Інститут прикладної математики і механіки НАН України
Національна академія наук України

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Луньов Антон Андрійович

УДК 517.927.25

ДИСЕРТАЦІЯ

ПИТАННЯ ПОВНОТИ І БАЗИСНОСТІ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Спеціальність 01.01.01 – "Математичний аналіз"
(фізико-математичні науки)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

__________________ Луньов А.А.

Науковий керівник: **Маламуд Марк Михайлович**,
доктор фізико-математичних наук, доцент.

Харків – 2021

АНОТАЦІЯ

Луньов А. А. Питання повноти і базисності граничних задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України, Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна Національної академії наук України, Харків, 2021.

У **вступі** обґрунтовано актуальність досліджуваної задачі. Сформульовано мету, задачі та методи дослідження. Визначено наукову новизну та значення отриманих результатів. Надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

Розділ 1 присвячено огляду та аналізу літератури. У розділі описано історію проблематики та наведено ключові результати, отримані в області дослідження за останній час.

Спектральна теорія несамоспряжених граничних задач на відрізку для звичайного диференціального рівняння (ЗДР) n-го порядку з сумовними коеффіцієнтами бере свій початок в класичних роботах G. D. Birkhoff і Я. Д. Тамаркіна, де, зокрема, введено поняття регулярних граничних умов для ЗДР.

Повнота нерегулярних граничних задач для ЗДР n-го порядку вивчалась М. В. Кєлдишем, А. А. Шкаліковим, А. Г. Костюченком і А. А. Шкаліковим, Г. М. Губреєвим, А. П. Хромовим, В. С. Рихловим і багатьма іншими. Базисність Ріса регулярних граничних задач вивчалась N. Dunford, В. П. Михайловим, Г. М. Кєсєльманом, А. С. Маркусом і В. І. Мацаєвим, М. С. Аграновичем, А. А. Шкаліковим, А. Мінкіним і багатьма іншими.

Вперше загальна гранична задача для системи ЗДР першого порядку бу-

ла досліджена G. D. Birkhoff і R. E. Langer. Зокрема, вони ввели поняття регулярних граничних умов. Проблема повноти системи власних і приєднаних функцій (СВПФ) граничної задачі для системи ЗДР першого порядку вперше була досліджена М. М. Маламудом і Л. Л. Оридорогою. Вони ввели поняття слабко регулярних граничних умов і довели повноту СВПФ для цього класу граничних задач. Раніше, в окремих випадках цей результат був доведений В. А. Марченком і В. П. Гінзбургом.

Протягом останніх двадцяти років базисність Ріса для 2×2 системи Дірака з регулярними і посилено регулярними граничними умовами ретельно досліджувалася I. Trooshin і M. Yamamoto, S. Hassi і Л. Л. Оридорогою, П. Джаковим і Б. С. Мітягіним, А. Г. Баскаковим, А. В. Дєрбушовим і А. О. Щербаковим, автором і М. М. Маламудом, А. М. Савчуком і А. А. Шкаліковим. Я. В. Микитюк і Д. В. Пуйда встановили базисність Ріса задачі Діріхле для системи Дірака високого порядку з потенціалом, квадрат якого є сумовним.

Спектральна теорія граничних задач для систем ЗДР першого порядку природно виникає при дослідженні моделі балки Тимошенка. Ця модель була введена С. Тимошенком у 20-х роках, і відтоді ретельно вивчалася J. U. Kim і Y. Renardy, M. A. Shubov, A. Soufyane і A. Wehbe, G. Q. Xu і S. P. Yung, Y. Wu і X. Xue, і багатьма іншими.

Розділ 2 присвячено вивченню повноти граничної задачі для наступної системи ЗДР першого порядку:

$$L(Q)y := -iB^{-1}y' + Q(x)y = \lambda y, \quad y = \mathrm{col}(y_1, ..., y_n), \quad x \in [0,1],$$

$$Cy(0) + Dy(1) = 0, \quad C = (c_{jk}),\ D = (d_{jk}) \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

де $B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – невироджена діагональна матриця, $Q =: (q_{jk})_{j,k=1}^n \in L^1([0,1]; \mathbb{C}^{n\times n})$ – потенціальна матриця, і $\mathrm{rank}(C\ D) = n$.

Позначимо через $L_{C,D} := L_{C,D}(Q)$ оператор, асоційований з цією граничною задачею в $L^2([0,1]; \mathbb{C}^n)$ природним чином. Власні числа цього оператора співпадають з нулями характеристичного визначника $\Delta(\lambda) := \det(C + D\Phi(1,\lambda))$, де $\Phi(x,\lambda)$ – фундаментальна матриця розв'язків розглядуваної системи, що задовольняє $\Phi(0,\lambda) = I_n$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

У **підрозділі 2.1** отримано важливий загальний результат про повноту СВПФ, що зв'язує повноту зі зростом характеристичного визначника. Зауважимо, що прямі $l_{jk} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ib_j\lambda) = \mathrm{Re}(ib_k\lambda)\}$, при $b_j \neq b_k$, разом з прямими $l_j := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ib_j\lambda) = 0\}$, відокремлюють $\nu \leqslant n^2 + n$ відкритих секторів $S_p := \{z : \varphi_{1p} < \arg z < \varphi_{2p}\}$ із $\mathbb{C}$. Число $z \in \mathbb{C}$ називається *придатним*, якщо воно лежить усередині деякого сектора S_p. Головним результатом цього підрозділу є теорема 2.3.

Теорема 2.3. *Нехай $Q \in L^1([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$. Припустимо, що існують $C, R > 0$, $s \geqslant 0$ і три придатних числа z_1, z_2, z_3, що задовольняють таким умовам:*

(i) нуль є внутрішньою точкою трикутника з вершинами z_1, z_2, z_3;

(ii) для $k \in \{1,2,3\}$ маємо

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant \frac{Ce^{\mathrm{Re}(i\tau_k\lambda)}}{|\lambda|^s}, \quad \tau_k = \sum_{\mathrm{Re}(ib_jz_k)>0} b_j, \quad |\lambda| > R,\ \arg\lambda = \arg z_k.$$

Тоді СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$ повна і мінімальна в $L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$.

У **підрозділі 2.2** отримано удосконалені асимптотичні формули для розв'язків розглядуваної системи і характеристичного визначника $\Delta(\cdot)$.

Нехай $A = \mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n)$, де $\mathrm{Re}\,a_k \neq 0$. Для $n\times n$ матриць $C = (c_1\ \ldots\ c_n)$ і $D = (d_1\ \ldots\ d_n)$, допоміжна $n\times n$ матриця $T_A(C,D)$ визначається наступним чином: її k-ий стовбець співпадає з c_k, якщо $\mathrm{Re}\,a_k < 0$, і співпадає з d_k, якщо $\mathrm{Re}\,a_k > 0$. Головним результатом цього підрозділу є пропозиція 2.8.

Пропозиція 2.8. *Нехай $Q \in L^1([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$ і функції $q_{jk}(\cdot)$ є неперервними у точках 0 і 1 при $b_j \neq b_k$. Нехай $p \in \{1,\ldots,\nu\}$. Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$, характеристичний визначник $\Delta(\cdot)$ має наступну асимпто-*

тичну формулу при $\lambda \to \infty$ *і* $\lambda \in S_{p,\varepsilon} := \{z \in S_p : \varphi_{1p} + \varepsilon < \arg z < \varphi_{2p} - \varepsilon\}$,

$$\Delta(\lambda) = \left(\omega_0(z_p) \cdot (1 + o(1)) + \frac{\omega_1(z_p) + o(1)}{\lambda}\right) e^{i(\tau_p\lambda + \gamma_p)},$$

де z_p *– фіксована точка із* $S_{p,\varepsilon}$,

$$\tau_p := \sum_{\operatorname{Re}(ib_j z_p)>0} b_j, \qquad \gamma_p := \sum_{\operatorname{Re}(ib_j z_p)>0} b_j \int_0^1 q_{jj}(t)dt,$$

$$\omega_0(z_p) := \det T_{iz_pB}(C, D),$$

$$\omega_1(z_p) := \sum_{\substack{\operatorname{Re}(ib_j z_p)<0 \\ \operatorname{Re}(ib_k z_p)>0}} \frac{\det T_{iz_pB}^{c_j \to c_k} b_k q_{kj}(0) - \det T_{iz_pB}^{d_k \to d_j} b_j q_{jk}(1)}{b_k - b_j},$$

і матриця $T_{iz_pB}^{c_j \to c_k}$ $(T_{iz_pB}^{d_j \to d_k})$ *отримується із* $T_{iz_pB}(C, D)$ *заміною* j*-го стовбця на* k*-ий стовбець матриці* C *(відповідно* D*).*

Підрозділ 2.3 присвячено явним результатам про повноту, що випливають із попередніх підрозділів. Головним результатом розділу 2 є теорема 2.10.

Теорема 2.10. *Нехай* $Q \in L^1([0, 1]; \mathbb{C}^{n\times n})$, *функції* $q_{jk}(\cdot)$ *є неперервними у точках 0 і 1 при* $b_j \neq b_k$, *і для деяких* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ *виконано такі умови:*

(а) $\operatorname{Re}(ib_j z_k) \neq 0$ *при* $j \in \{1, \dots, n\}$ *і* $k \in \{1, 2, 3\}$;

(б) нуль є внутрішньою точкою трикутника з вершинами z_1, z_2, z_3;

(в) $|\omega_0(z_k)| + |\omega_1(z_k)| \neq 0$, $k \in \{1, 2, 3\}$, *де* $\omega_0(z_k)$ *і* $\omega_1(z_k)$ *введені у пропозиції 2.8.*

Тоді СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$ *повна і мінімальна в* $L^2([0, 1]; \mathbb{C}^n)$.

Пропозиція 2.14 узагальнює відповідні результати А. В. Агібалової, М. М. Маламуда і Л. Л. Оридороги для 2×2 систем.

Пропозиція 2.14. *Нехай* $n = 2$, $\arg b_1 \neq \arg b_2$, $Q \in L^1([0, 1]; \mathbb{C}^{2\times 2})$, $C = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ *і* $D = \left(\begin{smallmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{smallmatrix}\right)$. *Нехай також функції* $q_{12}(\cdot)$, $q_{21}(\cdot)$ *є неперервними у точках 0 і 1, і нехай*

$$|J_{32}| + |b_1 J_{13} q_{12}(0) + b_2 J_{42} q_{21}(1)| \neq 0,$$

$$|J_{14}| + |b_1 J_{13} q_{12}(1) + b_2 J_{42} q_{21}(0)| \neq 0,$$

де $J_{jk} := \det\left(\begin{smallmatrix} a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2j} & a_{2k} \end{smallmatrix}\right)$, $j,k \in \{1,\ldots,4\}$. *Тоді СВПФ оператора* $L_{C,D}(Q)$ *повна і мінімальна в* $L^2([0,1];\mathbb{C}^2)$.

Розділ 3 присвячено вивченню базисності Ріса та застосуванням до динамічного генератора моделі балки Тимошенка.

Головний результат **підрозділу 3.1**, теорема 3.6, встановлює блочну базисність Ріса для граничних задач з обмеженим потенціалом і граничними умовами, що роспадаються.

Теорема 3.6. *Нехай* $Q \in L^\infty([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$, $n_1 + \ldots + n_r = n/2$ *і*

$$B = \operatorname{diag}(B_j)_{j=1}^r, \quad C = \operatorname{diag}(C_j)_{j=1}^r, \quad D = \operatorname{diag}(D_j)_{j=1}^r,$$
$$B_j = \begin{pmatrix} b_{j1}I_{n_j} & 0 \\ 0 & b_{j2}I_{n_j} \end{pmatrix}, \quad C_j = \left(\begin{smallmatrix} C_{j1} & C_{j2} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad D_j = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ D_{j1} & D_{j2} \end{smallmatrix}\right),$$

де $b_{j1}b_{j2}^{-1} < 0$ *і* $C_{j1}, C_{j2}, D_{j1}, D_{j2} \in \mathrm{GL}(n_j,\mathbb{C})$. *Тоді СВПФ оператора* $L_{C,D}(Q)$ *є блочним базисом Ріса в* $L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$.

Наслідок 3.9 розглядає періодичні (антиперіодичні) граничні умови подібним чином.

Наслідок 3.9. *Нехай* $B = \operatorname{diag}(b_1,\ldots,b_n)$ *є невиродженою діагональною матрицею,* $Q \in L^\infty([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$ *і граничні умови мають вигляд* $y(1) = \pm y(0)$ *(тобто* $C = \mp D = I_n$*). Тоді СВПФ оператора* $L_{C,D}(Q)$ *є блочним базисом Ріса в* $L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$.

Підрозділ 3.2 присвячено спектральним властивостям динамічного генератора моделі балки Тимошенка, що задається наступною лінійною системою з двох сполучених гіперболічних рівнянь при $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} I_\rho(x)\Phi_{tt} &= K(x)(W_x - \Phi) + (EI(x)\Phi_x)_x - p_1(x)\Phi_t, && x \in [0,\ell], \\ \rho(x)W_{tt} &= (K(x)(W_x - \Phi))_x - p_2(x)W_t, && x \in [0,\ell], \end{aligned}$$

з наступними граничними умовами при $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} W(0,t) = \Phi(0,t) &= 0, \\ \big(EI(x)\Phi_x(x,t) + \alpha_1 \Phi_t(x,t) + \beta_1 W_t(x,t)\big)\big|_{x=\ell} &= 0, \\ \big(K(x)(W_x(x,t) - \Phi(x,t)) + \alpha_2 W_t(x,t) + \beta_2 \Phi_t(x,t)\big)\big|_{x=\ell} &= 0. \end{aligned}$$

У результатах наведених нижче коефіцієнти задовольняють таким умовам:

$$\begin{gathered} \rho, I_\rho, K, EI \in C[0,\ell], \qquad p_1, p_2 \in L^1[0,\ell], \\ 0 < C_1 \leqslant \rho(x), I_\rho(x), K(x), EI(x) \leqslant C_2, \quad x \in [0,\ell], \\ h_1 := \sqrt{EI \cdot I_\rho},\ h_2 := \sqrt{K \cdot \rho} \in W^{1,1}[0,\ell], \quad \text{і} \quad \frac{EI \cdot \rho}{K \cdot I_\rho} \equiv \mathrm{const}\,. \end{gathered}$$

Описана задача може бути записана як $y_t = i\mathcal{L}y,\ y(x,t)|_{t=0} = y_0(x)$, де $y = \mathrm{col}(\Phi, \Phi_t, W, W_t)$ і $\mathcal{L}$ – деякий звичайний диференціальний оператор другого порядку в енергетичному просторі $\mathfrak{H} := \widetilde{H}_0^1[0,\ell] \times L^2[0,\ell] \times \widetilde{H}_0^1[0,\ell] \times L^2[0,\ell]$, де $\widetilde{H}_0^1[0,\ell] := \{f \in W^{1,2}[0,\ell] : f(0) = 0\}$.

Головним результатом цього підрозділу є теореми 3.14 і 3.15.

Теорема 3.14. *За вищевказаних умов, нехай* $(\alpha_1 \pm h_1(\ell))(\alpha_2 \pm h_2(\ell)) \neq \beta_1\beta_2$. *Тоді СВПФ оператора* $\mathcal{L}$ *повна і мінімальна в* $\mathfrak{H}$.

Якщо, до того ж, $p_1, p_2, h_1', h_2' \in L^\infty[0,\ell]$ *і* $\beta_1 = \beta_2 = 0$, *то СВПФ оператора* $\mathcal{L}$ *є блочним базисом Ріса в* $\mathfrak{H}$.

Теорема 3.15. *За вищевказаних умов, нехай функції* p_1, p_2, h_1', h_2' *є неперервними у точках 0 і* ℓ. *Припустимо також, що*

$$\beta_1 = \beta_2 = 0, \quad |\alpha_1^\pm| + |\alpha_2^\pm| \neq 0 \quad i \quad |\alpha_j^\pm| + |p_j(\ell) \mp h_j'(\ell)| \neq 0, \quad j \in \{1,2\},$$

де $\alpha_j^\pm := \alpha_j \pm h_j(\ell)$. *Тоді СВПФ оператора* $\mathcal{L}$ *повна і мінімальна в* $\mathfrak{H}$.

Розділ 4 присвячено деяким спектральним властивостям ЗДР високого порядку.

Підрозділ 4.1 присвячено наступному диференціальному рівнянню другого порядку: $y'' + A(t)y = 0$, $t \in [0,+\infty)$, де $A =: A_R + iA_I$ і A_R – диференційовна функція на $[0,+\infty)$. Теорема 4.1 узагальнює результат В. Б. Лідського і Б. В. Федосова.

Теорема 4.1. *Нехай функція $A(t)$ задовольняє таким умовам:*

$$A_R(0) > 0; \qquad A'_R(t) \geqslant \alpha(t) A_R(t), \quad \text{де}$$

$$\alpha(t) \searrow 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad \text{і} \quad \int_0^\infty \alpha(t)\, dt = \infty;$$

$$A'_R(t) \geqslant C|A_I(t)|A_R(t) \quad \text{для деякої сталої} \quad C > 0.$$

Тоді всі розв'язки рівняння $y'' + A(t)y = 0$ прямують до нуля при $t \to \infty$.

Другий результат цього підрозділу, теорема 4.5, використовує ВКБ-оцінки і, схоже, є новим навіть для дійсного потенціалу.

Теорема 4.5. *Нехай функція $A(t)$ задовольняє таким умовам:*

(i) $A(t) \in C^2(0,+\infty)$ і $A(t) \to \infty$ при $t \to +\infty$;

(ii) $A_R(t) > 0$ при $t > 0$ і $A_I(t)$ не змінює знак на $(0,\infty)$;

(iii) наступні інтеграли сходяться:

$$\int_0^{+\infty} \frac{|A''(t)|}{|A(t)|^{5/2}}\, dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{|A'(t)|^2}{|A(t)|^{7/2}}\, dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{|A_I(t)|}{\sqrt{A_R(t)}}\, dt.$$

Тоді всі розв'язки розглядуваного рівняння прямують до нуля при $t \to \infty$.

Підрозділ 4.2 присвячено пошуку явної форми спектральної функції розширень Фрідріхса і Крейна мінімального симетричного оператора A заданого в $L^2(0,\infty)$ диференціальним виразом $l(y) := (-1)^n y^{(2n)}(\cdot)$.

Головними результатами цього підрозділу є теореми 4.6 і 4.7.

Теорема 4.6. *Спектральна функція розширення Фрідріхса A_F оператора A має вигляд*

$$\begin{aligned} \sigma_F(t) &= \frac{2n}{\pi}\left(\frac{C_j \cdot C_k}{2n+1+j+k} \cdot t^{\frac{2n+1+j+k}{2n}}\right)_{j,k=0}^{n-1}, \quad t \geqslant 0, \\ \sigma_F(t) &= 0, \quad t < 0. \end{aligned}$$

де

$$C_0 := 1, \qquad C_k := \prod_{p=1}^{k} \operatorname{ctg}(p\alpha), \quad \alpha = \frac{\pi}{2n}, \quad k \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Теорема 4.7 встановлює подібний результат для розширення Крейна A_K.

Ключові слова: Система звичайних диференціальних рівнянь, регулярні граничні умови, повнота кореневих векторів, базисність Ріса, модель балки Тимошенка, ВКБ-оцінки, спектральна функція, функція Вейля.

ABSTRACT

Lunyov A. Anton. On completeness and Riesz basis property of boundary value problems for systems of ordinary differential equations. — Qualification scientific paper, manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Physics and Mathematics: Speciality 01.01.01 Mathematical Analysis. — Institute of Applied Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2021.

The **introduction** substantiates the relevance of the problem under the study. The purpose, tasks and methods of research are formulated there. The scientific novelty and value of the obtained results are determined. The information about the publication, personal contribution of the applicant and testing the results of the thesis are provided.

Section 1 is devoted to the review and analysis of literature, describes the history of the problem and presents the key results in the field of recent research.

Spectral theory of non-selfadjoint boundary value problems (BVP) on a finite interval for nth order ordinary differential equations (ODE) with summable coefficients takes its origin in the classical papers by G. D. Birkhoff and J. D. Tamarkin, where they introduced the concept of regular boundary conditions (BC) for ODE.

The completeness property of non-regular BVP for nth order ODE has been studied by M. V. Keldysh, A. A. Shkalikov, A. G. Kostyuchenko and A. A. Shkalikov, G. M. Gubreev, A. P. Khromov, V. S. Rykhlov and many others. The Riesz basis property for regular BVP were investigated by N. Dunford, V. P. Mikhailov, G. M. Kesel'man, A. S. Markus and V. I. Matsaev, M. S. Agranovich, A. A. Shkalikov, A. Minkin.

The general BVP for the first order system of ODE has first been investi-

gated by G. D. Birkhoff and R. E. Langer. In particular, they introduced the concepts of regular BC. The problem of completeness of the system of root functions (SRF) of BVP for the first order system of ODE has first been investigated by M. M. Malamud and L. L. Oridoroga. They introduced the concept of weakly regular BC and proved the completeness of SRF for this class of BVP. In special cases this was obtained earlier by V. A. Marchenko and V. P. Ginzburg.

During the last two decades the Riesz basis property for 2×2 Dirac system subject to the regular or strictly regular BC has been extensively studied by I. Trooshin and M. Yamamoto, S. Hassi and L. Oridoroga, P. Djakov and B. S. Mityagin, A. G. Baskakov, A. V. Derbushev and A. O. Shcherbakov, the author and M. M. Malamud, A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov. For the Dirichlet BVP for a higher order Dirac equation with a square-summable potential Ya. V. Mykytyuk, D. V. Puyda established the Riesz basis property with parentheses.

Spectral theory for BVP of the first order systems of ODE naturally occurs in Timoshenko beam model. This model was introduced by S. Timoshenko in 1920s and has then been extensively studied by J. U. Kim and Y. Renardy, M. A. Shubov, A. Soufyane and A. Wehbe, G. Q. Xu and S. P. Yung, Y. Wu and X. Xue, and many others.

Section 2 is devoted to the study of the completeness property of the following general BVP for first order system of ODE:

$$L(Q)y := -iB^{-1}y' + Q(x)y = \lambda y, \quad y = \mathrm{col}(y_1, ..., y_n), \quad x \in [0, 1],$$

$$Cy(0) + Dy(1) = 0, \quad C = (c_{jk}),\ D = (d_{jk}) \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

where $B = \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ is a nonsingular diagonal matrix, $Q =: (q_{jk})_{j,k=1}^{n} \in L^1([0, 1]; \mathbb{C}^{n\times n})$ is a potential matrix, and $\mathrm{rank}(C\ D) = n$.

Denote by $L_{C,D} := L_{C,D}(Q)$ the operator associated in $L^2([0, 1]; \mathbb{C}^n)$ with this BVP in a natural way. Eigenvalues of this operator coincide with the zeros of the characteristic determinant $\Delta(\lambda) := \det(C + D\Phi(1,\lambda))$, where $\Phi(x,\lambda)$ is a fundamental matrix solution of the above system satisfying $\Phi(0,\lambda) = I_n$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

In **Subsection 2.1** an important general completeness result is obtained that connects completeness with the growth of the characteristic determinant. Note that the lines $l_{jk} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(ib_j\lambda) = \operatorname{Re}(ib_k\lambda)\}$, for $b_j \ne b_k$, together with the lines $l_j := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(ib_j\lambda) = 0\}$, separate $\nu \leqslant n^2 + n$ open sectors $S_p := \{z : \varphi_{1p} < \arg z < \varphi_{2p}\}$ from $\mathbb{C}$. A number $z \in \mathbb{C}$ is called *feasible* if it lies strictly inside some sector S_p. The main result of this subsection is Theorem 2.3.

Theorem 2.3. *Let $Q \in L^1([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$. Assume that there exist $C, R > 0$, $s \geqslant 0$ and three feasible numbers z_1, z_2, z_3 satisfying the following conditions:*

(i) the origin is the interior point of the triangle with vertexes z_1, z_2, z_3;

(ii) for $k \in \{1,2,3\}$ one has

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant \frac{Ce^{\operatorname{Re}(i\tau_k\lambda)}}{|\lambda|^s}, \quad \tau_k = \sum_{\operatorname{Re}(ib_jz_k)>0} b_j, \quad |\lambda| > R,\ \arg\lambda = \arg z_k.$$

Then SRF of the operator $L_{C,D}(Q)$ is complete and minimal in $L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$.

In **Subsection 2.2** refined asymptotic formulas for solutions of the above system and the characteristic determinant $\Delta(\cdot)$ are established.

Let $A = \operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n)$, where $\operatorname{Re}\, a_k \ne 0$. For $n\times n$ matrices $C = (c_1\ \dots\ c_n)$ and $D = (d_1\ \dots\ d_n)$, auxiliary $n\times n$ matrix $T_A(C,D)$ is defined as follows: its kth column is equal to c_k if $\operatorname{Re}\, a_k < 0$, and equal to d_k otherwise.

The main result of this subsection is Proposition 2.8.

Proposition 2.8. *Let $Q \in L^1([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$ and let $q_{jk}(\cdot)$ be continuous at points 0 and 1 if $b_j \ne b_k$. Let $p \in \{1,\dots,\nu\}$. Then for sufficiently small $\varepsilon > 0$, the characteristic determinant $\Delta(\cdot)$ admits the following asymptotic expansion as $\lambda \to \infty$ and $\lambda \in S_{p,\varepsilon} := \{z \in S_p : \varphi_{1p} + \varepsilon < \arg z < \varphi_{2p} - \varepsilon\}$,*

$$\Delta(\lambda) = \left(\omega_0(z_p)\cdot(1 + o(1)) + \frac{\omega_1(z_p) + o(1)}{\lambda}\right) e^{i(\tau_p\lambda + \gamma_p)},$$

where z_p is a fixed point in S_p,

$$\tau_p := \sum_{\mathrm{Re}(ib_j z_p)>0} b_j, \qquad \gamma_p := \sum_{\mathrm{Re}(ib_j z_p)>0} b_j \int_0^1 q_{jj}(t)dt,$$

$$\omega_0(z_p) := \det T_{iz_pB}(C,D),$$

$$\omega_1(z_p) := \sum_{\substack{\mathrm{Re}(ib_j z_p)<0 \\ \mathrm{Re}(ib_k z_p)>0}} \frac{\det T_{iz_pB}^{c_j\to c_k} b_k q_{kj}(0) - \det T_{iz_pB}^{d_k\to d_j} b_j q_{jk}(1)}{b_k - b_j},$$

and the matrix $T_{iz_pB}^{c_j\to c_k}$ ($T_{iz_pB}^{d_j\to d_k}$) is obtained from $T_{iz_pB}(C,D)$ by replacing its jth column by the kth column of the matrix C (resp. D).

Subsection 2.3 is devoted to the explicit completeness results that follow from the previous subsections. The main result of the whole Section 2 is Theorem 2.10.

Theorem 2.10. *Let $Q \in L^1([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$ and $q_{jk}(\cdot)$ is continuous at points 0 and 1 if $b_j \neq b_k$. Assume that some $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ satisfy the following conditions:*

(a) $\mathrm{Re}(ib_j z_k) \neq 0$ for $j \in \{1,\dots,n\}$ and $k \in \{1,2,3\}$;

(b) the origin is the interior point of the triangle with vertexes z_1, z_2, z_3;

(c) $|\omega_0(z_k)| + |\omega_1(z_k)| \neq 0$, $k \in \{1,2,3\}$, where $\omega_0(z_k)$ and $\omega_1(z_k)$ were introduced in Proposition 2.8.

Then SRF of the operator $L_{C,D}(Q)$ is complete and minimal in $L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$.

Proposition 2.14 generalizes corresponding results by A. V. Agibalova, M. M. Malamud and L. L. Oridoroga for 2×2 systems.

Proposition 2.14. *Let $n = 2$, $\arg b_1 \neq \arg b_2$, $Q \in L^1([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2})$, $C = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ and $D = \left(\begin{smallmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{smallmatrix}\right)$. Let also $q_{12}(\cdot)$, $q_{21}(\cdot)$ be continuous at the endpoints 0 and 1, and let*

$$|J_{32}| + |b_1 J_{13} q_{12}(0) + b_2 J_{42} q_{21}(1)| \neq 0,$$

$$|J_{14}| + |b_1 J_{13} q_{12}(1) + b_2 J_{42} q_{21}(0)| \neq 0,$$

where $J_{jk} := \det\left(\begin{smallmatrix} a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2j} & a_{2k} \end{smallmatrix}\right)$, $j,k \in \{1,\dots,4\}$. Then SRF of the operator $L_{C,D}(Q)$ is complete and minimal in $L^2([0,1];\mathbb{C}^2)$.

Section 3 is devoted to the study of the Riesz basis property and applications to the dynamic generator of the Timoshenko beam model.

Subsection 3.1 is devoted to the study of the Riesz basis property. The main result of this subsection, Theorem 3.6, treats BVP with separated BC.

Theorem 3.6. *Let* $Q \in L^\infty([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$, $n_1 + \ldots + n_r = n/2$ *and*

$$B = \mathrm{diag}(B_j)_{j=1}^r, \quad C = \mathrm{diag}(C_j)_{j=1}^r, \quad D = \mathrm{diag}(D_j)_{j=1}^r,$$
$$B_j = \begin{pmatrix} b_{j1}I_{n_j} & 0 \\ 0 & b_{j2}I_{n_j} \end{pmatrix}, \quad C_j = \begin{pmatrix} C_{j1} & C_{j2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_{j1} & D_{j2} \end{pmatrix},$$

where $b_{j1}b_{j2}^{-1} < 0$ *and* $C_{j1}, C_{j2}, D_{j1}, D_{j2} \in \mathrm{GL}(n_j, \mathbb{C})$. *Then SRF of the operator* $L_{C,D}(Q)$ *forms a Riesz basis with parentheses in* $L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$.

Corollary 3.9 treats periodic (antiperiodic) BC in a similar way.

Corollary 3.9. *Let* $B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n) \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $Q \in L^\infty([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$ *and BC are of the form* $y(1) = \pm y(0)$ *(i.e.* $C = \mp D = I_n$*). Then SRF of the operator* $L_{C,D}(Q)$ *forms a Riesz basis with parentheses in* $L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$.

Subsection 3.2 is devoted to spectral properties of the dynamic generator of the Timoshenko beam model governed by the following linear system of two coupled hyperbolic equations for $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} I_\rho(x)\Phi_{tt} &= K(x)(W_x - \Phi) + (EI(x)\Phi_x)_x - p_1(x)\Phi_t, \quad & x \in [0,\ell], \\ \rho(x)W_{tt} &= (K(x)(W_x - \Phi))_x - p_2(x)W_t, & x \in [0,\ell], \end{aligned}$$

subject to the following BC for $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} W(0,t) = \Phi(0,t) &= 0, \\ \big(EI(x)\Phi_x(x,t) + \alpha_1\Phi_t(x,t) + \beta_1 W_t(x,t)\big)\big|_{x=\ell} &= 0, \\ \big(K(x)(W_x(x,t) - \Phi(x,t)) + \alpha_2 W_t(x,t) + \beta_2\Phi_t(x,t)\big)\big|_{x=\ell} &= 0. \end{aligned}$$

In both theorems below coefficients satisfy the following conditions:

$$\rho, I_\rho, K, EI \in C[0,\ell], \qquad p_1, p_2 \in L^1[0,\ell],$$

$$0 < C_1 \leqslant \rho(x), I_\rho(x), K(x), EI(x) \leqslant C_2, \quad x \in [0,\ell].$$

$$h_1 := \sqrt{EI \cdot I_\rho},\ h_2 := \sqrt{K \cdot \rho} \in W^{1,1}[0,\ell], \quad \text{and} \quad \frac{EI \cdot \rho}{K \cdot I_\rho} \equiv \text{const}\,.$$

The above problem can be rewritten as $y_t = i\mathcal{L}y$, $y(x,t)|_{t=0} = y_0(x)$, where $y = \operatorname{col}(\Phi, \Phi_t, W, W_t)$ and $\mathcal{L}$ is a certain ordinary differential operator of the second order in the energy space $\mathfrak{H} := \widetilde{H}_0^1[0,\ell] \times L^2[0,\ell] \times \widetilde{H}_0^1[0,\ell] \times L^2[0,\ell]$, where $\widetilde{H}_0^1[0,\ell] := \{f \in W^{1,2}[0,\ell] : f(0) = 0\}$.

The main results of this subsection are Theorems 3.14 and 3.15.

Theorem 3.14. *Under the above conditions let $(\alpha_1 \pm h_1(\ell))(\alpha_2 \pm h_2(\ell)) \neq \beta_1\beta_2$. Then SRF of the operator $\mathcal{L}$ is complete and minimal in $\mathfrak{H}$.*

If in addition $p_1, p_2, h_1', h_2' \in L^\infty[0,\ell]$, and $\beta_1 = \beta_2 = 0$, then SRF of the operator $\mathcal{L}$ forms a Riesz basis with parentheses in $\mathfrak{H}$.

Theorem 3.15. *Under the above conditions let the functions p_1, p_2, h_1', h_2' be continuous at the endpoints 0 and ℓ. Assume also that*

$$\beta_1 = \beta_2 = 0, \quad |\alpha_1^\pm| + |\alpha_2^\pm| \neq 0 \quad \textit{and} \quad |\alpha_j^\pm| + |p_j(\ell) \mp h_j'(\ell)| \neq 0, \quad j \in \{1,2\},$$

where $\alpha_j^\pm := \alpha_j \pm h_j(\ell)$. Then SRF of $\mathcal{L}$ is complete and minimal in $\mathfrak{H}$.

Section 4 is devoted to some spectral properties of the higher-order ODE.

Subsection 4.1 is devoted to the following second-order differential equation $y'' + A(t)y = 0$, $t \in [0,+\infty)$, where $A =: A_R + iA_I$ and A_R is a differentiable function. Theorem 4.1 generalizes the result by V. B. Lidskii and B. V. Fedosov.

Theorem 4.1. *Let function $A(t)$ satisfy the following conditions:*

$$A_R(0) > 0, \qquad A_R'(t) \geqslant \alpha(t)A_R(t), \ \textit{where}$$

$$\alpha(t) \searrow 0 \quad \textit{as} \quad t \to \infty \quad \textit{and} \quad \int_0^\infty \alpha(t)\,dt = \infty,$$

$$A_R'(t) \geqslant C|A_I(t)|A_R(t) \quad \textit{for some constant } C > 0,$$

Then all solutions of equation $y'' + A(t)y = 0$ tend to zero as $t \to \infty$.

The second result of this subsection, Theorem 4.5, uses WKB-estimates and seems to be new even for a real-valued potential.

Theorem 4.5. *Let $A(t)$ satisfy the following conditions:*

(i) $A(t) \in C^2(0, +\infty)$ and $A(t) \to \infty$ as $t \to +\infty$;

(ii) $A_R(t) > 0$ for $t > 0$ and $A_I(t)$ does not change sign on $(0, \infty)$;

(iii) The following integrals converge:

$$\int_0^{+\infty} \frac{|A''(t)|}{|A(t)|^{5/2}}\,dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{|A'(t)|^2}{|A(t)|^{7/2}}\,dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{|A_I(t)|}{\sqrt{A_R(t)}}\,dt.$$

Then all solutions of the above equation tend to zero as $t \to \infty$.

Subsection 4.2 is devoted to finding explicit form of the spectral function of the Friedrichs and Krein extensions of the minimal symmetric operator A generated in $L^2(0, \infty)$ by the differential expression $l(y) := (-1)^n y^{(2n)}(\cdot)$.

The main results of this subsection are Theorems 4.6 and 4.7.

Theorem 4.6. *The spectral function of the Friedrichs extension A_F of the operator A is given by*

$$\begin{aligned} \sigma_F(t) &= \frac{2n}{\pi}\left(\frac{C_j \cdot C_k}{2n+1+j+k} \cdot t^{\frac{2n+1+j+k}{2n}}\right)_{j,k=0}^{n-1}, \quad t \geqslant 0, \\ \sigma_F(t) &= 0, \quad t < 0. \end{aligned}$$

where

$$C_0 := 1, \qquad C_k := \prod_{p=1}^{k} \operatorname{ctg}(p\alpha), \quad \alpha = \frac{\pi}{2n}, \quad k \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Theorem 4.7 establishes similar result for the Krein extension A_K.

Keywords: Systems of ordinary differential equations, regular boundary conditions, completeness of root vectors, Riesz basis property, Timoshenko beam model, WKB-estimates, spectral function, Weyl function.

Список публікацій здобувача

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Луньов А. А. Про регулярність степенів диференціального оператора. *Український математичний вісник.* 2009. Т. 6, № 4. С. 475–491.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Zentralblatt MATH, Google Scholar)

2. Луньов А. А., Оридорога Л. Л. Про прямування до нуля рішень диференціального рівняння другого порядку з комплекснозначним потенціалом. *Український математичний вісник.* 2011. Т. 8, № 3. С. 580–595 (Lunyov A. A., Oridoroga L. L. On the convergence to zero of solutions of a second-order differential equation with complex-valued potential. *Journal of Mathematical Sciences.* 2012. V. 182. № 1. P. 87–99).

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus**, Zentralblatt MATH, Google Scholar)

   Особистий внесок здобувача. Автору належать всі результати, окрім секції 5 про істотність умов теореми 1.2, що належить співавтору.

3. Lunyov A. A. Spectral functions of the simplest even order ordinary differential operator. *Methods of Functional Analysis and Topology.* 2013. Vol. 19, № 4. P. 319–326.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Zentralblatt MATH, MathSciNet, Google Scholar)

Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

4. Лунёв А. А., Оридорога Л. Л. Точные константы в обобщенных неравенствах для промежуточных производных. *Математические заметки.* 2009. Т. 85, № 5. С. 737–744 (Lunev A.A., Oridoroga L.L. Exact constants in generalized inequalities for intermediate derivatives. *Mathematical Notes.* 2009. V. 85, № 5-6. p. 703–711).

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus**, Zentralblatt MATH, MathSciNet, Google Scholar)

   Особистий внесок здобувача. Автору належать всі результати, окрім наслідка 2 про симетрію констант, що належить співавтору.

5. Lunyov A. A., Malamud M. M. On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications. *Journal of Spectral Theory.* 2015. Vol. 5, № 1. P. 17–70.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus**, Web of Science, Zentralblatt MATH, MathSciNet, Impact Factor: 1.160, Q1)

   Особистий внесок здобувача. Автору належать всі результати. Науковому керівнику належать постановка задачі і деякі ідеї дослідження.

Наукові праці, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

6. Луньов А. А. Точні константи в нерівностях для проміжних похідних. Тези доповідей *наукової конференції студентів математичного факультету*: зб. наук. та наук.-метод. праць. Донецьк: Донецький національний університет, 2009. С. 3–4.

7. Lunyov A. A. On completeness of the root vector system of boundary value problem for first order system. Book of Abstracts of *International Workshop on Spectral Theory and Differential Operators*, August 27–31, 2012, TU Graz, Austria, 2012. P. 23–25.

8. Луньов А. А. Про повноту системи кореневих векторів граничної задачі для системи першого порядку. Book of Abstracts of *the Fourth International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii*, November 14–17, 2012, Donetsk, 2012. P. 48–49.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Скорочення

ЗДР	звичайне диференціальне рівняння
СВПФ	система власних і приєднаних функцій

Множини і числові позначення

$\mathbb{N}$	множина натуральних чисел
$\mathbb{Z}$	кільце цілих чисел
$\mathbb{R}^n$	n-мірний дійсний евклідів простір
$\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$	поле дійсних чисел
$\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$	множина невід'ємних чисел
$\mathbb{C}^n$	n-мірний комплексний евклідів простір
$\mathrm{col}(a_1, \dots, a_n)$	вектор-стовбець із $\mathbb{C}^n$ з елементами $a_1, \dots, a_n$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	скалярний добуток в $\mathbb{C}^n$
$\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$	поле комплексних чисел
$\mathrm{Re}\ \lambda$	дійсна частина комплексного числа λ
$\mathrm{Im}\ \lambda$	уявна частина комплексного числа λ
$\arg \lambda$	аргумент комплексного числа λ
$\mathbb{C}^{n \times n}$	простір $n \times n$-матриць з комплексними елементами
δ_{jk}	символ Кронекера, $\delta_{jk} = 0$ для $j \neq k$ і $\delta_{jk} = 1$ для $j = k$
I_n	одинична матриця порядку n, тобто $I_n = (\delta_{jk})_{j,k=1}^n$
$\mathrm{diag}(b_1, \dots, b_n)$	діагональна $n \times n$-матриця з елементами $b_1, \dots, b_n$ на діагоналі
$\det C$	визначник матриці C
$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$	множина невироджених матриць із $\mathbb{C}^{n \times n}$

Функціональні простори і оператори

$L^p[a,b]$	простір функцій з інтегрованим за Лебегом на відрізку $[a,b]$ p-им степенем модуля, $p \in [1,+\infty)$
$L^\infty[a,b]$	простір майже всюди обмежених вимірних функцій на відрізку $[a,b]$
$L^p([a,b];\mathbb{C}^n)$	простір вектор-функцій розмірності n з елементами із $L^p[0,1]$, $p \in [1,+\infty]$
$L^p([a,b];\mathbb{C}^{n\times n})$	простір $n\times n$-матриць-функцій з елементами із $L^p[a,b]$, $p \in [1,+\infty]$
$W^{n,p}[a,b]$	простір Соболєва функцій f з $(n-1)$-шою абсолютно неперервною похідною на $[a,b]$ таких, що $f^{(n)} \in L^p[a,b]$
$W^{n,p}([a,b];\mathbb{C}^n)$	простір вектор-функцій розмірності n з елементами із $W^{n,p}[a,b]$, $p \in [1,+\infty]$
$\sigma(T)$	спектр замкненого оператора T у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$
$\rho(T)$	множина регулярних точок замкненого оператора T у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, тобто $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$
$f(t) \nearrow h$ при $t \to a$	функція $f(t)$ монотонно зростає і прямує до h, коли t прямує до a
$f(t) \searrow h$ при $t \to a$	функція $f(t)$ монотонно спадає і прямує до h, коли t прямує до a

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження.

Питання повноти і базисності системи власних векторів самоспряженого компактного оператора вичерпно вирішується класичною теоремою Гільберта: кожний компактний самоспряжений оператор має ортонормований базис із власних векторів.

Спектральна теорія несамоспряжених граничних задач на відрізку для звичайного диференціального рівняння (ЗДР) n-го порядку з сумовними коеффіцієнтами бере свій початок в класичних роботах G. D. Birkhoff [60, 61, 63] і Я. Д. Тамаркіна [101, 45, 102], де зокрема введено поняття регулярних граничних умов для ЗДР.

Для несамоспряженого компактного оператора перші загальні результати про повноту були отримані у класичній роботі М. В. Кєлдиша [17]. Ці теореми дозволили отримати важливі результати про повноту СВПФ граничних задач як для ЗДР, так і для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Але багато важливих типів нерегулярних граничних задач для ЗДР не покривалися цими результатами.

Після цього повнота нерегулярних граничних задач для ЗДР n-го порядку вивчалась А. А. Шкаліковим [50], А. Г. Костюченком і А. А. Шкаліковим [20], Г. М. Губреєвим [9], А. П. Хромовим [48, 49], В. С. Рихловим [43] і багатьма іншими (див. посилання в [49]). Базисність Ріса регулярних граничних задач вивчалась N. Dunford [72], В. П. Михайловим [41], Г. М. Кєсєльманом [18], А. С. Маркусом і В. І. Мацаєвим [38], М. С. Аграновичем [56], А. А. Шкаліковим [51, 52, 53], А. Мінкіним [95] і багатьма іншими. Повнота і базисність Ріса для оператора Штурма-Ліувіля вивчалась А. А. Шкаліковим і О. А Вєлієвим [4], П. Джаковим і Б. С. Мітягіним [70], F. Gesztesy і В. А. Ткаченком [75, 76], А. С. Макіним [90] і багатьма іншими.

Вперше загальна гранична задача для системи ЗДР першого порядку була досліджена G. D. Birkhoff і R. E. Langer [62]. Зокрема, вони ввели поняття регулярних граничних умов. Проблема повноти системи власних і приєднаних функцій (СВПФ) граничної задачі для системи ЗДР першого порядку вперше була досліджена М. М. Маламудом і Л. Л. Оридорогою [35, 36, 91]. Вони ввели поняття слабко регулярних граничних умов і довели повноту СВПФ для цього класу граничних задач. Раніше, в окремих випадках цей результат був доведений В. А. Марченком [39, §1.3] і В. П. Гінзбургом [6].

Зазначимо, що системи ЗДР першого порядку є більш загальним об'єктом, ніж ЗДР n-го порядку. А саме, ЗДР n-го порядку може бути зведено до системи ЗДР першого порядку (див. [33]). Класична система Дірака – окремий випадок такої системи (див. [22, розділ VII.1], [39, розділ 1.2]).

Протягом останніх двадцяти років базисність Ріса для 2×2 системи Дірака з регулярними і посилено регулярними граничними умовами ретельно досліджувалася I. Trooshin і M. Yamamoto [105, 106], S. Hassi і Л. Л. Оридорогою [78], П. Джаковим і Б. С. Мітягіним [96, 12, 66, 67, 68, 69, 70, 71], А. Г. Баскаковим, А. В. Дєрбушовим і А. О. Щербаковим [3], автором і М. М. Маламудом [25, 88], А. М. Савчуком і А. А. Шкаліковим [97] і багатьма іншими. Я. В. Микитюк і Д. В. Пуйда [40] встановили блочну базисність Ріса задачі Діріхле для системи Дірака високого порядку з потенціалом, квадрат якого є сумовним.

Спектральна теорія граничних задач для систем ЗДР першого порядку природно виникає при дослідженні моделі балки Тимошенка. Ця модель була введена С. Тимошенком у 20-х роках [103, 104], і відтоді ретельно вивчалася J. U. Kim і Y. Renardy [80], M. A. Shubov [99], A. Soufyane і A. Wehbe [100], G. Q. Xu і S. P. Yung [111, 110], Y. Wu і X. Xue [109] і багатьма іншими. Геометричні властивості СВПФ динамічного генератора просторово неоднорідної балки Тимошенка з межевою і локально розподіленою амортизацією грають важливу роль у дослідженні різних фізичних властивостей різних типів балок.

Питання про прямування до нуля на нескінченності розв'язків диференціального рівняння другого порядку вивчалося M. Biernacki [59], H. Milloux [94], G. Armellini [57], G. Sansone [98], Л. А. Гусаровим [10], W. Leighton [81, 82], A. Galbraith, E. J. McShane і G. Parrish [74, 92], D. Willett [108], В. Б. Лідським і Б. В. Федосовим [23], A. Meir, D. Willett, J. S. W. Wong [93], H. A. DeKleine [64], F. V. Atkinson і J. W. Macki [58, 89], L. Hatvani [79] і багатьма іншими.

