\| \\ & + \int_{t_2}^{t_1} \|A^{1-\beta}e^{-A(t_1-\tau)}\| \cdot (\|F(u_\tau)\| + \|G(u(\tau)) - h\|)\, d\tau.\end{aligned}$$

Оскільки (див. [103, теорема 1.4.3, с.26] для відповідних фактів) $\|A^{-\alpha}(1 - e^{-At})\| \leq t^\alpha$ та $\|A^\alpha e^{-At}\| \leq \left(\frac{\alpha}{t}\right)^\alpha e^{-\alpha}$ для всіх $t > 0$ та $0 \leq \alpha \leq 1$, ми отримуємо

$$\begin{aligned}\|A^{1-\beta}(u(t_1) - u(t_2))\| \leq & |t_1 - t_2|^\alpha \|A^{1-\beta+\alpha}u(t_2)\| \\ & + c_\beta \int_{t_2}^{t_1} \frac{1}{|t_1 - \tau|^{1-\beta}} \left[C_{R_*} + c|u_\tau|_C\right] d\tau.\end{aligned}$$

для $t_1 > t_2 \geq t_B$. Отже для кожних $0 < \alpha < \beta \leq 1$ ми маємо

$$\|A^{1-\beta}(u(t_1) - u(t_2))\| \leq C_{R_*}|t_1 - t_2|^\alpha \;\; \text{для всіх} \;\; t_i \geq t_B, |t_1 - t_2| \leq 1. \tag{3.273}$$

Подібно до (3.254) використовуючи (3.273) з $\beta = 1$ та $\alpha = 1/2$ ми маємо

$$\begin{aligned}\|F(u_{t_1}) - F(u_{t_2})\| \leq & L_F \left| \int_{t_1-\eta(u_{t_1})}^{t_2-\eta(u_{t_2})} \|\dot{u}(\xi)\| d\xi \right| \\ & \leq C_{R_*} \left[|t_1 - t_2| + |u_{t_1} - u_{t_2}|^2_C\right]^{1/2} \leq C_{R_*} |t_1 - t_2|^{1/2}\end{aligned}$$

для кожного $t_1, t_2 \geq t_B \geq r$. Отже з (3.228) та (3.273) ми отримуємо

$$\|A^{-\beta}(\dot{u}(t_1) - \dot{u}(t_2))\| \leq C_{R_*}|t_1 - t_2|^{\alpha} \text{ для всіх } t_i \geq t_B, \quad |t_1 - t_2| \leq 1,$$

для кожного $0 < \alpha < 1/2$. Це, а також твердження 3.118, дають, що множина $D^R_{\alpha,\beta}$, що задана у (3.264), є поглинаючою для деякого R за умов $0 < \beta \leq 1$ та $\alpha < \min\{\beta, 1/2\}$. Доведення твердження 3.120 завершено.

Твердження 3.120 дозволяє нам застосувати результати з [142] (див. теорему B.2 в нашому пункті B) аби гарантувати існування компактного зв'язного глобального атрактора.

3.9.4. Вимірність та експоненційний атрактор. Наші подальші дослідження базуються на понятті *квазістійкості* яке каже, що півгрупа є асимптотично стискаюча по модулю додавання компактного члена. Для зручності ми нагадаємо відповідний абстрактний результат у пункті B. Метод квазістійкості був розроблений у [56, 57, 58, 59, 60] для *неперервних* еволюційних моделей. Завдяки зауваженню ми можемо застосувати цей метод до системи $(S_t, D_0^{\alpha,\beta})$ з $D_0^{\alpha,\beta}$, яке визначене вище.

Твердження 3.121 (Квазістійкість) *Нехай виконані умови 3.108 та 3.116. Нехай (3.265) та (3.266) є вірними для деяких $\gamma, \delta \in (0, 1/2]$. Нехай $D_0 = D_0^{\alpha,\beta}$ з $0 < \alpha < \beta < \gamma$. Тоді*

$$\begin{aligned} |S_t\varphi^1 - S_t\varphi^2|_{CL} \leq & C_R e^{-\lambda_1 t}\left[\|\varphi^1(0) - \varphi^2(0)\|_{1/2} + |\varphi^1 - \varphi^2|_C\right] \\ & + C_R \max_{s\in[0,t]} \|A^{1/2-\gamma}(u^1(s) - u^2(s))\|, \quad t \geq r, \end{aligned} \tag{3.274}$$

для кожної $\varphi^i \in D_0$, де $u^i(t) = (S_t\varphi^i)(\theta)\big|_{\theta=0}$.

Доведення твердження 3.121. Використовуючи слабку форму для $u^i(t)$ та (3.266) ми маємо

$$\|A^{1/2}(u^1(t) - u^2(t))\| \leq e^{-\lambda_1 t}\|A^{1/2}(u^1(0) - u^2(0))\|$$
$$+\int_0^t \|A^{1-\delta}e^{-A(t-\tau)}\| \cdot \Big(C\|A^{-1/2+\delta}\big[F(u^1_\tau) - F(u^2_\tau)\big]\| + C_R\|u^1(\tau) - u^2(\tau)\|_{1/2-\gamma}\Big)\, d\tau.$$

Як у (3.254) ми також маємо

$$\|A^{-1/2+\delta}\big[F(u_t^2)-F(u_t^1)\big]\| \le C\left|\int_{t-\eta(u_t^1)}^{t-\eta(u_t^2)} \|A^{-\beta}\dot u^2(\xi)\|d\xi\right| + C|u_t^2-u_t^1|_C$$
$$\le C(R)\max_{\theta\in[-r,0]}\|u^2(t+\theta)-u^1(t+\theta)\|$$

для кожного $t\ge 0$ з $\beta\in(0,\gamma]$. Таким чином

$$\|A^{1/2}(u^1(t)-u^2(t))\| \le c_1e^{-\lambda_1 t}\left[\|A^{1/2}(\varphi^1(0)-\varphi^2(0))\| + |\varphi^1-\varphi^2|_C\right]$$
$$+ c_2(R)\max_{s\in[0,t]}\|A^{1/2-\gamma}(u^1(s)-u^2(s))\|.$$

Використовуючи (3.228), (3.231) та (3.238) ми також маємо, що

$$\|A^{-1/2}(\dot u^1(t)-\dot u^2(t))\| \le C(R)\left[\|A^{1/2}(u^1(t)-u^2(t))\| + |u_t^2-u_t^1|_C\right].$$

Отже

$$\|A^{-1/2}(\dot u^1(t)-\dot u^2(t))\| \le c_1e^{-\lambda_1 t}\left[\|A^{1/2}(\varphi^1(0)-\varphi^2(0))\| + |\varphi^1-\varphi^2|_C\right]$$
$$+ c_2(R)\max_{s\in[0,t]}\|A^{1/2-\gamma}(u^1(s)-u^2(s))\|,\quad t\ge r.$$

Це завершує доведення твердження 3.121.

Завершення доведення теореми 3.117. Оскільки глобальний атрактор належить до фрактального експоненційного атрактору (див. [81]), достатньо довести існування тільки фрактального експоненційного атрактору. Для цього ми застосовуємо теорему B.5 на множині D_0 (див. твердження 3.121) з відповідним вибором операторів та просторів. Отже, нехай $T>0$ обрано так, що $q\equiv C_Re^{-\lambda_1 T}<1$ де C_R є сталою з (3.274). Ми визначаємо липшицеве відображення $K: D_0\mapsto Z_{[0,T]}\equiv C^1([0,T];D(A^{-1/2}))\cap C([0,T];D(A^{1/2}))$ за правилом $K\varphi = u(t), t\in[0,T]$, з u - єдиним розв'язком задачі (3.228) та (3.234) та з початковою функцією $\varphi\in D_0$. Півнорма $n_Z(u)\equiv\max_{s\in[0,T]}\|A^{1/2-\gamma}u(s)\|$ є компактною на $Z_{[0,T]}$ завдяки компактності вкладення $Z_{[0,T]}$ в $C([0,T];D(A^\alpha))$ для кожного $\alpha<1/2$ - це вже завдяки теоремі Арцела-Асколі (див., наприклад, [188]). Якщо ми візьмемо $Y\equiv\left\{\varphi\in C^1([-r,0];H_{-1/2})\cap C([-r,0];H) : \varphi(0)\in H_{1/2}\right\}$, споряджене нормою (3.259) та припустимо $V = S_T$, тоді (дискретна) квазістабільна нерівність у (B.2) є вірною на D_0. Таким чином ми можемо застосувати теорему B.5 з $V = S_T$ на D_0 для того аби показати, що існує скінченновимірна множина $A_\theta \subset D_0$ така, що виконується (B.3). Тоді, як стандартна побудова, (див., наприклад, [81] або [136]) ми визначимо $\mathfrak{A}_{exp} = \text{Closure}\left(\bigcup_{t\in[0,T]} S_t A_\theta\right)$. Оскільки $V = S_T$, легко бачити, що $\mathfrak{A}_{exp}$ є експоненційно притягуючою, див. (B.1) у додатку.

Оскільки D_0 є підмножиною $D^R_{\alpha,\beta}$, яка задана (3.264), ми маємо, що $t \mapsto S_t\varphi$ є α-гьольдеровою на D_0: $|S_{t_1}\varphi - S_{t_2}\varphi|_Y \le C_{D_0}|t_1 - t_2|^\alpha$, $\quad t_1, t_2 \in [0, T]$, $\quad \varphi \in D_0$. Таким чином стандартним способом (див., наприклад, [81] або [136]) ми приходимо до того, що $\mathfrak{A}_{exp}$ має скінченну фрактальну вимірність у Y.

Це завершує доведення теореми 3.117.

3.10. Динаміка еволюційних рівняннь другого порядку за часом із ЗЗС

Досліджений клас нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку за часом з ЗЗС. Доведена коректна розв'язність у відповідному просторі функцій, які є C^1 за часовою змінною. На відміну від моделей першого порядку з дискретним ЗЗС, цей результат не потребує ніяких умов узгодження. Побудовані розв'язки формують динамічну систему у просторі C^1-типу на інтервалі загаювання. Зазначимо, що в роботі [64] вперше доведено, що динамічна система має компактний глобальний атрактор та експоненційний атрактор (обидва) скінченної фрактальної вимірності. Для доведення цього результату використаний метод квазістійких оцінок, який був розроблений І.Д.Чуєшовим та І.Лашецькою (про метод, див. [56, 59]).

3.10.1. Постановка задачі. Наша мета - дослідити коректну розв'язність та асимптотичну поведінку рівнянь наступного класу

$$\ddot{u}(t) + k\dot{u}(t) + Au(t) + F(u(t)) + M(u_t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.275}$$

у деякому гільбертовому просторі H. A є лінійним, а $F(\cdot)$ є нелінійним операторами, $M(u_t)$ презентує (нелінійний) загаюванний елемент (ефект) в динаміці. Детальніше опишемо їх далі. Основний приклад стосується нелінійного рівняння пластини форми

$$\ddot{u}(t,x) + k\dot{u}(t,x) + \Delta^2 u(t,x) + F(u(t,x)) + au(t - \tau[u(t)], x) = 0, \quad x \in \Omega, \ t > 0, \tag{3.276}$$

у гладкій обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ з відповідними граничними умовами на $\partial\Omega$. Тут τ є відображення, що визначене на розв'язках зі значеннями в деякому інтервалі $[0, h]$, k та a є сталими. За браком місця, ми відсилаємо за деталями до роботи [64]. Лише підкреслюємо, наскільки нам відомо, глобальна асимптотична динаміка для РЧП другого порядку за часом з ЗЗС досліджується вперше (див. [64]).

В нашому підході ми використовуємо спеціальну структуру систем другого порядку за часом для того аби довести глобальну коректну розв'язність початкової задачі для слабких (mild) розв'язків. В якості фазового простору ми обираємо простір типу C^1. Розв'язки також є типу C^1. Для їх побудови ми переписуємо рівняння другого порядку за часом (для невідомої $u(t)$) як систему першого порядку (для невідомого вектора $(u(t), \dot{u}(t))$) та шукаємо неперервні (слабкі / mild) розв'яки системи. Але, на відміну від підходів, що базуються на загальній теорії (див. [83] а також [205, частина 3] та [98, частина 2]) ми беремо до пильної уваги природню узгодженість 'переміщення-швидкість' з самого початку - на рівні вибору фазового простору. Збудовані розв'язки мають бажану властивість Липшиця (навіть C^1) за часом для першої координати $u(t)$. У певному сенсі це є проміжний випадок між двома стандартними класами неперервних (слабких) та C^1 (класичних) розв'язків $(u(t), v(t))$, $t \in [-h, T), T > 0$ для загальної системи першого порядку за часом із загаюванням:

$$\dot{u}(t) = \mathcal{F}(u_t, v_t), \quad \dot{v}(t) = \mathcal{G}(u_t, v_t).$$

Підкреслемо, що завдяки структурі нашої задачі, ми не потребуємо ніяких нелінійних умов типу узгодження для правої частини рівнянь, які зазвичай виникають для систем першого порядку (навіть скінченновимірних), коли вивчаються C^1-розв'язки (див. [205] та огляд [98]).

3.10.2. Коректна розв'язність та побудова динамічної системи. Головна мета цього пункта - показати, що задача (3.275) генерує динамічну систему у відповідному лінійному фазовому просторі C^1 функцій.

В наших дослідженнях ми припускаємо:

(A1) *У (3.275), Оператор A задовільняє умові (A1) (див. 2.1).*

(F1) *Нелінійне відображення (без загаювання) $F : D(A^{\frac{1}{2}}) \to H$ є локально липшицевим, тобто для кожного $R > 0$ існує $L_{F,R} > 0$ таке, що для всіх u^1, u^2 з $||A^{\frac{1}{2}}u^i|| \le R$, виконується $||F(u^1) - F(u^2)|| \le L_{F,R}||A^{\frac{1}{2}}(u^1 - u^2)||$.*

Ми використовуємо наступний вибір фазового простору

$$W \equiv C([-h, 0]; D(A^{\frac{1}{2}})) \cap C^1([-h, 0]; H), \tag{3.277}$$

що споряджений нормою $|\varphi|_W = |\varphi|_{C_{1/2}} + |\dot{\varphi}|_{C_0}$.

Ми пропонуємо наступні (основні) гіпотези щодо загаюванного елемента.

(M1) *Нелінійний загаюваний елемент $M : W \mapsto H$ є локально липшицевим у сенсі, що*

$$\|M(\varphi^1) - M(\varphi^2)\| \le C_\rho \left[|\varphi^1 - \varphi^2|_{C_{1/2}} + |\dot{\varphi}^1 - \dot{\varphi}^2|_{C_0} \right]$$

для всіх $\varphi^1, \varphi^2 \in W$, $|\varphi^j|_W \le \varrho$, $j = 1, 2$.

Зауваження 3.122 *Основний приклад (більш загальна ситуація має місце в гіпотезі **(M3)** та зауваженні 3.127 далі) ЗЗС є*

$$M(\varphi) = \varphi(-\tau(\varphi)), \quad \varphi \in C, \tag{3.278}$$

де τ відображає C в інтервал $[0, h]$. Як вже відмічалось, елемент M не є локально липшицевим на класичному просторі $C = C([-h, 0]; H)$, не зважаючи на гладкість загаювання $\tau : C \to [0, h]$.

Ми розглядаємо рівняння (3.275) з наступними початковими даними

$$u_0 = u_0(\theta) \equiv u(\theta) = \varphi(\theta), \quad \text{для } \theta \in [-h, 0], \quad \varphi \in W. \tag{3.279}$$

Ми переписуємо рівняння (3.275) як наступну систему першого порядку

$$\frac{d}{dt}U(t) + \mathcal{A}U(t) = \mathcal{N}(U_t), \quad t > 0, \tag{3.280}$$

у просторі $Y = D(A^{1/2}) \times H$, де $U(t) = (u(t); \dot{u}(t))$. Тут оператор $\mathcal{A}$ та відображення $\mathcal{N}$ визначені як

$$\mathcal{A}U = (-v; Au + kv), \ \text{ для } \quad U = (u; v) \in D(\mathcal{A}) \equiv D(A) \times D(A^{1/2})$$

$$\mathcal{N}(\Phi) = -(0; F(\varphi(0)) + M(\varphi)) \ \text{ для } \quad \Phi = (\varphi; \dot{\varphi}), \, \varphi \in W. \tag{3.281}$$

Можна показати (див., наприкла [31]), що оператор $\mathcal{A}$ генерує експоненційно стійку C_0-півгрупу $e^{-\mathcal{A}t}$ у Y. Репрезентація (3.280) мотивує наступне

Визначення 3.123 *Слабкий розв'язок (mild) для (3.275) та (3.279) на інтервалі $[0, T]$ є визначений як функція $u \in C([-h, T]; D(A^{1/2})) \cap C^1([-h, T]; H)$, така, що $u(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-h, 0]$ та $U(t) \equiv (u(t); \dot{u}(t))$ (нижче $U(t)$ також називаємо слабким розв'язком) задовільняє*

$$U(t) = e^{-t\mathcal{A}}U(0) + \int_0^t e^{-(t-s)\mathcal{A}}\mathcal{N}(U_s)ds, \quad t \in [0, T]. \tag{3.282}$$

Аналогічно визначаєтьсся розв'язок на $[0, T)$.

Легко довести наступний локальний результат.

Твердження 3.124 *Нехай (A1), (F1) та (M1) виконані. Тоді для всіх $\varphi \in W$ існують $T_\varphi > 0$ та єдиний слабкий розв'язок $U(t) \equiv (u(t); \dot{u}(t))$ для (3.275), (3.279) на півінтервалі $[0, T_\varphi)$. Розв'язок неперервно залежить від початкової функції $\varphi \in W$.*

Аргументи для локального існування, єдиності та неперервної залежності для слабких розв'язків є стандартними (див., напр. [202, твердження 2.1 та наслідок 2.2], [83]). Для глобальної коректної розв'язності нам потрібні додаткові гіпотези на F та M. Як у випадку без загаювання (див. [58] та [59]) ми використовуємо наступні умови для F.

(F2) *Нелінійне відображення* $F : D(A^{\frac{1}{2}}) \to H$ *має форму* $F(u) = \Pi'(u) + F^*(u)$, *де* $\Pi'(u)$ *позначає похідну Фреше (це озачає, що* $\Pi'(u)$ *є елементом у* $D(A^{\frac{1}{2}})'$ *таким, що* $|\Pi(u+v) - \Pi(u) - \langle \Pi'(u), v\rangle| = o(\|A^{1/2}v\|)$ *для всіх* $v \in D(A^{\frac{1}{2}})$*) для* C^1*-функціоналу* $\Pi(u) : D(A^{\frac{1}{2}}) \to R$ *та відображення* $F^* : D(A^{\frac{1}{2}}) \to H$ *є глобально липшицевим, тобто*

$$||F^*(u^1) - F^*(u^1)||^2 \le c_0||A^{\frac{1}{2}}(u^1 - u^2)||^2, \qquad u^1, u^2 \in D(A^{\frac{1}{2}}). \qquad (3.283)$$

Більш того, ми припускаємо, що $\Pi(u) = \Pi_0(u) + \Pi_1(u)$, *з* $\Pi_0(u) \ge 0$, $\Pi_0(u)$ *є обмеженим на обмежених множинах у* $D(A^{\frac{1}{2}})$ *та* $\Pi_1(u)$ *задовільняє властивості*

$$\forall\, \eta > 0\, \exists\, C_\eta > 0 : \quad |\Pi_1(u)| \le \eta \left(||A^{\frac{1}{2}}u||^2 + \Pi_0(u) \right) + C_\eta, \qquad u \in D(A^{1/2}). \qquad (3.284)$$

Як показано у книжках [58, 59] моделі другого порядку з нелінійностями, які задовільняють **(F2)**, виникають у багатьох прикладних задачах.

Ми також припускаємо

(M2) *Нелінійний загаюваний елемент* $M : W \to H$ *задовільняє умові лінійного зростання*

$$||M(\varphi)|| \le M_0 + M_1 \left\{ \max_{\theta \in [-h,0]} ||A^{1/2}\varphi(\theta)|| + \max_{\theta \in [-h,0]} ||\dot\varphi(\theta)|| \right\}, \quad \forall\, \varphi \in W, \qquad (3.285)$$

для деяких $M_j \ge 0$, $j = 0, 1$.

Основним результатом цього пункта є наступна

Теорема 3.125 (Коректна розв'язність) *Нехай (A1), (F1), (F2), (M1), та (M2) виконані. Тоді для кожного* $\varphi \in W$ *існує єдиний глобальний слабкий розв'язок* $U(t) \equiv (u(t); \dot u(t))$ *для (3.275), (3.279) на інтервалі* $[0, +\infty)$. *Розв'язки задовільняють енергетичній рівності*

$$\mathcal{E}(u(t), \dot u(t)) + k \int_0^t ||\dot u(s)||^2 ds$$

$$= \mathcal{E}(u(0), \dot{u}(0)) - \int_0^t (F^*(u(s)), \dot{u}(s))\, ds - \int_0^t (M(u_s), \dot{u}(s))\, ds. \qquad (3.286)$$

Тут ми позначаємо

$$\mathcal{E}(u, v) \equiv E(u, v) + \Pi_1(u), \qquad E(u, v) \equiv \frac{1}{2}\left(||v||^2 + ||A^{\frac{1}{2}}u||^2\right) + \Pi_0(u). \quad (3.287)$$

Більш того, для кожних $\varrho > 0$ *та* $T > 0$ *існує* $C_{\varrho,T}$ *таке, що*

$$\|A^{1/2}(u^1(t) - u^2(t))\| + \|\dot{u}^1(t) - \dot{u}^2(t)\| \le C_{\varrho,T}|\varphi^1 - \varphi^2|_W, \quad t \in [0, T], \quad (3.288)$$

для кожної пари $u^1(t)$ *та* $u^2(t)$ *слабких розв'язків із початковими функціями* φ^1 *та* φ^2 *такими, що* $|\varphi^j|_W \le \varrho$.

Доведення теореми 3.125. Локальне існування та єдиність слабких розв'язків дана у твердженні 3.124. Нехай $U = (u; \dot{u})$ є слабким розв'язком (3.275) та (3.279) на (максимальному) пів-інтервілі $[-h, T_\varphi)$ та

$$f^u(t) \equiv F(u(t)) + M(u_t) \in C([0, T_\varphi); H).$$

Звісно, ми можемо розглядати $(u(t); \dot{u}(t))$ як слабкий розв'язок лінійної задачі *без загаювання*

$$\ddot{v}(t) + Av(t) + k\dot{v}(t) + f^u(t) = 0, \quad t \in [0, T_\varphi), \quad (v(0); \dot{v}(0)) = (\varphi(0); \dot{\varphi}(0)) \in Y. \qquad (3.289)$$

Тут $Y = D(A^{1/2}) \times H$. Отже (див., напр., [31]) бачимо, що $u(t)$ задовільняє енергетичній рівності вигляду

$$E_0(u(t), \dot{u}(t)) + k\int_0^t ||\dot{u}(s)||^2 ds = E_0(u(0), \dot{u}(0)) - \int_0^t (f^u(s), \dot{u}(s))\, ds, \quad t < T_\varphi, \qquad (3.290)$$

де $E_0(u, v) = \frac{1}{2}\left(\|A^{1/2}u\|^2 + \|v\|^2\right)$. Використовуючи структуру f^u, після деяких розрахунків (спочатку на гладких функціях) ми показуємо, що

$$\int_0^t (f^u(s), \dot{u}(s))\, ds = \Pi(u(t)) - \Pi(u(0)) + \int_0^t (F^*(u(s)) + M(u_s), \dot{u}(s))\, ds.$$

Отже (3.290) дає (3.286) для кожного $t < T_\varphi$.

Із (3.283) ми маємо $||F^*(u)|| \le \sqrt{c_0}||A^{1/2}u|| + ||F^*(0)||$. Отже, використовуючи (3.286) та (3.285) ми отримуємо

$$\mathcal{E}(u(t),\dot{u}(t)) + \frac{k}{2}\int_0^t ||\dot{u}(s)||^2 ds \le \mathcal{E}(u(0),\dot{u}(0)) + c_1\int_0^t (1+||A^{\frac{1}{2}}u(s)||^2)\,ds$$

$$+ c_2\int_0^t \left[\max_{\theta\in[-h,0]} ||A^{\frac{1}{2}}u(s+\theta)||^2 + \max_{\theta\in[-h,0]} ||\dot{u}(s+\theta)||^2\right] ds. \qquad (3.291)$$

Бачимо, що

$$\max_{\theta\in[-h,0]} ||A^{\frac{1}{2}}u(s+\theta)||^2 + \max_{\theta\in[-h,0]} ||\dot{u}(s+\theta)||^2 \le |\varphi|_W^2 + 2\max_{\sigma\in[0,s]} E(u(\sigma),\dot{u}(\sigma)) \qquad (3.292)$$

для кожного $s \in [0, T_\varphi)$. З (3.284) випливає, що існує стала $c > 0$ така, що

$$\frac{1}{2}E(u,v) - c \le \mathcal{E}(u,v) \le 2E(u,v) + c, \quad u \in D(A^{\frac{1}{2}}), v \in H. \qquad (3.293)$$

Таким чином, ми використовуємо (3.293) та (3.292) аби продовжити (див. (3.291)) наступним чином

$$\max_{\sigma\in[0,t]} E(u(\sigma),\dot{u}(\sigma)) \le c\left(1 + t + E(u(0),\dot{u}(0)) + t\cdot|\varphi|_W^2 + \int_0^t \max_{\sigma\in[0,s]} E(u(\sigma),\dot{u}(\sigma))ds\right).$$

Застосування леми Гронуола (до функції $p(t) \equiv \max_{\sigma\in[0,t]} E(u(\sigma),\dot{u}(\sigma))$ дає наступну (апріорну) оцінку

$$\max_{\sigma\in[0,t]} E(u(\sigma),\dot{u}(\sigma)) \le C\left(1 + E(u(0),\dot{u}(0)) + |\varphi|_W^2\right)\cdot e^{at}, \quad a > 0, \quad t < T_\varphi,$$

яка дозволяє нам в стандартний спосіб продовжити розв'язок на піввісь $\mathbb{R}_+$.

Для доведення (3.288) ми використовуємо той факт, що різниця $u(t) = u^1(t) - u^2(t)$ є розв'язком задачі у (3.289) з $f^u(t) = F(u^1(t)) + M(u_t^1) - F(u^2(t)) - M(u_t^2)$, властивості Липшиця (**F1**), (**M1**) та стандартні оцінки [202, наслідок 2.2]. Це завершує доведення теореми 3.125.

Спираючись на теорему 3.125, ми визначаємо еволюційний оператор $S_t : W \to W$ для всіх $t \ge 0$ за формулою $S_t\varphi = u_t$, де $u(t)$ є слабкий розв'язок для (3.275), (3.279), який задовільняє $u_0 = \varphi$. Цей оператор задовільняє півгруповій властивості та породжує динамічну систему $(S_t; W)$ у фазовому просторі W, який визначений у (3.277).

Завершимо цей пункт обговоренням існування гладкого розв'язку задачі (3.275) та (3.279).

Наслідок 3.126 (Гладкість) *Нехай гіпотези теореми 3.125 виконані з припущенням* ***(M1)*** *у наступному (більш сильному) вигляді*

$$\|M(\varphi^1) - M(\varphi^2)\| \le C_\varrho |\varphi^1 - \varphi^2|_{C_0} \tag{3.294}$$

для всіх $\varphi^1, \varphi^2 \in W$, $|\varphi^j|_W \le \varrho$, $j = 1, 2$. Якщо початкова функція $\varphi(\theta)$ має властивість

$$\varphi(0) \in D(A), \quad \dot{\varphi}(0) \in D(A^{1/2}), \tag{3.295}$$

тоді розв'язок $u(t)$ задовільняє

$$u(t) \in L_\infty(0, T; D(A)), \quad \dot{u}(t) \in L_\infty(0, T; D(A^{1/2})), \quad \ddot{u}(t) \in L_\infty(0, T; H) \tag{3.296}$$

для кожного $T > 0$. Якщо додатково $F(u)$ є диференційовна за Фреше та $\|F'(u)v\| \le C_r \|A^{1/2}v\|$ для кожного $u \in D(A)$ з $\|Au\| \le r$, тоді ми маємо

$$u(t) \in C(\mathbb{R}_+; D(A)), \quad \dot{u}(t) \in C(\mathbb{R}_+; D(A^{1/2})), \quad \ddot{u}(t) \in C(\mathbb{R}_+; H). \tag{3.297}$$

Доведення 3.126. Нехай $u(t)$ є розв'язок. З теореми 3.125 ми маємо $\max_{[-h,T]} \left(\|A^{1/2}u(t)\|^2 + \|\dot{u}(t)\|^2\right) \le R_T$ для деякого R_T. Ми відмічаємо, що за умов (3.294), функція $t \mapsto f(t) \equiv M(u_t)$ є липшицева на будь-якому відрізку $[0, T]$ зі значеннями у H. Дійсно, з (3.294) ми маємо

$$\|M(u_{t_1}) - M(u_{t_2})\| \le C_{R_T} \max_{[-h,0]} \left\| \int_{t_2+\theta}^{t_1+\theta} \dot{u}(\xi) d\xi \right\| \le C_{R_T} R_T |t_1 - t_2|.$$

Отже похідна $\dot{f}(t)$ (у сенсі розподілень) є обмежена у H. Це дозволяє застосувати теорему 2.3.8 [59, с.63] (див. також [191, глава 4]) для того аби отримати висновок у (3.296). Властивість (3.297) випливає з [59, твердження 2.4.37]. Це завершує доведення 3.126.

3.10.3. Асимптотичні властивості: дисипативність. Ми досліджуємо асимптотичну поведінку системи (S_t, W), яка породжена слабкими (mild) розв'язками задачі (3.275). Для цього нам потрібні додаткові гіпотези. Подібно до [58] та [59, розділ 8], відносно нелінійного елемента (без загаювання) F ми припускаємо

(F3) *Нелінійний елемент* $F : D(A^{\frac{1}{2}}) \to H$ *(див. (F2) вище для позначень) задовільняє*

(a) *існують сталі* $\eta \in [0, 1), c_4, c_5 > 0$ *такі, що*

$$-(u, F(u)) \leq \eta ||A^{\frac{1}{2}}u||^2 - c_4\Pi_0(u) + c_5, \quad u \in D(A^{\frac{1}{2}}); \tag{3.298}$$

(b) *для кожного* $\widetilde{\eta} > 0$ *існує* $C_{\widetilde{\eta}} > 0$ *таке, що*

$$||u||^2 \leq C_{\widetilde{\eta}} + \widetilde{\eta}\left(||A^{\frac{1}{2}}u||^2 + \Pi_0(u)\right), \quad u \in D(A^{\frac{1}{2}}); \tag{3.299}$$

(c) *неконсервативний елемент* F^* *задовільняє субкритичній лінійній умові зростання, тобто існують* $\hat{\delta} > 0$, $c_6, c_7 \geq 0$ *такі, що*

$$||F^*(u)||^2 \leq c_6 + c_7||A^{\frac{1}{2}-\hat{\delta}}u||^2 \quad \text{для всіх} \quad u \in D(A^{\frac{1}{2}}). \tag{3.300}$$

Для загаювання, ми концентруємось на випадку *зосередженного ЗЗС* та припускаємо наступні гіпотези.

(M3) *Нелінійний загаюваний елемент* $M : W \mapsto H$ *має форму* $M(u_t) = G(u(t - \tau(u_t)))$, *де* τ *відображає* W *в інтервал* $[0, h]$ *та* G *є глобально липшицевим відображенням з* H *в себе.*

Зауваження 3.127 **(1)** Оскільки елемент $M(u_t)$, що задовільняє **(M3)**, може бути записаний у формі

$$M(u_t) = G(u(t - \tau(u_t))) \equiv G\left(u(t) - \int_{t-\tau(u_t)}^{t} \dot{u}(s)\, ds\right) \tag{3.301}$$

для $u_t \in W$, ми маємо, що $||M(u_t)|| \leq ||G(0)|| + L_G\left[||u(t)|| + \int_{t-h}^{t} ||\dot{u}(s)||\, ds\right]$, де L_G є стала Липшиця для відображення G. Це дає

$$||M(u_t)||^2 \leq g_0 + g_1||u(t)||^2 + g_2(h)\int_{t-h}^{t} ||\dot{u}(s)||^2\, ds \tag{3.302}$$

з $g_0 = 4||G(0)||^2$, $g_1 = 4L_G^2$ та $g_2(h) = 2L_G^2 h$. Отже **(M3)** дає **(M2)**. Для гарантування **(M1)** потрібно припустити, що τ є локально липшицеве на W:

$$|\tau(\varphi^1) - \tau(\varphi^2)| \leq C_\varrho \left[|\varphi^1 - \varphi^2|_{C_{1/2}} + |\dot{\varphi}^1 - \dot{\varphi}^2|_{C_0}\right]$$

для всіх $\varphi^1, \varphi^2 \in W$, $|\varphi^j|_W \leq \varrho$, $j = 1, 2$. Справді, з (3.301) ми маємо, що

$$\begin{aligned} ||M(u_s^1) - M(u_s^2)|| \leq & L_G||u^1(s - \tau(u_s^1)) - u^1(s - \tau(u_s^2))|| \\ & + L_G||u^1(s - \tau(u_s^2)) - u^2(s - \tau(u_s^2))|| \\ \leq & \varrho L_G|\tau(u_s^1) - \tau(u_s^2)| + L_G \max_{\theta \in [-h,0]} ||u^1(s + \theta) - u^2(s + \theta)|| \\ \leq & (1 + \varrho C_\varrho) L_G |u_s^1 - u_s^2|_W \end{aligned}$$

для всіх $u_s^1, u_s^2 \in W$, $|u_s^j|_W \leq \varrho$, $j = 1, 2$.

(2) Альтернативно до структури, що представлена у **(M3)**, ми можемо обрати загаюваний елемент у формі $M(u_t) = \sum_{k=1}^N G_k(u(t - \tau_k(u_t)))$, або навіть розглянути інтегральну версію цієї суми. Більш того, замість **(M3)** ми можемо вимагати властивість у (3.302) зі сталими g_0, g_1 які є незалежними від h та $g_2(h) \to 0$ коли $h \to 0$. Зокрема, ми можемо включити у розгляд елемент швидкості з розподіленим загаюванням форми $\int_{-h}^0 r(\theta, u_t)\dot{u}(t + \theta)\, d\theta$, де $r : [-h, 0] \times W \mapsto H$ є вимірною за першою координатою та глобально липшицеве за другою координатою та задовільняє необхідні властивості. Однак, для простоти викладення, ми не включаємо ці узагальнення.

Наш наступний крок у вивченні якісних властивостей системи (S_t, W) є наступна властивість дисипативності.

Твердження 3.128 *Нехай умови* **(A1)**, **(F1)**, **(F2)**, **(F3)**, **(M1)** *та* **(M3)** *виконані. Тоді для кожного k_0 існує $h_0 = h(k_0) > 0$ таке, що для кожного $(k, h) \in [k_0, +\infty) \times (0, h_0]$ система (S_t, W) є дисипативною, тобто, існує $R > 0$ таке, що для кожного $\varrho > 0$ ми можемо знайти $t_\varrho > 0$ таке, що*

$$|S_t\varphi|_W \leq R \quad \text{для всіх} \quad \varphi \in W, \quad |\varphi|_W \leq \varrho, \quad t \geq t_\varrho.$$

Більш того, для кожного фіксованого $k_0 > 0$, радіус дисипативності R не залежить від $k \geq k_0$ та загаювання $h \in (0, h_0]$. Таким чином, динамічна система (S_t, W) є дисипативною (рівномірно для $k \geq k_0$ та $h \leq h_0$).

За браком місця, ми відсилаємо до роботи [64] за подальшими деталями та результатами, включно з існуванням глобального атрактора.

3.11. Параболічні рівняння з зосередженим загаюванням, що залежить від стану: класичні розв'язки та многовид розв'язків

Наша мета в цьому підрозділі полягає у дослідженні класичних розв'язків параболічних рівнянь у частинних похідних з ЗЗС. Ми знаходимо умови для коректної розв'язності задачі та доводимо існування *многовиду розв'язків.* Ми доводимо, що еволюційні оператори $G_t : X_F \to X_F$ є C^1-гладкі для всіх $t \geq 0$. Наші дослідження спираються на результати [205] та ми намагаємось вести доведення як можливо ближче до доведення у [205] для прояснення які частини доведення потребують додаткової уваги у випадку частинних похідних. Як у [160, 164] ми показуємо, що нелокальні (у просторових координатах) оператори є корисними у нашому випадку. Ми зауважуємо, що у роботах [160, 164] не обговорювались ані класичні розв'язки ані C^1-гладкість еволюційних операторів. В останньому підрозділі ми розглянемо приклад загаювання, що залежить від стану, що визначається пороговою умовою.

3.11.1. Попередні факти та коректна розв'язність. Нас цікавить наступне параболічне рівняння у частинних похідних із ЗЗС

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = F(u_t), \quad t > 0 \tag{3.303}$$

із початковими умовами

$$u_0 = u|_{[-h,0]} = \varphi \in C \equiv C([-h,0]; L^2(\Omega)). \tag{3.304}$$

Ми припускаємо, що

($\mathbf{H_{cl}1}$) Оператор A є генератором компактної C_0-півгрупи у $L^2(\Omega)$.

($\mathbf{H_{cl}2}$) *Нелінійне відображення F має вигляд*

$$F(\varphi) \equiv B(\varphi(-r(\varphi))), \qquad F : C \to L^2(\Omega), \tag{3.305}$$

де $B : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *є обмежений та липшицевий оператор. Тут ЗЗС* $r : C([-h,0]; L^2(\Omega)) \to [0,h]$ *є липшицевим відображенням.*

В наших дослідженнях ми використовуємо стандартне (див. [144, Визначення 2.3, с. 106] та [144, Визначення 2.1, с. 105])

Визначення 3.129 *Функція* $u \in C([-h,T]; L^2(\Omega))$ *називається* слабким розв'язком (mild solution) *на* $[-h,T)$ *початкової задачі (3.303) , (3.304) якщо вона задовільняє (3.304) та*

$$u(t) = e^{-At}\varphi(0) + \int_0^t e^{-A(t-s)} F(u_s)\, ds, \quad t \in [0,T). \tag{3.306}$$

Функція $u \in C([-h,T); L^2(\Omega)) \bigcap C^1((0,T); L^2(\Omega))$ *називається* класичним розв'язком *на* $[-h,T)$ *початкової задачі (3.303), (3.304) якщо вона задовільняє (3.304),* $u(t) \in D(A)$ *для* $0 < t < T$ *та (3.303) виконується на* $(0,T)$.

Теорема 3.130 *Припустимо* ($\mathbf{H_{cl}1}$)–($\mathbf{H_{cl}2}$) *виконані. Тоді для кожного* $\varphi \in C$ *існує* $t_\varphi > 0$ *таке, що початкова задача (3.303), (3.304) має слабкий розв'язок (mild solution) для* $t \in [0, t_\varphi)$.

Доведення є стандартним оскільки F є неперервним (див. [83]). Ми зауважуємо, що F не є липшицевим відображенням з простору C в $L^2(\Omega)$, отже ми не можемо, в загальному випадку, гарантувати єдиність слабкого розв'язку (для випадку ЗДР дивись [77] та пояснення та обговорення у вступі).

Зафіксуємо довільний слабкий (mild) розв'язок u задачі (3.303), (3.304) та розглянемо

$$g(t) \equiv F(u_t), \qquad t \in [0, t_\phi). \tag{3.307}$$

Відображення g є неперервним (з $[0, t_\varphi)$ до $L^2(\Omega)$) оскільки B, u та r є неперервними. Виберемо $T \in (0, t_\varphi)$. Ми маємо $g \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ і, як наслідок $g \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$. Початкова задача

$$\frac{dv(t)}{dt} + Av(t) = g(t), \quad v(0) = x \in L^2(\Omega) \tag{3.308}$$

має єдиний слабкий (mild) розв'язок, який є $v = u$ якщо ми виберемо $x = u(0)$.

Зараз ми припускаємо, що

($\mathbf{H}_{\mathbf{cl}}\mathbf{3}$) *оператор* A *породжує (є генератором) аналітичної (компактної) півгрупи в* $L^2(\Omega)$.

Нижче ми завжди припускаємо, що ($\mathbf{H}_{\mathbf{cl}}\mathbf{1}$)–($\mathbf{H}_{\mathbf{cl}}\mathbf{3}$) виконані.

Як зазвичай, ми позначаємо родину всіх гьольдерових функцій з параметром $\alpha \in (0,1)$ у $I \subset \mathbb{R}$ як $C^{\alpha}(I; L^2(\Omega))$. За [144, теорема 3.1, с. 110] розв'язок v $(= u)$ задачі (3.308) є Гьольдоровий з експонентою $1/2$ на $[\varepsilon, T]$ для кожного $\varepsilon \in (0,T)$. Якщо додатково $x \in D(A)$, то $v \in C^{\frac{1}{2}}([0,T]; L^2(\Omega))$.

Тепер ми покажемо, що $g \in C^{\frac{1}{4}}([0,T]; L^2(\Omega))$ якщо $\varphi \in C^{\frac{1}{2}}([-h,0]; L^2(\Omega)) \subset C$. Оскільки для $u \in C^{\frac{1}{2}}([-h,T]; L^2(\Omega))$ та $t \in [0,T]$ ми маємо $||u_t - u_s||_C \le H_u|t-s|^{\frac{1}{2}}$ та

$$
\begin{aligned}
||g(t) - g(s)|| &\le L_B||u(t - r(u_t)) - u(s - r(u_s))|| \le L_B H_u |t - s + r(u_t) - r(u_s)|^{\frac{1}{2}} \\
&\le L_B H_u \left(|t-s| + L_r||u_t - u_s||_C\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.309)
\end{aligned}
$$

Тут H_u є Гьольдеровою сталою для u на $[-h,T]$, L_B та L_r є сталими Липшиця для B та r відповідно. Ми отримуємо з (3.309), що

$$
\begin{aligned}
||g(t) - g(s)|| &\le L_B H_u \left((T^{\frac{1}{2}} + L_r H_u)|t-s|^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le L_B H_u \left(T^{\frac{1}{2}} + L_r H_u\right)^{\frac{1}{2}} |t-s|^{\frac{1}{4}}, \quad s,t \in [0,T].
\end{aligned}
$$

Тут ми використовуємо $|t-s| \le T^{\frac{1}{2}}|t-s|^{\frac{1}{2}}$. Ми довели, що $g \in C^{\frac{1}{4}}([0,T]; L^2(\Omega))$. Це дає, за допомогою [144, Наслідок 3.3, с. 113], що наш слабкий (mild) розв'язок u є *класичним* (при умовах $\varphi \in C^{\frac{1}{2}}([-h,0]; L^2(\Omega)) \subset C$ та $u(0) \in D(A)$). Позначимо

$$
X \equiv \left\{\varphi \in C^1([-h,0]; L^2(\Omega)),\, \varphi(0) \in D(A)\right\}, \qquad (3.310)
$$

$$
||\varphi||_X \equiv \max_{\theta \in [-h,0]} ||\varphi(\theta)|| + \max_{\theta \in [-h,0]} ||\dot{\varphi}(\theta)|| + ||A\varphi(0)||.
$$

Зрозуміло, що X є простором Банаха оскільки A є замкненим. Ми покажемо, що задача (3.303), (3.304) має *єдиний* розв'язок для кожного $\varphi \in X$.

Як відмічалося раніше, F не є липшицевим на C, але якщо φ є липшицевою (зі сталою Липшиця L_{φ}), то легко отримати наступну оцінку (див. (3.305))

$$
||F(\varphi) - F(\psi)|| \le L_B||\varphi(-r(\varphi)) - \psi(-r(\psi))||
$$

$$\leq L_B(L_\varphi|r(\varphi) - r(\psi)| + ||\varphi - \psi||_C) \leq L_B(L_\varphi L_r + 1)||\varphi - \psi||_C. \quad (3.311)$$

Тут L_B та L_r є сталі Липшиця для відображень B та r.

