Національна академія наук України
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна

ЛУНЬОВ Антон Андрійович

Лунёв

УДК 517.927.25

ПИТАННЯ ПОВНОТИ І БАЗИСНОСТІ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладної математики і механіки Національної академії наук України, м. Слов'янськ.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, доцент
Маламуд Марк Михайлович.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Дюкарев Юрій Михайлович,
Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна,
професор кафедри вищої математики.

доктор фізико-математичних наук, професор
Золотарьов Володимир Олексійович,
Фізико-технічний інститут низьких температур
імені Б.І. Вєркіна НАН України (м. Харків),
провідний науковий співробітник
відділу теорії функцій;

Захист дисертації відбудеться «26» квітня 2021 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01 Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України за адресою: 61103 Харків, проспект Науки, 47.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України за адресою: 61103 Харків, проспект Науки, 47.

Автореферат розісланий «23» березня 2021 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради В.О. Горькавий

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Питання повноти і базисності системи власних векторів самоспряженого компактного оператора вичерпно вирішується класичною теоремою Гільберта: кожний компактний самоспряжений оператор має ортонормований базис із власних векторів.

Спектральна теорія несамоспряжених граничних задач на відрізку для звичайного диференціального рівняння (ЗДР) n-го порядку з сумовними коеффіцієнтами бере свій початок в класичних роботах G. D. Birkhoff[1] і Я. Д. Тамаркіна[2], де зокрема було введено поняття регулярних граничних умов для ЗДР.

Для несамоспряженого компактного оператора перші загальні результати про повноту були отримані у класичній роботі М. В. Кєлдиша[3]. Ці теореми дозволили отримати важливі результати про повноту системи власних і приєднаних функцій (СВПФ) граничних задач як для ЗДР, так і для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Але багато важливих типів нерегулярних граничних задач для ЗДР не були охоплені цими результатами. Після цього повнота нерегулярних граничних задач для ЗДР n-го порядку вивчалась А. А. Шкаліковим[4], А. Г. Костюченком і А. А. Шкаліковим[5], Г. М. Губреєвим[6], А. П. Хромовим[7] [8], В. С. Рихловим[9] і багатьма іншими. Базисність Ріса регулярних граничних задач вивчалась N. Dunford[10], В. П. Михайловим[11], Г. М. Кєсєльманом[12], А. С. Марку-

[1]Birkhoff G. D. On the asymptotic character of the solution of the certain linear differential equations containing parameter. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1908. Vol. 9, № 2. P. 219–231.

[2]Tamarkin J. D. Sur quelques points de la theorie des equations differentielles lineaires ordinaires et sur la generalisation de la serie de Fourier. *Rend. Circ. Mat. Palermo.* 1912. Vol. 2, № 34. P. 345–382.

[3]Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряжённых уравнений. *Доклады АН СССР.* 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.

[4]Шкаликов А. А. О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными распадающимися краевыми условиями. *Функц. анализ и его приложения.* 1976. Т. 10, № 4. С. 69–80.

[5]Костюченко А. Г., Шкаликов А. А. Суммируемость разложений по собственным функциям дифференциальных операторов и операторов свёртки. *Функц. анализ и его приложения.* 1978. Т. 12, № 4. С. 24–40.

[6]Губреев Г. М. О спектральном разложении конечномерных возмущений диссипативных вольтерровых операторов. *Труды Московского матем. общества.* 2003. Т. 64. С. 90–140.

[7]Хромов А. П. О порождающих функциях вольтерровых операторов. *Матем. сборник.* 1977. Т. 102(144), № 3. С. 457–472.

[8]Хромов А. П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов. *Современная матем. Фунд. направления.* 2004. Т. 10. С. 3–163.

[9]Рыхлов В. С. О полноте собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. *Изв. вузов. Матем.* 2009. Т. 53, № 6. С. 42–53.

[10]Dunford N. A Survey of the Theory of Spectral Operators. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1958. Vol. 64. P. 217–274.

[11]Михайлов В. П. О базисах Рiса в $L_2(0,1)$. *Доклады АН СССР.* 1962. Т. 144, № 5. С. 981–984.

[12]Кесельман Г. М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов. *Изв. вузов СССР, Матем.* 1964. № 2. С. 82–93.

сом і В. І. Мацаєвим[13], М. С. Аграновичем[14], А. А. Шкаліковим[15 16], А. Мінкіним[17] і багатьма іншими. Повнота і базисність Ріса для оператора Штурма-Ліувіля вивчалась М. М. Маламудом[18], А. А. Шкаліковим і О. А Вєлієвим[19], П. Джаковим і Б. С. Мітягіним[20], F. Gesztesy і В. А. Ткаченком[21], А. С. Макіним[22] і багатьма іншими.

Вперше загальна гранична задача для системи ЗДР першого порядку була досліджена G. D. Birkhoff і R. E. Langer[23]. Зокрема, вони ввели поняття регулярних граничних умов. Проблема повноти СВПФ граничної задачі для системи ЗДР першого порядку вперше була досліджена М. М. Маламудом і Л. Л. Оридорогою[24 25]. Вони ввели поняття слабко регулярних граничних умов і довели повноту СВПФ для цього класу граничних задач. Раніше, в окремих випадках цей результат був доведений В. А. Марченком[26] і В. П. Гінзбургом[27].

Зазначимо, що системи ЗДР першого порядку є більш загальним об'єктом, ніж ЗДР n-го порядку. А саме, ЗДР n-го порядку може бути зведене до системи ЗДР першого порядку[28]. Класична система Дірака – окремий випадок такої

[13]Маркус А. С., Мацаев В. И. Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральные асимптотики. *Труды Московского матем. общества.* 1982. Т. 45. С. 133–181.

[14]Agranovich M. S., Katsenelenbaum B. Z., Sivov A. N. and Voitovich N. N. Generalized method of eigenoscillations in diffraction theory. Verlag Berlin: Wiley-VCH, 1999. 378 p.

[15]Шкаликов А. А. О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора. *Успехи матем. наук.* 1979. Т. 34, № 5(209). С. 235–236.

[16]Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях. *Тр. семинара им. И. Г. Петровского.* 1983. Т. 9. С. 140–179.

[17]Minkin A. M. Resolvent growth and Birkhoff-regularity. *J. of Math. Analysis and Applications.* 2006. Vol. 323, № 1. P. 387–402.

[18]Маламуд М. М. О полноте системы корневых векторов оператора Штурма–Лиувилля с общими граничными условиями. *Функц. анализ и его приложения.* 2008. Т. 42, № 3. С. 45–52.