В багатьох роботах вивчалися асимптотичні формули для спектральної функції самоспряжених розширень диференціальних операторів на півосі. Для оператора Штурма-Ліувілля ця проблема була повністю вирішена В. А. Марченком і Б. М. Лєвітаном (див. історію проблеми в [21]). Для диференціальних операторів порядку $n > 2$ таку асимптотичну формулу отримав А. Г. Костюченко [19]. Головним членом цієї асимптотики є спектральна функція незбуреного оператора з тими ж граничними умовами, явна форма якої була відсутня.

Дисертаційна робота присвячена повноті та блочній базисності Ріса СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку і застосуванню цих результатів для динамічного генератора моделі балки Тимошенка. Актуальним є повнота СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з граничними умовами, які не є слабко регулярними, а також блочна базисність Ріса СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку, яка раніше не вивчалась.

Також досліджуються деякі спектральні властивості ЗДР високого порядку на півосі. Актуальним є узагальнити результати В. Б. Лідського і Б. В. Федосова про прямування усіх розв'язків ЗДР другого порядку до нуля на нескінченності, а також отримати явну формулу для спектральних функцій розширень мінімального диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами на піввісі, яка входить в асимптотичні формули для розширень подібних операторів з ненульовими коефіцієнтами.

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є отримання повноти та блочної базисності Ріса СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку; застосування цих результатів для динамічного генератора моделі балки Тимошенка; дослідження властивості прямування усіх розв'язків ЗДР другого порядку до нуля на нескінченності; дослідження спектральних функцій диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами на піввісі.

Об'єкт дослідження — граничні задачі для систем ЗДР першого порядку на скінченному відрізку і на піввісі, модель балки Тимошенка.

Предмет дослідження — властивості повноти і блочної базисності Ріса СВПФ граничних задач на відрізку; спектральні функції і прямування розв'язків до нуля на нескінченності для граничних задач на піввісі.

Завдання дослідження:

– Отримати достатні і необхідні умови повноти СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з граничними умовами, які не є слабко регулярними.

– Отримати достатні умови блочної базисності Ріса СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з обмеженою потенціальною матрицею і для широкого класу регулярних граничних умов.

– Отримати достатні умови повноти і блочної базисності Ріса СВПФ динамічного генератора загальної моделі балки Тимошенка при послаблених умовах гладкості на параметри моделі.

– Отримати нові умови на комплекснозначний потенціал ЗДР другого порядку, які забезпечують прямування усіх розв'язків до нуля на нескінченності.

– Отримати явну формулу для спектральних функцій диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами на піввісі.

Методи дослідження. Для отримання результатів дисертаційної роботи стосовно повноти СВПФ використовується аналог теореми Біркгофа для загальних систем ЗДР першого порядку, отриманий в [91], а також схема доведення повноти для слабко регулярних граничних умов із [91]. Для отримання блочної базисності Ріса використвовується теорема Маркуса-Мацаєва (див. [38] і [37, §I.6]) про блочну базисність Ріса збуреного нормального оператора. Для отримання одного з результатів про прямування розв'язків ЗДР другого порядку до нуля на нескінченності використовуються ВКБ-оцінки (див. [47, II.2]). Для знаходження спектральних функцій диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами на піввісі використовується теорія граничних трійок, розвинена в [65].

Наукова новизна одержаних результатів.

Визначається наступними положеннями:

1. Вперше отримані достатні умови повноти СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з граничними умовами, які не є слабко регулярними. Цей результат узагальнює відповідні результати М. М. Маламуда і Л. Л. Оридороги [91] для загальних систем зі слабко регулярними граничними умовами і А. В. Агібалової [55] для 2×2-систем.

2. Вперше отримані достатні умови блочної базисності Ріса СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з обмеженою потенціальною матрицею і для широкого класу регулярних граничних

умов. Раніше подібний результат було отримано тільки для задачі Діріхле для системи Дірака.

3. Отримані достатні умови повноти і блочної базисності Ріса СВПФ динамічного генератора загальної моделі балки Тимошенка при послаблених умовах гладкості на параметри моделі, які не покривалися результами попередніх робіт.

4. Отримані нові умови на комплекснозначний потенціал ЗДР другого порядку, які забезпечують прямування усіх розв'язків до нуля на нескінченності. Одна з умов є новою навіть для дійсного потенціалу.

5. Вперше отримана явна формула спектральних функцій диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами на півосі.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер. Але отримані результати стосовно базисності Ріса моделі балки Тимошенка дають наступні важливі властивості багатьох типів балок: стабільність вібрацій згідно спектру задачі, генерація C_0-напівгрупи, явний вираз розв'язків через власні вектори. До того ж, властивості повноти і базисності, отримані для граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку, мають застосування для системи Дірака. Результати про прямування розв'язків ЗДР другого порядку до нуля на нескінченності грають важливу роль при вивченні стабільності відповідних фізичних моделей.

Особистий внесок здобувача. Постановки задач належать науковому керівникові. Всі результати дисертації отримані автором самостійно. Зі статей, які опубліковані у співавторстві, у дисертацію увійшли лише ті результати, які належать автору. А саме: роботи [29], [86] написані без співавторів; робота [87] написана у співавторстві з науковим керівником, якому належить постановка задачі та деякі ідеї дослідження; робота [26] написана у співавторстві з Оридорогою Л.Л., якому належить тільки наслідок 2 про симетрію констант; робота [31] написана у співавторстві з Оридорогою Л.Л., якому належить тільки секція 5 про істотність умов теореми 1.2.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати дисертації були представлені на конференціях всеукраїнського та міжнародного рівнів: наукова конференція студентів математичного факультету Донецького національного університету, Донецьк, Україна, 2009; IV Міжнародна конференція молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я. Б. Лопатинського, Донецьк, Україна, 14–17 листопада 2012 року; Міжнародна конференція зі спектральної теорії і диференціальних операторів, Грац, Австрія, 27–31 серпня 2012 року.

Також результати дисертаційного дослідження доповідались на семінарах: розширений семінар відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Донецьк, Україна, 13 травня 2013 року; розширений семінар відділу теорії функцій Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ, Україна, 22 січня 2021 року; Київський семінар з функціонального аналізу Інституту математики НАН України, Київ, Україна, 3 лютого 2021 року (https://events.imath.kiev.ua/event/692).

Наукові роботи з деякими результатами дисертаційного дослідження приймали участь у наукових конкурсах: конкурс наукових робіт студентів НАН України: 2007 (грамота), 2009 (премія); Всеукраїнський конкурс студентських наукових робіт з природничих, технічних і гуманітарних наук, 2007, 2009.

Публікації. Основні результати роботи в повному обсязі опубліковані у фахових журналах та міжнародних наукових виданнях з наукометричних баз, пройшли апробацію на наукових конференціях та семінарах. Результати дисертації знайшли відображення в 8 наукових публікаціях, в тому числі: в 5 статтях [29], [26], [31], [86], [87], у спеціалізованих журналах, з яких дві написано без співавторів; в тезах виступів [28], [30], [85] на 3 наукових конференціях.

Структура дисертації. Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків до дисертації, списку використаних джерел, який містить 111 найменувань, та одного додатку. Повний обсяг роботи – 166 сторінок. Обсяг основної частини дисертації – 131 сторінки. Розділ 1, присвячений огляду літератури, займає 12 сторінок.

РОЗДІЛ 1

Історія задачі та огляд літератури

1.1 Спектральні властивості абстрактних операторів

Питання повноти і базисності системи власних векторів самоспряженого компактного оператора вичерпно вирішується класичною теоремою Гільберта: кожний компактний самоспряжений оператор має ортонормований базис із власних векторів.

Для несамоспряженого компактного оператора перші принципові результати про повноту були отримані у класичній роботі М. В. Кєлдиша [17]. У цій роботі було введено поняття приєднаних функцій оператор-функції і отримано достатні умови повноти системи власних і приєднаних функцій (СВПФ) для несамоспряжених операторів. Ці теореми дозволили отримати важливі результати про повноту СВПФ граничних задач як для ЗДР, так і для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Одним з яскравих результатів Кєлдиша є така теорема.

Теорема 1.1 ([17], [37] теорема 4.3)**.** *Нехай G – нормальний оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, резольвента якого належить до класу $\mathfrak{S}_p$, $p < \infty$, і спектр якого лежить на скінченному наборі променів $\{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = \varphi_k\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$. Нехай також оператор T є компактним відносно G. Тоді оператор $A = T + G$ має компактну резольвенту і його СВПФ повна в $\mathfrak{H}$.*

Доведення основних результатів М. В. Кєлдиша базувались на використанні теорії аналітичних і цілих функцій. Але багато важливих типів нерегулярних граничних задач для ЗДР не покривалися цими результатами.

1.2 Спектральні властивості диференціальних операторів n-го порядку на відрізку

Спектральна теорія несамоспряжених граничних задач на скінченному відрізку $[a, b]$ для звичайного диференціального рівняння (ЗДР) n-го порядку

$$y^{(n)} + q_1 y^{(n-2)} + ... + q_{n-1} y = \lambda^n y, \qquad x \in [a, b], \tag{1.1}$$

з коефіцієнтами $q_j \in L^1[a, b]$ бере свій початок у класичних роботах G. D. Birkhoff [60, 61, 63] і Я. Д. Тамаркіна [101, 45, 102]. Вони ввели поняття регулярних граничних умов для ЗДР (1.1) і досліджували асимптотичну поведінку власних чисел і власних векторів для відповідних граничних задач. До того ж, вони довели, що СВПФ регулярної граничної задачі повна в $L^2[a, b]$. Їх результати також викладені в класичних монографіях (див. [42, розділ 2] і [73, розділ 19]).

Після фундаментальної роботи М. В. Кєлдиша [17] повнота нерегулярних граничних задач для ЗДР n-го порядку (1.1) вивчалася А. А. Шкаліковим [50], А. Г. Костюченком і А. А. Шкаліковим [20], Г. М. Губреєвим [9], А. П. Хромовим [48, 49], В. С. Рихловим [43] і багатьма іншими (див. посилання в [49]).

В той же час базисність Ріса регулярних граничних задач вивчалась N. Dunford [72], В. П. Михайловим [41], Г. М. Кєсєльманом [18], А. С. Маркусом і В. І. Мацаєвим [38], М. С. Аграновичем [56], А. А. Шкаліковим [51, 52, 53], А. Мінкіним [95] і багатьма іншими. Зокрема, був виділений важливий клас посилено регулярних граничних умов. В. П. Михайлов [41] і Г. М. Кєсєльман [18] незалежно довели, що СВПФ посилено регулярної граничної задачі є базисом Ріса у просторі $L_2[0, 1]$. Однієї тільки регулярності для цього не достатньо, як показують приклади Г. М. Кєсєльмана [18], P. W. Walker [107] і J. Locker [84]. Для регулярних граничних умов А. А. Шкаліков [51] довів блочну базисність Ріса. Нещодавно А. М. Мінкін [95] отримав зворотне твердження, а саме, що із базисності Ріса СВПФ випливає регулярність граничних умов.

Численні роботи присвячені повноті та базисності Ріса для оператора Штурма-Ліувілля (див. нещодавню роботу А. А. Шкалікова і О. А. Вєлієва [4], огляд А. С. Макіна [90] і посилання там). Особливо відзначимо нещодавні досягнення для періодичного (антиперіодечного) оператора Штурма-Ліувілля $-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ на відрізку $[0, \pi]$. А саме, F. Gesztesy і В. А. Ткаченко [75, 76] для $q \in L^2[0, \pi]$ і, пізніше, П. Джаков і Б. С. Мітягін [70] для $q \in W^{-1,2}[0, \pi]$ встановили різними методами критерій того, що СВПФ періодичного (антиперіодечного) оператора Штурма-Ліувілля є базисом Ріса.

1.3 Спектральні властивості граничних задач для систем ЗДР першого порядку на відрізку

Розглянемо наступну граничну задачу для системи ЗДР першого порядку:

$$L(Q)y := -iB^{-1}y' + Q(x)y = \lambda y, \quad y = \mathrm{col}(y_1, ..., y_n), \quad x \in [0, 1], \tag{1.2}$$

$$Cy(0) + Dy(1) = 0, \quad C = (c_{jk}),\ D = (d_{jk}) \in \mathbb{C}^{n \times n}, \tag{1.3}$$

де $B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – невироджена діагональна матриця, $Q =: (q_{jk})_{j,k=1}^n \in L^1([0, 1]; \mathbb{C}^{n\times n})$ – потенціальна матриця, і $\mathrm{rank}(C\ D) = n$. Позначимо через $L_{C,D} := L_{C,D}(Q)$ оператор, асоційований з цією граничною задачею в $L^2([0, 1]; \mathbb{C}^n)$ природним чином.

Зазначимо, що системи (1.2) є більш загальним об'єктом, ніж ЗДР. А саме, ЗДР n-го порядку (1.1) може бути зведено до системи (1.2) з $b_j = \exp(2\pi ij/n)$ (див. [33]). Системи (1.2) мають важливе значення в деяких теоретичних і практичних питаннях. Наприклад, якщо $n = 2m$, $B = \mathrm{diag}(-I_m, I_m)$ і $Q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & Q_{12} \\ Q_{21} & 0 \end{smallmatrix}\right)$, то система (1.2) еквівалентна до системи Дірака (див. [22, розділ

VII.1], [39, розділ 1.2]). Відзначимо також, що система (1.2) використовується для інтегрування задачі N-хвиль, що виникає в нелінійній оптиці (див. [13, розділ III.4]).

Вперше спектральна задача (1.2)–(1.3) була досліджена G. D. Birkhoff і R. E. Langer [62]. Вони перенесли деякі попередні результати G. D. Birkhoff і Я. Д. Тамаркіна для несамоспряжених граничних задач для ЗДР (1.1) на випадок задачі (1.2)–(1.3). А саме, вони ввели поняття регулярних і посилено регулярних граничних умов (1.3) і дослідили асимптотичну поведінку власних чисел і власних векторів відповідного оператора $L_{C,D}$. До того ж, вони встановили поточкову збіжність розкладу по власним векторам регулярного оператора $L_{C,D}$.

Проблема повноти СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$ вперше була досліджена М. М. Маламудом і Л. Л. Оридорогою у недавніх роботах [35, 36, 91]. Вони ввели поняття слабко регулярних граничних умов і довели повноту СВПФ для цього класу граничних задач.

Нагадаємо визначення регулярних (див. [62, С. 89]) і слабко регулярних (див. [35, 91]) граничних умов. Для цього нам потрібна наступна конструкція. Нехай $A = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$, де $\operatorname{Re} a_k \neq 0$, є діагональною матрицею. Для $n \times n$ матриць $C = (c_1 \ \dots \ c_n)$ і $D = (d_1 \ \dots \ d_n)$, допоміжна $n \times n$ матриця $T_A(C, D)$ визначається наступним чином: її k-ий стовбець співпадає з c_k, якщо $\operatorname{Re} a_k < 0$, і співпадає з d_k, якщо $\operatorname{Re} a_k > 0$. Далі, розглянемо прямі

$$l_j := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(ib_j\lambda) = 0\}, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Вони розбивають комплексну площину на $m \leqslant 2n$ секторів. Позначимо ці сектори через $\sigma_1, \dots \sigma_m$. Нехай z_j лежить всередині сектора σ_j, $j \in \{1, \dots, m\}$.

Граничні умови (1.3) називаються регулярними, якщо

$$\det T_{iz_jB}(C, D) \neq 0, \qquad j \in \{1, \dots, m\}. \tag{1.4}$$

Число $z \in \mathbb{C}$ називається допустимим, якщо $\mathrm{Re}(ib_j z) \neq 0$ при $j \in \{1, \ldots, n\}$. Оскільки для даного $j \in \{1, \ldots, n\}$ матриця $T_{iz_jB}(C, D)$ не залежить від вибору точки $z_j \in \sigma_j$, то граничні умови (1.3) є регулярними тоді і тільки тоді, коли $\det T_{izB}(C, D) \neq 0$ для кожного допустимого z.

Визначення 1.2 ([91]). *Граничні умови* (1.3) *називаються слабко B-регулярними (або просто, слабко регулярними), якщо існують три допустимих числа z_1, z_2, z_3, що задовольнять таким умовам:*

(а) нуль є внутрішньою точкою трикутника з вершинами z_1, z_2, z_3;

(б) $\det\, T_{iz_jB}(C, D) \neq 0$ *для* $j \in \{1, 2, 3\}$.

Головний результат роботи [91] тепер можна записати так.

Теорема 1.3 ([91], теорема 1.2). *Нехай $Q \in L^1([0, 1]; \mathbb{C}^{n\times n})$ і граничні умови* (1.3) *є слабко B-регулярними. Тоді СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$ повна і мінімальна в $L^2([0, 1]; \mathbb{C}^n)$.*

У випадку системи типу Дірака ($B = B^*$) слабка регулярність граничних умов (1.3) еквівалентна до їх регулярності (1.4) і перетворюється на таку умову:

$$\det T_\pm := \det(CP_\mp + DP_\pm) \neq 0. \tag{1.5}$$

Тут P_+ і P_- є спектральнами проекторами на “додатні” і “від’ємні” частини спектру матриці $B = B^*$, відповідно. Тому, за теоремою 1.3, з цієї умови випливає повнота і мінімальність в $L^2([0, 1]; \mathbb{C}^n)$ СВПФ граничної задачі (1.2)–(1.3). В окремих випадках цей результат був раніше отриманий В. А. Марченком [39, §1.3] (2×2 система Дірака) і В. П. Гінзбургом [6] ($B = I_n, Q = 0$).

У випадку 2×2 системи типу Дірака ($b_1 < 0 < b_2$) в [91] було також встановлено повноту СВПФ у нерегулярному випадку, де умова повноти залежить від потенціалу.

Теорема 1.4 ([91], теорема 5.1). *Нехай* $n = 2$, $b_1 < 0 < b_2$, $q_{12}, q_{21} \in C^1[0,1]$ *і виконано такі умови:*

$$\begin{aligned} |J_{32}| + |b_1 J_{13} q_{12}(0) + b_2 J_{42} q_{21}(1)| &\neq 0, \\ |J_{14}| + |b_1 J_{13} q_{12}(1) + b_2 J_{42} q_{21}(0)| &\neq 0. \end{aligned}$$

Тоді СВПФ граничної задачі (2.1)–(2.3) *повна і мінімальна в* $L^2\left([0,1];\mathbb{C}^2\right)$.

У випадку $b_2 b_1^{-1} \notin \mathbb{R}$ подібний результат було встановлено А. В. Агібаловою, М. М. Маламудом і Л. Л. Оридорогою у [55], де повнота була доведена для аналітичних $Q(\cdot)$. Також, варто зазначити, що там було втановлено критерій повноти для аналітичного потенціалу для якого $q_{12}(0)q_{21}(0)q_{12}(1)q_{21}(1) \neq 0$.

В останні двадцять років з'явилось багато робіт, присвячених базисності Ріса для 2×2 системи Дірака ($b_2 = -b_1 = 1$) з регулярними або посилено регулярними граничними умовами (див. [105, 106, 96, 12, 78, 3, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 25, 88, 97]).

Базисність Ріса для 2×2 системи Дірака з граничними умовами, що розпадаються, була вперше отримана I. Trooshin і M. Yamamoto [105, 106] для $Q \in C^1([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2})$. Пізніше S. Hassi і Л. Л. Оридорога [78] узагальнили цей результат на системи типу Дірака ($b_1 < 0 < b_2$) з тією ж умовою гладкості.

Для $Q \in L^2([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2})$ П. Джаков і Б. С. Мітягін [66] і А. Г. Баскаков, А. В. Дєрбушов і А. О. Щербаков [3] незалежно встановили базисніть Ріса задачі Діріхлє для 2×2 системи Дірака, а також блочну базисніть Ріса періодичної задачі.

Пізніше П. Джаков і Б. С. Мітягін [67] узагальнили ці результати для 2×2 системи Дірака з регулярними або посилено регулярними граничними умовами. До того ж, у роботах [68, 70, 71] вони встановили критерій того, що СВПФ періодичного (антиперіодичного) 2×2 оператора Дірака є базисом Ріса. Цей критерій було отримано в термінах коефіцієнтів Фур'є потенціалу.

Пізніше автор і М. М. Маламуд [25, 88] і, незалежно, А. М. Савчук і А. А. Шкаліков [97] підвели підсумок цього багаторічного дослідження, довівши різними методами, що СВПФ 2×2 оператора Дірака з $Q \in L^1([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2})$ і посилено регулярними граничними умовами є базисом Ріса. Також було доведено блочну базисність Ріса у випадку регулярних граничних умов. Відзначимо, що в роботах [25, 88] цей результат був доведений для більш загальної системи типу Дірака ($b_1 < 0 < b_2$).

Базисність Ріса граничних задач для систем порядку $n > 2$ майже не вивчалася в літератрі. Нам відомий лише результат Я. В. Микитюка і Д. В. Пуйди [40], які встановили блочну базисність Ріса задачі Діріхле для $2m \times 2m$ системи Дірака ($B = \mathrm{diag}(I_m, -I_m)$) з $Q \in L^2([0,1];\mathbb{C}^{2m\times 2m})$.

Спектральна теорія граничних задач для систем ЗДР першого порядку природно виникає при дослідженні моделі балки Тимошенка. Ця модель була введена С. Тимошенком у 20-х роках [103, 104], і відтоді численні задачі стабільності, керованості і оптимізації ретельно вивчалися J. U. Kim і Y. Renardy [80], M. A. Shubov [99], A. Soufyane і A. Wehbe [100], G. Q. Xu і S. P. Yung [111, 110], Y. Wu і X. Xue [109] і багатьма іншими. Геометричні властивості СВПФ динамічного генератора просторово неоднорідної балки Тимошенка з межевою і локально розподіленою амортизацією грають важливу роль у дослідженні фізичних властивостей реальних балок різних типів.

1.4 Властивості ЗДР високого порядку на піввісі

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + A(t)y = 0, \tag{1.6}$$

де $A(t) : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ – диференційовна функція.

Якщо $A(t) > 0$, то це рівняння описує коливання матеріальної точки з одиничною масою під дією відновлювальної сили $-A(t)x$. Функція $A(t)$ відіграє роль коефіцієнта еластичності, що змінюється з часом.

Для неспадної функції $A(t)$ відомо [77, XIV.I.3], що будь-який розв'язок рівняння (1.6) є осцилюючим і послідовні амплітуди осциляції спадають. M. Biernacki [59] поставив питання про існування нетривіального розв'язку, амплітуди осциляції якого прямують до нуля, тобто розв'язку $y(t)$, для якого

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0. \tag{1.7}$$

H. Milloux [94] відповів на це питання і довів, що такий розв'язок існує, якщо $\lim_{t\to\infty} A(t) = \infty$. Він також навів приклад ступінчастої функції A, для якої не всі розв'язки рівняння (1.6) зникають на нескінченності.

M. Biernacki [59] поставив також наступну задачу: які додаткові умови, окрім монотонного прямування до нескінченності при $t \to \infty$, треба накласти на функцію $A(t)$, щоб всі розв'язки рівняння (1.6) зникали на нескінченності? Перші результати в цьому напрямку були отримані самим M. Biernacki [59], а також H. Milloux [94], G. Armellini [57] і G. Sansone [98]. Найбільш сильним з теоретичної точки зору є результат G. Sansone.

Теорема 1.5 (G. Sansone [98])**.** *Нехай $A \in C^1[0,\infty)$, $A(t) \nearrow \infty$ при $t \to \infty$ і для будь-якої послідовності $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ такої, що*

$$t_n \nearrow \infty \quad \textit{при} \quad n \to \infty \qquad \textit{і} \qquad t_{n+1} - t_n \leqslant t_n - t_{n-1},\ n > 1, \tag{1.8}$$

має місце співвідношення

$$\sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \min_{t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}} \frac{A'(t)}{A(t)} = +\infty. \tag{1.9}$$

Тоді всі розв'язки рівняння (1.6) *прямують до нуля при $t \to \infty$.*

Л. А. Гусаров [10] довів, що всі розв'язки рівняння (1.6) прямують до нуля при $t \to \infty$, якщо $A(t) \nearrow \infty$ при $t \to \infty$ і A' функція обмеженої варіації на деякій напівпрямій $[t_0, \infty]$. При цих обмеженнях $A'(t)$ має скінченну невід'ємну границю при $t \to \infty$.

В роботі [81] стверджується, що якщо $A(t)$ неспадна необмежена функція класу C^1, то всі розв'язки рівняння (1.6) зникають на нескінченності. Однак, відразу ж після публікації роботи, автор визнав своє доведення неправильним [82]. І незабаром у багатьох роботах з'явилися приклади, що спростовують це твердження [74], [108], [23], [64].

Різні достатні умови на функцію A, що забезпечують прямування до нуля на нескінченності всіх розв'язків рівняння (1.6), отримані також в роботах [92], [93], [58], [79]. Зауважимо, що всі отримані результати такого роду потребують, щоб потенціал A прямував до нескінченності регулярно. Це означає, що весь зріст функції A не може бути зосереджений на малій в якомусь сенсі множині. Гарний огляд і порівняння різних понять регулярного зросту зробив J. W. Macki [89].

Зауважимо також, що в роботі В. Б. Лідського і Б. В. Федосова [23] розглядається рівняння вигляду (1.6), де $A(t)$ — додатно визначена монотонно зростаюча оператор-функція в гільбертовому просторі H, а $y(t)$ — вектор-функція зі значеннями в H. Ними були знайдені достатні умови на потенціал $A(t)$, при яких всі розв'язки цього рівняння прямують до нуля за нормою при $t \to \infty$. В скалярному випадку ці умови мають вигляд: $A(0) > 0$ і $A'(t) \geqslant \alpha(t)A(t)$, де $\alpha(t) \searrow 0$ при $t \to \infty$ і $\int_0^\infty \alpha(t)dt = \infty$. Іншими словами, окрім монотонного прямування потенціала до нескінченності, його логарифмічна похідна повинна мати несумовну на піввісі монотонно спадну до нуля невід'ємну міноранту.

Переходячи до рівнянь високого порядку, розглянемо мінімальний симетричний оператор $\mathcal{P}$, породжений у $L^2(0,\infty)$ диференціальним виразом

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left(p_{n-k}(x)y^{(k)}\right)^{(k)}. \tag{1.10}$$

Припустимо, що його індекси дефекту рівні: $n_\pm(\mathcal{P}) = n$. Добре відомо [42, теорема VI.21.2], [21, теорема II.9.1], що будь-яке його власне самоспряжене розширення $\widetilde{\mathcal{P}}$ є унітарно еквівалентним оператору множення Λ_σ у просторі $L^2_\sigma(\mathbb{R})$, де $\Lambda_\sigma : f(x) \to xf(x)$, $f \in L^2_\sigma(\mathbb{R})$, і $\sigma(\cdot)$ – неспадна, неперервна зліва, самоспряжена $n \times n$ матриця-функція. Матриця-функція $\sigma(\cdot)$ називається спектральною функцією оператора $\widetilde{\mathcal{P}}$ і співпадає зі спектральною функцією характеристичної матриці оператора $\widetilde{\mathcal{P}}$, яка, в свою чергу, може бути знайдена за допомогою функції Ґріна оператора $\widetilde{\mathcal{P}}$ (див. [42, VI.21.4]).

Асимптотичні формули для спектральної функції самоспряжених розширень диференціальних операторів на півосі вивчалися в багатьох роботах. Для оператора Штурма-Ліувілля ця проблема була повністю вирішена незалежно В. А. Марченком і Б. М. Лєвітаном (див. історію задачі в [21]). Для диференціальних операторів порядку $n > 2$ таку асимптотичну формулу отримав А. Г. Костюченко [19].

Розглянемо мінімальний симетричний оператор A, породжений в $L^2(0, \infty)$ диференціальним виразом

$$l(y) := (-1)^n y^{(2n)}(\cdot). \tag{1.11}$$

Головним членом асимптотики для спектральної функції власного самоспряженого розширення $\widetilde{\mathcal{P}}$ є спектральна функція самоспряженого розширення $\widetilde{A}$ оператора A з тими ж граничними умовами, явна форма якої була відсутня.

Теорія граничних трійок і відповідних функцій Вейля до теорії розширень симетричних операторів була розвинена протягом трьох останніх десятиліть (див. [7, 65, 11] і посилання там). Добре відомо [11], що характеристична матриця самоспряженого розширення $\widetilde{A}$ оператора A співпадає з функцією Вейля відповідної граничної трійки, що дозволяє знайти відповідну спектральну функцію простіше, ніж класичним методом.

Висновки до розділу 1

Спектральна теорія несамоспряжених граничних задач на відрізку для звичайного диференціального рівняння (ЗДР) n-го порядку з сумовними коеффіцієнтами бере свій початок в класичних роботах G. D. Birkhoff [60, 61, 63] і Я. Д. Тамаркіна [101, 45, 102], де зокрема введено поняття регулярних граничних умов для ЗДР.

Повнота нерегулярних граничних задач для ЗДР n-го порядку вивчалась М. В. Кєлдишем [17], А. А. Шкаліковим [50], А. Г. Костюченком і А. А. Шкаліковим [20], Г. М. Губреєвим [9], А. П. Хромовим [48, 49], В. С. Рихловим [43] і багатьма іншими (див. посилання в [49]). Базисність Ріса регулярних граничних задач вивчалась N. Dunford [72], В. П. Михайловим [41], Г. М. Кєсєльманом [18], А. С. Маркусом і В. І. Мацаєвим [38], М. С. Аграновичем [56], А. А. Шкаліковим [51, 52, 53], А. Мінкіним [95] і багатьма іншими. Повнота і базисність Ріса для оператора Штурма-Ліувіля вивчалась А. А. Шкаліковим і О. А Вєлієвим [4], П. Джаковим і Б. С. Мітягіним [70], F. Gesztesy і В. А. Ткаченком [75, 76], А. С. Макіним [90] і багатьма іншими.

Вперше загальна гранична задача для системи ЗДР першого порядку була досліджена G. D. Birkhoff і R. E. Langer [62]. Зокрема, вони ввели поняття регулярних граничних умов. Проблема повноти системи власних і приєднаних функцій (СВПФ) граничної задачі для системи ЗДР першого порядку вперше була досліджена М. М. Маламудом і Л. Л. Оридорогою [35, 36, 91]. Вони ввели поняття слабко регулярних граничних умов і довели повноту СВПФ для цього класу граничних задач.

Протягом останніх двадцяти років базисність Ріса для 2×2 системи Дірака з регулярними і посилено регулярними граничними умовами ретельно досліджувалася I. Trooshin і M. Yamamoto [105, 106], S. Hassi і Л. Л. Оридорогою [78], П. Джаковим і Б. С. Мітягіним [96, 12, 66, 67, 68, 69, 70, 71], А. Г. Баскаковим, А. В. Дєрбушовим і А. О. Щербаковим [3], автором і М. М. Маламудом [25, 88], А. М. Савчуком і А. А. Шкаліковим [97] і багатьма іншими.

Я. В. Микитюк і Д. В. Пуйда [40] встановили блочну базисність Ріса задачі Діріхле для системи Дірака високого порядку з потенціалом, квадрат якого є сумовним.

Спектральна теорія граничних задач для систем ЗДР першого порядку природно виникає при дослідженні моделі балки Тимошенка. Ця модель була введена С. Тимошенком у 20-х роках [103, 104], і відтоді ретельно вивчалася J. U. Kim і Y. Renardy [80], M. A. Shubov [99], A. Soufyane і A. Wehbe [100], G. Q. Xu і S. P. Yung [111, 110], Y. Wu і X. Xue [109] і багатьма іншими.

Питання про прямування до нуля на нескінченності розв'язків диференціального рівняння другого порядку вивчалося M. Biernacki [59], H. Milloux [94], G. Armellini [57], G. Sansone [98], Л. А. Гусаровим [10], W. Leighton [81, 82], A. Galbraith, E. J. McShane і G. Parrish [74, 92], D. Willett [108], В. Б. Лідським і Б. В. Федосовим [23], A. Meir, D. Willett, J. S. W. Wong [93], H. A. DeKleine [64], F. V. Atkinson і J. W. Macki [58, 89], L. Hatvani [79].

В багатьох роботах вивчалися асимптотичні формули для спектральної функції самоспряжених розширень диференціальних операторів на півосі. Для оператора Штурма-Ліувілля ця проблема була повністю вирішена незалежно В. А. Марченком і Б. М. Лєвітаном (див. історію задачі в [21]). Для диференціальних операторів порядку $n > 2$ таку асимптотичну формулу отримав А. Г. Костюченко [19]. Головним членом цієї асимптотики є спектральна функція незбуреного оператора з тими ж граничними умовами, явна форма якої була відсутня.

РОЗДІЛ 2

Повнота СВПФ диференціальних операторів на відрізку

В цьому і наступному розділах розглядається система ЗДР першого порядку вигляду

$$Ly := L(Q)y := -iB^{-1}y' + Q(x)y = \lambda y, \quad y = \mathrm{col}(y_1, ..., y_n), \tag{2.1}$$

де B – невироджена діагональна $n \times n$ матриця з комплексними елементами,

$$B = \mathrm{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^{n \times n}, \tag{2.2}$$

і $Q(\cdot) =: (q_{jk}(\cdot))_{j,k=1}^n \in L^1([0,1]; \mathbb{C}^{n \times n})$ – потенціальна матриця.

З системою (2.1) природним чином асоціюється максимальний оператор $L = L(Q)$, що діє в $L^2([0,1]; \mathbb{C}^n)$ на області визначення

$$\mathrm{dom}(L) = \{y \in W^{1,1}([0,1]; \mathbb{C}^n) : Ly \in L^2([0,1]; \mathbb{C}^n)\}.$$

Щоб отримати граничну задачу, приєднаємо до рівняння (2.1) наступні граничні умови

$$Cy(0) + Dy(1) = 0, \qquad C = (c_{jk}), \quad D = (d_{jk}) \in \mathbb{C}^{n \times n}. \tag{2.3}$$

Позначимо через $L_{C,D} := L_{C,D}(Q)$ оператор, асоційований в $L^2([0,1]; \mathbb{C}^n)$ з граничною задачею (2.1)–(2.3). Він визначається, як звуження максимального оператора $L = L(Q)$ на область визначення

$$\mathrm{dom}(L_{C,D}) = \{y \in \mathrm{dom}(L) : \; Cy(0) + Dy(1) = 0\}. \tag{2.4}$$

До того ж, надалі ми завжди будемо накладати умову максимальності

$$\mathrm{rank} \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} = n, \tag{2.5}$$

що є еквівалентним до умови $\ker(CC^* + DD^*) = \{0\}$.

2.1 Загальна теорема про повноту

У цьому підрозділі ми отримаємо загальний результат про повноту, що узагальнює теорему 1.2 із [91].

Нехай $\beta_1, \ldots, \beta_r$ – це всі різні значення серед чисел $b_1, \ldots, b_n$. Зауважимо, що прямі

$$l_{jk} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(i\beta_j\lambda) = \mathrm{Re}(i\beta_k\lambda)\}, \quad 1 \leqslant j < k \leqslant r, \tag{2.6}$$

разом з прямими

$$l_j := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(i\beta_j\lambda) = 0\}, \quad j \in \{1, \ldots, r\}, \tag{2.7}$$

відокремлюють із комплексної площини $\nu \leqslant r^2 + r$ відкритих секторів S_p з вершинами в нулі. При цьому для будь-якого $p \in \{1, \ldots, \nu\}$ числа $\beta_1, \ldots, \beta_r$ можуть бути занумеровані так, що виконано нерівності

$$\mathrm{Re}(i\beta_{j_1}\lambda) < \ldots < \mathrm{Re}(i\beta_{j_\kappa}\lambda) < 0 < \mathrm{Re}(i\beta_{j_{\kappa+1}}\lambda) < \ldots < \mathrm{Re}(i\beta_{j_r}\lambda), \quad \lambda \in S_p. \tag{2.8}$$

Тут $\kappa = \kappa_p$ – це кількість від'ємних значень серед $\mathrm{Re}(i\beta_1\lambda)$, ..., $\mathrm{Re}(i\beta_r\lambda)$ в секторі S_p.

Нагадаємо, що точка $z \in \mathbb{C}$ називається *допустимою*, якщо z не належить жодній з прямих (2.7). Нам також знадобиться наступне визначення: точка $z \in \mathbb{C}$ називається *придатною*, якщо z не належить ні одній із прямих (2.6) і (2.7), тобто z лежить строго всередині одного із секторів S_p. Відзначимо, що придатна точка – більш обмежувальне поняття, ніж допустима точка.

Зрозуміло, що кожний із секторів S_p має вигляд $S_p = \{z : \varphi_{1p} < \arg z < \varphi_{2p}\}$. Позначимо через $S_{p,\varepsilon}$ сектор, строго вкладений в S_p, тобто

$$S_{p,\varepsilon} := \{z : \varphi_{1p} + \varepsilon < \arg z < \varphi_{2p} - \varepsilon\}, \quad \text{де } \ \varepsilon > 0 \ \text{ достатньо мале;} \tag{2.9}$$

$$S_{p,\varepsilon,R} := \{z \in S_{p,\varepsilon} : |z| > R\}. \tag{2.10}$$

Пропозиція 2.1. [91, пропозиція 2.2] *Нехай*

$$B = \operatorname{diag}(\beta_1 I_{n_1}, \ldots, \beta_r I_{n_r}), \quad n_1 + \ldots + n_r = n, \tag{2.11}$$

$$Q = (Q_{jk})_{j,k=1}^r, \quad Q_{jk} \in L^1([0,1]; \mathbb{C}^{n_j \times n_k}), \tag{2.12}$$

$$Q_{jj}(\cdot) \equiv 0, \quad j \in \{1, \ldots, r\}. \tag{2.13}$$

Нехай далі $p \in \{1, \ldots, \nu\}$ *і* $\varepsilon > 0$ *достатньо мале. Тоді для достатньо великих* $R > 0$*, рівняння* (2.1) *має фундаментальний матричний розв'язок*

$$Y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} Y_1 & \ldots & Y_n \end{pmatrix}, \quad Y_k(x,\lambda) = \operatorname{col}(y_{1k}, \ldots, y_{nk}), \quad k \in \{1, \ldots, n\}, \tag{2.14}$$

аналітичний по $\lambda \in S_{p,\varepsilon,R}$*, що задовольняє* (*рівномірно по* $x \in [0,1]$) *співвідношенням*

$$y_{jk}(x,\lambda) = (\delta_{jk} + o(1)) e^{i b_k \lambda x} \quad \textit{при} \quad \lambda \to \infty,\ \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}, \quad j,k \in \{1, \ldots, n\}, \tag{2.15}$$

де δ_{jk} *– це символ Кронекера.*

В подальшому ми систематично будемо використовувати поняття подібності необмежених операторів.

Визначення 2.2. *Нехай* $\mathfrak{H}_j$ *– це гільбертів простір,* A_j *– замкнений оператор в* $\mathfrak{H}_j$ *з областю визначення* $\operatorname{dom}(A_j)$*,* $j \in \{1,2\}$*. Оператори* A_1 *і* A_2 *називаються подібними, якщо існує обмежений оператор* T *із* $\mathfrak{H}_1$ *на* $\mathfrak{H}_2$*, який має обмежений обернений, і такий, що* $A_2 = T A_1 T^{-1}$*, тобто*

$$\operatorname{dom}(A_2) = T \operatorname{dom}(A_1) \quad \textit{i} \quad A_2 f = T A_1 T^{-1} f, \quad f \in \operatorname{dom}(A_2). \tag{2.16}$$

Оператор T *називається перетворенням подібності.*

Зауважимо, що у подібних операторів A_1 і A_2 ($A_2 = T A_1 T^{-1}$) співпадають спектри з урахуванням кратності, а СВПФ $\{e_k^{(j)}\}$, $j \in \{1,2\}$, цих операторів пов'язані співвідношенням $e_k^{(2)} = Te_k^{(1)}$. Отже, вони мають однакові геометричні властивості (повноту, мінімальність, базисність, і т.д.).

Нехай $\Phi(x, \lambda)$ – фундаментальний матричний розв'язок системи (2.1) такий, що

$$\Phi(0, \lambda) = I_n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.17}$$

Власні числа оператора $L_{C,D}(Q)$ співпадають з нулями характеристичного визначника $\Delta(\cdot)$ задачі (2.1)–(2.3), що визначається наступним чином

$$\Delta(\lambda) := \det(C + D\Phi(1, \lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.18}$$

Тепер ми доведемо результат про повноту, що узагальнює теорему 1.2 із [91].

Теорема 2.3. *Нехай $Q \in L^1([0,1]; \mathbb{C}^{n\times n})$. Припустимо, що існують $C, R > 0$, $s \geqslant 0$ і три придатних числа z_1, z_2, z_3, що задовольняють таким умовам:*

(i) нуль є внутрішньою точкою трикутника з вершинами z_1, z_2, z_3;

(ii) для $k \in \{1, 2, 3\}$ маємо

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant \frac{Ce^{\mathrm{Re}(i\tau_k\lambda)}}{|\lambda|^s}, \quad \tau_k = \sum_{\mathrm{Re}(ib_j z_k)>0} b_j, \quad |\lambda| > R, \ \arg\lambda = \arg z_k. \tag{2.19}$$

Тоді СВПФ задачі (2.1)–(2.3) (оператора $L_{C,D}(Q)$) повна і мінімальна в $L^2([0,1]; \mathbb{C}^n)$.

Зауваження 2.4. *У випадку $s = 0$ теорема 2.3 неявно міститься в теоремі 1.2 з [91]. Наше доведення слідує схемі доведення в [91].*

Доведення теореми 2.3. Перенумеровуючи $y_1, \dots, y_n$, ми можемо вважати, що матриця B задовольняє умові (2.11). Тому Q має представлення (2.12). Нехай

$$Q_1(x) := \mathrm{diag}(Q_{11}(x), \dots, Q_{rr}(x)), \tag{2.20}$$

і нехай $W(\cdot)$ – розв'язок наступної задачі Коші

$$iB^{-1}W' = Q_1(x)W, \qquad W(0) = I_n. \tag{2.21}$$

З огляду на блочну структуру матриць B і $Q_1(x)$ маємо

$$W(x) = \mathrm{diag}(W_{11}(x), \ldots, W_{rr}(x)), \quad W_{jj}(x) \in \mathrm{GL}(n_j, \mathbb{C}), \quad x \in [0,1]. \tag{2.22}$$

Позначаючи через $W : y \to W(x)y$ калібрувальне перетворення, покладемо

$$\widetilde{D} := DW(1) \quad \text{i} \quad \widetilde{Q}(x) = W^{-1}(x)(Q(x) - Q_1(x))W(x) =: (\widetilde{q}_{jk}(x))_{j,k=1}^{n}. \tag{2.23}$$

Тоді

$$L_{C,\widetilde{D}}(\widetilde{Q}) = W^{-1} L_{C,D}(Q) W, \tag{2.24}$$

тобто оператори $L_{C,D}(Q)$ і $L_{C,\widetilde{D}}(\widetilde{Q})$ подібні. Зрозуміло, що $\widetilde{\Phi} =: W^{-1}\Phi$ є фундаментальним матричним розв'язком рівняння (2.1) з $\widetilde{Q}$ замість Q, а відповідний характеристичний визначник $\widetilde{\Delta}(\cdot)$ (див. (2.18)) дається формулою

$$\widetilde{\Delta}(\lambda) := \det(C + \widetilde{D}\widetilde{\Phi}(1,\lambda)) = \det(C + DW(1)W^{-1}(1)\Phi(1,\lambda)) = \Delta(\lambda). \tag{2.25}$$

Таким чином, вищенаведене калібрувальне перетворення не змінює характеристичний визначник. Отже, замінюючи при необхідності $L_{C,D}(Q)$ на $L_{C,\widetilde{D}}(\widetilde{Q})$, ми можемо вважати, що виконано умови (2.11)–(2.13).

Нехай далі $\Psi(x,\lambda)$ – якийсь фундаментальний $n \times n$ матричний розв'язок рівняння (2.1) в області S, тобто

$$\det(\Psi(0,\lambda)) \neq 0, \quad \lambda \in S. \tag{2.26}$$

Через $\Psi_k(x,\lambda)$ позначимо k-ий стовбець матриці $\Psi(x,\lambda)$, тобто

$$\Psi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \Psi_1 & \ldots & \Psi_n \end{pmatrix}, \quad \Psi_k(x,\lambda) = \mathrm{col}(\psi_{1k}, \ldots, \psi_{nk}). \tag{2.27}$$

Далі покладемо

$$A_\Psi(\lambda) := C\Psi(0,\lambda) + D\Psi(1,\lambda), \tag{2.28}$$

$$\Delta_\Psi(\lambda) := \det A_\Psi(\lambda) = \det(C\Psi(0,\lambda) + D\Psi(1,\lambda)). \tag{2.29}$$

Зрозуміло, що $\Delta(\cdot) = \Delta_\Phi(\cdot)$. Позначимо через $\widetilde{A}_\Psi(\lambda) = (\Delta_\Psi^{jk}(\lambda))_{j,k=1}^{n}$ приєднану матрицю, тобто

$$A_\Psi(\lambda) \cdot \widetilde{A}_\Psi(\lambda) = \widetilde{A}_\Psi(\lambda) \cdot A_\Psi(\lambda) = \Delta_\Psi(\lambda) I_n, \quad \lambda \in S, \tag{2.30}$$

і введемо в розгляд вектор-функції

$$U_{\Psi,j}(x,\lambda) := \sum_{k=1}^{n} \Delta_{\Psi}^{jk}(\lambda)\Psi_k(x,\lambda), \qquad j \in \{1,2,\ldots,n\}, \tag{2.31}$$

$$U_{\Psi}(x,\lambda) := \Big(U_{\Psi,1}(x,\lambda) \ \ \ldots \ \ U_{\Psi,n}(x,\lambda)\Big) = \Psi(x,\lambda)\widetilde{A}_{\Psi}(\lambda). \tag{2.32}$$

Спектр $\sigma(L_{C,D})$ задачі (2.1)–(2.3) співпадає з множиною нулів характеристичного визначника $\Delta(\cdot) = \Delta_{\Phi}(\cdot)$. Із умови (ii) теореми 2.3 випливає співвідношення $\Delta(\cdot) \not\equiv 0$. Отже, спектр $\sigma(L_{C,D})$ задачі (2.1)–(2.3) є дискретним, тобто $\sigma(L_{C,D})$ є скінченною або счисленною множиною, що складається з ізольованих власних чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{N}$, $N \leqslant \infty$, скінченної алгебраїчної кратності. Нехай λ_k є нулем функції $\Delta(\cdot)$ і має кратніть m_k. Як показано на кроці (i) доведення теореми 1.2 з [91], лінійна оболонка системи функцій

$$\left\{ \frac{\partial^p}{\partial\lambda^p} U_{\Phi,j}(x,\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_k} : \ \ p \in \{0,1,\ldots,m_k-1\}, \ \ j \in \{1,\ldots,n\} \right\} \tag{2.33}$$

співпадає з кореневим подпростором $\mathcal{R}_{\lambda_k}(L_{C,D})$ оператора $L_{C,D}$, де $U_{\Phi,j}(x,\lambda)$ визначається формулою (2.31) для розв'язку $\Phi(x,\lambda)$ замість $\Psi(x,\lambda)$. Зауважимо, що $\Phi(x,\cdot)$, $U_{\Phi,j}(x,\cdot)$ і $\Delta(\cdot)$ – цілі функції експоненціального типу.