За допомогою [144, теорема 3.5, с. 114] (пункт (ii)), Au та du/dt є неперервною на $[0, T]$, отже u є липшицевим з $[-h, T]$ до $L^2(\Omega)$. Ця властивість разом з (3.311) дають єдиність розв'язку для (3.303), (3.304).

Наведене вище доводить наступну

Теорема 3.131 *Нехай виконуються* $(\mathbf{H_{cl}1})$*–*$(\mathbf{H_{cl}3})$*. Тоді для будь-якого* $\varphi \in X$ *існує* $t_\varphi > 0$ *таке, що початкова задача (3.303), (3.304) має єдиний класичний розв'язок на* $[-h, t_\phi)$*.*

3.11.2. Многовид розв'язків. Нехай U є відкрита підмножина простору X. Нам знадобляться наступні припущення.

(S) *Відображення* $F : U \to L^2(\Omega)$ *є неперервно диференційовне, та для кожного* $\varphi \in U$ *похідна* $DF(\phi) \in L_c(X; L^2(\Omega))$ *має продовження* $D_eF(\phi)$ *яке є елементом простору обмежених лінійних операторів* $L_c(X_0; L^2(\Omega))$*, де* $X_0 = \{\varphi \in C([-h, 0]; L^2(\Omega)), \varphi(0) \in D(A)\}$ *є простором Банаха з нормою* $||\varphi||_{X_0} = \max_{\theta\in[-h,0]} ||\varphi(\theta)|| + ||A\varphi(0)||$*.*

Умова (S) є аналогом умови [98, с. 467] (для звичайних ДР).

Розглянемо підмножину

$$X_F = \{\varphi \in C^1([-h, 0]; L^2(\Omega)), \varphi(0) \in D(A), \dot{\varphi}(0) + A\varphi(0) = F(\varphi)\} \quad (3.312)$$

простору X. X_F будемо називати *Многовид розв'язків* відповідно до термінології [205]. Рівняння в (3.312) розуміємо як рівняння у просторі $L^2(\Omega)$. Ми маємо наступний аналог до [205, Твердження 1].

Лема 3.132 *Якщо умова (S) виконана та* $X_F \neq \emptyset$*, то* X_F *є* C^1*-підмноговидом простору* X*.*

Доведення леми 3.132 див. у [115].

Для зручності, ми нагадуємо деякі властивості півгрупи $\{e^{-At}\}_{t\geq 0}$.

Лема 3.133 *[103, теорема 1.4.3, с. 26] або [144, теорема 2.6.13, с. 74]. Нехай A є секторіальним оператором у просторі Банаха Y та $Re\,\sigma(A) > \delta > 0$. Тоді*

(i) для $\alpha \geq 0$ існує $C_\alpha < \infty$ таке, що

$$||A^\alpha e^{-At}|| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t} \text{ для } t > 0; \tag{3.313}$$

(ii) якщо $0 < \alpha \leq 1$, $x \in D(A^\alpha)$,

$$||(e^{-At} - I)x|| \leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^\alpha ||A^\alpha x|| \text{ для } t > 0. \tag{3.314}$$

Також C_α є обмеженою для α у будь-якому компактному інтервалі з $(0, \infty)$ та також обмежена коли $\alpha \to 0+$.

Зауваження 3.134 *Важливо відмітити, що ми можемо писати $||(e^{-At} - I)A\varphi(0)|| \leq ||e^{-At} - I|| \cdot ||A\varphi(0)||$, але $||e^{-At} - I|| \not\to 0$ коли $t \to 0+$ оскільки e^{-At} не є рівномірно неперервною напівгрупою (оскільки A є необмежений див. [144, теорема 1.2, с. 2]).*

Зауваження 3.135 *Ми також відмічаємо, що (лінійне) відображення $D(A) \ni \xi \longmapsto (e^{-At} - I)\xi \in C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ є неперервним, але $L^2(\Omega) \ni \xi \longmapsto (e^{-At} - I)\xi \in C^1((0, T]; L^2(\Omega))$ не є таковим.*

Нам потрібна наступна

Лема 3.136 *Нехай A є секторіальним оператором у просторі Банаха Y та $f : (0, T) \to Y$ є локально Гьольдорове з $\int_0^\rho ||f(s)||\, ds < \infty$ для деякого $\rho > 0$. Для $0 \leq t < T$, визначимо*

$$I_T(f)(t) = \mathcal{F}(t) \equiv \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s)\, ds. \tag{3.315}$$

Тоді

(i) $\mathcal{F}(\cdot)$ є неперервним на $[0, T)$;

(ii) $\mathcal{F}(\cdot)$ *є неперервно диференційовним на* $(0, T)$*, з* $\mathcal{F}(t) \in D(A)$ *для* $0 < t < T$*, та* $d\mathcal{F}(t)/dt + A\mathcal{F}(t) = f(t)$ *на* $0 < t < T$*,* $\mathcal{F}(t) \to 0$ *в просторі* X *коли* $t \to 0+$*.*

(iii) Якщо додатково $f : (0, T) \to Y$ *задовільняє*

$$||f(t) - f(s)|| \leq K(s)(t-s)^{\gamma} \quad \text{для} \quad 0 < s < t < T < \infty,$$

де $K : (0, T) \to \mathbb{R}$ *є неперервне з* $\int_0^T K(s)\, ds < \infty$*, тоді для кожного* $\beta \in [0, \gamma)$ *функція* $\mathcal{F}(t)$ *є неперервно диференційовна* $\mathcal{F} : (0, T) \to Y^{\beta} \equiv D(A^{\beta})$ *з*

$$\left\| \frac{d\mathcal{F}(t)}{dt} \right\|_{\beta} \leq M t^{-\beta} ||f(t)|| + M \int_0^t (t-s)^{\gamma-\beta-1} K(s)\, ds \tag{3.316}$$

для $0 < t < T$*. Тут* M *є сталою, що не залежить від* γ*,* β*,* $f(\cdot)$*.*

Більш того, якщо $\int_0^h K(s)\, ds = O(h^{\delta})$ *при* $h \to 0+$*, для деякого* $\delta > 0$*, то* $t \to d\mathcal{F}(t)/dt$ *є локально гьольдеровим з* $(0, T)$ *в* Y^{β}*.*

(iv) Якщо $f : [0, T] \to Y$ *є гьольдеровим (на компактному проміжку* $[0, T]$ *локальна та глобальна властивості Гьольдера співпадають), Тоді* $\mathcal{F} \in C^1([0, T]; Y)$*.*

Доведення леми 3.136. Пункти (i) та (ii) доведені в [103, лема 3.2.1, с. 50]. Пункт (iii) доведений у [103, лема 3.5.1, с. 70]. Доведення (iv) є частиною доведення [144, теорема 3.5, пункт (ii), с. 114]. Ми коротко нагадаємо основні кроки. Скориставшись властивостями (ii) (тобто $d\mathcal{F}(t)/dt + A\mathcal{F}(t) = f(t)$ на $0 < t < T$) та $f \in C([0, T]; Y)$ достатньо показати, що $A\mathcal{F}$ є неперервною в $t = 0$. Ми записуємо $\mathcal{F}(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)}[f(s) - f(t)]\, ds + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(t)\, ds = v_1(t) + v_2(t)$. Властивість $Av_1 \in C^{\gamma}([0, T]; Y)$ доведена в [144, лема 3.4, с. 113]. Для доведення того, що $Av_2 \in C([0, T]; Y)$ використовуємо

$Av_2(t) = \int_0^t A e^{-A(t-s)} f(t)\, ds = \int_0^t A e^{-A\tau} f(t)\, d\tau = \int_0^t \left\{ -\frac{d}{d\tau} e^{-A\tau} f(t) \right\} d\tau$ $= f(0) - e^{-At} f(t) = f(0) - e^{-At} f(0) + e^{-At}(f(0) - f(t))$.Отже $\|Av_2(t)\| \leq \|f(0) - e^{-At} f(0)\| + \|e^{-At}\| \|f(0) - f(t)\| \leq \|f(0) - e^{-At} f(0)\| + M\|f(0) - f(t)\| \to 0$ коли $t \to 0+$ завдяки неперервності e^{-At} та $f(t)$. Це завершує доведення леми 3.136.

Для спрощення обчислень ми припускаємо, що наступна властивість Липшиця виконана: $\exists \alpha \in (0,1),\ \exists L_{B,\alpha} \geq 0$ такі, що

$$||A^{\alpha}(B(u)-B(v))|| \leq L_{B,\alpha}||u-v|| \quad \text{виконується для всіх } u,v \in L^2(\Omega). \tag{3.317}$$

Зауваження 3.137 . *Легко бачити, що (3.317) дає подібну властивість з $\alpha = 0$, тобто, $\exists\, L_{B,0} \geq 0$ таке, що*

$$||B(u) - B(v)|| \leq L_{B,0}||u - v|| \text{ виконується для всіх } u, v \in L^2(\Omega). \tag{3.318}$$

Приклад 3.138 . *Розглянемо $B(u) = \int_{\Omega} f(x-y)b(u(y))\,dy$ яка є згорткою (convolution) функції $f \in H^1(\Omega)$ та композиції $b \circ u$ з липшицевою $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ми використовуємо властивості згортки (див. [44, с. 104,108]) $(f \star g)(x) = \int_{\Omega} f(x-y)g(y)\,dy$, а саме $||f \star g||_{L^p} \leq ||f||_{L^1}||g||_{L^p}$ для всіх $f \in L^1$ та $g \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$ та також $D^{\beta}(f \star g) = (D^{\beta} f) \star g$, в частковому випадку, $\nabla(f \star g) = (\nabla f) \star g$ (детальніше див. [44, твердження 4.20, с. 107]).*

Якщо ми розглянемо оператор Лапласа з умовами Дирихле на межі $A \sim (-\Delta)_D$, то $||A^{1/2} \cdot ||$ є еквівалентним до $|| \cdot ||_{H^1}$, отже $||A^{1/2}(B(u) - B(v))|| \leq C_1^2||B(u)-B(v)||^2 + C_1^2||\nabla(B(u)-B(v))||^2 \leq C_1^2||f||^2_{L^1}||b(u)-b(v)||^2 + C_1^2||\nabla f||^2_{L^1}||b(u)-b(v)||^2$. Використовуючи умову Липшиця b, ми отримуємо (3.317) з $\alpha = 1/2$ та $L_{B,\alpha} = C_1 L_b(||f||^2_{L^1} + ||\nabla f||^2_{L^1})^{1/2}$.

Використовуючи (3.317) та (3.305) легко отримуємо умову Липшиця для F. Точніше, для липшицевого ψ та липшицево ЗЗС r: $||A^{\alpha}(F(\psi) - F(\chi))|| \leq ||A^{\alpha}(B(\psi(-r(\psi))) - B(\chi(-r(\chi))))|| \leq L_{B,\alpha}||\psi(-r(\psi))) - \chi(-r(\chi)))||$

$$\leq L_{B,\alpha}L_{\psi}L_r||\psi-\chi||_C + L_{B,\alpha}||\psi-\chi||_C = L_{F,\alpha}||\psi-\chi||_C, \quad L_{F,\alpha} = L_{B,\alpha}(L_{\psi}L_r+1). \tag{3.319}$$

Використовуючи (3.318), подібно до (3.319), отримуємо

$$||F(\psi) - F(\chi)|| \leq L_{F,0}||\psi - \chi||_C, \quad L_{F,0} = L_{B,0}(L_{\psi}L_r + 1). \tag{3.320}$$

Ми використовуємо всі позначення з [205], змінюючи $\mathbb{R}^n$ на $L^2(\Omega)$, коли це необхідно. Наприклад, ми позначаємо E_T (див. [205, с. 50])

$$E_T : C^1([-h,0]) \to C^1([-h,T]), (E_T\varphi)(t) \equiv \left[\begin{array}{ll} \varphi(t), & t \in [-h,0), \\ \varphi(0) + t\dot{\varphi}(0), & t \in [0,T]. \end{array}\right. \tag{3.321}$$

Нехай B є дійсний простір Банаха. Відкрита куля в B радіусу $\mu > 0$ та з центром у точці 0 буде позначатися як B_μ. Для $m \in M$ та $\mu > 0$ ми позначаємо $M_{m,\mu} = M \cap (m + B_\mu)$.

З іншого боку, деякі позначення повинні бути змінені. Наприклад, для будь-якого $\psi \in X_F$ та $\mu > 0$ ми позначаємо (нагадаємо, що $||\cdot||_X$ це не просто C^1-норма, див. (3.310), (3.11.1), (3.312))

$$X_{\psi,\mu} \equiv X_F \bigcap \{\psi + (C^1([-h,0];L^2(\Omega)))_{X,\mu}\} = \{\psi \in X_F : ||\varphi - \psi||_X < \mu\}. \quad (3.322)$$

Для $T > 0$ (яке буде обрано далі), ми розділемо відображення $x \in C^1([-h,T]) \equiv C^1([-h,T];L^2(\Omega))$ з $x_0 = \varphi \in X_F$, що задано, як $x = y + \hat{\varphi}$, де для скорочення $\hat{\varphi}(t) = (E_T\varphi)(t)$ є визначеним в (3.321).

Ми шукаємо нерухому точку наступного відображення (φ є параметром)

$$R_{T\mu}(\varphi, y) \equiv \begin{cases} e^{-At}\varphi(0) - \varphi(0) - t\dot{\varphi}(0) + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} F(y_\tau + \hat{\varphi}_\tau)\, d\tau, & t \in [0,T], \\ 0, & t \in [-h, 0), \end{cases} \quad (3.323)$$

де $R_{T\mu} : X_{\psi,\mu} \times (C_0^1([-h,T];L^2(\Omega)))_\varepsilon \to C_0^1([-h,T];L^2(\Omega))$, та $X_{\psi,\mu}$ є визначеним в (3.322). Тут для $T > 0$ ми позначаємо через $C_0^1([-h,T];L^2(\Omega))$ замкнений підпростір відображень $z \in C^1([-h,T];L^2(\Omega))$ які обертаються в нуль на $[-h,0]$.

Твердження 3.139 $R_{T\mu} : X_{\psi,\mu} \times (C_0^1([-h,T];L^2(\Omega))) \to C_0^1([-h,T];L^2(\Omega))$.

Для доведення того, що образ $R_{T\mu}(\varphi, y) = z$ належить до $C_0^1([-h,T];L^2(\Omega))$, ми зауважуємо, що $y \in C^1([-h,T];L^2(\Omega))$ дає $y + \hat{\varphi} \in Lip([-h,T];L^2(\Omega))$, що разом з (3.311) дає, що $F(y_\tau + \hat{\varphi}_\tau)$, $\tau \in [0,T]$ є липшицевим, отже [103, лема 3.2.1, с. 50] може бути застосована до інтегрального члена у $R_{T\mu}$ (див. (3.323)). Це дає $z \in C^1(0,T;L^2(\Omega))$.

Властивість $||z(t)|| \to 0$ коли $t \to 0+$ є простою. Останній крок є показати, що $||\dot{z}(t)|| \to 0$ коли $t \to 0+$. Використовуємо [103, лема 3.2.1, с. 50] та властивість $\varphi \in X_F$, ми маємо

$$\dot{z}(t) = -Ae^{-At}\varphi(0) - \dot{\varphi}(0) - A\int_0^t e^{-A(t-\tau)} F(y_\tau + \hat{\varphi}_\tau)\, d\tau + F(y_t + \hat{\varphi}_t)$$

$$= -Ae^{-At}\varphi(0) + A\varphi(0) - F(\varphi) - A\int_0^t e^{-A(t-\tau)} F(y_\tau + \hat{\varphi}_\tau)\, d\tau + F(y_t + \hat{\varphi}_t).$$

Як наслідок

$$||\dot{z}(t)|| \leq ||(e^{-At}-I)A\varphi(0)||+||F(y_t+\hat{\varphi}_t)-F(\varphi)||+\left\|A\int_0^t e^{-A(t-\tau)}F(y_\tau+\hat{\varphi}_\tau)\,d\tau\right\|. \tag{3.324}$$

Перші два члена у (3.324) прямують до нуля коли $t \to 0+$ оскільки $\varphi(0) \in D(A)$, e^{-At} є сильно неперервним, F є неперервним та $||y_t+\hat{\varphi}_t-\varphi||_C \to 0$ коли $t \to 0+$. Для оцінки останнього члена у (3.324) ми бачимо (3.319) для $\psi = 0$ та властивості $||A^\alpha e^{-At}|| \leq C_\alpha t^{-\alpha}e^{-\delta t}$, $\alpha \geq 0$ (нагадаємо, що e^{-At} є аналітичною та див. лему 3.133 та [103, теорема 1.4.3, с. 26], [144, теорема 2.6.13, с. 74]). Отже

$$\begin{aligned}\left\|A\int_0^t e^{-A(t-\tau)}F(y_\tau+\hat{\varphi}_\tau)\,d\tau\right\| &= \left\|\int_0^t A^{1-\alpha}e^{-A(t-\tau)}A^\alpha F(y_\tau+\hat{\varphi}_\tau)\,d\tau\right\| \\ &\leq \int_0^t C_{1-\alpha}(t-\tau)^{\alpha-1}e^{-\delta(t-\tau)}L_{B,\alpha}||y_\tau+\hat{\varphi}_\tau||_C\,d\tau \\ &\leq L_{B,\alpha}C_{1-\alpha}\cdot\max_{s\in[0,T]}||y_s+\hat{\varphi}_s||_C\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}e^{-\delta(t-\tau)}\,d\tau \to 0\end{aligned}$$

коли $t \to 0+$ оскільки останній інтеграл є збіжний для $\alpha > 0$. Це завершує доведення твердження 3.139.

Зауваження 3.140 . *В доведенні твердження 3.139 важливо мати властивість (3.317) з $\alpha > 0$ для збіжності останнього інтегралу.*

Як у [205, с. 56] ми використовуємо локальні мапи многовиду X_F та версію теореми Банаха про нерухому точку з параметрами (див. наприклад, твердження 1.1 додатку VI у [76, с. 497]).

Для зручності нагадаємо це твердження включно з позначеннями.

Нехай X та P є просторами Банаха над полем K (K може бути $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$).

Твердження 3.141 *(твердження 1.1 додатку VI, [76, с.497]). (***Гладкість залежності нерухомої точки від параметрів***).*

Нехай U_0 та U є відкриті підмножини X, а V є відкрита підмножина P. Припустимо, що $\overline{U_0} \subset U$, та відображення $f : U \times V \to X$ задано та задовільняє $f(\overline{U_0} \times V) \subset \overline{U_0}$.

Нехай існує стала $q \in [0, 1)$ така, що для всіх (φ, p) та (ψ, p) з $\overline{U_0} \times V$ маємо

$$\|f(\varphi, p) - f(\psi, p)\| \leq q\|\varphi - \psi\|.$$

Нехай f є C^k, де $0 \leq k < \infty$. Тоді відображення $F : V \to X$, яке визначається за правилом

$$F(p) = x \in \overline{U_0} \quad \text{та} \quad f(x, p) = x,$$

є C^k.

Зауваження 3.142 *Детальніше, ми шукаємо нерухому точку відображення $R_{T\mu}(\varphi, y)$ як функції аргументу y де параметром є образ φ при відображенні локальних мап замість $\varphi \in X_{\psi,\mu}$. Причина полягає в тому, що параметр повинен належати відкритій підмножині простору Банаха, в той час коли $X_{\psi,\mu}$ не є навіть лінійним (це підмножина многовиду X_F).*

Нагадаємо, що, для скорочення, ми позначили через $\hat{\varphi} \equiv E_T\varphi$, де $E_T\varphi$ визначено у (3.321).

Твердження 3.143 *(Див. [205, твердження 2]. Для кожного $\varepsilon > 0$ існують $T = T(\varepsilon) > 0$ та $\mu = \mu(\varepsilon)$ такі, що для всіх $\varphi \in \psi + (C^1([-h, 0]; L^2(\Omega)))_\mu$ та всіх $t \in [0, T]$,*

$$\hat{\varphi}_t \in \psi + (C^1([-h, 0]; L^2(\Omega)))_\varepsilon$$

Доведення не змінюється, як у [205, твердження 2], тож ми не повторюємо його тут.

Позначаємо $M_T > 0$ сталу, яка задовільняє $||e^{-As}|| \leq M_T$ для всіх $s \in [0, T]$. Зараз ми доведемо аналог [205, твердження 3].

Твердження 3.144 *Для всіх $\varphi \in X_{\psi,\mu}$ та $y, w \in (C^1_0([-h, T]; L^2(\Omega)))_\varepsilon$ маємо*

$$||R_{T\mu}(\varphi, y) - R_{T\mu}(\varphi, w)||_{C^1([-h,T];L^2(\Omega))} \leq L_{R_{T\mu}}||y - w||_{C^1([-h,T];L^2(\Omega))}, \quad (3.325)$$

де ми позначили для скорочення сталу Липшиця

$$L_{R_{T\mu}} \equiv TL_{F,0,\varepsilon}(M_T + 1) + T^\alpha C_{1-\alpha} M_T \alpha^{-1} L_{F,\alpha,\varepsilon} \quad (3.326)$$

з $L_{F,\alpha,\varepsilon} = L_{B,\alpha}(\varepsilon L_r + 1)$ *та* $L_{F,0,\varepsilon} = L_{B,0}(\varepsilon L_r + 1)$ *(порівн. (3.319), (3.320)). Стала* α *визначена у (3.317).*

Доведення твердження 3.144 . Використовуючи (3.320), ми маємо для всіх $||\psi||_{C^1} \le \varepsilon$, що $||F(\psi) - F(\chi)|| \le L_{F,0,\varepsilon}||\psi - \chi||_C$, $\quad L_{F,0,\varepsilon} = L_{B,0}(\varepsilon L_r + 1)$. Нехай $z = R_{T\mu}(\varphi, y)$, $v = R_{T\mu}(\varphi, w)$ для $y, w \in (C^1_0([-h,T]; L^2(\Omega)))_\varepsilon$. Для всіх $t \in [0,T]$, маємо властивість

$$\begin{aligned} ||z(t) - v(t)|| \le || \int_0^t e^{-A(t-\tau)}(F(y_\tau + \hat{\varphi}_\tau) - F(w_\tau + \hat{\varphi}_\tau))\, d\tau|| \\ \le TM_T L_{F,0,\varepsilon}||y - w||_{C^1([-h,T];(L^2(\Omega))}. \end{aligned} \tag{3.327}$$

Далі $\|\dot{z}(t)-\dot{v}(t)\| \le \|F(y_t+\hat{\varphi}_t)-F(w_t+\hat{\varphi}_t)\|+\|A\int_0^t e^{-A(t-\tau)}(F(y_\tau+\hat{\varphi}_\tau)-F(w_\tau+\hat{\varphi}_\tau))\, d\tau\| \le L_{F,0,\varepsilon}\|y_t-w_t\|_C+\int_0^t \|A^{1-\alpha}e^{-A(t-\tau)}\|\|A^\alpha(F(y_\tau+\hat{\varphi}_\tau)-F(w_\tau+\hat{\varphi}_\tau))\|\, d\tau$. Для оцінки першого члена ми пишемо

$$\begin{aligned} [cc]||y_t - w_t||_C = \max_{s\in[-h,0]} || \int_0^{t+s} (\dot{y}(\tau) - \dot{w}(\tau))\, d\tau|| \le \int_0^T ||\dot{y}(\tau) - \dot{w}(\tau)||\, d\tau \\ \le T||y - w||_{C^1([-h,T];L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Для другого члена, як у твердженні 3.139, ми використовуємо властивість $||A^\alpha e^{-At}|| \le C_\alpha t^{-\alpha}e^{-\delta t}$, $\alpha \ge 0$ (див. [103, теорема 1.4.3, с. 26] or [144, теорема 2.6.13, с. 74]), властивість Липшиця (3.319) та розрахунки $\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau = t^\alpha/\alpha$ аби отримати

$$\begin{aligned} \int_0^t \|A^{1-\alpha}e^{-A(t-\tau)}\|\|A^\alpha(F(y_\tau + \hat{\varphi}_\tau) - F(w_\tau + \hat{\varphi}_\tau))\|\, d\tau \\ \le C_{1-\alpha}T^\alpha \alpha^{-1} M_T L_{F,\alpha,\varepsilon}\|y - w\|_{C^1([-h,T];L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Таким чином

$$||\dot{z}(t) - \dot{v}(t)|| \le \left\{TL_{F,0,\varepsilon} + T^\alpha C_{1-\alpha}M_T\alpha^{-1}L_{F,\alpha,\varepsilon}\right\} ||y - w||_{C^1([-h,T];L^2(\Omega))}.$$

Остання оцінка та (3.327) разом дають (3.325). Що і треба було довести.

Наступне твердження є аналогом [205, твердження 4 та наслідок 1].

Твердження 3.145 *Для заданого $\delta > 0$ існують $T = T(\delta) > 0$, $\mu = \mu(\delta) > 0$, такі, що для всіх $\varphi \in X_{\psi,\mu}$ $(||\psi - \varphi||_X \le \mu)$ ми маємо*

$$||R_{T\mu}(\varphi, 0)||_{C^1([-h,T];L^2(\Omega))} < \delta.$$

Більш того, для додатнього ε існують $\delta > 0$ (та $T = T(\delta) > 0$, $\mu = \mu(\delta) > 0$ як вище) та $\lambda \in (0,1)$, такі, що t $R_{T\mu}$ (визначене в (3.323)) відображає підмножину $X_{\psi,\mu} \times (C^1_0([-h,T]; L^2(\Omega)))_\varepsilon$ у замкнену кулю $Cl\,(C^1_0([-h,T]; L^2(\Omega)))_{\lambda\varepsilon} \subset (C^1_0([-h,T]; L^2(\Omega)))_\varepsilon$.

Доведення твердження 3.145 . Розглянемо $z \equiv R_{T\mu}(\varphi, 0)$. Для $t \in [0,T]$, ми пишемо

$$\begin{aligned} z(t) = e^{-At}\varphi(0) - \varphi(0) - t\dot\varphi(0) + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} F(\hat\varphi_\tau)\, d\tau \\ = (e^{-At} - I)(\varphi(0) - \psi(0)) + (e^{-At} - I)\psi(0) - t\cdot(\dot\varphi(0) - \dot\psi(0)) - t\dot\psi(0) \\ + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \left\{ F(\hat\varphi_\tau) - F(\hat\psi_\tau) \right\} d\tau + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} F(\hat\psi_\tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{3.328}$$

Ми оцінюємо різні складові (3.328) в наступних десятьох кроках.

1. Використовуючи властивість $||(e^{-At} - I)x|| \le \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^\alpha ||A^\alpha x||$ (див. [103, теорема 1.4.3]), маємо

$$\begin{aligned} ||(e^{-At} - I)(\varphi(0) - \psi(0))|| \le C_{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} ||A^{\frac{1}{2}}(\varphi(0) - \psi(0))|| \\ \le \hat C t^{\frac{1}{2}} ||A(\varphi(0) - \psi(0))|| \le \hat C t^{\frac{1}{2}} ||\varphi - \psi||_X. \end{aligned}$$

2. $||t\cdot(\dot\varphi(0) - \dot\psi(0))|| \le t\cdot||\varphi - \psi||_X$.

3. $|| \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \left\{ F(\hat\varphi_\tau) - F(\hat\psi_\tau) \right\} d\tau|| \le M_T t L_{F,0} \max_{\tau\in[0,t]} ||\hat\varphi_\tau - \hat\psi_\tau||_C \le M_T t L_{F,0}(1+T)||\varphi - \psi||_X$.

4. $|| \int_0^t e^{-A(t-\tau)} F(\hat\psi_\tau)\, d\tau|| \le M_T t L_{B,0} \max_{\tau\in[0,t]} ||\hat\psi_\tau||_C \le M_T t L_{B,0}(1+T)||\psi||_X$.

Зараз ми оцінюємо похідну за часом для $z(t)$

$$\dot{z}(t) = -Ae^{-At}\varphi(0) - \dot{\varphi}(0) + F(\hat{\varphi}_t) - A\int_0^t e^{-A(t-\tau)}F(\hat{\varphi}_\tau)\,d\tau$$

$$= -Ae^{-At}\varphi(0) + A\varphi(0) + F(\varphi) + F(\hat{\varphi}_t) - A\int_0^t e^{-A(t-\tau)}F(\hat{\varphi}_\tau)\,d\tau$$

$$= (e^{-At} - I)A(\psi(0) - \varphi(0)) - (e^{-At} - I)A\psi(0)$$

$$+ [F(\hat{\varphi}_t) - F(\hat{\psi}_t)] + [F(\hat{\psi}_t) - F(\psi)] + [F(\psi) - F(\varphi)]$$

$$- \int_0^t Ae^{-A(t-\tau)}\{F(\hat{\varphi}_\tau) - F(\hat{\psi}_\tau)\}\,d\tau - \int_0^t Ae^{-A(t-\tau)}F(\hat{\psi}_\tau)\,d\tau. \quad (3.329)$$

Ми використовуємо наступне

5. $||(e^{-At} - I)A(\psi(0) - \varphi(0))|| \le (M_T + 1)||\varphi - \psi||_X$.

   Нагадаємо (3.320) для кроків 6 та 7.

6. $||F(\hat{\varphi}_t) - F(\hat{\psi}_t)|| \le L_{F,0}\max_{\tau\in[0,t]}||\hat{\varphi}_\tau - \hat{\psi}_\tau||_C \le L_{F,0}(1+T)||\varphi - \psi||_X$.

7. $||F(\varphi) - F(\psi)|| \le L_{F,0}||\varphi - \psi||_X$.

8. $||F(\hat{\psi}_t) - F(\psi)|| \to 0$ при $t \to 0+$ оскільки $\hat{\psi}$ є неперервним з $[-h, T]$ до $L^2(\Omega)$.

9. $||\int_0^t Ae^{-A(t-\tau)}\{F(\hat{\varphi}_\tau) - F(\hat{\psi}_\tau)\}\,d\tau|| = ||\int_0^t A^{1-\alpha}e^{-A(t-\tau)}A^{\alpha}\{F(\hat{\varphi}_\tau) - F(\hat{\psi}_\tau)\}\,d\tau||$

   $$\le \int_0^t C_{1-\alpha}(t-\tau)^{\alpha-1}e^{-\delta(t-\tau)}L_{F,\alpha}||\hat{\varphi}_\tau - \hat{\psi}_\tau||_C\,d\tau \le C_{1-\alpha}L_{F,\alpha}D_{\alpha,T}||\varphi - \psi||_X,$$

   де $D_{\alpha,T} \equiv \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1}e^{-\delta(T-\tau)}\,d\tau$, $\alpha > 0$.

10. Подібно до попереднього випадку ($L_{B,\alpha}$ замість $L_{F,\alpha}$)

$$||\int_0^t Ae^{-A(t-\tau)}F(\hat{\psi}_\tau)\,d\tau|| \le C_{1-\alpha}L_{B,\alpha}D_{\alpha,T}||\psi||_X.$$

Зараз ми можемо застосувать оцінки 1–10 (одразу) до (3.328), (3.329). Це дає можливість обрати достатньо малі $T = T(\delta) > 0$, $r = r(\delta) > 0$ такі, що

$$||z||_{C^1([-h,T];L^2(\Omega))} \equiv ||R_{T\mu}(\varphi, 0)||_{C^1([-h,T];L^2(\Omega))} < \delta. \quad (3.330)$$

Зауваження 3.146 *Малість μ використовується лише у 5–7. Для всіх інших членів достатньо (аби бути малими) мати мале T.*

Зараз ми доведемо другу частину твердження 3.145. Маємо

$$||R_{T\mu}(\varphi,y)||_{C^1([-h,T];L^2(\Omega))} \leq ||R_{T\mu}(\varphi,y) - R_{T\mu}(\varphi,0)||_{C^1([-h,T];L^2(\Omega))} + ||R_{T\mu}(\varphi,0)||_{C^1([-h,T];L^2(\Omega))}. \quad (3.331)$$

Перший член у (3.331) контролюється твердженням 3.144 (див. (3.325)), тоді коли другий член контролюється (3.330).

Більш детально, ми рухаємось наступним чином. По-перше, ми обираємо $\varepsilon > 0$, потім обираємо мале $T(\varepsilon) > 0$ для того, аби стала Липшиця була $L_{R_{T\mu}} < 1$ (див. (3.325), (3.326)). Далі, ми обираємо $\delta \equiv \frac{\varepsilon}{2}(1 - L_{R_{T\mu}}) > 0$ та відповідно $T = T(\delta) \in (0, T(\varepsilon)]$, $\mu = \mu(\delta) > 0$ як у першій частині твердження 3.145, див. (3.330). Завершуючи, ми кладемо $\lambda \equiv \frac{1}{2}(1 + L_{R_{T\mu}}) \in (0,1)$. Тепер оцінки (3.331), (3.325) та (3.330) показують, що для будь-якого $y \in (C_0^1([-h,T];L^2(\Omega)))_\varepsilon$ ми маємо

$$||R_{T\mu}(\varphi,y)||_{C^1([-h,T];L^2(\Omega))} \leq L_{R_{T\mu}}||y||_{C^1([-h,T];L^2(\Omega))} + \delta \leq L_{R_{T\mu}}\varepsilon + \delta = L_{R_{T\mu}}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}(1 - L_{R_{T\mu}}) = \varepsilon\frac{1}{2}(1 + L_{R_{T\mu}}) = \varepsilon\lambda < \varepsilon.$$

Це завершує доведення твердження 3.145.

Нехай

($\mathbf{H_{cl}4}$) *Нелінійні оператори $B : L^2(\Omega) \to D(A^\alpha)$ для деяких $\alpha > 0$ та $r : C([-h,0];L^2(\Omega)) \to [0,h]$ є C^1-гладкі.*

Зауваження 3.147 *Умова ($\mathbf{H_{cl}4}$) дає те, що звуження $r : C([-h,0];L^2(\Omega)) \supset C^1([-h,0];L^2(\Omega)) \to [0,h]$ також є C^1-гладким. Додатково, легко бачити, що ($\mathbf{H_{cl}4}$) дає властивість (S).*

Твердження 3.148 *Нехай ($\mathbf{H_{cl}1}$)–($\mathbf{H_{cl}4}$) виконані. Тоді $R_{T\mu}$ є C^1-гладким.*

Доведення твердження 3.148 слідує доведенню [205, твердж. 5]. Головна суттєва відмінність полягає в наступному. C^1-гладкість відображення B :

$L^2(\Omega) \to D(A^\alpha)$ дає C^1-гладкість відображення $\widetilde{F} : X_{\psi,\mu} \times C^1([-h,0]; L^2(\Omega)) \to D(A^\alpha)$, що визначене як $\widetilde{F}(\varphi, y) \equiv B(\varphi(-r(\varphi+y)) + y(-r(\varphi+y)))$.

Ми також використовуємо зрозумілу додаткову властивість C^1-гладкості відображення $X \ni \varphi \mapsto e^{-At}\varphi(0) \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ (нагадаємо визначення X у (3.310)). Тут ми використовуємо $I_T : C^1([0,T]; L^2(\Omega)) \to C^1([0,T]; L^2(\Omega))$, що дано як $I_T(y)(t) \equiv \int_0^t e^{-A(t-\tau)} y(\tau)\, d\tau$ на відміну від I_T, яке використовується у [205, с. 50]. Ми спираємось на [103, лема 3.2.1, с. 50] (див. лема 3.136, пункт (iv) вище).

Як у [205, с. 56] ми готові використати локальні мапи многовиду X_F та версію теореми Банаха про нерухому точку з параметрами (див., наприклад, [76, твердж. 1.1 в додатку VI]). Детальніше, твердження 3.144,3.145,3.148 дозволяють скористатись теоремою Банаха та отримати для будь-якого $\varphi \in X_{\psi,\mu}$ єдину нерухому точку $y = y^\varphi \in (C_0^1([-h,T]; L^2(\Omega)))_\varepsilon$ відображення $R_{T\mu}$. Ми позначимо цю відповідність як $Y_{T\mu} : X_{\psi,\mu} \to (C_0^1([-h,T]; L^2(\Omega)))_\varepsilon$ та вона є C^1-гладка. Це також дає, що відображення

$$S_{T\mu} : X_{\psi,\mu} \to C^1([-h,T]; L^2(\Omega)), \tag{3.332}$$

що визначене як $S_{T\mu}\varphi = x^\varphi \equiv y^\varphi + \hat{\varphi} \equiv Y_{T\mu}(\varphi) + E_T\varphi$ є C^1-гладке. Тут $E_T\varphi$ визначене у (3.321).

Локальний напівпотік

$$F_{T\mu} : [0,T] \times X_{\psi,\mu} \to X_F \subset X$$

заданий як

$$F_{T\mu}(t,\varphi) = x_t^\varphi = ev_t(S_{T\mu}(\varphi)). \tag{3.333}$$

Тут ми позначаємо оціночне відображення (evaluation map)

$$ev_t : C^1([-h,T]; L^2(\Omega)) \to C^1([-h,0]; L^2(\Omega)), \quad ev_t x \equiv x_t \text{ для всіх } t \in [0,T]. \tag{3.334}$$

Твердження 3.149 *Нехай* ($\mathbf{H_{cl}1}$)*–*($\mathbf{H_{cl}4}$) *виконані. Тоді* $F_{T\mu}$ *є неперервним, та кожне відображення розв'язків* $F_{T\mu}(t,\cdot) : X_{\psi,\mu} \ni \phi \mapsto x_t^{(\phi)} \in X_F$, $t \in [0,T]$, *є C^1-гладким. Для всіх $t \in [0,T]$, всіх $\phi \in X_{\psi,\mu}$, та всіх $\chi \in T_\phi X_F$, маємо $T_{F_{T\mu}(t,\phi)} \ni D_2 F_{T\mu}(t,\phi)\chi = v_t^{(\phi,\chi)}$, де функція $v \equiv v^{(\phi,\chi)} \in C^1([-h,T]; L^2(\Omega)) \cap C([0,T]; D(A))$ є розв'язком початкової задачі*

$$\dot{v}(t) = Av(t) + DF(x_t^{(\phi)})v_t \quad \text{для всіх} \quad t \in [0,T], v_0 = \chi. \tag{3.335}$$

Тут $T_\phi X_F$ є дотичний простір (tangent space) до многовиду X_F в точці $\phi \in X_F$.

Доведення твердження 3.149. Ми позначаємо для скорочення $G \equiv F_{T\mu}$ та $S \equiv S_{T\mu}$. Тепер ми обговорюємо неперервність F (нагадаємо визначення X у (3.310) та норму $||\cdot||_X$ у (3.11.1)).

$$||G(s,\chi) - G(t,\varphi)||_X = ||x_s^\chi - x_t^\varphi||_{C^1[-h,0]} + ||A(x^\chi(s) - x^\varphi(t))||$$

$$\leq ||x_s^\chi - x_s^\varphi||_{C^1[-h,0]} + ||x_s^\varphi - x_t^\varphi||_{C^1[-h,0]} + ||A(x^\chi(s) - x^\varphi(s))|| + ||A(x^\varphi(s) - x^\varphi(t))||$$

$$\leq ||S(\chi) - S(\varphi)||_{C^1[-h,T]} + ||x_s^\varphi - x_t^\varphi||_{C^1[-h,0]} + ||A(x^\chi(s) - x^\varphi(s))|| + ||A(x^\varphi(s) - x^\varphi(t))||. \tag{3.336}$$

Розглянемо третій член у (3.336).

$$\begin{aligned} ||A(x^\chi(s) - x^\varphi(s))|| &\leq ||e^{-As}A(\chi(0) - \varphi(0))|| \\ &+ \int_0^s ||e^{-A(s-\tau)}A^{1-\alpha}A^\alpha(F(x_\tau^\chi) - F(x_\tau^\varphi))||\, d\tau \\ &\leq ||\chi - \varphi||_X + C_{1-\alpha}T^\alpha \alpha^{-1} M_T L_{B,\alpha}(L_{x^\varphi} L_r + 1)||x^\chi - x^\varphi||_{C[-h,T]} \\ &\leq ||\chi - \varphi||_X + C_{1-\alpha}T^\alpha \alpha^{-1} M_T L_{B,\alpha}(L_{x^\varphi} L_r + 1)||S(\chi) - S(\varphi)||_{C[-h,T]}. \end{aligned}$$

Ми бачимо, що завдяки неперервності $S \equiv S_{T\mu}$ (див. (3.332)), перший та третій члени у (3.336) прямують до нуля при $||\chi - \varphi||_X \to 0$. Другий член у (3.336) прямує до нуля при $|s-t| \to 0$ оскільки $x \in C^1([-h,T]; L^2(\Omega))$. Останній член у (3.336) прямує до нуля завдяки [144, теорема 3.5, пункт (ii), с. 114] (нагадаємо, що $x^\varphi(0) \equiv \varphi(0) \in D(A)$). Ми довели неперервність F. Для перевірки диференціального рівняння для v (див. (3.335)), ми слідуємо розгляду, що наведений на [205, с. 58]. Більш детально, ми спочатку перевіряємо інтегральне рівняння (3.306) тобто показуємо, що v є слабкий розв'язок (a mild solution) для (3.335). В нашому випадку є лише одна відмінність - присутність оператора A який є лінійний. Отже це не додає жодних ускладнень для диференційовності $S \equiv S_{T\mu}$ коли ми визначаємо для фіксованих $\phi \in X_{\psi,\mu}$, та $\chi \in T_\phi X_F$ функцію $v \equiv DS(\phi)\chi \in C^1([-h,T]; L^2(\Omega))$. Тут DS треба розуміти як диференціал відображення між многовидами (див. (3.332) для визначення S та [37] для основ теорії многовидів). Можна побачити [205, с. 58], що $v_0 = ev_0 DS(\phi)\chi = D(ev_0 \circ S)(\phi)\chi = \chi$. Тут оціночне відображення (the evaluation map) ev_t визначене у (3.334). Також для $t \in [0,T]$ та всіх $\varphi \in X_{\psi,\mu}$ маємо $ev_t(S(\varphi)) = ev_t x^{(\varphi)} = x_t^{(\varphi)} = F(t,\varphi)$, що дає (див. (3.333))

$$v_t = ev_t DS(\phi)\chi = D(ev_t \circ S)(\phi)\chi = D_2 F(t,\chi).$$

Аби показати, що v задовільняє інтегральному варіанту рівняння (3.335) тобто, воно є слабким розв'язком (a mild solution) для (3.335), ми спочатку нагадуємо (3.332) та позначення $\hat{\varphi}(t) = (E_T\varphi)(t)$ (3.321). Для $t > 0$ ми маємо

$$\begin{aligned} S(\varphi)(t) = x^{(\varphi)}(t) = y^{(\varphi)} + E_T\varphi \equiv Y_{T\mu}(\varphi) + E_T\varphi \\ = e^{-At}\varphi(0) - \varphi(0) - t\dot{\varphi}(0) + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} F(y_\tau + \hat{\varphi}_\tau)\, d\tau + \varphi(0) + t\dot{\varphi}(0) \\ = e^{-At}\varphi(0) + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} F(y_\tau + \hat{\varphi}_\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Отже

$$S(\phi)(t) = e^{-At}\phi(0) + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} F(x_\tau^{(\phi)})\, d\tau, \qquad t > 0, \tag{3.337}$$

та визначення $v \equiv DS(\phi)\chi \in C^1([-h,T]; L^2(\Omega))$ дає для $t > 0$

$$v(t) = (DS(\phi)\chi)(t) = \chi(0) + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} DF(x_\tau^{(\phi)})\, v_\tau\, d\tau.$$

Для більшої кількості деталей див. [205, с. 58]. Таким чином, v є слабким роз'язком (3.335).