[19]Велиев О. А., Шкаликов А. А. О базисности Рiса собственных и присоединенных функций периодической и антипериодической задач Штурма–Лиувилля. *Матем. заметки.* 2009. Т. 85, № 5. С. 671–686.

[20]Djakov P., Mityagin B. Criteria for existence of Riesz bases consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators. *J. Funct. Anal.* 2012. Vol. 263, № 8. P. 2300–2332.

[21]Gesztesy F., Tkachenko V. A Schauder and Riesz basis criterion for non-selfadjoint Schrödinger operators with periodic and anti-periodic boundary conditions. *J. Differential Equations.* 2012. Vol. 253, № 2. P. 400–437.

[22]Makin A. S. On Summability of Spectral Expansions Corresponding to the Sturm-Liouville Operator. *Inter. J. Math. and Math. Sci.* 2012. Vol. 2012. ID 843562. 13 p.

[23]Birkhoff G. D., Langer R. E. The boundary problems and developments associated with a system of ordinary differential equations of the first order. *Proc. Amer. Acad. Arts Sci.* 1923. Vol. 58. P. 49–128.

[24]Маламуд М. М., Оридорога Л. Л. Теоремы полноты для систем дифференциальных уравнений. *Функц. анализ и его приложения.* 2000. Т. 34, № 2. С. 88–90.

[25]Malamud M. M., Oridoroga L. L. On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first order systems of ordinary differential equations. *J. Funct. Anal.* 2012. Vol. 263. P. 1939–1980.

[26]Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977. 332 с.

[27]Гинзбург Ю. П. О почти инвариантных спектральных свойствах сжатий и мультипликативных свойствах аналитических оператор-функций. *Функц. анализ и его приложения.* 1971. Т. 5, № 3. С. 32–41.

[28]Маламуд М. М. Вопросы единственности в обратных задачах для систем дифференциальных уравнений на конечном интервале. *Труды Московского матем. общества.* 1999. Т. 60. С. 199–258.

системи[29] [26].

Протягом останніх двадцяти років базисність Ріса для 2×2 системи Дірака з регулярними і посилено регулярними граничними умовами ретельно досліджувалася I. Trooshin і M. Yamamoto[30], S. Hassi і Л. Л. Оридорогою[31], П. Джаковим і Б. С. Мітягіним[32] [33] [20], А. Г. Баскаковим, А. В. Дєрбушовим і А. О. Щербаковим[34], автором і М. М. Маламудом[35] [36], А. М. Савчуком і А. А. Шкаліковим[37] і багатьма іншими. Я. В. Микитюк і Д. В. Пуйда[38] встановили блочну базисність Ріса задачі Діріхле для системи Дірака високого порядку з L^2-потенціалом.

Спектральна теорія граничних задач для систем ЗДР першого порядку природно виникає при дослідженні моделі балки Тимошенка. Ця модель була введена С. Тимошенком у 20-х роках[39], і відтоді ретельно вивчалася J. U. Kim і Y. Renardy[40], M. A. Shubov[41], G. Q. Xu і S. P. Yung[42], Y. Wu і X. Xue[43] і багатьма іншими. Геометричні властивості СВПФ динамічного генератора просторово неоднорідної балки Тимошенка з межевою і локально розподіленою амортизацією грають важливу роль у дослідженні різних фізичних властивостей різних типів балок.

Питання про прямування до нуля на нескінченності розв'язків диференціально-

[29] Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. Москва: Наука, 1988. 431 с.

[30] Trooshin I., Yamamoto M. Spectral properties and an inverse eigenvalue problem for nonsymmetric systems of ordinary differential operators. *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2002. Vol. 10, № 6. P. 643–658.

[31] Hassi S., Oridoroga L. Theorem of Completeness for a Dirac-Type Operator with Generalized λ-Depending Boundary Conditions. *Integral Equat. Oper. Theor.* 2009. Vol. 64. P. 357–379.

[32] Djakov P., Mityagin B. Bari-Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators. *Math. Nachr.* 2010. Vol. 283, № 3. P. 443–462.

[33] Djakov P., Mityagin B. Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions. *Indiana Univ. Math. J.* 2012. Vol. 61, № 1. P. 359–398.

[34] Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом. *Изв. РАН. Сер. матем.* 2011. Т. 75, № 3. С. 3–28.

[35] Лунёв А. А., Маламуд М. М. О базисности рисса системы корневых векторов для 2×2-системы типа дирака. *Доклады РАН.* 2014. Т. 458, № 3. С. 255–260.

[36] Lunyov A. A., Malamud M. M. On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators, *J. Math. Anal. Appl.* 2016. Vol. 441, № 1. P. 57–103.

[37] Savchuk A. M. and Shkalikov A. A. The Dirac Operator with Complex-Valued Summable Potential. *Math. Notes.* 2014. Vol. 96, № 5-6. P. 777–810.

[38] Микитюк Я. В., Пуйда Д. В. Про властивість Барі-Маркуса для оператора Дірака. *Матем. Студії.* 2013. Т. 40, № 2. С. 165–171.

[39] Timoshenko S. Vibration Problems in Engineering. Third Edition. New York: Van Norstrand, 1955. 468 p.

[40] Kim J. U., Renardy Y. Boundary Control of the Timoshenko Beam. *SIAM J. Control and Optimization.* 1987. Vol. 25, № 6. P. 1417–1429.

[41] Shubov M. A. Asymptotic and spectral analysis of the spatially nonhomogeneous Timoshenko beam model. *Math. Nachr.* 2002. Vol. 241. P. 125–162.

[42] Xu G. Q., Han Z. J., Yung S. P. Riesz basis property of serially connected Timoshenko beams. *Inter. J. Control.* 2007. Vol. 80, № 3. P. 470–485.

[43] Wu Y., Xue X. Decay rate estimates for the quasi-linear Timoshenko system with nonlinear control and damping terms. *J. Math. Physics.* 2011. Vol. 52. 093502. 18 p.

го рівняння другого порядку вивчалося M. Biernacki[44], H. Milloux[45], G. Sansone[46], Л. А. Гусаровим[47], D. Willett[48], В. Б. Лідським і Б. В. Федосовим[49], H. A. DeKleine[50], J. W. Macki[51], L. Hatvani[52] і багатьма іншими.