Для доведення повноти об'єднання систем (2.33) по всім k розглянемо будь-яку вектор-функцію $f = \mathrm{col}(f_1,\ldots,f_n) \in L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$, яка ортогональна цій системі. Розглянемо наступні цілі функції

$$F_j(\lambda) := (U_{\Phi,j}(\cdot,\lambda), f(\cdot))_{L^2([0,1];\mathbb{C}^n)}, \quad j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{2.34}$$

Оскільки f ортогональна до системи (2.33), то кожне $\lambda_k (\in \sigma(L_{C,D}))$ є нулем функції $F_j(\cdot)$ кратності не менше ніж m_k, тобто для $\lambda_k \in \sigma(L_{C,D})$ виконано

$$F_j^{(p)}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_k} = 0, \qquad p \in \{0,1,\ldots,m_k-1\}, \quad j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{2.35}$$

Таким чином, відношення

$$G_j(\lambda) := \frac{F_j(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{2.36}$$

є цілою функцією. До того ж, оскільки функції $U_{\Phi,j}(x,\cdot)$ і $\Delta(\cdot)$ – цілі функції експоненціального типу, то такими є і $G_1(\cdot),\dots,G_n(\cdot)$. Доведемо, що ці функції є поліномами від λ, оцінивши їх зріст. Покладемо

$$G(\lambda) := \begin{pmatrix} G_1(\lambda) & \dots & G_n(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{2.37}$$

Із (2.34) і (2.36) випливає, що

$$\int_0^1 f^*(x)U_\Phi(x,\lambda)dx = \Delta(\lambda)G(\lambda), \quad \lambda\in\mathbb{C}, \tag{2.38}$$

де $f^*(x) := \begin{pmatrix} \overline{f_1(x)} & \dots & \overline{f_n(x)} \end{pmatrix} = \overline{f(x)}^T$.

Помноживши (2.38) на матрицю $A_\Phi(\cdot)$ зліва, ми отримуємо з огляду на (2.32) і (2.30), що

$$\Delta(\lambda)\int_0^1 f^*(x)\Phi(x,\lambda)dx = \Delta(\lambda)G(\lambda)A_\Phi(\lambda), \quad \lambda\in\mathbb{C}, \tag{2.39}$$

або

$$\int_0^1 f^*(x)\Phi(x,\lambda)dx = G(\lambda)A_\Phi(\lambda), \quad \lambda\notin\sigma(L_{C,D}). \tag{2.40}$$

Тепер із неперервності по λ інтегралу в останній рівності, дискретності множини $\sigma(L_{C,D})$ і визначення $A_\Phi(\lambda)$ (див. формулу (2.28)) випливає таке співвідношення

$$\int_0^1 f^*(x)\Phi(x,\lambda)dx = G(\lambda)(C\Phi(0,\lambda)+D\Phi(1,\lambda)), \quad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{2.41}$$

Нехай $\Psi(x,\lambda)$ – це якийсь фундаментальний $n\times n$ матричний розв'язок рівняння (2.1) в області $S\subset\mathbb{C}$. З огляду на початкову умову $\Phi(0,\lambda)=I_n$, матриці $\Phi(x,\lambda)$ і $\Psi(x,\lambda)$ пов'язані співвідношенням

$$\Psi(x,\lambda) = \Phi(x,\lambda)\Psi(0,\lambda), \qquad x\in[0,1], \quad \lambda\in S, \tag{2.42}$$

де $\Psi(0,\lambda)$ – невироджена матриця при $\lambda\in S$. Помноживши (2.41) на $\Psi(0,\lambda)$ справа, ми отримуємо

$$\int_0^1 f^*(x)\Psi(x,\lambda)dx = G(\lambda)(C\Psi(0,\lambda)+D\Psi(1,\lambda)), \quad \lambda\in S. \tag{2.43}$$

Тепер помноживши (2.43) на $\widetilde{A}_{\Psi}(x,\lambda)$ справа, ми отримуємо з огляду на (2.32) і (2.30)

$$\int_0^1 f^*(x)U_{\Psi}(x,\lambda)dx = \Delta_{\Psi}(\lambda)G(\lambda), \quad \lambda \in S, \tag{2.44}$$

або

$$F_{\Psi,j}(\lambda) := (U_{\Psi,j}(\cdot,\lambda), f(\cdot))_{L^2([0,1];\mathbb{C}^n)} = G_j(\lambda)\Delta_{\Psi}(\lambda), \quad \lambda \in S, \quad j \in \{1,\dots,n\}. \tag{2.45}$$

Оцінимо $G_j(\lambda)$ знизу на променях

$$\Gamma_k := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = \arg z_k\}, \quad k \in \{1,2,3\}, \tag{2.46}$$

використовуючи співвідношення (2.45) для відповідних розв'язків $\Psi(x,\lambda)$.

Зафіксуємо $k \in \{1,2,3\}$. Оскільки z_k – придатна точка, то Γ_k лежить строго всередині деякого сектора S_p. Тому $\Gamma_k \in S_{p,\varepsilon}$ для деякого $\varepsilon > 0$. Згідно з пропозицією 2.1 існує фундаментальний матричний розв'язок $Y(x,\lambda)$ системи (2.1), що має асимптотичну поведінку (2.15) в області $S_{p,\varepsilon,R}$ для деякого $R > 0$. В доведенні теореми 1.2 з [91] було показано, що для функції $F_{Y,j}(\lambda)$, що задана формулою (2.45), виконано

$$F_{Y,j}(\lambda) = o(e^{i\tau_k\lambda}) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty,\ \lambda \in S_{p,\varepsilon}, \tag{2.47}$$

де τ_k задано в формулі (2.19). Далі, з (2.15) випливає, що

$$Y(0,\lambda) = I_n + o_n(1) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty,\ \lambda \in S_{p,\varepsilon}, \tag{2.48}$$

де $o_n(1)$ позначає $n \times n$ матрицю-функцію з елементами вигляду $o(1)$ при $\lambda \to \infty$. Тепер з формул (2.28), (2.29), (2.42) з Y замість Ψ і формули (2.48) випливає, що

$$\Delta_Y(\lambda) = \Delta(\lambda)\det Y(0,\lambda) = (1+o(1))\Delta(\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty,\ \lambda \in S_{p,\varepsilon}. \tag{2.49}$$

Підставляючи (2.47),(2.49), (2.19) в (2.45) ми отримуємо при $\arg\lambda = \arg z_k,\ |\lambda| > R$,

$$|G_j(\lambda)| = \left|\frac{o(e^{i\tau_k\lambda})}{(1+o(1))\Delta(\lambda)}\right| \leqslant \frac{C_1 e^{\mathrm{Re}(i\tau_k\lambda)}|\lambda|^s}{Ce^{\mathrm{Re}(i\tau_k\lambda)}} = C_2|\lambda|^s, \tag{2.50}$$

для деякого $C_1 > 0$ з $C_2 = C_1/C$.

Оскільки нуль це внутрішня точка трикутника з вершинами z_1, z_2, z_3, то промені $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ розбивають $\mathbb{C}$ на три замкнених сектора $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, кожний з яких має центральний кут не більший ніж π. Зафіксуємо $k \in \{1, 2, 3\}$ і застосуємо теорему Фрагмена-Ліндельофа [83, теорема 6.1] до функції $\widetilde{G}_j(\cdot)$, що розглядається в секторі Ω_k. Використовуючи (2.50), ми отримуємо

$$|G_j(\lambda)| \leqslant C_3 |\lambda|^s, \quad \lambda \in \Omega_k, \tag{2.51}$$

для деякого $C_3 > 0$. Отже

$$|G_j(\lambda)| \leqslant C_3 |\lambda|^s, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.52}$$

За теоремою Ліувілля (див. теорему 1.1 [83]), $G_j(\lambda)$ – поліном степеня не вище s.

Тепер доведемо, що $G_j(\cdot) \equiv 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, використовуючи рівність (2.43) для відповідних розв'язків $\Psi(x, \lambda)$ і той факт, що $G_j(\lambda)$ є поліномом по λ. Підставляючи (2.27) в (2.43), ми отримуємо при $k \in \{1, \ldots, n\}$, що

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \overline{f_j(x)} \psi_{jk}(x, \lambda) dx = \sum_{j=1}^{n} G_j(\lambda) \sum_{l=1}^{n} \left(c_{jl} \psi_{lk}(0, \lambda) + d_{jl} \psi_{lk}(1, \lambda) \right). \tag{2.53}$$

Розглянемо деякий сектор $S_{p,\varepsilon}$. Нехай $Y(x, \lambda)$ – матричний розв'язок рівняння (2.1), що задовольняє (2.15) в $S_{p,\varepsilon,R}$. Із (2.15) випливає, що

$$|y_{jk}(x, \lambda)| \leqslant C e^{\operatorname{Re}(ib_k \lambda) x}, \quad j, k \in \{1, \ldots, n\}, \quad x \in [0, 1], \quad \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}, \tag{2.54}$$

для деякого $C > 0$. Отже, за нерівністю Коші-Буняковського

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \overline{f_j(x)} y_{jk}(x, \lambda) dx \right| &\leqslant C \|f\|_{L^2([0,1];\mathbb{C}^n)} \left(\int_0^1 e^{2 \operatorname{Re}(ib_k \lambda) x} dx \right)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{C \|f\|}{\sqrt{|\lambda|}} \max\{e^{\operatorname{Re}(ib_k \lambda)}, 1\}, \quad \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}, \quad k \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Підставляючи (2.15) і (2.55) в (2.53) з Y замість Ψ, ми отримуємо

$$\left|\sum_{j=1}^{n} G_j(\lambda)\left(c_{jk}+d_{jk}e^{ib_k\lambda}+\sum_{l=1}^{n}\bigl(c_{jl}\cdot o(1)+d_{jl}\cdot o(1)\cdot e^{ib_k\lambda}\bigr)\right)\right|$$
$$\leqslant \frac{C\|f\|}{\sqrt{|\lambda|}}\max\{e^{\mathrm{Re}(ib_k\lambda)},1\} \quad \text{при} \quad \lambda\to\infty,\ \lambda\in S_{p,\varepsilon,R}, \quad k\in\{1,\dots,n\}. \tag{2.56}$$

Нехай $\deg P$ позначає степінь полінома P. Припустимо, що

$$d := \max\{\deg G_j : j\in\{1,\dots,n\}\}\geqslant 0, \tag{2.57}$$

і позначимо через α_j коефіцієнт при λ^d в $G_j(\lambda)$. Таким чином,

$$G_j(\lambda)=\lambda^d(\alpha_j+o(1)) \quad \text{при} \quad \lambda\to\infty, \quad j\in\{1,\dots,n\}. \tag{2.58}$$

Із визначення d випливає, що $d=\deg G_{j_0}$ для деякого $j_0\in\{1,\dots,n\}$ і, отже, $\alpha_{j_0}\neq 0$. Тому $\alpha:=\mathrm{col}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq 0$.

Зафіксуємо $k\in\{1,\dots,n\}$. Без обмеження спільності, ми можемо вважати, що

$$\mathrm{Re}(ib_k\lambda)>0, \quad \lambda\in S_{p,\varepsilon}. \tag{2.59}$$

Із співвідношення (2.59) випливає, що

$$c_{jk}+d_{jk}e^{ib_k\lambda}+\sum_{l=1}^{n}\bigl(c_{jl}\cdot o(1)+d_{jl}\cdot o(1)\cdot e^{ib_k\lambda}\bigr)=(d_{jk}+o(1))e^{ib_k\lambda}, \qquad j\in\{1,\dots,n\}, \tag{2.60}$$

при $\lambda\to\infty$, $\lambda\in S_{p,\varepsilon}$. Підставляючи (2.58) і (2.60) в (2.56), ми отримуємо

$$\bigl|\alpha_1 d_{1k}+\ldots+\alpha_n d_{nk}+o(1)\bigr|\cdot e^{\mathrm{Re}(ib_k\lambda)}\cdot|\lambda|^d\leqslant\frac{C\|f\|}{\sqrt{|\lambda|}}\max\{e^{\mathrm{Re}(ib_k\lambda)},1\}, \quad \lambda\in S_{p,\varepsilon,R}. \tag{2.61}$$

Оскільки $d\geqslant 0$, то з огляду на (2.59) з цієї оцінки випливає, що

$$\alpha_1 d_{1k}+\ldots+\alpha_n d_{nk}=0. \tag{2.62}$$

Тепер розглянемо сектор $S_{\widetilde{p},\varepsilon}$, протилежний до $S_{p,\varepsilon}$. З огляду на (2.59) ми маємо

$$\mathrm{Re}(ib_k\lambda)<0, \quad \lambda\in S_{\widetilde{p},\varepsilon}. \tag{2.63}$$

Нехай $\widetilde{Y}(x,\lambda)$ – розв'язок системи (2.1) з асимптотикою (2.15) в секторі $S_{\widetilde{p},\varepsilon}$. Підставляючи $\widetilde{Y}(x,\lambda)$ в (2.53) замість $\Psi(x,\lambda)$, ми отримуємо аналогічно попередньому випадку, що

$$\left|\alpha_1 c_{1k} + \ldots + \alpha_n c_{nk} + o(1)\right| \cdot |\lambda|^d \leqslant \frac{C\|f\|}{\sqrt{|\lambda|}} \max\{e^{\mathrm{Re}(ib_k\lambda)}, 1\}, \quad \lambda \in S_{\widetilde{p},\varepsilon,R}. \tag{2.64}$$

Ця оцінка сумісна з (2.63) тільки якщо

$$\alpha_1 c_{1k} + \ldots + \alpha_n c_{nk} = 0. \tag{2.65}$$

Оскільки $k \in \{1,\ldots,n\}$ є довільним, то об'єднуючи співвідношення (2.62) і (2.65), ми отримуємо

$$D^T\alpha = 0, \quad C^T\alpha = 0, \tag{2.66}$$

з чого випливає рівність $\alpha = 0$ з огляду на умови максимальності (2.5). Це суперечить припущенню $d \geqslant 0$. Отже, $G_j(\cdot) \equiv 0$ при $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Тепер з (2.41) випливає, що

$$\int_0^1 \left\langle \Phi_j(x,\lambda), f(x)\right\rangle dx \equiv 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \quad j \in \{1,2,\ldots,n\}. \tag{2.67}$$

Із кроку (vi) доведення теореми 1.2 із [91] випливає, що вектор-функція f, що задовольняє (2.67), є нульовою, тобто СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$ повна. Мінімальність СВПФ випливає із леми 2.4 [91], застосованої до оператора $(L_{C,D} - \lambda)^{-1}$ з $\lambda \in \rho(L_{C,D})$. $\square$

2.2 Асимптотична поведінка розв'язків і характеристичного визначника

У цьому підрозділі ми уточнимо асимптотичні формули (2.15) в припущенні, що потенціальна матриця $Q(\cdot)$ неперервна в точках 0 і 1, і застосуємо ці формули для дослідження асимптотичної поведінки характеристичного визначника $\Delta(\cdot)$. Почнемо із наступної леми.

Лема 2.5. *Нехай $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $C > 0$ і $S \subset \mathbb{C}$ – необмежена підмножина $\mathbb{C}$ така, що*

$$\operatorname{Re}(ib\lambda) < -C|\lambda|, \quad \lambda \in S. \tag{2.68}$$

(i) Нехай $\varphi \in L^1[0,1]$ і функція $\varphi(\cdot)$ неперервна в нулі. Тоді

$$\int_0^1 e^{ib\lambda t}\varphi(t)dt = \frac{\varphi(0) + o(1)}{-ib\lambda} \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty,\ \lambda \in S. \tag{2.69}$$

(ii) Нехай $\varphi \in L^1[0,1]$ і функція $\varphi(\cdot)$ обмежена в околі нуля. Тоді

$$\int_0^1 \left|e^{ib\lambda t}\varphi(t)\right| dt = O(|\lambda|^{-1}), \quad \lambda \in S. \tag{2.70}$$

Доведення. З огляду на (2.68) маємо для $\delta \in (0,1)$

$$\int_0^1 \left|e^{ibt}\varphi(t)\right| dt \leqslant \left(\int_0^\delta + \int_\delta^1\right) e^{-C|\lambda|t}|\varphi(t)|dt \leqslant \frac{1}{C|\lambda|} \sup_{t\in[0,\delta]} |\varphi(t)| + \|\varphi\|_1 e^{-C\delta|\lambda|}, \tag{2.71}$$

де $\|\varphi\|_1 := \int_0^1 |\varphi(t)|dt$. Із цього випливає (2.70). Далі, співвідношення (2.69) є справедливим для $\varphi(\cdot) \equiv \mathrm{const}$. Отже, достатньо довести його у випадку $\varphi(0) = 0$. Оскільки δ можна вибрати як завгодно малим, то це випливає із оцінки (2.71). □

Лемма 2.5 дозволяє уточнити асимптотичні формули (2.15) із пропозиції 2.1, коли Q неперервна у кінцях відрізка $[0,1]$.

Пропозиція 2.6. *Нехай виконано умови* (2.11)–(2.13) *і нехай $p \in \{1,\dots,\nu\}$. Нехай Q неперервна в точках 0 і 1. Тоді для достатньо великого $R > 0$ і малого $\varepsilon > 0$ рівняння* (2.1) *має фундаментальний матричний розв'язок* (2.14)*, аналітичний по $\lambda \in S_{p,\varepsilon,R}$. До того ж, функції $y_{jk}(x,\lambda)$, $j,k \in \{1,\dots,n\}$, задовольняють* (2.15) *і мають таку асимптотичну пове-*

дінку в точках 0 *і* 1 *при* $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_{p,\varepsilon,R}$,

$$y_{jk}(0,\lambda) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad \operatorname{Re}(ib_j\lambda) < \operatorname{Re}(ib_k\lambda), \\ \delta_{jk}, & \textit{якщо} \quad b_j = b_k, \\ \frac{b_j q_{jk}(0)+o(1)}{b_j-b_k} \cdot \frac{1}{\lambda}, & \textit{якщо} \quad \operatorname{Re}(ib_j\lambda) > \operatorname{Re}(ib_k\lambda); \end{cases} \tag{2.72}$$

$$y_{jk}(1,\lambda) = \begin{cases} \frac{b_j q_{jk}(1)+o(1)}{b_j-b_k} \cdot \frac{e^{ib_k\lambda}}{\lambda}, & \textit{якщо} \quad \operatorname{Re}(ib_j\lambda) < \operatorname{Re}(ib_k\lambda), \\ (\delta_{jk}+o(1))e^{ib_k\lambda}, & \textit{якщо} \quad b_j = b_k, \\ 0, & \textit{якщо} \quad \operatorname{Re}(ib_j\lambda) > \operatorname{Re}(ib_k\lambda). \end{cases} \tag{2.73}$$

Доведення. Згідно з доведенням пропозиції 2.2 з [91], матричний розв'язок $Y(x,\lambda)$ системи (2.1) з асимптотикою (2.15) в $S_{p,\varepsilon,R}$ було побудовано як єдиний розв'язок наступної системи інтегральних рівнянь

$$y_{jk}(x,\lambda) = \delta_{jk}e^{ib_k\lambda x} - ib_j \int_{a_{jk}}^{x} e^{-ib_j\lambda(t-x)} \sum_{l=1}^{n} q_{jl}(t) y_{lk}(t,\lambda)dt, \tag{2.74}$$

де

$$a_{jk} := \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \operatorname{Re}(ib_j\lambda) \leqslant \operatorname{Re}(ib_k\lambda), \quad \lambda \in S_{p,\varepsilon}, \\ 1, & \text{якщо} \quad \operatorname{Re}(ib_j\lambda) > \operatorname{Re}(ib_k\lambda), \quad \lambda \in S_{p,\varepsilon}. \end{cases} \tag{2.75}$$

Зокрема, $a_{jk} = 0$ якщо $b_j = b_k$. Покажемо, що цей розв'язок задовольняє (2.72), (2.73). Із (2.74) легко випливає, що при $\lambda \in S_{p,\varepsilon,R}$ виконано рівності

$$y_{jk}(0,\lambda) = 0, \quad \operatorname{Re}(ib_j\lambda) < \operatorname{Re}(ib_k\lambda), \tag{2.76}$$

$$y_{jk}(0,\lambda) = \delta_{jk}, \quad b_j = b_k, \tag{2.77}$$

$$y_{jk}(1,\lambda) = 0, \quad \operatorname{Re}(ib_j\lambda) > \operatorname{Re}(ib_k\lambda), \tag{2.78}$$

а друге співвідношення в (2.73) випливає із пропозиції 2.6. Таким чином, нам треба довести лише третє співвідношення в (2.72) і перше співвідношення в (2.73).

Запишемо (2.15) в такому вигляді

$$y_{jk}(x,\lambda) = (\delta_{jk} + \rho_{jk}(x,\lambda))e^{ib_k\lambda}, \quad j,k \in \{1,\dots,n\}, \tag{2.79}$$

де $\rho_{jk}(x,\lambda) = o(1)$, при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_{p,\varepsilon,R}$, рівномірно по $x \in [0,1]$. Підставляючи вираз (2.79) для $y_{jk}(x,\lambda)$ в (2.74), отримуємо

$$y_{jk}(x,\lambda) = \left(\delta_{jk} - ib_j \int_{a_{jk}}^{x} e^{i(b_k-b_j)\lambda(t-x)} \left(q_{jk}(t) + \sum_{l=1}^{n} q_{jl}(t)\rho_{lk}(t,\lambda)\right) dt\right) e^{ib_k\lambda x}. \tag{2.80}$$

Нехай $\mathrm{Re}(ib_j\lambda) > \mathrm{Re}(ib_k\lambda)$. Підставляючи $x = 0$ в (2.80), отримуємо

$$y_{jk}(0,\lambda) = ib_j \int_0^1 e^{i(b_k-b_j)\lambda t} q_{jk}(t)dt + ib_j \int_0^1 e^{i(b_k-b_j)\lambda t} \sum_{l=1}^{n} q_{jl}(t)\rho_{lk}(t,\lambda)dt. \tag{2.81}$$

Зрозуміло, що

$$\mathrm{Re}(i(b_k - b_j)\lambda) < -C|\lambda|, \quad \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}, \tag{2.82}$$

для деякого $C > 0$. Отже, застосовуючи лему 2.5(i) з

$$S = S_{p,\varepsilon,R}, \quad b = b_k - b_j, \quad \varphi(\cdot) = ib_j q_{jk}(\cdot), \tag{2.83}$$

отримуємо з огляду на (2.69) і неперервність $q_{jk}(\cdot)$ в нулі, що

$$ib_j \int_0^1 e^{i(b_k-b_j)\lambda t} q_{jk}(t)dt = \frac{b_j q_{jk}(0) + o(1)}{(b_j - b_k)\lambda} \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty, \ \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}. \tag{2.84}$$

Далі, оскільки $q_{jl}(\cdot)$, $l \in \{1,\ldots,n\}$, є обмеженими в околі нуля, і

$$\sup_{t\in[0,1]} |\rho_{lk}(t,\lambda)| = o(1) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty, \ \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}, \tag{2.85}$$

то із леми 2.5(ii) випливає, що

$$\int_0^1 e^{i(b_k-b_j)\lambda t} \sum_{l=1}^{n} q_{jl}(t)\rho_{lk}(t,\lambda)dt = \sum_{l=1}^{n} o\left(\int_0^1 \left|e^{i(b_k-b_j)\lambda t} q_{jl}(t)\right| dt\right) = o(\lambda^{-1}), \tag{2.86}$$

при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_{p,\varepsilon,R}$. Це разом з (2.81) і (2.84) доводить третє співвідношення в (2.72).

Нехай тепер $\mathrm{Re}(ib_j\lambda) < \mathrm{Re}(ib_k\lambda)$. Тоді використовуючи (2.75), ми отримуємо з (2.80), що

$$y_{jk}(1,\lambda) = -ib_j e^{ib_k\lambda} \int_0^1 e^{i(b_j-b_k)\lambda s} \left(q_{jk}(1-s) + \sum_{l=1}^{n} q_{jl}(1-s)\rho_{lk}(1-s,\lambda)\right) ds. \tag{2.87}$$

Використовуючи нерівність

$$\mathrm{Re}(i(b_j - b_k)\lambda) < -C|\lambda|, \quad \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}, \tag{2.88}$$

неперервність функцій $q_{jl}(\cdot)$, $l \in \{1, \ldots, n\}$, у точці 1 і повторюючи попередні міркування, ми отримуємо перше співвідношення в (2.73). $\square$

Зауваження 2.7. *Зафіксуємо* $j, k \in \{1, \ldots, n\}$. *Як видно із доведення пропозиції 2.6, індивідуальна функція* $y_{j,k}(x, \lambda)$ *задовольняє третьому співвідношенню в* (2.72), *якщо* $q_{jk}(\cdot)$ *неперервна в нулі і* $q_{jl}(\cdot)$ *обмежені в нулі при* $l \in \{1, \ldots, n\}$. *Інакше, вона задовольняє лише більш слабкому співвідношенню*

$$y_{jk}(0, \lambda) = o(1) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty, \quad \lambda \in S_{p,\varepsilon}. \tag{2.89}$$

До того ж, якщо функції $q_{jl}(\cdot)$, $l \in \{1, \ldots, n\}$, *є тільки обмеженими в нулі, то за лемою 2.5(ii),* $y_{jk}(0, \lambda) = O(\lambda^{-1})$, $\lambda \in S_{p,\varepsilon,R}$. *Аналогічне твердження є справедливим для* $y_{jk}(1, \lambda)$. *Це дозволяє послабити обмеження на* $Q(\cdot)$ *в деяких випадках.*

На наступному кроці ми досліджуємо асимптотичну поведінку характеристичного визначника $\Delta(\cdot)$. Для зручності в застосуваннях ми не припускаємо, що рівні b_j об'єднані в блоки, як це було в попередній роботі [91]. Також нагадаємо визначення матриці $T_A(C, D)$. Нехай $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, де $\mathrm{Re}\, a_k \neq 0$. Для $n \times n$ матриць $C = (c_1 \ \ldots \ c_n)$ і $D = (d_1 \ \ldots \ d_n)$, допоміжна $n \times n$ матриця $T_A(C, D)$ визначається наступним чином: її k-ий стовбець співпадає з c_k, якщо $\mathrm{Re}\, a_k < 0$, і співпадає з d_k, якщо $\mathrm{Re}\, a_k > 0$.

Пропозиція 2.8. *Нехай* B *визначено рівністю* (2.2), $Q \in L^1([0, 1]; \mathbb{C}^{n \times n})$ *і нехай функції* q_{jk} *є неперервними в точках* 0 *і* 1, *якщо* $b_j \neq b_k$. *Нехай, як і вище,* $\Delta(\cdot)$ *позначає характеристичний визначник* (2.18) *задачі* (2.1)–(2.3). *Нарешті, нехай* $p \in \{1, \ldots, \nu\}$. *Тоді для достатньо малого* $\varepsilon > 0$

характеристичний визначник $\Delta(\cdot)$ *має наступну асимптотичну формулу при* $\lambda \to \infty$ *і* $\lambda \in S_{p,\varepsilon}$,

$$\Delta(\lambda) = \left(\omega_0(z_p) \cdot (1 + o(1)) + \frac{\omega_1(z_p) + o(1)}{\lambda}\right) e^{i(\tau_p \lambda + \gamma_p)}, \tag{2.90}$$

де z_p *– фіксована точка із* $S_{p,\varepsilon}$,

$$\gamma_p := \sum_{\mathrm{Re}(ib_j z_p) > 0} b_j \int_0^1 q_{jj}(t) dt, \tag{2.91}$$

$$\tau_p := \sum_{\mathrm{Re}(ib_j z_p) > 0} b_j, \tag{2.92}$$

$$\omega_0(z_p) := \det T_{iz_p B}(C, D), \tag{2.93}$$

$$\omega_1(z_p) := \sum_{\substack{\mathrm{Re}(ib_j z_p) < 0 \\ \mathrm{Re}(ib_k z_p) > 0}} \frac{\det T_{iz_p B}^{c_j \to c_k} b_k q_{kj}(0) - \det T_{iz_p B}^{d_k \to d_j} b_j q_{jk}(1)}{b_k - b_j}, \tag{2.94}$$

і матриця $T_{iz_p B}^{c_j \to c_k}$ $(T_{iz_p B}^{d_j \to d_k})$ *отримується із* $T_{iz_p B}(C, D)$ *заміною* j*-го стовбця на* k*-ий стовбець матриці* C *(відповідно* D*).*

Зауваження 2.9. *Пояснимо позначення* $T_{iz_p B}^{c_j \to c_k}$. *Позначимо* j*-ий стовбець матриці* C *через* c_j. *Зрозуміло, що якщо* $\mathrm{Re}(ib_j \lambda) < 0$, *то* j*-ий стовбець матриці* $T_{iz_p B}(C, D)$ *співпадає з* c_j. *Отже, верхній індекс* $c_j \to c_k$ *в позначенні матриці* $T_{iz_p B}^{c_j \to c_k}$ *просто означає заміну* c_j *на* c_k *в* $T_{iz_p B}$. *Позначення* $T_{iz_p B}^{d_k \to d_j}$ *пояснюється аналогічно.*

Доведення пропозиції 2.8. Як і при доведенні теореми 2.3 можна вважати, що виконано умови (2.11)–(2.12). Далі, застосовуючи калібрувальне перетворення $W : y \to W(x)y$ з $W(\cdot)$, що задане формулами (2.21)–(2.22), ми перетворюємо оператор $L_{C,D}(Q)$ в оператор $L_{C,\widetilde{D}}(\widetilde{Q})$ з матрицями $\widetilde{D}$ і $\widetilde{Q}(x)$, що задані формулами (2.23). З огляду на (2.25) характеристичний визначник зберігається при цьому перетворенні.

Далі, матриця-функція $Q - Q_1$ неперервна в точках 0 і 1. Оскільки $W(\cdot)$ і $W^{-1}(\cdot)$ неперервні на $[0, 1]$, то $\widetilde{Q}$ також неперервна в точках 0 і 1. Згідно з (2.23) для $\widetilde{Q}$ виконано (2.13). Тому за пропозицією 2.6 існує фундаментальний матричний розв'язок $\widetilde{Y}(\cdot,\lambda)$ системи (2.1) з $\widetilde{Q}$ замість Q, що задовольняє асимптотичним співвідношенням (2.72) і (2.73) з $\widetilde{q}_{jk}(\cdot)$ замість $q_{jk}(\cdot)$. Фундаментальні матриці $\widetilde{Y}(\cdot,\lambda)$ і $\widetilde{\Phi}(\cdot,\lambda)$ пов'язані співвідношенням

$$\widetilde{Y}(x,\lambda) = \widetilde{\Phi}(x,\lambda)P(\lambda), \qquad x \in [0,1], \quad \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}, \tag{2.95}$$

де $P(\lambda) =: (p_{kj}(\lambda))_{k,j=1}^{n}$ – аналітична невироджена матриця в $S_{p,\varepsilon,R}$. Отже, $\widetilde{Y}(0,\lambda) = P(\lambda)$, і з огляду на (2.15) і (2.25) (див. також формулу (3.31) в [91]) маємо

$$\Delta_{\widetilde{Y}}(\lambda) := \det(C\widetilde{Y}(0,\lambda) + \widetilde{D}\widetilde{Y}(1,\lambda)) = \widetilde{\Delta}(\lambda)\det(\widetilde{Y}(0,\lambda)) = (1+o(1))\Delta(\lambda), \tag{2.96}$$

при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_{p,\varepsilon}$. Таким чином, достатньо довести (2.90) з $\Delta_{\widetilde{Y}}(\cdot)$ замість $\Delta(\cdot)$. Оскільки $W(0) = I_n$, то $\widetilde{Q}(0) = Q(0) - Q_1(0)$ і, отже,

$$\widetilde{Y}(0,\lambda) = Y_0 := Y_0(\lambda) := \left(y_{jk}^{[0]}(\lambda)\right)_{j,k=1}^{n}, \tag{2.97}$$

де $y_{jk}^{[0]}(\lambda)$ задано формулою (2.72). Далі, спростимо $\widetilde{Y}(1,\lambda)$. Нехай

$$\widetilde{Q}(x) = \left(\widetilde{Q}_{jk}(x)\right)_{j,k=1}^{r}, \quad \widetilde{Q}_{jk}(x) \in \mathbb{C}^{n_j \times n_k}, \tag{2.98}$$

$$\widetilde{Y}(x,\lambda) = \left(\widetilde{Y}_{jk}(x,\lambda)\right)_{j,k=1}^{r}, \quad \widetilde{Y}_{jk}(x,\lambda) \in \mathbb{C}^{n_j \times n_k}, \tag{2.99}$$

блочні представлення матриць $\widetilde{Q}(x)$ і $\widetilde{Y}(x,\lambda)$ відносно ортогонального розкладання $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^{n_r}$. Із (2.22)–(2.23) випливає, що

$$\widetilde{Q}_{jk}(1) = W_{jj}^{-1}(1)Q_{jk}(1)W_{kk}(1), \qquad j \neq k. \tag{2.100}$$

Далі зауважимо, що з огляду на рівності (2.11)–(2.12), формула (2.73) для $\widetilde{Y}(1,\lambda)$ набуде вигляду

$$\widetilde{Y}_{jk}(1,\lambda) = \begin{cases} \frac{\beta_j \widetilde{Q}_{jk}(1)+o(1)}{\beta_j-\beta_k} \cdot \frac{e^{i\beta_k\lambda}}{\lambda}, & \text{якщо} \quad \mathrm{Re}(i\beta_j\lambda) < \mathrm{Re}(i\beta_k\lambda), \\ (I_{n_k}+o(1))e^{i\beta_k\lambda}, & \text{якщо} \quad j = k, \\ 0, & \text{якщо} \quad \mathrm{Re}(i\beta_j\lambda) > \mathrm{Re}(i\beta_k\lambda). \end{cases} \tag{2.101}$$

З огляду на (2.11)–(2.12) і (2.100)–(2.101) маємо

$$\widetilde{Y}(1,\lambda) = W^{-1}(1)Y_1W(1), \quad Y_1 := Y_1(\lambda) = \left(y_{jk}^{[1]}(\lambda)\right)_{j,k=1}^{n}, \tag{2.102}$$

де $y_{jk}^{[1]}(\lambda)$ задано формулою (2.73). Об'єднуючи (2.23), (2.96), (2.97) і (2.102), отримуємо

$$\Delta_{\widetilde{Y}}(\lambda) = \det\left(CY_0(\lambda) + DY_1(\lambda)W(1)\right) = \det(J\cdot V), \tag{2.103}$$

де

$$V := V(\lambda) := \begin{pmatrix} Y_0(\lambda) \\ V_1(\lambda) \end{pmatrix}, \quad V_1 := V_1(\lambda) := Y_1(\lambda)W(1), \quad \text{і} \quad J := \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix}. \tag{2.104}$$

За формулою Біне-Коші

$$\Delta_{\widetilde{Y}}(\lambda) = \sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_n\leqslant 2n} J\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{smallmatrix}\right)\cdot V\left(\begin{smallmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{smallmatrix}\right). \tag{2.105}$$

Тут $A\left(\begin{smallmatrix} j_1 & j_2 & \ldots & j_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{smallmatrix}\right)$ позначає мінор $n\times n'$ матриці $A=(a_{jk})$, утворений її рядками з номерами $j_1,\ldots,j_p\in\{1,\ldots,n\}$ і стовбцями з номерами $k_1,\ldots,k_p\in\{1,\ldots,n'\}$.

Зафіксуємо множину $\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}$ таку, що $1\leqslant k_1<\ldots<k_n\leqslant 2n$, і позначимо через m кількість елементів цієї множини, не більших за n, тобто

$$1\leqslant k_1<\ldots<k_m\leqslant n<k_{m+1}<\ldots<k_n. \tag{2.106}$$

Розкладаючи другий множник в (2.105) відносно перших m рядків за теоремою Лапласа, отримуємо

$$V\left(\begin{smallmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{smallmatrix}\right) = \sum_{\substack{1\leqslant j_1<\ldots j_m\leqslant n \\ 1\leqslant j_{m+1}<\ldots<j_n<n \\ \{j_1,\ldots,j_n\}=\{1,\ldots,n\}}} (-1)^{(1+\ldots+m)+(j_1+\ldots+j_m)}$$
$$\times Y_0\left(\begin{smallmatrix} k_1 & \ldots & k_m \\ j_1 & \ldots & j_m \end{smallmatrix}\right)\cdot V_1\left(\begin{smallmatrix} k_{m+1}-n & \ldots & k_n-n \\ j_{m+1} & \ldots & j_n \end{smallmatrix}\right). \tag{2.107}$$

Із (2.72) і (2.73) випливає, що

$$y_{jk}^{[0]}(\lambda) = O(1), \quad y_{jk}^{[1]}(\lambda) = O(1) \cdot e^{ib_k\lambda}, \qquad \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}, \quad j,k \in \{1,\dots,n\}. \tag{2.108}$$

Поклавши

$$(v_{jk}(\lambda))_{j,k=1}^{n} := V_1(\lambda) = Y_1(\lambda)W(1), \tag{2.109}$$

ми отримуємо з огляду на (2.108) і блочно-діагональну структуру матриць B і $W(1)$, що

$$v_{jk}(\lambda) = O(1) \cdot e^{ib_k\lambda}, \quad \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}, \quad j,k \in \{1,\dots,n\}. \tag{2.110}$$

Із (2.97), (2.102), (2.108), (2.110) випливає, що при $\lambda \in S_{p,\varepsilon,R}$ виконано співвідношення

$$Y_0\left(\begin{smallmatrix} k_1 & \dots & k_m \\ j_1 & \dots & j_m \end{smallmatrix}\right) \;=\; O(1), \tag{2.111}$$

$$V_1\left(\begin{smallmatrix} k_{m+1}-n & \dots & k_n-n \\ j_{m+1} & \dots & j_n \end{smallmatrix}\right) \;=\; O(1) \cdot e^{i(b_{j_{m+1}}+\dots+b_{j_n})\lambda}. \tag{2.112}$$

Нехай κ – це кількість від'ємних значень серед $\mathrm{Re}(ib_1\lambda)$, …, $\mathrm{Re}(ib_n\lambda)$, $\lambda \in S_{p,\varepsilon}$. Для визначеності будемо вважати, що

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}(ib_j\lambda) < 0, \qquad j \in \{1,\dots,\kappa\}, \\ &\mathrm{Re}(ib_j\lambda) > 0, \qquad j \in \{\kappa+1,\dots,n\}. \end{aligned} \tag{2.113}$$

Із (2.113) легко випливає, що при $\{j_{m+1},\dots,j_n\} \neq \{\kappa+1,\dots,n\}$ виконано нерівності

$$\mathrm{Re}(ib_{j_{m+1}}\lambda)+\ldots+\mathrm{Re}(ib_{j_n}\lambda) < \mathrm{Re}(ib_{\kappa+1}\lambda)+\ldots+\mathrm{Re}(ib_n\lambda) = \mathrm{Re}(i\tau_p\lambda), \quad \lambda \in S_{p,\varepsilon}, \tag{2.114}$$

де τ_p задано формулою (2.92). Об'єднуючи цю оцінку з (2.111) і (2.112), ми отримуємо, що при $\{j_{m+1},\dots,j_n\} \neq \{\kappa+1,\dots,n\}$ і кожному $h \in \mathbb{N}$ виконано співвідношення

$$Y_0\left(\begin{smallmatrix} k_1 & \dots & k_m \\ j_1 & \dots & j_m \end{smallmatrix}\right) \cdot V_1\left(\begin{smallmatrix} k_{m+1}-n & \dots & k_n-n \\ j_{m+1} & \dots & j_n \end{smallmatrix}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda^h}\right) \cdot e^{i\tau_p\lambda}, \quad \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}. \tag{2.115}$$

Підставляючи (2.115) в (2.107) ми отримуємо при $\lambda \in S_{p,\varepsilon,R}$ і кожному $h \in \mathbb{N}$, що

$$V\left(\begin{smallmatrix} k_1 & \dots & k_n \\ 1 & \dots & n \end{smallmatrix}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda^h}\right) \cdot e^{i\tau_p\lambda}, \quad m \neq \kappa; \tag{2.116}$$

$$V\left(\begin{smallmatrix} k_1 & \dots & k_n \\ 1 & \dots & n \end{smallmatrix}\right) = Y_0\left(\begin{smallmatrix} k_1 & \dots & k_\kappa \\ 1 & \dots & \kappa \end{smallmatrix}\right) \cdot V_1\left(\begin{smallmatrix} k_{\kappa+1}-n & \dots & k_n-n \\ \kappa+1 & \dots & n \end{smallmatrix}\right) + O\left(\frac{e^{i\tau_p\lambda}}{\lambda^h}\right), \quad m = \kappa. \tag{2.117}$$

З огляду на блочно-діагональну структуру матриці $W(1)$ маємо

$$V_1\left(\begin{smallmatrix} k_{\kappa+1} & \dots & k_n \\ \kappa+1 & \dots & n \end{smallmatrix}\right) = Y_1\left(\begin{smallmatrix} k_{\kappa+1} & \dots & k_n \\ \kappa+1 & \dots & n \end{smallmatrix}\right)\gamma(\lambda), \quad \gamma(\lambda) := \prod_{\substack{j=1 \\ \mathrm{Re}(i\beta_j\lambda)>0}}^{r} \det W_{jj}(1). \tag{2.118}$$

Застосовуючи теорему Ліувілля до системи (2.21), отримуємо з огляду на визначення сектора $S_{p,\varepsilon}$, що

$$\gamma(\lambda) = e^{i\gamma_p}, \quad \lambda \in S_{p,\varepsilon}, \tag{2.119}$$

де γ_p задано формулою (2.91). Тепер при $\lambda \in S_{p,\varepsilon,R}$ із (2.105), (2.116), (2.117) і (2.118) випливає, що

$$\Delta_{\widetilde{Y}}(\lambda) = e^{i\gamma_p} \sum_{\substack{1\leqslant k_1<\dots<k_\kappa\leqslant n \\ 1\leqslant k_{\kappa+1}<\dots<k_n\leqslant n}} J\left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & \kappa & \kappa+1 & \dots & n \\ k_1 & \dots & k_\kappa & n+k_{\kappa+1} & \dots & n+k_n \end{smallmatrix}\right)$$
$$\times\ Y_0\left(\begin{smallmatrix} k_1 & \dots & k_\kappa \\ 1 & \dots & \kappa \end{smallmatrix}\right) \cdot Y_1\left(\begin{smallmatrix} k_{\kappa+1} & \dots & k_n \\ \kappa+1 & \dots & n \end{smallmatrix}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^h}\right) \cdot e^{i\tau_p\lambda}, \quad h \in \mathbb{N}. \tag{2.120}$$

Нехай $(k_1, \dots, k_\kappa) \in \mathbb{N}^\kappa$ задовольняє нерівностям $1 \leqslant k_1 < \dots < k_\kappa \leqslant n$, і нехай $(l_1, \dots, l_\kappa)$ – деяка перестановка цього набору. Легко бачити, що

$$J\left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & \kappa & \kappa+1 & \dots & n \\ k_1 & \dots & k_\kappa & n+k_{\kappa+1} & \dots & n+k_n \end{smallmatrix}\right) \cdot Y_0\left(\begin{smallmatrix} k_1 & \dots & k_\kappa \\ 1 & \dots & \kappa \end{smallmatrix}\right)$$
$$= J\left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & \kappa & \kappa+1 & \dots & n \\ l_1 & \dots & l_\kappa & n+k_{\kappa+1} & \dots & n+k_n \end{smallmatrix}\right) \cdot Y_0\left(\begin{smallmatrix} l_1 & \dots & l_\kappa \\ 1 & \dots & \kappa \end{smallmatrix}\right). \tag{2.121}$$

Ця рівність означає, що для кожного доданку у правій частині (2.120) ми можемо вибрати будь-яку перестановку відповідної послідовності $(k_1, \dots, k_\kappa)$. Зрозуміло, що те саме є справедливим для відповідної послідовності $(k_{\kappa+1}, \dots, k_n)$.

Із (2.72) випливає, що

$$Y_0 = Y(0,\lambda) = \begin{pmatrix} I_\kappa + o(1) & O(\lambda^{-1}) \\ O(\lambda^{-1}) & I_{n-\kappa} + o(1) \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty,\ \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}. \quad (2.122)$$

Отже, якщо перетин множин $\{k_1, \ldots, k_\kappa\}$ і $\{\kappa+1, \ldots, n\}$ складається із s елементів, то відповідний мінор $Y_0\left(\begin{smallmatrix} k_1 & \ldots & k_\kappa \\ 1 & \ldots & \kappa \end{smallmatrix}\right)$ містить рівно s рядків з елементами вигляду $O(\lambda^{-1})$, а інші рядки мають вигляд $O(1)$. Дійсно, якщо $k_j > \kappa$, то j-ий рядок цього мінора співпадає з $(k_j - \kappa)$-им рядком лівого нижнього блока блочной матриці (2.122). Таким чином, ми маємо

$$Y_0\left(\begin{smallmatrix} k_1 & \ldots & k_\kappa \\ 1 & \ldots & \kappa \end{smallmatrix}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda^s}\right), \quad \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}. \quad (2.123)$$

У випадках $s = 0$ і $s = 1$ ми можемо отримати більш точні оцінки. Відразу зауважимо, що із (2.122) прямо випливає співвідношення

$$Y_0\left(\begin{smallmatrix} 1 & \ldots & \kappa \\ 1 & \ldots & \kappa \end{smallmatrix}\right) = 1 + o(1) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty,\ \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}. \quad (2.124)$$

Далі, нехай $s = 1$, тобто множина $\{k_1, \ldots, k_\kappa\}$ отримується із $\{1, \ldots, \kappa\}$ заміною одного його елемента числом із $\{\kappa+1, \ldots, n\}$. А саме, припустимо, що j замінили на k, де $1 \leqslant j \leqslant \kappa < k \leqslant n$. Тоді з огляду на нерівності (2.113), $\operatorname{Re}(ib_k\lambda) > 0 > \operatorname{Re}(ib_j\lambda)$ і рівності (2.72) маємо

$$Y_0\left(\begin{smallmatrix} 1 & \ldots & j-1 & k & j+1 & \ldots & \kappa \\ 1 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & \kappa \end{smallmatrix}\right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1+o(1) & \cdots & o(1) & o(1) & o(1) & \cdots & o(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o(1) & \cdots & 1+o(1) & o(1) & o(1) & \cdots & o(1) \\ O(\lambda^{-1}) & \cdots & O(\lambda^{-1}) & \frac{r_{kj}(0)+o(1)}{\lambda} & O(\lambda^{-1}) & \cdots & O(\lambda^{-1}) \\ o(1) & \cdots & o(1) & o(1) & 1+o(1) & \cdots & o(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o(1) & \cdots & o(1) & o(1) & o(1) & \cdots & 1+o(1) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{r_{kj}(0) + o(1)}{\lambda} \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty,\ \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}, \quad (2.125)$$

де для стислості ми поклали $r_{jk}(x) := \frac{b_j q_{jk}(x)}{b_j - b_k}$.