Зауваження 3.150 *Для того аби диференцюювати нелінійний член у (3.337) ми використовуємо той самий результат про гладкість складеного оператора (substitution operator) як у [205, с. 51]. Більш детально, ми розглядаємо відкриту множину $U \subset C^1([-h,0];L^2(\Omega))$ та відкриту множину*

$$U_T \equiv \{\eta \in C([0,T];C^1([-h,0];L^2(\Omega))) : \eta(t) \in U \text{ для всіх } \quad t \in [0,T]\}.$$

В [76, Appendix IV, p. 490] доведено, що складений оператор (substitution operator) $F_T : U_T \ni \eta \mapsto F \circ \eta \in C([-h,0];L^2(\Omega))$ є C^1-гладкий, з $(DF_T(\eta)\chi)(t) = DF(\eta(t))\chi(t)$ для всіх $\eta \in U_T$, $\chi \in C([0,T];C^1([-h,0];L^2(\Omega)))$, $t \in [0,T]$.

Для того аби показати, що v є класичним розв'язком ми спочатку нагадаємо, що умова ($\mathbf{H_{cl}4}$) дає локальну властивість Липшиця для похідної Фреше $DF : X \supset U \to L^2(\Omega)$, тут $U \subset X$ є відкрита множина. Нагадаємо (див. [98, с. 466]) вигляд DF, використовуючи обмеження оціночного відображення (the restricted evaluation map) (не плутати з оціночним відображенням ev_t, яке визначене у (3.334))

$$Ev : C^1([-h,0];L^2(\Omega)) \times [-h,0] \ni (\phi, s) \mapsto \phi(s) \in L^2(\Omega)$$

яке є неперервно диференційовним, з $D_1Ev(\phi,s)\chi = Ev(\chi,s)$ та $D_2Ev(\phi,s)1 = \varphi'(s)$. Отже ми записуємо наш член із загаюванням F як складене відображення $F \equiv B \circ Ev \circ (id \times (-r))$ (див. (3.305)) яке є неперервно диференційовним з U до $L^2(\Omega)$, з

$$\begin{aligned} DF(\phi)\chi &= DB(\phi(-r(\phi)))[D_1Ev(\phi,-r(\phi))\chi - D_2Ev(\phi,-r(\phi))Dr(\phi)\chi] \\ &= DB(\phi(-r(\phi)))[\chi(-r(\phi)) - \phi'(-r(\phi))Dr(\phi)\chi] \end{aligned} \tag{3.338}$$

для $\phi \in U$ та $\chi \in C^1([-h,0];L^2(\Omega))$.

Відображення B та r задовільняють ($\mathbf{H_{cl}4}$) та ми нагадуємо (див. зауваження 3.147), що наше F задовільняє умові, що подібна до (S) у [98, с. 467]. Для прикладу члена із загаюванням дивись нижче.

Локальна властивість Липшиця для похідної Фреше $DF : X \to L^2(\Omega)$ та додаткова гладкість початкової функції $\chi \in T_\phi X_F \subset X$ дають можливість застосувати теорему 3.131 для доведення того, що v є класичним розв'язком для (3.335).

Позначимо множину $\Upsilon = \bigcup_{\phi \in X} [0, t(\phi)) \times \{\phi\} \subset [0, \infty) \times X$ та відображення $G : \Upsilon \to X$, що задане формулою $G(t, \phi) = x_t^{\phi}$. твердження 3.139, 3.143, 3.144, 3.145, 3.148, 3.149 разом дають наступну теорему.

Теорема 3.151 *Нехай* ($\mathbf{H_{cl}1}$)*–*($\mathbf{H_{cl}4}$) *виконані. Тоді G є неперервною, та для кожного $t \geq 0$, такого що $\Upsilon_t \neq \emptyset$ відображення G_t є C^1-гладке. Для кожного $(t, \phi) \in \Upsilon$ та для всіх $\chi \in T_\phi X$, маємо $DG_t(\phi)\chi = v_t$ з $v : [-h, t(\phi)) \to L^2(\Omega)$ є C^1-гладким та задовільняє $\dot{v}(t) = Av(t) + DF(G(t, \phi))v_t$, для $t \in [0, t(\phi))$, $v_0 = \chi$.*

3.11.3. Приклад загаювання, що залежить від стану: порогова умова. Розглянемо наступний приклад загаювання, що залежить від стану, який використовується у задачах популяційної динаміки, див. [118, с. 191]. Це так звана порогова умова.

Загаювання, що залежить від стану $r : C([-h, 0]; L^2(\Omega)) \to [0, h]$ задається неявно наступним рівнянням

$$R(r; \varphi) = 1, \tag{3.339}$$

де

$$R(r; \varphi) \equiv \int_{-r}^{0} \left(\frac{C_1}{C_2 + \int_\Omega \varphi^2(s)(x)\, dx} + C_3 \right) ds, \quad C_i > 0. \tag{3.340}$$

Оскільки

$$D_1 R(r(\varphi); \varphi) \cdot Dr(\varphi)\psi + D_2 R(r(\varphi); \varphi)\psi = 0$$

та

$$D_1 R(r(\varphi); \varphi) \cdot 1 = \left(\frac{C_1}{C_2 + \int_\Omega \varphi^2(-r)(x)\, dx} + C_3 \right) \cdot 1 \neq 0, \quad C_i > 0,$$

$$D_2 R(r(\varphi); \varphi)\psi = -\int_{-r}^{0} \left\{ \frac{C_1}{[C_2 + \int_\Omega \varphi^2(s)(x)\, dx]^2} \cdot 2 \cdot \int_\Omega \varphi(s)(x) \cdot \psi(s)(x)\, dx \right\} ds,$$

ми маємо

$$Dr(\varphi)\psi = \left(\frac{C_1}{C_2 + \int_\Omega \varphi^2(-r)(x)\,dx} + C_3 \right)^{-1}$$

$$\times \int_{-r(\varphi)}^{0} \left\{ \frac{C_1}{[C_2 + \int_\Omega \varphi^2(s)(x)\,dx]^2} \cdot 2 \cdot \int_\Omega \varphi(s)(x) \cdot \psi(s)(x)\,dx \right\} ds. \tag{3.341}$$

Тапер ми підставляємо форму вище для $Dr(\varphi)\psi$ в (3.338) та приходимо до

$$DF(\varphi)\psi = DB(\varphi(-r(\varphi))) \Big[\psi(-r(\varphi)) - \varphi'(-r(\varphi)) \times \left(\frac{C_1}{C_2 + \int_\Omega \varphi^2(-r)(x)\,dx} + C_3 \right)^{-1}$$

$$\times \int_{-r(\varphi)}^{0} \left\{ \frac{C_1}{[C_2 + \int_\Omega \varphi^2(s)(x)\,dx]^2} \cdot 2 \cdot \int_\Omega \varphi(s)(x) \cdot \psi(s)(x)\,dx \right\} ds \Big]. \tag{3.342}$$

Ми бачимо, що відображення r задовільняє ($\mathbf{H_{cl}4}$). Ми також нагадуємо (див. зауваження 3.147), що цей приклад F задовільняє умові, подібній до (S) у [98, с. 467], за умови, що оператор $B : L^2(\Omega) \to D(A^\alpha)$ (для деякого $\alpha > 0$) є C^1-гладкий.

3.12. Висновки до розділу 3

При дослідженні диференціальних рівнянь із загаюванням, що залежить від стану, суттєву особливість мають задачі в яких присутнє хоч одне зосереджене загаювання, що залежить від стану. Присутність такого загаювання дає втрату липшицевості (навіть локальної) всього загаюваного елемента на класичному фазовому просторі - просторі неперервних функцій. Як наслідок, отримуємо ситуацію, в якій не можуть бути використані класичні підходи дослідження рівнянь зі сталим загаюванням та загаюваннями, що залежать від часу. Іншою складністтю досліджень таких задач є той факт, що ці задачі, по своїй природі завжди нелінійні, тобто природній підхід спочатку розглянути найбільш прості лінійні випадки, а потім, на основі отриманих результатів, переходити до більш складних нелінійних - неможливий. Таким чином, виникає необхідність розробки принципово нових методів вивчення таких нелінійних задач. Відштовхуючись від результатів Р.Драйвера (R.Driver) та

Э.Винстона (E. Winston), які показали на простих скалярних прикладах, що в усьому просторі неперервних функцій початкова задача не завжди є коректно поставленою, ми проводемо дослідження в двох напрямках.

Перший напрямок, пов'язаний з підходами, які розроблені для звичайних диференціальних рівнянь з ЗЗС, див. наприклад, роботи Р.Драйвера (R.Driver), Дж. Малле-Паре (J.Mallet-Paret), З.Насбаум (R.Nussbaum), Х.-О.Вальтер (H.-O. Walther), Т.Кристин (T.Krisztin), Ф.Хартунг (F.Hartung) та інші. В цьому підході пропонується звужувати простір початкових даних та простір розв'язків до підмножин липшицевих або неперервно диференційовних функцій. Ці підмножини можуть бути лінійними або нелінійними (многовид розв'язків). Для рівнянь у частинних похідних, вперше вдалося знайти відповідні множини початкових даних та розв'язків, дослідити їх якісні властивості. Основні результати отримані для РЧП першого порядку за часом. Коректна розв'язність доведена в різних ситуаціях: метричні простори та многовиди розв'язків. Отримані результати про існування глобального атрактора. Досліджений також клас нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку за часом з ЗЗС. Доведена коректна розв'язність у відповідному просторі функцій, які є C^1 за часовою змінною. На відміну від моделей першого порядку з дискретним ЗЗС, цей результат не потребує ніяких умов узгодження на початкові функції. Побудовані розв'язки формують динамічну систему у просторі C^1-типу на інтервалі загаювання.

Другий напрямок є новим як для звичайних диференціальних рівнянь так і для РЧП. Цей напрямок пов'язаний з, так званою, 'ігноруючою умовою' для зосередженого ЗЗС. Ця умова вперше запропонована автором в роботі [159]. Декілька узагальнень цієї умови також виявились корисними для подальших досліджень. Для задач з ЗЗС, яке задовільняє цій умові, ми отримуємо коректну задачу на всьому просторі неперервних функцій. В задачах, де вдається довести коректну розв'язність, будуємо динамічну систему та досліджуємо її асимптотичну поведінку (знаходимо достатні умови існування компактного глобального атрактора). Також досліджені асимптотичні властивості розв'язків за відсутності єдиності розв'язків. До слова, ілюстративний явний приклад трьох розв'язків початкової задачі з неперервною початковою функцією був вперше оприлюднений в [28].

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 64, 65, 115].

РОЗДІЛ 4. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАГАЮВАННЯМ, ЩО ЗАЛЕЖИТЬ ВІД СТАНУ, ЯКІ ОПИСУЮТЬ ДИНАМІКУ ВІРУСНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ

4.1. Загальна постановка задачі.

Відповідно до інформації ВОЗ, багато вірусів (як Ебола, вірус Зіка, ВІЛ, віруси гепатиту Б та С та інші) продовжують бути глобальними загрозами. Зокрема, у Глобальному висновку щодо гепатитів [219] (ВОЗ, 2017) ми знаходимо "велика кількість людей - близько 325 мільйонів в усьому світі у 2015 - є носіями вірусних інфекцій гепатиту Б та С, які можуть залишатися асимптоматичними впродовж десятиліть" та "вірусні гепатити спричинили 1,34 мільона смертей у 2015 - число, що є співмірним кількості смертей від туберкульозу та є більшим, ніж від ВІЛ". В такій ситуації будь-які кроки на шляху до розуміння вірусних захворювань є важливими.

Нас цікавлять математичні моделі, які описують динаміку вірусних захворювань. В останній час багато авторів формулювали та досліджували такі моделі. Слід відмітити, що біологічна сторона настільки складна, а кількість змінних та параметрів настільки велика, що дослідники вимушені зменшувати їх кількість для формулювання спрощених моделей, які можна вивчати строгими математичними методами. Ми не будемо описувати тут історичний розвиток моделей. Відмітемо лише, що ранішні моделі [145, 132] включали лише три змінні: кількість сприйнятливих (здорових) клітин, кількість інфікованих клітин та кількість вільних вірусних частинок. Такі моделі не враховували іммунні відповіді організма.

Іммунні відповіді поділяються на вроджену (не специфічну) та специфічну (адаптивну). Більше інформації про основи іммунології див., наприклад, в монографії [218]. Ми концентруємо увагу на специфічних (адаптивних) іммунних відповідях. Основні з них - ефекторні відповіді тобто ті, які безпосередньо борються з патогеном. Існують дві такі відповіді - за допомогою антитіл та CTL (цитотоксичні Т лімфоцити або Т-клітини-вбивці). Існує ще третья гілка - в основному регуляторна, яка "допомагає" ефекторним відповідям запуститися. Основна роль тут відводится декількoм родинам клітин-помічників. Антитіла атакують патоген (вільні вірусні частинки) поза клітин в той час як CTL знаходять та знищують інфіковані клітини організму. Див. також посилання в [225]. Відмітемо також, що виявлення антивірусних антитіл в крові є одним з самих розповсюджених лабораторних способів виявлення захворювання (діагностіка). Відносний баланс обох типів адаптивних імунних відповідей "може бути вирішальним, який визначає чи пацієнт є асимптоматичним чи патологія має місце" [217]. Це приводить до введення двох додаткових змінних для обох адаптивних імунних відповідей [217, 218] (див. також [223] та посилання).

Ми будемо досліджувати узагальнення моделі (4.1), яке має п'ять змінних: сприйнятливих (неінфіковані) клітини організму T, інфіковані клітини T^*, вільні вірусні частинки V, CTL-відповідь (клітини) Y, та антитіла A. У випадку білінійної нелінійності та одного сталого концентрованого загаювання (див., для приклада, [222]) це має наступну форму

$$\begin{cases} \dot{T}(t) = \lambda - dT(t) - kT(t)V(t), \\ \dot{T}^*(t) = e^{-\omega h} kT(t-h)V(t-h) - \delta T^*(t) - pY(t)T^*(t), \\ \dot{V}(t) = N\delta T^*(t) - cV(t) - qA(t)V(t), \\ \dot{Y}(t) = \beta T^*(t)Y(t) - \gamma Y(t) \\ \dot{A}(t) = gA(t)V(t) - bA(t). \end{cases} \tag{4.1}$$

Тут крапка над функцією позначає похідну за часом $\dot{T}(t) = \frac{dT(t)}{dt}$, всі сталі $\lambda, d, k, \delta, p, N, c, q, \beta, \gamma, g, b, \omega$ є додатніми. Щодо імунних відповідей, четверте рівняння описує регуляцію CTL-відповіді та $pY(t)T^*(t)$ (у другому рівнянні) відображає знищення інфікованих клітин літичною імунною відповіддю. П'яте рівняння описує регуляцію відповіді антитіл та $qA(t)V(t)$ (у третьому рівнянні) є нейтралізація вірусів за допомогою антитіл [217, с.1744]. У (4.1), h позначає загаювання (проміжок часу) між контактом віруса і клітини та моментом, коли клітина стає активно інфікованою (починає продукувати нові віріони).

Цей проміжок включає закріплення віруса на поверхні клітини, проникнення всередену клітини та внутришньоклітинні стадії реплікації віруса.

В моделі (4.1), стандартний білінійний елемент захворюваності використовується за принципом дії мас. Для додаткових деталей та посилань на моделі інфекційних хвороб з більш загальними нелінійностями f (порівняйте перші два рівняння у системах (4.1) та (4.2)) див. також [111, 89] та наші припущення та приклади далі. В роботі [224], слідуючи [105, 211, 222], автори припускають, що нелінійність задається як функціональна відповідь типу д'Анжеліса-Беддінгтона (DeAngelis-Beddington) [39, 68], $f(T,V) = \frac{kTV}{1+k_1T+k_2V}$, де $k, k_1 \geq 0, k_2 > 0$ є сталі. Асимптотична стійкість за О.Ляпуновим[18] для стаціонарних точок вивчається для наступної моделі зі *сталим* концентрованим загаюванням

$$\begin{cases} \dot{T}(t) = \lambda - dT(t) - f(T(t), V(t)), \\ \dot{T}^*(t) = e^{-\omega h} f(T(t-h), V(t-h)) - \delta T^*(t) - pY(t)T^*(t), \\ \dot{V}(t) = N\delta T^*(t) - cV(t) - qA(t)V(t), \\ \dot{Y}(t) = \beta T^*(t)Y(t) - \gamma Y(t) \\ \dot{A}(t) = gA(t)V(t) - bA(t). \end{cases} \tag{4.2}$$

Вочевидь, сталість загаювання є додатковим припущенням, що по суті спрощує аналіз, але не є мотивованим біологічним підґрунтям моделі. Це було причиною (див. напр. [137, 212]) обговорити моделі з розподіленим загаюванням як альтернативу дискретним постійним загаюванням. Можна розглядати також загаювання, що залежить від часу $h(t)$ якщо деякі біологічно мотивовані властивості $h(t)$ є в наявності. Ми пропонуємо інший підхід.

Наша *перша мета* полягає в тому, аби зняти обмеження сталості загаювання та дослідити коректну розв'язність та стійкість О.Ляпунова для наступної моделі вірусної інфекції (4.3) з загальним функціоналом відповіді f та *загаюванням, що залежить від стану.* Виявляється, аналіз по суті відрізняється від випадка постійного загаювання. Наскільки нам відомо, такі моделі були розглянуті вперше в [167]. Тут ми позначимо простір неперервних функцій через $C \equiv C([-h, 0]; \mathbb{R}^5)$, що споряджений sup-нормою. В наших позначеннях, $u(t) = (T(t), T^*(t), V(t), Y(t), A(t))$ та ми розглядаємо неперервний функціонал (ЗЗС) $\eta : C \to [0, h]$. Загаювання η є вочевидь обмеженим оскільки воно не може перевищувати тривалість життя клітини-господаря (мішені).

Наведемо систему, що досліджується

$$
\begin{cases}
\dot{T}(t) = \lambda - dT(t) - f(T(t), V(t)), \\
\dot{T}^*(t) = e^{-\omega h} f(T(t - \eta(u_t)), V(t - \eta(u_t))) - \delta T^*(t) - pY(t)T^*(t), \\
\dot{V}(t) = N\delta T^*(t) - cV(t) - qA(t)V(t), \\
\dot{Y}(t) = \beta T^*(t)Y(t) - \gamma Y(t), \\
\dot{A}(t) = gA(t)V(t) - bA(t)
\end{cases}
\tag{4.3}
$$

із загальним породжуючим функціоналом відповіді $f(T, V)$, що задовільняє природнім умовам, які наведені далі. Дивись також приклади в пункті 4.3.3. Ми відмічаємо, що член $e^{-\omega h}$ перед f (див. друге рівняння у (4.3)), відображає той факт, що лише частина популяції клітин виживає впродовж періоду інкубації віруса. Зрозуміло, що він повинен бути менше одиниці. Ця умова не є дуже точною для нелінійних систем. Треба розглядати це як коефіцієнт, що належить до $(0, 1)$ та може бути включений у визначення функції f. Ми залишаємо цей коефіцієнт у формі $e^{-\omega h}$ лише з однієї причини - спростити для читача порівняння розрахунків з випадком сталого загаювання.

Існує велика кількість статтей, в яких досліджуються вірусні моделі без загаювання та зі сталим загаюванням. Ці роботи зконцентровані на локальній або глобальній стійкості стаціонарних розв'язків (див., наприклад, [217, 218, 111, 89, 223]). У випадку доведення глобальної стійкості нетривіального ('хворого') стаціонарного розв'язку можна зробити висновок, що вірус ніколи не буде подоланий, тобто хвороба залишається у хронічному стані. Такі результати є дуже важливими для діагностичних цілей. З іншого боку, після встановлення діагнозу вірусного захворювання, найважливішим питанням повстає пошук шляху лікування пацієнта. Оскільки медичні досліди є дуже коштовні та можуть проводитись впродовж років, математичні моделі довели свою корисність та ефективність. Наша *друга мета* є запропонувати модель та обрати відповідний простір для розв'язків, які були б адекватні до опису лікування, включно з використанням фармацевтичних (хімічних) засобів. Одна з головних мотивуючих ситуацій (див., наприклад, [192, 143]) є така, коли ефективність ліків зменшується розривним шляхом (кусково неперервним). В термінах (4.3), параметр N може змінюватись розривним шляхом (див. рівняння (2) у [192, с.920]). Можна бачити, що в момент часу, коли змінюється будь-який параметр, розв'язок є неперервним, але не диференційовним (дивись мал. 2-B у [192, с.921] а також мал.1 у [143, с.23]). Для того аби зрозуміти наскільки часто трапляється таке порушення неперервності похідної за часом, потрібно порівняти час породжування (генерації) віруса (в наших позначеннях це h (4.3)) та план прийому специфічних антивірусних препаратів під час лікування. Розглядаючи, як приклад ВІЧ (HIV), ми знаходимо у [139], таку інформацію - "повний час породження ВІЧ "in vitro" є 25 годин та є значно коротшим ніж наші оцінки у 52 години для загаювання "in vivo". З іншого боку, стандарний план лікування є прийом препаратів двічі на день або одноразовий прийом ліків кожного дня (once-a-day pills). Це показує, що впродовж історичного часового сегменту $[t-h,t]$ ми маємо одне або більше порушення неперервності похідної за часом. У випадку HBV, HCV маємо схожу ситуацію зі схожим планом прийому препаратів. Більш того, зараження додатковими інфекціями (co-infections by other pathogens), які не є рідкісттю, споживають ресурси імунної системи, що призводить до зміни інших параметрів (в позначеннях системи (4.3) параметри β та g також можуть змінюватись).

Під час дослідження локальної стійкості стаціонарного розв'язку, також використовують метод лінеарізованої стійкості. Для рівнянь із загаюванням, що залежить від стану, цей метод розроблений як у просторі C, див. [67, 100] так і у просторі C^1, див. [205, 98]. Загальний метод стійкості (функцій О.М.Ляпунова), на який ми спираємось, розроблений у [18].

Наш план такий. В наступному пункті ми обговорюємо та обираємо природню множину початкових даних та доводимо існування та єдиність розв'язків. Далі ми доводимо, що ця множина інваріантна. Після цього ми досліджуємо питання стійкості стаціонарного розв'язку. Основну зацікавленість представляє внутрішній стаціонарний розв'язок, який описує випадок, коли обидві адаптивні імунні відповіді (CTL та антитіла) активовані. Це найбільш важливий, з біологичної точки зору, випадок у вивченні хвороби.

4.2. Функція реакції типу Д'Анжеліса-Беддінгтона. Постановка задачі.

Ми починаємо дослідження задачі (4.3) у випадку функціональної відповіді наступного вигляду

$$f(T,V) = kTV(1+k_1T+k_2V)^{-1}, \qquad k,k_1,k_2>0, \quad T,V\in\mathbb{R}, \tag{4.4}$$

Така форма відповіді була запропонована у роботах Д'Анжеліса, Беддінгтона (DeAngelis et al., Beddington) та їх співавторів у 1975 році [39], [68].

4.2.1. Попередні дослідження. Ми спочатку досліджуємо питання існування та єдиності розв'язків задачі (4.3). Оскільки дві функції T та V використовуються у (4.3) в різні моменти часу (час t та час, що загаюється $t-\eta(u_t)$), ми повинні розглядати початкові функції $T(\theta), V(\theta)$ для $\theta\in[-h,0]$. Як зазвичай для біологічних задач, необхідно перевірити невід'ємність та обмеженість всіх координатних (невідомих) функцій за умови, що початкові функції є невід'ємні (див., наприклад, [118]).

Ми вивчатимемо систему (4.3) із початковою функцією

$$u_0=\varphi\equiv(T_0,T_0^*,V_0,A_0,Y_0)\in C_+\equiv C_+[-h,0], \tag{4.5}$$

де $\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty), C_+\equiv C_+[-h,0]\equiv C([-h,0];\mathbb{R}^5_+)$.

Визначаємо множину

$$\Omega_C\equiv\{\varphi\equiv(T_0,T_0^*,V_0,A_0,Y_0)\in C_+[-h,0],$$

$$0\le T_0(\theta)\le\frac{\lambda}{d},\quad 0\le T_0^*(\theta)\le\frac{k\lambda}{dk_2\delta}e^{-\omega h},\quad 0\le V_0(\theta)\le\frac{Nk\lambda}{cdk_2}e^{-\omega h},$$

$$
\left. \begin{aligned}
0 \le T_0^*(\theta) + \frac{p}{\beta} Y_0(\theta) \le \frac{k^2\lambda^2 e^{-2\omega h}}{d^2 c k_2 \min\{\delta;\gamma\}}, \\
0 \le V_0(\theta) + \frac{q}{g} A_0(\theta) \le \frac{Nk\lambda\, e^{-\omega h}}{dk_2 \min\{c;b\}},\ \theta \in [-h,0]
\end{aligned} \right\}. \tag{4.6}
$$

Ми розглянемо наступну умову на ЗЗС

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{H1}_\eta) \quad & \forall \psi \in Z^{2,3} \equiv \left\{ \psi = (\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4, \psi^5) \in C_+ : \psi^2(0) = \psi^3(0) = 0 \right\} \\
& \Longrightarrow \eta(\psi) > 0.
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

Зауваження 4.1 *Ми відмічаємо, що навіть більш жорстка умова $\eta(\psi) > 0$ для всіх $\psi \in C_+$ є добре вмотивована біологічно. З іншого боку, навіть ця умова, так звана умова "незникаючого загаювання (non-vanishing delay"),* не *гарантує єдиності розв'язку з лише неперервними початковими функціями (див. [77] для прикладів).*

Першим результатом є наступна

Теорема 4.2 *Нехай $\eta : C \to [0,h]$ є неперервний функціонал (ЗЗС). Тоді (i) для будь-якої функції $\varphi \in C$ існують* неперервні *розв'язки задачі (4.3), (4.5).*

(ii) Якщо додатково, η задовільняє $(H1_\eta)$, тоді для будь-якої початкової функції $\varphi \equiv (T_0, T_0^*, V_0, A_0, Y_0) \in \Omega_C$ такої, що T_0, V_0 є липшицевими функціями, задача (4.3), (4.5) має єдиний розв'язок. Розв'язок є глобально липшицевим за часом та задовільняє $u_t \equiv (T_t, T_t^*, V_t, A_t, Y_t) \in \Omega_C, \quad t \ge 0$.

Доведення теореми 4.2. (i) Існування неперервних розв'язків гарантується неперервністю правої частини системи (4.3) та класичними результатами з теорії диференціальних рівнянь із загаюванням [30, 76].

(ii) Оскільки T_0, V_0 є липшицевими функціями, єдиність неперервних розв'язків випливає з загальних результатів теорії диференціальних рівнянь із загаюванням, що залежить від стану (дивись огляд про звичайні диференціальні рівняня [98] для подальших деталей та посилань, а також [159, 160, 162, 164] для рівнянь у частинних похідних). Тепер покажемо, що множина Ω_C є інваріантною, тобто будь-який розв'язок, що починається у $\varphi \in \Omega_C$ залишається у Ω_C для всіх $t \geq 0$.

Ми відмічаємо, що у випадку *сталого* загаювання, невід'ємність всіх координат розв'язку випливає з умови *квазі-додатності (quasi-positivity)* правої частини (4.3) (див., наприклад, [193, теорема 2.1, с.81]). Ми підкреслюємо, що у випадку *загаювання, що залежить від стану*, ми не можемо напряму застосувати [193, теорему 2.1, с.81] тому, що вона спирається на липшицевість правої частини системи, якої *немає* у випадку системи (4.3). Ми могли б застосувати відповідне узагальнення на випадок загаювання, що залежить від стану [163], але зараз ми пропонуємо інший шлях.

Для того, аби довести невід'ємність всіх координат розв'язку $u(t) = (T(t), T^*(t), V(t), Y(t), A(t))$ ми використовуємо безпосередній аналіз кожної коодинати. Легко бачити, що $T(t) \to 0+$ дає $\dot{T}(t) \to \lambda > 0$, що робить неможливим для T стати від'ємним. Інтегрування показує, що координати задовільняють

$$\begin{aligned} T^*(t) =& T^*(0)e^{-\int_0^t (\delta + pY(s))\, ds} \\ &+ e^{-\omega h} \int_0^t f(T(\tau - \eta(u_\tau)), V(\tau - \eta(u_\tau)))e^{-\int_\tau^t (\delta + pY(s))\, ds}\, d\tau, \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$V(t) = V(0)\, e^{-\int_0^t (c+qA(s))\, ds} + N\delta \int_0^t T^*(\tau)e^{-\int_\tau^t (c+qA(s))\, ds}\, d\tau, \tag{4.9}$$

$$Y(t) = Y(0)\, e^{-\int_0^t (\beta T^*(\tau) - \gamma))\, d\tau}, \qquad A(t) = A(0)\, e^{-\int_0^t (gV(\tau) - b))\, d\tau}. \tag{4.10}$$

Рівняння (4.10) показують, що $Y(0) \geq 0, A(0) \geq 0$ дає $Y(t) \geq 0, A(t) \geq 0$ для всіх $t \geq 0$. Для випадку сталого загаювання, рівняння (4.8), (4.9) дають подібний результат для $T^*(t), V(t)$, але у випадку загаювання, що *залежить від стану* ми повинні бути більш обережними. Поперше, (4.8) дає властивість (для деякого $t^1 \geq 0$)

$$V(s) \geq 0,\ s \in [-h, t^1] \quad \text{дає} \quad T^*(s) \geq 0,\ s \in [0, t^1]. \tag{4.11}$$

Так само, (4.9) дає

$$T^*(s) \geq 0,\ s \in [0, t^1] \quad \text{дає} \quad V(s) \geq 0,\ s \in [0, t^1]. \tag{4.12}$$

Тепер припустимо, що невід'ємність T^* або V порушується. Властивості (4.11), (4.12) показують, що T^* та V повинні змінювати знак одночасно, тобто, існує (найменший можливий) момент часу $t^1 \geq 0$ та $\delta^1 > 0$ такі, що $T^*(t) \geq 0, V(t) \geq 0$ для $t \in (t^1 - \delta^1, t^1]$ та $T^*(t) < 0, V(t) < 0$ для $t \in (t^1, t^1 + \delta^1)$. Неперервність розв'язків дає $T^*(t^1) = V(t^1) = 0$, і як наслідок (дивись $(H1_\eta)$), маємо $u_{t^1} \in Z^{2,3}$ тобто $\eta(u_{t^1}) > 0$. Отже існує $\delta^2 > 0$ таке, що $V(\tau - \eta(u_\tau)) \geq 0$ для $\tau \in (t^1, t^1 + \delta^2)$. Ця властивість та (4.8) дають $T^*(t) \geq 0$ для $t \in (t^1, t^1 + \delta^2)$. Ми прийшли до протиріччя з вибором t^1 та тим самим завершили доведення невід'ємності усіх координат.

Тепер покажемо, що мають місце верхні обмеження для координат у (4.6). Для зручності, ми формулюємо простий варіант леми Гронуола.

Лема 4.3 . *Нехай $\ell \in C^1[a, b)$ та $\frac{d}{dt}\ell(t) \leq c_1 - c_2\ell(t)$, $t \in [a, b)$. Тоді $\ell(a) \leq c_1 c_2^{-1}$ дає $\ell(t) \leq c_1 c_2^{-1}$ для всіх $t \in [a, b)$. У випадку $b = +\infty$, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $t_\varepsilon \geq a$ таке, що $\ell(t) \leq c_1 c_2^{-1} + \varepsilon$ для всіх $t \geq t_\varepsilon$.*

Доведення леми 4.3. Ми домножуємо нерівність $\frac{d}{dt}\ell(t) \leq c_1 - c_2\ell(t)$, $t \in [a, b)$ на $e^{c_2 t}$ та інтегруємо по $[a, t]$. Це приводить до $\ell(t) \leq \left(\ell(a) - \frac{c_1}{c_2}\right) e^{-c_2(t-a)} + \frac{c_1}{c_2}$, що і завершує доведення леми 4.3.

Оскільки f є невід'ємна для невід'ємних аргументів (див. (4.4)), ми маємо з першого рівняння у (4.3) оцінку $\dot{T}(t) \leq \lambda - dT(t)$. Таким чином лема 4.3 та $T(0) \leq \frac{\lambda}{d}$ дають $T(t) \leq \frac{\lambda}{d}$ для $t \geq 0$. Ми використовуємо це для оцінки другої координати, див. (4.4), наступгим чином $f(T, V) \leq \frac{k\lambda V}{d(1+k_2 V)} \leq \frac{k\lambda}{dk_2}$. Це дає $\dot{T}^*(t) \leq \frac{k\lambda}{dk_2} e^{-\omega h} - \delta T^*(t)$ та лема 4.3 дають необхідне обмеження для T^* у (4.6). Обмеження для T^* та третє рівняння у (4.3) дають $\dot{V}(t) \leq N\delta T^*(t) - cV(t) \leq \frac{Nk\lambda}{dk_2} e^{-\omega h} - cV(t)$. Лема 4.3 дає оцінку для V у (4.6). Далі, ми використовуємо друге та четверте рівняння у (4.3) аби отримати

$$
\begin{aligned}
\dot{T}^*(t) + \frac{p}{\beta}\dot{Y}(t) &= e^{-\omega h} f(T(t - \eta(u_t)), V(t - \eta(u_t))) - \delta T^*(t) - \frac{\gamma p}{\beta} Y(t) \\
&\leq e^{-\omega h} k T_{max} V_{max} - \min\{\delta; \gamma\} \left(T^*(t) + \frac{p}{\beta} Y(t) \right) \\
&\leq k \frac{\lambda}{d} \frac{Nk\lambda}{cdk_2} e^{-2\omega h} - \min\{\delta; \gamma\} \left(T^*(t) + \frac{p}{\beta} Y(t) \right).
\end{aligned}
$$

Лема 4.3 дає обмеження для $T^*(t) + \frac{p}{\beta}Y(t)$ у (4.6). Подібним чином, використовуючи третє та п'яте рівняння у (4.3), маємо

$$\dot{V}(t)+\frac{q}{g}\dot{A}(t) \leq N\delta T^*(t)-cV(t)-\frac{bq}{g}A(t) \leq \frac{Nk\lambda}{dk_2}e^{-\omega h}-\min\{c;b\}\left(V(t)+\frac{q}{g}A(t)\right).$$

Лема 4.3 дає останню оцінку у (4.6). Всі розв'язки є глобальними (визначені для всіх $t \geq -h$). Це завершує доведення теореми 4.2.

Зауваження 4.4 *Ми відмічаємо, що наша інваріантна множина Ω_C відмінна від поглинаючої множини Γ, що використовувалась у [224] для випадку сталого загаювання. Позначимо Ω_C^ε множину в якій всі верхні межі у (4.6) збільшені на ε. Тоді друга частина леми 4.3 дає властивість, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ множина Ω_C^ε є поглинаючою для всіх розв'язків (які не обов'язково починаються у Ω_C). Інша відмінність полягає в тому, що всі п'ять координат у $\varphi \in \Omega_C$ є неперервними функціями, що контрастує з випадком сталого загаювання у [224], де друга, четверта та п'ята координати належать до $\mathbb{R}_+$.*

Якщо обговорювати неперервно диференційовні розв'язки, то ми можемо застосувати підхід многовиду розв'язків [205, 98] до задачі (4.3), (4.5). Нагадаємо скорочене позначення для системи (4.3) як $\dot{u}(t) = \mathcal{F}(u_t)$. Розглянемо наступну підмножину множини Ω_C (порівняйте з (4.6))

$$\Omega_{\mathcal{F}} \equiv \left\{\varphi = (T_0, T_0^*, V_0, A_0, Y_0) \in C_+^1[-h,0]; \quad \varphi \in \Omega_C; \quad \dot{\varphi}(0) = \mathcal{F}(\varphi)\right\}. \quad (4.13)$$

Наступний результат є наслідком теореми 4.2.

Теорема 4.5 . *Нехай $\eta : C \to [0,h]$ є неперервний функціонал (ЗЗС), що задовільняє $(H1_\eta)$. Тоді для будь якої початкової функції $\varphi \in \Omega_{\mathcal{F}}$ існує* єдиний *(неперервно диференційовний) розв'язок задачі (4.3), (4.5), який задовільняє $u_t \equiv (T_t, T_t^*, V_t, A_t, Y_t) \in \Omega_{\mathcal{F}}, \quad t \geq 0$.*

Звернемо увагу на те, що будь який неперервний розв'язок u, що починається у $\varphi \in \Omega_C$, задовільняє $u_t \in \Omega_{\mathcal{F}}$ для $t > h$.

4.2.2. Стаціонарні розв'язки. Оскільки стаціонарні розв'язки для задачі (4.3) є такими самими як для відповідної системи зі сталим загаюванням, ми зберігаємо позначення, що близькі до [224]. Ми будемо використовувати наступні репродукційні числа для системи (4.3). Основне репродукційне число (the basic reproduction number) $R_0 \equiv \frac{N\lambda k e^{-\omega h}}{c(d+\lambda k_1)}$.
CTL репродукційне число $R_1 \equiv \frac{N\lambda k\beta e^{-\omega h}}{\gamma\delta(Nk+Ndk_2-k_1ce^{\omega h})}\left(1-\frac{1}{R_0}\right)$.
Репродукційне число антитіл $R_2 \equiv \frac{N^2\lambda kg e^{-\omega h}}{bc(Nk+Ndk_2-k_1ce^{\omega h})}\left(1-\frac{1}{R_0}\right)$.
Конкурентне CTL репродукційне число $R_{CTL} \equiv \frac{\lambda\beta^2 kbe^{-\omega h}+k_1g\delta^2\gamma^2e^{\omega h}}{\beta\gamma\delta(gd+kb+k_2bd+\lambda k_1 g)}$.
Конкурентне репродукційне число антитіл $R_A \equiv \frac{Ng\delta\gamma}{\beta bc}$.

Всі стаціонарні розв'язки для (4.3) знайдені, наприклад, у [224, теорема 3.1]. Нас цікавить три стаціонарні розв'язки які, на нашу думку, є найбільш вмотивованими з біологічної точки зору. Ми також виправляємо деякі (друкарські) помилки у статті Зао та Ху [224, теорема 3.1].

Лема 4.6 *(a) Існує безінфекційний стаціонарний розв'язок* $E^0 = (\frac{\lambda}{d}, 0, 0, 0, 0)$.

(b) Якщо $R_0 > 1$, *тоді (4.3) має стаціонарний розв'язок з вичерпаним імунітетом* $E^1 = (T_1, T_1^*, V_1, 0, 0)$, *де*

$$T_1 = \frac{k_2N\lambda + ce^{\omega h}}{Nk+Ndk_2-k_1ce^{\omega h}}, \quad T_1^* = \frac{N\lambda k e^{-\omega h}}{\delta(Nk+Ndk_2-k_1ce^{\omega h})}\left(1-\frac{1}{R_0}\right),$$

$$V_1 = \frac{N^2\lambda k e^{-\omega h}}{c(Nk+Ndk_2-k_1ce^{\omega h})}\left(1-\frac{1}{R_0}\right).$$

(c) Якщо $R_{CTL} > 1$ *та* $R_A > 1$, *тоді (4.3) має основний (внутрішній) стаціонарний розв'язок* $\widehat{E} = (\widehat{T}, \widehat{T^*}, \widehat{V}, \widehat{Y}, \widehat{A})$. *Всі координати є додатніми,* $\widehat{T}$ *є единим додатнім розв'язком квадратного рівняння*

$$dgk_1\widehat{T}^2 + (dk_2b + dg - \lambda gk_1 + kb)\,\widehat{T} - \lambda(g + k_2b) = 0 \tag{4.14}$$

та координати задовільняють

$$\begin{cases} \widehat{T^*} = \frac{\gamma}{\beta}, \quad \widehat{V} = \frac{b}{g}, \quad \widehat{A} = \frac{N\delta\gamma g-\beta cb}{\beta qb}, \quad \widehat{Y} = \frac{\lambda-d\widehat{T}-e^{\omega h}\delta\widehat{T^*}}{e^{\omega h}p\widehat{T^*}}, \\ N\delta\widehat{T^*} = \widehat{V}(c+q\widehat{A}), \quad \lambda = d\widehat{T} + f(\widehat{T},\widehat{V}), \quad (\delta - p\widehat{Y})\widehat{T^*}e^{\omega h} = f(\widehat{T},\widehat{V}). \end{cases} \tag{4.15}$$

Ці рівняння, що зв'язують координати стаціонарного розв'язку, будуть використані під час досліджень властивостей стійкості. Порівняйте з [224, теорема 3.1]. Ми відмітемо, що R_1 та R_2 будуть вподальшому використані в теоремі 4.12.

4.2.3. Властивості стійкості. Функція Вольтерра $v(x) = x - 1 - \ln x$ для $x > 0$ відіграє важливу роль під час побудови функцій О.М.Ляпунова. Легко перевірити, що $v(x) \geq 0$ та $v(x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 1$. Похідна є $\dot{v}(x) = 1 - \frac{1}{x}$, яка вочевидь від'ємна для $x \in (0, 1)$ та додатня для $x > 1$. Графік v пояснює використання складеної функції $v\left(\frac{x}{x^0}\right)$ для вивчення властивостей стійкості стаціонарного розв'язку x^0. Іншою важливою властивістю є наступна оцінка

$$\forall \delta \in (0,1), \quad \forall x \in (1-\delta, 1+\delta), \quad \text{маємо} \quad \frac{(x-1)^2}{2(1+\delta)} \leq v(x) \leq \frac{(x-1)^2}{2(1-\delta)}. \tag{4.16}$$

Для перевірки достатньо помітити, шо всі три функції дорівнюють нулю в точці $x = 1$ та $\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{(x-1)^2}{2(1+\delta)}\right)\right| \leq |\frac{d}{dx} v(x)| \leq \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{(x-1)^2}{2(1-\delta)}\right)\right|$ у δ-околі точки $x = 1$.

4.2.4. Основний внутрішній стаціонарний розв'язок. Частковий клас загаювання, що залежить від стану. Ми починаємо з внутрішнього стаціонарного розв'язку. Цей внутрішній стаціонарний розв'язок для (4.3) описаний у пункті (c) леми 4.6. Як раніше, ми позначаємо $u(t) = (T(t), T^*(t), V(t), Y(t), A(t))$. Розглянемо довільне $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5) \in C$. Нас цікавить наступний клас (форма) загаювання, що залежить від стану

$$\eta(\varphi) = F(\varphi^1(0), \varphi^3(0)). \tag{4.17}$$

Це означає, що $\eta(u_t) = F(T(t), V(t))$ і виглядає природнім оскільки загаювання виникає в нелінійності f, що залежить лише від T та V (дивись друге рівняння у (4.3)).

Теорема 4.7 *Нехай $R_{CTL} > 1$ та $R_A > 1$. Нехай загаювання (ЗЗС) η має форму (4.17) з неперервним відображенням $F : \mathbb{R}^2_+ \to [0, h]$, задовільняє*

$(H1_\eta)$ *(див. (4.7)) та*

$$|\eta(\varphi)-\eta(\widehat{\varphi})| = |F(\varphi^1(0),\varphi^3(0)) - F(\widehat{T},\widehat{V})| \le c_\eta \left((\varphi^1(0)-\widehat{T})^2 + (\varphi^3(0)-\widehat{V})^2 \right). \tag{4.18}$$

Тоді стаціонарний розв'язок $\widehat{\varphi} = (\widehat{T},\widehat{T^*},\widehat{V},\widehat{Y},\widehat{A})$ *є локально асимптотично стійким. Для достатньо малих значень* c_η, *стаціонарний розв'язок є глобально асимптотично стійким.*

В доведенні теореми 4.7 ми використовуємо функцію О.М.Ляпунова

$$U^1(t) \equiv \left(T(t) - \widehat{T} - \int_{\widehat{T}}^{T(t)} \frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(\theta,\widehat{V})}\, d\theta \right) e^{-\omega h} + \widehat{T^*}\cdot v\left(\frac{T^*(t)}{\widehat{T^*}}\right) + \frac{\delta + p\widehat{Y}}{N\delta}\widehat{V}\cdot v\left(\frac{V(t)}{\widehat{V}}\right)$$

$$+\frac{p}{\beta}\widehat{Y}\cdot v\left(\frac{Y(t)}{\widehat{Y}}\right) + \frac{q\widehat{A}}{Ng}\left(1+\frac{p\widehat{Y}}{\delta}\right)\cdot v\left(\frac{A(t)}{\widehat{A}}\right) + (\delta+p\widehat{Y})\widehat{T^*}\int_{t-\eta(\widehat{\varphi})}^{t} v\left(\frac{f(T(\theta),V(\theta))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right) d\theta. \tag{4.19}$$

Детальніше дивись додаток D та [167].