В багатьох роботах вивчалися асимптотичні формули для спектральної функції самоспряжених розширень диференціальних операторів на півосі. Для оператора Штурма-Ліувілля ця проблема була повністю вирішена незалежно В. А. Марченком і Б. М. Лєвітаном (див. історію задачі в монографії Б. М. Лєвітана і І. С. Саргсяна[53]). Для диференціальних операторів порядку $n > 2$ таку асимптотичну формулу отримав А. Г. Костюченко[54]. Головним членом цієї асимптотики є спектральна функція незбуреного оператора з тими ж граничними умовами, явна форма якої була відсутня.

Дисертаційна робота присвячена повноті та блочній базисності Ріса СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку і застосуванню цих результатів для динамічного генератора моделі балки Тимошенка. Актуальним є повнота СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з граничними умовами, які не є слабко регулярними, а також блочна базисність Ріса СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку, яка раніше не вивчалась.

Також досліджуються деякі спектральні властивості ЗДР високого порядку на півосі. Актуальним є узагальнити результати В. Б. Лідського і Б. В. Федосова про прямування усіх розв'язків ЗДР другого порядку до нуля на нескінченності, а також отримати явну формулу для спектральних функцій розширень мінімального диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами на півосі, яка входить в асимптотичні формули для розширень подібних операторів з ненульовими коефіцієнтами.

---

[44] Biernacki M. Sur l'equation differentielle $x'' + A(t)x = 0$. *Prace Mat. Fiz.* 1933. Vol. 40. P. 163–171.

[45] Milloux H. Sur l'equation differentielle $x'' + A(t)x = 0$. *Prace Mat. Fiz.* 1934. Vol. 41. P. 39–54.

[46] Sansone G. Sopra il comportamento asintotico delle soluzioni di un'equazione differenziale della dinamica. *Scritti Matematici offerti a Luigi Berzolari.* Pavia. 1936. P. 385–403.

[47] Гусаров Л. А. О стремлении к нулю решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. *Доклады АН СССР.* 1950. Т. 21, № 1, С. 9–12.

[48] Willett D. On an Example in Second Order Linear Ordinary Differential Equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1966. Vol. 17, № 6. P. 1263–1266.

[49] Лидский В. Б., Федосов Б. В. О стремлении к нулю решений дифференциального уравнения второго порядка с операторными коэффициентами. *Матем. заметки.* 1967. Т. 2, № 2. С. 307–314.

[50] DeKleine H. A. A counterexample to a conjecture in second-order linear equations. *Michigan Math. J.* 1970. Vol. 17, № 1. P. 29–32.

[51] Macki J. W. Regular growth and zero-tending solutions. *In: Everitt W.N., Lewis R.T. (eds) Ordinary Differential Equations and Operators. Lecture Notes in Math. Vol. 1032. Springer, Berlin, Heidelberg.* 1983. P. 358–374.

[52] Hatvani L. The growth condition guaranteeing small solutions for a linear oscillator with an increasing elasticity coefficient. *Georgian Math. J.* 2007. Vol. 14, № 2. P. 269–278.

[53] Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. Москва: Наука, 1970. 672 с.

[54] Костюченко А. Г. Асимптотика спектральной функции сингулярного дифференциального оператора порядка $2m$. *Доклады АН СССР.* 1966. Т. 168, № 2. С. 276–279.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано у відділі рівнянь з частинними похідними Інституту прикладної математики та механіки НАН України у відповідності до тематики пріоритетних досліджень відділу та в рамках державних науково-дослідних робіт III-1-06(1.1.4.1) «Якісний і асимптотичний аналіз розв'язків граничних задач для линійних і квазілінійних еліптичних і еволюційних рівнянь з нерегулярними даними» та III-1-11 «Локальні, глобальні та асимптотичні властивості розв'язків сингулярних, спектральних і некласичних задач для еліптичних і еволюційних рівнянь та варіаційних нерівностей».

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є отримання повноти та блочної базисності Ріса СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку; застосування цих результатів для динамічного генератора моделі балки Тимошенка; дослідження властивості прямування усіх розв'язків ЗДР другого порядку до нуля на нескінченності; обчислення явної форми спектральних функцій диференціального оператора парного порядку з нульовими коефецієнтами на піввісі.

Об'єкт дослідження — граничні задачі для систем ЗДР першого порядку на скінченному відрізку і на піввісі, модель балки Тимошенка.

Предмет дослідження — властивості повноти і блочної базисності Ріса СВПФ граничних задач на відрізку; спектральні функції і прямування розв'язків до нуля на нескінченності для граничних задач на піввісі.

Завдання дослідження:

– Отримати достатні і необхідні умови повноти СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з граничними умовами, які не є слабко регулярними.

– Отримати достатні умови блочної базисності Ріса СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з обмеженою потенціальною матрицею і для широкого класу регулярних граничних умов.

– Отримати достатні умови повноти і блочної базисності Ріса СВПФ динамічного генератора загальної моделі балки Тимошенка при послаблених умовах гладкості на параметри моделі.

– Отримати нові умови на комплекснозначний потенціал ЗДР другого порядку, які забезпечують прямування усіх розв'язків до нуля на нескінченності.

– Отримати явну формулу для спектральних функцій диференціального оператора парного порядку з нульовими коефецієнтами на піввісі.

Методи дослідження. Для отримання результатів дисертаційної роботи стосовно повноти СВПФ використовується аналог теореми Біркгофа для загальних систем ЗДР першого порядку, отриманий в роботі М. М. Маламуда і Л. Л. Оридороги[25], а також схема доведення повноти для слабко регулярних граничних умов із цієї роботи. Для отримання блочної базисності Ріса використвовується теорема Маркуса-Мацаєва[13] [55] про блочну базисність Ріса збуреного нормального оператора. Для отримання одного з результатів про прямування розв'язків ЗДР другого порядку до нуля на нескінченності використовуються ВКБ-оцінки[61]. Для знаходження спектральних функцій диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами на піввісі використовується теорія граничних трійок, розвинена в роботі В. А. Деркача і М. М. Маламуда[56].

Наукова новизна одержаних результатів. В роботі отримано наступні нові результати, які складають внесок в спектральну теорію диференціальних операторів:

1. Вперше отримані достатні умови повноти СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з граничними умовами, які не є слабко регулярними. Цей результат узагальнює відповідні результати М. М. Маламуда і Л. Л. Оридороги[25] для загальних систем зі слабко регулярними граничними умовами і А. В. Агібалової[57] для 2×2-систем.

2. Вперше отримані достатні умови блочної базисності Ріса СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з обмеженою потенціальною матрицею і для широкого класу регулярних граничних умов. Раніше подібний результат було отримано тільки для задачі Діріхле для системи Дірака[38].