Далі, згідно з (2.73) маємо

$$Y_1 = Y(1,\lambda) = \begin{pmatrix} I_\kappa + o(1) & O(\lambda^{-1}) \\ O(\lambda^{-1}) & I_{n-\kappa} + o(1) \end{pmatrix} \cdot E(\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty,\ \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}, \tag{2.126}$$

де

$$E(\lambda) := \operatorname{diag}(e^{ib_1\lambda}, \dots, e^{ib_n\lambda}). \tag{2.127}$$

Нехай множина $\{k_{\kappa+1}, \dots, k_n\}$ містить рівно s елементів із множини $\{1, \dots, \kappa\}$. Повторюючи попередні міркування для Y_1 замість Y_0, отримуємо

$$Y_1\left(\begin{smallmatrix} k_{\kappa+1} & \dots & k_n \\ \kappa+1 & \dots & n \end{smallmatrix}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda^s}\right) e^{i\tau_p\lambda}, \quad \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}. \tag{2.128}$$

Далі, легко бачити, що

$$Y_1\left(\begin{smallmatrix} \kappa+1 & \dots & n \\ \kappa+1 & \dots & n \end{smallmatrix}\right) = (1 + o(1)) \cdot e^{i\tau_p\lambda}, \tag{2.129}$$

$$Y_1\left(\begin{smallmatrix} \kappa+1 & \dots & k-1 & j & k+1 & \dots & n \\ \kappa+1 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n \end{smallmatrix}\right) = (r_{jk}(1) + o(1)) \cdot \frac{e^{i\tau_p\lambda}}{\lambda}, \tag{2.130}$$

при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_{p,\varepsilon,R}$, де $j \in \{1, \dots, \kappa\}$ і $k \in \{\kappa + 1, \dots, n\}$.

Підставляючи формули (2.123) і (2.128) в (2.120) і використовуючи (2.121), отримуємо

$$e^{-i\gamma_p} \Delta_{\widetilde{Y}}(\lambda) = \Bigg(J\left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & \kappa & \kappa+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & \kappa & n+\kappa+1 & \dots & n+n \end{smallmatrix}\right) \cdot Y_0\left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & \kappa \\ 1 & \dots & \kappa \end{smallmatrix}\right) \cdot Y_1\left(\begin{smallmatrix} \kappa+1 & \dots & n \\ \kappa+1 & \dots & n \end{smallmatrix}\right)$$

$$+ \sum_{j=1}^{\kappa} \sum_{k=\kappa+1}^{n} J\left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & \kappa & \kappa+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & j-1 & k & j+1 & \dots & \kappa & n+\kappa+1 & \dots & n+n \end{smallmatrix}\right) \tag{2.131}$$

$$\times Y_0\left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & j-1 & k & j+1 & \dots & \kappa \\ 1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & \kappa \end{smallmatrix}\right) \times Y_1\left(\begin{smallmatrix} \kappa+1 & \dots & n \\ \kappa+1 & \dots & n \end{smallmatrix}\right)$$

$$+ \sum_{j=1}^{\kappa} \sum_{k=\kappa+1}^{n} J\left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & \kappa & \kappa+1 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & \kappa & n+\kappa+1 & \dots & n+k-1 & n+j & n+k+1 & \dots & n+n \end{smallmatrix}\right)$$

$$\times Y_0\left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & \kappa \\ 1 & \dots & \kappa \end{smallmatrix}\right) \times Y_1\left(\begin{smallmatrix} \kappa+1 & \dots & k-1 & j & k+1 & \dots & n \\ \kappa+1 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n \end{smallmatrix}\right) \Bigg) \tag{2.132}$$

$$+ O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) e^{i\tau_p\lambda}, \qquad \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}. \tag{2.133}$$

Нехай z_p – це будь-яка фіксована точка $S_{p,\varepsilon}$. Тоді із нерівностей (2.113) і визначення матриць $T_{iz_pB}(C,D)$, $T_{iz_pB}^{c_j\to c_k}$ і $T_{iz_pB}^{d_k\to d_j}$ легко бачити, що

$$J\left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & \kappa & \kappa+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & \kappa & n+\kappa+1 & \dots & n+n \end{smallmatrix}\right) = \det T_{iz_pB}(C,D), \tag{2.134}$$

$$J\left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & \kappa & \kappa+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & j-1 & k & j+1 & \dots & \kappa & n+\kappa+1 & \dots & n+n \end{smallmatrix}\right) = \det T_{iz_pB}^{c_j\to c_k}, \tag{2.135}$$

$$J\left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & \kappa & \kappa+1 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & \kappa & n+\kappa+1 & \dots & n+k-1 & n+j & n+k+1 & \dots & n+n \end{smallmatrix}\right) = \det T_{iz_pB}^{d_k\to d_j}. \tag{2.136}$$

Тепер підставляючи (2.124), (2.125), (2.129), (2.130) і (2.134), (2.135), (2.136) в (2.131), ми отримуємо

$$\begin{aligned} e^{-i\gamma_p}\Delta_{\widetilde{Y}}(\lambda) = &\det T_{iz_pB}(C,D)\cdot(1+o(1))\cdot(1+o(1))\cdot e^{i\tau_p\lambda} \\ &+\sum_{j=1}^{\kappa}\sum_{k=\kappa+1}^{n}\det T_{iz_pB}^{c_j\to c_k}\cdot\frac{r_{kj}(0)+o(1)}{\lambda}\cdot(1+o(1))\cdot e^{i\tau_p\lambda} \\ &+\sum_{j=1}^{\kappa}\sum_{k=\kappa+1}^{n}\det T_{iz_pB}^{d_k\to d_j}\cdot(1+o(1))\cdot\frac{r_{jk}(1)+o(1)}{\lambda}\cdot e^{i\tau_p\lambda} \\ &+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{i\tau_p\lambda} \\ =&e^{i\tau_p\lambda}\cdot\Bigg(\omega_0(z_p)\cdot(1+o(1))+o(\lambda^{-1}) \\ &+\sum_{j=1}^{\kappa}\sum_{k=\kappa+1}^{n}\frac{\det T_{iz_pB}^{c_j\to c_k}b_kq_{kj}(0)-\det T_{iz_pB}^{d_k\to d_j}b_jq_{jk}(1)}{\lambda(b_k-b_j)}\Bigg), \end{aligned}$$

при $\lambda\to\infty$, $\lambda\in S_{p,\varepsilon,R}$. Перетворюючи подвійну суму в останній рівності з огляду на (2.113), ми приходимо до формули (2.90) з бажаним виглядом $\omega_1(z_p)$. $\square$

2.3 Явні достатні і необхідні умови повноти

Тепер ми готові сформулювати наш головний результат про повноту СВПФ задачі (2.1)–(2.3) в термінах матриць B, C, D і $Q(\cdot)$.

Теорема 2.10. *Нехай $Q\in L^1([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$ і функції $q_{jk}(\cdot)$ є неперервними у точках 0 і 1 при $b_j\neq b_k$. Нехай $\omega_0(z_k)$ і $\omega_1(z_k)$ задані формулами* (2.93) *і* (2.94) *відповідно. Нарешті, нехай існують три допустимих числа* z_1, z_2, z_3, *що задовольняють таким умовам:*

(а) нуль є внутрішньою точкою трикутника з вершинами z_1, z_2, z_3*;*

(б) $|\omega_0(z_k)| + |\omega_1(z_k)| \neq 0, \quad k \in \{1, 2, 3\}$.

Тоді СВПФ задачі (2.1)–(2.3) *повна і мінімальна в* $L^2([0,1]; \mathbb{C}^n)$.

Зауваження 2.11. *Нагадаємо, що прямі* $l_j = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ib_j\lambda) = 0\}$ *розділяють комплексну площину на* m *секторів* $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$*. Зрозуміло, що для кожного* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *функції* $\omega_0(\cdot)$ *і* $\omega_1(\cdot)$ *є сталими у секторі* σ_j*. Отже, вони кусково-сталі в площині* $\mathbb{C}$ *з розрізами вздовж прямих* $\partial\sigma_j$, $j \in \{1, \ldots, m\}$*. Легко бачити, що умови теореми 2.10 не виконуються тоді і тільки тоді, коли функції* $\omega_0(\cdot)$ *і* $\omega_1(\cdot)$ *дорівнюють нуля у відкритій півплощині* $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(c\lambda) > 0\}$ *для деякого* $c \neq 0$.

Доведення теореми 2.10. Зафіксуємо $k \in \{1, 2, 3\}$. Зауважимо, що точка z_k може бути не придатною, але з огляду на зауваження 2.11 функції $\omega_0(\cdot)$ і $\omega_1(\cdot)$ є сталими в кожному секторі σ_j. Отже, якщо точка z_k не придатна, тобто лежить на одній з прямих $l_{jk} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ib_j\lambda) = \mathrm{Re}(ib_k\lambda)\}$, ми можемо замінити її на близьку по аргументу придатну точку так, щоб збереглася умова (а) теореми. Таким чином, ми можемо вважати, що точки z_1, z_2, z_3 придатні. Тоді, об'єднуючи умову (б) теореми з пропозицією 2.8, ми отримуємо при $k \in \{1, 2, 3\}$, що

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant C \left| \omega_0(z_k) + \frac{\omega_1(z_k)}{\lambda} \right| e^{\mathrm{Re}(i\tau_k\lambda)} \geqslant C_1 \frac{e^{\mathrm{Re}(i\tau_k\lambda)}}{|\lambda|}, \quad |\lambda| > R, \ \arg\lambda = \arg z_k, \tag{2.137}$$

де $C, C_1 > 0$, $\tau_k := \sum_{\mathrm{Re}(ib_j z_k) > 0} b_j$ і R достатньо велике. Щоб завершити доведення залишилось застосувати теорему 2.3 з $s = 1$. □

Наступний результат легко отримується із теореми 2.10 (див. [91, наслідок 3.2]).

Наслідок 2.12. *Нехай Q задовольняє умовам теореми 2.10, і нехай $|\omega_0(\pm z)| + |\omega_1(\pm z)| \neq 0$ для деякої допустимої точки z. Тоді СВПФ задачі* (2.1)–(2.3) *повна і мінімальна в* $L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$.

Зауваження 2.13. *У зв'язку з теоремою 2.10 обговоримо фундаментальну роботу [53] А. А. Шкалікова, де він вивчав граничні задачі для ЗДР* (1.1) *зі спектральним параметром в граничних умовах. Зокрема, поняття слабко B-регулярних граничних умов може розглядатися як аналог поняття нормальної граничної задачі порядку 0 із [53], а умови теореми 2.10 пов'язані з поняттям нормальної граничної задачі порядку 1 з [53]. До того ж, в [53] доведено, що СВПФ лінеаризації нормальної граничної задачі для ЗДР* (1.1) *повна в деякій прямій сумі просторів Соболева. Для деяких матриць $B = \operatorname{diag}(b_1,\dots,b_n)$ з простим спектром цей результат корелює з твердженнями теореми 1.2 з [91] і теореми 2.10.*

Тепер ми застосуємо теорему 2.10 до випадку 2×2. Покладемо

$$\begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \quad J_{jk} := \det \begin{pmatrix} a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2j} & a_{2k} \end{pmatrix}, \quad j,k \in \{1,\dots,4\}. \tag{2.138}$$

Пропозиція 2.14. *Нехай $n = 2$, $\arg b_1 \neq \arg b_2$, і нехай функції q_{12}, q_{21} є неперервними у точках 0 і 1. Нехай також виконано такі умови:*

$$|J_{32}| + |b_1 J_{13} q_{12}(0) + b_2 J_{42} q_{21}(1)| \neq 0, \tag{2.139}$$

$$|J_{14}| + |b_1 J_{13} q_{12}(1) + b_2 J_{42} q_{21}(0)| \neq 0. \tag{2.140}$$

Тоді СВПФ граничної задачі (2.1)–(2.3) *повна і мінімальна в* $L^2\left([0,1];\mathbb{C}^2\right)$.

Доведення. Оскільки $\arg b_1 \neq \arg b_2$, то існує $z \in \mathbb{C}$ таке, що $\operatorname{Re}(ib_1 z) < 0 <$

$\mathrm{Re}(ib_2 z)$. Тоді згідно з означенням чисел J_{jk} і функцій $\omega_0(\cdot), \omega_1(\cdot)$ маємо

$$\omega_0(z) = J_{14}, \quad \omega_1(z) = \frac{J_{24}b_1 q_{21}(0) - J_{13}b_1 q_{12}(1)}{b_1 - b_2}, \tag{2.141}$$

$$\omega_0(-z) = J_{32}, \quad \omega_1(-z) = \frac{J_{31}b_2 q_{12}(0) - J_{42}b_2 q_{21}(1)}{b_2 - b_1}. \tag{2.142}$$

З умов (2.139), (2.140) випливає, що $|\omega_0(\pm z)| + |\omega_1(\pm z)| \neq 0$. Залишилось застосувати наслідок 2.12. $\square$

Зауваження 2.15. *У випадку* 2×2 *системи типу Дірака* ($b_1 < 0 < b_2$) *цей результат посилює теорему 5.1 з [91], де повнота була доведена при більш обмежувальній умові* $q_{12}, q_{21} \in C^1[0,1]$, *тоді як сформульована вона була при умові* $q_{12}, q_{21} \in C[0,1]$. *Це зумовлене тим, що точне формулювання леми 5.4 із [91] потребує більш сильного припущення* $Q \in C^1([0,1]; \mathbb{C}^{n\times n})$ *замість* $Q \in C([0,1]; \mathbb{C}^{n\times n})$ *(див. теорему 1.1 із [33]).*

У випадку $b_2 b_1^{-1} \notin \mathbb{R}$ *пропозиція 2.14 посилює теореми 1.4 і 1.6 із [55], де повнота була доведена для аналітичних* $Q(\cdot)$.

Наступний результат показує, що теорема 2.10 не може розглядатися як результат про збурення, оскільки незбурений оператор $L_{C,D}(0)$ може мати не повну СВПФ.

Наслідок 2.16. *Нехай* $\kappa \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\mathrm{Re}\, b_j < 0$ *при* $j \in \{1, \ldots, \kappa\}$, $\mathrm{Re}\, b_j > 0$ *при* $j \in \{\kappa+1, \ldots, n\}$, *і перша гранична умова в* (2.3) *має вигляд* $y_1(0) = 0$. *Тоді справедливі наступні твердження:*

(i) Нехай потенціал Q *є неперервним у точках 0 і 1,*

$$\det T_B(C,D) \neq 0 \qquad i \qquad \sum_{j=\kappa+1}^{n} \frac{\det T_{-B}^{c_j \to c_1}}{b_1 - b_j} \cdot q_{1j}(0) \neq 0. \tag{2.143}$$

Тоді СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$ *повна і мінімальна в* $L^2([0,1]; \mathbb{C}^n)$.

(ii) Якщо $q_{1j}(x) = 0$ *при* $x \in [0, \varepsilon]$, $j \in \{2, \ldots, n\}$, *для деякого* $\varepsilon > 0$, *то СВПФ оператора* $L_{C,D}(Q)$ *неповна в* $L^2([0,1]; \mathbb{C}^n)$ *і має нескінченний дефект. Зокрема, це справедливо для оператора* $L_{C,D}(0)$ *з нульовим потенціалом.*

Доведення. **(i)** Умова $y_1(0) = 0$ означає, що $c_{11} = 1$, $c_{1k} = 0$ при $k \in \{2, \dots, n\}$, і $d_{1k} = 0$ при $k \in \{1, \dots, n\}$. Отже, матриця $T_{-B}(C, D)$ має нульовий перший рядок. Тому $\omega_0(i) = 0$. До того ж, з огляду на вигляд першого рядка матриці $\begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix}$ маємо $\det T_{-B}^{d_k \to d_j} = 0$, $j, k \in \{1, \dots, n\}$, і $\det T_{-B}^{c_j \to c_k} = 0$, при $k > 1$. Тепер з умови на $\operatorname{Re} b_j$, визначення $\omega_1(\cdot)$ і умови (2.143) випливає, що

$$\omega_1(i) = \sum_{j=\kappa+1}^{n} \frac{\det T_{-B}^{c_j \to c_1} \cdot b_1 q_{1j}(0)}{b_1 - b_j} \neq 0. \tag{2.144}$$

З першої умови в (2.143) випливає, що $\omega_0(-i) = \det T_B(C, D) \neq 0$. Тепер повнота і мінімальність СВПФ випливає із наслідку 2.12.

(ii) Згідно з умовами на $Q(\cdot)$ кожний розв'язок $y = \operatorname{col}(y_1, \dots, y_n)$ задачі (2.1)–(2.3) задовольняє умові

$$y_1' = ib_1 \lambda y_1 + ib_1 q_{11}(x) y_1, \quad x \in [0, \varepsilon], \quad \text{і} \quad y_1(0) = 0. \tag{2.145}$$

За теоремою єдиності Коші $y_1(x) = 0$ при $x \in [0, \varepsilon]$. Отже, будь-яка векторфункція $f = \operatorname{col}(f_1, 0, \dots, 0) \in L^2([0, 1]; \mathbb{C}^n)$ з f_1 рівним нуля на $[\varepsilon, 1]$, ортогональна СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$. □

Зауваження 2.17. *Нехай* $n = 3$, $\kappa = 1$ *і* $y_1(0) = 0$. *Тоді умова* (2.143) *набуде вигляду*

$$\begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad i \quad \begin{vmatrix} d_{21} & c_{23} \\ d_{31} & c_{33} \end{vmatrix} \cdot \frac{q_{12}(0)}{b_2 - b_1} + \begin{vmatrix} d_{21} & c_{22} \\ d_{31} & c_{32} \end{vmatrix} \cdot \frac{q_{13}(0)}{b_1 - b_3} \neq 0. \tag{2.146}$$

Отже, якщо $|q_{12}(0)| + |q_{13}(0)| \neq 0$, *то у загальній ситуації СВПФ оператора* $L_{C,D}(Q)$ *з першою граничною умовою* $y_1(0) = 0$ *повна в* $L^2([0, 1]; \mathbb{C}^3)$.

Нарешті, ми уточнимо наслідок 2.12 для 4×4 системи типу Дірака зі спеціальними граничними умовами. Це твердження буде застосовано у розділі 3.2 для вивчення моделі балки Тимошенка.

Наслідок 2.18. *Нехай* $n = 4$, $B = \mathrm{diag}(-b_1, b_1, -b_2, b_2)$, *де* $b_1, b_2 > 0$, $Q \in L^1([0,1]; \mathbb{C}^{4\times 4})$, *де* Q *неперервна в точках 0 і 1, і матриці* C *і* D *мають вигляд*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}. \tag{2.147}$$

Припустимо, що

$$|d_2 d_4| + |d_1 d_4 q_{12}(1)| + |d_2 d_3 q_{34}(1)| \neq 0, \quad |d_1 d_3| + |d_2 d_3 q_{21}(1)| + |d_1 d_4 q_{43}(1)| \neq 0. \tag{2.148}$$

Тоді СВПФ задачі (2.1)–(2.3) *повна і мінімальна в* $L^2([0,1]; \mathbb{C}^4)$.

Доведення. За означенням матриці $T_B(C, D)$ маємо

$$T_B(C,D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}. \tag{2.149}$$

Отже,

$$\omega_0(-i) = \det T_B(C,D) = d_2 d_4. \tag{2.150}$$

Далі, в нашому випадку подвійна сума в (2.94) для $\omega_1(-i)$ включає лише значення $j = 1, 3$ і $k = 2, 4$. Із визначення матриць $T_{izB}^{c_j \to c_k}$ і $T_{izB}^{d_k \to d_j}$ випливає, що

$$\begin{aligned} \det T_B^{c_1 \to c_2} &= d_2 d_4, & \det T_B^{d_2 \to d_1} &= d_1 d_4, \\ \det T_B^{c_1 \to c_4} &= 0, & \det T_B^{d_4 \to d_1} &= 0, \\ \det T_B^{c_3 \to c_2} &= 0, & \det T_B^{d_2 \to d_3} &= 0, \\ \det T_B^{c_3 \to c_4} &= d_2 d_4, & \det T_B^{d_4 \to d_3} &= d_2 d_3. \end{aligned}$$

Підставляючи ці вирази в (2.94), отримуємо

$$\omega_1(-i) = \frac{1}{2}\big(d_2d_4q_{21}(0) + d_1d_4q_{12}(1) + d_2d_4q_{43}(0) + d_2d_3q_{34}(1)\big). \qquad (2.151)$$

Зрозуміло, що якщо $d_2 = 0$, то $\omega_1(-i) = \frac{1}{2}d_1d_4q_{12}(1)$. З іншого боку, якщо $d_4 = 0$, то $\omega_1(-i) = \frac{1}{2}d_2d_3q_{34}(1)$. Це дозволяє записати умову $|\omega_0(-i)|+|\omega_1(-i)| \neq 0$ у вигляді першого співвідношення в (2.148).

Аналогічно доводиться, що умова $|\omega_0(i)| + |\omega_1(i)| \neq 0$ еквівалентна другому співвідношенню в (2.148). Доведення завершується застосуванням наслідку 2.12. □

Наступна проста лема буде корисною у розділі 3.2.

Лема 2.19. *Умова* (2.148) *виконується тоді і тільки тоді, коли виконано наступні умови*

$$|d_1| + |d_2| \neq 0, \qquad |d_3| + |d_4| \neq 0, \qquad (2.152)$$

$$|d_1| + |d_3| \neq 0, \qquad |d_2| + |d_4| \neq 0, \qquad (2.153)$$

$$|d_1| + |q_{21}(1)| \neq 0, \qquad |d_2| + |q_{12}(1)| \neq 0, \qquad (2.154)$$

$$|d_3| + |q_{43}(1)| \neq 0, \qquad |d_4| + |q_{34}(1)| \neq 0. \qquad (2.155)$$

Доведення. Якщо $d_1d_2d_3d_4 \neq 0$, то твердження є очевидним. Далі, припустимо, що $d_j = 0$ для деякого $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Нехай для визначеності $d_1 = 0$. Тоді умови (2.152)–(2.155) еквівалентні таким умовам:

$$d_2d_3q_{21}(1) \neq 0 \quad \text{і} \quad |d_4| + |q_{34}(1)| \neq 0. \qquad (2.156)$$

Це, в свою чергу, еквівалентно умові (2.148) при $d_1 = 0$, що і завершує доведення. □

Продемонструємо пропозицію 2.14 на прикладі системи вектор-функцій

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{anx} \sin nx \\ ne^{anx}(\sin nx + i \cos nx) \end{pmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}, \quad a \in \mathbb{C}, \qquad (2.157)$$

що розглядається у просторі $L^2([0, \pi]; \mathbb{C}^2)$.

Наслідок 2.20. *Нехай*

$$ia \notin (-\infty, -1] \cap [1, \infty). \tag{2.158}$$

Тоді система (2.157) *повна і мінімальна в* $L^2([0, \pi]; \mathbb{C}^2)$.

Доведення. Оскільки $a \neq \pm i$, то існує $\theta \in \mathbb{C} \setminus \{\pi n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ таке, що $a = \operatorname{ctg}\theta$. Розглянемо наступну граничну задачу на $[0, 1]$

$$\begin{cases} y_1' = & e^{i\theta}\lambda y_1 + y_2, \\ y_2' = & e^{-i\theta}\lambda y_2, \end{cases} \tag{2.159}$$

$$y_1(0) = y_1(1) = 0. \tag{2.160}$$

Прямі обчислення показують, що її спектр простий, складається із власних чисел $\left\{\frac{\pi n}{\sin\theta}\right\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$, а система відповідних власних векторів має вигляд

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{a\pi n x}\sin \pi n x \\ \pi n \cdot e^{(a-i)\pi n x} \end{pmatrix} \right\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}. \tag{2.161}$$

Легко бачити, що потенціальна матриця оператора $L_{C,D}(Q)$, асоційованого з граничною задачею (2.159)–(2.160) є сталою: $Q(\cdot) = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\theta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Зрозуміло, що

$$B = \operatorname{diag}(b_1, b_2) := -i\operatorname{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}). \tag{2.162}$$

До того ж, з огляду на (2.158) маємо $\arg b_1 \neq \arg b_2$.

Із вигляду граничних умов (2.160) легко випливає, що $J_{13} = 1$, тоді як інші визначники J_{jk} є нульовими. Зокрема, граничні умови (2.160) не є слабко регулярними, і навіть є виродженими: $\Delta_0(\cdot) \equiv 0$. Однак, умови (2.139)–(2.140) набудуть вигляду $q_{12}(0)q_{12}(1) \neq 0$, і, очевидно, виконані. Отже, за пропозицією 2.14 система власних векторів (2.161) повна і мінімальна в $L^2([0, 1]; \mathbb{C}^2)$. Це еквівалентно повноті і мінімальності в $L^2([0, \pi]; \mathbb{C}^2)$ системи (2.157). $\square$

Зауваження 2.21. *У зв'язку із наслідком 2.20 розглянемо ще одну систему функцій* $\mathcal{K}_a = \{e^{anx}\sin nx\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$*, яка є системою власних функцій задачі*

$$y'' - 2\lambda y' + (a^2+1)\lambda^2 y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0. \tag{2.163}$$

Відомо (див. [83, частина II, додаток A1], [32] і посилання там), що ця система дворазово повна в $L^2[0,\pi]$ *у сенсі М.В. Келдиша [17]. Це означає повноту системи*

$$\left\{\begin{pmatrix} e^{anx}\sin nx \\ ne^{anx}\sin nx\end{pmatrix}\right\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \tag{2.164}$$

в $L^2([0,\pi];\mathbb{C}^2)$*. Таким чином, твердження наслідку 2.20 може розглядатися як аналог дворазової повноти і мінімальності системи* $\mathcal{K}_a$*. Відзначимо, що дослідження повноти і мінімальності в* $L^2[0,\pi]$ *"половинної" системи* $\mathcal{K}_a^+ := \{e^{anx}\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ *складає зміст задачі А. Г. Костюченка.*

Зазначимо також, що у випадку $a\in\mathbb{R}$ *задача* (2.163) *природним чином виникає при дослідженні наступної еліптичної граничної задачі в полосі* $\Omega = [0,\pi]\times\mathbb{R}_+$*:*

$$\begin{cases} Lu := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + (a^2+1)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_0 \in L^2[0,\pi]. \end{cases} \tag{2.165}$$

Оскільки рівняння $Lu = 0$ *є еліптичним, то задача Коші в полосі некоректна. Застосування метода Фурьє, тобто пошук розв'язків задачі* (2.165) *у вигляді* $u(x,t) = e^{\lambda t}y(x)$*, призводить до задачі* (2.163).

Далі ми приводимо деякі необхідні умови повноти.

Пропозиція 2.22. *Нехай граничні умови* (2.3) *мають вигляд* $y(0) = Ay(1)$*, де* A *– невироджена* $n\times n$ *матриця,* $AB + BA = 0$ *і*

$$Q(1-x) = A^{-1}Q(x)A, \quad x\in[0,\varepsilon], \quad \text{для деякого} \quad \varepsilon > 0. \tag{2.166}$$

Тоді СВПФ оператора $L := L_{C,D}(Q)$ неповна в $L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$ і має нескінченний дефект.

Доведення. Нехай λ – власне число оператора L, а $\{u_p(\cdot)\}_{p=1}^m$ – відповідний ланцюжок власних і приєднаних функцій. Покладемо $u_0(x) := 0$. Зрозуміло, що функції $u_p(\cdot)$, $p \in \{0, 1, \ldots, m\}$, задовольняють граничним умовам (2.3), і виконано наступні тотожності

$$Lu_p(x) = \lambda u_p(x) + u_{p-1}(x), \quad x \in [0,1], \quad p \in \{1, \ldots, m\}. \tag{2.167}$$

Покладемо $v_p(x) := Au_p(1-x)$. Доведемо за індукцією, що $u_p(x) = v_p(x)$, $x \in [0, \varepsilon]$. При $p = 0$ це очевидно. Нехай $p > 0$. Із (2.167) і (2.1) випливає, що

$$\begin{aligned}(u_p')(1-x) &= iB(\lambda - Q(1-x))u_p(1-x) + iBu_{p-1}(1-x)\\ &= iB\left[(\lambda - Q(1-x))A^{-1}v_p(x) + A^{-1}v_{p-1}(x)\right]. \end{aligned} \tag{2.168}$$

Далі, об'єднуючи співвідношення (2.166), (2.168) з визначенням v_p, отримуємо з огляду на припущення індукції

$$\begin{aligned}Lv_p(x) &= -iB^{-1}v_p'(x) + Q(x)v_p(x)\\ &= iB^{-1}A \cdot (u_p')(1-x) + Q(x)v_p(x)\\ &= -iAB^{-1}iB\left[(\lambda - Q(1-x))\,A^{-1}v_p(x) + A^{-1}v_{p-1}(x)\right] + Q(x)v_p(x)\\ &= \lambda v_p(x) + v_{p-1}(x) + (Q(x) - AQ(1-x)A^{-1})v_p(x)\\ &= \lambda v_p(x) + u_{p-1}(x), \quad x \in [0, \varepsilon]. \end{aligned} \tag{2.169}$$

Оскільки граничні умови (2.3) мають вигляд $y(0) = Ay(1)$, то $v_p(0) = Au_p(1) = u_p(0)$. Таким чином, обидві функції u_p і v_p задовольняють неоднорідному лінійному рівнянню (2.167) при $x \in [0, \varepsilon]$ і мають однакові початкові дані у точці нуль. Отже, за теоремою єдиності Коші

$$u_p(x) = v_p(x) = Au_p(1-x), \quad x \in [0, \varepsilon]. \tag{2.170}$$

Далі, нехай функція $f \in L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$ така, що

$$f(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon] \quad \text{і} \quad f(1-x) = -A^* f(x) \quad \text{при} \quad x \in [0,\varepsilon]. \tag{2.171}$$

Тоді при $p \geqslant 0$ маємо

$$\begin{aligned}\int_0^1 \langle u_p(x), f(x)\rangle dx &= \int_0^\varepsilon \langle u_p(x), f(x)\rangle dx + \int_0^\varepsilon \langle u_p(1-x), f(1-x)\rangle dx \\ &= \int_0^\varepsilon \big(\langle u_p(x), f(x)\rangle + \langle A^{-1}u_p(x), -A^* f(x)\rangle\big)\, dx = 0.\end{aligned} \tag{2.172}$$

Ця рівність показує, що кожна вектор-функція f, що задовольняє (2.171), ортогональна СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$, що і завершує доведення. $\square$

Зауважимо, що існування невиродженого розв'язку матричного рівняння $AB + BA = 0$ еквівалентно подібності матриць B і $-B$: $ABA^{-1} = -B$. Це, в свою чергу, рівносильно тому, що спектри $\sigma(B)$ і $\sigma(-B)$ співпадають з урахуванням кратності. З огляду на те, що матриця B діагональна, це спостереження дозволяє переформулювати пропозицію 2.22 наступним чином.

Наслідок 2.23. *Нехай $n = 2p$ і $B = \operatorname{diag}(\widetilde{B}, -\widetilde{B})$, де*

$$\widetilde{B} = \operatorname{diag}(I_{n_1} b_1, \ldots, I_{n_r} b_r), \quad n_1 + \ldots + n_r = p. \tag{2.173}$$

Далі, нехай

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_j = \operatorname{diag}(A_{j1}, \ldots, A_{jr}), \quad A_{jk} \in \mathrm{GL}(n_k, \mathbb{C}), \quad j \in \{1,2\}, \tag{2.174}$$

граничні умови (2.3) *мають вигляд $y(0) = Ay(1)$, і нехай*

$$Q(1-x) = A^{-1} Q(x) A, \quad x \in [0,\varepsilon], \quad \textit{для деякого} \quad \varepsilon > 0. \tag{2.175}$$

Тоді СВПФ оператора $L := L_{C,D}(Q)$ неповна в $L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$ і має нескінченний дефект.

Доведення. З огляду на блочну структуру матриць $\widetilde{B}$, A_1 і A_2, маємо $AB + BA = 0$. Оскільки A_{jk} невироджена матриця, то $\det A \neq 0$. Отже, залишилось застосувати пропозицію 2.22. □

Зауваження 2.24. *Зауважимо, що у випадку* 2×2 *системи Дірака* ($B = \operatorname{diag}(-1, 1)$, $q_{11} \equiv q_{22} \equiv 0$) *пропозиція 2.22 співпадає з пропозицією 5.12 з [91]. Дійсно, розглянемо* 2×2 *систему Дірака з граничними умовами* $y_1(0) = \alpha_1 y_2(1)$, $y_2(0) = \alpha_2 y_1(1)$. *Якщо покласти* $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$, *то ці умови набудуть вигляду* $y(0) = Ay(1)$. *До того ж, умова* (2.175) *набуде вигляду*

$$\alpha_1 q_{21}(1 - x) = \alpha_2 q_{12}(x), \quad x \in [0, \varepsilon] \cap [1 - \varepsilon, 1], \quad \text{для деякого} \quad \varepsilon > 0, \tag{2.176}$$

тобто вона співпадає з відповідною умовою з [91]. Схожий результат для оператора Штурма-Ліувілля з виродженими граничними умовами раніше було доведено в [34].

Висновки до розділу 2

Розділ 2 присвячено вивченню повноти СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку. У підрозділі 2.1 доведено загальну теорему про повноту. У підрозділі 2.2 отримані нові, більш точні, асимптотичні формули для розв'язків системи і характеристичного визначника граничної задачі. У підрозділі 2.3 результати двох попередніх підрозділів застосовано для отримання нових явних достатніх умов повноти СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з не слабко регулярними граничними умовами.

Слід зауважити, що доведення загальної теореми про повноту у підрозділі 2.1 слідує доведенню схожої теореми із [91]. А асимптотичні формули для розв'язків системи в підрозділі 2.1 базуються на аналозі теореми Біркгофа отриманій у [91]. Асимптотична формула характеристичного визначника граничної задачі є найбільш технічно сильним результатом, який довзолив отримати нові явні достатні умови повноти у підрозділі 2.3. Ці результати були продемонстровані на багатьох прикладах, зокрема на модельній системі експоненціально-тригонометричних функцій, що є СВПФ класичного квадратичного диференціального пучка Кєлдиша. Також отримано необхідну умову повноти, що узагальнює відповідний результат з [91].

До основних результатів цього розділу належать:

– Теорема 2.3, в якій доведено загальний результат про повноту, що виражає її через поведінку характеристичного визначника на трьох променях комплексної площини.

– Пропозиція 2.6, в якій отримано нові більш точні асимптотичні формули для розв'язків системи. А саме, отримано явний вираз першого члена асимптотики по спектральному параметру у спеціальних секторах комплексної площини через значення потенціалу на кінцях відрізка при найслабкіших можливих умовах гладкості.

– Пропозиція 2.8, в якій отримано нову точну асимптотичну формулу для характеристичного визначника відповідної граничної задачі. А саме, отримано явний вираз першого члена асимптотики по спектральному параметру при умовах пропозиції 2.6.

– Теорема 2.10, в якій отримано нові загальні явні достатні умови повноти СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з не слабко регулярними граничними умовами. Цей результат узагальнює відповідний результат М. М. Маламуда і Л. Л. Оридороги із [91].

– Пропозиція 2.14, яка є простим наслідком теореми 2.10 для 2×2 систем, і узагальнює відповідний результат М. М. Маламуда і Л. Л. Оридороги із [91] для 2×2 систем типу Дірака з неперервно-диференційованим потенціалом, а також результат А. В. Агібалової [55] для загальних 2×2 систем з аналітичним потенціалом.

– Наслідок 2.18, в якому отримано умови повноти СВПФ граничної задачі для спеціальної 4×4 системи з умовами, що розпадаються. Цей результат має застосування при вивченні моделі балки Тимошенка.

– Наслідок 2.20, в якому отримано аналог подвійної повноти для системи експоненціально-тригонометричних функцій, що є СВПФ класичного квадратичного диференціального пучка Келдиша.

– Пропозиція 2.22, в якій отримані необходні умови повноти СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку, що узагальнює відповідний результат М. М. Маламуда і Л. Л. Оридороги із [91] для 2×2 системи Дірака.

Основні положення цього розділу викладені у публікації автора [87].

РОЗДІЛ 3

Базисність Ріса і застосування до моделі балки Тимошенка

3.1 Блочна базисність Ріса для СВПФ

В цьому підрозділі ми досліджуємо властивість базисності Ріса для оператора $L_{C,D}(Q)$, зводячи його до оператора $L_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(\widetilde{Q})$, який є збуренням нормального оператора. У зв'язку з цим, знайдемо умови на матриці C і D, що забезпечують нормальність оператора $L_{C,D}(0)$.

Лема 3.1. *(i) Оператор* $L := L_{C,D}(0)$ *є нормальним тоді і тільки тоді, коли*

$$CBC^* = DBD^*. \tag{3.1}$$

(ii) Якщо виконано умову (3.1)*, то граничні умови* (2.3) *є регулярними, тобто* $\det T_{izB}(C,D) \neq 0$ *для будь-якої допустимої точки* z.

(iii) Якщо $Q \in L^1([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$ *і виконано умову* (3.1)*, то СВПФ оператора* $L_{C,D}(Q)$ *повна і мінімальна в* $L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$.

Доведення. **(i)** Легко бачити, що

$$LL^*y = L^*Ly = -(BB^*)^{-1}y'', \quad y \in W^{2,2}([0,1];\mathbb{C}^n). \tag{3.2}$$

Отже, L є нормальним тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{dom}(L) = \mathrm{dom}(L^*)$, що еквівалентно

$$(Lf,g) = (f,L^*g), \quad f,g \in \mathrm{dom}(L). \tag{3.3}$$

Після інтегрування частинами ця рівність набуде вигляду

$$\langle B^{-1}f(0), g(0)\rangle = \langle B^{-1}f(1), g(1)\rangle, \quad f,g \in \mathrm{dom}(L). \tag{3.4}$$

Покладемо $\widetilde{B} := \mathrm{diag}(B^{-1}, -B^{-1})$ і оснастимо простір $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$ білінійною формою

$$w(u,v) := \langle \widetilde{B}u, v\rangle = \langle B^{-1}u_1, v_1\rangle - \langle B^{-1}u_2, v_2\rangle, \quad u = \mathrm{col}(u_1,u_2),\ v = \mathrm{col}(v_1,v_2). \tag{3.5}$$

Тоді умова (3.4) набуде вигляду

$$w(u,v) = 0, \quad u,v \in \mathcal{H}_1 := \ker \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} := \{\mathrm{col}(u_1,u_2) : Cu_1 + Du_2 = 0\}. \tag{3.6}$$

З іншого боку, рівність $CBC^* = DBD^*$ можна записати як

$$\langle B^{-1}BC^*h, BC^*k\rangle = \langle B^{-1}(-BD^*h), -BD^*k\rangle, \quad h,k \in \mathbb{C}^n. \tag{3.7}$$

Використовуючи (3.5), ми можемо записати це у вигляді

$$w(u,v) = 0, \quad u,v \in \mathcal{H}_2 := \{\mathrm{col}(BC^*h, -BD^*h) :\ h \in \mathbb{C}^n\}. \tag{3.8}$$

Таким чином, щоб довести твердження, достатньо показати, що (3.6) еквівалентно (3.8). У зв'язку з цим доведемо, що $\mathcal{H}_1$ є правим w-ортогональним доповненням $\mathcal{H}_2$, тобто

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2^{[\perp]} := \{u \in \mathcal{H} : w(v,u) = 0, v \in \mathcal{H}_2\}. \tag{3.9}$$

Дійсно, якщо

$$v = \mathrm{col}(BC^*h, -BD^*h) \in \mathcal{H}_2 \quad \text{і} \quad u = \mathrm{col}(u_1,u_2) \in \mathcal{H}, \tag{3.10}$$

то

$$w(v,u) = \langle B^{-1}(BC^*)h, u_1\rangle - \langle B^{-1}(-BD^*)h, u_2\rangle = \langle h, Cu_1 + Du_2\rangle, \qquad h \in \mathbb{C}^n. \tag{3.11}$$

Звідси випливає, що $w(v,u) = 0$ для кожного $v \in \mathcal{H}_2$ тоді і тільки тоді, коли $Cu_1 + Du_2 = 0$, тобто $u \in \mathcal{H}_1$. Далі, з умови максимальності (2.5) випливає, що $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 = n$.

Тепер, якщо (3.8) виконано, то $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_2^{[\perp]} = \mathcal{H}_1$. Оскільки $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2$, то $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, і (3.6) виконано. Зворотне твердження отримується аналогічно.

(ii) Оскільки $L = L_{C,D}(0)$ – нормальний, то виконано умову (3.6). Нехай

$$\beta_1^{-1}, \beta_2^{-1}, \ldots, \beta_{2n}^{-1} \tag{3.12}$$

– це власні числа матриці $\widetilde{B}$ і нехай $e_1, e_2, \ldots, e_{2n}$ – це відповідні нормовані власні вектори. Зрозуміло, що

$$\beta_k = -\beta_{n+k} = b_k, \quad k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3.13}$$

Для кожної допустимої точки z, тобто для z, що задовольняє умові

$$\operatorname{Re}(izb_k) \neq 0, \quad k \in \{1, \ldots, n\}, \tag{3.14}$$

покладемо

$$\mathcal{H}_z := \operatorname{span}\{e_k : \operatorname{Re}(iz\beta_k) > 0\}. \tag{3.15}$$

З огляду на (3.13) маємо, що $\dim \mathcal{H}_z = n$ для будь-якого допустимого z. Далі зауважимо, що

$$T_{izB}(C, D) = \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix}\Big|_{\mathcal{H}_z}. \tag{3.16}$$

Отже,

$$\det T_{izB}(C, D) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ker \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} \cap \mathcal{H}_z = \{0\}. \tag{3.17}$$

Нехай $u \in \mathcal{H}_z$. Тоді

$$u = \sum_{\operatorname{Re}(iz\beta_k)>0} c_k e_k, \tag{3.18}$$

для деяких $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, і

$$\operatorname{Re}(iz\langle u, \widetilde{B}u\rangle) = \sum_{\operatorname{Re}(iz\beta_k)>0} |c_k|^2 \operatorname{Re}(iz\overline{\beta_k^{-1}}) = \sum_{\operatorname{Re}(iz\beta_k)>0} \frac{|c_k|^2}{|\beta_k|^2} \operatorname{Re}(iz\beta_k). \tag{3.19}$$

Тому

$$\operatorname{Re}(iz\langle u, \widetilde{B}u\rangle) > 0, \quad u \in \mathcal{H}_z \setminus \{0\}. \tag{3.20}$$

З іншого боку, з огляду на (3.6) маємо

$$\langle u, \widetilde{B}u \rangle = \overline{\langle \widetilde{B}u, u \rangle} = 0, \quad u \in \ker \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Об'єднуючи це з (3.20), отримуємо $\ker \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} \cap \mathcal{H}_z = \{0\}$, що завершує доведення.

(iii) Із (ii) випливає, що граничні умови (2.3) є слабко B-регулярними. Тепер повнота і мінімальність СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$ випливає із теореми 1.2 із [91]. $\square$

Зауваження 3.2. *Нехай $Q \in L^2([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$. Тоді (необмежений) оператор множення*

$$Q : f \to Q(x)f, \quad f \in L^2([0,1];\mathbb{C}^n), \tag{3.22}$$

є компактним відносно $L_{C,D}(0)$. Отже, твердження (iii) випливає із класичної теореми Келдиша (див. теорему 4.3 в [37]), якщо накласти додаткову умову, що спектр оператора $L_{C,D}(0)$ лежить на об'єднанні променів

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = \varphi_k\}, \quad k \in \{1,\ldots,n\}. \tag{3.23}$$

Нагадаємо наступні визначення із [8] і [37].

Визначення 3.3. *(i) Послідовність $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ векторів в $\mathfrak{H}$ називається* ***базисом Ріса****, якщо вона допускає представлення $f_k = Te_k$, $k \in \mathbb{N}$, де $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормований базис в $\mathfrak{H}$ і $T : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ є обмеженим оператором з обмеженим оберненим.*

(ii) Послідовність підпросторів $\{\mathfrak{H}_k\}_{k=1}^{\infty}$ називається ***базисом Ріса із підпросторів*** *в $\mathfrak{H}$, якщо існує повна послідовність попарно ортогональних підпросторів $\{\mathfrak{H}'_k\}_{k=1}^{\infty}$ і обмежений оператор T в $\mathfrak{H}$ з обмеженим оберненим такі, що $\mathfrak{H}_k = T\mathfrak{H}'_k$, $k \in \mathbb{N}$.*

(iii) Послідовність $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ векторів в $\mathfrak{H}$ називається ***блочним базисом Ріса****, якщо будь-яка її скінченна підпослідовність є лінійно незалежною, і*

існує зростаюча послідовність $\{n_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ *така, що* $n_0 = 1$, *і послідовність* $\mathfrak{H}_k := \operatorname{span}\{f_j\}_{j=n_{k-1}}^{n_k-1}$ *є базисом Ріса із підпросторів в* $\mathfrak{H}$. *Підпростори* $\mathfrak{H}_k$ *називаються блоками.*

Щоб сформулювати наш наступний результат нам треба таке визначення.

Визначення 3.4. *Нехай* $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ *– це послідовність кутових значень,* $\varphi_k \in (-\pi, \pi]$, *і* $\varepsilon > 0$. *Числа* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *називаються* ε*-близькими відносно* $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$, *якщо для деякого* $k \in \{1, \dots, n\}$ *виконано нерівності*

$$\lambda, \mu \in \{z \in \mathbb{C} : |\arg z - \varphi_k| < \varepsilon\} \quad \text{і} \quad |\operatorname{Re}(e^{-i\varphi_k}(\lambda - \mu))| < \varepsilon. \tag{3.24}$$

Іншими словами, λ *і* μ *є* ε*-близькими, якщо для деякого* k *вони лежать у малому куті з бісектрисою*

$$l_+(\varphi_k) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \varphi_k\}, \tag{3.25}$$

і їх проекції на цей кут є близькими.