4.2.5. Головна внутрішня точка рівноваги. Загальний випадок ЗЗС. Зараз ми досліджуємо неперервно диференційовні розв'язки, існування яких гарантовано теоремою 4.5. Як ми відмічали вище, для довільного розв'язку u, що задовільняє $u_0 \in \Omega_C$, ми маємо $u_t \in \Omega_{\mathcal{F}}$ для $t > h$.

Теорема 4.8 . *Нехай* $R_{CTL} > 1$ *та* $R_A > 1$. *Нехай загаювання, що залежить від стану* $\eta : C \to [0,h]$ *є неперервно диференційовним у деякому* μ*-околі стаціонарного розв'язку* $\widehat{\varphi}$ *та задовільняє* $(\mathbf{H1}_\eta)$ *(див. (4.7)).*

Тоді стаціонарний розв'язок $\widehat{\varphi} = (\widehat{T},\widehat{T^*},\widehat{V},\widehat{Y},\widehat{A})$ *задачі (4.3) є локально асимптотично стійким.*

Доведення теореми 4.8. Ми вводимо наступний функціонал О.М.Ляпунова із загаюванням, що залежить від стану та розглядаємо цей функціонал вздовж довільного розв'язку задачі (4.3)

$$U^{sdd}(t) \equiv \left(T(t) - \widehat{T} - \int_{\widehat{T}}^{T(t)} \frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(\theta,\widehat{V})}\, d\theta \right) e^{-\omega h} + \widehat{T^*}\cdot v\left(\frac{T^*(t)}{\widehat{T^*}}\right) + \frac{\delta + p\widehat{Y}}{N\delta}\widehat{V}\cdot v\left(\frac{V(t)}{\widehat{V}}\right)$$

$$+\frac{p\widehat{Y}}{\beta}\cdot v\left(\frac{Y(t)}{\widehat{Y}}\right)+\frac{q\widehat{A}}{Ng}\left(1+\frac{p\widehat{Y}}{\delta}\right)\cdot v\left(\frac{A(t)}{\widehat{A}}\right)+(\delta+p\widehat{Y})\widehat{T^*}\int_{t-\eta(u_t)}^{t} v\left(\frac{f(T(\theta),V(\theta))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right)d\theta. \tag{4.20}$$

Частковий випадок (зі сталим загаюванням) функціоналу був розглянутий у [224] (див. (4.19) вище). Відмінність у залежності від стану нижньої границі в останньому інтегралі у (4.20).

Знайдемо спочатку похідну за часом останнього інтегралу вздовж неперервно диференційовного розв'язку (похідну в силу системи)

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{t-\eta(u_t)}^{t} v\left(\frac{f(T(\theta),V(\theta))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right)d\theta\right)$$

$$= v\left(\frac{f(T(t),V(t))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right) - v\left(\frac{f(T(t-\eta(u_t)),V(t-\eta(u_t)))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right)\cdot\left(1-\frac{d}{dt}\eta(u_t)\right).$$

Порівнюючи з виразом $\frac{d}{dt}U^1(t)$, ми бачимо головну відмінність у появі виразa

$$S^{sdd}(t) \equiv -v\left(\frac{f(T(t-\eta(u_t)),V(t-\eta(u_t)))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right)\cdot\frac{d}{dt}\eta(u_t). \tag{4.21}$$

Зауваження 4.9 . *Ми відмічаємо, що для довільного $u \in C^1([-h,b);\mathbb{R}^5)$ маємо для $t \in [0,b)$*

$$\frac{d}{dt}\eta(u_t) = [(D\eta)(u_t)](\dot{u}_t),$$

де $[(D\eta)(u_t)](\cdot)$ є похідною Фреше (Fréchet derivative) для функціоналу η в точці u_t. Отже, (для розв'язку у μ-околі стаціонарного розв'язку $\widehat{\varphi}$) оцінка $|\frac{d}{dt}\eta(u_t)| \le ||(D\eta)(u_t)||_{L(C;\mathbb{R})}\cdot||\dot{u}_t||_C \le \mu\,||(D\eta)(u_t)||_{L(C;\mathbb{R})}$ гарантує властивість

$$\left|\frac{d}{dt}\eta(u_t)\right| \le \alpha_\mu \text{ з властивістю } \alpha_\mu \to 0 \text{ коли } \mu \to 0 \tag{4.22}$$

завдяки обмеженості $||(D\eta)(\psi)||_{L(C;\mathbb{R})}$ при $\mu \to 0$ (тут $||\psi-\widehat{\varphi}||_C < \mu$).

Похідна за часом $U^{sdd}(t)$ вздовж неперервно диференційовного розв'язку u задачі (4.3) знаходиться подібним шляхом до $\frac{d}{dt}U^1(t)$ у попередньому підрозділі. Ми використовуємо (4.15) аби отримати

$$\frac{d}{dt}U^{sdd}(t) = -D^{sdd}(t) + S^{sdd}(t),$$

де

$$D^{sdd}(t) \equiv \left(T(t)-\widehat{T}\right)^2 \cdot \frac{e^{-\omega h} d(1+k_2\widehat{V})}{T(t)(1+k_1\widehat{T}+k_2\widehat{V})}$$
$$+\frac{(V(t)-\widehat{V})^2 \cdot \widehat{T^*}(\delta+p\widehat{Y})\, k_2(1+k_1 T(t))}{\widehat{V}(1+k_1T(t)+k_2\widehat{V})(1+k_1T(t)+k_2V(t))}$$
$$+\widehat{T^*}(\delta+p\widehat{Y})\left[v\left(\frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t),\widehat{V})}\right)+v\left(\frac{T^*(t)\cdot\widehat{V}}{\widehat{T^*}\cdot V(t)}\right)+v\left(\frac{V(t)}{\widehat{V}}\cdot\frac{f(T(t),\widehat{V})}{f(T(t),V(t))}\right)\right.$$
$$\left.+\,v\left(\frac{\widehat{T^*}}{T^*(t)}\cdot\frac{f(T(t-\eta(u_t)),V(t-\eta(u_t)))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right)\right], \tag{4.23}$$

та $S^{sdd}(t)$ є визначеним у (4.21).

Спочатку, ми відмітимо, що $D^{sdd}(t)$ та $D^1(t)$ мають подібні форми, в той час, коли $S^{sdd}(t)$ та $S^1(t)$ суттєво відрізняються. Більш того, в загальному випадку, ми не можемо використовувати (4.17), (4.18).

Наша мета - довести, що існує окіл $\widehat{u} \in C$, в якому $\frac{d}{dt}U^{sdd}(t) < 0$ (за винятком точки $\widehat{u}$). Ми відмічаємо, що $D^{sdd}(t) \geq 0$, але знак $S^{sdd}(t)$ є невизначений. Ми покажемо, що існує окіл стаціонарної точки в якому $|S^{sdd}(t)| < D^{sdd}(t)$.

Розглянемо наступні допоміжні функціонали $D^{(5)}(x)$ та $S^{(5)}(x)$, які визначені на $\mathbb{R}^5$, де ми спрощуємо позначення $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, x^{(5)}) \in \mathbb{R}^5$ для $x^{(1)} = T, x^{(2)} = T^*, x^{(3)} = V, x^{(4)} = T(t-\eta), x^{(5)} = V(t-\eta)$

$$D^{(5)}(x) \equiv \left(\frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(x^{(1)},\widehat{V})}-1\right)^2+\left(\frac{x^{(2)}\cdot\widehat{V}}{\widehat{T^*}\cdot x^{(3)}}-1\right)^2+\left(\frac{x^{(3)}\cdot f(x^{(1)},\widehat{V})}{\widehat{V}\cdot f(x^{(1)},x^{(3)})}-1\right)^2$$
$$+\left(\frac{\widehat{T^*}\cdot f(x^{(4)},x^{(5)})}{x^{(2)}\cdot f(\widehat{T},\widehat{V})}-1\right)^2+c^{(1)}\cdot\left(x^{(1)}-\widehat{T}\right)^2+c^{(2)}\cdot\left(x^{(3)}-\widehat{V}\right)^2, \quad c^{(1)},c^{(2)}>0. \tag{4.24}$$

$$S^{(5)}(x) \equiv \alpha\cdot v\left(\frac{f(x^{(4)},x^{(5)})}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right), \quad \alpha \geq 0. \tag{4.25}$$

Мотивація для розгляду функцій $D^{(5)}(x)$ та $S^{(5)}(x)$ грунтується на властивості (4.16) функції Вольтерра v. Ми бачимо, що $D^{(5)}(x) = 0$ тоді та тільки тоді, коли $x = (\widehat{T}, \widehat{T^*}, \widehat{V}, \widehat{T}, \widehat{V})$. Тепер ми перейдемо до сферичних координат у $\mathbb{R}^5$

$$\begin{cases} x^{(1)} = \widehat{T} + r\cos\xi_4\,\cos\xi_3\,\cos\xi_2\,\cos\xi_1, \\ x^{(2)} = \widehat{T^*} + r\cos\xi_4\,\cos\xi_3\,\cos\xi_2\,\sin\xi_1, \\ x^{(3)} = \widehat{V} + r\cos\xi_4\,\cos\xi_3\,\sin\xi_2, \\ x^{(4)} = \widehat{T} + r\cos\xi_4\,\sin\xi_3, \\ x^{(5)} = \widehat{V} + r\sin\xi_4, \qquad r \geq 0,\ \xi_1 \in [0, 2\pi),\ \xi_i \in [-\pi/2, \pi/2],\ i = 2, ..., 5. \end{cases} \tag{4.26}$$

Арифметичні обчислення показують, що форма $D^{(5)}(x)$ (див. (4.24)) дає множник r^2 перед сумою, тобто $D^{(5)}(x) = r^2 \cdot \Phi(r, \xi_1, ..., \xi_5)$, де $\Phi(r, \xi_1, ..., \xi_5)$ є неперервною та $\Phi(r, \xi_1, ..., \xi_5) \neq 0$ для $r \neq 0$. Остання властивість доводиться, наприклад, припускаючи протилежне $\Phi(r^0, \xi_1^0, ..., \xi_5^0) = 0$ для $r^0 \neq 0$, що протирічить (4.16). Отже, класична теорема Больцано-Вейерштраса для неперервної функції Φ на замкненому околі $\widehat{u}$ дає існування мінімуму $\Phi_{min} > 0$. Із цього випливає $D^{(5)}(x) \geq r^2 \cdot \Phi_{min}$.

Тепер подібні аргументи для $S^{(5)}(x)$ дають $|S^{(5)}(x)| \leq \alpha_\mu \cdot r^2$, де стала $\alpha_\mu \to 0$ коли $\mu \to 0$ (див. (4.22)). Таким чином, ми можемо обрати досить мале $\mu > 0$ для того, аби задовільнити $\alpha_\mu < \Phi_{min}$ яка дає $\frac{d}{dt}U^{sdd}(t) \leq -cr^2 \cdot (\Phi_{min} - \alpha_\mu) < 0$.

Доведення теореми 4.8 завершене.

Зауваження 4.10 . *Ми бачимо, що $S^{(5)}(x)$ залежить лише від змінних $x^{(4)}, x^{(5)}$ (4.25). З іншого боку, змінні $x^{(4)}, x^{(5)}$ присутні у $D^{(5)}(x)$ лише в одному члені $\left(\frac{\widehat{T^*} \cdot f(x^{(4)}, x^{(5)})}{x^{(2)} \cdot f(\widehat{T}, \widehat{V})} - 1\right)^2$. Важливо підкреслити, що цього одного члена у $D^{(5)}(x)$ недостатньо для обмеження (мажорування) $|S^{(5)}(x)|$, тобто*

$$|S^{(5)}(x)| \equiv \left| \alpha \cdot v\left(\frac{f(x^{(4)}, x^{(5)})}{f(\widehat{T}, \widehat{V})}\right) \right| \not\leq \left(\frac{\widehat{T^*} \cdot f(x^{(4)}, x^{(5)})}{x^{(2)} \cdot f(\widehat{T}, \widehat{V})} - 1\right)^2. \tag{4.27}$$

Сума всіх складових у (4.24) потрібна для мажорування $|S^{(5)}(x)|$. Аби це побачити можна розглянути та порівняти множини, на яких кожний з функціоналів обертається в нуль. Позначимо множини коренів $Z_{S^{(5)}}$ та Z_{rhs} (для правої частини (4.27)). Тоді ми бачимо, що $Z_{S^{(5)}}$ не є підмножиною Z_{rhs}. Більш того, у будь-якому околі точки $(x^{(2)}, x^{(4)}, x^{(5)}) = (\widehat{T^*}, \widehat{T}, \widehat{V}) \in \mathbb{R}^3$

існують точки, в яких права частина (4.27) обертається в нуль, а ліва частина є додатньою. Зрозуміло, що координати таких точок повинні задовільняти $f(x^{(4)},x^{(5)}) \neq f(\widehat{T},\widehat{V})$, $\widehat{T^*}\cdot f(x^{(4)},x^{(5)}) = x^{(2)}\cdot f(\widehat{T},\widehat{V})$.

4.2.6. Точка рівноваги за відсутності віруса. Частковий випадок загаювання, що залежить від стану. Випадок, коли розв'язок прямує до цієї точки рівноваги, відображає повне одужання від інфекційної хвороби. Цей стаціонарний розв'язок зображений в пункті (a) леми 4.6. Ми цікавимось частковою формою (4.17) ЗЗС та розглядаємо неперервні розв'язки, як в пункті 4.2.4.

Теорема 4.11 . *Нехай* $R_0 \le 1$. *Нехай ЗЗС* η *має форму (4.17) з неперервною функцією* $F:\mathbb{R}^2_+ \to [0,h]$, *що задовільняє* $(\mathbf{H1}_\eta)$ *(див. (4.7)) та*

$$|\eta(\varphi)-\eta(\varphi^0)| = |F(\varphi^1(0),\varphi^3(0)) - F(T^0,0)| \le c^0_\eta\left((\varphi^1(0)-T^0)^2 + (\varphi^3(0))^2\right). \tag{4.28}$$

Тоді стаціонарний розв'язок $\varphi^0 = E^0 = (\frac{\lambda}{d},0,0,0,0)$ *є локально асимптотично стійким. Для достатньо малих значень сталої* c^0_η, *стаціонарний розв'язок є глобально асимптотично стійким.*

Доведення теореми 4.11. Ми рухаємось як в пункті 4.2.4. Для зручності, ми позначаємо $T^0 \equiv \frac{\lambda}{d}$. Визначимо наступний функціонал О.Ляпунова $U^0(t)$, який був застосований у випадку сталого загаювання у [224], але ми використовуємо значення $t-\eta(\varphi^0)$ в якості нижньої границі інтегрування в останньому інтегралі.

$$U^0(t) \equiv \frac{T^0}{1+k_1T^0}\cdot v\left(\frac{T(t)}{T^0}\right) + e^{\omega h}T^*(t) + Ne^{-\omega h}V(t) + \int_{t-\eta(\varphi^0)}^{t} f(T(\theta),V(\theta))\,d\theta. \tag{4.29}$$

Тут, як раніше, $v(x)=x-1-\ln x$. Не важко перевірити (порівняйте частину $D^0(t)$ у [224])

$$\frac{d}{dt}U^0(t) = -D^0(t) + S^0(t),$$

де

$$D^0(t) = \frac{d(T(t)-T^0)^2}{T(t)(1+k_1T^0)} - (R_0-1)\frac{ce^{\omega h}V(t)(1+k_1T(t))}{N(1+k_1T(t)+k_2V(t))}$$

$$+\frac{ck_2e^{\omega h}}{N(1+k_1T(t)+k_2V(t))}V^2(t)+pe^{\omega h}Y(t)T^*(t)+\frac{qe^{\omega h}}{N}A(t)V(t),$$

та

$$S^0(t)\equiv f(T(t-\eta(u_t)),V(t-\eta(u_t)))-f(T(t-\eta(\varphi^0)),V(t-\eta(\varphi^0))). \quad (4.30)$$

Дивись також (D.8). Легко бачити, що $R_0\le 1$ дає $D^0(t)\ge 0$, але знак $S^0(t)$ може змінюватись. Залишок доведення (того, що $\frac{d}{dt}U^0(t)\le 0$) слідує, як в теоремі 4.7 вище. Це завершує доведення теореми 4.11.

4.2.7. Рівновага виснаженого імунітету. Загальний випадок. В цьому пункті ми покажемо, як техніка, що була розвинута у попередніх пунктах, може бути застосована до іншого важливого випадка - рівноваги виснаженого імунітету (4.3). Ця рівновага може також описувати випадок зриву або неактивації імунної відповіді. Цей стаціонарний розв'язок зображений в пункті (b) леми 4.6.

Теорема 4.12 . *Нехай $R_1\le 1<R_0$ та $R_2\le 1$. Припустимо, що ЗЗС $\eta: C\to[0,h]$ є неперервно диференційовним у μ-околі стаціонарного розв'язку виснаженого імунітету $\varphi^1\equiv E^1=(T_1,T_1^*,V_1,0,0)$ та задовільняє $(H1_\eta)$ (див. (4.7)). Тоді стаціонарний розв'язок φ^1 системи (4.3) є локально асимптотично стійким.*

Доведення теореми 4.12. Розглянемо наступну функцію О.Ляпунова $U^{sdd}_{ex}(t)$ (порівняйте з (4.20)), де останній інтеграл у $U^{sdd}_{ex}(t)$ нижче є залежним від стану.

$$U^{sdd}_{ex}(t)\equiv\left(T(t)-T_1-\int_{T_1}^{T(t)}\frac{f(T_1,V_1)}{f(\theta,V_1)}\,d\theta\right)e^{-\omega h}+T_1^*\cdot v\left(\frac{T^*(t)}{T_1^*}\right)+\frac{V_1}{N}\cdot v\left(\frac{V(t)}{V_1}\right)$$

$$+\frac{p}{\beta}\cdot Y(t)+\frac{q}{Ng}\cdot A(t)+\delta T_1^*\int_{t-\eta(u_t)}^{t}v\left(\frac{f(T(\theta),V(\theta))}{f(T_1,V_1)}\right)\,d\theta. \quad (4.31)$$

Тут, як раніше, $v(x)=x-1-\ln x$. Знайдемо похідну за часом $\frac{d}{dt}U^{sdd}_{ex}(t)$ вздовж розв'язку (ми також виправляємо деякі похибки (друкарські помилки), що були в тексті статті [224]).

$$\frac{d}{dt}U_{ex}^{sdd}(t) = \left(1 - \frac{f(T_1, V_1)}{f(T(t), V_1)}\right) e^{-\omega h} \left(\lambda - dT(t) - f(T(t), V(t))\right)$$

$$+ \left(1 - \frac{T_1^*}{T^*(t)}\right) \left(e^{-\omega h} f(T(t-\eta(u_t)), V(t-\eta(u_t))) - \delta T^*(t) - pY(t)T^*(t)\right)$$

$$+\frac{1}{N}\left(1 - \frac{V_1}{V(t)}\right) \left(N\delta T^*(t) - cV(t) - qA(t)V(t)\right)$$

$$+\frac{p}{\beta}\left(\beta T^*(t)Y(t) - \gamma Y(t)\right) + \frac{q}{Ng}\left(gA(t)V(t) - bA(t)\right)$$

$$+e^{-\omega h}\left[f(T(t), V(t)) - f(T(t-\eta(u_t)), V(t-\eta(u_t)))\right]$$

$$+\delta T_1^* \ln \frac{f(T(t-\eta(u_t)), V(t-\eta(u_t)))}{f(T(t), V(t))} + S_{ex}^{sdd}(t),$$

де

$$S_{ex}^{sdd}(t) \equiv -v\left(\frac{f(T(t-\eta(u_t)), V(t-\eta(u_t)))}{f(T_1, V_1)}\right) \cdot \frac{d}{dt}\eta(u_t). \tag{4.32}$$

Зараз, ми продовжуємо рутинні технічні розрахунки (розкриття дужок, групування подібних членів та скорочення деяких з них) та викорисовуємо рівності для координат сталого розв'язку $\lambda = dT_1 + f(T_1, V_1)$, $e^{-\omega h} = \delta T_1^* \cdot [f(T_1, V_1)]^{-1}$ та $N\delta T_1^* = cV_1$. Ми також використовуємо розрахунки, що є подібні до (D.5), (D.1) та розкладаємо логарифм на суму чотирьох членів, що подібні до (D.3). Ми не повторюємо всі деталі тут (бо це займає занадто багато місця).

Остаточно, ми отримуємо наступну похідну за часом вздовж розв'язку системи (4.3)

$$\frac{d}{dt}U_{ex}^{sdd}(t) = -D_{ex}^{sdd}(t) + S_{ex}^{sdd}(t),$$

де $S_{ex}^{sdd}(t)$ є визначеним у (4.32) та

$$D_{ex}^{sdd}(t) \equiv (T(t) - T_1)^2 \cdot \frac{e^{-\omega h} d(1 + k_2 V_1)}{T(t)(1 + k_1 T_1 + k_2 V_1)}$$

$$+\frac{p\gamma}{\beta}(R_1 - 1) \cdot Y(t) + \frac{qb}{Ng}(R_2 - 1) \cdot A(t)$$

$$+\delta T_1^* \left[v\left(\frac{T_1^*}{T^*(t)} \cdot \frac{f(T(t-\eta(u_t)), V(t-\eta(u_t)))}{f(T_1, V_1)}\right) + v\left(\frac{T^*(t) \cdot V_1}{T_1^* \cdot V(t)}\right)\right.$$

$$+v\left(\frac{V(t)}{V_1}\cdot\frac{f(T(t),V_1)}{f(T(t),V(t))}\right)+v\left(\frac{f(T_1,V_1)}{f(T(t),V_1)}\right)$$
$$\left.+\frac{(V(t)-V_1)^2\cdot k_2(1+k_1T(t))}{V_1(1+k_1T(t)+k_2V_1)(1+k_1T(t)+k_2V(t))}\right]. \tag{4.33}$$

ми зауважуємо, що деякі члени у $D^{sdd}_{ex}(t)$ та $D^{sdd}(t)$ (порівняйте (4.33), (4.23)) подібні, але використовують інші рівності, що з'єднують координати стаціонарних розв'язків $(T_1,T_1^*,V_1,0,0)$ та $(\widehat{T},\widehat{T^*},\widehat{V},\widehat{Y},\widehat{A})$. Ми бачимо, що умови $R_1\le 1<R_0$ та $R_2\le 1$ дають $D^{sdd}_{ex}(t)\ge 0$. Ми нагадаємо, що репродукційні числа R_0,R_1 та R_2 визначені раніше. Останок доведення (того, що $\frac{d}{dt}U^{sdd}_{ex}(t)\le 0$) наслідує кроки фінальної частини доведення теореми 4.8. Це завершує доведення теореми 4.12.

Зауваження 4.13 . *Ми розглянули різні умови на ЗЗС η. Головні умови є локальними. Цікаво відмітити, що умова (*$\mathbf{H1}_\eta$*) не є обмеженням для локальної поведінки у маленькому околі стаціонарних розв'язків E^1 та $\widehat{E}$.*

4.3. Загальна функція реакції. Неперервні розв'язки за ігноруючої умови. Основні властивості системи.

Ми додаємо до системи (4.3) початкові умови

$$u_0=\varphi\equiv(T_0,T_0^*,V_0,A_0,Y_0)\in C_+\equiv C_+[-h,0], \tag{4.34}$$

де $\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty), C_+\equiv C_+[-h,0]\equiv C([-h,0];\mathbb{R}^5_+)$.

Вводимо у розгляд множину

$$\Omega_C\equiv\Bigg\{\varphi\equiv(T_0,T_0^*,V_0,A_0,Y_0)\in C_+[-h,0],\quad 0\le T_0(\theta)\le\frac{\lambda}{d}\equiv T_{max},$$
$$0\le T_0^*(\theta)\le\frac{k\lambda}{dk_2\delta}e^{-\omega h},\quad 0\le V_0(\theta)\le\frac{Nk\lambda}{cdk_2}e^{-\omega h}\equiv V_{max},\ \theta\in[-h,0],$$
$$0\le T_0^*(\theta)+\frac{p}{\beta}Y_0(\theta)\le\frac{k^2\lambda^2e^{-2\omega h}}{d^2ck_2\min\{\delta;\gamma\}},\quad 0\le V_0(\theta)+\frac{q}{g}A_0(\theta)\le\frac{Nk\lambda\, e^{-\omega h}}{dk_2\min\{c;b\}}\Bigg\}. \tag{4.35}$$

Нехай нелінійна функція $f : [0, T_{max}] \times [0, V_{max}] \to \mathbb{R}$ є *неперервною* та задовільняє

$$(\mathbf{H1_f})\ f(0, V) = f(T, 0) = 0;\ f \text{ строго зростаюча за обома координатами.} \tag{4.36}$$

Тут сталі T_{max}, V_{max} визначені у (4.35). Нашою головною умовою на ЗЗС η є умова **(H)** (див. с.127), що запропонована у [159].

Першим результатом є наступна

Теорема 4.14 . *Нехай $\eta : C \to [0, h]$ (ЗЗС) та f є неперервними. Тоді*

(i) для кожної початкової функції $\varphi \in C$ існують `неперервні` *розв'язки задачі (4.3), (4.34).*

(ii) Якщо додатково, η задовільняє **(H)** *(див. с.127) та f задовільняє* $(\mathbf{H1_f})$, *тоді для кожної початкової функції $\varphi \equiv (T_0, T_0^*, V_0, A_0, Y_0) \in \Omega_C$, задача (4.3), (4.34) має єдиний розв'язок. Цей розв'язок неперервно залежить від початкової функції та задовільняє $u_t \equiv (T_t, T_t^*, V_t, A_t, Y_t) \in \Omega_C, \quad t \geq 0$.*

Зауваження 4.15 *В роботі [167], була використана умова* $(\mathbf{H1}_\eta)$ *на ЗЗС (див. (4.7)). В цьому пункті ми не потребуємо такої умови на загаювання отже загаювання може дорівнювати нулю (на якійсь підмножині Ω_C).*

Доведення теореми 4.14. (i) Існування неперервних розв'язків є наслідком неперервності правої частини системи (4.3) та класичних результатів для диференціальних рівнянь із загаюванням [30, 76].

(ii) Доведення слідує шляху [167, теореми 2]. Головна суттєва відмінність полягає в тому, що ми можемо використовувати властивість *квазі-додатності* правої частини (4.3) (для сталого загаювання дивись, наприклад, [193, теор. 2.1, с.81]). Ми підкреслюємо, що у випадку *ЗЗС*, ми не можемо безпосередньо застосувати [193, теорему 2.1, с.81] тому, що вона спирається на властивість Липшиця правої частини системи, якої *немає* у випадку системи (4.3). Натомість, ми застосовуємо відповідне узагальнення для ЗЗС [163], яке спирається на умову **(H)** (див. с.127) Це суттєво спрощує доведення (порівняйте з [167, теорема 2]). Верхні межі для всіх п'яти координат у (4.35) випливають з простого варіанту леми Гронуола 4.3. Це дає інваріантність множини Ω_C (4.35). Ми не повторюємо деталі тут (можна легко порівняти та знайти відмінності з [167, теоремою 2])). Неперервна залежність від початкової функції випливає з умови **(H)** (див. с.127) як у [159]. Доведення завершено.

Таким чином, ми показали, що задача (4.3), (4.34) є коректно поставленою у $\Omega_C \subset C$ у сенсі Ж.Адамара (Hadamard).

4.3.1. Стаціонарні розв'язки. Ми шукаємо нетривіальні стаціонарні розв'язки (випадки хвороби) для (4.3). Розглянемо нашу систему з $u(t) = u(t - \eta(u_t)) = \widehat{u}$ та позначимо координати деякого стаціонарного розв'язку $(\widehat{T}, \widehat{T^*}, \widehat{V}, \widehat{Y}, \widehat{A}) = \widehat{u} \equiv \widehat{\varphi}(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$.

Оскільки стаціонарні розв'язки системи (4.3) не залежать від типу загаювання (сталe чи залежне від стану) ми маємо (див., наприклад, [224, 167])

$$\begin{cases} 0 = \lambda - d\widehat{T} - f(\widehat{T}, \widehat{V}), \qquad 0 = e^{-\omega h} f(\widehat{T}, \widehat{V}) - \delta\widehat{T^*} - p\widehat{Y}\widehat{T^*}, \\ 0 = N\delta\widehat{T^*} - c\widehat{V} - q\widehat{A}\widehat{V}, \qquad 0 = \beta\widehat{T^*}\widehat{Y} - \gamma\widehat{Y}, \qquad 0 = g\widehat{A}\widehat{V} - b\widehat{A}. \end{cases} \tag{4.37}$$

Наш випадок відрізняється від [224, 167] більш загальним класом f.

Останні два рівняння у (4.37) дають $\widehat{T^*} = \frac{\gamma}{\beta}, \widehat{V} = \frac{b}{g}$. Це та третє рівняння дають $\widehat{A} = \frac{N\delta\gamma g - \beta cb}{\beta qb}$. Додатність $\widehat{A}$ випливає з умови, що сталі системи (4.3) задовільняють

$$(\mathbf{H_v2}) \qquad N\delta\gamma g > \beta cb. \tag{4.38}$$

Підстановка значення $\widehat{V} = \frac{b}{g}$ в перше рівняння (4.37) дає

$$\lambda - d\widehat{T} = f\left(\widehat{T}, \frac{b}{g}\right). \tag{4.39}$$

оскільки $f(\cdot, \frac{b}{g})$ є строго зростаючою за першою змінною, неперервною $f(0, \frac{b}{g}) = 0$, легко бачити, що останнє рівняння (4.39) має єдиний розв'язок $\widehat{T} \in (0, \frac{b}{g})$. Цей єдиний *додатній* корінь ми позначимо як $\widehat{T}$.

Перші два рівняння у (4.37) дають (нагадаємо, що $\widehat{T^*}$ вже відоме) $\widehat{Y} = \frac{\lambda - d\widehat{T} - e^{\omega h}\delta\widehat{T^*}}{e^{\omega h}p\widehat{T^*}}$. Додатність $\widehat{Y}$ випливає з наступної умови

$$(\mathbf{H_v3}) \qquad \lambda > d\widehat{T} + \delta\gamma\beta^{-1}e^{\omega h}, \tag{4.40}$$

де $\widehat{T}$ є єдиний *додатній* корінь (4.39).

Ми підкреслюємо, що з біологічної точки зору, $(\mathbf{H_v2})$ та $(\mathbf{H_v3})$ є стандартними умовами на репродукційні числа, які ми навели тут у короткому вигляді. Ми можемо підсумувати розрахунки, що наведені вище в наступній

Твердження 4.16 *(порівн. [167, лема 7]). Нехай умови* $(\mathbf{H_v2})$ *та* $(\mathbf{H_v3})$ *задовільняються (див. (4.38), (4.40)) та f задовільняє* $(\mathbf{H1_f})$. *Тоді система (4.37) має єдиний розв'язок* $(\widehat{T}, \widehat{T^*}, \widehat{V}, \widehat{Y}, \widehat{A})$ *(єдиний стаціонарний розв'язок системи (4.3)). Всі координати додатні, $\widehat{T}$ є єдиний розв'язок додатній корінь рівняння (4.39) та координати задовільняють*

$$\begin{cases} \widehat{T^*} = \frac{\gamma}{\beta}, \quad \widehat{V} = \frac{b}{g}, \quad \widehat{A} = \frac{N\delta\gamma g - \beta cb}{\beta qb}, \quad \widehat{Y} = \frac{\lambda - d\widehat{T} - e^{\omega h}\delta\widehat{T^*}}{e^{\omega h} p \widehat{T^*}}, \\ N\delta\widehat{T^*} = \widehat{V}(c + q\widehat{A}), \quad \lambda = d\widehat{T} + f(\widehat{T}, \widehat{V}), \quad (\delta + p\widehat{Y})\widehat{T^*} e^{\omega h} = f(\widehat{T}, \widehat{V}). \end{cases} \tag{4.41}$$

Ми будемо використовувати ці рівняння, що дають зв'язок між координатами стаціонарного розв'язку, під час дослідження властивостей стійкості (порівняйте (4.37)).

4.3.2. Властивості стійкості системи. Ми нагадуємо, що у дослідженні диференціальних рівнянь з невід'ємними змінними, функція Вольтерра $v(x) = x - 1 - \ln x \ : \ (0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ (див. с.277) та її властивість (4.16) відіграють важливу роль у побудові функціоналів О.М.Ляпунова. Як раніше, ми позначаємо $u(t) = (T(t), T^*(t), V(t), Y(t), A(t))$ та $\widehat{\varphi} = (\widehat{T}, \widehat{T^*}, \widehat{V}, \widehat{Y}, \widehat{A})$ стаціонарний розв'язок системи (4.3).

Нехай, в околі $(\widehat{T}, \widehat{V})$, f задовільняє

$$(\mathbf{H2_f}) \qquad 0 < \frac{f(T,V) - f(T,\widehat{V})}{V - \widehat{V}} < \frac{f(T,\widehat{V})}{\widehat{V}} \quad \text{для } (T,V) \in U_\mu(\widehat{T}, \widehat{V}). \tag{4.42}$$

Зауваження 4.17 *Легко побачити геометричний зміст умови* $(\mathbf{H2_f})$. *По-перше, ми наголосимо, що перші координати f у (4.42) є однаковими. Для будь-якого фіксованого значення першої координати ми можемо розглянути*

$f^T(V) \equiv f(T,V)$ та її графік. У випадку диференційовної функції, $(\mathbf{H2_f})$ *дає $0 < \frac{d}{dV} f^T(V) < f^T(\widehat{V})/\widehat{V}$. В нашому дослідженні ми* **не** *вимагаємо диференційовність функції f. Більше обговорень та прикладів у пункті 4.3.3.*

Наступна властивість функціоналу η базується на властивості **(H)** (див. с.127). Розглянемо довільну $\varphi \in C$ та її *довільне* продовження $\varphi^{ext}(s), s \in [-h, \eta_{ign}]$ зі сталою $\eta_{ign} > 0$, що визначена у **(H)**. Завдяки властивості (**H**), ми можемо визначити допоміжну функцію $\eta^{\varphi}(t) \equiv \eta(\varphi_t^{ext})$ для $t \in [0, \eta_{ign}]$. Оскільки обидві η та φ є неперервними, ми бачимо, що $\eta^{\varphi} \in C[0, \eta_{ign}]$. Нас цікавить (права) похідна η^{φ} в нулі та її властивості. Зараз ми готові надати нашу наступну локальну умову (властивість) загаювання η.

$(\mathbf{H2}_\eta)$ *Існує μ-окіл стаціонарної точки $\widehat{\varphi}$ такий, що (для будь-якої $\varphi \in C$, яка задовільняє $||\varphi - \widehat{\varphi}||_C < \mu$) виконуються наступні дві властивості*

a) $\exists\, \eta'_+(\varphi) \equiv \lim\limits_{\tau \to 0+} \frac{1}{\tau}\left(\eta(\varphi_\tau^{ext}) - \eta(\varphi)\right) = \lim\limits_{\tau \to 0+} \frac{1}{\tau}\left(\eta^{\varphi}(\tau)) - \eta(\varphi)\right) \in \mathbb{R};$

b) $\eta'_+(\cdot)$ *є неперервне у $\widehat{\varphi}$.*

Зауваження 4.18 *Легко бачити із визначення η'_+, що $\eta'_+(\widehat{\varphi}) = 0$. Таким чином властивість b) у $(\mathbf{H2}_\eta)$ є еквівалентною*

$$|\eta'_+(\varphi)| \leq \alpha_\mu \text{ коли } ||\varphi||_C < \mu \text{ з } \alpha_\mu \to 0. \tag{4.43}$$

Ми також відмічаємо, що існування $\eta'_+(\varphi) \in \mathbb{R}$ не вимагає диференційовність φ (див. пункт 4.3.3 для прикладів).

Нашим результатом є наступна

Теорема 4.19 . *Нехай умови* $(\mathbf{H_v 2})$ *та* $(\mathbf{H_v 3})$ *виконані (див. (4.38), (4.40)). Нехай нелінійність f задовільняє* $(\mathbf{H1_f})$ *та* $(\mathbf{H2_f})$ *а також ЗЗС $\eta : C \to [0, h]$ задовільняє* **(H)** *(див. с.127) та* $(\mathbf{H2}_\eta)$*. Тоді стаціонарний розв'язок $\widehat{\varphi} = (\widehat{T}, \widehat{T^*}, \widehat{V}, \widehat{Y}, \widehat{A})$ системи (4.3) є локально асимптотично стійким.*

Доведення теореми 4.19 є достатньо технічним та має великий об'єм (див. [166]) тож ми не наводимо його тут.

4.3.3. Приклади загаювання, що залежить від стану та нелінійностей f. 1. Поперше, розглянемо загаювання наступної простої форми

$$\eta(\varphi) = \int_{-h}^{-\eta_{ign}} \xi(\varphi(\theta))\, d\theta, \qquad \varphi \in C \tag{4.44}$$

з локально липшицевою ξ та $\eta_{ign} > 0$. Можна перевірити, що ЗЗС (4.44) є неперервним та задовільняє (**H**). Для перевірки властивості (4.43) (див. $(H2_\eta)$) ми обраховуємо

$$\frac{d}{dt}\eta(u_t) = \frac{d}{dt}\int_{-h}^{-\eta_{ign}} \xi(u(t+\theta))\, d\theta = \frac{d}{dt}\int_{t-h}^{t-\eta_{ign}} \xi(u(s))ds = \xi(u(t-\eta_{ign}))-\xi(u(t-h)).$$

Таким чином, у μ-околі стаціонарного розв'язку $\hat{u}$, маємо

$$\left|\frac{d}{dt}\eta(u_t)\right| \le |\xi(u(t-\eta_{ign})) - \xi(u(t-h))| \le 2\mu\, L_{\xi,\mu} \equiv \alpha_\mu \to 0 \quad \text{коли } \mu \to 0.$$

Тут $L_{\xi,\mu}$ є сталою Липшиця для ξ. Отже, загаювання (4.44) задовільняє всім необхідним умовам.

Легко бачити, що більш загальні форми загаювання можуть бути використані. Наприклад,

$$\eta(\varphi) = \rho\left(\int_{-h}^{-\eta_{ign}} \xi(\varphi(\theta))\kappa(\theta)\, d\theta\right), \qquad \varphi \in C, \quad \kappa \in C([-h, -\eta_{ign}]; \mathbb{R})$$

з диференційовною $\rho : \mathbb{R} \to [0, h]$. Приклад (4.44) є частковим випадком із $\rho(s) \equiv s$ та $\kappa(s) \equiv 1$.

2. Можна перевірити, що нелінійність типу Д'Анжеліса-Беддінгтона (the DeAngelis-Beddington functional response [39, 68]), що має форму $f(T, V) = \frac{kTV}{1+k_1T+k_2V}$, зі сталими $k, k_1 \ge 0, k_2 > 0$, задовільняє умові (4.42) глобально. Ми також відмічаємо, що клас нелінійностей Д'Анжеліса-Беддінгтона включає, як підклас ($k_1 = 0$) нелінійності насиченого рівня захворюваності (the *saturated incidence* rate) $f(T, V) = \frac{kTV}{1+k_2V}$. В наших дослідженнях ми використовуємо властивість (4.42) лише у малому околі $(\widehat{T}, \widehat{V})$.

3. Іншим прикладом нелінійностей є клас Кроулі-Мартіна (the Crowley-Martin incidence rate) $f(T, V) = \frac{kTV}{(1+k_1T)(1+k_2V)}$, з $k \ge 0, k_1, k_2 > 0$ (див., наприклад [221]).

4.4. Висновки до розділу 4

В наших дослідженнях запропонований досить загальний підхід до вивчення математичних моделей вірусних захворювань із (внутрішньоклітинним) загаюванням, що залежить від стану системи. Запропоновані в роботі умови на загаювання гарантують коректну розв'язність та локальну стійкість стаціонарних розв'язків. Починаємо з випадку функціональної реакції Д'Анжеліса-Беддінгтона та продовжуємо з загальною нелінійною швидкістю зараження (яка включає попередній випадок Д'Анжеліса-Беддінгтона, а також клас нелінійностей Кроулі-Мартіна). Ми досліджуємо випадки неперервно-диференційовних та просто неперервних розв'язків. Останній є адекватний преривчастій зміні параметрів через, наприклад, введення ліків. Метод функціоналів О.М.Ляпунова використовується для аналізу стійкості внутрішньої рівноваги інфекції, яка описує випадок активації імунних реакцій за допомогою CTL та антитіл. Інші точки рівноваги також досліджені. Для цього запропонована модифікація функціоналу О.М.Ляпунова з ЗЗС.

Оскільки будь-яка математична модель є спрощенням реального процесу, багато важливих біологічних факторів повинні бути враховані в більш складних системах. Життєвий цикл конкретних клітин організму та їх взаємодія з вірусними частинками можуть суттєво відрізнятись при розгляді різних органів. Подальші умови на функціонал загаювання можуть природньо виникати при дослідженнях конкретних вірусних захворювань із урахуваннями біологічних характеристик цільового органу, його клітин та типу вірусу.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [166, 167, 168].

РОЗДІЛ 5. МОДЕЛЬ ВІРУСНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ, ЩО ОПИСУЄТЬСЯ СИСТЕМОЮ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ІЗ ЗАГАЮВАННЯМ, ЩО ЗАЛЕЖИТЬ ВІД СТАНУ

В цій частині ми пропонуємо та досліджуємо модель реакції-дифузії для динаміки вірусних захворювань із урахуванням загаювання, що залежить від стану та широкого класу нелінійностей, що моделюють передачу вірусу. Нас цікавлять класичні розв'язки з липшицевими за часом початковими функціями, які адекватно описують можливі розривні зміни параметрів системи, наприклад, у випадках лікування хвороби. Теорія стійкості О.М.Ляпунова використовується для дослідження внутришньої інфекційної рівноваги, що відповідає хронічному перебігу хвороби.

5.1. Постановка задачі.

Ми розглянемо спочатку спрощення системи (4.3), в якій не береться до уваги імунні відповіді організму. Отже в системі (4.3) маємо $A \equiv 0, Y \equiv 0$:

$$\begin{cases} \dot{T}(t) = \lambda - dT(t) - f(T(t), V(t)), \\ \dot{T}^*(t) = e^{-\omega h} f(T(t - \eta(u_t)), V(t - \eta(u_t))) - \delta T^*(t), \\ \dot{V}(t) = N\delta T^*(t) - cV(t). \end{cases} \tag{5.1}$$

Тут $u(t) = (T(t), T^*(t), V(t))$. Система (5.1) є частковим випадком систем, що досліджувалися у [167, 166]. Ця система ЗДР формулюється, припускаючи, що клітини органу-мішені не рухаються та дифузія вільних вірусних частинок є дуже швидкою, тож вони добре перемішані аби розглядати рівномірну (однакову) щільність по всьому органу. Подібна ситуація у випадку однакової щільності клітин і вірусів розглядалася у випадку ВІЛ інфекції та інших, що інфікують клітини крові. Для того аби розглядати більш реалістичний нерівномірний випадок, ми вводимо просторову координату $x \in \Omega$ та дозволяємо невідомим функціям (координатам розв'язку) залежати від $x \in \Omega$, тобто $T(t,x), T^*(t,x), V(t,x)$. Тепер $T(t,x), T^*(t,x), V(t,x)$ представляють щільності здорових клітин, інфікованих клітин та вільних вірусних частинок в просторовій точці $x \in \Omega$ в час t.