3. Отримані достатні умови повноти і блочної базисності Ріса СВПФ динамічного генератора загальної моделі балки Тимошенка при послаблених умовах гладкості на параметри моделі, які не покривалися результатами попередніх робіт.

4. Отримані нові умови на комплекснозначний потенціал ЗДР другого порядку, які забезпечують прямування усіх його розв'язків до нуля на нескінченності. Одна з умов є новою навіть для дійсного потенціалу.

[55]Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинёв: Штиинца, 1986. 260 с.

[56]Derkach V. A., Malamud M. M. Generalised resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps. *J. Funct. Anal.* 1991. Vol. 95, № 1. P. 1–95.

[57]Agibalova A. V., Malamud M. M., Oridoroga L. L. On the completeness of general boundary value problems for 2×2 first-order systems of ordinary differential equations. *Methods Funct. Anal. and Topology.* 2012. Vol. 18, № 1. P. 4–18.

5. Вперше отримана явна формула спектральних функцій диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами на піввісі.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має теоретичний характер. Але отримані результати стосовно базисності Ріса моделі балки Тимошенка дають наступні важливі властивості багатьох типів балок: стабільність вібрацій згідно спектру задачі, генерація C_0-напівгрупи, явний вираз розв'язків через власні вектори. До того ж, властивості повноти і базисності, отримані для граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку, мають застосування у задачі N-хвиль у нелінійній оптиці і для системи Дірака. Результати про прямування розв'язків ЗДР другого порядку до нуля на нескінченності грають важливу роль при вивченні стабільності відповідних фізичних моделей.

Особистий внесок здобувача. Постановки задач належать науковому керівникові. Всі результати дисертації отримані автором самостійно. Зі статей, які опубліковані у співавторстві, у дисертацію увійшли лише ті результати, які належать автору. А саме: роботи [1], [3] написані без співавторів; робота [5] написана у співавторстві з науковим керівником, якому належить постановка задачі та деякі ідеї дослідження; робота [4] написана у співавторстві з Оридорогою Л.Л., якому належить тільки наслідок 2 про симетрію констант; робота [2] написана у співавторстві з Оридорогою Л.Л., якому належить тільки секція 5 про істотність умов теореми 1.2.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації були представлені на конференціях всеукраїнського та міжнародного рівнів: наукова конференція студентів математичного факультету Донецького національного університету, Донецьк, Україна, 2009; IV Міжнародна конференція молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я. Б. Лопатинського, Донецьк, Україна, 14–17 листопада 2012 року; Міжнародна конференція зі спектральної теорії і диференціальних операторів, Грац, Австрія, 27–31 серпня 2012 року.

Також результати дисертаційного дослідження доповідались на семінарах: розширений семінар відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Донецьк, Україна, 13 травня 2013 року; розширений семінар відділу теорії функцій Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ, Україна, 22 січня 2021 року; Київський семінар з функціонального аналізу Інституту математики НАН України, Київ, Україна, 3 лютого 2021 року (https://events.imath.kiev.ua/event/692); семінар математичного відділення Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України, Харків, Україна, 3 лютого 2021 року.

Наукові роботи з деякими результатами дисертаційного дослідження приймали участь у наукових конкурсах: конкурс наукових робіт студентів НАН України: 2007 (грамота), 2009 (премія); Всеукраїнський конкурс студентських наукових робіт з природничих, технічних і гуманітарних наук, 2007, 2009.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 8 роботах, серед яких — 5 статей в наукових фахових виданнях (з них — 3 статті представлені в наукометричних базах даних Scopus та Web of Science, 2 статті написані без співавторів) та 3 тез доповідей на наукових конференціях.

Структура дисертації. Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків до дисертації, списку використаних джерел, який містить 111 найменувань, та одного додатку. Повний обсяг роботи – 166 сторінок. Обсяг основної частини дисертації – 131 сторінки. Розділ 1, присвячений огляду літератури, займає 12 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність досліджуваної задачі. Сформульовано мету, задачі та методи дослідження. Визначено наукову новизну та значення отриманих результатів. Надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

Розділ 1 присвячено огляду та аналізу літератури. У розділі описано історію проблематики та наведено ключові результати, отримані в області дослідження за останній час.

Розділ 2 присвячено вивченню повноти граничної задачі для наступної системи ЗДР першого порядку:

$$L(Q)y := -iB^{-1}y' + Q(x)y = \lambda y, \quad y = \mathrm{col}(y_1, ..., y_n), \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

$$Cy(0) + Dy(1) = 0, \quad C = (c_{jk}),\ D = (d_{jk}) \in \mathbb{C}^{n\times n}, \tag{2}$$

де $B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – невироджена діагональна матриця, $Q =: (q_{jk})_{j,k=1}^n \in L^1([0,1]; \mathbb{C}^{n\times n})$ – потенціальна матриця, і $\mathrm{rank}(C\ D) = n$.

Позначимо через $L_{C,D} := L_{C,D}(Q)$ оператор, асоційований з граничною задачею (1)–(2) в $L^2([0,1]; \mathbb{C}^n)$ природним чином. Власні числа цього оператора співпадають з нулями характеристичного визначника $\Delta(\lambda) := \det(C + D\Phi(1,\lambda))$, де $\Phi(x,\lambda)$ – фундаментальна матриця розв'язків розглядуваної системи, що задовольняє $\Phi(0,\lambda) = I_n$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

У **підрозділі 2.1** отримано важливий загальний результат про повноту СВПФ, що зв'язує повноту зі зростом характеристичного визначника. Зауважимо, що прямі $l_{jk} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ib_j\lambda) = \mathrm{Re}(ib_k\lambda)\}$, при $b_j \neq b_k$, разом з прямими $l_j := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(ib_j\lambda) = 0\}$, відокремлюють $\nu \leqslant n^2 + n$ відкритих секторів

$S_p := \{z : \varphi_{1p} < \arg z < \varphi_{2p}\}$ із $\mathbb{C}$. Число $z \in \mathbb{C}$ називається *придатним*, якщо воно лежить усередині деякого сектора S_p. Головним результатом цього підрозділу є теорема 2.3.