Нехай A – оператор з компактною резольвентою і нехай $\Omega \subset \mathbb{C}$ – обмежена множина. Покладемо

$$N(\Omega, A) := \sum_{\lambda \in \sigma(A) \cap \Omega} m_a(\lambda, A) = \sum_{\lambda \in \sigma(A) \cap \Omega} \dim \mathcal{R}_\lambda(A). \tag{3.26}$$

Наше дослідження властивості базисності Ріса оператора $L_{C,D}$ базується на такому твердженні, яке випливає із [38] і [37, §I.6].

Пропозиція 3.5. *Нехай* $\mathfrak{H}$ *– сепарабельний гільбертів простір, і* G *– нормальний оператор з компактною резольвентою в* $\mathfrak{H}$, *спектр якого лежить на об'єднанні променів* $l_+(\varphi_1), \dots, l_+(\varphi_n)$, *і*

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} N(\mathbb{D}(z), G) < \infty, \qquad \mathbb{D}(z) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < 1\}. \tag{3.27}$$

Нехай T *– обмежений оператор в* $\mathfrak{H}$ *і* $\varepsilon > 0$ *– як завгодно мале число. Тоді СВПФ оператора* $A = G + T$ *є блочним базисом Ріса в* $\mathfrak{H}$, *де кожний* *блок складається із кореневих підпросторів, що відповідають попарно ε-близьким відносно послідовності $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ власним числам оператора A.*

Доведення. Оскільки T є обмеженим, то він є компактним відносно G. Отже згідно з наслідком 3.7 із [37] всі власні числа оператора $A = G + T$, окрім можливо скінченного числа, належать об'єднанню секторів

$$\Omega_j(\varepsilon) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda - \varphi_j| < \varepsilon\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{3.28}$$

що не перетинаються при достатньо малому ε. Зафіксуємо $j \in \{1, \ldots, n\}$ і покладемо $G_j := e^{-i\varphi_j} G$. З умови (3.27) випливає умова (6.21) леми 6.8 із [37], тобто виконано

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} N\left((r_k - q r_k^p, r_k + q r_k^p), G_j\right) < \infty \tag{3.29}$$

при $p = 0$, і для будь-якого $q > 0$ і зростаючої послідовністі $\{r_k\}_{k=1}^\infty$. Нехай $\{\lambda_{j,k}\}_{k=1}^\infty$ – послідовність власних чисел оператора A, що лежать у $\Omega_j(\varepsilon)$, упорядкована у порядку зростання $\operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi_j}\lambda_{j,k}\right)$. Покладемо

$$r_k := \operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi_j}\lambda_{j,k}\right) - \varepsilon/2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.30}$$

Застосовуючи лему 6.8 із [37] до оператора G_j з $p = 0$, $q = \|T\| + 4\varepsilon$ і вибраною послідовністю $\{r_k\}_{k=1}^\infty$, отримуємо, що існують

$$x_k \in (r_k - \varepsilon/2, r_k + \varepsilon/2), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.31}$$

такі, що послідовність $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ строго зростає, і послідовність підпросторів

$$\mathfrak{H}_{j,k} := \operatorname{span}\{\mathcal{R}_{\lambda_{j,s}}(A) : x_k \leqslant \operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi_j}\lambda_{j,s}\right) < x_{k+1}\}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.32}$$

є базисом Ріса із підпросторів у своїй замкненій лінійній оболонці. Із визначення чисел r_k і x_k випливає, що

$$\operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi_j}\lambda_{j,k}\right) - \varepsilon < x_k < \operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi_j}\lambda_{j,k}\right), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.33}$$

Отже кореневі підпростори оператора A, що відповідають власним числам, які не є ε-близькими відносно $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$, належать різним блокам. Нехай $\lambda_1', \ldots, \lambda_m'$ – послідовність власних чисел оператора A, що не лежать у об'єднанні секторів $\cup_{j=1}^n \Omega_j(\varepsilon)$. Зрозуміло, що система підпросторів

$$\{\mathcal{R}_{\lambda_k'}\}_{k=1}^m, \{\mathfrak{H}_{1,k}\}_{k=1}^\infty, \ldots, \{\mathfrak{H}_{n,k}\}_{k=1}^\infty \tag{3.34}$$

є базисом Ріса із підпросторів у своїй замкненій лінійній оболонці. Оскільки ця система підпросторів охоплює систему кореневих векторів оператора A, то із теореми Келдиша (див. теорему 4.3 із [37]) випливає повнота цієї системи в $\mathfrak{H}$. Отже, СВПФ оператора A є блочним базисом Ріса, блоки якої задовольнять бажаним властивостям. □

Тепер ми готові довести наш головний результат про базисність Ріса для граничної задачі (2.1)–(2.3).

Теорема 3.6. *Нехай* $Q \in L^\infty([0,1]; \mathbb{C}^{n\times n})$, $n_1 + \ldots + n_r = n/2$ *і*

$$B = \operatorname{diag}(B_j)_{j=1}^r, \quad C = \operatorname{diag}(C_j)_{j=1}^r, \quad D = \operatorname{diag}(D_j)_{j=1}^r, \tag{3.35}$$

$$B_j = \begin{pmatrix} b_{j1} I_{n_j} & 0 \\ 0 & b_{j2} I_{n_j} \end{pmatrix}, \quad C_j = \begin{pmatrix} C_{j1} & C_{j2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_{j1} & D_{j2} \end{pmatrix}, \tag{3.36}$$

де $b_{j1} b_{j2}^{-1} < 0$ *і* $C_{j1}, C_{j2}, D_{j1}, D_{j2} \in \mathrm{GL}(n_j, \mathbb{C})$. *Тоді СВПФ оператора* $A := L_{C,D}(Q)$ *є блочним базисом Ріса в* $L^2([0,1]; \mathbb{C}^n)$, *де кожний блок складається із кореневих підпросторів, що відповідають власним числам оператора* A, *які є попарно* ε*-близькими відносно послідовності*

$$\{-\varphi_1, \ldots, -\varphi_r, \pi - \varphi_1, \ldots, \pi - \varphi_r\}. \tag{3.37}$$

Тут $\varphi_j = \arg(b_{j1} - b_{j2})$, $j \in \{1, \ldots, r\}$, *і* $\varepsilon > 0$ *– як завгодно мале число.*

Доведення. Спочатку покажемо, що оператор $L_{C,D}(Q)$ є подібним оператору $L_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(\widetilde{Q})$ з тією ж матрицею B і матрицями $\widetilde{C}, \widetilde{D}$, що задовольняють (3.1). З цією метою ми будемо використовувати калібрувальне перетворення $W : y \to W(x)y$, де $W(\cdot)$ задовольняє таким умовам:

$$W(x)B = BW(x), \quad x \in [0,1], \tag{3.38}$$

$$W \in C^1([0,1]; \mathbb{C}^{n\times n}), \quad W^{-1} \in C([0,1]; \mathbb{C}^{n\times n}). \tag{3.39}$$

Тоді оператор $L_{C,D}(Q)$ перетворюється на оператор

$$L_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(\widetilde{Q}) = W^{-1} L_{C,D}(Q) W$$

з тією ж матрицею B і матрицями $\widetilde{C}$, $\widetilde{D}$, $\widetilde{Q}(\cdot)$ вигляду

$$\widetilde{C} := CW(0), \ \ \widetilde{D} := DW(1), \ \ \widetilde{Q}(x) := W^{-1}(x)Q(x)W(x) - iW^{-1}(x)B^{-1}W'(x). \tag{3.40}$$

Оскільки $W, W', W^{-1}, Q \in L^\infty([0,1]; \mathbb{C}^{n\times n})$, то $\widetilde{Q} \in L^\infty([0,1]; \mathbb{C}^{n\times n})$.

З огляду на блочно-діагональну структуру (3.35)–(3.36) матриць B, C_j і D_j, можна вибрати $W_0, W_1 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ так, що $W_k B = BW_k$, $k \in \{0,1\}$, і

$$CW_0 = \operatorname{diag}(\widetilde{C}_j)_{j=1}^r, \quad \widetilde{C}_j := \begin{pmatrix} I_{n_j} & b_j I_{n_j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_j := \left(-b_{j1} b_{j2}^{-1}\right)^{1/2}, \tag{3.41}$$

$$DW_1 = \operatorname{diag}(\widetilde{D}_j)_{j=1}^r, \quad \widetilde{D}_j := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{n_j} & b_j I_{n_j} \end{pmatrix}, \quad j \in \{1, \ldots, r\}. \tag{3.42}$$

Виберемо довільну гілку логарифма і покладемо $\widetilde{W} := \log(W_0^{-1} W_1)$. Зрозуміло, що матриця $\widetilde{W}$ є корректно визначеною, оскільки матриця $W_0^{-1} W_1$ є невиродженою. Тому $W(x) := W_0 e^{x\widetilde{W}}$ задовольняє (3.38), (3.39), і $W(0) = W_0$, $W(1) = W_1$. Визначимо калібрувальне перетворення $W : y \to W(x)y$. З огляду на (3.40), (3.41), (3.42) матриці $\widetilde{C}, \widetilde{D}$ нового оператора $L_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(\widetilde{Q}) = W^{-1} L_{C,D}(Q) W$ мають вигляд $\widetilde{C} = \operatorname{diag}(\widetilde{C}_j)_{j=1}^r$ і $\widetilde{D} = \operatorname{diag}(\widetilde{D}_j)_{j=1}^r$, де $\widetilde{C}_j$ і $\widetilde{D}_j$ задані формулами (3.41) і (3.42) відповідно.

Прямі обчислення показують, що

$$\widetilde{C}_j B_j \widetilde{C}_j^* = \widetilde{D}_j B_j \widetilde{D}_j^* = 0, \quad j \in \{1, \ldots, r\}. \tag{3.43}$$

Тому $\widetilde{C}B\widetilde{C}^* = \widetilde{D}B\widetilde{D}^* = 0$. За лемою 3.1, оператор $G := L_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(0)$ є нормальним. Його спектр співпадає з множиною нулів характеристичного визначника $\Delta(\cdot) = \det(\widetilde{C} + \widetilde{D}\widetilde{\Phi}(1,\cdot))$. Фундаментальна матриця $\widetilde{\Phi}(\cdot,\lambda)$ оператора $L_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(0)$ має вигляд $\widetilde{\Phi}(x,\lambda) = e^{iB\lambda x}$. Отже, з огляду на блочно-діагональну структуру матриць B, $\widetilde{C}$, $\widetilde{D}$, отримуємо

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) = \prod_{j=1}^{r} \det(\widetilde{C}_j + \widetilde{D}_j e^{iB_j\lambda}) &= \prod_{j=1}^{r} \det \begin{pmatrix} I_{n_j} & b_j I_{n_j} \\ e^{ib_{j1}\lambda} I_{n_j} & b_j e^{ib_{j2}\lambda} I_{n_j} \end{pmatrix} \\ &= \prod_{j=1}^{r} \left(b_j^{n_j} \cdot (e^{ib_{j2}\lambda} - e^{ib_{j1}\lambda})^{n_j} \right). \qquad (3.44)\end{aligned}$$

Тому

$$\sigma(G) = \left\{ \frac{2\pi k}{b_{j1} - b_{j2}} : k \in \mathbb{Z}, j \in \{1,\ldots,r\} \right\}. \qquad (3.45)$$

Таким чином, $\sigma(G)$ лежить на об'єднанні променів $\{l_+(-\varphi_j)\}_1^r$ і $\{l_+(\pi - \varphi_j)\}_1^r$, де

$$\varphi_j = \arg(b_{j1} - b_{j2}), \quad j \in \{1,\ldots,r\}. \qquad (3.46)$$

До того ж, $\sigma(G)$ – це об'єднання скінченного числа арифметичних прогресій, і власні числа мають обмежені кратності. Тому виконано умову (3.27). Оскільки $\widetilde{Q}(\cdot)$ є обмеженою матрицею-функцією, то за пропозицією 3.5 СВПФ оператора

$$\widetilde{A} := L_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(\widetilde{Q}) = L_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(0) + \widetilde{Q} = G + \widetilde{Q} \qquad (3.47)$$

є блочним базисом Ріса в $\mathfrak{H}$, де кожний блок складається із кореневих підпросторів, що відповідають попарно близьким власним числам оператора A у сенсі визначення 3.4. Оскільки $A = L_{C,D}(Q)$ є подібним до $\widetilde{A}$, то те саме виконується і для оператора $L_{C,D}(Q)$. □

Як наслідок цього результату ми отримуємо *блочну базисність Ріса СВПФ оператора Дірака з загальними граничними умовами, що розпадаються.*

Наслідок 3.7. *Нехай* $n = 2m$, $Q \in L^\infty([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$ *і*

$$B = \operatorname{diag}(b_1 I_m, b_2 I_m), \quad b_1 < 0 < b_2, \tag{3.48}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_1 & D_2 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, D_1, D_2 \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{C}). \tag{3.49}$$

Тоді СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$ *є блочним базисом Ріса в* $L^2([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$.

Аналогічно до теореми 3.6 ми можемо отримати наступний результат.

Пропозиція 3.8. *Нехай* $Q \in L^\infty([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$,

$$B = \operatorname{diag}(b_1 I_{n_1}, \ldots, b_r I_{n_r}), \quad n = n_1 + \ldots + n_r, \tag{3.50}$$

$$C = \operatorname{diag}(C_j)_{j=1}^r, \quad D = \operatorname{diag}(D_j)_{j=1}^r, \quad C_j, D_j \in GL(n_j,\mathbb{C}),\ j \in \{1,\ldots,r\}. \tag{3.51}$$

Тоді СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$ *є блочним базисом Ріса в* $L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$, *де кожний блок складається із кореневих підпросторів, що відповідають власним числам оператора* A, *які є попарно* ε*-близькими відносно послідовності*

$$\{-\varphi_1, \ldots, -\varphi_r, \pi - \varphi_1, \ldots, \pi - \varphi_r\}.$$

Тут $\varphi_j = \arg b_j$, $j \in \{1,\ldots,r\}$, *і* $\varepsilon > 0$ *– як завгодно мале число.*

Доведення. Доведення є аналогічним до доведення теореми 3.6. Вибираючи відповідне калібрувальне перетворення, ми перетворюємо оператор $L_{C,D}(Q)$ на $L_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(\widetilde{Q})$ з $\widetilde{C}_j = \widetilde{D}_j = I_{n_j}$. З умов пропозиції і леми 3.1 випливає, що оператор $G := L_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(0)$ є нормальним, і його спектр має вигляд

$$\sigma(G) = \{2\pi k/b_j : k \in \mathbb{Z},\ j \in \{1,\ldots,r\}\}. \tag{3.52}$$

Тому використовуючи такі ж міркування, що і при доведенні теореми 3.6, отримуємо результат. □

Прямим наслідком цього результату є *блочна базисність Ріса СВПФ оператора Дірака з періодичними або антиперіодичними граничними умовами і загальною матрицею* B.

Наслідок 3.9. *Нехай* $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $Q \in L^\infty([0,1]; \mathbb{C}^{n\times n})$ *і граничні умови мають вигляд* $y(1) = \pm y(0)$ *(тобто* $C = \mp D = I_n$*). Тоді СВПФ оператора* $L_{C,D}(Q)$ *є блочним базисом Ріса в* $L^2([0,1]; \mathbb{C}^n)$*.*

Зауваження 3.10. *Для системи типу Дірака* ($B = B^*$) *ми можемо розширити твердження теореми 3.6 і пропозиції 3.8 на випадок* $Q \in L^2([0,1]; \mathbb{C}^{n\times n})$*. Дійсно, достатньо застосувати теорему 2 із недавньої роботи А. А. Шкалікова [54] замість використаних результатів із [38] і [37, §I.6]. Однак зауважимо, що в теоремі 2 із [54] було стверджено лише базисність замість базисності Ріса.*

У найпростішому випадку $B = I_n$ ми можемо встановити критерій того, що СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$ є блочним базисом Ріса.

Наслідок 3.11. *Нехай* $B = I_n$ *і* $Q \in L^1([0,1]; \mathbb{C}^{n\times n})$*. Тоді СВПФ оператора* $L_{C,D}(Q)$ *є блочним базисом Ріса в* $L_2([0,1]; \mathbb{C}^n)$ *тоді і тільки тоді, коли* $\det(C \cdot D) \neq 0$*.*

Доведення. Застосовуючи калібрувальне перетворення $y \to W(x)y$ з $W(\cdot)$ описаним на початку доведення пропозиції 2.8, ми бачимо, що оператор $L_{C,D}(Q)$ є подібним до оператора $L_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(0)$ з $\widetilde{C} = C$, $\widetilde{D} = DW(1)$ і нульовою потенціальною матрицею. Далі, оскільки $B = I_n$, то $T_B(\widetilde{C}, \widetilde{D}) = DW(1)$ і $T_{-B}(\widetilde{C}, \widetilde{D}) = C$. Тому, $\det(C \cdot D) \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли $\det T_B(\widetilde{C}, \widetilde{D}) \cdot \det T_{-B}(\widetilde{C}, \widetilde{D}) \neq 0$. Тому, за пропозицією 4.6 із [91], СВПФ оператора $L_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(0)$ має нескінченний дефект, якщо $\det(C \cdot D) = 0$. З іншого боку, якщо $\det(C \cdot D) \neq 0$ то, за пропозицією 3.8, застосованою з $r = 1$ і $Q = 0$, СВПФ оператора $L_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(0)$ є блочним базисом Ріса. Подібність операторів $L_{C,D}(Q)$ і $L_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(0)$ завершує доведення. □

3.2 Застосування для моделі балки Тимошенка

У цьому розділі ми застосуємо результати про повноту і базисність граничних задач для системи типу Дірака з $B = B^* \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ до моделі балки Тимошенка. Розглянемо наступну лінійну систему з двох сполучених гіперболічних рівнянь при $t \geqslant 0$:

$$I_\rho(x)\Phi_{tt} = K(x)(W_x - \Phi) + (EI(x)\Phi_x)_x - p_1(x)\Phi_t, \quad x \in [0,\ell], \tag{3.53}$$

$$\rho(x)W_{tt} = (K(x)(W_x - \Phi))_x - p_2(x)W_t, \quad x \in [0,\ell]. \tag{3.54}$$

Вібрація балки Тимошенка довжиною ℓ, затиснутої у лівому кінці, визначається системою (3.53)–(3.54) з наступними граничними умовами при $t \geqslant 0$ [104]:

$$W(0,t) = \Phi(0,t) = 0, \tag{3.55}$$

$$\big(EI(x)\Phi_x(x,t) + \alpha_1\Phi_t(x,t) + \beta_1 W_t(x,t)\big)\big|_{x=\ell} = 0, \tag{3.56}$$

$$\big(K(x)(W_x(x,t) - \Phi(x,t)) + \alpha_2 W_t(x,t) + \beta_2\Phi_t(x,t)\big)\big|_{x=\ell} = 0. \tag{3.57}$$

Тут $W(x,t)$ – бічне переміщення центральної осі балки у точці x і час t, $\Phi(x,t)$ – кут обертання нормалі відносно центральної осі балки у точці x і час t, $\rho(x)$ – щілність балки, $K(x)$ – зсувна жорсткість рівномірного перерізу, $I_\rho(x)$ – обертальна інерція, $EI(x)$ – жорсткість на згинання у точці x, $p_1(x)$ і $p_2(x)$ – локально розподілені функції зворотного зв'язку, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$, $j \in \{1,2\}$. Граничні умови у правому кінці містять в окремих випадках більшість відомих граничних умов, якщо α_1, α_2 можуть дорівнювати нескінченності.

Стосовно коефіцієнтів, ми будемо вважати, що вони задовольняють наступним загальним умовам:

$$\rho, I_\rho, K, EI \in C[0,\ell], \qquad p_1, p_2 \in L^1[0,\ell], \tag{3.58}$$

$$0 < C_1 \leqslant \rho(x), I_\rho(x), K(x), EI(x) \leqslant C_2, \quad x \in [0,\ell]. \tag{3.59}$$

Енергетичним простором, асоційованим з задачею (3.53)–(3.57), є

$$\mathfrak{H} := \widetilde{H}_0^1[0,\ell] \times L^2[0,\ell] \times \widetilde{H}_0^1[0,\ell] \times L^2[0,\ell], \tag{3.60}$$

де $\widetilde{H}_0^1[0,\ell] := \{f \in W^{1,2}[0,\ell] : f(0) = 0\}$. Норма в енергетичному просторі визначається наступним чином:

$$\|y\|_{\mathfrak{H}}^2 = \int_0^\ell \big(EI|y_1'|^2 + I_\rho|y_2|^2 + K|y_3' - y_1|^2 + \rho|y_4|^2\big)dx, \quad y = \mathrm{col}(y_1, y_2, y_3, y_4). \tag{3.61}$$

Задача (3.53)–(3.57) може бути переписана як

$$y_t = i\mathcal{L}y, \quad y(x,t)|_{t=0} = y_0(x), \tag{3.62}$$

де y і $\mathcal{L}$ даються формулами

$$y = \mathrm{col}\Big(\Phi(x,t),\ \Phi_t(x,t),\ W(x,t),\ W_t(x,t)\Big), \tag{3.63}$$

$$\mathcal{L}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{1}{I_\rho(x)}\Big(K(x)(y_3' - y_1) + \big(EI(x)y_1'\big)' - p_1(x)y_2\Big) \\ y_4 \\ \frac{1}{\rho(x)}\Big(\big(K(x)(y_3' - y_1)\big)' - p_2(x)y_4\Big) \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

на області визначення

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(\mathcal{L}) \ = \ & \Big\{y = \mathrm{col}(y_1, y_2, y_3, y_4) : y_1, y_2, y_3, y_4 \in \widetilde{H}_0^1[0,\ell]\ , \\ & EI \cdot y_1' \in W^{1,1}[0,\ell], \ \ (EI \cdot y_1')' - p_1 y_2 \in L^2[0,\ell], \\ & K \cdot (y_3' - y_1) \in W^{1,1}[0,\ell], \ \ (K \cdot (y_3' - y_1))' - p_2 y_4 \in L^2[0,\ell], \\ & \big(EI \cdot y_1'\big)(\ell) + \alpha_1 y_2(\ell) + \beta_1 y_4(\ell) = 0, \\ & \big(K \cdot (y_3' - y_1)\big)(\ell) + \alpha_2 y_4(\ell) + \beta_2 y_2(\ell) = 0\Big\}. \end{aligned} \tag{3.65}$$

У цьому підрозділі ми отримаємо повноту і блочну базисність Ріса оператора $\mathcal{L}$, не аналізуючи його спектр. Для зручності ми накладаємо таку додаткову алгебраїчну умову на $\mathcal{L}$:

$$\nu(x) := \frac{EI(x)\rho(x)}{K(x)I_\rho(x)} = \mathrm{const}, \quad x \in [0,\ell], \tag{3.66}$$

Зрозуміло, що умову (3.66) виконано, якщо $I_\rho(x) = R\rho(x)$, де $R = \text{const}$ – площа поперечного перерізу балки, EI і K – сталі функції, а $\rho(\cdot)$ – будь-яка додатна абсолютно-неперервна функція (див. умову (3.72)). Наш підхід до вивчення спектральних властивостей оператора $\mathcal{L}$ базується на зведенні оператора $\mathcal{L}$ до спеціального оператора типу Дірака четвертого порядку.

Нехай функція $\gamma(\cdot)$ задана формулою

$$\sqrt{\frac{I_\rho(x)}{EI(x)}} = b_1\gamma(x), \quad \text{де} \quad b_1 > 0 \quad \text{і} \quad \int_0^\ell \gamma(x)dx = 1. \tag{3.67}$$

З умов (3.58) і (3.59) випливає, що $\gamma \in C[0,\ell]$ і є додатною. Далі, з огляду на (3.66) маємо

$$\sqrt{\frac{\rho(x)}{K(x)}} = b_2\gamma(x), \quad \text{де} \quad b_2 > 0. \tag{3.68}$$

Нехай

$$\begin{aligned} B &:= \operatorname{diag}(-b_1, b_1, -b_2, b_2), && (3.69)\\ \Theta(x) &:= -2i\operatorname{diag}(I_\rho(x), I_\rho(x), \rho(x), \rho(x)), && (3.70)\\ h_1(x) &:= \sqrt{EI(x)I_\rho(x)}, \qquad h_2(x) := \sqrt{K(x)\rho(x)}. && (3.71)\end{aligned}$$

Надалі вважатимемо, що

$$h_1, h_2 \in W^{1,1}[0,\ell]. \tag{3.72}$$

Тому, згідно з (3.58)–(3.59) наступна матриця-функція є коректно визначеною:

$$\widehat{Q}(x) := \Theta^{-1}(x)\begin{pmatrix} p_1 + h_1' & p_1 - h_1' & h_2 & -h_2 \\ p_1 + h_1' & p_1 - h_1' & h_2 & -h_2 \\ -h_2 & -h_2 & p_2 + h_2' & p_2 - h_2' \\ h_2 & h_2 & p_2 + h_2' & p_2 - h_2' \end{pmatrix}. \tag{3.73}$$

Далі, покладемо

$$t(x) = \int_0^x \gamma(s)ds, \quad x \in [0,\ell]. \tag{3.74}$$

Оскільки $\gamma \in C[0,\ell]$ і є додатною, то функція $t(\cdot)$ строго зростає на $[0,\ell]$, $t(\cdot) \in C^1[0,\ell]$, і згідно з (3.67) $t(\ell) = 1$. Тому обернена функція $x(\cdot) := t^{-1}(\cdot)$ є коректно визначеною, строго зростає на $[0,1]$, і $x(\cdot) \in C^1[0,1]$. Далі, покладемо

$$Q(t) := \widehat{Q}(x(t)) =: (q_{jk}(t))_{j,k=1}^4, \quad t \in [0,1]. \tag{3.75}$$

Нарешті, нехай

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 - h_1(\ell) & \alpha_1 + h_1(\ell) & \beta_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & \beta_2 & \alpha_2 - h_2(\ell) & \alpha_2 + h_2(\ell) \end{pmatrix}. \tag{3.76}$$

Пропозиція 3.12. *Нехай функції* ρ, I_ρ, K, EI, p_1, p_2, h_1, h_2 *задовольняють умовам* (3.58), (3.59), (3.66) *і* (3.72). *Тоді оператор* $\mathcal{L}$ *є подібним до оператора типу Дірака четвертого порядку* $L := L_{C,D}(Q)$ *з матрицями* $B, C, D, Q(\cdot)$, *що задані формулами* (3.69), (3.76) *і* (3.75).

Доведення. Введемо наступний оператор

$$Uy = \mathrm{col}(EI(x)y_1',\ y_2,\ K(x)(y_3' - y_1),\ y_4), \qquad y = \mathrm{col}(y_1, y_2, y_3, y_4), \tag{3.77}$$

що відображає гільбертовий простір $\mathfrak{H}$, заданий формулою (3.60), у простір $L^2([0,\ell];\mathbb{C}^4)$. Оскільки $\frac{d}{dx}$ ізометрично відображає

$$\widetilde{H}_0^1[0,\ell] = \{f \in W^{1,2}[0,\ell] : f(0) = 0\} \tag{3.78}$$

на $L^2[0,\ell]$, з умови (3.59) випливає, що оператор U є обмеженим і має обернений оператор, що також є обмеженим. Легко перевірити, що для

$y = \mathrm{col}(y_1, y_2, y_3, y_4)$ маємо

$$\mathcal{L}U^{-1}y = \frac{1}{i}\,\mathrm{col}\Big(y_2,\ \frac{1}{I_\rho}(y_1' - p_1 y_2 + y_3),\ y_4,\ \frac{1}{\rho}(y_3' - p_2 y_4)\Big), \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{L}y &:= U\mathcal{L}U^{-1}y \\ &= \frac{1}{i}\,\mathrm{col}\Big(EI\cdot y_2',\ \frac{1}{I_\rho}(y_1' - p_1 y_2 + y_3),\ K\cdot(y_4' - y_2),\ \frac{1}{\rho}(y_3' - p_2 y_4)\Big),\end{aligned} \tag{3.80}$$

і

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(\widetilde{L}) = U\,\mathrm{dom}(\mathcal{L}) = \big\{y = \mathrm{col}(y_1, y_2, y_3, y_4) \in W^{1,1}([0,\ell];\mathbb{C}^4) :\ & \\ \widetilde{L}y \in L^2([0,\ell];\mathbb{C}^4), \quad y_2(0) = y_4(0) = 0,\ & \\ y_1(\ell) + \alpha_1 y_2(\ell) + \beta_1 y_4(\ell) = 0,\ & \\ y_3(\ell) + \alpha_2 y_4(\ell) + \beta_2 y_2(\ell) = 0\big\}.\ &\end{aligned} \tag{3.81}$$

Отже, оператор $\mathcal{L}$ є подібним до оператора $\widetilde{L}$,

$$\widetilde{L}y = -i\widetilde{B}(x)y' + \widetilde{Q}(x)y \tag{3.82}$$

із областю визначення $\mathrm{dom}(\widetilde{L})$ заданою (3.81), і матрицями-функціями $\widetilde{B}(\cdot)$, $\widetilde{Q}(\cdot)$, заданими формулами

$$\widetilde{B}(x) := \begin{pmatrix} 0 & EI(x) & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_\rho(x)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K(x) \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho(x)} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{Q}(x) := i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_1(x)}{I_\rho(x)} & -\frac{1}{I_\rho(x)} & 0 \\ 0 & K(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p_2(x)}{\rho(x)} \end{pmatrix}. \tag{3.83}$$

Зрозуміло, що $\widetilde{Q} \in L^1([0,\ell];\mathbb{C}^{4\times 4})$ з огляду на умови (3.58)–(3.59). Далі ми діагоналізуємо матрицю $\widetilde{B}(\cdot)$. Покладемо

$$\widetilde{U}(x) := \begin{pmatrix} -h_1(x) & h_1(x) & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_2(x) & h_2(x) \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.84}$$

Тоді

$$\widetilde{U}^{-1}(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{h_1(x)} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h_1(x)} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h_2(x)} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_2(x)} & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.85}$$

Пряме обчислення показує, що

$$\widetilde{U}^{-1}(x)\widetilde{B}(x)\widetilde{U}(x) = \operatorname{diag}\left(-\sqrt{\frac{EI(x)}{I_\rho(x)}}, \sqrt{\frac{EI(x)}{I_\rho(x)}}, -\sqrt{\frac{K(x)}{\rho(x)}}, \sqrt{\frac{K(x)}{\rho(x)}}\right) = \frac{1}{\gamma(x)}B^{-1}. \tag{3.86}$$

Тут було використано означення (3.71) функцій h_1, h_2, означення (3.67) чисел b_1, b_2 і означення (3.68) функції $\gamma(x)$. Далі зауважимо, що

$$\widetilde{U} \in W^{1,1}([0,\ell];\mathbb{C}^{4\times 4}) \quad \text{і} \quad \widehat{Q} \in L^1([0,\ell];\mathbb{C}^{4\times 4}) \tag{3.87}$$

з огляду на (3.58), (3.59) і (3.72), де $\widehat{Q}(\cdot)$ має вигляд (3.73) і (3.70). Тому легко бачити, що

$$\widetilde{U}^{-1}(x)\widetilde{Q}(x)\widetilde{U}(x) - i\widetilde{U}^{-1}(x)\widetilde{B}(x)\widetilde{U}'(x) = \widehat{Q}(x), \qquad x \in [0,\ell]. \tag{3.88}$$

Вводячи оператор $\widetilde{U} : y \to \widetilde{U}(x)y$ в $L^2([0,\ell];\mathbb{C}^4)$ і враховуючи (3.86) і (3.88), ми бачимо, що для будь-якого $y \in W^{1,1}([0,\ell];\mathbb{C}^4)$, що задовольняє $\widetilde{U}y \in \operatorname{dom}(\widetilde{L})$, має місце рівність

$$\widehat{L}y := \widetilde{U}^{-1}\widetilde{L}\widetilde{U}y = -i\gamma(x)^{-1}B^{-1}y' + \widehat{Q}(x)y. \tag{3.89}$$

Враховуючи формулу (3.76) для C, D і формулу (3.84) для $\widetilde{U}(\cdot)$, ми маємо

$$\operatorname{dom}(\widehat{L}) = \{y \in W^{1,1}([0,\ell];\mathbb{C}^4) : \widehat{L}y \in L^2([0,\ell];\mathbb{C}^4),\ Cy(0) + Dy(\ell) = 0\}. \tag{3.90}$$

Як останній крок, ми застосуємо перетворення подібності S, що реалізує підстановку $x = x(t)$,

$$S : L^2([0,\ell];\mathbb{C}^4) \to L^2([0,1];\mathbb{C}^4), \qquad (Sf)(t) = f(x(t)), \quad t \in [0,1]. \tag{3.91}$$

Оскільки обидві функції $t(\cdot)$ і $x(\cdot)$ є строго зростаючими і неперервно-диференційовними, то виконуються такі твердження:

$$f(\cdot) \in W^{1,1}([0,\ell];\mathbb{C}^4) \ \Rightarrow \ f(x(\cdot)) \in W^{1,1}([0,1];\mathbb{C}^4), \tag{3.92}$$

$$g(\cdot) \in W^{1,1}([0,1];\mathbb{C}^4) \ \Rightarrow \ g(t(\cdot)) \in W^{1,1}([0,\ell];\mathbb{C}^4). \tag{3.93}$$

Тому із (3.90) і (2.4) випливає, що $\mathrm{dom}(L) = S\,\mathrm{dom}(\widehat{L})$. Далі, з (3.74) випливає, що $t'(x) = \gamma(x)$, $x \in [0,\ell]$. Тому для $f \in \mathrm{dom}(L)$ і $x \in [0,\ell]$ маємо

$$\begin{aligned}(\widehat{L}S^{-1}f)(x) &= -i\gamma(x)^{-1}B^{-1}\frac{d}{dx}\big[f(t(x))\big] + \widehat{Q}(x)f(t(x)) \\ &= -iB^{-1}f'(t(x)) + \widehat{Q}(x)f(t(x)),\end{aligned} \tag{3.94}$$

з чого безпосередньо випливає, що $L = S\widehat{L}S^{-1}$. Комбінуючи цю тотожність з (3.80) і (3.89), маємо, що оператор $\mathcal{L}$ є подібним до $L = L_{C,D}(Q)$. □

Зауваження 3.13. *Пропозиція 3.12 залишається справедливою, якщо замінити умову* (3.58) *на слабкішу умову* $\rho, I_\rho, K, EI \in L^\infty[0,\ell]$ *з додатковою умовою, що обернена функція* $x(\cdot) = t^{-1}(\cdot)$ *є абсолютно неперервною. Без цієї додаткової умови твердження* (3.92) *порушується, тому що в загальному випадку обернена функція абсолютно неперервної функції не обов'язково є абсолютно неперервною. Наприклад, функція* $h(x) := x + C(x)$, $x \in [0,1]$, *де* $C(\cdot)$ *це функція Кантора, є строго зростаючою і не є абсолютно неперервною. В той же час, обернена функція є абсолютно неперервною.*

Але у нашому випадку похідна $\gamma(x)$ *абсолютно неперервної функції* $t(x)$ *задовольняє умові* $\gamma(x) \geqslant C > 0$, $x \in [0,1]$. *Звідси легко випливає, що обернена функція* $x(\cdot) = t^{-1}(\cdot)$ *є ліпшицевою. Тому, насправді, умови* (3.58)–(3.59) *можна ще послабити до*

$$\rho, I_\rho, K, EI, p_1, p_2 \in L^1[0,\ell], \tag{3.95}$$

$$\gamma(x), \rho(x), I_\rho(x) \geqslant C > 0, \quad K(x), EI(x) > 0, \quad x \in [0,\ell]. \tag{3.96}$$

Зауважимо, що без зручної умови (3.59) *енергетичний простір з нормою* (3.61) *більше не буде мати простого опису* (3.60). *Пропозиція 3.12, тим не менш, залишається справедливою в цьому випадку.*

Застосовуючи наслідок 3.2 із [91] і теорему 3.6 до оператора L, ми отримуємо наступний результат.

Теорема 3.14. *Нехай виконано умови* (3.58), (3.59), (3.66), (3.72) *і нехай*

$$(\alpha_1 + h_1(\ell))(\alpha_2 + h_2(\ell)) \neq \beta_1\beta_2 \quad і \quad (\alpha_1 - h_1(\ell))(\alpha_2 - h_2(\ell)) \neq \beta_1\beta_2. \tag{3.97}$$

(i) Тоді СВПФ оператора $\mathcal{L}$ повна і мінімальна в $\mathfrak{H}$.

(ii) Припустимо додатково, що

$$p_1, p_2, h_1', h_2' \in L^\infty[0,\ell] \quad і \quad \beta_1 = \beta_2 = 0. \tag{3.98}$$

Тоді СВПФ оператора $\mathcal{L}$ є блочним базисом Ріса в $\mathfrak{H}$.

Доведення. **(i)** Розглянемо оператор $L_{C,D}(Q)$, визначений у пропозиції 3.12. Комбінуючи вирази (3.69) і (3.76) для матриць B, C, D з визначенням допоміжної матриці $T_A(C,D)$, отримуємо

$$\det T_B(C,D) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 + h_1(\ell) & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \alpha_2 + h_2(\ell) \end{pmatrix}$$
$$= (\alpha_1 + h_1(\ell))(\alpha_2 + h_2(\ell)) - \beta_1\beta_2. \tag{3.99}$$

Аналогічно маємо

$$\det T_{-B}(C,D) = (\alpha_1 - h_1(\ell))(\alpha_2 - h_2(\ell)) - \beta_1\beta_2. \tag{3.100}$$

З умов (3.97) випливає, що $\det T_{\pm B}(C,D) \neq 0$. Тому за наслідком 3.2 із [91], СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$ повна і мінімальна в $L^2([0,1];\mathbb{C}^4)$. Оскільки, за пропозицією 3.12, $\mathcal{L}$ є подібним до оператора $L_{C,D}(Q)$, то СВПФ оператора $\mathcal{L}$ повна і мінімальна в $\mathfrak{H}$.

(ii) Знову розглянемо оператор $L_{C,D}(Q)$, визначений у пропозиції 3.12. Оскільки $\beta_1 = \beta_2 = 0$ і виконано умову (3.97), то згідно з (3.69) і (3.76) матриці B, C, D мають блочну структуру, описану в (3.35)–(3.36), з $r = 2$. До того ж, з (3.98) випливає, що $Q \in L^\infty([0,1];\mathbb{C}^{4\times 4})$. Тому, комбінуючи теорему 3.6 з пропозицією 3.12, отримуємо бажане твердження при базисність. $\square$

Застосовуючи наслідок 2.18, ми можемо покращити теорему 3.14(i), вважаючи функцію $\widehat{Q}(\cdot)$ неперервною у точках 0, ℓ. Для простоти вважаємо, що $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Теорема 3.15. *Нехай функції ρ, I_ρ, K, EI, p_1, p_2, h_1, h_2 задовольняють умовам* (3.58), (3.59), (3.66) *і* (3.72), *і функції p_1, p_2, h_1', h_2' є неперервними у точках 0 і ℓ. Припустимо також, що*

$$\beta_1 = \beta_2 = 0, \quad |\alpha_1^\pm| + |\alpha_2^\pm| \neq 0 \quad i \quad |\alpha_j^\pm| + |p_j(\ell) \mp h_j'(\ell)| \neq 0, \quad j \in \{1,2\}, \tag{3.101}$$

де $\alpha_j^\pm := \alpha_j \pm h_j(\ell)$. Тоді СВПФ оператора $\mathcal{L}$ повна і мінімальна в $\mathfrak{H}$.

Доведення. Розглянемо оператор $L_{C,D}(Q)$, визначений у пропозиції 3.12. Оскільки $\rho, I_\rho \in C[0,\ell]$ і p_1, p_2, h_1', h_2' є неперервними у точках 0 і ℓ, то з (3.70)–(3.75) випливає, що матриця-функція $Q(\cdot)$ є неперервною у точках 0 і 1. Оскільки $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то блочно-матричні представлення (3.69) і (3.76) матриць B, C, D дозволяють застосувати наслідок 2.18 і лему 2.19. Перевіримо умови (2.152)–(2.155) леми 2.19. Порівнюючи (2.147) з (3.76), отримуємо

$$d_1 = \alpha_1 - h_1(\ell) = \alpha_1^-, \qquad d_2 = \alpha_1 + h_1(\ell) = \alpha_1^+, \tag{3.102}$$

$$d_3 = \alpha_2 - h_2(\ell) = \alpha_2^-, \qquad d_4 = \alpha_2 + h_2(\ell) = \alpha_2^+. \tag{3.103}$$

Тому умову (2.152) завжди виконано, оскільки $h_j(\ell) \neq 0$, $j \in \{1,2\}$. Умова (2.153) є еквівалентною до другої умови в (3.101). Далі, з (3.73) і (3.75) випливає, що

$$q_{12}(1) = \frac{p_1(\ell) - h_1'(\ell)}{-2iI_\rho(\ell)}, \quad q_{21}(1) = \frac{p_1(\ell) + h_1'(\ell)}{-2iI_\rho(\ell)}, \tag{3.104}$$

$$q_{34}(1) = \frac{p_2(\ell) - h_2'(\ell)}{-2i\rho(\ell)}, \quad q_{43}(1) = \frac{p_2(\ell) + h_2'(\ell)}{-2i\rho(\ell)}. \tag{3.105}$$

Тому умови (2.154) і (2.155) є еквівалентними до останньої умови в (3.101) для $j = 1$ і $j = 2$, відповідно. Тому, за лемою 2.19, умову (2.148) виконано і, за наслідком 2.18, СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$ повна і мінімальна в $L^2([0,1];\mathbb{C}^4)$. Тепер пропозиція 3.12 завершує доведення. □

Зауваження 3.16. *Головні результати цього підрозділу залишаються справедливими, якщо функція* $\nu(\cdot)$, *що задана формулою* (3.66), *задовольняє умові* $\nu(x) \neq 1$ *при* $x \in [0,\ell]$. *Ця умова забезпечує простоту спектра матриці* $\widetilde{B}(x)$ *при кожному* $x \in [0,\ell]$ *і часто накладається в інших роботах за тематикою. Щоб охопити цей випадок у рамках нашого підходу, треба отримати всі результати, починаючи з узагальнення теореми Біркгофа для асимптотичної поведінки розв'язків системи, для випадку несталої матриці* B. *Відзначимо також, що результати цього підрозділу охоплюють випадок* $\nu(x) \equiv 1$, *який часто не розглядається в літературі.*

Зауваження 3.17. ***(i)*** *У зв'язку з теоремою 3.14 розглянемо роботу [99], де оператор* $\mathcal{L}$ *був досліджений при таких умовах на параметри моделі:*

$$EI, K \in W^{3,2}[0,\ell], \quad \rho, I_\rho \in W^{4,2}[0,\ell], \quad p_1 = p_2 = 0, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0, \tag{3.106}$$

але без алгебраїчної умови (3.66). *Повнота СВПФ була стверджена в [99] при умові* (3.97) *і додатковій умові*

$$I_\rho(x)K(x) \neq \rho(x)EI(x), \quad x \in [0,\ell], \tag{3.107}$$

що в наших позначеннях означає $\nu(x) \neq 1$, $x \in [0,\ell]$. *На жаль, при доведенні повноти в [99] теорема Келдиша була застосована некоректно. А саме,* *представлення* $\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{L}_{00}^{-1}(I_{\mathfrak{H}} + T)$ *з [99], де* T *є обмеженим оператором скінченного рангу і* $\mathcal{L}_{00} = \mathcal{L}_{00}^{*}$*, не є коректним, оскільки воно призводить до включення* $\mathrm{dom}(\mathcal{L}) \subset \mathrm{dom}(\mathcal{L}_{00})$*, що виконується лише при* $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{00}$.

До того ж, при умовах (3.106), (3.107) *і* (3.97) *в [99] була стверджена базисність Ріса для СВПФ оператора* $\mathcal{L}$. *Доведення було базується на твердженні, що при накладених умовах власні числа оператора* $\mathcal{L}$ *є асимптотично простими і розділеними. Однак, це не так. Наприклад, якщо* $K \equiv EI \equiv \rho \equiv 1$, $I_\rho \equiv 4$, $\alpha_1 = 5/2$ *і* $\alpha_2 = 2$, *то згідно з теоремою 4.2 із [99], послідовність власних чисел оператора* $\mathcal{L}$ *розпадається на дві частини*

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{\pi n}{2} + \frac{i}{2}\ln 3 + O(n^{-1}) \quad i \quad \lambda_n^{(2)} = \pi n + \frac{i}{2}\ln 3 + O(n^{-1}), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{3.108}$$

Зрозуміло, що в цьому випадку власні числа оператора $\mathcal{L}$ *не є асимптотично простими і розділеними. Однак зауважимо, що згідно з теоремою 3.14(ii), СВПФ оператора* $\mathcal{L}$ *завжди є блочним базисом Ріса, якщо виконано умови* (3.58), (3.59), (3.66), (3.72), (3.97) *і* (3.98).

(ii) *У зв'язку з теоремою 3.14 ми також розглянемо роботу [111]. У цій роботі оператор* $\mathcal{L}$ *досліджувався при наступних більш обмежувальних умовах на параметри моделі:*

$$EI, K, \rho, I_\rho \ \ \text{є сталими}, \qquad p_1 = p_2 = 0, \tag{3.109}$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \geqslant 0, \qquad 4\alpha_1\alpha_2 \geqslant (\beta_1 + \beta_2)^2. \tag{3.110}$$

Остання умова в (3.110) *забезпечує дисипативність оператора* $\mathcal{L}$. *Повнота СВПФ оператора* $\mathcal{L}$ *була доведена в [111] при умовах* (3.110) *і* (3.97). *Тому, наша теорема 3.14(i) узагальнює цей результат на більш широкий клас граничних умов і поліпшує його у дисипативному випадку. Зауважимо також, що при додаткових умовах, що гарантують асимптотичну простоту і розділеність власних чисел оператора* $\mathcal{L}$, *у [111] було доведено, що СВПФ* *оператора $\mathcal{L}$ є базисом Ріса. До того ж, цей факт було використано, щоб показати експоненціальну стабільність задачі* (3.53)–(3.57).