Розглянемо зв'язну обмежену область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ із гладкою межею $\partial\Omega$. Ми розглядаємо систему РЧП

$$\begin{cases} \dot{T}(t,x) = \lambda - dT(t,x) - f(T(t,x),V(t,x)) + d^1\Delta T(t,x), \\ \dot{T}^*(t,x) = e^{-\omega h} f(T(t-\eta(u_t),x),V(t-\eta(u_t),x)) - \delta T^*(t,x) + d^2\Delta T^*(t,x), \\ \dot{V}(t,x) = N\delta T^*(t,x) - cV(t,x) + d^3\Delta V(t,x). \end{cases} \tag{5.2}$$

Умови на межі є типу Неймана для відповідних невідомих якщо $d^i \neq 0$, тобто $\frac{\partial T(t,x)}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$, якщо $d^1 \neq 0$ та подібно для $T^*(t,x)$ та $V(t,x)$. Тут $\frac{\partial}{\partial n}$ є похідна в напрямку зовнішньої нормалі на $\partial\Omega$. У випадку $d^i = 0$, умови на межі не потрібні для відповідної невідомої.

Існує достатньо багато робіт, де вивчається випадок $d^1 = d^2 = 0, d^3 > 0$ (дивись, наприклад [213, 210, 214] для моделей без загаювання та [129, 101] зі *сталим* загаюванням; дивись також посилання в цих роботах, а також [41]). Розглянемо випадок, коли інфекція розповсюджується у конкретному органі, наприклад, у печінці у випадках вірусних гепатитів Б та С (HBV, HCV). В таких ситуаціях просторова область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ репрезентує орган. Умови Неймана на межі області означають, що вільні вірусні частинки не залишають орган. Але це зовсім не відповідає біологічній ситуації оскільки вірусні частинки циркулюють разом із потоком крові з та до органу (наприклад, печінці). Для математичної моделі, аби включити цей випадок у розгляд потрібно покласти $d^3 = 0$ та відмовитись від крайових умов для функції V. Враховуючи високу швидкість потоку крові, це означатиме, що вільні вірусні частинки є добре перемішані. Ще більш цікавим є випадок $d^i > 0, i = 1,2, d^3 = 0$. Наскільки нам відомо, цей випадок не досліджувався раніше. Випадок $d^2 > 0$ може бути використаний для врахування типу передачі вірусу 'клітина-клітина' (the cell-to-cell transmission) при якому вірусні частинки перетинають мембрани сусідніх клітин (дивись [48] для подальшого обговорення та посилань; порівняй з [214]). Інфекція розповсюджується подібно дифузії до сусідніх клітин в околі інфікованої клітини. Випадок $d^1 > 0$ може віддзеркалювати природнє ділення здорових клітин для того, аби зайняти простір, що раніше був зайнятий інфікованими клітинами (після смерті останніх). У випадках $d^1 > 0, d^2 > 0$, клітини організму (як здорові так і інфіковані) не полишають орган, тож умови Неймана на межі області є цілком природніми.

Нас цікавлять класичні розв'язки з липшицевими за часом початковими функціями. Цей тип розв'язків може бути використаним для ситуацій, коли параметри системи змінюються розривним чином, наприклад, застовування ліків (більше обговорень та посилань у [166]). Головною мотивацією тут є ситуація (дивись, наприклад, [192, 143]), коли ефективніть ліків спадає стрибками. Див. обговорення в попередній частині.

Оскільки *загаювання* є центром уваги наших досліджень, було б цікаво навести приклади ЗЗС η та обговорити структуру η з біологічної точки зору. На жаль, до цього часу, біологічна сторона вірусної динаміки зрозуміла не повністю. Навіть сучасні дослідження *in vitro* не надають достатньо інформації. Дослідження *In vivo* є сут'єво більш складними, та досі не існує технічних (біологічних, медичних) засобів для моніторингу в реальному часі необхідних характеристик вірусної динаміки. В такій ситуації ми пропонуємо достатньо загальний клас ЗЗС (див. (5.25), (5.26) нижче). Загаювання вигляду (5.25), (5.26) беруть до уваги всю передісторію u_t шляхом інтегрування розв'язка на всьому сегменті $[t-h, t]$.

5.2. Основні властивості моделі

Визначимо наступний лінійний оператор $-\mathcal{A}^0 = diag\,(d^1\Delta, d^2\Delta, d^3\Delta)$ у просторі $C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ з $D(\mathcal{A}^0) \equiv D(d^1\Delta) \times D(d^2\Delta) \times D(d^3\Delta)$. Тут, для $d^i \neq 0$ ми покладаємо $D(d^i\Delta) \equiv \{v \in C^2(\overline{\Omega}) : \frac{\partial v(x)}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0\}$ та $D(d^j\Delta) \equiv C(\overline{\Omega})$ для $d^j = 0$. Ми опускаємо просторову координату x, задля короткості, для змінної $u(t) = (T(t), T^*(t), V(t)) \in X \equiv [C(\overline{\Omega})]^3 \equiv C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$. Добре відомо, що замкнення $-\mathcal{A}$ (у X) оператора $-\mathcal{A}^0$ породжує C_0-півгрупу $e^{-\mathcal{A}t}$ на X яка є аналітичною [134, с.5]. Позначаємо простір неперервних функцій через $C \equiv C([-h,0];X)$ та розглядаємо його з sup-нормою $||\psi||_C \equiv \max_{\theta\in[-h,0]} ||\psi(\theta)||_X$.

Ми записуємо систему (5.2) в абстрактній формі

$$\frac{d}{dt}u(t) + \mathcal{A}u(t) = F(u_t), \qquad t > 0. \tag{5.3}$$

Нелінійне неперервне відображення $F : C \to X$ визначаємо як

$$F(\varphi) = F(\varphi)(x) = \left(\begin{array}{l} \lambda - d\varphi^1(t,x) - f(\varphi^1(t,x), \varphi^3(t,x)) \\ e^{-\omega h} f(\varphi^1(-\eta(\varphi),x), \varphi^3(-\eta(\varphi),x)) - \delta\varphi^2(t,x) \\ N\delta\varphi^2(t,x) - c\varphi^3(t,x) \end{array} \right). \tag{5.4}$$

Тут $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) \in C$. Відображення F *не* є липшицевим на просторі C, що є типовою ситуацією для відображень, що включають зосереджені ЗЗС (див. огляд [98] для випадка звичайних рівнянь та роботи [156, 159, 160, 65] для випадку рівнянь у частинних похідних).

Нам потрібні початкові дані $u(\theta,x) = \varphi(\theta,x) = (T(\theta,x), T^*(\theta,x), V(\theta,x))$, $\theta \in [-h,0]$ для задачі (5.3)

$$\varphi \in Lip([-h,0];X) \equiv \left\{ \psi \in C : \sup_{s\neq t} \frac{||\psi(s) - \psi(t)||_X}{|s-t|} < \infty \right\}, \quad \varphi(0) \in D(\mathcal{A}). \tag{5.5}$$

В наших дослідженнях ми використовуємо стандартне визначення (див. [144, визн. 2.3, с.106] та [144, визн. 2.1, с.105])

Визначення 5.1 *Функція $u \in C([-h,T];X)$ зветься* `слабким розв'язком` *(mild solution) на $[-h,T)$ для початкової задачі (5.3), (5.5) якщо вона задовільняє (5.5) та*

$$u(t) = e^{-\mathcal{A}t}\varphi(0) + \int_0^t e^{-\mathcal{A}(t-s)} F(u_s)\, ds, \quad t \in [0,T). \tag{5.6}$$

Функція $u \in C([-h,T);X) \bigcap C^1((0,T);X)$ називається `класичним розв'язком` *на $[-h,T)$ для початкової задачі (5.3), (5.5) якщо вона задовільняє (5.5), $u(t) \in D(A)$ для $0 < t < T$ та (5.3) виконується на $(0,T)$.*

Припускаємо, що нелінійна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є липшицевою та задовільняє

$$(\mathbf{Hf_1}) \quad \text{існує } \mu > 0 \text{ таке, що } |f(T,V)| \le \mu |T| \text{ для всіх } T, V \in \mathbb{R}, \tag{5.7}$$

Маємо наступний результат

Твердження 5.2 *Нехай нелінійна функція f є липшицевою та задовільняє* $(\mathbf{Hf_1})$ *(див. (5.7)), ЗЗС $\eta : C \to [0,h]$ є локально липшицевим. Тоді початкова задача (5.3), (5.5) має єдиний класичний розв'язок, який є глобальним у часі, тобто визначений для всіх $t \ge 0$.*

Доведення твердження 5.2. Ми починаємо з дослідження слабких розв'язків (mild solutions). Оскільки півгрупа, що породжується лінійною частиною $-\mathcal{A}$, не обов'язково компактна (у випадках, коли хоча б одна стала $d^i \neq 0$), див., наприклад [134], ми не можемо скористатись результатами [156, 159, 160, 65]. З іншого боку, як відмічалось вище, нелінійність F не є липшицевою на просторі C, отже ми не можемо напряму використати результати існування з роботи [134]. Більш того, узагальнення, що наведено у [163] також не може бути застосовано до нашого випадку оскільки ми не вимагаємо виконання ігноруючої умови для ЗЗС (див. більше деталей у [159, 162, 163]). Разом з тим, звуження класу початкових функцій φ, що надається у (5.5), надає можливість довести існування єдиного розв'язку (mild solution) початкової задачі (5.2), (5.5) за допомогою стандартного методу, який базується на теоремі Банаха про нерухому точку (у повному метричному просторі) подібно до випадку звичайних диференціальних рівнянь. Ми наведемо лише основні кроки доведення. По-перше, ми розглянемо наступне продовження функції $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t)$ для $t \in [-h, 0]$ та $\bar{\varphi}(t) = e^{-\mathcal{A}t}\varphi(0)$ для $t \ge 0$. Далі, ми робимо заміну змінної $u(t) = \bar{\varphi}(t) + y(t)$ та розглядаємо повний метричний простір $A(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \{y \in C([-h, \alpha]; X), y_0 \equiv 0, \max_{t \in [0,\alpha]} ||y(t)||_X \le \beta, \sup_{s \neq t} ||y(s) - y(t)||_X \cdot |s-t|^{-1} \le \gamma\}$, який споряджений метрикою простору неперервних функцій. Оператор $\mathcal{F} : A(\alpha, \beta, \gamma) \to C([-h, \alpha]; X)$ визначений наступним шляхом $\mathcal{F}(y)(t) \equiv 0$ для $t \in [-h, 0]$ та $\mathcal{F}(y)(t) \equiv \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-\tau)} F(\bar{\varphi}_\tau + y_\tau)\, d\tau$ для $t \in$

$(0,\alpha]$. Неважко перевірити, що нелінійне відображення F, що визначене у (5.4), задовільняє (дивись оцінку $|f(T,V)| \le \mu|T|$ у $(\mathbf{Hf_1})$) $||F(\psi)||_X \le n_1 + n_2||\psi||_C$ та є локально *майже липшицевим* на $A(\alpha,\beta,\gamma)$ відповідно до термінології роботи [126]. Останнє означає, що $||F(\psi^1) - F(\psi^2)||_X \le L_F(\gamma)||\psi^1 - \psi^2||_C$. Стандартні розрахунки показують, що оператор $\mathcal{F}$ відображає $A(\alpha,\beta,\gamma)$ в себе за умови, що α,β,γ задовільняють $\alpha(n_1+n_2(||\varphi||+\beta)) \le \beta, n_1+n_2\beta \le \gamma$. Додаткова умова $\alpha L_F(\gamma) < 1$ гарантує властивість стискання $\mathcal{F}$. Класична теорема Банаха про нерухому точку дає існування єдиної нерухомої точки $\hat{y}$ та, як наслідок, єдиного слабкого розв'язку (mild solution) $u = \bar{\varphi} + \hat{y}$. Лінійне обмеження росту для F дає глобальне продовження слабкого розв'язку.

Нашим наступним кроком ми покажемо, що кожен слабкий розв'язок (mild solution) є насправді класичним. Зафіксуємо будь який слабкий розв'язок u для (5.3), (5.5) та визначимо $g(t) \equiv F(u_t), t \ge 0$. Для будь якого $t^0 > 0$, функція g є неперервною на $[0,t^0]$ оскільки F та u є неперервними. Ми відмічаємо, що за побудовою, розв'язок є липшицевим за часом на $[0,t^0]$ (див. також обмеження у (5.5)). Таким чином, $||g(t)-g(s)|| = ||F(u_t)-F(u_s)|| \le L_F \max_{\theta\in[-h,0]} ||u(t+\theta)-u(s+\theta)|| \le L_F L_u^{[0,t^0]} \cdot |t-s|$. Тут ми використовуємо властивість *майже липшицевості* для F. Тепер ми розглянемо наступну початкову задачу (без загаювання)

$$\frac{dv(t)}{dt} + \mathcal{A}v(t) = g(t), \quad v(0) = x \in X, \tag{5.8}$$

яка має єдиний розв'язок. Розв'язок задачі (5.8) є $v = u$ у випадку $x = u(0)$.

Ми нагадаємо, що C_0-півгрупа $e^{-\mathcal{A}t}$ є аналітичною на X [134, с.5]. Таким чином теорема 3.5 [144, с.114] дає, що слабкий розв'язок (mild solution) (для (5.8) і, як наслідок, для (5.3), (5.5)) є класичним для $t \ge 0$. Доведення твердження 5.2 є завершеним.

Вводимо множину (порівняйте з (5.5))

$$\Omega_{Lip} \equiv \Big\{\varphi = (\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3) \in Lip([-h,0];X)) \subset C,\ \varphi(0) \in D(\mathcal{A}) :\ 0 \le \varphi^1(\theta) \le \frac{\lambda}{d},$$

$$0 \le \varphi^2(\theta) \le \frac{\lambda\mu}{d\delta}e^{-\omega h}, \quad 0 \le \varphi^3(\theta) \le \frac{N\lambda\mu}{dc}e^{-\omega h}, \quad \theta \in [-h,0]\Big\}, \tag{5.9}$$

де μ є визначеним у (Hf_1) та всі нерівності виконуються поточково відносно $x \in \overline{\Omega}$.

Нам знадобляться подальші умови (які включають (Hf_1)) на липшицеву функцію f:

$$(\mathbf{Hf_1}+) \quad \begin{cases} f(T,0) = f(0,V) = 0, \quad \text{та} \quad f(T,V) > 0 \text{ для всіх } T > 0, V > 0; \\ f \text{є строго зростаюча за обома координатами для всіх} T > 0, V > 0; \\ \text{існує } \mu > 0 \text{ таке, що } |f(T,V)| \leq \mu |T| \text{ для всіх } T, V \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.10}$$

Маємо наступний результат

Твердження 5.3 *Нехай нелінійна функція f задовільняє* $(\mathbf{Hf_1}+)$ *(див. (5.10)), ЗЗС $\eta : C \to [0,h]$ є локально липшицевим. Тоді множина Ω_{Lip} є інваріантною, тобто для кожного $\varphi \in \Omega_{Lip}$, існує єдиний розв'язок задачі (5.3), (5.5), який задовільняє $u_t \in \Omega_{Lip}$ для всіх $t \geq 0$.*

Доведення твердження 5.3. Існування та єдиність розв'язку доведені у твердженні 5.2. Доведення інваріантності слідує результатам інваріантності у [134] з використанням властивості майже липшивості нелінійності F. Оцінки для субтангенціальної умови (subtangential condition) є такими, як у випадку сталого загаювання, див, наприклад [129, теорема 2.2]. Ми не повторюємо це тут. Важливо підкреслити, що розв'язки є класичними для всіх $t \geq 0$ (а не для $t \geq h$ як це у випадку суто неперервних початкових функцій $\varphi \in C$). Доведення твердження 5.3 є завершеним.

5.2.1. Стаціонарні розв'язки. Нас цікавлять стаціонарні розв'язки задачі (5.2). Під такими розв'язками ми розуміємо розв'язки $\widehat{u}$, що не залежать від часу, але, у загальному випадку, можуть залежати від просторових координат $x \in \overline{\Omega}$. Розглянемо систему (5.2) з $u(t) = u(t - \eta(u_t)) = \widehat{u}$ та позначимо координати деякого стаціонарного розв'яку $(\widehat{T}, \widehat{T^*}, \widehat{V}) = \widehat{u} \equiv \widehat{\varphi}(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$. Оскільки стаціонарні розв'язки задачі (5.2) не залежать від типу загаювання (ЗЗС або стале) ми маємо (див., наприклад [129])

$$0 = \lambda - d\widehat{T} - f(\widehat{T}, \widehat{V}), \qquad 0 = e^{-\omega h} f(\widehat{T}, \widehat{V}) - \delta \widehat{T^*}, \quad 0 = N\delta \widehat{T^*} - c\widehat{V}. \tag{5.11}$$

Рівняння виконуються поточково відносно $x \in \overline{\Omega}$.

Легко бачити, що тривіальний стаціонарний розв'язок $(\lambda d^{-1}, 0, 0)$ завжди існує. Нас цікавлять нетривіальні стаціонарні розв'язки для (5.2). Використовуючи (5.11), ми маємо $\widehat{T} = (\lambda - \delta \widehat{T^*} e^{\omega h}) d^{-1}$ та $\widehat{V} = \frac{N\delta}{c} \widehat{T^*}$. Це дає умову на координату $\widehat{T^*}$, яка повинна належати до $(0, \lambda e^{\omega h} \delta^{-1}]$. Позначимо (порівняйте з [129])

$$h_f(s) \equiv f\left(\frac{\lambda}{d} - \frac{\delta}{d} e^{\omega h} \cdot s, \frac{N\delta}{c} \cdot s\right) - \delta e^{\omega h} \cdot s. \tag{5.12}$$

Припустимо, що f задовільняє

$(\mathbf{Hf_2})$ $h_f(s) = 0$ має принаймі один але не більше ніж скінченну кількість коренів (розв'язків) на $(0, \lambda e^{\omega h} \delta^{-1}]$.

Ми позначаємо довільний корінь рівняння $h_f(s) = 0$ через $\widehat{T^*}$ та визначаємо відповідні $\widehat{T} = (\lambda - \delta \widehat{T^*} e^{\omega h}) d^{-1}$ та $\widehat{V} = \frac{N\delta}{c} \widehat{T^*}$. Точка $(\widehat{T}, \widehat{T^*}, \widehat{V})$ задовільняє (5.11), отже це стаціонарний розв'язок для (5.2).

Зауваження 5.4 *Відмітемо, що умова скінченності коренів (які вочевидь є ізольованими) виключає існування стаціонарних розв'язків, що не є сталими за просторовою координатою $x \in \Omega$. Ми нагадуємо, що множина Ω є (лінійно) зв'язною - отже функція $v \in C(\overline{\Omega})$ може приймати лише одне значення або континуум значень. Умова $(\mathbf{Hf_2})$ дає $\widehat{T^*}(x) \equiv \widehat{T^*} \in \mathbb{R}$, отже $(\widehat{T}, \widehat{T^*}, \widehat{V})$ є незалежним від $x \in \overline{\Omega}$.*

Зауваження 5.5 *Ми нагадаємо деякі відомі приклади нелінійних функцій f коли ми маємо лише один корінь рівняння $h_f(s) = 0$. Перший приклад є функціональна відповідь типу д'Анжеліса-Беддінгтона (DeAngelis-Beddington) [39, 68] $f(T, V) = \frac{kTV}{1+k_1 T + k_2 V}$, з $k, k_1 \geq 0, k_2 > 0$. Ми також відмічаємо, що цей клас включає в себе (як спеціальний підклас, $k_1 = 0$) так званий насичений рівень захворюваності (saturated incidence rate) $f(T, V) = \frac{kTV}{1+k_2 V}$. Іншим прикладом нелінійності є клас Кроулі-Мартіна (Crowley-Martin incidence rate) $f(T, V) = \frac{kTV}{(1+k_1 T)(1+k_2 V)}$, з $k \geq 0, k_1, k_2 > 0$ (дивись, наприклад [221]). Для більш широких класів функцій f дивись,* *наприклад [129, 101, 166], де, за додаткових умов, маємо точно один корінь $h_f(s) = 0$. Ми підкреслюємо, що на противагу роботі [129, 101], ми не вимагаємо диференційовності f.*

Зауваження 5.6 *Важливо відмітити, що зазвичай, при дослідженні властивості стійкості стаціонарних розв'язків (для задач вірусної динаміки), дослідники використовують умови на так звані репродуційні числа (reproduction numbers). Такі умови використовують для відокремлення випадку єдиного стаціонарного розв'язку. Тоді досліджується глобальна стійкість. В наших дослідженнях, беручи до уваги залежність від стану самого загаювання, ми досліджуємо локальну стійкість. Як наслідок, це дозволяє досліджувати співіснування багатьох стаціонарних розв'язків. Ми віримо, що цей підхід дозволяє моделювати більш складні ситуації з багатою динамікою (на відміну від випадку глобально стійкого стаціонарного розв'язку). Умови на репродукційні числа явно не виникають в цих дослідженнях, але можуть розглядатись як достатні умови для виконання* $(\mathbf{Hf_2})$.

5.3. Стійкість стаціонарного розв'язку хронічного стану

Ми використовуємо функцію Вольтера $v(s) = s - 1 - \ln s : (0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$, яка відіграє важливу роль у побудові функціоналів О.Ляпунова [111, 129] (див. с.277 та її властивість (4.16)).

В цьому підрозділі ми використовуємо наступну *локальну* умову на функцію f у малому околі стаціонарного розв'язку (що випливає з $(\mathbf{Hf_2})$).

$$(\mathbf{Hf_3}) \qquad \left(\frac{V}{\widehat{V}} - \frac{f(T,V)}{f(T,\widehat{V})}\right) \cdot \left(\frac{f(T,V)}{f(T,\widehat{V})} - 1\right) > 0. \qquad (5.13)$$

Ця властивість означає, що значення $\frac{f(T,V)}{f(T,\widehat{V})}$ завжди *строго* між 1 та $\frac{V}{\widehat{V}}$ для всіх $T \geq 0$ (порівняйте нестрогу властивість [129, с.74]). Строга нерівність у (5.13) буде використана для досліджень саме випадку загаювання, що залежить від стану. У частковому випадку сталого загаювання, нестрога властивість є достатньою. Ми також використовуємо наступну умову

(**Hf$_4$**) Функція f є або диференційовною за першою координатою або задовільняє

$$[f(T,\widehat{V})]^{-1} \geq C_f^1 + C_f^2 \frac{1}{T}, \quad T > 0, \quad C_f^i = C_f^i(\widehat{V}) \geq 0,\ i = 1, 2. \tag{5.14}$$

Для простоти викладення результатів ми починаємо з аналізу стійкості для гладких початкових функцій, які належать до так званого *многовиду розв'язків* (solution manifold) (див., наприклад [205, 98] для випадка звичайних рівнянь та [164] для випадку рівнянь у частинних похідних)

$$M_F \equiv \left\{ \varphi \in C^1([-h,0];X), \quad \varphi(0) \in D(\mathcal{A}), \quad \dot{\varphi}(0) + \mathcal{A}\varphi(0) = F(\varphi) \right\}. \tag{5.15}$$

Рівняння у (5.15), що називається умовою сумісності (the compatibility condition), є рівнянням у просторі X. Нижче (див. теорему 5.11) ми повернемось до більш загального випадка липшицевих початкових функцій ($\varphi \in \Omega_{Lip}$, не обов'язково неперервно диференційовні), які є важливими для питань застосування лікарских засобів, коли похідна за часом може бути розривною, див. [166] для більш детального обговорення.

Теорема 5.7 *Нехай нелінійна функція f задовільняє* (**Hf$_1$**+), (**Hf$_2$**), (**Hf$_3$**), (**Hf$_4$**) *(див. (5.10), (5.14), (5.13)) та ЗЗС $\eta : C \to [0,h]$ є локально липшицевим у просторі C та неперервно диференційовним у деякому околі стаціонарного розв'язку $\widehat{\varphi} \equiv (\widehat{T}, \widehat{T^*}, \widehat{V})$. Тоді стаціонарний розв'язок $\widehat{\varphi}$ є локально асимптотично стійким (у просторі M_F).*

Доведення теореми 5.7. Розглянемо (поточково) наступний допоміжний функціонал

$$U^{\mathrm{sdd-x}}(t,x) \equiv \left(T(t,x) - \widehat{T} - \int_{\widehat{T}}^{T(t,x)} \frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(\theta,\widehat{V})}\, d\theta \right) e^{-\omega h} + \widehat{T^*} \cdot v\left(\frac{T^*(t,x)}{\widehat{T^*}} \right)$$
$$+ \frac{\widehat{V}}{N} \cdot v\left(\frac{V(t,x)}{\widehat{V}} \right) + \delta \widehat{T^*} \int_{t-\eta(u_t)}^{t} v\left(\frac{f(T(\theta,x),V(\theta,x))}{f(\widehat{T},\widehat{V})} \right) d\theta. \tag{5.16}$$

Тепер ми вводимо наступний функціонал О.Ляпунова з ЗЗС вздовж розв'язку (5.2)

$$U^{\mathrm{sdd}}(t) \equiv \int_{\Omega} U^{\mathrm{sdd-x}}(t,x)\, dx. \tag{5.17}$$

Форма функціонала стандартна за виключенням нижньої межі останнього інтегралу у (5.16), яка є залежною від стану. Ця залежність від стану була вперше розглянута у роботах [167] (див. також [166]). Для випадку сталого загаювання, див., наприклад [129].

Зараз, для простоти викладення, ми розглянемо поточкову (за змінною x) похідну за часом функціонала $U^{\text{sdd}-\text{x}}(t,x)$, який був визначений у (5.16). Ця похідна за часом розглядається вздовж класичних розв'язків системи (5.2). Це дає змогу розглянути $\frac{\partial T(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial \widehat{T^*}(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial V(t,x)}{\partial t}$, для всіх $t > 0$. Подальші розрахунки в деякому сенсі близькі до розрахунків у [129], але ми маємо два додаткові дифузійні члени а також залежність від стану одночасно у системі (5.2) та у функціоналі О.Ляпунова. Поперше, ми розглянемо інтегральний член

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{t-\eta(u_t)}^{t} v\left(\frac{f(T(\theta,x),V(\theta,x))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right) d\theta\right]$$

$$= v\left(\frac{f(T(t,x),V(t,x))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right) - v\left(\frac{f(T(t-\eta(u_t),x),V(t-\eta(u_t),x))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right)\left(1-\frac{d}{dt}\eta(u_t)\right)$$

$$= v\left(\frac{f(T(t,x),V(t,x))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right) - v\left(\frac{f(T(t-\eta(u_t),x),V(t-\eta(u_t),x))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right) + S^{\text{sdd}}(t,x),$$

де ми позначили для зручності

$$S^{\text{sdd}}(t,x) \equiv v\left(\frac{f(T(t-\eta(u_t),x),V(t-\eta(u_t),x))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right) \cdot \frac{d}{dt}\eta(u_t). \tag{5.18}$$

Зауваження 5.8 *Член S^{sdd} з'являється завдяки присутності ЗЗС. Це робить розрахунки складнішими. Знак S^{sdd} є невизначеним, отже ми пропонуємо (див. також [167, 166]) шлях, як компенсувати /обмежити S^{sdd} за допомогою інших додатньовизначених членів у $\frac{\partial U^{\text{sdd}-\text{x}}}{\partial t}$ заради того, аби мати похідну за часом функціонала О.Ляпунова (вздовж розв'язку), яка є від'ємновизначеною відносно стаціонарної точки.*

Тепер ми диференцюємо

$$\frac{\partial U^{\text{sdd}-\text{x}}(t,x)}{\partial t} = \left(1 - \frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t,x),\widehat{V})}\right) e^{-\omega h} \cdot \frac{\partial T(t,x)}{\partial t} + \left(1 - \frac{\widehat{T^*}}{T^*(t,x)}\right) \cdot \frac{\partial \widehat{T^*}(t,x)}{\partial t}$$

$$+\frac{1}{N} \cdot \left(1 - \frac{\widehat{V}}{V(t,x)}\right) \cdot \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \delta\widehat{T^*}v \left(\frac{f(T(t,x),V(t,x))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right)$$

$$-\delta\widehat{T^*}v \left(\frac{f(T(t-\eta(u_t),x),V(t-\eta(u_t),x))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right) + \delta\widehat{T^*}S^{\text{sdd}}(t,x).$$

$$= \left(1 - \frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t,x),\widehat{V})}\right) e^{-\omega h} \cdot \big(\lambda - dT(t,x) - f(T(t,x),V(t,x)) + d^1\Delta T(t,x)\big)$$

$$+ \left(1 - \frac{\widehat{T^*}}{T^*(t,x)}\right) \cdot \big(e^{-\omega h} f(T(t-\eta(u_t),x),V(t-\eta(u_t),x)) - \delta T^*(t,x) + d^2\Delta T^*(t,x)\big)$$

$$+\frac{1}{N} \cdot \left(1 - \frac{\widehat{V}}{V(t,x)}\right) \cdot \big(N\delta T^*(t,x) - cV(t,x) + d^3\Delta V(t,x)\big)$$

$$+\delta\widehat{T^*}v \left(\frac{f(T(t,x),V(t,x))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right) - \delta\widehat{T^*}v \left(\frac{f(T(t-\eta(u_t),x),V(t-\eta(u_t),x))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right)$$

$$+\delta\widehat{T^*}S^{\text{sdd}}(t,x).$$

Розрахунки, використовуючи (5.11), зокрема, $\lambda = d\widehat{T} + f(\widehat{T},\widehat{V})$ дають

$$\frac{\partial U^{\text{sdd}-\text{x}}(t,x)}{\partial t} = d \cdot \widehat{T} \left(1 - \frac{T(t,x)}{\widehat{T}}\right) \left(1 - \frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t,x),\widehat{V})}\right) e^{-\omega h}$$

$$+ \left(1 - \frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t,x),\widehat{V})}\right) e^{-\omega h} \cdot d^1\Delta T(t,x) + \left(1 - \frac{\widehat{T^*}}{T^*(t,x)}\right) \cdot d^2\Delta T^*(t,x)$$

$$+\frac{1}{N} \cdot \left(1 - \frac{\widehat{V}}{V(t,x)}\right) \cdot d^3\Delta V(t,x) + f(\widehat{T},\widehat{V})e^{-\omega h} \cdot C^1 + \delta\widehat{T^*}v \left(\frac{f(T(t,x),V(t,x))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right)$$

$$- \delta\widehat{T^*}v \left(\frac{f(T(t-\eta(u_t),x),V(t-\eta(u_t),x))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right) + \delta\widehat{T^*}S^{\text{sdd}}(t,x). \tag{5.19}$$

де, для зручності, ми зібрали деякі члени у C^1. А саме

$$C^1 = C^1(t,x) \equiv \left(1 - \frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t,x),\widehat{V})}\right)\left(1 - \frac{f(T(t,x),V(t,x))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right)$$

$$+\left(1 - \frac{\widehat{T^*}}{T^*(t,x)}\right)\left(\frac{f(T(t-\eta(u_t),x),V(t-\eta(u_t),x))}{f(\widehat{T},\widehat{V})} - \frac{T^*(t,x)}{\widehat{T^*}}\right)$$

$$+\left(1 - \frac{\widehat{V^*}}{V(t,x)}\right)\left(\frac{T^*(t,x)}{\widehat{T^*}} - \frac{V(t,x)}{\widehat{V}}\right).$$

Розрахунки показують, що

$$C^1 = 3 + \frac{f(T(t,x),V(t,x))}{f(T(t,x),\widehat{V})} + \frac{f(T(t-\eta(u_t),x),V(t-\eta(u_t),x))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}$$

$$-\frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t,x),\widehat{V})} - \frac{f(T(t,x),V(t,x))}{f(\widehat{T},\widehat{V}))} - \frac{f(T(t-\eta(u_t),x),V(t-\eta(u_t),x))\cdot\widehat{T^*}}{f(\widehat{T},\widehat{V})\cdot T^*(t,x)}$$

$$-\frac{T^*(t,x)\cdot\widehat{V}}{\widehat{T^*}\cdot V(t,x)} - \frac{V(t,x)}{\widehat{V}}.$$

У виразі вище ми бачимо два додатніх та п'ять від'ємних дроба. Тому ми пишемо $3 = -2 + 5$ та додаємо наступний нульовий член ($0 = \ln 1$):

$$0 = \ln\left[\left(\frac{f(T(t,x),V(t,x))}{f(T(t,x),\widehat{V})}\cdot\frac{f(T(t-\eta(u_t),x),V(t-\eta(u_t),x))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right)^{-1}\times\right.$$

$$\times\frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t,x),\widehat{V})}\cdot\frac{f(T(t,x),V(t,x))}{f(\widehat{T},\widehat{V}))}\times$$

$$\left.\times\frac{f(T(t-\eta(u_t),x),V(t-\eta(u_t),x))\cdot\widehat{T^*}}{f(\widehat{T},\widehat{V})\cdot T^*(t,x)}\cdot\frac{T^*(t,x)\cdot\hat{V}}{\widehat{T^*}\cdot V(t,x)}\cdot\frac{V(t,x)}{\widehat{V}}\right],$$

який ми розкладаємо на суму семи логарифмів. Для зручності ми скорочуємо запис за допомогою функції Вольтера v

$$C^1 = v\left(\frac{f(T(t,x),V(t,x))}{f(T(t,x),\widehat{V})}\right) + v\left(\frac{f(T(t-\eta(u_t),x),V(t-\eta(u_t),x))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right)$$

$$-v\left(\frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t,x),\widehat{V})}\right) - v\left(\frac{f(T(t,x),V(t,x))}{f(\widehat{T},\widehat{V}))}\right)$$

$$-v\left(\frac{f(T(t-\eta(u_t),x),V(t-\eta(u_t),x))\cdot\widehat{T^*}}{f(\widehat{T},\widehat{V})\cdot T^*(t,x)}\right)-v\left(\frac{T^*(t,x)\cdot\widehat{V}}{\widehat{T^*}\cdot V(t,x)}\right)-v\left(\frac{V(t,x)}{\widehat{V}}\right). \tag{5.20}$$

Як раніше, $v(s)=s-1-\ln s$.

Тепер ми обговорюємо дифузійні члени (ті, які мають коєфіцієнти d^i) у (5.19). Точніше, нас цікавить знак цих членів після інтегрування за змінною x у Ω. Позначимо їх, для зручності, як

$$D^{\mathrm{diff}-3}(t,x)\equiv\left(1-\frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t,x),\widehat{V})}\right)e^{-\omega h}\cdot d^1\Delta T(t,x)+\left(1-\frac{\widehat{T^*}}{T^*(t,x)}\right)\cdot d^2\Delta T^*(t,x)$$

$$+\frac{1}{N}\cdot\left(1-\frac{\widehat{V}}{V(t,x)}\right)\cdot d^3\Delta V(t,x),\qquad D^{\mathrm{diff}-3}(t)\equiv\int_\Omega D^{\mathrm{diff}-3}(t,x)\,dx. \tag{5.21}$$

У випадку диференційовної f (Hf_4) (див. (5.14)), нам потрібне наступне просте

Твердження 5.9 *Нехай $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ є диференційовним. Тоді $\int_\Omega p(u(x))\Delta u(x)\,dx=-\int_\Omega p'(u)||\nabla u||^2\,dx$ для всіх $u\in C^2(\overline{\Omega})$, які задовільняють $\frac{\partial u(x)}{\partial n}|_{\partial\Omega}=0$.*

Доведення твердження 5.9. Ми спираємось на класичну теорему Гауса-Остроградського. Розглянемо векторне поле $E\equiv p(u)\nabla u$. Тоді $\operatorname{div}E=p'(u)||\nabla u||^2+p(u)\Delta u$. Маємо $\int_\Omega\operatorname{div}E\,dx=\int_\Omega p'(u)||\nabla u||^2\,dx+\int_\Omega p(u)\Delta u\,dx=\int_{\partial\Omega}p(u)(\nabla u,n)\,dS=0$. Остання рівність є завдяки умові Неймана на межі Ω. Отже, $\int_\Omega p(u)\Delta u\,dx=-\int_\Omega p'(u)||\nabla u||^2\,dx$. Це завершує доведення твердження 5.9.

Тепер ми застосовуємо твердження 5.9 для того, аби показати, що $D^{\mathrm{diff}-3}(t)\le 0$. Почнемо з першого члена у $D^{\mathrm{diff}-3}(t,x)$, див. (5.21), та покажемо, що $\int_\Omega\left(1-\frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t,x),\widehat{V})}\right)\Delta T(t,x)\,dx\le 0$. Для цього ми покладаємо $p(T)=\left(1-\frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t,x),\widehat{V})}\right)$ та перевіряємо, що $p'(T)=f_1'(T,\widehat{V})f(\widehat{T},\widehat{V})\times[f(T,\widehat{V})]^{-2}\ge 0$ завдяки $f_1'(T,\cdot)\ge 0$ з умов на функцію f. Подібні розрахунки для другого та третього членів у (5.21) показують, що

$$D^{\mathrm{diff}-3}(t)\equiv\int_\Omega D^{\mathrm{diff}-3}(t,x)\,dx=-d^1\cdot e^{-\omega h}f(\widehat{T},\widehat{V})\int_\Omega\frac{f_1'(T(t,x),\widehat{V})}{f(T(t,x),\widehat{V})^2}\,||\nabla T(t,x)||^2\,dx$$

$$- d^2 \cdot \widehat{T^*} \int_\Omega \frac{||\nabla T^*(t,x)||^2}{[T^*(t,x)]^2}\, dx - d^3 \frac{\widehat{V}}{N} \cdot \int_\Omega \frac{||\nabla V(t,x)||^2}{[V(t,x)]^2} \cdot \, dx \le 0. \tag{5.22}$$

Зауваження 5.10 *У випадку недиференційовної f, ми отримуємо $D^{\mathrm{diff}-3}(t) \le 0$, використовуючи альтернативні (геометричні) умови на f, які наведені у (Hf_4) (див. (5.14)). Тоді $D^{\mathrm{diff}-3}(t) \le 0$ вздовж будь-якого класичного розв'язку.*

Тепер ми поєднуємо попередні аргументи для розгляду функціоналу О.Ляпунова $U^{\mathrm{sdd}}(t)$, див. (5.17). Ми маємо наступну рівність (порівняйте з (5.19))

$$\frac{d}{dt} U^{\mathrm{sdd}}(t) = \int_\Omega \frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\, dx = d\widehat{T} \cdot e^{-\omega h} \int_\Omega \left(1 - \frac{T(t,x)}{\widehat{T}}\right) \left(1 - \frac{f(\widehat{T}, \widehat{V})}{f(T(t,x), \widehat{V})}\right) dx$$

$$+ D^{\mathrm{diff}-3}(t) + f(\widehat{T}, \widehat{V}) e^{-\omega h} \cdot \int_\Omega C^1\, dx$$

$$+ \delta \widehat{T^*} \int_\Omega \left[v\left(\frac{f(T(t,x), V(t,x))}{f(\widehat{T}, \widehat{V})} \right) - v\left(\frac{f(T(t-\eta(u_t),x), V(t-\eta(u_t),x))}{f(\widehat{T}, \widehat{V})} \right) \right.$$

$$\left. + S^{\mathrm{sdd}}(t,x) \right] dx.$$

Тут $D^{\mathrm{diff}-3}(t)$ є визначеним у (5.21) та трансформованим у (5.22), C^1 представлене як у (5.20) та S^{sdd} є визначеним у (5.18). Ми нагадаємо, що (див. (5.11)) $\delta \widehat{T^*} = e^{-\omega h} f(\widehat{T}, \widehat{V})$, що приводить до скорочення першого та другого членів в останньому інтегралі з відповідними членами у C^1 (див. (5.20)). Ми продовжуємо розрахунки

$$\frac{d}{dt} U^{\mathrm{sdd}}(t) = \int_\Omega \frac{\partial U^{\mathrm{sdd-x}}(t,x)}{\partial t}\, dx = d\widehat{T} \cdot e^{-\omega h} \int_\Omega \left(1 - \frac{T(t,x)}{\widehat{T}}\right) \left(1 - \frac{f(\widehat{T}, \widehat{V})}{f(T(t,x), \widehat{V})}\right) dx$$

$$+ f(\widehat{T}, \widehat{V}) e^{-\omega h} \cdot \int_\Omega \left\{ -v\left(\frac{f(\widehat{T}, \widehat{V})}{f(T(t,x), \widehat{V})} \right) - v\left(\frac{f(T(t-\eta(u_t),x), V(t-\eta(u_t),x)) \cdot \widehat{T^*}}{f(\widehat{T}, \widehat{V}) \cdot T^*(t,x)} \right) dx \right.$$

$$\left. - v\left(\frac{T^*(t,x) \cdot \widehat{V}}{\widehat{T^*} \cdot V(t,x)} \right) - \left[v\left(\frac{V(t,x)}{\widehat{V}} \right) - v\left(\frac{f(T(t,x), V(t,x))}{f(T(t,x), \widehat{V})} \right) \right] \right\} dx$$

$$+ D^{\mathrm{diff}-3}(t) + \delta \widehat{T^*} \int_\Omega S^{\mathrm{sdd}}(t,x)\, dx. \tag{5.23}$$

Ми покажемо, що всі члени у (5.23) є недодатніми, за винятком останнього, який, у загальному випадку, може змінювати знак. Перший член у (5.23) є недодатнім завдяки монотонності f за першою координатою. Властивість $D^{\text{diff}-3}(t) \leq 0$ наведена у (5.22). Для того, аби показати, що

$$\int_\Omega \left[v\left(\frac{V(t,x)}{\widehat{V}}\right) - v\left(\frac{f(T(t,x),V(t,x))}{f(T(t,x),\widehat{V})}\right)\right] dx \geq 0$$

ми використовуємо властивість (Hf_3) функції f (див. (5.13)).

Тепер ми доводимо, що $\frac{d}{dt}U^{\text{sdd}}(t) \leq 0$ у деякому малому околі стаціонарного розв'язку (з рівністю тільки у випадку $(T,T^*,V) = (\widehat{T},\widehat{T^*},\widehat{V})$). В частковому випадку сталого загаювання, маємо $S^{\text{sdd}}(t,x) = 0$, що може привести до глобальної стійкості $(\widehat{T},\widehat{T^*},\widehat{V})$.

Ми перепишемо, для скорочення запису, (5.23) як

$$\frac{d}{dt}U^{\text{sdd}}(t) = \delta\widehat{T^*}\int_\Omega \big(- D^{\text{sdd}}(t,x) + S^{\text{sdd}}(t,x)\big)\, dx, \tag{5.24}$$

де $D^{\text{sdd}}(t,x)$ включає всі члени за винятком останнього у (5.23). Як доведено вище $\int_\Omega D^{\text{sdd}}(t,x)\,dx \geq 0$. Почнемо з аналізу множин, на яких обертаються в нуль $D^{\text{sdd}}(t,x) = 0, S^{\text{sdd}}(t,x) = 0$ та $\frac{d}{dt}U^{\text{sdd}}(t) = 0$.