Теорема 2.3. *Нехай $Q \in L^1([0,1]; \mathbb{C}^{n\times n})$. Припустимо, що існують $C, R > 0$, $s \geqslant 0$ і три придатних числа z_1, z_2, z_3, що задовольняють таким умовам:*

(i) нуль є внутрішньою точкою трикутника з вершинами z_1, z_2, z_3;

(ii) для $k \in \{1,2,3\}$ маємо

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant \frac{Ce^{\mathrm{Re}(i\tau_k\lambda)}}{|\lambda|^s}, \quad \tau_k = \sum_{\mathrm{Re}(ib_j z_k)>0} b_j, \quad |\lambda| > R,\ \arg\lambda = \arg z_k.$$

Тоді СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$ повна і мінімальна в $L^2([0,1]; \mathbb{C}^n)$.

У **підрозділі 2.2** отримано удосконалені асимптотичні формули для розв'язків розглядуваної системи і характеристичного визначника $\Delta(\cdot)$. Для достатньо малого $\varepsilon > 0$ позначимо $S_{p,\varepsilon} := \{z \in S_p : \varphi_{1p} + \varepsilon < \arg z < \varphi_{2p} - \varepsilon\}$. Асимптотичні формули для розв'язків отримано в пропозиції 2.6.

Пропозиція 2.6. *Припустимо, що $q_{jk} = 0$, якщо $b_j = b_k$, і нехай $p \in \{1,\ldots,\nu\}$. Припустимо також, що $Q(\cdot)$ неперервна у точках 0, 1. Тоді для достатньо великого $R > 0$ і малого $\varepsilon > 0$ рівняння (1) має фундаментальний матричний розв'язок $Y(x,\lambda) = (y_{jk}(x,\lambda))_{j,k=1}^n$ аналітичний по $\lambda \in S_{p,\varepsilon,R} := \{z \in S_{p,\varepsilon} : |z| > R\}$, що задовольняє наступному співвідношенню (рівномірно по $x \in [0,1]$)*

$$y_{jk}(x,\lambda) = (\delta_{jk} + o(1))e^{ib_k\lambda x}, \quad \textit{при} \quad \lambda \to \infty,\ \lambda \in S_{p,\varepsilon,R}, \quad j,k \in \{1,\ldots,n\},$$

і має таку асимптотичну поведінку в точках 0 і 1 при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_{p,\varepsilon,R}$,

$$y_{jk}(0,\lambda) = \begin{cases} 0, & \textit{if} \quad \mathrm{Re}(ib_j\lambda) < \mathrm{Re}(ib_k\lambda), \\ \delta_{jk}, & \textit{if} \quad b_j = b_k, \\ \frac{b_j q_{jk}(0) + o(1)}{b_j - b_k} \cdot \frac{1}{\lambda}, & \textit{if} \quad \mathrm{Re}(ib_j\lambda) > \mathrm{Re}(ib_k\lambda); \end{cases}$$

$$y_{jk}(1,\lambda) = \begin{cases} \frac{b_j q_{jk}(1) + o(1)}{b_j - b_k} \cdot \frac{e^{ib_k\lambda}}{\lambda}, & \textit{if} \quad \mathrm{Re}(ib_j\lambda) < \mathrm{Re}(ib_k\lambda), \\ (\delta_{jk} + o(1))e^{ib_k\lambda}, & \textit{if} \quad b_j = b_k, \\ 0, & \textit{if} \quad \mathrm{Re}(ib_j\lambda) > \mathrm{Re}(ib_k\lambda). \end{cases}$$

Нехай $A = \mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n)$, де $\mathrm{Re}\, a_k \neq 0$. Для $n \times n$ матриць $C = (c_1\ \ldots\ c_n)$ і $D = (d_1\ \ldots\ d_n)$, допоміжна $n \times n$ матриця $T_A(C,D)$ визначається наступним чином: її k-ий стовбець співпадає з c_k, якщо $\mathrm{Re}\, a_k < 0$, і співпадає з d_k, якщо $\mathrm{Re}\, a_k > 0$. Головним результатом цього підрозділу є пропозиція 2.8.

Пропозиція 2.8. *Нехай $Q \in L^1([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$ і функції $q_{jk}(\cdot)$ є неперервними у точках 0 і 1 при $b_j \neq b_k$. Нехай $p \in \{1,\dots,\nu\}$. Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$, характеристичний визначник $\Delta(\cdot)$ граничної задачі (1)–(2) має наступну асимптотичну формулу при $\lambda \to \infty$ і $\lambda \in S_{p,\varepsilon} := \{z \in S_p : \varphi_{1p} + \varepsilon < \arg z < \varphi_{2p} - \varepsilon\}$,*

$$\Delta(\lambda) = \left(\omega_0(z_p)\cdot(1+o(1)) + \frac{\omega_1(z_p)+o(1)}{\lambda}\right) e^{i(\tau_p\lambda+\gamma_p)},$$

де z_p – фіксована точка із $S_{p,\varepsilon}$,

$$\tau_p := \sum_{\mathrm{Re}(ib_jz_p)>0} b_j, \qquad \gamma_p := \sum_{\mathrm{Re}(ib_jz_p)>0} b_j \int_0^1 q_{jj}(t)dt,$$

$$\omega_0(z_p) := \det T_{iz_pB}(C,D), \tag{3}$$

$$\omega_1(z_p) := \sum_{\substack{\mathrm{Re}(ib_jz_p)<0\\ \mathrm{Re}(ib_kz_p)>0}} \frac{\det T_{iz_pB}^{c_j\to c_k}\cdot b_kq_{kj}(0) - \det T_{iz_pB}^{d_k\to d_j}\cdot b_jq_{jk}(1)}{b_k-b_j}, \tag{4}$$

і матриця $T_{iz_pB}^{c_j\to c_k}$ ($T_{iz_pB}^{d_j\to d_k}$) отримується із $T_{iz_pB}(C,D)$ заміною j-го стовбця на k-ий стовбець матриці C (відповідно D).

Підрозділ 2.3 присвячено явним результатам про повноту, що випливають із попередніх підрозділів. Головним результатом розділу 2 є теорема 2.10.

Теорема 2.10. *Нехай $Q \in L^1([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$, функції $q_{jk}(\cdot)$ є неперервними у точках 0 і 1 при $b_j \neq b_k$, і для деяких $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ виконано такі умови:*

(а) $\mathrm{Re}(ib_jz_k) \neq 0$ при $j \in \{1,\dots,n\}$ і $k \in \{1,2,3\}$;

(б) нуль є внутрішньою точкою трикутника з вершинами z_1, z_2, z_3;

(в) $|\omega_0(z_k)|+|\omega_1(z_k)| \neq 0$, $k \in \{1,2,3\}$, де $\omega_0(z_k)$ і $\omega_1(z_k)$ задані формулами (3)–(4).

Тоді СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$ повна і мінімальна в $L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$.