3.3 Регулярність степенів диференціальних операторів

Метою цього підрозділу є вивчення деяких властивостей регулярних граничних умов для ЗДР. Розглянемо звичайний диференціальний оператор L у просторі $L_2(0,1)$, породжений диференціальним виразом

$$l(y) = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_0(x)y \tag{3.111}$$

і нормованими граничними умовами

$$U_\nu(y) \equiv U_{\nu 0}(y) + U_{\nu 1}(y) = 0, \qquad \nu \in \{1,\ldots,n\}, \qquad \text{де} \tag{3.112}$$

$$U_{\nu 0}(y) = \alpha_\nu y_0^{(k_\nu)} + \sum_{s=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu,s} y_0^{(s)}, \tag{3.113}$$

$$U_{\nu 1}(y) = \beta_\nu y_1^{(k_\nu)} + \sum_{s=0}^{k_\nu - 1} \beta_{\nu,s} y_1^{(s)}, \tag{3.114}$$

$$|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| \neq 0, \quad 0 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_n \leqslant n-1, \quad k_\nu < k_{\nu+2}, \tag{3.115}$$

$$y_0^{(s)} = d^s y(x)/dx^s|_{x=0}, \quad y_1^{(s)} = d^s y(x)/dx^s|_{x=1}. \tag{3.116}$$

Тут функції $p_s(x)$ є нескінченно диференційовними на відрізку $[0,1]$.

Ми вивчаємо залежність між властивостями регулярності оператора L і його натуральних степенів L^d, $d \in \mathbb{N}$. Аналогічне питання розглядається для властивості посиленої регулярності тих самих операторів.

Нагадаємо визначення регулярності нормованих граничних умов згідно з [42, розділ 2, §4]. Для цього введемо декілька позначень, які знадобляться нам у подальшому.

Для $n \in \mathbb{N}$ і $k \in \{0,1,2,\ldots,2n-1\}$ позначимо через $S_{n,k}$ сектор комплексної ρ-площини, що задається нерівністю $\frac{k\pi}{n} \leqslant \arg\rho \leqslant \frac{(k+1)\pi}{n}$.

Нехай $\omega_{n,k,1},\dots,\omega_{n,k,n}$ – всі різні корені n-ого степеня із -1, занумеровані таким чином, що при $\rho \in S_{n,k}$ маємо

$$\mathrm{Re}(\rho\,\omega_{n,k,1}) \leqslant \mathrm{Re}(\rho\,\omega_{n,k,2}) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{Re}(\rho\,\omega_{n,k,n}). \tag{3.117}$$

Введемо також таке позначення:

$$a_\nu = a_\nu(h) = \begin{cases} (\underbrace{\alpha_\nu,\dots,\alpha_\nu}_{\mu-1}, \alpha_\nu + \beta_\nu h, \underbrace{\beta_\nu,\dots,\beta_\nu}_{\mu-1}), & n = 2\mu - 1, \\ (\underbrace{\alpha_\nu,\dots,\alpha_\nu}_{\mu-1}, \alpha_\nu + \beta_\nu h, \alpha_\nu + \beta_\nu/h, \underbrace{\beta_\nu,\dots,\beta_\nu}_{\mu-1}), & n = 2\mu. \end{cases}$$

Будемо позначати p-тий елемент набору a_ν через $a_{\nu,p}$, або $a_{\nu,p}(h)$, якщо треба показати залежність від h. Тут $\nu \in \{1,\dots,n\}$.

Далі позначимо

$$\delta_{L,k}(h) = \det\left(a_{\nu,p}(h)\omega_{n,k,p}^{k_\nu}\right)_{\nu,p=1}^{n}. \tag{3.118}$$

Зрозуміло, що

$$\delta_{L,k}(h) = \begin{cases} \theta_{L,0,k} + \theta_{L,1,k}h, & n = 2\mu - 1, \\ \theta_{L,-1,k}/h + \theta_{L,0,k} + \theta_{L,1,k}h, & n = 2\mu, \end{cases}$$

де визначники $\theta_{L,j,k}$, $j \in \{-1,0,1\}$, не залежать від h, а залежать лише від коефіцієнтів α_ν і β_ν, $\nu \in \{1,\dots,n\}$, при старших похідних в умовах (3.113), (3.114).

Визначення 3.18. *Умови* (3.112) *називаються регулярними, якщо*

(*i*) *при непарному* n *числа* $\theta_{L,0,k}$ *і* $\theta_{L,1,k}$ *ненульові;*

(*ii*) *при парному* n *числа* $\theta_{L,-1,k}$ *і* $\theta_{L,1,k}$ *ненульові.*

Кажуть, що умови (3.112) *є посилено регулярними, якщо вони є регулярними і, додатково при парних* n, *маємо:* $\theta_{L,0,k}^2 \neq 4\theta_{L,1,k}\theta_{L,-1,k}$.

Дане визначення регулярності співпадає з класичним (див. [42, гл. 2, §4, п. 8]), але записано більш компактно. Як відомо (див. [42, гл. 2, §4, п. 8, стр. 67]), визначення регулярності не залежить від k.

Диференціальний оператор L, що породжений виразом (3.111) і регулярними (посилено регулярними) граничними умовами (3.112), ми будемо називати регулярним (посилено регулярним).

Основним результатом підрозділу є наступна теорема.

Теорема 3.19. *Нехай оператор L породжується диференціальним виразом (3.111) і граничними умовами (3.112), і $d \in \mathbb{N}$. Тоді оператори L і L^d є регулярними одночасно. Якщо n – парне, то оператори L і L^d є посилено регулярними одночасно. Якщо n – непарне, d – парне, а оператор L є регулярним, то оператор L^d, взагалі кажучи, не є посилено регулярним.*

Решта підрозділу присвячна доведенню теореми 3.19.

Зрозуміло, що оператор L^d задається диференціальним виразом

$$l_d(y) := \underbrace{l(l(\ldots l(}_{d} y) \ldots))$$

і граничними умовами

$$U_\nu(l_j(y)) = 0, \quad \nu \in \{1, \ldots, n\}, \quad j \in \{0, \ldots, d-1\}. \tag{3.119}$$

Оскільки коефіцієнти $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ є нескінченно диференційовними на відрізку $[0, 1]$, то

$$l_j(y) = y^{(nj)} + \sum_{s=0}^{nj-1} p_{j,s} y^{(s)}, \qquad j \in \{0, 1, \ldots, d-1\},$$

де $p_{j,s} \in C^\infty[0, 1]$.

Тому

$$U_{\nu 0}(l_j(y)) = \alpha_\nu \frac{d^{k_\nu}}{dx^{k_\nu}}\left(y^{(nj)} + \sum_{s=0}^{nj-1} p_{j,s} y^{(s)}\right)\Bigg|_{x=0} + \sum_{s=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu,s} \frac{d^s l_j(y)}{dx^s}\Bigg|_{x=0}$$
$$= \alpha_\nu y_0^{(nj+k_\nu)} + \sum_{s=0}^{nj+k_\nu-1} \widetilde{\alpha}_{\nu,s} y_0^{(s)}, \quad \nu \in \{1,\dots,n\},\ j \in \{0,\dots,d-1\}$$

для деяких коефіцієнтів $\widetilde{\alpha}_{\nu,s}$.

Аналогічно,

$$U_{\nu 1}(l_j(y)) = \beta_\nu y_1^{(nj+k_\nu)} + \sum_{s=0}^{nj+k_\nu-1} \widetilde{\beta}_{\nu,s} y_1^{(s)}, \quad \nu \in \{1,\dots,n\},\ j \in \{0,\dots,d-1\}$$

для деяких коефіцієнтів $\widetilde{\beta}_{\nu,s}$. Отримані рівності показують, що граничні умови $U_\nu(l_j(y))$, що занумеровані у порядку зростання j, а при фіксованому j – у порядку зростання ν, $\nu \in \{1,\dots,n\}$, $j \in \{0,1,\dots,d-1\}$, є нормованими.

Позначимо $N = nd$. Введемо, як і раніше, таке позначення:

$$\widetilde{a}_\nu = \widetilde{a}_\nu(h) = \begin{cases} (\underbrace{\alpha_\nu,\dots,\alpha_\nu}_{\widetilde{\mu}-1}, \alpha_\nu + \beta_\nu h, \underbrace{\beta_\nu,\dots,\beta_\nu}_{\widetilde{\mu}-1}), & N = 2\widetilde{\mu}-1, \\ (\underbrace{\alpha_\nu,\dots,\alpha_\nu}_{\widetilde{\mu}-1}, \alpha_\nu + \beta_\nu h, \alpha_\nu + \beta_\nu/h, \underbrace{\beta_\nu,\dots,\beta_\nu}_{\widetilde{\mu}-1}), & N = 2\widetilde{\mu}. \end{cases}$$

Будемо позначати p-ий елемент набору $\widetilde{a}_\nu$ через $\widetilde{a}_{\nu,p}$, або $\widetilde{a}_{\nu,p}(h)$, якщо треба показати залежність від h. Тут $\nu \in \{1,\dots,n\}$. Зо гляду на ці позначення, визначник $\delta_{L^d,0}(h)$ набуде вигляду

$$\delta_{L^d,0}(h) = \det\left(\widetilde{a}_{\nu,p}(h)\,\omega_{N,0,p}^{nj+k_\nu}\right)_{q,p=1}^{N}, \tag{3.120}$$

де числа j і ν однозначно знаходяться через число q із умов

$$q = nj + \nu, \quad j \in \{0,1,\dots,d-1\}, \quad \nu \in \{1,\dots,n\}.$$

Із нерівності (3.117) випливає, що $\omega_{N,0,p} = e^{\frac{i\pi(2\widetilde{\tau}_p - 1)}{N}}$, $p \in \{1,\dots,N\}$, де

$$(\widetilde{\tau}_1, \widetilde{\tau}_2, \widetilde{\tau}_3, \widetilde{\tau}_4, \widetilde{\tau}_5, \dots, \widetilde{\tau}_{N-1}, \widetilde{\tau}_N) = (\widetilde{\mu}, \widetilde{\mu}-1, \widetilde{\mu}+1, \widetilde{\mu}-2, \widetilde{\mu}+2, \dots, 1, N) \tag{3.121}$$

при непарному N, і

$$(\widetilde{\tau}_1, \widetilde{\tau}_2, \widetilde{\tau}_3, \widetilde{\tau}_4, \widetilde{\tau}_5, \ldots, \widetilde{\tau}_{N-1}, \widetilde{\tau}_N) = (\widetilde{\mu}, \widetilde{\mu}+1, \widetilde{\mu}-1, \widetilde{\mu}+2, \widetilde{\mu}-2, \ldots, 1, N) \quad (3.122)$$

при парному N.

Формули (3.121) і (3.122) можна записати незалежно від парності N таким чином

$$\begin{aligned} \widetilde{\tau}_{N-2p} &= N - p, \quad 0 \leqslant p \leqslant \frac{N-1}{2}, \\ \widetilde{\tau}_{N-2p-1} &= p + 1, \quad 0 \leqslant p \leqslant \frac{N}{2} - 1. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Із формул (3.121) і (3.122) видно, що $\{\widetilde{\tau}_1, \ldots, \widetilde{\tau}_n\} = \{1, \ldots, N\}$. Зрозуміло, що будь-яке натуральне число p від 1 до $N = nd$ можна єдиним чином представити у вигляді $p = nl+s$ і у вигляді $p = d(s-1)+l+1$, де $l \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, $s \in \{1, \ldots, n\}$. Тому існує така перестановка σ чисел від 1 до N, що

$$\widetilde{\tau}_{\sigma_p} = \widetilde{\tau}_{\sigma_{nl+s}} = d(s-1) + l + 1, \ l \in \{0, 1, \ldots, d-1\}, \quad s \in \{1, \ldots, n\}. \quad (3.124)$$

Тому

$$\omega^{nj}_{N,0,\sigma_p} = \omega^{nj}_{N,0,\sigma_{nl+s}} = \left(e^{\frac{\pi i(2\widetilde{\tau}_{\sigma_{nl+s}}-1)}{N}}\right)^{nj} = \left(e^{\frac{\pi i(2d(s-1)+2l+1)}{d}}\right)^{j} = \left(e^{\frac{\pi i(2l+1)}{d}}\right)^{j}. \quad (3.125)$$

Переставляючи стовбці визначника $\delta_{L^d,0}(h)$ за допомогою перестановки σ і враховуючи (3.125), отримуємо

$$\begin{aligned} \delta_{L^d,0}(h) &= \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \det\left(\widetilde{a}_{\nu,\sigma_p}\, \omega^{nj+k_\nu}_{N,0,\sigma_p}\right)^N_{q,p=1} \\ &= \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \det \underbrace{\left(\left(e^{\frac{\pi i(2l+1)}{d}}\right)^j \widetilde{a}_{\nu,\sigma_p}\, \omega^{k_\nu}_{N,0,\sigma_p}\right)^N_{q,p=1}}_{A} = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \det A, \end{aligned}$$

де $p = nl+s$, $l \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, $s \in \{1, \ldots, n\}$ і, як і раніше, $q = nj+\nu$, $j \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, $\nu \in \{1, \ldots, n\}$.

Нехай

$$A_l = \left(\widetilde{a}_{\nu,\sigma_{nl+s}}\, \omega^{k_\nu}_{N,0,\sigma_{nl+s}}\right)^n_{\nu,s=1}. \quad (3.126)$$

Тоді матрицю A можна представити у блочному вигляді

$$A = \left(\left(e^{\frac{\pi i(2l+1)}{d}}\right)^j A_l\right)_{j,l=0}^{d-1} = \left(\left(e^{\frac{\pi i(2l+1)}{d}}\right)^j I_n\right)_{j,l=0}^{d-1} \cdot \operatorname{diag}\left(A_0, A_1, \ldots, A_{d-1}\right),$$

де I_n – одинична матриця порядку n. Тому

$$\delta_{L^d,0}(h) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \det A = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot W^n \cdot \det A_0 \cdot \det A_1 \cdot \ldots \det A_{d-1}, \quad (3.127)$$

де

$$W = \det\left(\left(e^{\frac{\pi i(2l+1)}{d}}\right)^j\right)_{j,l=0}^{d-1}$$

є визначником Вандермонда.

Оскільки всі числа $e^{\frac{\pi i(2l+1)}{d}}$, $l \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, різні, то $W \neq 0$.

Оскільки $\omega_{N,0,\sigma_{nl+s}} = e^{\frac{\pi i(2d(s-1)+2l+1)}{N}} = e^{\frac{\pi i(2l+1-d)}{N}} e^{\frac{\pi i(2s-1)}{n}}$, то

$$\det A_l = \prod_{\nu=1}^{n} \left(e^{\frac{\pi i(2l+1-d)}{N}}\right)^{k_\nu} \cdot B_l, \quad B_l := \det\left(\widetilde{a}_{\nu,\sigma_{nl+s}} \left(e^{\frac{\pi i(2s-1)}{n}}\right)^{k_\nu}\right)_{\nu,s=1}^{n}. \quad (3.128)$$

Аналогічно формулі (3.123) маємо $\omega_{n,0,s} = e^{\frac{i\pi(2\tau_s-1)}{n}}$, де

$$\begin{aligned} \tau_{n-2s} &= n - s, \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{n-1}{2}, \\ \tau_{n-2s-1} &= s + 1, \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{n}{2} - 1. \end{aligned} \quad (3.129)$$

З іншого боку, $\omega_{n,2n-1,s} = e^{\frac{i\pi(2t_s-1)}{n}}$, де

$$\begin{aligned} t_{n-2s} &= s + 1, \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{n-1}{2}, \\ t_{n-2s-1} &= n - s, \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{n}{2} - 1. \end{aligned} \quad (3.130)$$

При $0 \leqslant l \leqslant \frac{d}{2} - 1$ переставимо стовбці визначника B_l за допомогою перестановки t, а при $\frac{d-1}{2} \leqslant l \leqslant d-1$ – за допомогою перестановки τ. Враховуючи формули для $\omega_{n,2n-1,s}$ і $\omega_{n,0,s}$, отримуємо

$$\begin{aligned} B_l &= \operatorname{sign}(t) \det\left(\widetilde{a}_{\nu,\sigma_{nl+t_s}} \omega_{n,2n-1,s}^{k_\nu}\right)_{\nu,s=1}^{n}, \quad 0 \leqslant l \leqslant \frac{d}{2} - 1, \\ B_l &= \operatorname{sign}(\tau) \det\left(\widetilde{a}_{\nu,\sigma_{nl+\tau_s}} \omega_{n,0,s}^{k_\nu}\right)_{\nu,s=1}^{n}, \quad \frac{d-1}{2} \leqslant l \leqslant d - 1. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Позначимо

$$\begin{aligned}\varphi_{l,s} &= \sigma_{nl+t_s}, \quad 0 \leqslant l \leqslant \frac{d}{2}-1,\\ \varphi_{l,s} &= \sigma_{nl+\tau_s}, \quad \frac{d-1}{2} \leqslant l \leqslant d-1.\end{aligned} \tag{3.132}$$

$$\begin{aligned}u_l &= 2n-1, \quad 0 \leqslant l \leqslant \frac{d}{2}-1,\\ u_l &= 0, \quad \frac{d-1}{2} \leqslant l \leqslant d-1,\end{aligned} \tag{3.133}$$

$$C_l = \det\left(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,s}}\, \omega_{n,u_l,s}^{k_\nu}\right)_{\nu,s=1}^{n}, \qquad 0 \leqslant l \leqslant d-1. \tag{3.134}$$

Підставляючи формули (3.128) в рівність (3.127), з огляду на визначення визначників B_l, формули (3.131) і позначення (3.132), (3.133) і (3.134), отримуємо

$$\delta_{L_d,0}(h) = \Omega \cdot C_0 C_1 \ldots C_{d-1}, \tag{3.135}$$

де $\Omega = \prod_{l=0}^{d-1}\prod_{\nu=0}^{n}\left(e^{\frac{\pi i(2l+1-d)}{N}}\right)^{k_\nu} \cdot \mathrm{sign}(\sigma)\cdot \mathrm{sign}(t)^{\lfloor \frac{d}{2}\rfloor}\cdot \mathrm{sign}(\tau)^{\lceil \frac{d}{2}\rceil}\cdot W^n$ – ненульова константа, що залежить лише від n і d.

Щоб встановити зв'язок між визначниками C_l і визначником $\delta_{L,k}(h)$, нам потрібен наступний результат.

Лема 3.20. *Для чисел $\varphi_{l,s}$ виконано такі рівності*

$$\begin{gathered}\varphi_{l,s} = d(s-1)+d-2l-1, \quad s = n-2p,\\ 0 \leqslant p \leqslant \frac{n-1}{2}, \quad 0 \leqslant l \leqslant \frac{d}{2}-1;\\[2ex] \varphi_{l,s} = d(s-1)+2l+2, \quad s = n-2p-1,\\ 0 \leqslant p \leqslant \frac{n}{2}-1, \quad 0 \leqslant l \leqslant \frac{d}{2}-1;\\[2ex] \varphi_{l,s} = d(s-1)+2l+2-d, \quad s = n-2p,\\ 0 \leqslant p \leqslant \frac{n-1}{2}, \quad \frac{d-1}{2} \leqslant l \leqslant d-1;\\[2ex] \varphi_{l,s} = d(s-1)+2d-2l+1, \quad s = n-2p-1,\\ 0 \leqslant p \leqslant \frac{n}{2}-1, \quad \frac{d-1}{2} \leqslant l \leqslant d-1.\end{gathered} \tag{3.136}$$

Доведення. Нехай ψ – перестановка, обернена до перестановки $\widetilde{\tau}$. Тоді із формули (3.123) випливає, що

$$\psi_{N-p} = N - 2p, \quad 0 \leqslant p \leqslant \frac{N-1}{2},$$
$$\psi_{p+1} = N - 2p - 1, \quad 0 \leqslant p \leqslant \frac{N}{2} - 1.$$

Або

$$\begin{aligned} \psi_q &= 2q - N, \quad \frac{N+1}{2} \leqslant q \leqslant N, \\ \psi_q &= N - 2q + 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant \frac{N}{2}. \end{aligned} \tag{3.137}$$

Із (3.124) випливає, що

$$\sigma_{nl+s} = \psi_{d(s-1)+l+1}, \qquad l \in \{0, 1, \ldots, d-1\}, \quad s \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3.138}$$

Тепер доведемо (3.136).

Нехай спочатку $0 \leqslant l \leqslant \frac{d}{2} - 1$. Тоді за формулами (3.132) і (3.138) маємо

$$\phi_{l,s} = \sigma_{nl+t_s} = \psi_{d(t_s-1)+l+1}. \tag{3.139}$$

Якщо $s = n - 2p$, де $0 \leqslant p \leqslant \frac{n-1}{2}$, то з огляду на (3.130) маємо

$$t_s = t_{n-2p} = p + 1.$$

Тому

$$d(t_s - 1) + l + 1 = d \cdot p + l + 1 \leqslant d \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{d}{2} = \frac{N}{2}.$$

Звідси, з огляду на (3.139) і другу рівність в (3.137), маємо

$$\begin{aligned} \phi_{l,s} = \psi_{d(t_s-1)+l+1} = \psi_{d \cdot p+l+1} &= N - 2(d \cdot p + l + 1) + 1 \\ &= d(n - 2p - 1) + d - 2l - 1 = d(s-1) + d - 2l - 1. \end{aligned}$$

Якщо ж $s = n - 2p - 1$, де $0 \leqslant p \leqslant \frac{n}{2} - 1$, то з (3.130) випливає, що

$$t_s = t_{n-2p-1} = n - p.$$

Тому

$$d(t_s - 1) + l + 1 = d(n - p - 1) + l + 1 \geqslant d\left(n - \frac{n}{2}\right) + 1 = \frac{N}{2} + 1.$$

Звідси, з огляду на (3.139) і першу рівність в (3.137), маємо

$$\phi_{l,s} = \psi_{d(t_s-1)+l+1} = \psi_{d(n-p-1)+l+1} = 2(d(n-p-1)+l+1) - N$$
$$= d(n-2p-2) + 2l + 2 = d(s-1) + 2l + 2.$$

Таким чином, випадок $0 \leqslant l \leqslant \frac{d}{2} - 1$ розібрано.

Випадок $\frac{d-1}{2} \leqslant l \leqslant d-1$ розбирається аналогічно, але з перестановкою t замість τ. $\square$

Із (3.136) видно, що при фіксованому $s \in \{1, \dots, n\}$ маємо

$$\{\varphi_{0,s}, \varphi_{1,s}, \dots, \varphi_{d-1,s}\} = \{d(s-1)+1, d(s-1)+2, \dots, d(s-1)+d\}. \quad (3.140)$$

Розглянемо окремо випадки парності чисел n і d.

1) n, d *– непарні.*

Нагадаємо, що в цьому випадку $n = 2\mu - 1$ і $N = nd = 2\widetilde{\mu} - 1$. Позначимо також $d = 2\eta - 1$. Звідси, зокрема, випливає, що

$$\widetilde{\mu} = d(\mu - 1) + \eta. \quad (3.141)$$

Нехай $\nu \in \{1, \dots, n\}$ – фіксоване число. Оскільки N є непарним, то за означенням набору $\widetilde{a}_\nu$

$$\widetilde{a}_{\nu,p} = \begin{cases} \alpha_\nu, & 1 \leqslant p \leqslant \widetilde{\mu} - 1, \\ \alpha_\nu + \beta_\nu h, & p = \widetilde{\mu}, \\ \beta_\nu, & \widetilde{\mu} + 1 \leqslant p \leqslant N. \end{cases} \quad (3.142)$$

З огляду на (3.140) і (3.141), при $l \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ виконано нерівності

$$\varphi_{l,s} \leqslant d\,s \leqslant d(\mu - 1) < \widetilde{\mu}, \quad 1 \leqslant s \leqslant \mu - 1,$$
$$\varphi_{l,s} \leqslant d(s-1) + 1 \geqslant d\,\mu + 1 > \widetilde{\mu}, \quad \mu + 1 \leqslant s \leqslant n.$$

Тому

$$\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,s}} = \alpha_\nu, \quad 1 \leqslant s \leqslant \mu - 1,$$
$$\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,s}} = \beta_\nu, \quad \mu + 1 \leqslant s \leqslant n.$$

Таким чином, при $l \in \{0, \dots, d-1\}$ маємо

$$(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,1}}, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{0,2}}, \dots, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,n}}) = (\underbrace{\alpha_\nu, \dots, \alpha_\nu}_{\mu-1},\ \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,\mu}},\ \underbrace{\beta_\nu, \dots, \beta_\nu}_{\mu-1}). \qquad (3.143)$$

З огляду на (3.140) існує така перестановка γ чисел від 0 до $d-1$, що

$$(\varphi_{\gamma_1,\mu}, \varphi_{\gamma_2,\mu}, \dots, \varphi_{\gamma_d,\mu}) = (d(\mu-1)+1, d(\mu-1)+2, \dots, d(\mu-1)+d). \quad (3.144)$$

Переставляючи рядки в (3.143) за допомогою перестановки γ і враховуючи (3.144), отримуємо при $l \in \{1, \dots, d\}$, що

$$\widetilde{a}_{\nu,\varphi_l} := (\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_l,1}}, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_l,2}}, \dots, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_l,n}}) = (\underbrace{\alpha_\nu, \dots, \alpha_\nu}_{\mu-1},\ \widetilde{a}_{\nu,d(\mu-1)+l},\ \underbrace{\beta_\nu, \dots, \beta_\nu}_{\mu-1}). \qquad (3.145)$$

З огляду на формули (3.142) і (3.141) маємо

$$\widetilde{a}_{\nu,d(\mu-1)+l} = \begin{cases} \alpha_\nu, & 1 \leqslant l < \eta, \\ \alpha_\nu + \beta_\nu h, & l = \eta, \\ \beta_\nu, & \eta < l \leqslant d. \end{cases} \qquad (3.146)$$

Позначимо

$$a_\nu^{[0]} = (\underbrace{\alpha_\nu, \dots, \alpha_\nu}_{\mu-1},\ \alpha_\nu,\ \underbrace{\beta_\nu, \dots, \beta_\nu}_{\mu-1}),$$
$$a_\nu^{[1]} = (\underbrace{\alpha_\nu, \dots, \alpha_\nu}_{\mu-1},\ \beta_\nu,\ \underbrace{\beta_\nu, \dots, \beta_\nu}_{\mu-1}).$$

Будемо позначати p-ті елементи наборів $a_\nu^{[0]}$ і $a_\nu^{[1]}$ через $a_{\nu,p}^{[0]}$ і $a_{\nu,p}^{[1]}$ відповідно.

З огляду на нові позначення і формулу (3.146), рівності (3.145) набудуть вигляду

$$\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_l}} = \begin{cases} a_\nu^{[0]}, & 1 \leqslant l < \eta, \\ a_\nu(h), & l = \eta, \\ a_\nu^{[1]}, & \eta < l \leqslant d. \end{cases} \qquad (3.147)$$

Із формули (3.118) і рівності $\delta_{L,k} = \theta_{L,0,k} + \theta_{L,1,k}h$ випливає, що

$$\begin{aligned} \theta_{L,0,k} &= \det\left(a^{[0]}_{\nu,p}\,\omega^{k_\nu}_{n,k,p}\right)^n_{\nu,p=1}, \\ \theta_{L,1,k} &= \det\left(a^{[1]}_{\nu,p}\,\omega^{k_\nu}_{n,k,p}\right)^n_{\nu,p=1}. \end{aligned} \tag{3.148}$$

Тепер, з огляду на формули (3.134), (3.147) і (3.148) маємо

$$C_{\gamma_l} = \det\left(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_l,s}}\,\omega^{k_\nu}_{n,u_{\gamma_l},s}\right)^n_{\nu,s=1} = \det\left(a^{[0]}_{\nu,s}\,\omega^{k_\nu}_{n,u_{\gamma_l},s}\right)^n_{\nu,s=1} = \theta_{L,0,u_{\gamma_l}}, \quad 1 \leqslant l < \eta, \tag{3.149}$$

$$C_{\gamma_\eta} = \det\left(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_\eta,s}}\,\omega^{k_\nu}_{n,u_{\gamma_\eta},s}\right)^n_{\nu,s=1} = \det\left(a_{\nu,s}(h)\,\omega^{k_\nu}_{n,u_{\gamma_\eta},s}\right)^n_{\nu,s=1} = \delta_{L,u_{\gamma_\eta}}(h), \tag{3.150}$$

$$C_{\gamma_l} = \det\left(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{\gamma_l,s}}\,\omega^{k_\nu}_{n,u_{\gamma_l},s}\right)^n_{\nu,s=1} = \det\left(a^{[1]}_{\nu,s}\,\omega^{k_\nu}_{n,u_{\gamma_l},s}\right)^n_{\nu,s=1} = \theta_{L,1,u_{\gamma_l}}, \quad \eta < l \leqslant d. \tag{3.151}$$

Позначимо для стислості $v_l = u_{\gamma_l}$, $l \in \{1, \ldots, d\}$. Підставляючи формули (3.149)–(3.151) в рівність (3.135), отримуємо

$$\delta_{L_d,0}(h) = \Omega \cdot \theta_{L,0,v_1} \cdots \theta_{L,0,v_{\eta-1}} \cdot \delta_{L,v_\eta}(h) \cdot \theta_{L,1,v_{\eta+1}} \cdots \theta_{L,1,v_d}. \tag{3.152}$$

Звідки

$$\begin{aligned} \theta_{L_d,0,0} &= \Omega \cdot \theta_{L,0,v_1} \cdots \theta_{L,0,v_{\eta-1}} \cdot \theta_{L,0,v_\eta} \cdot \theta_{L,1,v_{\eta+1}} \cdots \theta_{L,1,v_d}, \\ \theta_{L_d,1,0} &= \Omega \cdot \theta_{L,0,v_1} \cdots \theta_{L,0,v_{\eta-1}} \cdot \theta_{L,1,v_\eta} \cdot \theta_{L,1,v_{\eta+1}} \cdots \theta_{L,1,v_d}. \end{aligned} \tag{3.153}$$

Із формул (3.153) безпосередньо видно, що оператори L і L^d є регулярними одночасно.

2) *n – непарне, d – парне.*

В цьому випадку $n = 2\mu - 1$ і $N = nd = 2\widetilde{\mu}$. Позначимо також $d = 2\eta$. Звідси, зокрема, випливає, що $\widetilde{\mu} = d(\mu - 1) + \eta$.

Нехай $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ – фіксоване число. Оскільки N є парним, то за означенням набору $\widetilde{a}_\nu$ маємо

$$\widetilde{a}_{\nu,p} = \begin{cases} \alpha_\nu, & 1 \leqslant p \leqslant \widetilde{\mu} - 1, \\ \alpha_\nu + \beta_\nu h, & p = \widetilde{\mu}, \\ \alpha_\nu + \beta_\nu / h, & p = \widetilde{\mu} + 1, \\ \beta_\nu, & \widetilde{\mu} + 2 \leqslant p \leqslant N. \end{cases} \tag{3.154}$$

Тому, аналогічно попередньому випадку, для деякої перестановки γ чисел від 0 до $d-1$ виконано рівності

$$C_{\gamma_l} = \begin{cases} \theta_{L,0,u_{\gamma_l}}, & 1 \leqslant l \leqslant \eta - 1, \\ \delta_{L,u_{\gamma_\eta}}(h), & l = \eta, \\ \delta_{L,u_{\gamma_{\eta+1}}}\left(\frac{1}{h}\right), & l = \eta + 1, \\ C_{\gamma_l} = \theta_{L,1,u_{\gamma_l}}, & \eta + 2 \leqslant l \leqslant d. \end{cases} \tag{3.155}$$

Позначимо, як і раніше, $v_l = u_{\gamma_l}$, $l \in \{1, \ldots, d\}$. Підставляючи формули (3.155) в рівність (3.135), отримуємо

$$\delta_{L_d,0}(h) = \Omega \cdot \theta_{L,0,v_1} \cdots \theta_{L,0,v_{\eta-1}} \cdot \delta_{L,v_\eta}(h) \cdot \delta_{L,v_{\eta+1}}\left(\frac{1}{h}\right) \cdot \theta_{L,1,v_{\eta+2}} \cdots \theta_{L,1,v_d}. \tag{3.156}$$

Звідки

$$\begin{aligned} \theta_{L_d,-1,0} &= \Omega \cdot \theta_{L,0,v_1} \cdots \theta_{L,0,v_{\eta-1}} \cdot \theta_{L,0,v_\eta} \cdot \theta_{L,1,v_{\eta+1}} \cdot \theta_{L,1,v_{\eta+2}} \cdots \theta_{L,1,v_d}, \\ \theta_{L_d,1,0} &= \Omega \cdot \theta_{L,0,v_1} \cdots \theta_{L,0,v_{\eta-1}} \cdot \theta_{L,1,v_\eta} \cdot \theta_{L,0,v_{\eta+1}} \cdot \theta_{L,1,v_{\eta+2}} \cdots \theta_{L,1,v_d}. \end{aligned} \tag{3.157}$$

Із формул (3.157) безпосередньо видно, що оператори L і L^d є регулярними одночасно.

Приклад регулярних граничних умов непарного порядку, які в деякій парній степені не є посилено регулярними, дають умови першого порядку $y(0) = y(1)$. Граничні умови для квадрата відповідного оператора мають вигляд $y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1)$. Це так звані періодичні граничні умови. Вони, як відомо, є регулярними, але не є посилено регулярними.

3) *n – парне.*

В цьому випадку $n = 2\mu$ і $N = nd = 2\widetilde{\mu}$. Доведемо, що тоді

$$\varphi_{l,\mu} + \varphi_{l,\mu+1} = N + 1, \qquad 0 \leqslant l \leqslant d - 1. \tag{3.158}$$

Нехай спочатку $0 \leqslant l \leqslant \frac{d}{2} - 1$. Оскільки числа μ і $\mu + 1$ мають різну парність, то з огляду на (3.136) маємо

$$\varphi_{l,\mu} + \varphi_{l,\mu+1} = d(\mu - 1) + d\mu + (d - 2l - 1) + (2l + 2) = 2d\mu + 1 = N + 1.$$

Нехай тепер $\frac{d-1}{2} \leqslant l \leqslant d - 1$. Як і вище отримуємо

$$\varphi_{l,\mu} + \varphi_{l,\mu+1} = d(\mu - 1) + d\mu + (2l + 2 - d) + (2d - 2l + 1) = 2d\mu + 1 = N + 1.$$

Таким чином, рівність (3.158) доведено. Зрозуміло, що

$$\widetilde{\mu} = d\mu = d(\mu - 1) + \mu \in \{d(\mu - 1) + 1, d(\mu - 1) + 2, \ldots, d(\mu - 1) + d\}.$$

Тому з огляду на (3.140), при $s = \mu$ знайдеться таке $\widetilde{l} \in \{0, 1, \ldots, d - 1\}$, що $\varphi_{\widetilde{l},\mu} = \widetilde{\mu} = N/2$. Але тоді з огляду на (3.158) маємо $\varphi_{\widetilde{l},\mu+1} = N/2 + 1 = \widetilde{\mu} + 1$.

Нехай $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ – фіксоване число. Оскільки N є парним, то за означенням вектора $\widetilde{a}_\nu$ виконано рівності (3.154). Тому з огляду на (3.140) і рівності $\varphi_{\widetilde{l},\mu} = \widetilde{\mu}$ і $\varphi_{\widetilde{l},\mu+1} = \widetilde{\mu} + 1$, аналогічно попереднім випадкам, маємо

$$(\widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,1}}, \ldots, \widetilde{a}_{\nu,\varphi_{l,n}}) = \begin{cases} (\underbrace{\alpha_\nu, \ldots, \alpha_\nu}_{\mu-1},\ \alpha_\nu, \beta_\nu,\ \underbrace{\beta_\nu, \ldots, \beta_\nu}_{\mu-1}), & l \neq \widetilde{l}, \\ (\underbrace{\alpha_\nu, \ldots, \alpha_\nu}_{\mu-1},\ \alpha_\nu + \beta_\nu h, \alpha_\nu + \beta_\nu/h,\ \underbrace{\beta_\nu, \ldots, \beta_\nu}_{\mu-1}), & l = \widetilde{l}. \end{cases} \tag{3.159}$$

Враховуючи визначення визначників C_l, $\theta_{L,-1,k}$ і $\delta_{L,k}(h)$ і формулу (3.159), отримуємо

$$\begin{aligned} C_l &= \theta_{L,-1,u_l}, \quad l \neq \widetilde{l}, \\ C_l &= \delta_{L,u_l}(h), \quad l = \widetilde{l}. \end{aligned} \tag{3.160}$$

Підставляючи формулу (3.160) в (3.135), отримуємо

$$\delta_{L^d,0}(h) = \Omega \cdot \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq \widetilde{l}}}^{d-1} \theta_{L,-1,u_l} \cdot \delta_{L,u_{\widetilde{l}}}(h). \tag{3.161}$$

Із формули (3.161) безпосередньо видно, що оператори L і L^d є регулярними одночасно і посилено регулярними одночасно.

Таким чином, доведено, що у всіх трьох випадках оператори L і L^d є регулярними одночасно. Відносно посиленої регулярності виконуються всі сформульовані у теоремі твердження. Тому, теорему доведено.

Висновки до розділу 3

Розділ 3 присвячено вивченню базисності СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку і застосуванню попередніх результатів. У підрозділі 3.1 доведено деякі результати про базисність для обмеженого потенціала. У підрозділі 3.2 отримані результати про повноту і базисність СВПФ динамічного генератора моделі балки Тимошенка з послабленими умовами гладкості на параметри моделі. У підрозділі 3.3 отримано зв'язок між регулярністю диференціального оператора високого порядку на відрізку і регулярністю його натуральних степенів.

Слід зауважити, що для отримання блочної базисності Ріса використовується теорема Маркуса-Мацаєва (див. [38] і [37, §I.6]) про блочну базисність Ріса збуреного нормального оператора. Для вивчення динамічного генератора моделі балки Тимошенка він зводиться до системи ЗДР четвертого порядку, що дозволяє використати попередні результати, і у майбутньому дозволить отримати асимптотику спектра.

До основних результатів цього розділу належать:

– Теорема 3.6, де отримано достатні умови блочної базисності Ріса СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з обмеженою потенціальною матрицею і граничними умовами, що розпадаються. Раніше подібний результат був отриманий тільки для системи Дірака у [40].

– Наслідок 3.9, де отримано достатні умови блочної базисності Ріса СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з обмеженою потенціальною матрицею і періодичними граничними умовами. Раніше граничні задачі з такими умовами вивчалися лише для 2×2 системи Дірака.

– Теорема 3.14, де отримано достатні умови повноти і блочної базисності Ріса СВПФ динамічного генератора загальної моделі балки Тимошенка з регулярними граничними умовами при послаблених умовах гладкості на параметри моделі.

– Теорема 3.15, де отримано достатні умови повноти СВПФ динамічного генератора загальної моделі балки Тимошенка з нерегулярними граничними умовами.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [87], [29].

РОЗДІЛ 4

Спектральні властивості диференціальних операторів високого порядку на півосі

4.1 Прямування до нуля розв'язків ЗДР другого порядку

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + A(t)y = 0, \quad t \in [0, +\infty), \tag{4.1}$$

де $A =: A_R + iA_I$ і A_R – диференційовна функція на $[0, +\infty)$.

Метою данного розділу є отримання достатніх умов на комплекснозначний потенціал $A(t)$, при яких усі розв'язки рівняння (4.1) прямують до нуля на нескінченності. При цьому отримано два суттєво різних результати. Один з них узагальнює результат В. Б. Лідського, Б. В. Фєдосова із [23]. Другий результат використовує ВКБ-оцінки (див. [47, II.2]). Показано, що ці результати не випливають один з одного.

Головним результатом підрозділу є наступна теорема.

Теорема 4.1. *Нехай $A(t)$ задовольняє умовам*

$$A_R \ \text{ – диференційовна функція } \ i \quad A_R(0) > 0; \tag{4.2}$$

$$A_R'(t) \geqslant \alpha(t) A_R(t), \quad \text{де} \tag{4.3}$$

$$\alpha(t) \searrow 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad i \quad \int_0^\infty \alpha(t)\, dt = \infty; \tag{4.4}$$

$$C A_R'(t) \geqslant |A_I(t)| A_R(t) \quad \text{для деякої сталої} \quad C > 0. \tag{4.5}$$

Тоді всі розв'язки рівняння (4.1) прямують до нуля при $t \to \infty$, і

$$\int_0^\infty \alpha(t) |y(t)|^2\, dt < \infty \tag{4.6}$$

для будь-якого розв'язку $y(t)$ рівняння (4.1).

При доведенні цієї теореми ми будемо слідувати схемі доведення результата В. Б. Лідського, Б. В. Фєдосова із [23]. Для цього нам потрібні деякі допоміжні результати. В усіх лемах нижче ми вважаємо виконаними умови теореми 4.1.

Лема 4.2. *Нехай диференційовна функція* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *задовольняє умовам*

$$f(0) > 0, \tag{4.7}$$

$$f'(t) \geqslant \alpha(t) f(t), \quad \textit{де} \tag{4.8}$$

$$\alpha(t) \searrow 0 \quad \textit{і} \quad \int_0^\infty \alpha(t)\, dt = \infty. \tag{4.9}$$

Тоді $f(t) \nearrow +\infty$ *при* $t \to \infty$.

Доведення. Нехай існує t_0 таке, що $f(t_0) = 0$. Оберемо мінімальне таке t_0. Зрозуміло, що тоді $f(t) > 0$ при $t < t_0$. Тому, із умови (4.8) випливає, що $f'(t) \geqslant \alpha(t) f(t) > 0$ при $t < t_0$. Але за теоремою Лагранжа знайдеться точка $\xi \in (0, t_0)$ така, що $f'(\xi)(t_0 - 0) = f(t_0) - f(0) = -f(0) < 0$. Маємо протиріччя.

Тому, $f(t) \neq 0$ при $t > 0$. Звідки $f(t) > 0$ при $t > 0$. Тоді $f'(t) \geqslant \alpha(t) f(t) > 0$ при $t > 0$. Тому $f(t)$ зростає на $[0, \infty)$. Далі, з огляду на додатність функції $f(t)$ ми можемо поділити на неї в нерівності (4.8). Проінтегруємо отриману нерівність від 0 до x

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt \geqslant \int_0^x \alpha(t) dt$$

або

$$\ln f(x) - \ln f(0) \geqslant \int_0^x \alpha(t) dt.$$

А оскільки $\int_0^\infty \alpha(t) dt = \infty$, то $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. $\square$

Нехай $M > 1$ – деяке додатне число. Ми оберемо його пізніше. За лемою 4.2 знайдеться $t_0 > 0$ таке, що $A_R(t) \geqslant 2M$ при $t \geqslant t_0$. Розглянемо при $t \geqslant t_0$ функцію

$$B(t) := \frac{1}{A_R(t) - M}. \tag{4.10}$$

Зрозуміло, що

$$0 < \frac{1}{A_R(t)} \leqslant B(t) \leqslant \frac{2}{A_R(t)} \leqslant \frac{1}{M}, \qquad t \geqslant t_0. \tag{4.11}$$

Тому $B(t)$ є обмеженою, $\lim\limits_{t\to\infty} B(t) = 0$ і $B'(t) < 0$.

Теорему достатньо довести для базисних розв'язків, тобто для y_1, що задовольняє початковим умовам

$$y_1(t_0) = 0,\ y_1'(t_0) = 1, \tag{4.12}$$

і для y_2, що задовольняє початковим умовам

$$y_2(t_0) = 1,\ y_2'(t_0) = 0. \tag{4.13}$$

Всі інші розв'язки є лінійними комбинаціями базисних. Тому для них теорема також буде справедливою.

Лема 4.3. *Нехай $y(t)$ – базисний розв'язок рівняння* (4.1)*. Тоді функції $B|y'|^2$ і $A_R B|y|^2$ є обмеженими. Крім того, сходяться інтеграли*

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} B'|y|^2\,dt, \quad \int\limits_{t_0}^{\infty} B'|y'|^2\,dt \quad i \quad \int\limits_{t_0}^{\infty} B'|\overline{y}y'|\,dt.$$

Доведення. Помножимо (4.1) на $B\overline{y}'$ і проінтегруємо від t_0 до t

$$\int\limits_{t_0}^{t} B\overline{y}'y''\,ds + \int\limits_{t_0}^{t} AB\overline{y}'y\,ds = 0.$$

Інтегруючи частинами, отримуємо

$$B|y'|^2\Big|_{t_0}^{t} - \int\limits_{t_0}^{t} B\overline{y}''y'\,ds - \int\limits_{t_0}^{t} B'|y|^2\,ds$$
$$+ AB|y|^2\Big|_{t_0}^{t} - \int\limits_{t_0}^{t} AB\overline{y}y'\,ds - \int\limits_{t_0}^{t} (AB)'|y|^2\,ds = 0. \tag{4.14}$$

Враховуючи (4.1), маємо

$$\int\limits_{t_0}^{t} B\overline{y}''y'\,ds + \int_{t_0}^{t} AB\overline{y}y'\,ds = \int_{t_0}^{t} By'(\overline{y}'' + A\overline{y})\,ds$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} By'(-\overline{Ay} + A\overline{y})\,ds = 2i\int\limits_{t_0}^{t} A_I B\overline{y}y'\,ds. \quad (4.15)$$

Далі, помножимо (4.1) на $\overline{y}$ і проінтегруємо від t_0 до t

$$\int\limits_{t_0}^{t} y''\overline{y}\,ds + \int\limits_{t_0}^{t} A|y|^2\,ds = 0.$$

Інтегруючи частинами, отримуємо

$$y'\overline{y}\Big|_{t_0}^{t} = \int\limits_{t_0}^{t} \left(|y'|^2 - A|y|^2\right)\,ds.$$

Оскільки $y(t)$ – базисний розв'язок, то $y'(t_0)\overline{y(t_0)} = 0$. Враховуючи це, помножимо отриману рівність на i і візьмемо дійсну частину

$$\operatorname{Re} iy'\overline{y} = \int\limits_{t_0}^{t} A_I|y|^2\,ds. \quad (4.16)$$

Підставляючи (4.15) в (4.14), беручи дійсну частину в отриманій рівності і враховуючи (4.16) і той факт, що $(A_R B)' = MB'$, отримуємо

$$B|y'|^2 + A_R B|y|^2 - \int\limits_{t_0}^{t} B'|y'|^2\,ds - \int\limits_{t_0}^{t} B'|y'|^2\,ds - \int\limits_{t_0}^{t}(M-1)B'|y|^2\,ds$$

$$-\,2\int\limits_{t_0}^{t} A_I(s)B(s)\int_{t_0}^{s} A_I(\tau)|y(\tau)|^2\,d\tau\,ds = \text{const}. \quad (4.17)$$

Перші чотири доданки в (4.17) є додатними. Покажемо, що при відповідному виборі M сума двох останніх доданків також додатна. Позначимо для зручності $N = M - 1$. Маємо

$$-\int\limits_{t_0}^{t} NB'|y|^2\,ds - 2\int\limits_{t_0}^{t} A_I(s)B(s)\int\limits_{t_0}^{s} A_I(\tau)|y(\tau)|^2\,d\tau\,ds$$

$$= -\int\limits_{t_0}^{t} NB'|y|^2\,ds - 2\int\limits_{t_0}^{t} A_I(s)|y(s)|^2\int\limits_{s}^{t} A_I(\tau)B(\tau)\,d\tau\,ds$$

$$= -\int\limits_{t_0}^{t} |y|^2\left(NB'(s) + 2A_I(s)\int\limits_{s}^{t} A_I(\tau)B(\tau)\,d\tau\right)\,ds.$$

Достатньо показати, що вираз у дужках є від'ємним. З огляду на нерівності (4.5) і (4.11) маємо

$$\left|2A_I(s)\int\limits_{s}^{t} A_I(\tau)B(\tau)\,d\tau\right| \leqslant 2\left|A_I(s)\right|\int\limits_{s}^{t}\left|A_I(\tau)\right|B(\tau)\,d\tau$$

$$\leqslant 4C^2\frac{A_R'(s)}{A_R(s)}\int\limits_{s}^{\infty}\frac{A_R'(\tau)}{A_R^2(\tau)}\,d\tau = 4C^2\frac{A_R'(s)}{A_R(s)}\left(-\frac{1}{A_R}\bigg|_s^{\infty}\right)$$

$$= 4C^2\frac{A_R'(s)}{A_R^2(s)} \leqslant 4C^2\frac{A_R'(s)}{\left(A_R(s) - M\right)^2} = -4C^2B'(s).$$

Оскільки $B'(s) < 0$, то при $N > 4C^2$ вираз у дужках є від'ємним.