Почнемо з $D^{\text{sdd}}(t,x) = 0$. Бачимо з (5.23), що $T = \widehat{T}$. Оскільки $v(s) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $s = 1$, ми бачимо з (5.13), що $V = \widehat{V}$. Отже $T^* = \widehat{T^*}$. Також бачимо $f(T(t-\eta(u_t),x),V(t-\eta(u_t),x)) = f(\widehat{T},\widehat{V})$. Більш того, $D^{\text{diff}-3}(t) = 0$, означає (див. твердження 5.9 та (5.22)), що T,T^* та V є незалежними від x. Множина, на якій обертається в нуль $S^{\text{sdd}}(t,x) = 0$ характеризується (див. (5.18) як $f(T(t-\eta(u_t),x),V(t-\eta(u_t),x)) = f(\widehat{T},\widehat{V})$ або $\frac{d}{dt}\eta(u_t) = 0$ вздовж розв'язку. Для нас важливо, що множина, на якій обертається в нуль $D^{\text{sdd}}(t,x) = 0$ є однією точкою $(T,T^*,V) = (\widehat{T},\widehat{T^*},\widehat{V})$ та є підмножиною $S^{\text{sdd}}(t,x) = 0$. Залишок доведення того, що у малому околі $(\widehat{T},\widehat{T^*},\widehat{V})$ виконується $|S^{\text{sdd}}(t,x)| < D^{\text{sdd}}(t,x)$ повторює кроки доведення [167, теореми 12] (див. також [166, теорема 3.3]). Доведення спирається на властивість (4.22), допоміжний квадратичний функціонал завдяки властивості функції Вольтера v, а також на заміну змінних на полярні координати (див.

[167, (33)-(35)]). Ми не повторюємо всі ці розрахунки тут. Властивість $\frac{d}{dt}U^{\mathrm{sdd}}(t) \le 0$ у деякому (малому) околі стаціонарного розв'язку з рівністтю лише у випадку $(T, T^*, V) = (\widehat{T}, \widehat{T^*}, \widehat{V})$ завершує доведення теореми 5.7.

Цікаво відмітити, що $\varphi \in M_F$ (див. (5.15)) не є необхідною умовою для нашого підходу. Ми можемо розглянути більш широку множину Ω_{Lip} (див. (5.9)). Обговоримо частковий простий вигляд загаювання (порівняйте приклади у [167])

$$\eta(\varphi) = \int_{-h}^{0} \xi(\varphi(\theta))\, d\theta, \qquad \varphi \in C \tag{5.25}$$

з локально липшицевою ξ. Для перевірки властивості (4.22) ми знаходимо

$$\frac{d}{dt}\eta(u_t) = \frac{d}{dt}\int_{-h}^{0} \xi(u(t+\theta))\, d\theta = \frac{d}{dt}\int_{t-h}^{t} \xi(u(s))\, ds = \xi(u(t)) - \xi(u(t-h)).$$

Таким чином, у ε-околі стаціонарного розв'язку $\hat{u}$, ми маємо

$$\left|\frac{d}{dt}\eta(u_t)\right| \le |\xi(u(t)) - \xi(u(t-h))| \le 2\varepsilon\, L_{\xi,\varepsilon} \equiv \alpha_\varepsilon \to 0 \quad \text{as } \varepsilon \to 0.$$

Тут $L_{\xi,\varepsilon}$ є сталою Липшиця для ξ. Можна розглянути більш загальний клас загаювань

$$\eta(\varphi) = \rho\left(\int_{-h}^{0} \xi(\varphi(\theta))\kappa(\theta)\, d\theta\right), \qquad \varphi \in C, \quad \kappa \in C([-h, 0]; \mathbb{R}) \tag{5.26}$$

з диференційовною $\rho : \mathbb{R} \to [0, h]$. Приклад (5.25) є частковим випадком (5.26) з $\rho(s) \equiv s$ та $\kappa(s) \equiv 1$.

Обговорення вище показують, що властивість (4.22) ЗЗС (5.26) дозволяє використати доведення теореми 5.7 аби отримати наступний результат у Ω_{Lip}

Теорема 5.11 *Нехай нелінійна функція f задовільняє* $(\mathbf{Hf_1}+), (\mathbf{Hf_2}), (\mathbf{Hf_3})$, $(\mathbf{Hf_4})$ *(див. (5.10), (5.14), (5.13)) та ЗЗС $\eta : C \to [0, h]$ є з класу (5.26). Тоді стаціонарний розв'язок $\widehat{\varphi}$ є локально асимптотично стійким.*

5.4. Висновки до розділу 5

Запропонована нова постановка задачі для процесу розповсюдження віруса (вірусного захворювання) всередині організму. Новизна моделі полягає у охопленні більш широкого кола біологічних задач (випадків) та у врахуванні залежності величини загаювання від стану системи. Біологічна сторона залежності загаювання від стану не викликає сумніву і є цілком природньою. З математичної точки зору ці дослідження вирізняються розробкою та узагальненням деякого класу функціоналів О.М.Ляпунова та детальним вивченням їх властивостей та залежності від стану системи. Результати по локальній асимптотичній стійкості стаціонарних розв'язків системи отримані в загальній постановці, що дозволяє вивчати співіснування декількох положень рівноваги. Відмітемо, що попередні результати (інших дослідників) зазвичай зводились до випадку одного стаціонарного розв'язку в системі та не брали до уваги ефекти загаювання, або загаювання були сталими.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [168, 169].

РОЗДІЛ 6. МЕТОД ТРАНСФОРМАЦІЇ ЧАСУ ДЛЯ СИСТЕМ ІЗ ЗАГАЮВАННЯМ, ЩО ЗАЛЕЖИТЬ ВІД СТАНУ

Цей короткий розділ присвячений одному цікавому методу дослідження диференціальних рівняннь з ЗЗС. Загаювання динамічно залежить від стану, тобто підпорядковується додатковому диференціальному рівнянню. Застосовуючи метод трансформації часу, ми приходимо до систем зі сталим загаюванням та порівнюємо асимптотичні властивості початкової та трансформованої систем. Ми спираємось на класичний підхід [98]. Система зі сталим загаювання будується за допомогою *перетворення / трансформації часу* [46, 47]. Таке перетворення може бути застосовано до довільного розв'язку, вздовж якого загаюваний аргумент є монотонним. Аби забезпечити монотонність загаюваного аргументу вздовж кожного розв'язку ми пропонуємо достатні умови. Такий тип систем використовується в деяких популяційних моделях (див. [35] та посилання). У [35] також наведені мотивації до вивчення цього типу ЗЗС та порівняння з широко використовуємими випадками ЗЗС, які задані як явні або неявні функціонали.

Ми шукаємо умови, які гарантують, що такі властивості як стійкість, обмеженість та компактність оригінальної проблеми з ЗЗС збереглися під час перетворення часу.

6.1. Перетворення часу

Ми вивчаємо наступну неавтономну систему з ЗЗС (див. автономний випадок у [35])

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), y(t-\eta(t))), \quad t > t^0, \tag{6.1}$$

$$\dot{\eta}(t) = -\mu(\eta(t) - \widetilde{\eta}) + G(y(t)), \quad t > t^0, \tag{6.2}$$

із початковими даними

$$y(t) = g(t), \quad t \in [t^0 - h, t^0], \tag{6.3}$$

$$\eta(t^0) = \eta^0. \tag{6.4}$$

Тут $y \in \mathbb{R}^m, \eta \in \mathbb{R}, \eta^0, \mu > 0, \widetilde{\eta} > 0$, функції f та G неперервні. Функція η є ЗЗС оскільки вона є розв'язком рівняння (6.2), де є залежність від y.

Далі ми позначаємо $h \equiv 2\widetilde{\eta} > 0$ а також $X \equiv C^1([-h, 0]; \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}$ з природньою нормою.

Лема 6.1 *Нехай f є неперервною функцією, яка є липшицевою за своїми другою та третьою координатами, G є липшицевою та $|G(y)| \le \mu\widetilde{\eta}$ для всіх $y \in \mathbb{R}^m$. Тоді для будь-якого $g \in C^1([t^0-h, t^0]; \mathbb{R}^m)$, $\eta(t^0) = \eta^0 \in [0, 2\widetilde{\eta}]$ система (6.1)-(6.4) має єдиний глобальний розв'язок $(y; \eta)$ такий, що $\eta(t) \in [0, 2\widetilde{\eta}]$ для всіх $t \ge t^0$. Розв'язок неперервно залежить від початкових даних $(g; \eta^0)$.*

Доведення існування є простим оскільки праві частини рівнянь (6.1), (6.2) є неперервними. Розв'язки є глобальними завдяки властивості Липшиця функцій f та G (не більше, ніж лінійне зростання). Єдиність випливає з добре відомих результатів для рівнянь з ЗЗС (див., наприклад [98]) оскільки ми розглядаємо тут липшицеві початкові функції g.

Використовуючи властивість $|G(y)| \le \mu\widetilde{\eta}$, можна легко показати, що (для будь-якого y) будь-який розв'язок (6.2), (6.4) задовільняє $\eta(t) \in [0, 2\widetilde{\eta}]$ за умови $\eta(t^0) = \eta^0 \in [0, 2\widetilde{\eta}]$.

Тепер ми покажемо неперервну залежність від початкових даних. Для простоти викладення, ми положимо $t^0 = 0$. Розглянемо пару $(\bar{g}; \bar{\eta}^0) \in C^1([-h, 0]; R^m) \times [0, h] \subset X$ та довільну послідовність $(g^n; \eta^{0,n})$ таку, що $||(g^n; \eta^{0,n}) - (\bar{g}; \bar{\eta}^0)||_X \to 0$ коли $n \to \infty$.

Перепишемо систему (6.1)-(6.4) в інтегральній формі

$$y^n(t) = g^n(0) + \int_0^t f(s, y^n(s), y^n(s - \eta^n(s)))\, ds, \tag{6.5}$$

$$\eta^n(t) - \widetilde{\eta} = e^{-\mu t}(\eta^{0,n} - \widetilde{\eta}) + \int_0^t e^{-\mu(t-s)} G(y^n(s))\, ds. \tag{6.6}$$

Подібні рівняння для початкових даних $(\bar{g};\bar{\eta}^0)$. Для різниці розв'язків, використовуючи властивість Липшиця фунцій f та G (відповідні сталі Липшиця позначаємо L_f та L_G), ми маємо

$$|y^n(t)-\bar{y}(t)| \le |g^n(0)-\bar{g}(0)|$$

$$+L_f\int_0^t \Big\{|y^n(s-\eta^n(s))-\bar{y}(s-\eta^n(s))| + |\bar{y}(s-\eta^n(s))-\bar{y}(s-\bar{\eta}(s))|$$

$$+|y^n(s)-\bar{y}(s)|\Big\}\,ds,$$

$$|\eta^n(t)-\bar{\eta}(t)| \le e^{-\mu t}|\eta^{0,n}-\bar{\eta}^0| + L_G\int_0^t |y^n(s)-\bar{y}(s)|\,ds.$$

Зафіксуємо довільне $T>0$. Оскільки всі розв'язки є C^1 за часовою змінною (див., наприклад, [98])) для $t>0$, ми можемо позначити $L_{\bar{y},T}$ сталу Липшиця розв'язку $\bar{y}(t), t\in[-h,T]$. Тоді $|\bar{y}(s-\eta^n(s))-\bar{y}(s-\bar{\eta}(s))| \le L_{\bar{y},T}|\eta^n(s)-\bar{\eta}(s)|$ для всіх $s\in[0,t]\subset[0,T]$. Позначаючи для короткості $\beta^n(t)\equiv \max_{\tau\in[0,t]}\{|y^n(\tau)-\bar{y}(\tau)|+|\eta^n(\tau)-\bar{\eta}(\tau)|\}$ та $C^T\equiv 2L_f+L_G+L_fL_{\bar{y},T}$, ми отримуємо

$$0\le\beta^n(t)\le\beta^n(0)+L_fT\max_{\tau\in[-h,0]}|g^n(\tau)-\bar{g}(\tau)|+C^T\int_0^t\beta^n(s)\,ds.$$

Ми застосовуємо нерівність (лему) Гронуола та отримуємо для всіх $t\in[0,T]$

$$\max_{\tau\in[0,t]}\{|y^n(\tau)-\bar{y}(\tau)|+|\eta^n(\tau)-\bar{\eta}(\tau)|\}$$

$$\le\Big\{(1+L_fT)\max_{\tau\in[-h,0]}|g^n(\tau)-\bar{g}(\tau)|+|\eta^{0,n}-\bar{\eta}^0|\Big\}\exp(t\cdot(2L_f+L_G+L_fL_{\bar{y},T})).$$

Остання оцінка та рівняння (6.1), (6.2) дають подібну оцінку для похідних за часом, отже ми приходимо до

$$|y^n-\bar{y}|_{C^1([0,t];\mathbb{R}^m)}+|\eta^n-\bar{\eta}|_{C^1([0,t];\mathbb{R})}\to 0 \quad \text{при} \quad n\to+\infty.$$

Це дає неперервну залежність від початкових даних та завершує доведення леми 6.1. $\square$

Для будь-якого розв'язку $(y;\eta)$ системи (6.1)-(6.4) ми називаємо функцію σ, що визначається

$$\sigma(t)=t-\eta(t),\quad t\ge t^0 \tag{6.7}$$

`відхиленим аргументом` (*deviating argument*) для $(y;\eta)$.

Нашою метою є дослідження властивостей, що пов'язані підходом перетворення (трансформації) часу, який був запропонований у [46, 47]. Ми використовуємо функцію $t = \alpha(s)$, що називається `перетворення (трансформація) часу` [47] для зведення обраного розв'язку $(y;\eta)$ системи (6.1)-(6.4) до розв'язку $(z;\chi;\alpha)$ системи зі `сталим` загаюванням

$$\begin{cases} \dot z(s) &=& f(\alpha(s), z(s), z(s-h))\,\dot\alpha(s), \quad s \geq s^0, \\ z(s) &=& \psi(s) \equiv g(\omega(s)), \quad s \in [s^0-h, s^0], \\ \dot\chi(s) &=& -\mu(\chi(s)-\widetilde{\eta})\,\dot\alpha(s) + G(z(s))\,\dot\alpha(s), \\ \chi(s^0) &=& \eta^0, \end{cases} \tag{6.8}$$

де α задовільняє алгебраїчному рівнянню

$$\begin{cases} \alpha(s)-\chi(s) &=& \alpha(s-h), \quad s \geq s^0, \\ \alpha(s) &=& \omega(s), \quad s \in [s^0-h, s^0], \end{cases} \tag{6.9}$$

Тут $\omega : [s^0-h, s^0] \to \mathbb{R}$ є довільна C^1-функція з додатньою похідною та така, що $\omega(s^0-h) = \omega(s^0) - \eta^0 < t^0, \omega(s^0) = t^0$.

Зауваження 6.2 *Відмітемо, що рівняння (6.9) відрізняється від відповідного правила, що використовувалось у [47] та [46] оскільки ми не маємо заданої функції загаювання.*

Функція перетворення часу α будується покроково (див. (6.9), (6.7)) за правилом (дивись більше обговорення у зауваженні 6.6)

$$\alpha(s) = \sigma^{-1}(\alpha(s-h)), \quad s \in [s^0+(k-1)h, s^0+kh], \quad k = 0,1,2.... \tag{6.10}$$

Тут ми використали (див. (6.7)) $\sigma(\alpha(s)) = \alpha(s) - \eta(\alpha(s)) = \alpha(s) - \chi(s) = \alpha(s-h)$, оскільки $\chi(s) = \eta(\alpha(s))$.

Зрозуміло, що нам потрібна зворотність (існування зворотньої функції) σ для визначення α. У [47] правило (6.10) було використане за *умови*, що $\dot\sigma(t) > 0$ (або $\dot\sigma(t) < 0$). Більш детально, це правило використовувалось тільки для тих розв'язків, вздовж яких $\dot\sigma(t) > 0$ (або $\dot\sigma(t) < 0$). В наших дослідженнях ми надаємо просту умову, яка *гарантує*, що вздовж *всіх* розв'язків ми маємо $\dot{\sigma}(t) > 0$ та, як наслідок, σ завжди має зворотню. Такою простою умовою є $2\mu\widetilde{\eta} < 1$. Легко бачити, використовуючи (6.2), що в цьому випадку $|\dot{\eta}(t)| \leq \mu|\eta - \widetilde{\eta}| + |G(y(t))| \leq \mu\widetilde{\eta} + \mu\widetilde{\eta} < 1$. Тут ми використали умову $|G(y)| \leq \mu\widetilde{\eta}$. Тепер (6.7) дає $\dot{\sigma}(t) = 1 - \dot{\eta}(t) > 0$.

Зауваження 6.3 *Враховуючи, що ЗЗС* η *змінює свої значення у проміжку* $[0, 2\widetilde{\eta}] = [0, h]$, *можна сказати, що умова* $2\mu\widetilde{\eta} < 1$ *означає "повільну зміну загаювання" в множині* $[0, 2\widetilde{\eta}]$.

Важливо, що $\dot{\sigma}(t) > 0$, дає $\dot{\alpha}(s) > 0$ оскільки на початковому проміжку часу $\dot{\alpha}(s) = \dot{\omega}(s) > 0, s \in [s^0 - h, s^0]$ та $\dot{\alpha}(s) = \frac{d\sigma^{-1}(\alpha(s-h))}{ds} = \frac{1}{\dot{\sigma}(\alpha(s-h))}\dot{\alpha}(s-h) = \frac{\dot{\alpha}(s-h)}{\dot{\sigma}(\sigma(\alpha(s)))} > 0$ крок за кроком (дивись також [47, с.28]). Тут ми використали $\sigma(\alpha(s)) = \alpha(s-h)$ (див. (6.9), (6.10)).

За побудовою (див. [47, твердження 1,2]), зв'язок між розв'язком (y, η) системи (6.1)-(6.4) та відповідним розв'язком (z, χ, α) системи (6.8)-(6.9) задається як

$$y(t) = z(\alpha^{-1}(t)),\ t \in [t^0 - h, +\infty),$$
$$z(s) = y(\alpha(s)),\ \chi(s) = \eta(\alpha(s)),\ s \in [s^0 - h, +\infty),\ t = \alpha(s),\ t^0 = \alpha(s^0). \quad (6.11)$$

Лема 6.4 *Нехай* f *та* G *є такими як у лемі 6.1. Розглянемо послідовність* $\{(g^n; \eta^{0,n})\}$ *таку, що* $||(g^n; \eta^{0,n}) - (\bar{g}; \bar{\eta}^0)||_{C^1([t^0-h,t^0];\mathbb{R}^m)\times\mathbb{R}} \to 0$ *та послідовність* $\{\omega^n\}$ *таку, що* $||\omega^n - \bar{\omega}||_{C^1([t^0-h,t^0];\mathbb{R})} \to 0$, *коли* $n \to \infty$. *Тоді для будь-якого* $S > 0$ *послідовність перетворень часу* α^n *рівномірно збігається до* $\bar{\alpha}$, *тобто* $\max_{s\in[s^0,s^0+S]} |\alpha^n(s) - \bar{\alpha}(s)| \to 0$, *коли* $n \to \infty$.

Доведення. По-перше, використовуючи (6.7), ми маємо з леми 6.1, що $\max_{t\in[t^0,t^0+T]} |\sigma^n(t) - \bar{\sigma}(t)| \to 0$, коли $n \to \infty$. Ця збіжність та (6.2) дають $||\sigma^n - \bar{\sigma}||_{C^1([t^0,t^0+T];\mathbb{R})} \to 0$.

Оскільки $\frac{d}{dt}\bar{\sigma}(t) > 0$ на $[t^0, t^0 + T]$, то існує $\bar{\delta} > 0$ таке, що $\frac{d}{dt}\bar{\sigma}(t) \geq 2\bar{\delta} > 0$ для всіх $t \in [t^0, t^0 + T]$. Це та $||\sigma^n - \bar{\sigma}||_{C^1[t^0,t^0+T]} \to 0$ дають

$$\frac{d}{dt}\sigma^n(t) \geq \bar{\delta} > 0 \text{ для всіх } t \in [t^0, t^0 + T] \text{ та } n > n_1. \quad (6.12)$$

Використовуючи визначення α (див. (6.10)) та збіжність $\omega^n \to \bar{\omega}$ коли $n \to \infty$ нам залишається лише показати властивість $\max_{\tau\in[0,T]} |(\sigma^n)^{-1}(\tau) - (\bar{\sigma})^{-1}(\tau)| \to 0$ коли $n \to \infty$. Позначимо $\gamma^n(s) = (\sigma^n)^{-1}(s), \bar{\gamma}(s) = (\bar{\sigma})^{-1}(s)$. Припустимо протилежне, тобто $\gamma^n(s)$ не збігається до $\bar{\gamma}(s)$ рівномірно на деякому $[s^0, s^0+S]$. Тоді

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \,:\, \forall N \in \mathbf{N} \quad \exists n_N \geq N \quad \exists s_{n_N} \in [s^0, s^0+S] \,:\, |\gamma^n(s_{n_N}) - \bar{\gamma}(s_{n_N})| \geq \varepsilon_0.$$

Розглядаючи $N = 1, 2, ...$ ми отримуємо дві послідовності $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ та $\{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset [s^0, s^0+S]$ такі, що

$$|\gamma^{n_k}(s_{n_k}) - \bar{\gamma}(s_{n_k})| \geq \varepsilon_0. \tag{6.13}$$

Оскільки $[s^0, s^0+S]$ є компактом, ми маємо $\hat{s} \in [s^0, s^0+S]$ та підпослідовність (знову позначену як) $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такі, що $s_{n_k} \to \hat{s} \in [s^0, s^0+S]$. Ми можемо записати

$$\gamma^{n_k}(s_{n_k}) - \bar{\gamma}(s_{n_k}) = (\gamma^{n_k}(s_{n_k}) - \gamma^{n_k}(\hat{s})) + (\gamma^{n_k}(\hat{s}) - \bar{\gamma}(\hat{s})) + (\bar{\gamma}(\hat{s}) - \bar{\gamma}(s_{n_k}))\,.$$

Останній член прямує до нуля завдяки неперервності $\bar{\gamma}$, другий - завдяки поточковій збіжності $\gamma^n(s) \to \bar{\gamma}(s)$ для всіх $s \in [s^0, s^0+S]$. Таким чином є лише одна можливість для виконання (6.13) - коли існує натуральне k_1 таке, що для всіх $k \geq k_1$ маємо $|\gamma^{n_k}(s_{n_k}) - \gamma^{n_k}(\hat{s})| > \varepsilon_0/2$. Остання властивість разом з $s_{n_k} \to \hat{s}$ та диференційовністю всіх γ^{n_k} дає, що похідні $\frac{d}{ds}\gamma^{n_k}$ є обмеженими у деякому околі $\hat{s}$. Це суперечить властивості $\frac{d}{dt}\sigma^n(t) \geq \bar{\bar{\delta}} > 0$ (див. (6.12)) оскільки $\frac{d}{ds}\gamma^n(s) = \frac{1}{\frac{d}{dt}\sigma^n(t)}$. Доведення леми 6.4 завершено.

Тепер, поєднуючи леми 6.1 та 6.4 (та умову $\mu\widetilde{\eta} < \frac{1}{2}$), ми маємо змогу сформулювати перший результат про неперервну залежність перетворення часу від початкових даних.

Теорема 6.5 *Нехай f є неперервною функцією, липшицевою за своїми другою та третєю координатами та G є липшицевою та $|G(y)| \leq \mu\widetilde{\eta} < \frac{1}{2}$ для всіх $y \in \mathbb{R}^m$. Розглянемо послідовність $\{(g^n;\eta^{0,n})\}$ таку, що $||(g^n;\eta^{0,n}) - (\bar{g};\bar{\eta}^0)||_{C^1([t^0-h,t^0];\mathbb{R}^m)\times\mathbb{R}} \to 0$ та послідовність $\{\omega^n\}$ таку, що $||\omega^n - \bar{\omega}||_{C^1[t^0-h,t^0]} \to 0$, коли $n \to \infty$. Тоді перетворення часу дає послідовність* *відповідних розв'язків* $\{(z^n, \chi^n, \alpha^n)\}$ *системи зі сталим загаюванням* (6.8)-(6.9) *(див.* (6.11)*) таких, що для довільного* $S > 0$ *маємо*

$$\max_{s\in[s^0,s^0+S]} \{||z^n(s) - \bar{z}(s)|| + |\chi^n(s) - \bar{\chi}(s)| + |\alpha^n(s) - \bar{\alpha}(s)|\} \to 0, \quad \text{коли} \quad n \to \infty,$$

та $\dot{\alpha}^n(s) > 0$ *для* $s \in [s^0, s^0 + S]$.

Зауваження 6.6 *Ми звертаємо увагу, що* (6.8), (6.9) *є системою, що складається з диференціальних та алгебраїчних рівнянь. Тож необхідно прокоментувати як її розв'язувати. Ми це робимо іншим способом ніж у [47, 46] оскільки ми не маємо заданої функції загаювання (відхиленного аргумента) (порівняй з [47, розділ 2.1]). Використовуючи* (6.9)*, ми записуємо для* $s \in [0, h]$ *(а потім продовжуємо крок за кроком з довжиною крока h):* $\alpha(s) = \chi(s) + \omega(s - h)$*. Потім ми підставляємо це в диференціальне рівняння для* χ *у* (6.8) *для того аби отримати* $\dot{\chi}(s) = -\mu(\chi(s) - \widetilde{\eta})\,(\dot{\chi}(s) + \dot{\omega}(s - h)) + G(z(s))\,(\dot{\chi}(s) + \dot{\omega}(s - h))$*. Таким чином* $\dot{\chi}(s)\,[1 + \mu(\chi(s) - \widetilde{\eta}) - G(z(s))] = \{-\mu(\chi(s) - \widetilde{\eta})\,) + G(z(s)\}\,\dot{\omega}(s - h)$*. Нагадаємо, що умова* $2\mu\widetilde{\eta} < 1$ *дає* $|\mu(\chi(s) - \widetilde{\eta}) - G(z(s))| < 1$*. З цього випливає*

$$\dot{\chi}(s) = \{-\mu(\chi(s) - \widetilde{\eta})\,) + G(z(s)\}\,\dot{\omega}(s - h)\,[1 + \mu(\chi(s) - \widetilde{\eta}) - G(z(s))]^{-1}\,. \tag{6.14}$$

Тепер для того аби переписати перше рівняння у (6.8) *ми знов використовуємо* $\alpha(s) = \chi(s) + \omega(s - h)$ *(та* $\dot{\alpha}(s) = \dot{\chi}(s) + \dot{\omega}(s - h)$*), підставляємо це у* (6.8) *та використовуємо* (6.14)*. Це дає* $\dot{z}(s) = f(\alpha(s), z(s), z(s - h))\,\dot{\alpha}(s) = f(\chi(s) + \omega(s - h), z(s), z(s - h))\,(\dot{\chi}(s) + \dot{\omega}(s - h)) = f(\chi(s) + \omega(s - h), z(s), z(s - h))\,\left(\frac{-\mu(\chi(s)-\widetilde{\eta})\,)+G(z(s)}{1+\mu(\chi(s)-\widetilde{\eta})\,)-G(z(s)} + 1\right) \cdot \dot{\omega}(s - h) = f(\chi(s) + \omega(s - h), z(s), z(s - h))\,\,[1 + \mu(\chi(s) - \widetilde{\eta}) - G(z(s))]^{-1} \cdot \dot{\omega}(s - h)$.

Таким чином (6.8), (6.9) *може бути переписано для* $s \in [0, h]$ *(перший* *крок) як*

$$\begin{cases}\dot z(s) = f(\chi(s)+\omega(s-h), z(s), z(s-h))\;[1+\mu(\chi(s)-\widetilde{\eta})-G(z(s))]^{-1}\cdot\dot\omega(s-h),\\ z(s) = g(\omega(s)), \quad s\in[0,h],\\ \dot\chi(s) = \;\{-\mu(\chi(s)-\widetilde{\eta})\,)+G(z(s)\}\;\dot\omega(s-h)\,[1+\mu(\chi(s)-\widetilde{\eta})-G(z(s))]^{-1}\,,\\ \chi(0) = \eta^0.\end{cases} \tag{6.15}$$

Легко бачити, що остання система дає розв'язок $(z(s),\chi(s))$ *для* $s\in[0,h]$. *Тоді перетворення часу* α *знаходиться як* $\alpha(s)=\chi(s)+\omega(s-h)$. *В загальному випадку це виглядає наступним чином*

$$\begin{cases}\dot z(s) \;= f(\chi(s)+\alpha(s-h), z(s), z(s-h))\;[1+\mu(\chi(s)-\widetilde{\eta})-G(z(s))]^{-1}\cdot\dot\alpha(s-h),\\ z(s) \;= g(\omega(s)), \quad s\in[s^0-h,s^0],\\ \dot\chi(s) \;= \{-\mu(\chi(s)-\widetilde{\eta})\,)+G(z(s)\}\;[1+\mu(\chi(s)-\widetilde{\eta})-G(z(s))]^{-1}\,\dot\alpha(s-h), s\geq s^0,\\ \chi(s^0) = \eta^0,\end{cases} \tag{6.16}$$

та може бути розв'язано крок за кроком. Відмітемо, що система (6.8) - (6.9) *розв'язується безпосередньо, без жодних посилань на систему* (6.1)-(6.4) *(без використання розв'язків* (y,η) *системи* (6.1)-(6.4) *та без використання* σ *у* (6.7)*) оскільки* (6.9) *використовується замість* (6.7)*. Правило* (6.9) *включає правило* (6.7)*, та є сформульованим у термінах нового часу* s*.*

6.2. Зв'язок між асимптотичними властивостями систем (6.1)-(6.4) та (6.8) - (6.9).

Ми досліджуємо питання як визначити чи деякі якісні властивості розв'язків оригінальної системи з ЗЗС (6.1)-(6.4) зберігаються при трансформації часу, тобто залишаються вірними для відповідних розв'язків системи зі сталим загаюванням (6.8)-(6.9). Ми також досліджуємо як пов'язати відомі властивості розв'язків системи (6.8)-(6.9) з розв'язками системи (6.1)-(6.4).

Почнемо з дослідження властивості (часткової) експоненційної стійкості. Для простоти викладення результатів ми припускаємо, що функція

$(\bar{y}(t) \equiv 0; \bar{\eta}(t))$ є розв'язком (6.1)-(6.4). Отже, використовуючи (6.11), $(\bar{z}(s) \equiv 0; \bar{\chi}(s); \bar{\alpha}(s))$ буде також розв'язком системи (6.8)-(6.9).

Пристосовуючи до нашого випадку визначення часткової стійкості (стійкості по частині змінних) з [5, с.251] ми нагадуємо, що розв'язок $(\bar{y}(t) \equiv 0; \bar{\eta}(t))$ системи (6.1)-(6.4) називається експоненційно y-стійким, якщо існують сталі $k_1, k_2 > 0$ та $k_3 > 0$ такі, що $||y(t)|| \leq k_1 e^{-k_2(t-t^0)} ||y_{t^0}||_{C([-h,0];R^m)}$ для всіх $t \geq t^0$ та всіх розв'язків, які задовільняють $||y_{t^0}|| < k_3$. Ми нагадаємо, що η-координата є обмеженою $(\eta(\cdot) \in [0, 2\widetilde{\eta}])$. Таким самим чином ми визначаємо експоненційно z-стійкий розв'язок $(\bar{z}(s) \equiv 0; \bar{\chi}(s); \bar{\alpha}(s))$ системи (6.8)-(6.9).

Припустимо, що ми маємо

$$||z(s)|| \leq D_0 e^{-D_1(s-s^0)} ||z_{s^0}||_{C([-h,0];\mathbb{R}^m)}, s \geq s^0, D_0, D_1 > 0.$$

Як наслідок, використовуючи (6.11), ми маємо

$$||y(t)|| \leq D_0 e^{-D_1(\alpha^{-1}(t)-s^0)} ||z_{s^0}||_{C([-h,0];\mathbb{R}^m)}$$

$$= D_0 e^{-D_2(t-t^0)} ||z_{s^0}||_{C([-h,0];\mathbb{R}^m)} e^{D_2(t-t^0)-D_1(\alpha^{-1}(t)-s^0)}.$$

Легко бачити, що якщо (і тільки якщо) $e^{D_2 t - D_1 \alpha^{-1}(t)}$ є обмеженою, тоді ми маємо

$$||y(t)|| \leq D_3 e^{-D_2(t-t^0)} ||z_{s^0}||_{C([-h,0];\mathbb{R}^m)}.$$

Ці факти показують, що експоненційна оцінка для розв'язку $z(s)$ дає експоненційну оцінку для розв'язку $y(t)$ за умови, що існують додатні сталі D_1, D_2 такі, що $D_2 t - D_1 \alpha^{-1}(t) \leq D_3$ для всіх $t \geq t^0$ та деякого $D_3 \in \mathbb{R}$. Подібні оцінки дає зворотнє твердження тобто, експоненційна оцінка для розв'язку $y(t)$ дає експоненційну оцінку для розв'язку $z(s)$ за умови, що існують додатні сталі C_1, C_2 такі, що $C_2 s - C_1 \alpha(s) \leq C_3$ для всіх $s \geq s^0$ та деякого $C_3 \in \mathbb{R}$.

Оскільки за (6.11) $t = \alpha(s)$, ми приходимо до наступного

Визначення 6.7 *Ми кажемо, що "s-час" та "t-час" є еквівалентними якщо існують сталі* $A_1 > 0, A_2 > 0, B_1 \in \mathbb{R}, B_2 \in \mathbb{R}$ *такі, що* $A_1 t + B_1 \leq s \leq A_2 t + B_2$.

Зауваження 6.8 *Легко бачити, що у цьому випадку ми також маємо* $\frac{1}{A_2}s-\frac{B_2}{A_2}\leq t\leq\frac{1}{A_1}s-\frac{B_1}{A_1}$.

Ми бачили, що у випадку еквівалентності "s-часу" та "t-часу" експоненційна оцінка зберігається при перетворенні часу. Іншим наслідком еквівалентності є властивість, що $t\rightarrow+\infty$ виконується тоді і тільки тоді, коли $s\rightarrow+\infty$. Ця властивість природньо є важливою при дослідженні асимптотичних властивостей розв'язків при $t\rightarrow+\infty$.

Останній результат вказує на важливість більш детального вивчення поняття еквівалентності часів. Спробуємо з'ясувати чи є еквівалентність в нашому випадку. Правила (6.10) та (6.7) вказують на необхідність аналізу функції σ^{-1}. Використовуючи властивість $\sigma(t)\geq t-h$ (обмежене загаювання) та зворотність σ, ми отримуємо $\sigma^{-1}(\tau)\leq\tau+h$. Як наслідок, з (6.10), ми маємо $\alpha(s)=\sigma^{-1}(\alpha(s-h))\leq\alpha(s-h)+h$. Зокрема, $\alpha(h)\leq\alpha(0)+h,\alpha(2h)\leq\alpha(h)+h\leq\alpha(0)+2h,etc.$ Тоді властивість $\alpha(kh)\leq\alpha(0)+kh$ та строга монотонність α дають наступну оцінку

$$\alpha(s)\leq(\alpha(0)+h)+s. \tag{6.17}$$

Оскільки $\alpha(s)=t$, оцінка (6.17) означає нижню оцінку (обмеження знизу) у визначенні 6.7 та верхню оцінку у зауваженні 6.8 (з $A_1=1,B_1=-(\alpha(0)+h)$).

Інші, доповнюючі оцінки (обмеження) у визначенні 6.7 та зауваженні 6.8 є не такими простими. На цей момент ми не стверджуємо, що вони виконуються у загальному випадку, але надаємо додаткову умову, яка гарантує потрібні оцінки.

Припустимо, що значення загаювання обмежені знизу додатньою сталою, скажімо $h_1>0$. Більш детально, $\eta(t)\geq h_1\in(0,\widetilde{\eta}]$ для всіх $t\geq 0$. Достатньою умовою для останньої властивості є $|G(y)|\leq\mu|\widetilde{\eta}-h_1|$ для всіх $y\in\mathbb{R}^m$. При викладених умовах ми маємо $\sigma^{-1}(\tau)\geq\tau+h_1$. З (6.10) маємо $\alpha(s)=\sigma^{-1}(\alpha(s-h))\geq\alpha(s-h)+h_1$. Зокрема, $\alpha(h)\geq\alpha(0)+h_1,\alpha(2h)\geq\alpha(h)+h_1\geq\alpha(0)+2h_1$, і т.і. Отже властивість $\alpha(kh)\geq\alpha(0)+kh_1$ та строга монотонність α дають наступну оцінку

$$\alpha(s)\geq(\alpha(0)-h_1)+\frac{h_1}{h}s. \tag{6.18}$$

Використовуючи одночасно (6.17) та (6.18) ми приходимо до еквівалентності "s-часу" та "t-часу" (зі сталими $A_1 = 1, B_1 = -(\alpha(0) + h), A_2 = \frac{h}{h_1}, B_2 = -\frac{h}{h_1}(\alpha(0) - h_1)$ у визначенні 6.7 та зауваженні 6.8).
Такіж аргументи приводять до наступної леми (для простоти беремо $s^0 = 0$).

Лема 6.9 *1) Припустимо, що вздовж розв'язку системи* (6.1)-(6.4) *маємо* $\eta(t) \le h_2 \le h$ *тобто загаювання є обмеженим* ($\sigma(t) \ge t - h_2$). *Тоді відповідне перетворення часу задовільняє* $\alpha(s) \le \alpha(0) + h_2 + \frac{h_2}{h}s$, *для всіх* $s \ge 0$.

2) Припустимо, що вздовж розв'язку системи (6.1)-(6.4) *маємо* $\eta(t) \ge h_1 > 0$. *Тоді відповідне перетворення часу задовільняє* $\alpha(s) \ge \alpha(0) - h_1 + \frac{h_1}{h}s$, *для всіх* $s \ge 0$.

Зауваження 6.10 *Обидві умови попередньої леми 6.9 виконуються, наприклад, за умови* $|G(y)| \le \mu|\widetilde{\eta} - h_1|$ *для всіх* $y \in \mathbb{R}^m$ *та* $h_1 \in (0, \widetilde{\eta}]$. *Це є випадок еквівалентності "s-часу" та "t-часу".*

Довівши еквівалентність, ми маємо змогу використовувати її для порівняння асимптотичних властивостей відповідних динамічних систем (процесів), що будуються за розв'язками систем до та після перетворення часу. Попередні дослідження приводять до наступного наслідку.

Наслідок 6.11 *Нехай* f *є неперервною функцією, липшицевою за своїми другою та третьою координатами та* G *є липшицева та* $|G(y)| \le \mu|\widetilde{\eta} - h_1|$ *для всіх* $y \in \mathbb{R}^m$ *та деякого* $h_1 \in (0, \widetilde{\eta}]$. *Зафіксуємо довільний експоненційно y-стійкий розв'язок* (y, η) *системи* (6.1)-(6.4) *тобто* $||y(t)|| \le k_1 e^{-k_2(t-t^0)}||y_{t^0}||_{C([-h,0];\mathbb{R}^m)}$ *для всіх* $t \ge t^0$ *та зафіксуємо довільне* $\omega \in C^1([s^0 - h, s^0]; \mathbb{R})$ *з додатньою похідною та таке, що* $\omega(s^0 - h) = \omega(s^0) - \eta^0$. *Тоді відповідний розв'язок* (z, χ, α) *системи* (6.8)-(6.9) *є експоненційно z-стійким.*

Розглянемо автономний випадок (6.1), тобто систему (порівняй з (6.1)-(6.4))

$$\dot{y}(t) = f^a(y(t), y(t - \eta(t))), \quad t > 0, \tag{6.19}$$

$$\dot{\eta}(t) = -\mu(\eta(t) - \widetilde{\eta}) + G(y(t)), \quad t > 0, \tag{6.20}$$

із початковими даними

$$y(t) = g(t), \quad t \in [-h, 0], \tag{6.21}$$

$$\eta(0) = \eta^0. \tag{6.22}$$

Ми можемо обмежити наші дослідження (використовуючи лему 6.1) на множину початкових даних

$$X_{f^a} = \left\{(g, \eta^0) \,|\, \dot{g}(0) = f^a(g(0), g(-\eta^0))\right\} \subset C^1([-h, 0]; \mathbb{R}^m) \times [0, h]. \tag{6.23}$$

Множина X_{f^a} є аналогом *многовиду розв'язків* (solution manifold), що використовувалась у [205] (дивись також [98]). Нагадаємо, що сенс цього обмеження є C^1-гладкість розв'язків в точці нуль (час), тобто $\dot{y}(0-) = \dot{g}(0-) = \dot{y}(0+) = f^a(g(0), g(-\eta^0))$. Легко бачити, множина X_{f^a} є інваріантною.

Ми визначаємо еволюційний оператор $S^a(t) : X_{f^a} \to X_{f^a}$, що відповідає задачі (6.19)-(6.22), згідно з формулою $S^a(t)(g; \eta^0) = (y_t; \eta(t))$, де $(y; \eta)$ є єдиний розв'язок (6.19)-(6.22). Легко бачити, що при наших умовах пара (S^a, X_{f^a}) є динамічним напів-потоком (dynamical semiflow) (іншими словаим, задача (6.19)-(6.22) є коректно поставленою у просторі X_{f^a}). Більше деталей про динамічні системи (напів-потоки) дивись, наприклад [96, 200, 31].

Для дослідження властивостей розв'язків *неавтономної* системи (6.8), (6.9), ми нагадаємо наступне визначення з [50, с. 112-119]. Нехай E є банаховим простором. Розглянемо дво-параметрову родину відображень $\{U(t, \tau)\}$, $U(t, \tau) : E \to E$, параметри $\tau \in \mathbb{R}, t \geq \tau$.

Визначення 6.12 *[50, с.113]. Родина відображень $\{U(t, \tau)\}$ називається* `процесом` *на E якщо*
(i) $U(\tau, \tau) = I$; *(ii) $U(t, s) \circ U(s, \tau) = U(t, \tau)$ для всіх $t \geq s \geq \tau \in \mathbb{R}$.*

Оскільки (6.8), (6.9) має стале загаювання h, у нас немає потреби обмежуватись до многовиду розв'язків. Ми визначаємо

$$E = C([-h, 0]; \mathbb{R}^m) \times [0, h] \times \left\{\omega \in C^1[-h, 0] \,|\, \dot{\omega}(\cdot) > 0,\, \omega(-h) = \omega(0) - \eta^0;\right.$$

$$\left.\dot{\omega}(0)\left[1 + \mu(\eta^0 - \widetilde{\eta}) - G(\varphi(0))\right] = \dot{\omega}(-h)\right\}$$

та визначаємо $U(s,s^0)(\varphi;\eta^0;\omega) = (z_s;\chi(s);\alpha_s)$, де $(z;\chi;\alpha)$ є єдиний розв'язок (6.8), (6.9) із початковими даними $(\varphi;\eta^0;\omega)$, тут $z_{s^0} = \varphi$.

Ми зауважуємо, що для повернення до системи (6.19)-(6.22), використовуючи певний розв'язок (6.8), (6.9), ми відновлюємо (відтворюємо) функцію g наступним чином $g(t) = z_{s^0}(\alpha^{-1}(t))$ для $t \in [t^0 - h, t^0]$.

Продовжимо обговорення які асимптотичні властивості системи (6.1)-(6.4) зберігаються при трансформації часу, тобто залишаються вірними для відповідного розв'язку системи зі сталим загаюванням (6.8)-(6.9).

Однією з важливих властивостей динамічних систем та процесів є обмеженість розв'язків та їх компактність (асимптотична компактність) див., наприклад [96, 200, 31]. Далі ми завжди припускаємо, що $t \to +\infty$ тоді і тільки тоді, коли $s \to +\infty$, що є вірним, наприклад, у випадку еквівалентності t-часу та s-часу. Легко бачити з (6.11), що $||y(t)|| \le C, t \ge t_1$ є еквівалентно $||z(s)|| \le C, s \ge s_1$. Отже існування обмеженої поглинаючої множини для z_s-координати є еквівалентними до існування обмеженої поглинаючої множини для y_t-координати, обидві властивості у просторі $C([-h,0];\mathbb{R}^m)$. Аби піти далі, обговоримо наступні додаткові умови на перетворення часу α:

($\mathbf{A_{tt}1}$) $\exists C_{1,\alpha} > 0, \forall s \ge s_1 \Rightarrow \dot{\alpha}(s) \le C_{1,\alpha}$.