У 2×2 випадку цей результат приймає наступний вигляд.

Пропозиція 2.14. *Нехай $n = 2$, $\arg b_1 \neq \arg b_2$, $Q \in L^1([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2})$, $C = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{smallmatrix}\right)$ і $D = \left(\begin{smallmatrix} a_{13} & a_{14}\\ a_{23} & a_{24}\end{smallmatrix}\right)$. Нехай також функції $q_{12}(\cdot)$, $q_{21}(\cdot)$ є неперервними у точках 0 і 1, і нехай*

$$\begin{aligned} |J_{32}| + |b_1J_{13}q_{12}(0) + b_2J_{42}q_{21}(1)| &\neq 0,\\ |J_{14}| + |b_1J_{13}q_{12}(1) + b_2J_{42}q_{21}(0)| &\neq 0, \end{aligned}$$

де $J_{jk} := \det\left(\begin{smallmatrix} a_{1j} & a_{1k}\\ a_{2j} & a_{2k}\end{smallmatrix}\right)$, $j,k \in \{1,\dots,4\}$.

Тоді СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$ повна і мінімальна в $L^2([0,1];\mathbb{C}^2)$.

Цей результат узагальнює відповідні результати А. В. Агібалової, М. М. Маламуда і Л. Л. Оридороги[57] для випадку $b_1 b_2^{-1} \notin \mathbb{R}$, що були отримані для аналітичного $Q(\cdot)$, а також результат М. М. Маламуда і Л. Л. Оридороги[25] для випадку $b_1 < 0 < b_2$, що був отриманий для $Q \in C^1([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2})$.

Далі, пропозиція 2.14 ілюструється явним прикладом спецільної системи вектор-функцій.

Наслідок 2.20. *Нехай $a \in \mathbb{C}$, $ia \notin (-\infty,-1] \cap [1,\infty)$. Тоді система вектор-функцій*

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{anx} \sin nx \\ n e^{anx}(\sin nx + i \cos nx) \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}}$$

повна і мінімальна в $L^2([0,\pi];\mathbb{C}^2)$.

Система $\{e^{anx} \sin nx\}_{n\in\mathbb{Z}}$ раніше вивчалася А. Г. Костюченком і А. А. Шкаліковим, Ю. І. Любарським і В. А. Ткаченком, Б. Я. Левіним та іншими (див. історію задачі в частині II, додатку A1 монографії Б. Я. Левіна[58]).

Наступний результат узагальнює відповідний результат М. М. Маламуда і Л. Л. Оридороги[25] для 2×2 системи Дірака про необхідні умови повноти.

Пропозиція 2.22. *Нехай граничні умови мають вигляд $y(0) = Ay(1)$, де $\det A \neq 0$, $AB + BA = 0$ і*

$$Q(1-x) = A^{-1} Q(x) A, \quad x \in [0,\varepsilon], \quad \text{для деякого} \quad \varepsilon > 0.$$

Тоді СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$ не повна в $L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$ і має нескінченний дефект.

Розділ 3 присвячено вивченню базисності Ріса та застосуванням до динамічного генератора моделі балки Тимошенка.

Підрозділ 3.1 присвячено вивченню базисності Ріса. Головна ідея – звести оператор $L_{C,D}(Q)$ до оператора $L_{\widetilde{C},\widetilde{D}}(\widetilde{Q})$, який є збуренням нормального оператора. Для цього, ми знаходимо прості і явні умови на матриці C і D, що забезпечують нормальніть оператора $L_{C,D}(0)$.

Щоб сформулювати головні результати цього підрозділу нам потрібні наступні визначення.

Визначення 3.3[59] [60]. *(i) Послідовність $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ векторів в $\mathfrak{H}$ називаєтьcя **базисом Ріса**, якщо вона допускає представлення $f_k = Te_k$, $k \in \mathbb{N}$, де $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормований базис в $\mathfrak{H}$ і $T : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ є обмеженим оператором з обмеженим оберненим.*

---

[58]Levin Ya. B. Lectures on Entire Functions. *Transl. Math. Monographs. Vol. 150. Amer. Math. Soc., Providence, RI.* 1996. 242 p.

[59]Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов. Москва: Наука, 1965. 448 с.

[60]Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинёв: Штиинца, 1986. 260 с.

(ii) Послідовність підпросторів $\{\mathfrak{H}_k\}_{k=1}^{\infty}$ називається ***базисом Ріса із підпросторів*** *в $\mathfrak{H}$, якщо існує повна послідовність попарно ортогональних підпросторів $\{\mathfrak{H}'_k\}_{k=1}^{\infty}$ і обмежений оператор T в $\mathfrak{H}$ з обмеженим оберненим такі, що $\mathfrak{H}_k = T\mathfrak{H}'_k$, $k \in \mathbb{N}$.*

(iii) Послідовність $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ векторів в $\mathfrak{H}$ називається ***блочним базисом Ріса****, якщо будь-яка її скінченна підпослідовність є лінійно незалежною, і існує зростаюча послідовність $\{n_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ така, що $n_0 = 1$, і послідовність $\mathfrak{H}_k := \mathrm{span}\{f_j\}_{j=n_{k-1}}^{n_k-1}$ є базисом Ріса із підпросторів в $\mathfrak{H}$. Підпростори $\mathfrak{H}_k$ називаються блоками.*

Визначення 3.4. *Нехай $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ – це послідовність кутових значень, $\varphi_k \in (-\pi, \pi]$, і $\varepsilon > 0$. Числа $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ називаються ε-близькими відносно $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$, якщо для деякого $k \in \{1, \ldots, n\}$ виконано нерівності*

$$\lambda, \mu \in \{z \in \mathbb{C} : |\arg z - \varphi_k| < \varepsilon\} \quad i \quad |\operatorname{Re}(e^{-i\varphi_k}(\lambda - \mu))| < \varepsilon.$$

Іншими словами, λ і μ є ε-близькими, якщо для деякого k вони лежать у малому куті з бісектрисою

$$l_+(\varphi_k) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \varphi_k\},$$

та їхні проекції на цей кут є близькими.

Головним результатом цього підрозділу є теорема 3.6, що встановлює блочну базисність Ріса для граничних задач з обмеженим потенціалом і граничними умовами, що роспадаються.