Ми отримали в (4.17) суму п'яти додатних доданків, які в сумі дають константу. Тому, вони є обмеженими.

Розглянемо тепер інтеграл $\int\limits_{t_0}^{t} B'|\overline{y}y'|\,ds$. Застосовуючи нерівність Коші-Буняковського, отримуємо

$$\int\limits_{t_0}^{t} |B'\overline{y}y'|\,ds \leqslant \sqrt{-\int\limits_{t_0}^{t} B'|y|^2\,ds}\cdot\sqrt{-\int\limits_{t_0}^{t} B'|y'|^2\,ds}.$$

Звідки і випливає збіжність інтеграла в лівій частині. $\square$

Із рівності (4.17) випливає, що

$$f(t) = B|y'|^2 + A_RB|y|^2 \tag{4.18}$$

є монотонно спадною додатною функцією. Отже, існує

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = a \geqslant 0.$$

Ми доведемо, що $a = 0$.

Лема 4.4. *Нехай*

$$\varphi(t) = B|y'|^2 - A_R B|y|^2. \tag{4.19}$$

Тоді інтеграл $\int_0^\infty \varphi(t)\,dt$ *сходиться.*

Доведення. Помножимо (4.1) на $B\overline{y}$ і проінтегруємо від t_0 до t:

$$\int\limits_{t_0}^{t} B\overline{y}y''\,ds + \int\limits_{t_0}^{t} AB|y|^2\,ds = 0.$$

Інтегруючи перший доданок частинами і переносячи вліво частину доданків, отримуємо

$$B\overline{y}y'\Big|_{t_0}^{t} - \int\limits_{t_0}^{t} B'\overline{y}y'\,ds = \int\limits_{t_0}^{t} B|y'|^2\,ds - \int\limits_{t_0}^{t} AB|y|^2\,ds. \tag{4.20}$$

З огляду на лему 4.3, інтеграл $\int\limits_{t_0}^{t} B'|\overline{y}y'|\,ds$ має границю при $t\to\infty$. Далі,

$$2B|\overline{y}y'| \leqslant \sqrt{A_R}B|y|^2 + \frac{B|y'|^2}{\sqrt{A_R}} = \frac{f(t)}{\sqrt{A_R}} \to 0, \quad \text{при} \quad t\to\infty,$$

оскільки $f(t)\to a$, а $\sqrt{A_R(t)}\to\infty$ при $t\to\infty$.

Отже, ліва частина в (4.20) має границю при $t\to\infty$. Беручи дійсну частину в обох частинах рівності (4.20), отримуємо, що інтеграл

$$\int\limits_{t_0}^{t} \left(B|y'|^2 - A_R B|y|^2\right)\,ds = \int_0^\infty \varphi(t)\,dt$$

має границю при $t\to\infty$. □

Тепер ми готові довести теорему 4.1.

Доведення теореми 4.1. Із (4.18) і (4.19) випливає, що

$$B|y'|^2 = \frac{1}{2}\left(f(t) + \varphi(t)\right).$$

З огляду на (4.3)

$$-B'(t) = \frac{A_R'(t)}{(A_R(t) - M)^2} \geqslant \frac{\alpha(t)}{A_R(t) - M} = \alpha(t)B(t).$$

Таким чином,

$$-\int_{t_0}^{t} B'|y'|^2\,ds \geqslant \int_{t_0}^{t} \alpha(t)B|y'|^2\,ds$$
$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \alpha(t)f(t)\,ds + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \alpha(t)\varphi(t)\,ds. \quad (4.21)$$

Інтеграл

$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)\varphi(t)\,dt$$

сходиться за ознакою Діріхле. Інтеграл

$$-\int_{t_0}^{\infty} B'|y'|^2\,dt$$

сходиться за лемою 4.3. Але тоді з (4.21) випливає збіжність інтеграла

$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)f(t)\,dt.$$

Оскільки $f(t)$ монотонно спадає, то $f(t) \geqslant a$. Тому

$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)f(t)\,dt \geqslant a\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)\,dt,$$

що можливо тільки при $a = 0$ з огляду на (4.4). Таким чином, $f(t) \to 0$. Із (4.18) випливає нерівність $A_RB|y|^2 \leqslant f(t)$. Звідки $A_RB|y|^2 \to 0$. Але $A_RB = \frac{A_R}{A_R - M} \to 1$, отже $|y|^2 \to 0$. Крім того, з (4.18) і збіжності інтеграла

$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)f(t)\,dt$$

випливає збіжність інтеграла

$$\int_{t_0}^{\infty} A_RB\alpha(t)|y|^2\,dt,$$

що еквівалентно збіжності інтеграла

$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)|y|^2\,dt,$$

оскільки підінтегральна функція додатна і $A_R B \to 1$. Теорему повністю доведено. $\square$

Використовуючи ВКБ-оцінки, у наступному результаті ми отримаємо інші достатні умові, при яких усі розв'язки рівняння (4.1) прямують до нуля на нескінченності.

Теорема 4.5. *Нехай $A(t)$ задовольняє умовам*

(i) $A(t) \in C^2(0, +\infty)$*;*

(ii) $A_R(t) > 0$ *при* $t > 0$ *і* $A_I(t)$ *не змінює знак на* $(0, \infty)$*;*

(iii) сходяться інтеграли

$$\int_0^{+\infty} \frac{|A''(t)|}{|A(t)|^{5/2}}\,dt \quad i \quad \int_0^{+\infty} \frac{|A'(t)|^2}{|A(t)|^{7/2}}\,dt; \tag{4.22}$$

(iv) $A(t) \to \infty$ *при* $t \to +\infty$*;*

(v)

$$\int_0^{+\infty} \frac{|A_I(t)|}{\sqrt{A_R(t)}}\,dt < +\infty. \tag{4.23}$$

Тоді всі розв'язки рівняння (4.1) *прямують до нуля на нескінченності.*

Доведення. Щоб застосувати ВКБ-оцінки, тобто наближені розв'язки рівняння (4.1), необхідно показати, що гілка $\sqrt{-A(t)}$ така, що $\operatorname{Re}\sqrt{-A(t)} \geqslant 0,\ t > 0$, є функцією класа C^2. Зрозуміло, що для цієї гілки

$$\operatorname{Re}\sqrt{-A} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{A_R^2 + A_I^2} - A_R\right)} = \frac{|A_I|}{\sqrt{2\left(\sqrt{A_R^2 + A_I^2} + A_R\right)}}, \tag{4.24}$$

$$\operatorname{Im}\sqrt{-A} = S_I\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{A_R^2 + A_I^2} + A_R\right)}, \tag{4.25}$$

де число $S_I = 1$, якщо $A_I(t) \geqslant 0,\ t > 0$, і $S_I = -1$ в іншому випадку.

Оскільки $A \in C^2(0, \infty)$ і $A_R(t) > 0,\ t > 0$, то функція

$$\sqrt{\sqrt{A_R^2 + A_I^2} + A_R}$$

є додатною функцією класу C^2 на $(0, \infty)$.

Оскільки $A_I(t)$ не змінює знак на $(0, \infty)$, то $|A_I| \in C^2(0, \infty)$.

Із двох останніх зауважень і формул (4.24), (4.25) випливає, що дана гілка $\sqrt{-A}$ є двічі неперервно-диференційовною на піввісі $(0, \infty)$. У всіх подальших формулах береться саме ця гілка $\sqrt{-A}$.

Введемо позначення

$$\alpha(t) = \frac{1}{8(-A)^{5/2}} \left(\left(\sqrt{-A}\right)'' \sqrt{-A} - \frac{5}{4} \left(\left(\sqrt{-A}\right)' \right)^2 \right). \tag{4.26}$$

$$\rho(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha(s)|\, ds. \tag{4.27}$$

$$\tilde{y}_1 = (-A(t))^{-1/4} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \sqrt{-A(s)}\, ds \right). \tag{4.28}$$

$$\tilde{y}_2 = (-A(t))^{-1/4} \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \sqrt{-A(s)}\, ds \right). \tag{4.29}$$

Тоді з [47] маємо, що якщо виконано умову

$$\rho(0, +\infty) < \infty, \tag{4.30}$$

то рівняння (4.1) має розв'язки y_1 і y_2 такі, що

$$\left| \frac{y_1(t)}{\tilde{y}_1(t)} - 1 \right| \leqslant 2(e^{2\rho(0,t)} - 1), \tag{4.31}$$

$$\left| \frac{y_2(t)}{\tilde{y}_2(t)} - 1 \right| \leqslant 2(e^{2\rho(t,+\infty)} - 1). \tag{4.32}$$

Перевіримо справедливість умови (4.30) у нашому випадку. Перетворивши вираз (4.26), отримуємо

$$\alpha(t) = \frac{iA''(t)}{16A^{5/2}(t)} - \frac{9i(A'(t))^2}{128A^{7/2}(t)}. \tag{4.33}$$

Підставляючи цю рівність в (4.27), отримуємо

$$\rho(t_0,t) \leqslant \frac{1}{16}\int_{t_0}^{t} \frac{|A''(s)|}{|A(s)|^{5/2}}\,ds + \frac{9}{128}\int_{t_0}^{t} \frac{|A'(s)|^2}{|A(s)|^{7/2}}\,ds.$$

Використовуючи (4.22) отримуємо, що виконано (4.30).

Покажемо тепер, що $\tilde{y}_1,\ \tilde{y}_2 \to 0$, при $t \to \infty$. З огляду на (4.24) і (4.23) маємо

$$\left|\exp\left(\int_0^\infty \sqrt{-A(t)}\,dt\right)\right| = \exp\left(\int_0^\infty \operatorname{Re}\sqrt{-A(t)}\,dt\right) \leqslant \exp\left(\int_0^\infty \frac{|A_I(t)|}{2\sqrt{A_R(t)}}\,dt\right) < +\infty.$$

Далі, враховуючи (4.28) і (4.29), а також те, що $A(t) \to \infty$, отримуємо, що $\tilde{y}_1,\ \tilde{y}_2 \to 0$ при $t \to \infty$. Звідси з огляду на властивості (4.31) і (4.32) і нерівність (4.30), маємо, що $y_1,\ y_2 \to 0$ при $t \to \infty$. Ці розв'язки є базисними, тому теорема є справедливою для всіх розв'язків рівняння (4.1). $\square$

Тепер ми покажемо, що не одна з доведених теорем не є наслідком іншої.

Відразу зауважимо, що якщо виконано всі умови теореми 4.1, то умову (4.23) теореми 4.5 виконано автоматично. Дійсно,

$$\int_0^\infty \frac{|A_I(t)|}{\sqrt{A_R(t)}}dt \leqslant C\int_0^\infty \frac{A_R'(t)}{A_R(t)^{3/2}}dt = \frac{-C}{\sqrt{A_R(t)}}\bigg|_0^\infty = \frac{C}{\sqrt{A_R(0)}} < \infty,$$

оскільки $A_R(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Якщо $A \in C^2(0,+\infty)$ і A_I не змінює знак на $(0,\infty)$, то всі умови теореми 4.5, окрім умови (4.22) також виконано. Тому порушуватися може тільки умова (4.22).

Розглянемо дійсну функцію

$$A_1(t) = \int\limits_0^t (2+\sin e^s)\,ds.$$

Покажемо, що A_1 задовольняє всім умовам теореми 4.1, але при цьому не задовольняє умові (4.22). Зрозуміло, що

$$A_1(t) \nearrow +\infty \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad t \leqslant A_1(t) \leqslant 3t, \quad 1 \leqslant A_1'(t) \leqslant 3. \tag{4.34}$$

Покладемо

$$\alpha(t) = \frac{1}{3t} \searrow 0. \tag{4.35}$$

Тоді з (4.34) і (4.35) випливає, що

$$\alpha(t) \leqslant \frac{A_1'(t)}{A_1(t)} \quad \text{і} \quad \int\limits_{t_0}^{+\infty} \alpha(t)\,dt = +\infty.$$

Таким чином $A_1(t)$ дійсно задовольняє умовам теореми 4.1. З іншого боку

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{|A_1''(t)|}{|A_1(t)|^{5/2}}\,dt \geqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{e^t\,|\cos e^t|}{t^{5/2}}\,dt = \int\limits_{t_1}^{+\infty} \frac{|\cos\tau|}{\ln^{5/2}\tau}\,d\tau = +\infty,$$

тобто умова (4.22) не виконується.

Тепер розглянемо функцію

$$A_2(t) = t^3 + it^{-1/4}.$$

Покажемо, що A_2 задовольняє всім умовам теореми 4.5, але при цьому не задовольняє умові (4.5) теореми 4.1. Треба перевірити лише умови (4.22) і (4.23). Зрозуміло, що

$$\frac{|A_2''(t)|}{|A_2(t)|^{5/2}} = \frac{\left|6t + 5i/16 \cdot t^{-9/4}\right|}{\left|t^3 + it^{-1/4}\right|^{5/2}} \sim \frac{6t}{t^{15/2}} = \frac{6}{t^{13/2}} \quad \text{при} \quad t \to +\infty;$$

і

$$\frac{|A_2'(t)|^2}{|A_2(t)|^{7/2}} = \frac{\left|3t^2 - i/4 \cdot t^{-5/4}\right|^2}{\left|t^3 + it^{-1/4}\right|^{7/2}} \sim \frac{9t^4}{t^{21/2}} = \frac{9}{t^{13/2}} \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Звідси випливає, що інтеграли в (4.22) сходяться.

Далі маємо $A_R = \operatorname{Re} A_2 = t^3$ і $A_I = \operatorname{Im} A_2 = t^{-1/4}$. Тому

$$\frac{|A_I(t)|}{\sqrt{A_R(t)}} = \frac{1}{t^{5/4}},$$

звідки випливає, що інтеграл в (4.23) також сходиться. З іншого боку

$$\frac{A_R(t)|A_I(t)|}{A_R'(t)} = \frac{t^{3/4}}{3} \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

тому умову (4.5) не виконано.

Нарешті, розглянемо дійсну функцію

$$A_3(t) = 1 + t + \sin t.$$

Оскільки $A_3'(t) = 1 + \cos t = 0$ при $t = \pi(2n+1),\ n \in \mathbb{N}$, то умови (4.3) і (4.4) не можуть виконуватися одночасно, тому теорема 4.1 не може бути застосована в цьому випадку. З іншого боку, легко перевірити всі умови теореми 4.5. Зауважимо, що теорема Сансоне також не може бути застосована для такої функції $A(t)$. Дійсно, якщо взяти $t_n = an$, де $a > 2\pi$, то послідовність $\{t_n\}$ задовольняє умові (1.8), але будь-який відрізок $[t_{n-1}, t_n]$ буде містити нуль похідної. Тому ряд в (1.9) буде нульовим.

Ми бачимо, що теореми 4.1 і 4.5 не випливають одна з одної, а доповнюють одна одну навіть у випадку дійсного потенціала. При цьому, теорема 4.5, скоріш за все, є новою навіть у випадку $A = \overline{A}$.

4.2 Спектральні функції диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами

Нехай $\mathcal{P}$ – мінімальний симетричний оператор, породжений у $L^2(0,\infty)$ диференціальним виразом

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(p_{n-k}(x) y^{(k)} \right)^{(k)}. \tag{4.36}$$

Припустимо, що його індекси дефекту рівні: $n_\pm(\mathcal{P}) = n$. Добре відомо [42, теорема VI.21.2], [21, теорема II.9.1], що будь-яке його власне самоспряжене розширення $\widetilde{\mathcal{P}}$ є унітарно еквівалентним оператору множення Λ_σ у просторі $L^2_\sigma(\mathbb{R})$, де $\Lambda_\sigma : f(x) \to xf(x)$, $f \in L^2_\sigma(\mathbb{R})$, і $\sigma(\cdot)$ – неспадна, неперервна зліва, самоспряжена $n \times n$ матриця-функція. Матриця-функція $\sigma(\cdot)$ називається спектральною функцією оператора $\widetilde{\mathcal{P}}$ і співпадає зі спектральною функцією характеристичної матриці оператора $\widetilde{\mathcal{P}}$, яка, в свою чергу, може бути знайдена за допомогою функції Ґріна оператора $\widetilde{\mathcal{P}}$ (див. [42, VI.21.4]).

Мета цього підрозділу – знайти явний вигляд спектральної функції для розширень Фрідріхса (так званого "жорсткого" розширення) A_F і Крейна A_K (див. [1, §109] для точних означень) мінімального симетричного оператора A, породженого в $L^2(0,\infty)$ диференціальним виразом

$$l(y) := (-1)^n y^{(2n)}(\cdot). \tag{4.37}$$

Добре відомо, що розширення Фрідріхса A_F оператора A визначається граничними умовами $y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)} = 0$, і буде показано, що розширення Крейна A_K визначається граничними умовами $y^{(n)}(0) = \ldots = y^{(2n-1)} = 0$.

Для знаходження спектральної функції буде використано теорію граничних трійок і відповідних функцій Вейля (див. означення 4.8 і 4.9 нижче). Цей новий підхід до теорії розширень симетричних операторів був розвинений протягом трьох останніх десятиліть (див. [7, 65, 11] і посилання там). Добре відомо [11], що характеристична матриця самоспряженого розширення $\widetilde{A}$ оператора A співпадає з функцією Вейля відповідної граничної трійки. Це дозволило знайти характеристичну матрицю і її спектральну функцію простіше, ніж класичним методом.

Сформулюємо головні результати цього підрозділу.

Теорема 4.6. *Характеристична матриця (функція Вейля) розширення Фрідріхса A_F оператора A має вигляд*

$$M_F(\lambda) = \left(\frac{-C_j \cdot C_k}{\sin((j+k+1)\alpha)} \cdot \left(\sqrt[2n]{-\lambda} \right)^{j+k+1} \right)_{j,k=0}^{n-1}, \quad \operatorname{Im}\lambda > 0, \tag{4.38}$$

де

$$C_0 := 1, \qquad C_k := \prod_{p=1}^{k} \operatorname{ctg}(p\alpha), \quad \alpha = \frac{\pi}{2n}, \quad k \in \{1, \ldots, n-1\}, \tag{4.39}$$

і

$$\sqrt[2n]{-\lambda} := \sqrt[2n]{r} \cdot e^{\frac{i(\varphi-\pi)}{2n}}, \qquad \lambda = re^{i\varphi}, \quad 0 < \varphi < \pi. \tag{4.40}$$

Відповідна спектральна функція має вигляд

$$\sigma_F(t) = \frac{2n}{\pi}\left(\frac{C_j \cdot C_k}{2n+1+j+k} \cdot t^{\frac{2n+1+j+k}{2n}}\right)_{j,k=0}^{n-1}, \quad t \geqslant 0, \tag{4.41}$$

$$\sigma_F(t) = 0, \quad t < 0. \tag{4.42}$$

Теорема 4.7. *Розширення Крейна A_K оператора A визначається граничними умовами*

$$y^{(n)}(0) = y^{(n+1)}(0) = \ldots = y^{(2n-1)} = 0. \tag{4.43}$$

Його характеристична матриця має вигляд

$$M_K(\lambda) = \left(\frac{-C_j \cdot C_k}{\sin((j+k+1)\alpha)} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt[2n]{-\lambda}}\right)^{j+k+1}\right)_{j,k=0}^{n-1}, \quad \operatorname{Im}\lambda > 0. \tag{4.44}$$

Відповідна спектральна функція має вигляд

$$\sigma_K(t) = \frac{2n}{\pi}\left((-1)^{j+k}\frac{C_j \cdot C_k}{2n-1-j-k} \cdot t^{\frac{2n-1-j-k}{2n}}\right)_{j,k=0}^{n-1}, \quad t \geqslant 0, \tag{4.45}$$

$$\sigma_K(t) = 0, \quad t < 0. \tag{4.46}$$

Введемо необхідні означення теорії граничних трійок.

Нехай $F(z)$ – $n \times n$ матриця-функція визначена на $\mathbb{C}_+ := \{\lambda : \operatorname{Im}\lambda > 0\}$. Вона називається R-функцією (або функцією Неванлінни), якщо вона голоморфна в $\mathbb{C}_+$ і $\operatorname{Im} F(z) \geqslant 0$, $z \in \mathbb{C}_+$.

Кожна R-функція допускає наступне інтегральне представлення

$$F(z) = A + zB + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\right)d\sigma(t), \quad z \in \mathbb{C}_+, \tag{4.47}$$

де $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – самоспряжені матриці, $B \geqslant 0$ і $\sigma(t)$ є неспадною, неперервною зліва, самоспряженою $n \times n$ матрицею-функцією, для якої сходиться матричний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma(t)}{1+t^2}$. Матриця-функція $\sigma(\cdot)$ називається спектральною функцією функції $F(\cdot)$. Зауважимо, що спектральна функція $\sigma(\cdot)$ функції $F(\cdot)$ може бути отримана за допомогою оберненої формули Стілтьєса:

$$\frac{1}{2}(\sigma(t+0)+\sigma(t)) - \frac{1}{2}(\sigma(s+0)+\sigma(s)) = \frac{1}{\pi}\lim_{y\downarrow 0}\int_s^t \operatorname{Im}(F(x+iy))dx, \quad s,t \in \mathbb{R}. \tag{4.48}$$

Нехай A – замкнений симетричний оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ з рівними індексами дефекту $n_+(A) = n_-(A)$.

Визначення 4.8. ([7]) *Трійка* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, *що складається з допоміжного гільбертового простору* $\mathcal{H}$ *і лінійних відображень*

$$\Gamma_j : \mathrm{dom}(A^*) \longrightarrow \mathcal{H}, \quad j \in \{0, 1\}, \tag{4.49}$$

називається граничною трійкою спряженого оператора A^*, *якщо виконано наступні дві умови:*

(i) має місце друга формула Гріна:

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g) - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g), \quad f, g \in \mathrm{dom}(A^*), \tag{4.50}$$

(ii) наступне відображення є сюр'єктивним:

$$\Gamma : \mathrm{dom}(A^*) \longrightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \quad \Gamma f := \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\}. \tag{4.51}$$

Легко бачити, що для кожного самоспряженого розширення $\widetilde{A}$ оператора A існує (не єдина) гранична трійка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ така, що

$$\mathrm{dom}(\widetilde{A}) = \ker(\Gamma_0).$$

Будемо говорити, що така трійка Π відповідає оператору $\widetilde{A}$.

Визначення 4.9. ([65, 11]) *Нехай* $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– гранична трійка оператора* A^* *і* $A_0 := A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_0)$. *Функція Вейля оператора* A, *що відповідає граничній трійці* $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, *це єдине відображення* $M(\cdot) : \rho(A_0) \longrightarrow [\mathcal{H}]$, *що задовольняє*

$$\Gamma_1 f_z = M(z)\Gamma_0 f_z, \quad f_z \in \mathfrak{N}_z := \ker(A^* - zI), \quad z \in \rho(A_0). \tag{4.52}$$

Відомо (див. [65]), що це неявне визначення функції Вейля є коректним, і функція Вейля $M(\cdot)$ є R-функцією, що задовольняє умові $0 \in \rho(\mathrm{Im}(M(i)))$.

Тому, якщо $\dim \mathcal{H} < \infty$, то вона допускає інтегральне представлення (4.47), де функція $\sigma_M(\cdot)$ може бути знайдена за допомогою (4.48).

Перейдемо до доведень основних результатів. Для цього нам потрібні деякі допоміжні результати.

Лема 4.10. *Нехай* $\operatorname{Im}\lambda > 0$ *і* $\lambda = re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$. *Тоді*

$$\mathfrak{N}_\lambda = \operatorname{span}\{y_k(\cdot,\lambda)\}_{k=0}^{n-1}, \quad y_k(x,\lambda) := e^{\omega_k \rho x}, \tag{4.53}$$

де $\rho := i\sqrt[2n]{\lambda} := \sqrt[2n]{r}\cdot e^{\frac{(\pi n+\varphi)i}{2n}}$ *і* $\omega_k := e^{\frac{i\pi k}{n}}$.

Доведення. Система $\{y_k(\cdot,\lambda)\}_{k=0}^{2n-1}$ є фундаментальною системою розв'язків рівняння $(-1)^n y^{(2n)} = \lambda y$ при $\lambda \neq 0$. Для $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ маємо

$$\operatorname{Re}(\omega_k\rho) = \sqrt[2n]{r}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2n} + \frac{\pi k}{n}\right) < 0. \tag{4.54}$$

Тому $y_k(\cdot,\lambda) \in \mathfrak{N}_\lambda$, $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Оскільки $\dim\mathfrak{N}_\lambda = n$ і функції $y_k(\cdot,\lambda)$ лінійно незалежні, то $\mathfrak{N}_\lambda = \operatorname{span}\{y_k(\cdot,\lambda)\}_{k=0}^{n-1}$, що завершує доведення. $\square$

Нехай $x_0,\ldots,x_{n-1} \in \mathbb{C}$. Покладемо

$$\operatorname{Vand}(x_0,\ldots,x_{n-1}) := (x_k^{n-1-j})_{j,k=0}^{n-1} = \begin{pmatrix} x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.55}$$

Визначник цієї матриці співпадає з визначником Вандермонда:

$$\det(\operatorname{Vand}(x_0,\ldots,x_{n-1})) = \det\left((x_k^{n-1-j})_{j,k=0}^{n-1}\right) = \prod_{0\leqslant j<k<n}(x_j - x_k). \tag{4.56}$$

Далі покладемо

$$\operatorname{codiag}(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}) = \operatorname{codiag}(x_j)_{j=0}^{n-1} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x_0 \\ 0 & 0 & \cdots & x_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ x_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.57}$$

Зрозуміло, що

$$\begin{aligned}\operatorname{codiag}(x_j)_{j=0}^{n-1}\cdot(a_{j,k})_{j,k=0}^{n-1} &= (x_j a_{n-1-j,k})_{j,k=0}^{n-1}, &(4.58)\\ (a_{j,k})_{j,k=0}^{n-1}\cdot\operatorname{codiag}(x_k)_{k=0}^{n-1} &= (a_{j,n-1-k}x_{n-1-k})_{j,k=0}^{n-1}. &(4.59)\end{aligned}$$

Доведення теореми 4.6. Трійка $\Pi=\{\mathbb{C}^n,\Gamma_0,\Gamma_1\}$ з

$$\begin{aligned}\Gamma_0 y &:= \operatorname{col}\left(y^{(n-1)}(0),\dots,y'(0),y(0)\right), &(4.60)\\ \Gamma_1 y &:= \operatorname{col}\left(y^{(n)}(0),-y^{(n+1)}(0),\dots,(-1)^{n-1}y^{(2n-1)}(0)\right), &(4.61)\end{aligned}$$

є граничною трійкою для спряженого оператора A^* (див. [65]). Зрозуміло, що вона відповідає оператору A_F. Тому характеристична матриця оператора A_F співпадає із функцією Вейля $M_F(\lambda)$ оператора A, що відповідає трійці Π.

Із $y_k^{(j)}(0,\lambda)=(\rho\cdot\omega_k)^j$ випливає, що

$$\begin{aligned}N_0(\lambda) &:= \begin{pmatrix}\Gamma_0 y_0 & \dots & \Gamma_0 y_{n-1}\end{pmatrix} = \left((\rho\cdot\omega_k)^{n-1-j}\right)_{j,k=0}^{n-1}. &(4.62)\\ N_1(\lambda) &:= \begin{pmatrix}\Gamma_1 y_0 & \dots & \Gamma_1 y_{n-1}\end{pmatrix} = \left((-1)^j(\rho\cdot\omega_k)^{n+j}\right)_{j,k=0}^{n-1}. &(4.63)\end{aligned}$$

Покладемо

$$V := (v_{jk})_{j,k=0}^{n-1} := (\omega_k^{n-1-j})_{j,k=0}^{n-1} = \operatorname{Vand}(\omega_0,\dots,\omega_{n-1}). \qquad (4.64)$$

Оскільки числа $\omega_0,\dots,\omega_{n-1}$ різні, то із (4.56) випливає, що V – невироджена матриця. Покладемо $V^{-1}=:(\widetilde{v}_{jk})_{j,k=0}^{n-1}$. Тоді за лемою 4.10, ми маємо для функції Вейля $M_F(\lambda)$:

$$\begin{aligned}M_F(\lambda)=N_1(\lambda)\cdot N_0^{-1}(\lambda) &= \left((-1)^j(\rho\cdot\omega_p)^{n+j}\right)_{j,p=0}^{n-1}\cdot\left(\rho^{k+1-n}\cdot\widetilde{v}_{pk}\right)_{p,k=0}^{n-1}\\ &= \left((-1)^j\rho^{j+k+1}\sum_{p=0}^{n-1}\omega_p^{n+j}\cdot\widetilde{v}_{pk}\right)_{j,k=0}^{n-1}. &(4.65)\end{aligned}$$

Нехай V_{jk} – алгебраїчне доповнення елемента v_{jk} матриці V. Комбінуючи правило Крамера з розкладенням визначника по k-му рядку, отримуємо

$$\sum_{p=0}^{n-1}\omega_p^{n+j}\cdot\widetilde{v}_{pk}=\frac{1}{\det(V)}\sum_{p=0}^{n-1}\omega_p^{n+j}V_{kp}=\frac{\det\left(V_j^{(k)}\right)}{\det(V)}, \qquad (4.66)$$

де матриця $V_j^{(k)}$ отримана із матриці V заміною рядка $(\omega_p^{n-1-k})_{p=0}^{n-1}$ на рядок $(\omega_p^{n+j})_{p=0}^{n-1}$. Оскільки $\omega_p^q = e^{\frac{\pi i p q}{n}} = \omega_q^p$, то матриця $V_j^{(k)}$ є симетричною до матриці

$$\mathrm{Vand}(\omega_0, \ldots, \omega_{n-k-2}, \omega_{n+j}, \omega_{n-k}, \ldots, \omega_{n-1})$$

відносно косої діагоналі. Тому

$$\det\left(V_j^{(k)}\right) = \det\left(\mathrm{Vand}(\omega_0, \ldots, \omega_{n-k-2}, \omega_{n+j}, \omega_{n-k}, \ldots, \omega_{n-1})\right). \tag{4.67}$$

Комбінуючи (4.56) з (4.67) отримуємо

$$\frac{\det\left(V_j^{(k)}\right)}{\det(V)} = \prod_{\substack{p=0 \\ p\neq n-1-k}}^{n-1} \frac{\omega_{n+j} - \omega_p}{\omega_{n-1-k} - \omega_p}.$$

Оскільки $\omega_q - \omega_p = 2i\varepsilon^{p+q}\sin((q-p)\alpha)$, де $\alpha = \frac{\pi}{2n}$ і $\varepsilon = e^{i\alpha}$, то

$$\begin{aligned}
\frac{\det\left(V_j^{(k)}\right)}{\det(V)} &= \varepsilon^{(j+k+1)(n-1)} \cdot \prod_{\substack{p=0 \\ p\neq n-1-k}}^{n-1} \frac{\sin((n+j-p)\alpha)}{\sin((n-1-k-p)\alpha)} \\
&= \frac{\varepsilon^{(j+k+1)(n-1)}}{\sin((j+k+1)\alpha)} \cdot \frac{\prod_{p=0}^{n-1}\cos((j-p)\alpha)}{\prod_{p=1}^{n-1-k}\sin p\alpha \cdot \prod_{p=1}^{k}(-\sin p\alpha)} \\
&= \frac{(-1)^k\varepsilon^{(j+k+1)(n-1)}}{\sin((j+k+1)\alpha)} \cdot \frac{\prod_{p=1}^{j}\cos p\alpha \cdot \prod_{p=1}^{n-1-j}\cos p\alpha}{\prod_{p=1}^{k}\sin p\alpha \cdot \prod_{p=1}^{n-1-k}\sin p\alpha} \\
&= \frac{(-1)^k\varepsilon^{(j+k+1)(n-1)}}{\sin((j+k+1)\alpha)} \cdot \prod_{p=1}^{k}\operatorname{ctg} p\alpha \cdot \prod_{p=1}^{j}\operatorname{ctg} p\alpha.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Останній крок справедливий, тому що

$$\prod_{p=1}^{j}\cos p\alpha \cdot \prod_{p=1}^{n-1-j}\sin p\alpha = \prod_{p=1}^{n-1}\cos p\alpha = \prod_{p=1}^{n-1}\sin p\alpha, \qquad j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}. \tag{4.69}$$

Підставляючи формули (4.66), (4.68) в (4.65) і враховуючи тотожність $-\varepsilon^{n-1}\rho = \sqrt[2n]{r} \cdot e^{\frac{i(\varphi-\pi)}{2n}}$ ми отримуємо бажану формулу (4.38) для $M_F(\lambda)$.

Тепер доведемо формули (4.41)–(4.42). Оскільки $M_F(\lambda)$ – неперервна функція у замкненій верхній півплощині, то за оберненою формулою Стілтьєса (4.48) і за теоремою Лебега про мажоровану збіжність отримуємо

$$\sigma_F(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^t \operatorname{Im}\left(\lim_{y\downarrow 0} M_F(x+iy)\right)dx, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{4.70}$$

Якщо $\lambda = x+iy$, де $x\in\mathbb{R}$ і $y>0$, то з огляду на (4.40) маємо

$$\lim_{y\downarrow 0} \sqrt[2n]{-\lambda} = \begin{cases} \sqrt[2n]{x}\cdot e^{-i\alpha}, & x\geqslant 0,\\ \sqrt[2n]{-x}, & x<0. \end{cases} \tag{4.71}$$

Комбінуючи (4.38) з (4.71) отримуємо

$$\lim_{y\downarrow 0} M_F(x+iy) = \begin{cases} \left(-C_j\cdot C_k\cdot x^{\frac{j+k+1}{2n}}\cdot \frac{e^{-i(j+k+1)\alpha}}{\sin((j+k+1)\alpha)}\right)_{j,k=0}^{n-1}, & x\geqslant 0,\\ \left(-C_j\cdot C_k\cdot (-x)^{\frac{j+k+1}{2n}}\cdot \frac{1}{\sin((j+k+1)\alpha)}\right)_{j,k=0}^{n-1}, & x<0. \end{cases} \tag{4.72}$$

Тому

$$\operatorname{Im}\left(\lim_{y\downarrow 0} M_F(x+iy)\right) = \begin{cases} \left(C_j\cdot C_k\cdot x^{\frac{j+k+1}{2n}}\right)_{j,k=0}^{n-1}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0. \end{cases} \tag{4.73}$$

Комбінуючи (4.70) з (4.73) отримуємо (4.41)–(4.42). □

Зауваження 4.11. *Формулу* (4.38) *також можна довести використовуючи явну формулу для оберненої матриці V^{-1} із [27] і деякі допоміжні тригонометричні тотожності із [27]. Але цей шлях доволі громіздкий.*

Приклад 4.12. *При $n=1$ функція Вейля $M_F(\lambda)$ і її спектральна функція $\sigma_F(t)$ відомі (див. [1, §132], [42]) і мають вигляд*

$$M_F(\lambda) = i\sqrt{\lambda}, \qquad \sigma_F(t) = \frac{2}{3\pi}t^{3/2}, \quad t>0, \tag{4.74}$$

що співпадає з формулами (4.38), (4.41) *при $n=1$. При $n=2$ ці формули набудуть вигляду*

$$M_F(\lambda) = \begin{pmatrix} (i-1)\lambda^{1/4} & i\lambda^{1/2}\\ i\lambda^{1/2} & (i+1)\lambda^{3/4}\end{pmatrix}, \qquad \sigma_F(t) = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} \frac{4}{5}t^{5/4} & \frac{2}{3}t^{3/2}\\ \frac{2}{3}t^{3/2} & \frac{4}{7}t^{7/4}\end{pmatrix}, \quad t>0, \tag{4.75}$$

тоді як при $n = 3$ маємо

$$M_F(\lambda) \;=\; \begin{pmatrix} \left(i-\sqrt{3}\right)\lambda^{1/6} & \left(-1+i\sqrt{3}\right)\lambda^{1/3} & i\lambda^{1/2} \\ \left(-1+i\sqrt{3}\right)\lambda^{1/3} & 3i\lambda^{1/2} & \left(1+i\sqrt{3}\right)\lambda^{2/3} \\ i\lambda^{1/2} & \left(1+i\sqrt{3}\right)\lambda^{2/3} & \left(i+\sqrt{3}\right)\lambda^{5/6} \end{pmatrix}, \tag{4.76}$$

$$\sigma_F(t) \;=\; \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} \frac{6}{7}t^{7/6} & \frac{3\sqrt{3}}{4}t^{4/3} & \frac{2}{3}t^{3/2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}t^{4/3} & 2t^{3/2} & \frac{3\sqrt{3}}{5}t^{5/3} \\ \frac{2}{3}t^{3/2} & \frac{3\sqrt{3}}{5}t^{5/3} & \frac{6}{11}t^{11/6} \end{pmatrix}, \quad t>0. \tag{4.77}$$

Доведення теореми 4.7. За пропозицією 5 із [65],

$$\mathrm{dom}(A_K) = \ker(\Gamma_1 - M_F(0)\Gamma_0), \quad \text{де} \quad M_F(0) = \text{s-lim}_{x\uparrow 0} M_F(x)$$

і Γ_0, Γ_1 задаються формулами (4.60)–(4.61). З огляду на (4.38), $M_F(0) = 0$. Тому $\mathrm{dom}(A_K) = \ker(\Gamma_1)$, і гранична трійка $\Pi' := \{\mathbb{C}^n, \Gamma_0', \Gamma_1'\} := \{\mathbb{C}^n, \Gamma_1, -\Gamma_0\}$ відповідає оператору A_K. За визначенням відображення Γ_1 (див. (4.61)), оператор A_K визначається граничними умовами (4.43). Також зауважимо, що

$$M_K(\lambda) = -N_0(\lambda)N_1^{-1}(\lambda) = -M_F^{-1}(\lambda). \tag{4.78}$$

Із (4.62) і (4.63) випливає, що

$$N_0(\lambda) = D_0(\lambda)V, \qquad N_1(\lambda) = D_1(\lambda)\cdot(\omega_k^j)_{j,k=0}^{n-1}\cdot D, \tag{4.79}$$

де

$$D_0(\lambda) := \mathrm{diag}(\rho^{n-1-j})_{j=0}^{n-1}, \qquad D_1(\lambda) := \mathrm{diag}((-1)^j\rho^{n+j})_{j=0}^{n-1}, \tag{4.80}$$

$$D := \mathrm{diag}(\omega_k^n)_{k=0}^n = \mathrm{diag}((-1)^k)_{k=0}^n. \tag{4.81}$$

Комбінуючи (4.58) з (4.64), отримуємо

$$(\omega_k^j)_{j,k=0}^{n-1} = R\cdot V, \qquad R = \mathrm{codiag}(1,\ldots,1).$$

Тому,

$$N_1(\lambda) = D_1(\lambda)\cdot R\cdot V\cdot D. \tag{4.82}$$

Комбінуючи (4.65) з (4.79) і (4.82) і враховуючи, що $D = D^{-1}$ і $R = R^{-1}$, отримуємо

$$
\begin{aligned}
M_F(\lambda) = \ & N_1(\lambda)N_0^{-1}(\lambda) & = D_1(\lambda)R \cdot VDV^{-1} \cdot D_0^{-1}(\lambda), \qquad (4.83)\\
M_K(\lambda) = \ & -M_F^{-1}(\lambda) & = -D_0(\lambda) \cdot VDV^{-1} \cdot RD_1^{-1}(\lambda). \qquad (4.84)
\end{aligned}
$$

Виражаючи VDV^{-1} із (4.83) і підставляючи цей вираз у (4.84), ми приходимо до

$$
M_K(\lambda) = -D_0(\lambda)RD_1^{-1}(\lambda) \cdot M_F(\lambda) \cdot D_0(\lambda)RD_1^{-1}(\lambda). \qquad (4.85)
$$

Із визначення матриць $D_0(\lambda)$ і $D_1(\lambda)$ (див. (4.80)) і формул (4.58)–(4.59) випливає, що

$$
\begin{aligned}
D_0(\lambda)RD_1^{-1}(\lambda) &= \operatorname{codiag}(\rho^{n-1-j})_{j=0}^{n-1} \cdot \operatorname{diag}((-1)^j\rho^{-n-j})_{j=0}^{n-1}\\
&= \rho^{-n}\operatorname{codiag}((-1)^{n-1-j})_{j=0}^{n-1}. \qquad (4.86)
\end{aligned}
$$

Комбінуючи (4.85), (4.86), (4.58), (4.59) і (4.38), отримуємо

$$
\begin{aligned}
M_K(\lambda) &= \left(\rho^{-2n}(-1)^{n-1-j+k}\frac{C_{n-1-j}\cdot C_{n-1-k}}{\sin((2n-1-j-k)\alpha)}\left(\sqrt[2n]{-\lambda}\right)^{2n-1-j-k}\right)_{j,k=0}^{n-1}\\
&= \left(-\lambda\cdot\frac{i^{-2n}}{\lambda}\cdot(-1)^n\cdot\frac{C_{n-1-j}\cdot C_{n-1-k}}{\sin((j+k+1)\alpha)}\left(\frac{-1}{\sqrt[2n]{-\lambda}}\right)^{j+k+1}\right)_{j,k=0}^{n-1}. \qquad (4.87)
\end{aligned}
$$

Із (4.69) випливає, що $C_j = C_{n-1-j}$, $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. З огляду на це, бажана формула (4.44) для $M_K(\lambda)$ випливає із (4.87).

Тепер доведемо формули (4.45)–(4.46). Із (4.44) випливає, що

$$
\left|[M_K(x+iy)]_{jk}\right| \leqslant C\left(|x|^{-1+\frac{1}{2n}} + |x|^{-\frac{1}{2n}}\right), \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad y > 0, \qquad (4.88)
$$

при $j, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ і деякого $C > 0$. Тому за оберненою формулою Стілтьєса (4.48) і за теоремою Лебега про мажоровану збіжність отримуємо

$$
\sigma_K(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^t \operatorname{Im}\left(\lim_{y\downarrow 0} M_K(x+iy)\right)dx, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (4.89)
$$

Комбінуючи (4.44) з (4.71), ми приходимо до

$$\lim_{y\downarrow 0} M_K(x+iy) = \begin{cases} \left((-1)^{j+k}\cdot C_j\cdot C_k\cdot x^{-\frac{j+k+1}{2n}}\cdot \frac{e^{i(j+k+1)\alpha}}{\sin((j+k+1)\alpha)}\right)_{j,k=0}^{n-1}, & x>0,\\ \left((-1)^{j+k}\cdot C_j\cdot C_k\cdot (-x)^{-\frac{j+k+1}{2n}}\cdot \frac{1}{\sin((j+k+1)\alpha)}\right)_{j,k=0}^{n-1}, & x<0. \end{cases} \tag{4.90}$$

Тому

$$\operatorname{Im}\left(\lim_{y\downarrow 0} M_K(x+iy)\right) = \begin{cases} \left((-1)^{j+k} C_j\cdot C_k\cdot x^{-\frac{j+k+1}{2n}}\right)_{j,k=0}^{n-1}, & x>0,\\ 0, & x<0. \end{cases} \tag{4.91}$$

Комбінуючи (4.89) з (4.91) отримуємо (4.45)–(4.46). □

Зауваження 4.13. *Із формул* (4.38), (4.44) *і* (4.78) *випливає наступна цікава тотожність*

$$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{p+k}\cdot C_j\cdot C_p^2\cdot C_k}{\sin((j+p+1)\alpha)\sin((p+k+1)\alpha)} = \delta_{jk}, \quad j,k\in\{0,1,\dots,n-1\}. \tag{4.92}$$

Довести це безпосередньо здається нетривіальним.

Зауваження 4.14. *Покажемо зв'язок функцій Вейля* $M_F(\lambda)$ *і* $M_K(\lambda)$ *з точними константами в нерівностях для проміжних похідних. Нехай* $A_{n,k}$, $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$, *це точна константа в наступній нерівності*

$$|f^{(k)}(0)| \leqslant A_{n,k}\cdot\left(\|f\|_2^2+\|f^{(n)}\|_2^2\right)^{1/2}, \quad f\in W^{n,2}[0,\infty), \tag{4.93}$$

де $\|g\|_2^2 := \int_0^\infty |g(t)|^2 dt$. *У недавній роботі [16] Г. А. Калябін знайшов явні формули для цих констант:*

$$A_{n,k}^2 = \frac{1}{\sin\big((2k+1)\alpha\big)}\left(\prod_{p=1}^{k}\operatorname{ctg}(p\alpha)\right)^2, \qquad \alpha=\frac{\pi}{2n}. \tag{4.94}$$

Порівнюючи цю формулу з формулами (4.72), (4.90) *ми бачимо, що*

$$A_{n,k}^2 = [M_K(-1)]_{kk} = -\,[M_F(-1)]_{kk}\,. \tag{4.95}$$

Цей цікавий зв'язок показує актуальність дослідження точних констант в нерівностях для проміжних похідних, що буде зроблено в наступному підрозділі.