($\mathbf{A_{tt}1'}$) $\exists C_{2,\alpha} > 0, \forall t \ge t_1 \Rightarrow \dot{\alpha}^{-1}(t) \le C_{2,\alpha}$.

($\mathbf{A_{tt}2}$) α є рівномірно неперервна на $[s_1, +\infty)$.

($\mathbf{A_{tt}2'}$) α^{-1} є рівномірно неперервна на $[t_1, +\infty)$.

($\mathbf{A_{tt}3}$) $\dot{\alpha}$ є рівномірно неперервна на $[s_1, +\infty)$.

($\mathbf{A_{tt}3'}$) $\dot{\alpha}^{-1}$ є рівномірно неперервна на $[t_1, +\infty)$.

Використовуючи (6.11), ми маємо $\dot{z}(s) = \dot{y}(\alpha(s))\,\dot{\alpha}(s)$. Отже, існування обмеженої поглинаючої множини для y_t-координати у просторі $C^1([-h,0];\mathbb{R}^m)$ дає існування обмеженої поглинаючої множини для z_s-координати, за умови виконання $(A_{tt}1)$. Зворотня імплікація виконується за умови виконання $(A_{tt}1')$. Для системи (6.1)-(6.4) існування обмеженої поглинаючої множини означає, що система дисипативна (більше деталей про цю властивість дивись у [96, 200, 31]). Тепер припустимо, що для $t \ge t_1$ координата y_t належить до (перед-) компактної множини у просторі $C([-h,0];\mathbb{R}^m)$. За теоремою Арцела-Асколі, родина $\{y_t\}_{t\geq t_1}$ є рівномірно обмеженою та рівностепенево неперервною (equicontinuous). Використовуючи (6.11), ми маємо $|z(s^1)-z(s^2)| = |y(\alpha(s^1))-y(\alpha(s^2))|$. Це та попередні обговорення показують, що для $s \geq s_1$ координата z_s належить до (перед-) компактної множини у просторі $C([-h,0];\mathbb{R}^m)$, за умови, що виконується $(A_{tt}2)$. Зворотня імплікація виконується за умови виконання $(A_{tt}2')$. Подібні аргументи у просторі $C^1([-h,0];\mathbb{R}^m)$ потребують оцінку $|\dot{z}(s^1)-\dot{z}(s^2)| = |\dot{y}(\alpha(s^1))\,\dot{\alpha}(s^1)-\dot{y}(\alpha(s^2))\,\dot{\alpha}(s^2)| \leq |\dot{y}(\alpha(s^1))-\dot{y}(\alpha(s^2))|\,|\dot{\alpha}(s^1)| + |\dot{y}(\alpha(s^2))|\,|\dot{\alpha}(s^1)-\dot{\alpha}(s^2)|$. Ми бачимо, що якщо для $t \geq t_1$ координата y_t належить до (перед-) компактної множини у просторі $C^1([-h,0];\mathbb{R}^m)$, тоді для $s \geq s_1$ координата z_s належить до (перед-) компактної множини у просторі $C^1([-h,0];\mathbb{R}^m)$, за умови виконання $(A_{tt}1)-(A_{tt}3)$. Зворотня імплікація виконується за умови виконання $(A_{tt}1')$ - $(A_{tt}3')$. Зокрема, ми показуємо, що умови $(A_{tt}1)-(A_{tt}3)$ та $(A_{tt}1')$ - $(A_{tt}3')$ з'єднують асимптотичні властивості динамічної системи $(S^a(t), X_{f^a})$ та процесу $U(s,\tau): E \to E$.

Зауваження 6.13 *i). Обговорюючи умови $(A_{tt}1)-(A_{tt}3)$, може здатися, що родина $\{\alpha_s\}_{s\geq s_1}$ може належати до (перед-) компактної множини у просторі $C([-h,0];\mathbb{R})$ або навіть $C^1([-h,0];\mathbb{R})$, але це не вірно оскільки $\alpha(s)=t$ є час, який природньо необмежений.*

ii). Ми бачимо, що $(A_{tt}1)$ дає $(A_{tt}2)$, але $(A_{tt}2) \not\Rightarrow (A_{tt}1)$, так само $(A_{tt}1') \Rightarrow (A_{tt}2')$, але $(A_{tt}2') \not\Rightarrow (A_{tt}1')$.

iii). Відмітемо, що $(A_{tt}1)$ дає $\alpha(s) \leq C_{1,\alpha}s + k_1$ та подібно $(A_{tt}1') \Rightarrow \alpha^{-1}(t) \leq C_{2,\alpha}t + k_2$. Використовуючи визначення 6.7, ми бачимо, що $(A_{tt}1), (A_{tt}1')$ дають еквівалентність "s-часу" та "t-часу".

6.3. Висновки до розділу 6

Досліджений метод перетворення часу для систем диференціальних рівнянь із загаюванням, що залежить від стану. Цей метод дозволяє переформулювати системи з одним зосередженним загаюванням, що залежить від стану, у системи неавтономних диференціальних рівнянь зі сталим загаюванням.

Отримані результати, що поєднують властивості стійкості цих двох типів систем із загаюваннями. Виділений важливий клас систем в яких відхилений аргумент є монотонно зростаючим за часом, що суттєво полегшує дослідження. Запропоноване поняття еквівалентності часів у методі трансформації часу.

Основні положення цього розділу викладені у публікації автора [165].

ВИСНОВКИ ДО ДИСЕРТАЦІЇ

В дисертації систематично розроблені якісні методи дослідження диференціальних рівнянь із загаюваннями різної природи. Основні зусилля зосереджені на методах, що дозволяють вивчати як рівняння у частинних похідних так і звичайні диференціальні рівняння. Основними є наступні результати:

1. Збудовано Інерційний многовид із загаюванням для параболічних та гіперболічних рівнянь зі сталим загаюванням.

2. Збудована нова родина Наближених інерційних многовидів (НІМ), які проходять крізь всі стаціонарні точки динамічної системи, що збудована за розв'язками параболічних рівнянь зі сталим загаюванням. Розглянута залежність НІМ від величини загаювання. Ми доводимо близкість стаціонарного НІМ задачі з загаюванням та задачі без загаювання. У частковому випадку параболічних рівняннь без загаювання, наші стаціонарні НІМ формують послідовність наближених інерційних многовидів експоненційного порядку. Це означає наступне - околи поверхонь (що експоненційно притягують всі траєкторії системи), мають товщину порядка, яка спадає експоненційно зі зростом вимірності поверхонь.

3. Збудовані Інерційний многовид із загаюванням та родина наближених інерційних многовидів, для рівнянь у частинних похідних другого порядку за часом зі сталим загаюванням.

4. Запропонована так звана "ігноруюча умова" на зосереджене загаювання, що залежить від стану, за якої початково-крайова задача для параболічних рівнянь є коректно розв'язною на всьому класичному просторі неперервних функцій. Ця умова є новою навіть для звичайних диференціальних рівнянь із загаюванням, що залежить від стану (ЗЗС). Оскільки часовий проміжок ігнорування може бути обраний довільно малим, ця умова є достатньо природньою для багатьох прикладних задач, зокрема для динамічних задач біології.

5. Запропонована "узагальнена ігноруюча умова" на зосереджене загаювання, що залежить від стану, за якої початково-крайова задача для

параболічних рівнянь є коректно розв'язною на всьому просторі неперервних функцій.

6. Запропоновані та обгрунтовані умови для коректної розв'язності на просторі неперервних вектор-функцій параболічних рівнянь зі змішаними типами загаювання, що залежать від стану.

7. Запропонована та досліджена неавтономна ігноруюча умова для неавтономних нелінійних диференціальних рівнянь.

8. Запропоновані нові постановки задач в метричних нелінійних просторах, в яких коректно розв'язні параболічні рівняння зі зосередженими загаюваннями, що залежать від стану.

9. Знайдені умови існування глобальних компактних атракторів для параболічних рівнянь із різними типами загаювань (зосереджені, розподілені, змішані), що залежать від стану.

10. Вперше знайдені умови скінченновимірності глобальних атракторів для рівнянь у частинних похідних із загаюваннями, що залежать від стану.

11. Отримані результати по коректній розв'язності систем, що описують динаміку вірусних захворювань з урахуванням відповідей імунної системи. Системи мають біологічно вмотивовані загаювання, що залежать від стану. Досліджена стійкість за О.М.Ляпуновим стаціонарних (хронічних та здорових) станів системи.

12. Отримані результати по коректній розв'язності та стійкості систем, що описують динаміку вірусних захворювань з урахуванням просторових неоднорідностей органів, що інфіковані. Рівняння є класу реакції-дифузії з ЗЗС.

13. Запропоновано поняття еквівалентності часів у методі трансформації часу для систем із динамічним загаюванням, що залежить від стану. Застосовуючи метод трансформації часу, ми приходимо до систем зі сталим загаюванням та порівнюємо асимптотичні властивості початкової та трансформованої систем.

Важливо, що у випадку диференціальних рівнянь у частинних похідних із загаюванням, відповідна динамічна система є нескінченновимірною як за часовою (як система із загаюванням), так і за просторовою (як РЧП) координатами. Враховуючи цю складність, основна увага приділена детальному дослідженню загаювань, їх типів, властивостей. Це залишає широкий простір для узагальнень отриманих результатів на більш складні системи рівнянь у частинних похідних. Підходи мають перспективи бути перенесені на системи з локально обмеженими загаюваннями.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматулина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Москва, Наука, 1991. 277с.

[2] Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. Москва, Наука, 1989. 293 с.

[3] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. Москва, Наука, 1989. 496 с. (оригінал Bellman R., Cooke K.L. Differential-difference equations, in “Mathematics in Science and Engineering”. Vol. 6. New York-London: Academic Press, XVI, 1963.)

[4] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Москва, Наука, 1976. 285 с.

[5] Воротников В.И., Румянцев В.В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. Москва, Научный Мир. 2001. 320с.

[6] Дубинский Ю.А. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях // Мат. сборник. 1965. 67(109). 4. С.609-642.

[7] Зверкин А.М., Каменский Г.А., Норкин С.Б., Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом // УМН. 1962. 17:2(104). С.77–164.

[8] Иосида К. Функциональный анализ. Москва, Мир, 1967. 624 с. (оригінал: Yosida K. Functional analysis. Springer-Verlag. New York, 1965).

[9] Каменский Г.А. О существовании и единственности решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Математика. Том VIII, Уч. записки Моск. гос. ун-та, 181, Изд-во Моск. ун-та. 1956. С.83–89.

[10] Каменский Г.А. К общей теории уравнений с отклоняющимся аргументом // ДАН СССР. 1958. 120, 4. С.697-700.

[11] Каменский Г.А. Существование, единственность и непрерывная зависимость от начальных условий решений систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Матем. сб. 1961. 55(97):4. С.363–378.

[12] Канторович Л.В., Акилов П.П. Функциональный анализ. 3-е изд. Москва, Наука. 1984. 750 с.

[13] Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. Москва, Наука, 1980. 288 с.

[14] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 6-е изд. Москва, Наука, 1989. 496 с.

[15] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Москва, Физматгиз. 1959, 211 с.

[16] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа Москва, Наука, 1967. 736 с.

[17] Ладыженская О.А. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнения Навье–Стокса и других уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. 1987. Т.42. С.25–60.

[18] Ляпунов А.М. Общая задача объ устойчивости движенія. Разсужденіе А.Ляпунова. Изданіе Харьковскаго Математическаго Общества. Харьковъ. Типографія Зильберберга. 1892. 251 с.

[19] Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии: Лекции о моделях. Пер. с англ. Москва, Мир, 1983. 397 с. (оригінал:

Murray J.D. Lectures on nonlinear differential equations. Models in biology. Clarendon Press, Oxford. 1977).

[20] Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Лекции по методу интегральных многообразий. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1968. 416 с.

[21] Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. Москва, Наука. 1973. 512 с.

[22] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. 2-е изд. Москва, Наука, 1972. 352 с.

[23] Мышкис А.Д. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи мат. наук. 1977. 32:2(194). С.173–202.

[24] Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Москва, Наука, 1971. 722 с.

[25] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. −Издание 4-е. Москва, Наука, 1974. 331 с.

[26] Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // ПММ. 1956. Т.20. N.3. С.500-512.

[27] Резуненко А.В. Краткое введение в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом: Учебно-методическое пособие. Харьков: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2004. 41 с.

[28] Резуненко А.В., Начальные сведения о дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом, зависящим от состояния. Харьков: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2010. 44 с.

[29] Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Многотомник, Университет Дружбы народов им. Патриса Лумумбы. Москва, 1975.

[30] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. Москва, Мир. 1984. 421 с. (оригiнал: Hale J. Theory of functional differential equations, Springer-Verlag. New York. 1977).

[31] Чуешов И.Д. Введение в теорию бесконечномерных дисипативних систем. Харьков, Акта, 1999. 433 с. (English translation: Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems. 2002. URL: http://www.emis.de/monographs/Chueshov/)

[32] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б., Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Москва, Наука. 1971. 296 с.

[33] Aiello W.G., Freedmand H.I., Wu J. Analysis of a model representing state-structured population growth with state-dependent time delay // SIAM J. Appl. Math. 1992. 52. P.855-869.

[34] Al-Omary J.F.M., Gourley S.A. Dynamics of a state-structured population model incorporating a state-dependent maturation delay // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2005. 6. P.13-33.

[35] Arino O., Hadeler K.P., Hbid M.L. Existence of periodic solutions for delay differential equations with state dependent delay // Journal of Differential Equations. 1998. 144 (2), C.263-301.

[36] Arino O., Sanchez E. A saddle point theorem for functional state-dependent delay differential equations // Discr. Contin. Dynamical Systems. 2005. Vol.12, N.4. P.687-722.

[37] Arnold V.I. Ordinary differential equations. Translated from the Russian by Roger Cooke. Second printing of the 1992 edition. Universitext. Berlin, Springer-Verlag, 2006. 334 p.

[38] Batkai A., Piazzera S. Semigroups for delay equations. Research Notes in Mathematics, 10. A.K.Peters, Ltd., Wellesley, MA. 2005. 259 p.

[39] Beddington J.R. Mutual Interference Between Parasites or Predators and Its Effect on Searching Efficiency // Journal of Animal Ecology. 1975. 44.1 P.331-340.

[40] Birkhoff G.D. Dynamical Systems. AMS Colloquium Publications. 1927. Vol.9, AMS, Providence, RI. 305 c.

[41] Bocharov, G., Meyerhans, A., Bessonov, N., Trofimchuk, S., Volpert, V. Modelling the dynamics of virus infection and immune response in space and time // International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems. 2019. 34(4). P.341-355.

[42] Boutet de Monvel L., Chueshov I.D., Rezounenko A.V. Inertial manifolds for retarded semilinear parabolic equations // Nonlinear Analysis. 1998. 34. P.907-925.

[43] Boutet de Monvel L., Chueshov I.D., Rezounenko A.V. Long-time behaviour of strong solutions for a class of retarded nonlinear P.D.E.s // Communications in Partial Differential Equations. 1997. 22 (9,10). P.1453-1474.

[44] Brezis H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. New York, Springer-Verlag, 2010. 600p.

[45] Britton N.F. Spatial structures and periodic travelling waves in an integro-differential reaction-diffusion population model // SIAM. J. Appl. Math. 1990. V.50. P.1663-1688.

[46] Brunner H., Maset S. Time transformations for delay differential equations // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2009. 25(3). P.751-775.

[47] Brunner H., Maset S. Time transformations for state-dependent delay differential equations // Commun. Pure Appl. Anal., 2010, 9(1), P.23-45.

[48] Carloni G., Crema A., Valli M.B., Ponzetto A., Clementi M. HCV Infection by Cell-to-Cell Transmission: Choice or Necessity? // Current Molecular Medicine. 2012. 12. P.83–95.

[49] Carvalho A.N., Oliveira L.A. Delay partial differential equations with some large diffusion // Nonlinear Analysis. 1994. 20(9). P.1057-1095.

[50] Chepyzhov V., Vishik M.I. Appendix: Non-authonomous dynamical systems and their attractors, In: Vishik M.I., Asymptotic Behaviour of Solutions of Evolutionary Equations, Cambridge University Press, 1992. 166 p.

[51] Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Evolution equations and their trajectory attractor // J. Math. Pures Appl., 1997. 76. P.913-964.

[52] Chow S.-N., Lu K., Invariant manifolds for flows in Banach spaces // J. of Differential Equations. 1988. 74. P.285-317.

[53] Chueshov I.D. On a certain system of equations with delay, occuring in aeroelasticit // J. Soviet Math. 1992. 58. P.385-390.

[54] Chueshov I.D. Approximate inertial manifolds of exponential order for semilinear parabolic equations subjected to additive white noise // J. Dynamics and Differential Equations. 1995. 7. No.4. P.549-566.

[55] Chueshov I.D. Theory of functionals that uniquely determine asymptotic dynamics of infinite-dimensional dissipative systems // Uspekhi Matem. Nauk. 1998. 53, N.4. P.77-124 (Russian); English translation in Russian Math. Surveys 53:4.

[56] Chueshov I. Dynamics of quasi-stable dissipative systems. Universitext. Springer, Cham, 2015. xvii+390 p.

[57] Chueshov I., Lasiecka I. Attractors for second-order evolution equations with a nonlinear damping // J. of Dyn. Diff. Equations. 2004. 16. P.469-512.

[58] Chueshov I., Lasiecka I. Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping, Mem. Amer. Math. Soc. 2008 195, no. 912, viii+183 p.

[59] Chueshov I., Lasiecka I. Von Karman evolution equations. Well-posedness and long-time dynamics. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2010. 766 pp.

[60] Chueshov I., Lasiecka I. Well-posedness and long time behavior in nonlinear dissipative hyperbolic-like evolutions with critical exponents, in *Nonlinear Hyperbolic PDEs, Dispersive and Transport Equations (HCDTE Lecture Notes, Part I)*, AIMS on Applied Mathematics Vol.6 (G. Alberti et al. eds.), AIMS, Springfield, 2013, P. 1-96.

[61] Chueshov I., Lasiecka I., Webster J.T. Attractors for delayed, non-rotational von Karman plates with applications to flow-structure interactions without any damping // Communications in Partial Differential Equations. 2014. 39. P.1965-1997.

[62] Chueshov I., Lasiecka I., Webster J.T. Flow-plate interactions: well-posedness and long-time behavior // Discrete Continuous Dynamical Systems Ser.S. 2014. 7. P.925-965.

[63] Chueshov I.D., Rezounenko A.V. Global attractors for a class of retarded quasilinear partial differential equations // C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I. 1995, 321. P.607-612; (detailed version: Math.Physics, Analysis, Geometry. 1995, Vol.2. N.3. P.363-383).

[64] Chueshov I., Rezounenko A. Dynamics of second order in time evolution equations with state-dependent delay // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2015. Vol.123–124. P.126-149.

[65] Chueshov I., Rezounenko A. Finite-dimensional global attractors for parabolic nonlinear equations with state-dependent delay // Commun. Pure Appl. Anal. 2015, 14. P.1685–1704.

[66] Constantin P., Foias C., Nicolaenko B., Temam R., Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations, Springer, Berlin, 1989. 123p.

[67] Cooke K.L., Huang W.Z. On the problem of linearization for state-dependent delay differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. 124, No.5. P.1417-1426.

[68] DeAngelis D.L., Goldstein R.A., O'Neill R.V. A Model for Tropic Interaction // Ecology. 1975. Vol.56, N.4. P.881-892.

[69] Datko R., You Y.C. Some second-order vibrating systems cannot tolerate small delays in their damping // J. Optim. Theory. Appl. 1991. 70, N.3. P.521-537.

[70] Datko R. An example of an unstable neutral differential equation // Internat. J. Control. 1983. 38. N.1, P.263-267.

[71] Debussche A., Marion M. On the Construction of Families of Approximate Inertial Manifolds // Journal of Differential Equations. 1992. Vol.100, N.1. P.173-201.

[72] Debussche A., Dubois T. Approximation of exponential order of the attractor of a turbulent flow // Physica D. 1994. Vol.72. P.372-389.

[73] Debussche A., Temam R. Inertial manifolds and their dimension, in "Dynamical Systems, Theory and Applications" Eds. Andersson S.I., Anderson A.E., Ottson O. World Scientific, 1993.

[74] Debussche A., Temam R. Convergent families of approximate inertial manifolds // J. Math. Pure Appl. 1994. 73. P.489-522.

[75] Debussche A., Temam R. Some new generalizations of inertial manifolds // Discr. Contin. Dynamical Systems. 1996. 2. P.543-558.

[76] Diekmann O., van Gils S.A., Verduyn Lunel S.M., Walther H.-O. Delay equations. Functional, complex, and nonlinear analysis, Springer-Verlag, New York, 1995. 534 p.

[77] Driver R.D. A two-body problem of classical electrodynamics: the one-dimensional case // Ann. Physics. 1963. 21. P.122-142.

[78] Driver R.D. Existence theory for a delay-differential system // Contributions to Differential Equations. 1963. 1. P.317-336.

[79] Driver R.D. A functional-differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics // Internat. Sympos. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics. 1963. Academic Press, New York. P. 474-484

[80] Driver R.D. Ordinary and delay differential equations. Applied Mathematical Sciences, Vol. 20. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. 501 p.

[81] Eden A., Foias C., Nicolaenko B., Temam R., Exponential Attractors for Dissipative Evolution Equations. Paris, Masson, , Collection Recherches au Mathematiques Appliquees, 1994. 190 p.

[82] Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. With contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafune, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli, R. Schnaubelt. Graduate Texts in Mathematics, 194. Springer-Verlag, New York, 2000. xxii+586 pp.

[83] Fitzgibbon W.E. Semilinear functional differential equations in Banach space // J. Differential Equations. 1978. 29. N.1. P.1-14.

[84] Foias C., Manley O., Temam R. Sur l'interaction des petits et grands tourbillons dans les ecoulements turbulents // C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I. 1987. 305. P.497-500.

[85] Foias C., Prodi G. Sur le comportement global des solutions non-stationnaires des equations de Navier-Stokes en dimension 2. // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1967. 39. P.1-34.

[86] Foias C., Sell G., Temam R. Variétés Inertielles des équations différentielles dissipatives // C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I. 1985. 301. P.139-142.

[87] Foias C., Sell G., Temam R. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations // J. Diff. Eqns. 1988. 73. P.309-353.

[88] Foias C., Sell G., Titi E. Exponential tracking and approximation of inertial manifolds for dissipative equations // J. Dyn. Diff. Eqns. 1989. 1. P.199-224.

[89] Gourley S.A., Kuang Y., Nagy J.D. Dynamics of a delay differential equation model of hepatitis B virus infection // Journal of Biological Dynamics. 2008. 2. P.140-153.

[90] Glass L., Mackey M.C. Pathological physiological conditions resulting from instabilities in physiological control systems // Ann. NY. Acad. Sci. 1979. 316, P.214-235.

[91] Gourley S., So J., Wu J. Non-locality of reaction-diffusion equations induced by delay: biological modeling and nonlinear dynamics // Journal of Mathematical Sciences. 2004. 124. P.5119-5153.

[92] Hadamard J. Sur les problèmes aux derivees partielles et leur signification physique // Bull. Univ. Princeton. 1902. P.13.

[93] Hadamard J. Le problème de Cauchy et les èquations aux derivees partielles linéaires hyperboliques, Hermann, Paris, 1932. 560 p.

[94] Halanay H., Yorke J.A. Some new results and problems in the theory of differential-delay equations // SIAM Rev. 1971. 13. P.55-80.

[95] Hale J., Verduyn Lunel S.M. Theory of functional differential equations. 1993. Springer-Verlag, New York.

[96] Hale J.K. Asymptotic Behavior of Dissipative Systems. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988. 198 p.

[97] Hale J.K., Magalhaes L.T., Oliva W.M. Dynamics in infinite dimensions. With an appendix by Krzysztof P. Rybakowski. Second edition. Applied Mathematical Sciences, 47. Springer-Verlag, New York, 2002. viii+280 pp.

[98] Hartung F., Krisztin T., Walther H.-O., Wu J. Functional differential equations with state-dependent delay: theory and applications. *In:* Canada, A., Drabek, P., Fonda, A., (eds.) Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations, vol. 3, P. 435-545. Elsevier Science B.V., North Holland, Amsterdam, 2006.

[99] Hartung F. On Differentiability of Solutions with respect to Parameters in Neutral Differential Equations with State-Dependent Delays // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 2013. 192. P.17-47.

[100] Hartung F., Turi J. Stability in a class of functional-differential equations with state-dependent delays. In Qualitative Problems для Differential Equations and Control Theory, (ed.) C. Corduneanu, Qualitative problems for differential equations and control theory, P.15-31, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.

[101] Hattaf K., Yousfi N. A generalized HBV model with diffusion and two delays // Computers and Mathematics with Applications. 2015. 69. P.31–40.

[102] Henry D. Linear autonomous neutral functional differential equations // J. Differential Equations. 1974. 15. P. 106-128.

[103] Henry D. Geometric theory of semi–linear parabolic equations. New York. Springer, 1981. 348 p.

[104] Hernandez E., Prokopczyk A., Ladeira L. A note on partial functional differential equations with state-dependent delay // Nonlinear Anal. R.W.A. 2006. 7. N.4. P.510-519.

[105] Huang G., Ma W., Takeuchi Y., Global analysis for delay virus dynamics model with Beddington-DeAngelis functional response, Applied Mathematics Letters. 2011. 24. P.1199-1203.

[106] Ito K., Tarn T.J. A linear quadratic optimal control for neutral systems // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 1985. 9, N.7. P.699-727.

[107] Jolly M.S., Kevrekidis I.G., Titi E.S., Approximate inertial manifolds for the Kuramoto-Sivashinsky equation: analysis and computations // Physica D. 1990. 44. P.38-60.

[108] Kato T. Perturbation theory for linear operators, Berlin-Heidelberg. Springer Verlag, 1966. 623 p.

[109] Kolmanovskii V., Myshkis A. Introduction to the theory and applications of functional differential equations., Mathematics and its Applications. 463. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1999. 600 p.

[110] Kolmanovskii V.B., Nosov V.R. Stability of functional differential equations. Mathematics in Science and Engineering, 1986. Vol.180. London.: Academic Press, Inc. XIV, 217 p.

[111] Korobeinikov A. Global properties of infectious disease models with nonlinear incidence // Bull. Math. Biol. 2007. 69. N.6. P.1871-1886.

[112] Krisztin T. A local unstable manifold for differential equations with state-dependent delay // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2003. 9. P.933-1028.

[113] Krisztin T. C1-smoothness of center manifolds for delay differential equations with state-dependent delay. Fields Institute Communications; 48. 2006. Providence, American Mathematical Society, P. 213-226.

[114] Krisztin T., Arino O. The 2-dimensional attractor of a differential equation with state-dependent delay // J. Dynamics and Differential Equations. 2001. 13. P.453-522.

[115] Krisztin T., Rezounenko A. Parabolic partial differential equations with discrete state-dependent delay: Classical solutions and solution manifold // Journal of Differential Equations. 2016. Vol.260(5). P.4454–4472.

[116] Krisztin T., Walther H.-O., Wu J. Shape, smoothness and invariant stratification of an attracting set for delayed monotone positive feedback. Fields Institute Monographs. Vol.11, AMS, Providence, RI, 1999. 245 p.

[117] Krisztin T., Wu J., Monotone semiflows generated by neutral equations with different delays in neutral and retarded parts // Acta Math. Univ. Comenian. LXIII. 1994. P.207-220.

[118] Kuang Y. Delay differential equations with applications in population dynamics. Mathematics in Science and Engineering, 191. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1993. xii+398 p.

[119] Lacroix S.F. Traite du calcul differentiel et du calcul integral. 1819. V.3, 2-me ed., chap. 8, Paris.

[120] Ladyzhenskaya O. Attractors for Semigroups and Evolution Equations, Cambridge University Press. Cambridge, 1991. 88 p.

[121] Lefschetz S. Differential equations: Geometric theory. Dover New York, 1977. 397 p.

[122] Lions J.L. Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires. Dunod. Paris, 1969. 554 p.

[123] Lions J.L., Magenes E. Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Vol.1. Springer. New York, 1972. 360 p.

[124] Louihi M., Hbid M.L., Arino O. Semigroup properties and the Crandall Liggett approximation for a class of differential equations with state-dependent delays // Journal of Differential Equations. 2002. 181. P.1-30.

[125] Mackey M.C., Glass L. Oscillation and chaos in physiological control system // Science. 1977. 197. P.287-289.

[126] Mallet-Paret J., Nussbaum R.D., Paraskevopoulos P. Periodic solutions for functional-differential equations with multiple state-dependent time lags // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1994. 3. N.1, P.101-162.

[127] Mallet-Paret J., Nussbaum R.D. Boundary layer phenomena for differential-delay equations with state-dependent time lags I // Archive for Rational Mechanics та Analysis. 1992. 120. P.99-146.

[128] Mallet-Paret J., Nussbaum R.D. Boundary layer phenomena for differential-delay equations with state-dependent time lags II // J. Reine Angew. Math. 1996. 477. P.129-197.

[129] McCluskey C., Yang Yu. Global stability of a diffusive virus dynamics model with general incidence function and time delay // Nonlinear Anal. Real World Appl. 2015. 25. P.64-78.

[130] Minorsky N. Self-excited in dynamical systems possessing retarded actions // Journal of Applied Mechanics. 1942. 9. P. 65-71.

[131] Nemytskii V.V., Stepanov V.V. Qualitative Theory of Differential Equations, Princeton University Press, NJ, 1960. 523 p.

[132] Nowak M., Bangham C. Population dynamics of immune response to persistent viruses // Science. 1996. 272. P.74-79.

[133] Marion M. Approximate inertial manifolds for reaction-diffusion equations in high space dimension // J. Dynamics та Diff. Equs. 1989. 1. P.245-267.

[134] Martin R.H. Jr., Smith H.L. Abstract functional-differential equations and reaction-diffusion systems // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. 321. N.1. P.1-44.

[135] Martin R.H. Jr., Smith H.L. Reaction-diffusion systems with time delays: monotonicity, invariance, comparison and convergence // J. reine angew Math. 1991. 413. P.1-35.

[136] Miranville A., Zelik S. Attractors for dissipative partial differential equations in bounded and unbounded domains, In *Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations* (C. M. Dafermos and M. Pokorny eds.), vol.4, Elsevier, Amsterdam, 2008. P.103–200.

[137] Mittler J., Sulzer B., Neumann A., Perelson A. Influence of delayed viral production on viral dynamics in HIV-1 infected patients // Math. Biosci. 1998. 152. P.143-163.

[138] Mora X. Finite-dimensional attracting invariant manifolds for damped semilinear wave equations // Res. Notes in Math. 1987. 155. P.172-183.

[139] Murray J.M., Kelleher A.D., Cooper D.A. Timing of the Components of the HIV Life Cycle in Productively Infected CD4+ T Cells in a Population of HIV-Infected Individuals // J. Virol. 2011. Vol.85. N.20. P.10798-10805.

[140] Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R. Some global dynamical properties of a class of patern formation equations // Commun. in Partial Differential Equations. 1989. 4(2). P.245-297.

[141] Parrott M.E. Linearized stability and irreducibility for a functional differential equation // SIAM J. Math. Anal. 1992. 23. P.649-661.

[142] Pata V., Zelik S. A result on the existence of global attractors for semigroups of closed operators // Commun. Pure. Appl. Anal. 2007. 6. P.481-486.

[143] Pawlotsky J.M. New hepatitis C virus (HCV) drugs and the hope for a cure: concepts in anti-HCV drug development // Semin Liver Dis. 2014. 34(1). P.22-29.

[144] Pazy A. Semigroups of Linear Operators та Applications to Partial Differential Equations, Springer, 1983. 281 p.

[145] Perelson A., Neumann A., Markowitz M., Leonard J., Ho D. HIV-1 dynamics in vivo: Virion clearance rate, infected cell life-span, and viral generation time // Science. 1996. 271. P.1582-1586.

[146] Poisson S.D. Sur les équations aux différences melées // J. de l'Ecole Polytechnique Paris. 1806. (1)6, cahier 13. P.126-147.

[147] Rezounenko A.V. On singular limit dynamics for a class of retarded nonlinear partial differential equations // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. 1997. 4(1/2). P.193-211.

[148] Rezounenko A.V. Inertial manifolds with delay for retarded semilinear parabolic equations // Discr. Contin. Dynamical Systems. 2000. 6. P.829-840.

[149] Rezounenko A.V. On boundary value problem for a class of retarded nonlinear partial differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2001. Vol.254. N.2. P.515-523.

[150] Rezounenko A.V. Steady approximate inertial manifolds of exponential order for semilinear parabolic equations // Differential and Integral Equations. 2002. 15. P.1345-1356.

[151] Rezounenko A.V. A sufficient condition for the existence of approximate inertial manifolds containing the global attractor // C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I. 2002. 334. P.1015-1020.

[152] Rezounenko A.V. Inertial manifolds for retarded second order in time evolution equations // Nonlinear Analysis. 2002. 51. P.1045-1054.

[153] Rezounenko A.V. Approximate inertial manifolds for retarded semilinear parabolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. 282(2). P.614-628.

[154] Rezounenko A.V. Investigations of retarded PDEs of second order in time using the method of Inertial manifolds with delay // Annales de l'Institut Fourier. 2004. Vol.54. Issue 5. P.1547-1564.

[155] Rezounenko A.V., Wu J. A non-local PDE model for population dynamics with state-selective delay: local theory and global attractors // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2006. 190(1-2). P.99-113.

[156] Rezounenko A.V. Partial differential equations with discrete and distributed state-dependent delays // Journal of Mathematical Analysis and Applica-

tions. 2007. 326(2). P.1031-1045. (see also detailed *preprint*, March 22, 2005, http://arxiv.org/pdf/math.DS/0503470).

[157] Rezounenko A.V. Stability of positive solutions of local partial differential equations with a nonlinear integral delay term // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2008. N.17. P. 1-7.

[158] Rezounenko A.V. On a class of P.D.E.s with nonlinear distributed in space and time state-dependent delay terms // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2008. Vol.31, Issue 13. P.1569-1585.

[159] Rezounenko A.V. Differential equations with discrete state-dependent delay: uniqueness and well-posedness in the space of continuous functions // Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods and Applications. 2009. Vol.7., Issue 11. P.3978-3986.

[160] Rezounenko A.V. Non-linear partial differential equations with discrete state-dependent delays in a metric space // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2010. 73(6). P.1707-1714.

[161] Rezounenko A.V. Non-local PDEs with a state-dependent delay term presented by Stieltjes integral // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (Comptes Rendus Mathematique). 2011. Vol.349. Issues 3-4. P.179-183.

[162] Rezounenko A.V. A condition on delay for differential equations with discrete state-dependent delay // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2012. 385. P.506-516.

[163] Rezounenko A.V. Local Properties of Solutions to Non-Autonomous Parabolic PDEs with State-Dependent Delays // Journal of Abstract Differential Equations and Applications. 2012. Vol.2. N.2, P.56-71.

[164] Rezounenko A.V., Zagalak P. Non-local PDEs with discrete state-dependent delays: well-posedness in a metric space // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A. 2013. 33. P.819-835.

[165] Rezounenko A.V. On time transformations for differential equations with state-dependent delay // Central European Journal of Mathematics. 2014. Vol.12, Issue 2. P.298-307.

[166] Rezounenko A. Continuous solutions to a viral infection model with general incidence rate, discrete state-dependent delay, CTL and antibody immune responses // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2016. N.79. P.1–15.

[167] Rezounenko A. Stability of a viral infection model with state-dependent delay, CTL and antibody immune responses // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B. 2017. Vol.22, Issue 4. P.1547-1563.

[168] Rezounenko A. Viral infection model with diffusion and state-dependent delay: a case of logistic growth, Proceedings of Equadiff 2017 Conference, Bratislava, July 24-28, 2017, K. Mikula, D. Sevcovic and J. Urban, Eds. Published by Slovak University of Technology, SPEKTRUM STU Publishing, 2017. P.53-60.

[169] Rezounenko A. Viral infection model with diffusion and state-dependent delay: Stability of classical solutions // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B. 2018. Vol.23. Issue 3. P.1091-1105.

[170] Rezunenko A.V. Study of partial differential equations with state-dependent delay// 77th GAMM Annual Meeting 2006: Proceedings of conference, Technical University of Berlin, March 27-31. 2006: Book of Abstracts. P. 90.

[171] Rezounenko A. Investigations of partial differential equations with discrete and distributed state-dependent delays // ICMP09 - XVI International Congress on Mathematical Physics: Proceedings of congress, August 3–8, 2009: Abstracts. Prague, Czech Republic. P. 62.

[172] Rezounenko A.V. Some approaches to investigations of partial differential equations with state-dependent delays // Ukrainian mathematical congress -

2009, Dedicated to the Centennial of N.N. Bogoliubov, August 27-29, 2009: Abstracts. Kyiv, Ukraine. http://www.imath.kiev.ua/ congress2009 .

[173] Rezounenko A.V. Study of well-posedness and qualitative properties of solutions to parabolic partial differential equations with state-dependent delays // The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications: Proceedings of conference, May 25-28, 2010: Book of Abstracts. Dresden, Germany. P. 51.

[174] Rezounenko A.V. Some properties of solutions to parabolic partial differential equations with state-dependent delays // The 9th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations: Proceedings of conference, Szeged, Hungary, June 28-July 1, 2011. P. 44.

[175] Резуненко О.В. Властивості розв'язків параболічних рівнянь із запізненням, що залежить від стану // Динамічні системи та їх застосування: матеріали конференції, 16-18 травня 2012 р., м. Київ. Тези доповідей, С. 36.

[176] Rezounenko A.V. Well-posedness of parabolic partial differential equations with state-dependent delays in different spaces // Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем (DSMSI-2013): матеріали XVI Міжнародної конференції, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, 29-31 травня 2013, Київ, С.71.

[177] Rezounenko A. Reaction diffusion systems with different types of delays // The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems Differential Equations and Applications, July 7 - July 11, 2014, Madrid, Spain; Special Session 24: "Qualitative Analysis of Reaction Diffusion Systems": Proceedings of conference. P. 111.

[178] Rezounenko A. Local and asymptotic properties of solutions to parabolic partial differential equations with state-dependent delays // The 10th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations: Proceedings of

conference, July 1-4, 2015, Bolyai Institute, University of Szeged, Hungary: Abstracts. P. 54.

[179] Rezounenko A. Some qualitative properties of solutions to parabolic partial differential equations with state-dependent delays // Differential equations and control theory, dedicated to the 75th anniversary of professor V.I.Korobov: Proceedings of conference, September 26-28, 2016, Kharkiv, Ukraine: Book of abstracts. P. 11.

[180] Rezounenko A. Partial differential equations with state-dependent delays: different types of solutions // VI International Conference "Analysis and mathematical physics" dedicated to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory: Proceedings of conference, Kharkiv, Ukraine, June 18-22, 2018. P. 28-29.

[181] Rezounenko A. Stability Properties of Solutions to Nonlinear PDEs and ODEs with State-Dependent Delays // The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications: Proceedings of conference, July 5 – July 9, 2018, Taipei, Taiwan. P. 185.

[182] Rezounenko A. Well-posedness and asymptotic properties of solutions to nonlinear PDEs and ODEs in the presence of state-dependent delay // The IFIP TC 7 Conference on System Modelling and Optimization: Proceedings of conference, July 23–27, 2018, Universitat Duisburg-Essen, Essen. Invited talk on the mini-symposium 06: 'HONORING THE WORK OF IGOR CHUESHOV'. P. 28.

[183] Rezounenko A. Solutions to nonlinear systems of reaction-diffusion equations /ODEs with delay // The 3rd international scientific conference "Differential Equations and Control Theory" (DECT-2018): Proceedings of conference, V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine, 25-27 September 2018. P. 41.

[184] Robinson, J. Inertial manifolds with and without delay // Discr. Contin. Dynamical Systems. 1999. 5. P.813-824.

[185] Ruess W.M. Existence of solutions to partial differential equations with delay, *in*: Theory and applications of nonlinear operators of accretive for monotone type, Lecture Notes Pure Appl. Math. 178. 1996. P. 259-288.

[186] Ruess W.M. Flow invariance for nonlinear partial differential delay equations // Trans. Amer. Math. Soc. 2009. 361. P.4367-4403.

[187] Sell G.R., You Y. Dynamics of evolutionary equations, Applied Mathematical Sciences, 143. Springer-Verlag, New York, 2002. xiv+670 p.

[188] Simon J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 1986. Vol.146. Issue 1. P.65-96.

[189] Sharpe F.R., Lotka A.J. Contributions to the analysis of malaria epidemiology. IV. Incubation lag // Amer. J. Hyg. 1923. 3 (Suppl 1). P.96–112.

[190] Shimanov S.N. On the stability in the critical case of a zero root for systems with time lag // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1960. Vol.24, Issue 3. P.653–668; (оригінал: Ob ustoichivosti v kriticheskom sluchae odnogo nulevogo kornia dlia sistem s posledeistviem // PMM. 1960. Vol.24. N. 3. P.447–457).

[191] Showalter R.E. Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. AMS. Mathematical Surveys and Monographs. Vol.49. 1997. 278 p.

[192] Shudo E., Ribeiro R.M., Talal A.H., Perelson A.S. A hepatitis C viral kinetic model that allows for time-varying drug effectiveness // Antiviral Therapy. 2008. 13(7). P.919-926.

[193] Smith H.L. Monotone dynamical systems. An introduction to the theory of competitive and cooperative systems. Mathematical Surveys and Monographs, 41. American Mathematical Society, Providence, RI. 1995. x+174p.

[194] Smith H. An Introduction to Delay Differential Equations with Sciences Applications to the Life, Texts in Applied Mathematics, vol.57, Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London, 2011. 172 p.

[195] So J.W.-H., Wu J., Yang Y. Numerical steady state and Hopf bifurcation analysis on the diffusive Nicholson's blowflies equation // Appl. Math. Comput. 2000. 111. N.1. P.33-51.

[196] So J.W.-H., Wu J., Zou X. A reaction diffusion model for a single species with age structure. I. Travelling wavefronts on unbounded domains // Proc. Royal. Soc. Lond. A. 2001. 457. P.1841-1853.

[197] So J.W.-H., Yang Y. Dirichlet problem for the diffusive Nicholson's blowflies equation // J. Differential Equations. 1998. 150(2). P.317-348.

[198] Schwartz L. Theorie des distributions. I et II. Hermann: Paris, 1950-1951. 169 p.

[199] Taboada M., You Y.C. Invariant manifolds for retarded semilinear wave equations // J. Diff. Eqns. 1994. 114. P.337-369.

[200] Temam R. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1988. 650 p.

[201] Titi E.S. On approximate inertial manifolds to the Navier-Stokes equations // J. Math. Anal. Appl. 1990 149(2). P.540-557.

[202] Travis C.C., Webb G.F. Existence and stability for partial functional differential equations // Transactions of AMS. 1974. 200. P.395-418.

[203] Travis C.C., Webb G.F. Partial differential equations with deviating arguments in the time variable // J. Math. Anal. Appl. 1976. 56. N. 2. P.397-409.

[204] Walther H.-O. Stable periodic motion of a system with state-dependent delay // Differential and Integral Equations. 2002. 15. P.923-944.

[205] Walther H.-O. The solution manifold and C^1-smoothness for differential equations with state-dependent delay // Journal of Differential Equations. 2003. N.1. P.46-65.

[206] Walther H.-O. On a model for soft landing with state-dependent delay // J. Dyn. Differ. Equ. 2007. 19(3). P.593-622.

[207] Walther H.-O. Linearized Stability for Semiflows Generated by a Class of Neutral Equations, with Applications to State-Dependent Delays // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2010. 22(3). P.439-462.