Теорема 3.6. *Нехай $Q \in L^{\infty}([0,1]; \mathbb{C}^{n\times n})$, $n_1 + \ldots + n_r = n/2$ і*

$$B = \operatorname{diag}(B_j)_{j=1}^{r}, \quad C = \operatorname{diag}(C_j)_{j=1}^{r}, \quad D = \operatorname{diag}(D_j)_{j=1}^{r},$$
$$B_j = \begin{pmatrix} b_{j1} I_{n_j} & 0 \\ 0 & b_{j2} I_{n_j} \end{pmatrix}, \quad C_j = \begin{pmatrix} C_{j1} & C_{j2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_{j1} & D_{j2} \end{pmatrix},$$

де $b_{j1} b_{j2}^{-1} < 0$ і $C_{j1}, C_{j2}, D_{j1}, D_{j2} \in \mathrm{GL}(n_j, \mathbb{C})$.

Тоді СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$ є блочним базисом Ріса в $L^2([0,1]; \mathbb{C}^n)$, де кожний блок складається із кореневих підпросторів, що відповідають власним числам оператора A, які є попарно ε-близькими відносно послідовності

$$\{-\varphi_1, \ldots, -\varphi_r, \pi - \varphi_1, \ldots, \pi - \varphi_r\}. \tag{5}$$

Тут $\varphi_j = \arg(b_{j1} - b_{j2})$, $j \in \{1, \ldots, r\}$, і $\varepsilon > 0$ – як завгодно мале число.

Наслідок 3.9 розглядає періодичні (антиперіодичні) граничні умови подібним чином.

Наслідок 3.9. *Нехай $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ є невиродженою діагональною матрицею, $Q \in L^{\infty}([0,1]; \mathbb{C}^{n\times n})$ і граничні умови мають вигляд $y(1) = \pm y(0)$ (тобто $C = \mp D = I_n$). Тоді СВПФ оператора $L_{C,D}(Q)$ є блочним базисом Ріса в $L^2([0,1]; \mathbb{C}^n)$.*

Підрозділ 3.2 присвячено спектральним властивостям динамічного генератора моделі балки Тимошенка. Розглянемо наступну лінійну систему з двох сполучених гіперболічних рівнянь при $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} I_\rho(x)\Phi_{tt} &= K(x)(W_x - \Phi) + (EI(x)\Phi_x)_x - p_1(x)\Phi_t, \quad && x \in [0,\ell], && (6)\\ \rho(x)W_{tt} &= (K(x)(W_x - \Phi))_x - p_2(x)W_t, && x \in [0,\ell]. && (7)\end{aligned}$$

Вібрація балки Тимошенка довжиною ℓ, затиснутої у лівому кінці, визначається цією системою з наступними граничними умовами при $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} W(0,t) = \Phi(0,t) &= 0, && (8)\\ \big(EI(x)\Phi_x(x,t) + \alpha_1\Phi_t(x,t) + \beta_1 W_t(x,t)\big)\big|_{x=\ell} &= 0, && (9)\\ \big(K(x)(W_x(x,t) - \Phi(x,t)) + \alpha_2 W_t(x,t) + \beta_2\Phi_t(x,t)\big)\big|_{x=\ell} &= 0. && (10)\end{aligned}$$

Тут $W(x,t)$ – бічне переміщення центральної осі балки у точці x і час t, $\Phi(x,t)$ – кут обертання нормалі відносно центральної осі балки у точці x і час t, $\rho(x)$ – щілність балки, $K(x)$ – зсувна жорсткість рівномірного перерізу, $I_\rho(x)$ – обертальна інерція, $EI(x)$ – жорсткість на згинання у точці x, $p_1(x)$ і $p_2(x)$ – локально розподілені функції зворотного зв'язку, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$, $j \in \{1,2\}$.

У результатах наведених нижче коефіцієнти задовольняють таким умовам:

$$\begin{aligned} \rho, I_\rho, K, EI \in C[0,\ell], \qquad p_1, p_2 \in L^1[0,\ell], && (11)\\ 0 < C_1 \leqslant \rho(x), I_\rho(x), K(x), EI(x) \leqslant C_2, \quad x \in [0,\ell], && (12)\\ h_1 := \sqrt{EI \cdot I_\rho},\ h_2 := \sqrt{K \cdot \rho} \in W^{1,1}[0,\ell], \quad \text{і} \quad \frac{EI \cdot \rho}{K \cdot I_\rho} \equiv \mathrm{const}\,. && (13)\end{aligned}$$

Енергетичним простором, асоційованим з задачею (6)–(10), є

$$\mathfrak{H} := \widetilde{H}_0^1[0,\ell] \times L^2[0,\ell] \times \widetilde{H}_0^1[0,\ell] \times L^2[0,\ell],$$

де $\widetilde{H}_0^1[0,\ell] := \{f \in W^{1,2}[0,\ell] : f(0) = 0\}$.

Норма в енергетичному просторі визначається наступним чином:

$$\|y\|_{\mathfrak{H}}^2 = \int_0^\ell \big(EI|y_1'|^2 + I_\rho|y_2|^2 + K|y_3' - y_1|^2 + \rho|y_4|^2\big)dx, \quad y = \mathrm{col}(y_1, y_2, y_3, y_4).$$

За рахунок умов (11)–(12) гранична задача (6)–(10) може бути записана як

$$y_t = i\mathcal{L}y, \qquad y(x,t)|_{t=0} = y_0(x), \qquad y = \mathrm{col}(\Phi, \Phi_t, W, W_t),$$

де $\mathcal{L}y$ задається формулою

$$\mathcal{L}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{1}{I_\rho(x)}\Big(K(x)(y_3'-y_1)+\big(EI(x)y_1'\big)'-p_1(x)y_2\Big) \\ y_4 \\ \frac{1}{\rho(x)}\Big(\big(K(x)(y_3'-y_1)\big)'-p_2(x)y_4\Big) \end{pmatrix}$$

на області визначення

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(\mathcal{L}) \;=\; & \Big\{y=\mathrm{col}(y_1,y_2,y_3,y_4) : y_1,y_2,y_3,y_4\in \widetilde{H}^1_0[0,\ell]\,, \\ & EI\cdot y_1'\in W^{1,1}[0,\ell], \quad (EI\cdot y_1')'-p_1y_2\in L^2[0,\ell], \\ & K\cdot(y_3'-y_1)\in W^{1,1}[0,\ell], \quad (K\cdot(y_3'-y_1))'-p_2y_4\in L^2[0,\ell], \\ & \big(EI\cdot y_1'\big)(\ell)+\alpha_1y_2(\ell)+\beta_1y_4(\ell)=0, \\ & \big(K\cdot(y_3'-y_1)\big)(\ell)+\alpha_2y_4(\ell)+\beta_2y_2(\ell)=0\Big\}. \end{aligned}$$

Головним результатом цього підрозділу є теореми 3.14 і 3.15.