4.3 Точні константи в узагальнених нерівностях для проміжних похідних

Нехай $\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, причому $a_0 > 0, a_n > 0$ і $a_l \geqslant 0$ при $l \in \{1, \ldots, n-1\}$. Розглянемо узагальнений простір Соболєва $W_2^n(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})$, що складається з усіх (комплекснозначних) функцій $f(x)$, визначених на додатній піввісі $x \geqslant 0$, що мають абсолютно неперервну похідну $f^{(n-1)}(x)$ порядку $n-1$ і мають скінченну норму

$$\|f\| = \|f\|_{W_2^n(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})} := \left(\int\limits_0^{+\infty} \sum_{l=0}^{n} a_l |f^{(l)}(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{4.96}$$

Мета підрозілу – обчислення точних, тобто найменших можливих, констант в узагальнених нерівностях типу Колмогорова

$$|f^{(k)}(0)| \leqslant A_{n,k,\mathbf{a}} \|f\|_{W_2^n(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})}, \qquad k \in \{0, \ldots, n-1\}. \tag{4.97}$$

Раніше у різних роботах досліджувався випадок $\mathbf{a} = (1, 0, \ldots, 0, 1)$, тобто знаходились точні константи $A_{n,k} := A_{n,k,(1,0,\ldots,0,1)}$ в нерівностях

$$|f^{(k)}(0)| \leqslant A_{n,k} \left(\int\limits_0^{+\infty} \left(|f(x)|^2 + |f^{(n)}(x)|^2 \right) dx \right)^{1/2}. \tag{4.98}$$

Відомі результати про константи в нерівностях для проміжних похідних у різних випадках представлені, наприклад, у монографіях В. М. Тихомирова [46, §2.4] і В. Ф. Бабенка, Н. П. Корнейчука, В. А. Кофанова, С. А. Пічугова [2]. Наприклад, для простору $W_2^n(\mathbb{R})$ точні константи в схожих нерівностях знайшов Л. В. Тайков [44] (див. також [46, п. 2.4.4]). А саме, він отримав просту явну формулу $A^*_{n,k} = \left(2n \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)^{-1/2}$, де $A^*_{n,k}$ – найменша константа в нерівностях $|f^{(k)}(0)| \leqslant A^*_{n,k} \|f\|_{W_2^n(\mathbb{R})}$. Пізніше, цей результат був узагальнений автором [24] на випадок $W_2^n(\mathbb{R}^m)$.

Випадок піввісі виявився значно складнішим для дослідження. Зокрема, В. Н. Габушин [5] (див. також [46, п. 2.4.5]) знайшов функції (у вигляді лінійних комбінацій спадних експонент), що є екстремальними для нерівностей (4.98). Однак числа $A_{n,k}$, що неявно визначаються цим результатом, не були обчислені ефективно.

Г. А. Калябін досліджував цю задачу в роботах [14], [15]. Як вже зазначалось у зауваженні 4.14, у недавній роботі [16] він знайшов явні формули для констант $A_{n,k}$,

$$A_{n,k} = \left(\sin\frac{\pi(2k+1)}{2n}\right)^{-1/2}\prod_{p=1}^{k}\operatorname{ctg}\frac{\pi p}{2n}. \tag{4.99}$$

У цьому підрозділі запропоновано інший метод для знаходження констант $A_{n,k}$, що опирається на теорему Ріса про загальний вигляд лінійного функціонала в гільбертовому просторі. При цьому формула Калябіна (4.99) отримується в якості окремого випадку загальної формули. Крім того, вдалося знайти явний вигляд для розглянутих констант у випадку вектора $\mathbf{a} = (1, 1, \ldots, 1)$, який також використовується для визначення простору Соболєва.

Перейдемо до формулювань і доведень отриманих результатів. Зауважимо, що рівняння $\sum_{l=0}^{n} a_l x^l = 0$ має рівно n коренів x_p, $p \in \{1, \ldots, n\}$ (з урахуванням кратності), причому, з умов на коефіцієнти рівняння випливає, що $x_p \in \mathbb{C}\backslash[0, +\infty)$. Тому рівняння $\sum_{l=0}^{n} a_l(-\lambda^2)^l = 0$ має рівно n коренів з урахуванням кратності, що лежать у лівій півплощині $\mathbb{C}_l = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$:

$$\lambda_p = \sqrt{-x_p}, \qquad p \in \{1, \ldots, n\}, \tag{4.100}$$

де береться значення квадратного кореня, що лежить в $\mathbb{C}_l$.

Головним результатом підрозділу є наступна теорема.

Теорема 4.15. *Нехай всі λ_p різні. Тоді матриця*

$$D = (d_{p,q})_{p,q=1}^{n} = \left(\sum_{l=0}^{n-p}(-1)^{l+1}a_{l+p}\lambda_q^{2l+p}\right)_{p,q=1}^{n} \tag{4.101}$$

є невиродженою, і найменша константа $A_{n,k,\boldsymbol{a}}$ в нерівностях (4.97) *задає-*

ться формулою

$$A^2_{n,k,\boldsymbol{a}} = \frac{\det(D^{(k)})}{\det(D)}, \qquad k \in \{0, \dots, n-1\}, \tag{4.102}$$

де матриця $D^{(k)} = \left(d^{(k)}_{p,q}\right)^n_{p,q=1}$ *отримується із матриці* D *заміною* $(k+1)$-*ого рядка рядком* $(\lambda^k_1, \dots, \lambda^k_n)$.

Доведення. Розглянемо в $W^n_2(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})$ лінійний функціонал $L_k(f) := f^{(k)}(0)$. Як відомо, цей функціонал є обмеженим. Тому константа $A_{n,k,\mathbf{a}}$ дорівнює його нормі $\|L_k\|$. Оскільки простір $H := W^n_2(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})$ є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(f, g) = (f, g)_{W^n_2(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})} := \int\limits_0^{+\infty} \sum_{l=0}^n a_l f^{(l)}(x) \overline{g^{(l)}(x)} dx, \tag{4.103}$$

то за теоремою Ріса про загальний вигляд лінійного функціонала у гільбертовому просторі існує єдина функція $g_k \in H$ така, що

$$L_k(f) = (f, g_k), \qquad f \in H, \tag{4.104}$$

при цьому, $\|L_k\| = \|g_k\|$. Використовуючи рівність (4.104), отримуємо

$$A^2_{n,k,\mathbf{a}} = \|L_k\|^2 = \|g_k\|^2 = (g_k, g_k) = L_k(g_k) = g^{(k)}_k(0). \tag{4.105}$$

Згідно з (4.104) і (4.103), маємо

$$L_k(f) = f^{(k)}(0) = \int\limits_0^{+\infty} \sum_{l=0}^n a_l f^{(l)}(x) \overline{g^{(l)}_k(x)} dx, \qquad f \in H. \tag{4.106}$$

Інтегруючи частинами інтеграл у правій частині (4.106), змінюючи порядок підсумовування і враховуючи, що для $m \in \mathbb{N}$ функції із $W^m_2(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})$ зникають на нескінченності разом зі своїми похідними до порядку $m-1$, отримуємо для $f \in W^{2n}_2(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})$:

$$f^{(k)}(0) = \int\limits_0^{+\infty} \overline{g_k(x)} \sum_{l=0}^n a_l (-1)^l f^{(2l)}(x) dx + \sum_{p=1}^n \overline{g^{(p-1)}_k(0)} \sum_{l=0}^{n-p} (-1)^{l+1} a_{l+p} f^{(2l+p)}(0). \tag{4.107}$$

Підставимо $f(x) = f_q(x) = e^{\lambda_q x}$ в (4.107), де числа λ_q визначаються рівністю (4.100). Оскільки $\lambda_q \in \mathbb{C}_l$, то $f_q \in W_2^{2n}(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})$. Крім того, із рівності $\sum_{l=0}^n a_l(-\lambda_q^2)^l = 0$ випливає, що $\sum_{l=0}^n a_l(-1)^l f_q^{(2l)}(x) = 0$. Тому інтеграл у правій частині (4.107) дорівнює нуля, а отже

$$f_q^{(k)}(0) = \lambda_q^k = \sum_{p=1}^n \overline{g_k^{(p-1)}(0)} \sum_{l=0}^{n-p} (-1)^{l+1} a_{l+p} \lambda_q^{2l+p}, \quad q, k+1 \in \{1, \ldots, n\}.$$

В матричній формі ці співвідношення запишуться у вигляді

$$V = GD, \quad \text{де} \quad V := \left(\lambda_q^{r-1}\right)_{r,q=1}^n, \quad G := \left(\overline{g_{r-1}^{(p-1)}(0)}\right)_{r,p=1}^n,$$

а матриця D визначається рівністю (4.101).

Оскільки числа λ_q різні, то V – невироджена матриця типу Вандермонда. Тому D – невироджена і $G = VD^{-1}$. Нехай $D^{-1} =: \left(\widetilde{d}_{p,q}\right)_{p,q=1}^n$. За формулами Крамера

$$A_{n,k,\mathbf{a}}^2 = g_k^{(k)}(0) = \overline{g_k^{(k)}(0)} = \sum_{p=1}^n \lambda_p^k \widetilde{d}_{p,k+1} = \frac{1}{\det(D)} \sum_{p=0}^n \lambda_p^k D_{k+1,p}, \tag{4.108}$$

де $D_{q,p}$ – алгебраїчне доповнення елемента $d_{p,q}$ матриці D. Розкладаючи визначник матриці $D^{(k)}$ за $(k+1)$-им рядком, отримуємо

$$\det(D^{(k)}) = \sum_{p=0}^n \lambda_p^k D_{k+1,p}.$$

Тому $A_{n,k,\mathbf{a}}^2 = \det(D^{(k)}) / \det(D)$. Отже, теорему 4.15 доведено. □

Доповнимо теорему 4.15 формулою для функції $g_k(x)$, що реалізує функціонал L_k.

Лема 4.16. *Функція g_k, що реалізує функціонал L_k за теоремою Ріса, може бути знайдена явно за формулою*

$$g_k(x) = \sum_{p=1}^n c_p e^{\lambda_p x},$$

де вектор $c = \mathrm{col}(c_1, \dots, c_n)$ *є розв'язком системи*

$$D \cdot c = b, \quad b = \mathrm{col}(\delta_{p,k+1})_{p=1}^{n}, \tag{4.109}$$

де $\delta_{p,j}$ *– символ Кронекера.*

Доведення. Припустимо спочатку, що $g_k \in W_2^{2n}(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})$. Аналогічно рівності (4.107) отримуємо

$$f^{(k)}(0) = \int\limits_0^{+\infty} f(x) \sum_{l=0}^{n} a_l (-1)^l \overline{g_k^{(2l)}(x)} dx + \sum_{p=1}^{n} f^{(p-1)}(0) \sum_{l=0}^{n-p} (-1)^{l+1} a_{l+p}\, \overline{g_k^{(2l+p)}(0)}. \tag{4.110}$$

Рівність (4.110) виконується для всіх функцій $f \in W_2^n(\mathbb{R}_+, \mathbf{a})$ тоді і тільки тоді, коли функція g_k – розв'язок задачі

$$\sum_{l=0}^{n} a_l (-1)^l g_k^{(2l)} = 0, \quad g_k \in W_2^{2n}(\mathbb{R}_+, \mathbf{a}), \tag{4.111}$$

$$\sum_{l=0}^{n-p} (-1)^{l+1} a_{l+p}\, g_k^{(2l+p)}(0) = \delta_{p,k+1}, \quad p \in \{1, \dots, n\}. \tag{4.112}$$

Загальний розв'язок рівняння (4.111), що зникає на нескінченності має вигляд

$$g_k(x) = \sum_{p=0}^{n-1} c_p e^{\lambda_p x}. \tag{4.113}$$

Із (4.112) і (4.113) отримуємо (4.109). □

Сформулюємо деякі наслідки із теореми 4.15.

Наслідок 4.17. *Для кожного* $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$$A_{n,k}^2 = \frac{1}{\sin((2k+1)\alpha)} \prod_{p=1}^{k} \mathrm{ctg}\, p\alpha \prod_{p=1}^{n-k-1} \mathrm{ctg}\, p\alpha, \quad \alpha = \frac{\pi}{2n}. \tag{4.114}$$

До того ж, ці константи мають властивість симетрії:

$$A_{n,k} = A_{n,n-1-k}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Доведення. При $\mathbf{a} = (1, 0, \dots, 0, 1)$ числа λ_q мають простий вигляд $\lambda_q = \varepsilon^{q+\frac{n-1}{2}}$, де $\varepsilon^r := e^{i\pi\frac{r}{n}}$. Звідки

$$D = \left((-1)^{n-p+1}\lambda_q^{2n-p}\right)_{p,q=1}^n = \left(\varepsilon^{p\frac{n-1}{2}}(\varepsilon^{-p})^{q-1}\right)_{p,q=1}^n.$$

Тому

$$|\det(D)| = \left|\det(C)\prod_{p=1}^n \varepsilon^{p\frac{n-1}{2}}\right| = |\det(C)|,$$

де $C = \left((\varepsilon^{-p})^{q-1}\right)_{p,q=1}^n$. Оскільки $\lambda_q^k = \varepsilon^{k(n+1)/2}(\varepsilon^k)^{q-1}$, то аналогічно отримуємо, що $|\det(D^{(k)})| = |\det(C^{(k)})|$, де матриця $C^{(k)}$ отримується із матриці C заміною $(k+1)$-ого рядка рядком $(1, \varepsilon^k, \dots, (\varepsilon^k)^{n-1})$. Зрозуміло, що матриці C і $C^{(k)}$ є матрицями типу Вандермонда. Тому, використовуючи формулу для визначника Вандермонда, $\det\left(x_s^{m-1}\right)_{s,m=1}^n = \prod\limits_{1\leqslant p<s\leqslant n}(x_s - x_p)$, отримуємо

$$A_{n,k}^2 = \left|A_{n,k}^2\right| = \frac{|\det(D^{(k)})|}{|\det(D)|} = \frac{|\det(C^{(k)})|}{|\det(C)|} = \prod_{\substack{p=1\\p\neq k+1}}^n \frac{\left|\varepsilon^k - \varepsilon^{-p}\right|}{\left|\varepsilon^{-k-1} - \varepsilon^{-p}\right|}.$$

З огляду на тотожність $|\varepsilon^q - \varepsilon^{-p}| = 2|\sin((p+q)\alpha)|$, отримуємо

$$A_{n,k}^2 = \prod_{\substack{p=1\\p\neq k+1}}^n \frac{|\sin((p+k)\alpha)|}{|\sin((p-k-1)\alpha)|} = \frac{1}{\sin((2k+1)\alpha)}\frac{\prod_{p=k+1}^{k+n}\sin p\alpha}{\prod_{p=1}^{k}\sin p\alpha\prod_{p=1}^{n-k-1}\sin p\alpha}$$

$$= \frac{1}{\sin((2k+1)\alpha)}\prod_{p=1}^{k}\operatorname{ctg} p\alpha\prod_{p=1}^{n-k-1}\operatorname{ctg} p\alpha.$$

Таким чином, формулу (4.114) доведено. Оскільки

$$\sin((2k+1)\alpha) = \sin((2n-2k-1)\alpha), \quad \alpha = \frac{\pi}{2n},$$

то із формули (4.114) випливає симетрія констант. □

Оскільки $\operatorname{ctg}((n-p)\alpha)\operatorname{ctg}(p\alpha) = 1$, то із формули (4.114) легко випливає формула Г. А. Калябіна (4.99). Відзначимо також, що в недавній роботі [27] автор дав інше доведення формули (4.99). Воно також використовує теорему Ріса, але є більш громіздким.

Далі, позначимо $\widetilde{A}_{n,k} := A_{n,k,(1,1,\dots,1)}$.

Наслідок 4.18. *Для кожного* $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\widetilde{A}^2_{n,k-1} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\phi}{2}}{n+1} \cdot \frac{\sin^2 k\phi}{\sin^2 k\phi - \sin^2\frac{\phi}{2}}, \qquad \phi = \frac{\pi}{n+1}. \tag{4.115}$$

До того ж, ці константи мають властивість симетрії:

$$\widetilde{A}_{n,k} = \widetilde{A}_{n,n-1-k}, \quad k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Доведення. При $\mathbf{a} = (1, 1, \ldots, 1)$ числа λ_q мають вигляд $\lambda_q = \varepsilon^{q+\frac{n+1}{2}}$, де $\varepsilon^r := e^{i\phi r}$. Звідси для елементів матриці D отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned}
d_{p,q} &= \sum_{l=0}^{n-p} (-1)^{l+1} \lambda_q^{2l+p} = \sum_{l=0}^{n-p} (-1)^{l+1} \varepsilon^{(q+\frac{n+1}{2})(2l+p)} = -\varepsilon^{(q+\frac{n+1}{2})p} \sum_{l=0}^{n-p} \left(-\varepsilon^{2q+n+1}\right)^l \\
&= -i^p \varepsilon^{qp} \sum_{l=0}^{n-p} \left(\varepsilon^{2q}\right)^l = -i^p \varepsilon^{qp} \frac{\varepsilon^{2q(n+1-p)} - 1}{\varepsilon^{2q} - 1} = -i^p \varepsilon^{qp} \frac{1 - \varepsilon^{-2pq}}{\varepsilon^{2q} - 1} \\
&= -i^p \varepsilon^{qp} \frac{\varepsilon^{-pq}\big(\varepsilon^{pq} - \varepsilon^{-pq}\big)}{\varepsilon^q\big(\varepsilon^q - \varepsilon^{-q}\big)} = \frac{i^p \varepsilon^{-q}}{\sin q\phi} \sin pq\phi.
\end{aligned}$$

Аналогічно, для елементів k-ого рядка матриці $D^{(k-1)}$ маємо

$$\begin{aligned}
d_{k,q}^{(k-1)} &= \lambda_q^{k-1} = \varepsilon^{(q+\frac{n+1}{2})(k-1)} = i^{k-1} \varepsilon^{qk-q} \\
&= i^k(-i)(\cos qk\phi + i \sin qk\phi)\varepsilon^{-q} = i^k \varepsilon^{-q} (\sin qk\phi - i \cos qk\phi).
\end{aligned}$$

Тому за теоремою 4.15

$$\widetilde{A}^2_{n,k-1} = \frac{\det(D^{(k-1)})}{\det(D)} = \frac{\det(C^{(k-1)}) - i \det(B^{(k-1)})}{\det(C)},$$

де $C = (\sin pq\phi)_{p,q=1}^n$, матриця $C^{(k-1)}$ отримується із матриці C заміною k-ого рядка рядком $(\sin q\phi \sin qk\phi)_{q=1}^n$, а матриця $B^{(k-1)}$ отримується із матриці C заміною k-ого рядка рядком $(\sin q\phi \cos qk\phi)_{q=1}^n$.

Оскільки C – дійсна матриця, то $\det(C) \in \mathbb{R}$. Крім того, $\widetilde{A}^2_{n,k-1} \in \mathbb{R}$. Тому $\det(B^{(k-1)}) = 0$. Оскільки

$$\sum_{q=1}^{n} \sin pq\phi \sin rq\phi = \frac{n+1}{2} \delta_{p,r}, \quad p, r \in \{1, \ldots, n\},$$

то $C \cdot C = \frac{n+1}{2} I_n$, де I_n – одинична матриця порядку n. Звідси

$$\widetilde{A}^2_{n,k-1} = \frac{\det(C^{(k-1)})}{\det(C)} = \frac{\det(C^{(k-1)} \cdot C)}{\det(C \cdot C)} = \frac{\det(B)}{\det(\frac{n+1}{2} I_n)},$$

де матриця $B = C^{(k-1)} \cdot C$. Зрозуміло, що B отримується із $\frac{n+1}{2} I_n$ заміною k-ого рядка рядком $\left(\sum_{q=1}^{n} \sin q\phi \sin kq\phi \sin qp\phi\right)_{p=1}^{n}$. Тому

$$\det(B) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n-1} \sum_{q=1}^{n} \sin q\phi \sin^2 kq\phi.$$

А отже,

$$\widetilde{A}^2_{n,k-1} = \frac{2}{n+1} \sum_{q=1}^{n} \sin q\phi \sin^2 kq\phi. \tag{4.116}$$

Використовуючи формулу $2i \sin z = e^{iz} - e^{-iz}$, а також формулу для суми геометричної прогресії, рівність (4.116) переходить у формулу (4.115). Оскільки $\sin^2(k+1)\phi = \sin^2(n-k)\phi$ при $\phi = \frac{\pi}{n+1}$, то із формули (4.115) випливає симетрія констант, що і завершує доведення. $\square$

Із формули (4.115) видно, що послідовність $\{\widetilde{A}_{n,k}\}_{k=0}^{n-1}$ опукла вниз. Цікаво відзначити, що послідовність $\{A_{n,k}\}_{k=0}^{n-1}$ опукла вгору (див. [16]). Далі ми покажемо, що асимптотичні поведінки констант $\widetilde{A}_{n,k}$ і $A_{n,k}$ суттєво відрізняються.

Наслідок 4.19. *При кожному фіксованому* $k \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{A}^2_{n,k-1} \to \frac{2}{\pi} \cdot \frac{4k^2}{4k^2 - 1}, \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \tag{4.117}$$

Доведення. Згідно з наслідком 4.18

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{A}^2_{n,k-1} = \lim_{n\to\infty} \widetilde{A}^2_{n-1,k-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{1 - \left(\sin\frac{\pi}{2n} / \sin\frac{k\pi}{n}\right)^2}$$
$$= \frac{2}{\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{\pi}{2n} \cdot \frac{n}{k\pi}\right)^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{4k^2}{4k^2 - 1}.$$

$\square$

Наслідок 4.20. *Нехай* $k \to \infty$ *і* $(n-k) \to \infty$. *Тоді* $\widetilde{A}^2_{n,k} \to \frac{2}{\pi}$.

Доведення. Для зручності будемо розглядати $\widetilde{A}_{n-1,k-1}$, де $k \in \{1, \dots, n-1\}$. З огляду на симетрію констант $\widetilde{A}_{n-1,k-1}$ можна вважати, що $k < n/2$. За наслідком 4.18 маємо

$$A^2_{n-1,k-1} = \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \cdot \left(1 - \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{k\pi}{n}}\right)^2\right)^{-1}.$$

Зрозуміло, що $\frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} \to \frac{2}{\pi}$, при $n \to \infty$. Тому достатньо довести, що

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{k\pi}{n}} \to 0, \quad \text{при} \quad k \to \infty \quad \text{і} \quad n > 2k.$$

Це випливає із оцінки

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{k\pi}{n}} \leqslant \frac{\frac{\pi}{2n}}{\frac{k\pi}{n} - \frac{1}{6}\left(\frac{k\pi}{n}\right)^3} = \frac{1}{2k - \frac{k^3}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2} < \frac{1}{2k - \frac{k^3}{3}\left(\frac{\pi}{2k}\right)^2} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2 - \frac{\pi^2}{12}}.$$

Тут було використано нерівність $x - x^3/6 \leqslant \sin x \leqslant x$. □

Таким чином, ми бачимо, що послідовність $\widetilde{A}_{n,k}$ веде себе асимптотично як константа. В той ж час, $A_{n,k}$ прямує до нескінченності (див. [16]).

Висновки до розділу 4

Розділ 4 присвячено вивченню ЗДР високого порядку на півосі. У підрозділі 4.1 отримано нові умови на комплекснозначний потенціал ЗДР другого порядку, які забезпечують прямування усіх розв'язків до нуля на нескінченності. У підрозділі 4.2 отримано явну формулу для спектральних функцій розширень Фрідріхса і Крейна мінімального диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами на півосі.

Результати про прямування розв'язків ЗДР другого порядку до нуля на нескінченності грають важливу роль при вивченні стабільності відповідних фізичних моделей. Слід зауважити, що для отримання одного з результатів про прямування розв'язків ЗДР другого порядку до нуля на нескінченності використовуються ВКБ-оцінки (див. [47, II.2]). Цей результат є новим навіть у випадку дійсного потенціалу.

Для знаходження спектральних функцій диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами на піввісі використовується теорія граничних трійок, розвинена в [65]. Отримана формула відіграє важливу роль при вивченні спектральних функцій загальних самоспряжених розширень диференціальних операторів.

До основних результатів цього розділу належать:

– Теорема 4.1, в якій отримано нові достатні умови на комплекснозначний потенціал ЗДР другого порядку, які забезпечують прямування усіх розв'язків до нуля на нескінченності. Цей результат узагальнює відповідний результат В. Б. Лідського, Б. В. Федосова стосовно дійсного потенціала.

– Теорема 4.5, в якій отримано альтернативні достатні умови на комплекснозначний потенціал ЗДР другого порядку, які забезпечують прямування усіх розв'язків до нуля на нескінченності. Цей результат є новим навіть у випадку дійсного потенціалу.

– Теорема 4.6, в якій отримано явну формулу для спектральної функції розширення Фрідріхса мінімального диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами на піввісі.

– Теорема 4.7, в якій отримано явну формулу для спектральної функції розширення Крейна мінімального диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами на піввісі.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [31], [86], [26].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена повноті та блочній базисності Ріса СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку і застосуванню цих результатів для динамічного генератора моделі балки Тимошенка. Також досліджуються деякі спектральні властивості ЗДР високого порядку на півосі. Значно розвинена схема доведення повноти для слабко регулярних граничних умов із [91]. Отримані результати узагальнюють результати із [39] і [91]. Для отримання блочної базисності Ріса використовується теорема Маркуса-Мацаєва [38] про блочну базисність Ріса, що дозволило отримати перші результати про базисність Ріса для загальних систем порядку $n > 2$.

У дисертації отримано такі нові результати:

– Достатні умови повноти СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з граничними умовами, які не є слабко регулярними.

– Достатні умови блочної базисності Ріса СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з обмеженою потенціальною матрицею і для широкого класу регулярних граничних умов. Раніше подібний результат був отриманий тільки для задачі Діріхле для системи Дірака.

– Достатні умови повноти і блочної базисності Ріса СВПФ динамічного генератора загальної моделі балки Тимошенка при послаблених умовах гладкості на параметри моделі, які не покривалися результами попередніх робіт.

– Умови на комплекснозначний потенціал ЗДР другого порядку, які забезпечують прямування усіх розв'язків до нуля на нескінченності. Одна з умов є новою навіть для дійсного потенціалу.

– Явна формула спектральних функцій розширень мінімального диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами на піввісі.

Робота має теоретичний характер. Але отримані результати стосовно базисності Ріса моделі балки Тимошенка дають наступні важливі властивості багатьох типів балок: стабільність вібрацій згідно спектру задачі, генерація C_0-напівгрупи, явний вираз розв'язків через власні вектори. До того ж, властивості повноти і базисності, отримані для граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку, мають застосування для системи Дірака. Результати про прямування розв'язків ЗДР другого порядку до нуля на нескінченності відіграють важливу роль при вивченні стабільності відповідних фізичних моделей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Том 2. Москва: Наука, 1978. 289 с.

2. Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А. Неравенства для производных и их приложения. Киев: Наукова думка, 2003. 590 С.

3. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом. *Изв. РАН. Сер. матем.* 2011. Т. 75, № 3. С. 3–28.

4. Велиев О. А., Шкаликов А. А. О базисности Pica собственных и присоединенных функций периодической и антипериодической задач Штурма–Лиувилля. *Матем. заметки.* 2009. Т. 85, № 5. С. 671–686.

5. Габушин В. Н. О наилучшем приближении оператора дифференцирования на полуоси. *Матем. заметки.* 1969. Т. 6, № 5. С. 573–582.

6. Гинзбург Ю. П. О почти инвариантных спектральных свойствах сжатий и мультипликативных свойствах аналитических оператор-функций. *Функц. анализ и его приложения.* 1971. Т. 5, № 3. С. 32–41.

7. Горбачук М. Л., Горбачук В. И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наукова думка, 1984. 285 с.

8. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов. Москва: Наука, 1965. 448 с.

9. Губреев Г. М. О спектральном разложении конечномерных возмущений диссипативных вольтерровых операторов. *Труды Московского матем. общества.* 2003. Т. 64. С. 90–140.

10. Гусаров Л. А. О стремлении к нулю решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. *Доклады АН СССР.* 1950. Т. 21, № 1, С. 9–12.

11. Деркач В. А., Маламуд М. М. Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов. *Український матем. журнал.* 1992. Т. 44, № 4. С. 435–459.

12. Джаков П. Б., Митягин Б. С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака. *Успехи матем. наук.* 2006. Т. 61, № 4(370). С. 77–182.

13. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. Москва: Наука, 1980. 319 с.

14. Калябин Г. А. Наилучшие операторы продолжения для соболевских пространств на полупрямой. *Функц. анализ и его приложения.* 2002. Т. 36, № 2. С. 28–37.

15. Калябин Г. А. О точных константах в неравенствах Колмогорова для пространств Соболева $W_2^n(\mathbb{R}_+)$. *Доклады РАН.* 2003. Т. 388, № 2. С. 159–161.

16. Калябин Г. А. Точные константы в неравенствах для промежуточных производных (случай Габушина). *Функц. анализ и его приложения.* 2004. Т. 38, № 3. С. 29–38.

17. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряжённых уравнений. *Доклады АН СССР.* 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.

18. Кесельман Г. М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов. *Изв. вузов СССР, Матем.* 1964. № 2. С. 82–93.

19. Костюченко А. Г. Асимптотика спектральной функции сингулярного дифференциального оператора порядка $2m$. *Доклады АН СССР*. 1966. Т. 168, № 2. С. 276–279.

20. Костюченко А. Г., Шкаликов А. А. Суммируемость разложений по собственным функциям дифференциальных операторов и операторов свёртки. *Функц. анализ и его приложения.* 1978. Т. 12, № 4. С. 24–40.

21. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. Москва: Наука, 1970. 672 с.

22. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. Москва: Наука, 1988. 431 с.

23. Лидский В. Б., Федосов Б. В. О стремлении к нулю решений дифференциального уравнения второго порядка с операторными коэффициентами. *Матем. заметки.* 1967. Т. 2, № 2. С. 307–314.

24. Лунёв А. А. Точные константы в неравенствах для промежуточных производных в n-мерном пространстве. *Матем. заметки.* 2009. Т. 85, № 3. С. 476–479.

25. Лунёв А. А., Маламуд М. М. О базисности Рисса системы корневых векторов для 2×2-системы типа Дирака. *Доклады РАН.* 2014. Т. 458, № 3. С. 255–260.

26. Лунёв А. А., Оридорога Л. Л. Точные константы в обобщенных неравенствах для промежуточных производных. *Матем. заметки.* 2009. Т. 85, № 5. С. 737–744.

27. Луньов А. А. Точні константи в нерівностях для проміжних похідних. *Український матем. вісник.* 2007. Т. 4, № 3. С. 325–336.

28. Луньов А. А. Точні константи в нерівностях для проміжних похідних. Тези доповідей *наукової конференції студентів математичного факультету*: зб. наук. та наук.-метод. праць. Донецьк: Донецький національний університет, 2009. С. 3–4.

29. Луньов А. А. Про регулярність степенів диференціального оператора. *Український матем. вісник.* 2009. Т. 6, № 4. С. 475–491.

30. Луньов А. А. Про повноту системи кореневих векторів граничної задачі для системи першого порядку. Book of Abstracts of *the Fourth International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii*, November 14–17, 2012, Donetsk, 2012. P. 48–49.

31. Луньов А. А., Оридорога Л. Л. Про прямування до нуля рішень диференціального рівняння другого порядку з комплекснозначним потенціалом. *Український матем. вісник.* 2011. Т. 8, № 3. С. 580–595.

32. Любарский Ю. И., Ткаченко В. А. О системе $\{e^{\alpha n x}\sin nx\}$. *Функц. анализ и его приложения.* 1984. Т. 18, № 2. С. 69–70.

33. Маламуд М. М. Вопросы единственности в обратных задачах для систем дифференциальных уравнений на конечном интервале. *Труды Московского матем. общества.* 1999. Т. 60. С. 199–258.

34. Маламуд М. М. О полноте системы корневых векторов оператора Штурма–Лиувилля с общими граничными условиями. *Функц. анализ и его приложения.* 2008. Т. 42, № 3. С. 45–52.

35. Маламуд М. М., Оридорога Л. Л. Теоремы полноты для систем дифференциальных уравнений. *Функц. анализ и его приложения.* 2000. Т. 34, № 2. С. 88–90.

36. Маламуд М. М., Оридорога Л. Л. О полноте системы корневых векторов для систем первого порядка. *Доклады РАН.* 2010. Т. 435, № 3. С. 1–6.

37. Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинёв: Штиинца, 1986. 260 с.

38. Маркус А. С., Мацаев В. И. Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральные асимптотики. *Труды Московского матем. общества.* 1982. Т. 45. С. 133–181.

39. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977. 332 с.

40. Микитюк Я. В., Пуйда Д. В. Про властивість Барі-Маркуса для оператора Дірака. *Матем. Студії.* 2013. Т. 40, № 2. С. 165–171.

41. Михайлов В. П. О базисах Ріса в $L_2(0,1)$. *Доклады АН СССР.* 1962. Т. 144, № 5. С. 981–984.

42. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. Москва: Наука, 1969. 526 с.

43. Рыхлов В. С. О полноте собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. *Изв. вузов. Матем.* 2009. Т. 53, № 6. С. 42–53.

44. Тайков Л. В. Неравенства колмогоровского типа и наилучшие формулы численного дифференцирования. *Матем. заметки.* 1968. Т. 4, № 2. С. 233–238.

45. Тамаркин Я. Д. О некоторых задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917. 152 с.

46. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. Москва: Издательство МГУ, 1976. 304 С.

47. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1983. 352 с.

48. Хромов А. П. О порождающих функциях вольтерровых операторов. *Матем. сборник.* 1977. Т. 102(144), № 3. С. 457–472.

49. Хромов А. П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов. *Современная матем. Фунд. направления.* 2004. Т. 10. С. 3–163.

50. Шкаликов А. А. О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными распадающимися краевыми условиями. *Функц. анализ и его приложения.* 1976. Т. 10, № 4. С. 69–80.

51. Шкаликов А. А. О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора. *Успехи матем. наук.* 1979. Т. 34, № 5(209). С. 235–236.

52. Шкаликов А. А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями. *Вестник Московского ун-та. Серия 1. Матем., мех.* 1982. № 6. С. 12–21.

53. Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях. *Тр. семинара им. И. Г. Петровского.* 1983. Т. 9. С. 140–179.

54. Шкаликов А. А. О базисности корневых векторов возмущенного самосопряженного оператора. *Теория функций и дифференциальные уравнения.* Сборник статей. К 105-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского. Тр. МИАН. Т. 269. Москва: МАИК, 2010. С. 290–303.

55. Agibalova A. V., Malamud M. M., Oridoroga L. L. On the completeness of general boundary value problems for 2×2 first-order systems of ordinary differential equations. *Methods Funct. Anal. and Topology.* 2012. Vol. 18, № 1. P. 4–18.

56. Agranovich M. S., Katsenelenbaum B. Z., Sivov A. N. and Voitovich N. N. Generalized method of eigenoscillations in diffraction theory. Verlag Berlin: Wiley-VCH, 1999. 378 p.

57. Armellini G. Sopra un'equazione differenziale della dinamica. *Rend. Accad. Naz. Lincei.* 1935. Vol. 21. P. 111–116.

58. Atkinson F. V., Macki J. W. On regular growth and asymptotic stability. *Rocky Mountain J. Math.* 1986. Vol. 16, № 1. P. 111–118.

59. Biernacki M. Sur l'equation differentielle $x'' + A(t)x = 0$. *Prace Mat. Fiz.* 1933. Vol. 40. P. 163–171.

60. Birkhoff G. D. On the asymptotic character of the solution of the certain linear differential equations containing parameter. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1908. Vol. 9, № 2. P. 219–231.

61. Birkhoff G. D. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations. *Trans. AMS* 1908. Vol. 9, № 4. P. 373–395.

62. Birkhoff G. D., Langer R. E. The boundary problems and developments associated with a system of ordinary differential equations of the first order. *Proc. Amer. Acad. Arts Sci.* 1923. Vol. 58. P. 49–128.

63. Birkhoff G. D., Vandiver H. S. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations. *Trans. AMS* 1908. Vol. 9. P. 373–395.

64. DeKleine H. A. A counterexample to a conjecture in second-order linear equations. *Michigan Math. J.* 1970. Vol. 17, № 1. P. 29–32.

65. Derkach V. A., Malamud M. M. Generalised resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps. *J. Funct. Anal.* 1991. Vol. 95, № 1. P. 1–95.

66. Djakov P., Mityagin B. Bari-Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators. *Math. Nachr.* 2010. Vol. 283, № 3. P. 443–462.

67. Djakov P., Mityagin B. Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions. *Indiana Univ. Math. J.* 2012. Vol. 61, № 1. P. 359–398.

68. Djakov P., Mityagin B. 1D Dirac operators with special periodic potentials. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* 2012. Vol. 60, № 1. P. 59–75.

69. Djakov P., Mityagin B. Equiconvergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions. *J. Approximation Theory.* 2012. Vol. 164, № 7. P. 879–927.

70. Djakov P., Mityagin B. Criteria for existence of Riesz bases consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators. *J. Funct. Anal.* 2012. Vol. 263, № 8. P. 2300–2332.

71. Djakov P., Mityagin B. Riesz bases consisting of root functions of 1D Dirac operators. *Proc. Amer. Math. Soc.* 2013. Vol. 141, № 4. P. 1361–1375.

72. Dunford N. A Survey of the Theory of Spectral Operators. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1958. Vol. 64. P. 217–274.

73. Dunford N., Schwartz J. Linear Operators, Part III, Spectral Operators. New York: Wiley, 1971. 688 p.

74. Galbraith A., McShane E. J., Parrish G. On the solutions of linear second-order differential equations. *Proc. National Academy of Sciences of USA.* 1965. Vol. 53. P. 247–249.

75. Gesztesy F., Tkachenko V. A criterion for Hill operators to be spectral operators of scalar type. *J. d'Analyse Math.* 2009. Vol. 107. P. 287–353.

76. Gesztesy F., Tkachenko V. A Schauder and Riesz basis criterion for non-selfadjoint Schrödinger operators with periodic and anti-periodic boundary conditions. *J. Differential Equations.* 2012. Vol. 253, № 2. P. 400–437.

77. Hartman P. Ordinary Differential Equations. New York: Wiley, 1964. 623 p.

78. Hassi S., Oridoroga L. Theorem of Completeness for a Dirac-Type Operator with Generalized λ-Depending Boundary Conditions. *Integral Equat. Oper. Theor.* 2009. Vol. 64. P. 357–379.

79. Hatvani L. The growth condition guaranteeing small solutions for a linear oscillator with an increasing elasticity coefficient. *Georgian Math. J.* 2007. Vol. 14, № 2. P. 269–278.

80. Kim J. U., Renardy Y. Boundary Control of the Timoshenko Beam. *SIAM J. Control and Optimization.* 1987. Vol. 25, № 6. P. 1417–1429.

81. Leighton W. Behavior of solutions of a linear differential equation of second order. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1964. Vol. 52, № 3. P. 830–832.

82. Leighton W. Erratum: Behavior of Solutions of a Linear Differential Equation of Second Order. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1964. Vol. 52, № 4. P. 1129.

83. Levin Ya. B. Lectures on Entire Functions. *Transl. Math. Monographs. Vol. 150. Amer. Math. Soc., Providence, RI.* 1996. 242 p.

84. Locker J. Spectral Theory of Non-Self-Adjoint Two-Point Differential Operators. *Math. Surveys and Monographs. Vol. 73. Amer. Math. Soc., Providence, RI.* 2000. 252 p.

85. Lunyov A. A. On completeness of the root vector system of boundary value problem for first order system. Book of Abstracts of *International Workshop on Spectral Theory and Differential Operators*, August 27–31, 2012, TU Graz, Austria, 2012. P. 23–25.

86. Lunyov A. A. Spectral functions of the simplest even order ordinary differential operator. *Methods Funct. Anal. and Topol.* 2013. Vol. 19, № 4. P. 319–326.

87. Lunyov A. A., Malamud M. M. On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications. *J. Spectral Theory.* 2015. Vol. 5, № 1. P. 17–70.

88. Lunyov A. A., Malamud M. M. On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators, *J. Math. Anal. Appl.* 2016. Vol. 441, № 1. P. 57–103.

89. Macki J. W. Regular growth and zero-tending solutions. *In: Everitt W.N., Lewis R.T. (eds) Ordinary Differential Equations and Operators. Lecture Notes in Math. Vol. 1032. Springer, Berlin, Heidelberg.* 1983. P. 358–374.

90. Makin A. S. On Summability of Spectral Expansions Corresponding to the Sturm-Liouville Operator. *Inter. J. Math. and Math. Sci.* 2012. Vol. 2012. ID 843562. 13 p.

91. Malamud M. M., Oridoroga L. L. On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first order systems of ordinary differential equations. *J. Funct. Anal.* 2012. Vol. 263. P. 1939–1980.

92. McShane E. J. On the Solutions of the Differential Equation $y'' + p^2 y = 0$. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1966. Vol. 17, № 1. P. 55–61.

93. Meir A., Willett D., Wong J. S. W. On the asymptotic behavior of the solutions of $x'' + a(t)x = 0$. *Michigan Math. J.* 1967. Vol. 14, № 1. P. 47–52.

94. Milloux H. Sur l'equation differentielle $x'' + A(t)x = 0$. *Prace Mat. Fiz.* 1934. Vol. 41. P. 39–54.

95. Minkin A. M. Resolvent growth and Birkhoff-regularity. *J. of Math. Analysis and Applications.* 2006. Vol. 323, № 1. P. 387–402.

96. Mityagin B. Spectral expansions of one-dimensional periodic Dirac operators. *Dyn. Partial Differ. Equat.* 2004. Vol. 1. P. 125–191.

97. Savchuk A. M. and Shkalikov A. A. The Dirac Operator with Complex-Valued Summable Potential. *Math. Notes.* 2014. Vol. 96, № 5-6. P. 777–810.

98. Sansone G. Sopra il comportamento asintotico delle soluzioni di un'equazione differenziale della dinamica. *Scritti Matematici offerti a Luigi Berzolari.* Pavia. 1936. P. 385–403.

99. Shubov M. A. Asymptotic and spectral analysis of the spatially nonhomogeneous Timoshenko beam model. *Math. Nachr.* 2002. Vol. 241. P. 125–162.

100. Soufyane A., Wehbe A. Uniform stabilization for the Timoshenko beam by a locally distributed damping. *Electronic J. Differ. Equat.* 2003. Vol. 2003, № 29. P. 1–14. URL: http://ejde.math.unt.edu/Volumes/2003/29/abstr.html

101. Tamarkin J. D. Sur quelques points de la theorie des equations differentielles lineaires ordinaires et sur la generalisation de la serie de Fourier. *Rend. Circ. Mat. Palermo.* 1912. Vol. 2, № 34. P. 345–382.

102. Tamarkin J. D. Some general problems of the theory of linear differential equations and expansions of an arbitrary functions in series of fundamental functions. *Math. Zeitschrift.* 1928. Vol. 27. P. 1–54.

103. Timoshenko S. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philisophical magazine.* 1921. Vol. 41. P. 744–746.

104. Timoshenko S. Vibration Problems in Engineering. Third Edition. New York: Van Norstrand, 1955. 468 p.

105. Trooshin I., Yamamoto M. Riesz basis of root vectors of a nonsymmetric system of first-order ordinary differential operators and application to inverse eigenvalue problems. *Appl. Anal.* 2001. Vol. 80. P. 19–51.

106. Trooshin I., Yamamoto M. Spectral properties and an inverse eigenvalue problem for nonsymmetric systems of ordinary differential operators. *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2002. Vol. 10, № 6. P. 643–658.

107. Walker P. W. A nonspectral Birkhoff-regular differential operator. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1977. Vol. 66, № 1. P. 187–188.

108. Willett D. On an Example in Second Order Linear Ordinary Differential Equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1966. Vol. 17, № 6. P. 1263–1266.

109. Wu Y., Xue X. Decay rate estimates for the quasi-linear Timoshenko system with nonlinear control and damping terms. *J. Math. Physics.* 2011. Vol. 52. 093502. 18 p.

110. Xu G. Q., Han Z. J., Yung S. P. Riesz basis property of serially connected Timoshenko beams. *Inter. J. Control.* 2007. Vol. 80, № 3. P. 470–485.

111. Xu G. Q., Yung S. P. Exponential Decay Rate for a Timoshenko Beam with Boundary Damping. *J. Optimiz. Theory Appl.* 2004. Vol. 123, № 3. P. 669–693.

Додаток А

Список публікацій здобувача

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Луньов А. А. Про регулярність степенів диференціального оператора. *Український математичний вісник.* 2009. Т. 6, № 4. С. 475–491.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Zentralblatt MATH, Google Scholar)

2. Луньов А. А., Оридорога Л. Л. Про прямування до нуля рішень диференціального рівняння другого порядку з комплекснозначним потенціалом. *Український математичний вісник.* 2011. Т. 8, № 3. С. 580–595 (Lunyov A. A., Oridoroga L. L. On the convergence to zero of solutions of a second-order differential equation with complex-valued potential. *Journal of Mathematical Sciences.* 2012. V. 182. № 1. P. 87–99).

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus**, Zentralblatt MATH, Google Scholar)

   Особистий внесок здобувача. Автору належать всі результати, окрім секції 5 про істотність умов теореми 1.2, що належить співавтору.

3. Lunyov A. A. Spectral functions of the simplest even order ordinary differential operator. *Methods of Functional Analysis and Topology.* 2013. Vol. 19, № 4. P. 319–326.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Zentralblatt MATH, MathSciNet, Google Scholar)

Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

4. Лунёв А. А., Оридорога Л. Л. Точные константы в обобщенных неравенствах для промежуточных производных. *Математические заметки.* 2009. Т. 85, № 5. С. 737–744 (Lunev A.A., Oridoroga L.L. Exact constants in generalized inequalities for intermediate derivatives. *Mathematical Notes.* 2009. V. 85, № 5-6. p. 703–711).

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus**, Zentralblatt MATH, MathSciNet, Google Scholar)

   Особистий внесок здобувача. Автору належать всі результати, окрім наслідка 2 про симетрію констант, що належить співавтору.

5. Lunyov A. A., Malamud M. M. On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications. *Journal of Spectral Theory.* 2015. Vol. 5, № 1. P. 17–70.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus**, Web of Science, Zentralblatt MATH, MathSciNet, Impact Factor: 1.160, Q1)

   Особистий внесок здобувача. Автору належать всі результати. Науковому керівнику належать постановка задачі і деякі ідеї дослідження.

Наукові праці, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

6. Луньов А. А. Точні константи в нерівностях для проміжних похідних. Тези доповідей *наукової конференції студентів математичного факультету*: зб. наук. та наук.-метод. праць. Донецьк: Донецький національний університет, 2009. С. 3–4.

7. Lunyov A. A. On completeness of the root vector system of boundary value problem for first order system. Book of Abstracts of *International Workshop on Spectral Theory and Differential Operators*, August 27–31, 2012, TU Graz, Austria, 2012. P. 23–25.

8. Луньов А. А. Про повноту системи кореневих векторів граничної задачі для системи першого порядку. Book of Abstracts of *the Fourth International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii*, November 14–17, 2012, Donetsk, 2012. P. 48–49.