[208] Walther H.-O. Differential equations with locally bounded delay // Journal of Differential Equations. 2012. Vol.252, Issue 4. P.3001-3039.

[209] Wang X., Li Z. Dynamics for a type of general reaction-diffusion model // Nonlinear Analysis. 2007. 67. P.2699-2711.

[210] Wang F.-B., Huang Y., Zou X. Global dynamics of a PDE in-host viral model // Applicable Analysis: An International Journal. 2014. 93:11. P.2312-2329,

[211] Wang X., Liu S., A class of delayed viral models with saturation infection rate and immune response // Math. Methods Appl. Sci. 2013. 36. N. 2. P.125-142.

[212] Wang J., Pang J., Kuniya T., Enatsu Y. Global threshold dynamics in a five-dimensional virus model with cell-mediated, humoral immune responses and distributed delays // Applied Mathematics and Computation. 2014. Vol.241. P.298-316.

[213] Wang K., Wang W. Propagation of HBV with spatial dependence // Math. Biosci. 2007. 201. P.78-95.

[214] Wang J., Yang J., Kuniya T. Dynamics of a PDE viral infection model incorporating cell-to-cell transmission // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2016. 444. P.1542-1564.

[215] Webb G.F. Functional differential equations and nonlinear semigroups in L^p-spaces // J. Differential Equations. 1976. 20. N.1. P. 71-89.

[216] Winston E. Uniqueness of the zero solution for differential equations with state-dependence // J. Differential Equations. 1970. 7. P. 395-405.

[217] Wodarz D. Hepatitis C virus dynamics and pathology: the role of CTL and antibody responses // Journal of General Virology. 2003. 84. P. 1743-1750.

[218] Wodarz D. Killer cell dynamics. Mathematical and computational approaches to immunology. Interdisciplinary Applied Mathematics. 2007. Springer-Verlag, New York, 32. xiv+220 p.

[219] World Health Organization, *Global hepatitis report-2017, April 2017,* URL : http://apps.who.int/iris/bitstream/10665/255016/1/9789241565455-eng.pdf?ua=1 (дата звернення 15.05.2017). ISBN: 978-92-4-156545-5.

[220] Wu J. Theory and applications of partial functional-differential equations. Applied Mathematical Sciences. 119. Springer-Verlag, NewYork. 1996. x+429p.

[221] Xu S. Global stability of the virus dynamics model with Crowley-Martin functional response // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2012. 9. P.1-10.

[222] Yan Y., Wang W. Global stability of a five-dimesional model with immune responses and delay // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B. 2012. 17. P.401-416.

[223] Yousfi N., Hattaf K., Tridane A. Modeling the adaptive immune response in HBV infection // Journal of Mathematical Biology. 2011. 63(5). P. 933-957.

[224] Zhao Y., Xu Z. Global dynamics for a delayed hepatitis C virus infection model // Electronic Journal of Differential Equations. 2014. Vol.2014. No.132. P. 1-18.

[225] Zhu H., Zou X. Dynamics of a HIV-1 infection model with cell-mediated immune response and intracellular delay // Discrete and Continuous Dynamical Systems -Series B. 2009. 12. P.511-524.

[226] Zverkin A.M. The connection between boundedness and stability of solutions of linear systems with an infinite number of degrees of freedom // Differencial'nye Uravnenija. 1968. 4. P. 366-367. (Russian). English Transl.: Diff. Eqns. 1968. 4. P.196-197.

А. ДОДАТОК. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Публікації у виданнях, які входять до міжнародних наукометричних баз

1. Rezounenko A.V. Inertial manifolds with delay for retarded semilinear parabolic equations // Discr. Contin. Dynamical Systems. 2000. Vol.6. P.829-840. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH, MathSciNet: MR1788255).

2. Rezounenko A.V. On boundary value problem for a class of retarded nonlinear partial differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2001. Vol. 254. N.2, P.515-523. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH, MathSciNet: MR1805521).

3. Rezounenko A.V. Steady approximate inertial manifolds of exponential order for semilinear parabolic equations // Differential and Integral Equations. 2002. Vol. 15, No.11. P.1345-1356. (Zentralblatt MATH: Zbl 1161.35427, MathSciNet: MR1920691).

4. Rezounenko A.V. A sufficient condition for the existence of approximate inertial manifolds containing the global attractor // C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I. 2002. 334. P.1015-1020. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH, MathSciNet: MR1913727).

5. Rezounenko A.V. Inertial manifolds for retarded second order in time evolution equations // Nonlinear Analysis. 2002. Vol.51, No.6. P. 1045-1054. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1023.35087, MathSciNet: MR1926084).

6. Rezounenko A.V. Approximate inertial manifolds for retarded semilinear parabolic equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. 282, No.2, P. 614-628. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1039.35133, MathSciNet: MR1989676).

7. Rezounenko A.V. Investigations of retarded PDEs of second order in time using the method of Inertial manifolds with delay // Annales de l'Institut Fourier. 2004. Vol.54. No.5. P.1547-1564. (Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl

1080.35168, MathSciNet: MR2127857).

8. Rezounenko A.V., Wu J. A non-local PDE model for population dynamics with state-selective delay: local theory and global attractors //Journal of Computational and Applied Mathematics. 2006. Vol.190(1-2). P.99-113. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1082.92039, MathSciNet: MR2209496).

9. Rezounenko A.V. Partial differential equations with discrete and distributed state-dependent delays // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. Vol.326, No.2. P.1031-1045. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1178.35370 MathSciNet: MR2280961).

10. Rezounenko A.V. Stability of positive solutions of local partial differential equations with a nonlinear integral delay term // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. Proc. 8'th Coll. Qualitative Theory of Diff. Equ.. 2008. No.17. P.1-7. (Zentralblatt MATH: Zbl 1208.35160, MathSciNet: MR2509175).

11. Rezounenko A.V. On a class of P.D.E.s with nonlinear distributed in space and time state-dependent delay terms // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2008. Vol. 31, No.13. P.1569-1585. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1148.35095, MathSciNet: MR2437804).

12. Rezounenko A.V. Differential equations with discrete state-dependent delay: uniqueness and well-posedness in the space of continuous functions// Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods and Applications. 2009. Vol.70, No.11. P.3978-3986. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1163.35494, MathSciNet: MR2515314).

13. Rezounenko A.V. Non-linear partial differential equations with discrete state-dependent delays in a metric space // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2010. Vol.73, No.6. P.1707-1714. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1194.35488, MathSciNet: MR2661353).

14. Rezounenko A.V. Non-local PDEs with a state-dependent delay term presented by Stieltjes integral // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (Comptes Rendus Mathematique). 2011. Vol.349, No.3-4, 179-183. (Scopus, Web of Science, Zentral-

blatt MATH: Zbl 1213.35236, MathSciNet: MR2769904).

15. Rezounenko A.V. A condition on delay for differential equations with discrete state-dependent delay // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2012. Vol.385. No.1. P.506-516. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1242.34136, MathSciNet: MR2834276).

16. Rezounenko A.V. Local Properties of Solutions to Non-Autonomous Parabolic PDEs with State-Dependent Delays // Journal of Abstract Differential Equations and Applications. 2012. Vol. 2, No. 2. P.56-71. (Zentralblatt MATH: Zbl 1330.35493, MathSciNet: MR3010014).

17. Rezounenko A.V., Zagalak P. Non-local PDEs with discrete state-dependent delays: well-posedness in a metric space // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A. 2013. Vol.33, No.2. P.819-835. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1302.35389, MathSciNet: MR2975136).

18. Rezounenko A.V. On time transformations for differential equations with state-dependent delay // Central European Journal of Mathematics. (Open Mathematics). 2014. Vol.12, No.2. P.298-307. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1306.34109, MathSciNet: MR3130684).

19. Chueshov I., Rezounenko A. Dynamics of second order in time evolution equations with state-dependent delay // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2015. Vol.123–124. P.126-149. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1322.35155, MathSciNet: MR3353798).

20. Chueshov I., Rezounenko A. Finite-dimensional global attractors for parabolic nonlinear equations with state-dependent delay // Commun. Pure Appl. Anal. 2015. Vol.14, No.5. P.1685–1704. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1325.35253, MathSciNet: MR3359540).

21. Krisztin T., Rezounenko A. Parabolic partial differential equations with discrete state-dependent delay: Classical solutions and solution manifold // Journal of Differential Equations. 2016. Vol.260, No.5. P.4454–4472. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1334.35374, MathSciNet: MR3437594).

22. Rezounenko A. Continuous solutions to a viral infection model with gen-

eral incidence rate, discrete state-dependent delay, CTL and antibody immune responses // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2016. No. 79. P.1–15. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1389.93130, MathSciNet: MR3547455).

23. Rezounenko A. Stability of a viral infection model with state-dependent delay, CTL and antibody immune responses // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B. 2017. Vol.22, No.4. P.1547-1563. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1359.93209, MathSciNet: MR3639177).

24. Rezounenko A. Viral infection model with diffusion and state-dependent delay: Stability of classical solutions // Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B. 2018. Vol.23, No.3. P.1091-1105. (Scopus, Web of Science, Zentralblatt MATH: Zbl 1396.92085, MathSciNet: MR3810110).

Публікації, які засвідчують апробацію дисертації

Публікації у матеріалах міжнародних наукових конференцій:

25. Rezunenko A.V. Study of partial differential equations with state-dependent delay// 77th GAMM Annual Meeting 2006: Proceedings of conference, Technical University of Berlin, March 27-31. 2006: Book of Abstracts. P. 90.

26. Rezounenko A. Investigations of partial differential equations with discrete and distributed state-dependent delays // ICMP09 - XVI International Congress on Mathematical Physics: Proceedings of congress, August 3–8, 2009: Abstracts. Prague, Czech Republic. P. 62.

27. Rezounenko A.V. Some approaches to investigations of partial differential equations with state-dependent delays // Ukrainian mathematical congress - 2009, Dedicated to the Centennial of N.N. Bogoliubov, August 27-29, 2009: Abstracts. Kyiv, Ukraine. http://www.imath.kiev.ua/ congress2009 .

28. Rezounenko A.V. Study of well-posedness and qualitative properties of solutions to parabolic partial differential equations with state-dependent delays // The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications: Proceedings of conference, May 25-28, 2010: Book of Abstracts. Dresden, Germany., P. 51.

29. Rezounenko A.V. Some properties of solutions to parabolic partial differential equations with state-dependent delays // The 9th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations: Proceedings of conference, Szeged, Hungary, June 28-July 1, 2011. P. 44.

30. Резуненко О.В. Властивості розв'язків параболічних рівнянь із запізненням, що залежить від стану // Динамічні системи та їх застосування: матеріали конференції, 16-18 травня 2012 р., м. Київ. Тези доповідей, С. 36.

31. Rezounenko A.V. Well-posedness of parabolic partial differential equations with state-dependent delays in different spaces // Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем (DSMSI-2013): матеріали XVI Міжнародної конференції, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, 29-31 травня 2013, Київ, С.71.

32. Rezounenko A. Reaction diffusion systems with different types of delays // The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems Differential Equations and Applications, July 7 - July 11, 2014, Madrid, Spain; Special Session 24: "Qualitative Analysis of Reaction Diffusion Systems": Proceedings of conference. P. 111.

33. Rezounenko A. Local and asymptotic properties of solutions to parabolic partial differential equations with state-dependent delays // The 10th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations: Proceedings of conference, July 1-4, 2015, Bolyai Institute, University of Szeged, Hungary: Abstracts. P. 54.

34. Rezounenko A. Some qualitative properties of solutions to parabolic partial differential equations with state-dependent delays // Differential equations and control theory, dedicated to the 75th anniversary of professor V.I.Korobov: Proceedings of conference, September 26-28, 2016, Kharkiv, Ukraine: Book of abstracts. P. 11.

35. Rezounenko A. Viral infection model with diffusion and state-dependent delay: a case of logistic growth // Equadiff 2017: Proceedings of conference, July 24-28, 2017. Bratislava, Slovakia. P. 53-60. (Web of Science).

36. Rezounenko A. Partial differential equations with state-dependent delays: different types of solutions // VI International Conference "Analysis and mathe-

matical physics" dedicated to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory: Proceedings of conference, Kharkiv, Ukraine, June 18-22, 2018. P. 28-29.

37. Rezounenko A. Stability Properties of Solutions to Nonlinear PDEs and ODEs with State-Dependent Delays // The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications: Proceedings of conference, July 5 – July 9, 2018, Taipei, Taiwan. P. 185.

38. Rezounenko A. Well-posedness and asymptotic properties of solutions to nonlinear PDEs and ODEs in the presence of state-dependent delay // The IFIP TC 7 Conference on System Modelling and Optimization: Proceedings of conference, July 23–27, 2018, Universitat Duisburg-Essen, Essen. Invited talk on the mini-symposium 06: 'HONORING THE WORK OF IGOR CHUESHOV'. P. 28.

39. Rezounenko A. Solutions to nonlinear systems of reaction-diffusion equations /ODEs with delay // The 3rd international scientific conference "Differential Equations and Control Theory" (DECT-2018): Proceedings of conference, V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine, 25-27 September 2018. P. 41.

Відомості про апробацію результатів дисертації.

Основні результати дисертації доповідалися і обговорювалися на таких міжнародних наукових конференціях і наукових семінарах.

– Symposium in honor of Louis Boutet de Monvel "Equations aux derivees partielles et quantification", Institute of Mathematics of Jussieu, Paris, June 23-27, 2003.

– Математичний симпозіум "Перші Каразінські наукові читання", присвячений двухсотріччю Харківського університету, Харків, червень 14-16, 2004.

– 77th GAMM Annual Meeting 2006, Technical University of Berlin, March 27-31, 2006.

– The 8th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, June 25–28, 2007, Bolyai Institute, University of Szeged, Hungary.

– ICMP09 - XVI International Congress on Mathematical Physics, August 3–8, 2009, Prague, Czech Republic.

– Український математичний конгрес - 2009 (до 100-річчя від дня народження М.М. Боголюбова), м. Київ, Інститут математики НАН України, 27-29 серпня 2009 р.

– The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, May 25-28, 2010, Dresden, Germany.

– The 9th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, June 28-July 1, 2011, Bolyai Institute, University of Szeged, Hungary.

– Міжнародна конференція "Динамічні системи та їх застосування", м. Київ, Інститут математики НАН України, 16-18 травня 2012.

– XVI Міжнародна конференція "Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем" (DSMSI-2013), м. Київ, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, 29-31 травня 2013.

– The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems Differential Equations and Applications, July 7 – July 11, 2014, Madrid, Spain. Special Session 24: "Qualitative Analysis of Reaction Diffusion Systems".

– The 10th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, July 1–4, 2015, Bolyai Institute, University of Szeged, Hungary.

– Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та теорія керування" присвячена 75-річчю проф. В.І.Коробова, 26-28 вересня 2016 р. Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, Україна.

– International conference "Biomathematics Day", October 24, 2016, Centre of Excellence in Analysis and Dynamics Research, Department of Mathematics and Statistics, Helsinki University, Finland.

– International conference EQUADIFF 2017, Slovak University of Technology, Bratislava, Slovakia, July 24-28, 2017.

– VI International Conference "Analysis and mathematical physics" dedicated to the centennial anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine and the 50th anniversary of the Department of Function Theory, Kharkiv, Ukraine, June 18-22, 2018; Book of Abstracts, p.28-29.

– The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and

Applications, July 5 – July 9, 2018, Taipei, Taiwan. Invited talk on the Special Session 64: 'Delay Equations in Population Dynamics', Book of abstracts, p.185.

– The IFIP TC 7 Conference on System Modelling and Optimization, July 23–27, 2018, Universitat Duisburg-Essen, Essen, Germany. Invited talk on the mini-symposium 06: 'Honoring the work of Igor Chueshov' (Organizers: I. Lasiecka, J. Webster), Book of abstracts, p.28.

– The 3rd international scientific conference "Differential Equations and Control Theory" (DECT-2018), V.N.Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine, 25-27 September 2018; Book of abstracts, p.41.

– Міжнародні конференції "Кримська осіння математична школа-симпозіум (КРОМШ)", Крим, Ласпі, Україна (2004, 2005, 2007-2009 роки).

Наукові семінари

– Семінар кафедри математичної фізики та обчислювальної математики Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна (керівник чл.-кор. НАН України І.Д.Чуєшов), Харків, 2000-2011 (форма участі: доповіді).

– Семінар Математичного інституту Університету м.Гісена (керівник проф. Х.-О.Вальтер), Гісен, Німеччина, 2002, 2011 (форма участі: доповіді).

– Математичний семінар університету Нью Фаудленда (керівник проф. К.Зоу), Канада, 2003 (форма участі: доповідь).

– Математичний семінар ФТІНТ НАН України (керівник акад. НАН України Є.Я.Хруслов), Харків, 2016 (форма участі: доповідь).

– Семінар, що присвячений 60-ти річчю проф. Г.М.Скляра (керівник проф. В.І.Коробов), Харків, 2017 (форма участі: доповідь).

– Семінар кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники проф. Т.А.Мельник, проф. В.Г.Самойленко), Київ, 2019 (форма участі: доповідь).

B. ДОДАТОК. Додаткові теоретичні матеріали для підрозділу 3.9

Для зручності, ми нагадуємо деякі результати, що використовуються в наших дослідженнях. Для подальших деталей ми відсилаємо до цитованих джерел. По-перше ми зібрали деякі визначення та властивості, що пов'язані з (замкненими) еволюційними півгрупами. Ми починаємо з наступного поняття, яке було введене у [142].

Визначення B.1 (Замкнена півгрупа) . *Нехай $\mathcal{X}$ є повний метричний простір.* `Замкнена півгрупа` *на $\mathcal{X}$ є одно-параметрична родина (нелінійних) операторів $S_t : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ $(t \in \mathbb{R}_+)$ (або $t \in \mathbb{N}$), які задовільняють умовам*

(S.1) *$S_0 = Id_{\mathcal{X}}$ - одиничний оператор;*

(S.2) *$S_{t+\tau} = S_t S_\tau$ для всіх $t, \tau \in \mathbb{R}_+$;*

(S.3) *для всіх $t \in \mathbb{R}_+$ властивості $x_n \to x$ та $S_t x_n \to y$ дають $S_t x = y$.*

Властивості (S.1) та (S.2) є півгрупові властивості, а (S.3) каже, що S_t є замкнене (нелінійне) відображення. Ми відмічаємо, що замкненість оператора є добре відоме поняття у теорії лінійних (необмежених) операторів. Наскільки нам відомо, в контексті еволюційних операторів, це поняття вперше з'явилось у [2] як (слабка) замкненість еволюційної (сильно неперервної) півгрупи (див. також [31]). Наступне твердження є переформулюванням наслідку 6 [142], яке також враховує твердження [142, теорема 2]).

Теорема B.2 (Існування глобального атрактора) *Нехай $S_t : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ є замкнена півгрупа, що має компактну зв'язну поглинаючу множину $\mathcal{K}_{abs} \subset \mathcal{X}$. Тоді існує компактний глобальний атрактор $\mathfrak{A}$ для S_t. Цей атрактор є зв'язною множиною та $\mathfrak{A} = \omega(\mathcal{K}_{abs}) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}_+} \overline{\bigcup_{\tau \geq t} S_\tau \mathcal{K}_{abs}}$.*

Одна з бажаних властивостей атрактору є скінченновимірність. Ми нагадуємо наступне визначення (див., наприклад, [31, 200]).

Визначення B.3 Нехай $M \subset \mathcal{X}$ є компактна множина. Тоді `фрактальна (box-counting) вимірність` $dim_f M$ множини M визначається як

$$dim_f M = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln n(M,\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)},$$

де $n(M,\varepsilon)$ є мінімальна кількість замкнених куль радіусу ε, які накривають множину M.

Ми також нагадуємо (див. [81])

Визначення B.4 *Компактна множина* $\mathfrak{A}_{\exp} \subset \mathcal{C}L$ *називається* `фрактальним експоненційним атрактором` *для* S_t *тоді і тільки тоді, коли (i)* $\mathfrak{A}_{\exp}$ *є додатньо інваріантною множиною (ii) фрактальна вимірність якої є скінченна та (iii) для кожної обмеженої множини* D *існують додатні сталі* t_D, C_D *та* γ_D *такі, що*

$$\sup_{\varphi \in D} dist_{\mathcal{C}L}(S_t\varphi, \mathfrak{A}_{\exp}) \leq C_D \cdot e^{-\gamma_D(t-t_D)}, \quad t \geq t_D. \tag{B.1}$$

Для деталей щодо фрактальних експоненційних атракторів у випадку неперервних півгруп ми відсилаємо до [81], а також до недавнього огляду [136]. Ми тільки зауважимо, що (i) глобальний атрактор може бути неекспоненційним та (ii) експоненційний атрактор не є єдиним та включає глобальний атрактор.

Для доведення існування експоненційного атрактора ми потребуємо наступний результат, який наведений у [56] та є варіантом результату, що доведений у [58] для метричних просторів (деякі часткові форми теореми B.5 є відомими з [57, 59]).

Теорема B.5 *Нехай* M *є обмежена замкнена множина у деякому просторі Банаха* Y *та* $V : M \to M$ *є неперервне відображення. Нехай існують липшицеве відображення* K *з* M *до деякого простору Банаха* Z *та компактна півнорма* $n_Z(x)$ *на* Z *такі, що*

$$\|Vv^1 - Vv^2\| \leq q\|v^1 - v^2\| + n_Z(Kv^1 - Kv^2) \tag{B.2}$$

для всіх $v^1, v^2 \in M$, *де* $0 < q < 1$ *є сталою. Тоді для кожного* $\theta \in (q, 1)$ *існує додатньо інваріантна компактна множина* $A_\theta \subset M$ *скінченної фрактальної вимірності, яка задовільняє*

$$\sup\left\{\operatorname{dist}(V^k u, A_\theta) \;:\; u \in M\right\} \le r\theta^k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{B.3}$$

для деякої сталої $r > 0$. *Більш того,*

$$\dim_f A_\theta \le \ln m_Z\left(\frac{2L_K}{\theta - q}\right) \cdot \left[\ln \frac{1}{\theta}\right]^{-1},$$

де $L_K > 0$ *є сталою Липшиця для* K:

$$\|Kv^1 - Kv^2\|_Z \le L_K\|v^1 - v^2\|, \quad v^1, v^2 \in M,$$

та $m_Z(R)$ *є максимальною кількістю елементів* z_i *у кулі* $\{z \in Z : \|z_i\|_Z \le R\}$, *що мають властивість* $n_Z(z_i - z_j) > 1$ *коли* $i \ne j$.

C. ДОДАТОК. Додатковий матеріал для підрозділу 3.10

Ми використовуємо метод О.М.Ляпунова. Присутність загаюваного елемента M вимагає змін в стандарному функціоналі О.М.Ляпунова V, який використовується для систем другого порядку (див, наприклад, доведення теореми 3.10 у [58, с.43-46]).

Ми використовуємо наступний функціонал

$$\widetilde{V}(t) \equiv \mathcal{E}(u(t), \dot{u}(t)) + \gamma(u(t), \dot{u}(t)) + \frac{\mu}{h}\int_0^h \left\{\int_{t-s}^t ||\dot{u}(\xi)||^2 d\,\xi\right\} ds.$$

Тут $\mathcal{E}$ визначена у (3.287) та додатні параметри γ and μ будуть обрані далі.

C.1. Асимптотичні властивості: квазістійкість

Система (S_t, W), що породжена рівнянням із загаюванням (3.275) має певну властивість асимптотичної компактності, яку ми називаємо "квазістійкість" (див. [59] та [60]) та означає, що будь-які дві траєкторії системи є збіжними по модулю компактого елемента.

Квазістійкість потребує додаткових гіпотез щодо системи. Ми припускаємо

(M4) *Існує $\delta > 0$ таке, що загаюваний елемент M задовільняє субкритичну властивість Липшиця, тобто для будь-якого $\varrho > 0$ існує $L(\varrho) > 0$ таке, що для будь-яких $\varphi^i, i = 1,2$ таких, що $||\varphi^i||_W \le \varrho$, маємо*

$$\|M(\varphi^1) - M(\varphi^2)\| \le L(\varrho) \max_{\theta\in[-h,0]} ||A^{1/2-\delta}(\varphi^1(\theta) - \varphi^2(\theta))||. \tag{C.1}$$

Як у зауваженні 3.127, ми бачимо, що (C.1) виконується для M, яке дано у (3.301) якщо ми припустимо, що

$$|\tau(\varphi^1) - \tau(\varphi^2)| \le L_\tau(\varrho) \max_{\theta\in[-h,0]} ||A^{1/2-\delta}(\varphi^1(\theta) - \varphi^2(\theta))||. \tag{C.2}$$

Далі ми також вирізняємо випадки критичної та субкритичної нелінійності (без загаювання) F. Ми вводимо наступні гіпотези

(F4) *Нехай нелінініcть (без загаювання) $F : D(A^{\frac{1}{2}}) \to H$ задовільняє одній з наступних умов:*

(a) ***або*** *вона* субкритична, *тобто, існує додатне η таке, що для кожного $R > 0$ існує $L_F(R) > 0$ таке, що*

$$||F(u^1) - F(u^2)|| \le L_F(R)||A^{\frac{1}{2}-\eta}(u^1 - u^2)||, \ \ \forall\, u^1, u^2 \in D(A^{\frac{1}{2}}), \ ||A^{\frac{1}{2}}u^i|| \le R; \tag{C.3}$$

(b) ***або*** *вона* критична, *тобто, (C.3) виконується з $\eta = 0$, та параметр гасіння k є достатньо великий.*

Теорема C.1 (Квазістійкість) *Нехай умови* **(A1), (F1), (F2), (F4), (M1), (M2)** *та* **(M4)** *виконані. Тоді існує додатні сталі $C_1(R)$, $\widetilde{\lambda}$ та $C_2(R)$ такі, що для будь-яких двох розв'язків $u^i(t)$ із початковим функціями φ^i та які мають властивість*

$$||\dot{u}^i(t)||^2 + ||A^{\frac{1}{2}}u^i(t)||^2 \le R^2 \quad \text{для всіх} \quad t \ge -h, \ \ i = 1, 2, \tag{C.4}$$

наступна квазістійка оцінка має місце:

$$||\dot{u}^1(t) - \dot{u}^2(t)||^2 + ||A^{\frac{1}{2}}(u^1(t) - u^2(t))||^2$$
$$\le C_1(R)e^{-\widetilde{\lambda}t}|\varphi^1 - \varphi^2|_W^2 + C_2(R)\max_{\xi\in[0,t]}||A^{1/2-\delta}(u^1(\xi) - u^2(\xi))||^2 \tag{C.5}$$

з деяким $\delta > 0$. У критичному випадку $k \ge k_0(R)$ для деякого $k_0(R) > 0$.

Ми підкреслюємо, що теорема C.1 не вимагає **(F3)** та **(M3)** та стосується лише пари рівномірно обмежених розв'язків. Однак, якщо умови **(F3)** та **(M3)** виконані, тоді завдяки твердженню 3.128 (1) існує обмежена позитивно інваріантна поглинаюча множина. Отже, за умов твердження 3.128, ми можемо застосувати теорему C.1 на цій множині, А саме, ми маємо наступний

Наслідок C.2 *Нехай виконані умови (A1), (F1)-(F4) та (M3) з (C.2). Нехай $\mathcal{B}_0$ є додатньо інваріантна поглинаюча множина для (S_t, W) така, що $\mathcal{B}_0 \subset \{\varphi \in W : |\varphi|_W \le R\}$. Тоді існують $C_i(R) > 0$ та $\widetilde{\lambda} > 0$ такі, що (C.5) виконується для довільних пар розв'язків $u^1(t)$ та $u^2(t)$, які починаються у $\mathcal{B}_0$.*

D. ДОДАТОК. Доведення теореми 4.7

Розглянемо функцію Ляпунова (4.19). Ми використовуємо ті самі позначення, як у [224] для спрощення порівняння розрахунків. Не дивлячись та той самий функціонал Ляпунова, як у [224], похідна в силу системи для $U^1(t)$ вздовж розв'язоку u для (4.3) є іншою завдяки залежності від стану загаювання в системі. Маємо наступний вираз для похідної в силу системи

$$\frac{d}{dt}U^1(t) = \left(1 - \frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t),\widehat{V})}\right) e^{-\omega h}\left(\lambda - dT(t) - f(T(t),V(t))\right)$$

$$+\left(1 - \frac{\widehat{T^*}}{T^*(t)}\right)\left(e^{-\omega h} f(T(t-\eta(u_t)), V(t-\eta(u_t))) - \delta T^*(t) - pY(t)T^*(t)\right)$$

$$+\frac{\delta + P\widehat{Y}}{N\delta}\left(1 - \frac{\widehat{V}}{V(t)}\right)\left(N\delta T^*(t) - cV(t) - qA(t)V(t)\right)$$

$$+\frac{p}{\beta}\left(1 - \frac{\widehat{Y}}{Y(t)}\right)\left(\beta T^*(t)Y(t) - \gamma Y(t)\right)$$

$$+\frac{q}{Ng}\left(1 + \frac{p\widehat{Y}}{\delta}\right)\left(1 - \frac{\widehat{A}}{A(t)}\right)\left(gA(t)V(t) - bA(t)\right)$$

$$+e^{-\omega h}\left[f(T(t),V(t)) - f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})), V(t-\eta(\widehat{\varphi})))\right]$$

$$+\widehat{T^*}(\delta + p\widehat{Y})\ln\frac{f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})), V(t-\eta(\widehat{\varphi})))}{f(T(t),V(t))}.$$

Відкриваючи дужки, групуючи підібні члени та скорочуючи деякі з них, ми приходимо до

$$\frac{d}{dt}U^1(t) = \left(1 - \frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t),\widehat{V})}\right) e^{-\omega h} d\left(\widehat{T} - T(t)\right)$$

$$-\widehat{T^*}(\delta + p\widehat{Y})\left[\frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t),\widehat{V})} - \frac{f(T(t),V(t))}{f(T(t),\widehat{V})} + \frac{e^{-\omega h}}{\delta + p\widehat{Y}}\cdot\frac{f(T(t-\eta(u_t)), V(t-\eta(u_t)))}{T^*(t)}\right.$$

$$\left.+\frac{T^*(t)\cdot\widehat{V}}{\widehat{T^*}\cdot V(t)} + \frac{V(t)}{\widehat{V}} - 3 - \ln\frac{f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})), V(t-\eta(\widehat{\varphi})))}{f(T(t),V(t))}\right]$$

$$+e^{-\omega h}\left[f(T(t-\eta(u_t)), V(t-\eta(u_t))) - f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})), V(t-\eta(\widehat{\varphi})))\right].$$

Для економії місця, ми пропускаємо довгі арифметичні обчислення де ми декілька разів використовуємо рівняння (4.15), наприклад, $\frac{e^{-\omega h}}{\delta+p\widehat{Y}}=\frac{\widehat{T^*}}{f(\widehat{T},\widehat{V})}$. Далі, ми додаємо $\pm\left(1-\frac{V(t)}{\widehat{V}}\cdot\frac{f(T(t),\widehat{V})}{f(T(t),V(t))}\right)$ у квадратні дужки, аби отримати

$$\frac{d}{dt}U^1(t)=\left(1-\frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t),\widehat{V})}\right)e^{-\omega h}d\left(\widehat{T}-T(t)\right)$$

$$-\widehat{T^*}(\delta+p\widehat{Y})\left[\frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t),\widehat{V})}+\frac{T^*(t)\cdot\widehat{V}}{\widehat{T^*}\cdot V(t)}+\frac{V(t)}{\widehat{V}}\cdot\frac{f(T(t),\widehat{V})}{f(T(t),V(t))}\right.$$

$$+\frac{\widehat{T^*}}{T^*(t)}\cdot\frac{f(T(t-\eta(u_t)),V(t-\eta(u_t)))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}-4-\ln\frac{f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})),V(t-\eta(\widehat{\varphi})))}{f(T(t),V(t))}$$

$$\left.+\left\{\frac{V(t)}{\widehat{V}}-\frac{f(T(t),V(t))}{f(T(t),\widehat{V})}+1-\frac{V(t)}{\widehat{V}}\cdot\frac{f(T(t),\widehat{V})}{f(T(t),V(t))}\right\}\right]$$

$$+e^{-\omega h}\left[f(T(t-\eta(u_t)),V(t-\eta(u_t)))-f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})),V(t-\eta(\widehat{\varphi})))\right].$$

Для суми у фігурних дужках, вигляд функції f (дивись (4.4)) та обчислення дають

$$\frac{V(t)}{\widehat{V}}-\frac{f(T(t),V(t))}{f(T(t),\widehat{V})}+1-\frac{V(t)}{\widehat{V}}\cdot\frac{f(T(t),\widehat{V})}{f(T(t),V(t))}$$

$$=\frac{(V(t)-\widehat{V})^2\,k_2(1+k_1T(t))}{\widehat{V}(1+k_1T(t)+k_2\widehat{V})(1+k_1T(t)+k_2V(t))}. \tag{D.1}$$

Зараз ми додаємо $\pm\frac{\widehat{T^*}}{T^*(t)}\cdot\frac{f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})),V(t-\eta(\widehat{\varphi})))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}$ у квадратні дужки (див. вище) та підставляємо (D.1) аби отримати

$$\frac{d}{dt}U^1(t)=\left(1-\frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t),\widehat{V})}\right)e^{-\omega h}d\left(\widehat{T}-T(t)\right)$$

$$-\widehat{T^*}(\delta+p\widehat{Y})\left[\frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t),\widehat{V})}+\frac{T^*(t)\cdot\widehat{V}}{\widehat{T^*}\cdot V(t)}+\frac{V(t)}{\widehat{V}}\cdot\frac{f(T(t),\widehat{V})}{f(T(t),V(t))}\right.$$

$$+\frac{\widehat{T^*}}{T^*(t)}\cdot\frac{f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})),V(t-\eta(\widehat{\varphi})))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}$$

$$\left.-4-\ln\frac{f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})),V(t-\eta(\widehat{\varphi})))}{f(T(t),V(t))}+\frac{(V(t)-\widehat{V})^2\,k_2(1+k_1T(t))}{\widehat{V}(1+k_1T(t)+k_2\widehat{V})(1+k_1T(t)+k_2V(t))}\right]$$

$$+e^{-\omega h}\left(1-\frac{\widehat{T^*}}{T^*(t)}\right)\left[f(T(t-\eta(u_t)),V(t-\eta(u_t)))-f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})),V(t-\eta(\widehat{\varphi})))\right]. \tag{D.2}$$

Перші чотири члена у квадратних дужках підказують розділити логарифм наступним чином

$$\ln\frac{f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})),V(t-\eta(\widehat{\varphi})))}{f(T(t),V(t))}=\ln\frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t),\widehat{V})}+\ln\frac{T^*(t)\cdot\widehat{V}}{\widehat{T^*}\cdot V(t)}$$
$$+\ln\left(\frac{V(t)}{\widehat{V}}\cdot\frac{f(T(t),\widehat{V})}{f(T(t),V(t))}\right)+\ln\left(\frac{\widehat{T^*}}{T^*(t)}\cdot\frac{f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})),V(t-\eta(\widehat{\varphi})))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right). \tag{D.3}$$

Підставляючи (D.3) у (D.2), отримуємо

$$\frac{d}{dt}U^1(t)=\left(1-\frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t),\widehat{V})}\right)e^{-\omega h}d\left(\widehat{T}-T(t)\right)$$
$$-\frac{(V(t)-\widehat{V})^2\cdot\widehat{T^*}(\delta+p\widehat{Y})\,k_2(1+k_1T(t))}{\widehat{V}(1+k_1T(t)+k_2\widehat{V})(1+k_1T(t)+k_2V(t))}$$
$$-\widehat{T^*}(\delta+p\widehat{Y})\left[v\left(\frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t),\widehat{V})}\right)+v\left(\frac{T^*(t)\cdot\widehat{V}}{\widehat{T^*}\cdot V(t)}\right)+v\left(\frac{V(t)}{\widehat{V}}\cdot\frac{f(T(t),\widehat{V})}{f(T(t),V(t))}\right)\right.$$
$$\left.+v\left(\frac{\widehat{T^*}}{T^*(t)}\cdot\frac{f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})),V(t-\eta(\widehat{\varphi})))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right)\right]$$
$$+e^{-\omega h}\left(1-\frac{\widehat{T^*}}{T^*(t)}\right)\left[f(T(t-\eta(u_t)),V(t-\eta(u_t)))-f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})),V(t-\eta(\widehat{\varphi})))\right]. \tag{D.4}$$

Тут ми використовуємо функцію Вольтерра $v(x)=x-1-\ln x$ для скорочення запису. Далі, ми можемо переписати перший член у (D.4), використовуючи (4.4),

$$\left(1-\frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t),\widehat{V})}\right)e^{-\omega h}d\left(\widehat{T}-T(t)\right)=-\left(T(t)-\widehat{T}\right)^2\frac{e^{-\omega h}d(1+k_2\widehat{V})}{T(t)(1+k_1\widehat{T}+k_2\widehat{V})}. \tag{D.5}$$

Ми підставляємо останню рівність у (D.4) аби отримати

$$\frac{d}{dt}U^1(t)=-D^1(t)+S^1(t), \tag{D.6}$$

де

$$D^1(t) \equiv \left(T(t)-\widehat{T}\right)^2 \cdot \frac{e^{-\omega h} d(1+k_2\widehat{V})}{T(t)(1+k_1\widehat{T}+k_2\widehat{V})}$$
$$+\frac{(V(t)-\widehat{V})^2 \cdot \widehat{T^*}(\delta+p\widehat{Y})\, k_2(1+k_1T(t))}{\widehat{V}(1+k_1T(t)+k_2\widehat{V})(1+k_1T(t)+k_2V(t))}$$
$$+\widehat{T^*}(\delta+p\widehat{Y})\left[v\left(\frac{f(\widehat{T},\widehat{V})}{f(T(t),\widehat{V})}\right)+v\left(\frac{T^*(t)\cdot\widehat{V}}{\widehat{T^*}\cdot V(t)}\right)+v\left(\frac{V(t)}{\widehat{V}}\cdot\frac{f(T(t),\widehat{V})}{f(T(t),V(t))}\right)\right.$$
$$\left.+\,v\left(\frac{\widehat{T^*}}{T^*(t)}\cdot\frac{f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})),V(t-\eta(\widehat{\varphi})))}{f(\widehat{T},\widehat{V})}\right)\right], \tag{D.7}$$

$$S^1(t) \equiv e^{-\omega h}\left(1-\frac{\widehat{T^*}}{T^*(t)}\right)\Big[f(T(t-\eta(u_t)),V(t-\eta(u_t)))-f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})),V(t-\eta(\widehat{\varphi})))\Big]. \tag{D.8}$$

Легко бачити, використовуючи $v(x)\geq 0$, що $D^1(t)\geq 0$.

Зауваження D.1 . *Легко перевірити, що $D^1(t)=0$ тоді і тільки тоді, коли $T(t)=\widehat{T}, V(t)=\widehat{V}, T^*(t)=\widehat{T^*}$, $f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})),V(t-\eta(\widehat{\varphi})))=f(\widehat{T},\widehat{V})$. Це випливає з властивості $v(x)=0$ тоді і тільки тоді, коли $x=1$.*

Знак $S^1(t)$ є невизначеним (може змінюватись). Наша мета - показати, що $(-D^1(t)+S^1(t))\leq 0$, тобто $\frac{d}{dt}U^1(t)\leq 0$ (дивись (D.6)) та $\frac{d}{dt}U^1(t)=0$ лише у стаціонарній точці. Для оцінки члена $S^1(t)$ ми відмічаємо, що функціональна відповідь $f(T,V)$, яка визначена у (4.4), є липшицева

$$|f(T,V)-f(\widetilde{T},\widetilde{V})|\leq L_1^f\cdot|T-\widetilde{T}|+L_2^f\cdot|V-\widetilde{V}|.$$

Це дає

$$|f(T(t-\eta(u_t)),V(t-\eta(u_t)))-f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})),V(t-\eta(\widehat{\varphi})))|$$
$$\leq L_1^f\cdot|T(t-\eta(u_t))-T(t-\eta(\widehat{\varphi}))|+L_2^f\cdot|V(t-\eta(u_t))-V(t-\eta(\widehat{\varphi}))|\,.$$

Зауваження D.2 . *Обидві координати $T(t)$ та $V(t)$ розв'язку $u(t)$ задачі (4.3) є липшицевими за часом. Ми позначаємо відповідні сталі Липшиця для довільного розв'язку як L_u^T, L_u^V. Легко бачити, що для довільного δ-околу стаціонарної точки $\widehat{\varphi}$ сталі Липшиця для довільного розв'язку $|u_t-\widehat{\varphi}|\leq\delta$ (всередині цього околу) є рівномірно обмеженими, тобто $L_u^T\leq L^{T,\delta}, L^V\leq L^{V,\delta}$. Більш того, $L^{T,\delta}\to 0, L^{V,\delta}\to 0$ коли $\delta\to 0$.*

Ми продовжуємо, використовуючи умови на загаювання, що залежить від стану η (див. (4.17) та (4.18)),

$$
\begin{aligned}
&|f(T(t-\eta(u_t)), V(t-\eta(u_t))) - f(T(t-\eta(\widehat{\varphi})), V(t-\eta(\widehat{\varphi})))| \\
&\qquad \leq \left(L_1^f L^{T,\delta} + L_2^f L^{V,\delta}\right) \cdot |\eta(u_t) - \eta(\widehat{\varphi})| \\
&\qquad \leq \left(L_1^f L^{T,\delta} + L_2^f L^{V,\delta}\right) \cdot c_\eta \left((T(t) - \widehat{T})^2 + (V(t) - \widehat{V})^2\right).
\end{aligned}
$$

Це та (D.8) дають оцінку

$$
\left|S^1(t)\right| \leq e^{-\omega h} \left|1 - \frac{\widehat{T^*}}{T^*(t)}\right| \cdot \left(L_1^f L^{T,\delta} + L_2^f L^{V,\delta}\right) \cdot c_\eta \left((T(t) - \widehat{T})^2 + (V(t) - \widehat{V})^2\right). \tag{D.9}
$$

Тепер ми можемо обрати достатньо мале δ (див. зауваження) аби зробити коефіцієнт $e^{-\omega h} \left|1 - \frac{\widehat{T^*}}{T^*(t)}\right| \cdot \left(L_1^f L^{T,\delta} + L_2^f L^{V,\delta}\right) \cdot c_\eta$ у (D.9) довільно малим, що дає (див. форму $D^1(t)$ (D.7)) бажану властивість $\frac{d}{dt}U^1(t) = -D^1(t) + S^1(t) < 0$.

Зауваження D.3 *Із розрахунків вище легко бачити, що малі значення* $|T^*(t) - \widehat{T^*}|$ *самостійно дають* $\frac{d}{dt}U^1(t) < 0$. *Немає потреби вимагати малості значень* $|T(t) - \widehat{T}|, |V(t) - \widehat{V}|$. *З іншого боку, малі значення* $|T(t) - \widehat{T}|, |V(t) - \widehat{V}|$ *дають* $\frac{d}{dt}U^1(t) < 0$ *без потреби у малості* $|T^*(t) - \widehat{T^*}|$. *Альтернативно, чим менше значення сталої* c_η *(див. (4.18) та (D.9)) тим більше множина, в якій виконується* $\frac{d}{dt}U^1(t) < 0$. *Останнє дає, що у випадку достатньо малої* c_η, *стаціонарний розв'язок є* `глобально` *стійким. Тут використовується принцип інваріантності ЛаСалля (LaSalle invariance principle). В усіх випадках значення* $A(t)$ *та* $Y(t)$ *не мають впливу на вираз* $\frac{d}{dt}U^1(t)$.

Доведення теореми 4.7 завершене.