Теорема 3.14. *Нехай виконано умови* (11)–(13) *і* $(\alpha_1\pm h_1(\ell))(\alpha_2\pm h_2(\ell))\neq\beta_1\beta_2$. *Тоді СВПФ оператора* $\mathcal{L}$ *повна і мінімальна в* $\mathfrak{H}$.

Якщо, до того ж, $p_1,p_2,h_1',h_2'\in L^\infty[0,\ell]$ *і* $\beta_1=\beta_2=0$, *то СВПФ оператора* $\mathcal{L}$ *є блочним базисом Ріса в* $\mathfrak{H}$.

Теорема 3.15. *Нехай виконано умови* (11)–(13) *і функції* p_1, p_2, h_1', h_2' *є неперервними у точках* 0 *і* ℓ. *Припустимо також, що*

$$\beta_1=\beta_2=0, \quad |\alpha_1^\pm|+|\alpha_2^\pm|\neq 0 \quad i \quad |\alpha_j^\pm|+|p_j(\ell)\mp h_j'(\ell)|\neq 0, \quad j\in\{1,2\},$$

де $\alpha_j^\pm:=\alpha_j\pm h_j(\ell)$. *Тоді СВПФ оператора* $\mathcal{L}$ *повна і мінімальна в* $\mathfrak{H}$.

Розділ 4 присвячено деяким спектральним властивостям ЗДР високого порядку.

Підрозділ 4.1 присвячено наступному диференціальному рівнянню другого порядку:

$$y''+A(t)y=0, \quad t\in[0,+\infty), \tag{14}$$

де $A=: A_R+iA_I$ і A_R – диференційовна функція на $[0,+\infty)$. Теорема 4.1 узагальнює результат В. Б. Лідського і Б. В. Федосова[49].

Теорема 4.1. *Нехай функція* $A(t)$ *задовольняє таким умовам:*

$$A_R(0)>0; \qquad A_R'(t)\geqslant\alpha(t)A_R(t), \quad \text{де}$$

$$\alpha(t)\searrow 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty, \quad \text{i} \quad \int_0^\infty \alpha(t)\,dt=\infty;$$

$$A_R'(t) \geqslant C|A_I(t)|A_R(t) \quad \textit{для деякої сталої} \quad C > 0.$$

Тоді всі розв'язки рівняння (14) *прямують до нуля при* $t \to \infty$, *і*

$$\int\limits_0^\infty \alpha(t)|y(t)|^2\,dt < \infty$$

для будь-якого розв'язку $y(t)$ *рівняння* (14).

Другий результат цього підрозділу, теорема 4.5, використовує ВКБ-оцінки[61] і, схоже, є новим навіть для дійсного потенціалу.

Теорема 4.5. *Нехай функція* $A(t)$ *задовольняє таким умовам:*

(i) $A(t) \in C^2(0, +\infty)$ *і* $A(t) \to \infty$ *при* $t \to +\infty$;

(ii) $A_R(t) > 0$ *при* $t > 0$ *і* $A_I(t)$ *не змінює знак на* $(0, \infty)$;

(iii) наступні інтеграли сходяться:

$$\int_0^{+\infty} \frac{|A''(t)|}{|A(t)|^{5/2}}\,dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{|A'(t)|^2}{|A(t)|^{7/2}}\,dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{|A_I(t)|}{\sqrt{A_R(t)}}\,dt.$$

Тоді всі розв'язки рівняння (14) *прямують до нуля при* $t \to \infty$.

Підрозділ 4.2 присвячено пошуку явної форми спектральної функції розширень Фрідріхса і Крейна мінімального симетричного оператора A заданого в $L^2(0, \infty)$ диференціальним виразом $l(y) := (-1)^n y^{(2n)}(\cdot)$.

Головними результатами цього підрозділу є теореми 4.6 і 4.7.

Теорема 4.6. *Характеристична матриця (функція Вейля) розширення Фрідріхса* A_F *оператора* A *має вигляд*

$$M_F(\lambda) = \left(\frac{-C_j \cdot C_k}{\sin((j+k+1)\alpha)} \cdot \left(\sqrt[2n]{-\lambda} \right)^{j+k+1} \right)_{j,k=0}^{n-1}, \quad \operatorname{Im} \lambda > 0.$$

де

$$C_0 := 1, \qquad C_k := \prod_{p=1}^{k} \operatorname{ctg}(p\alpha), \quad \alpha = \frac{\pi}{2n}, \quad k \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

і

$$\sqrt[2n]{-\lambda} := \sqrt[2n]{r} \cdot e^{\frac{i(\varphi - \pi)}{2n}}, \qquad \lambda = re^{i\varphi}, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

[61] Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1983. 352 с.

відповідна спектральна функція має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_F(t) &= \frac{2n}{\pi}\left(\frac{C_j\cdot C_k}{2n+1+j+k}\cdot t^{\frac{2n+1+j+k}{2n}}\right)_{j,k=0}^{n-1}, \quad t\geqslant 0,\\ \sigma_F(t) &= 0, \quad t<0. \end{aligned}$$

Теорема 4.7 встановлює подібний результат для розширення Крейна A_K.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена питанням повноти та блочної базисності Ріса СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку і застосуванню цих результатів для динамічного генератора моделі балки Тимошенка. Також досліджуються деякі спектральні властивості ЗДР високого порядку на піввісі. Значно розвинена схема доведення повноти для слабко регулярних граничних умов із роботи М. М. Маламуда і Л. Л. Оридороги[25]. Отримані результати узагальнюють результати багатьох попередніх робіт[26 25 57]. Для отримання блочної базисності Ріса використовується теорема Маркуса-Мацаєва[13] про блочну базисність Ріса, що дозволило отримати перші результати про базисність Ріса для загальних систем порядку $n>2$.

У дисертації отримано такі нові результати:

– Достатні умови повноти СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з граничними умовами, які не є слабко регулярними.

– Достатні умови блочної базисності Ріса СВПФ граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку з обмеженою потенціальною матрицею і для широкого класу регулярних граничних умов. Раніше подібний результат був отриманий тільки для задачі Діріхле для системи Дірака.

– Достатні умови повноти і блочної базисності Ріса СВПФ динамічного генератора загальної моделі балки Тимошенка при послаблених умовах гладкості на параметри моделі, які не покривалися результатами попередніх робіт.

– Умови на комплекснозначний потенціал ЗДР другого порядку, які забезпечують прямування усіх розв'язків до нуля на нескінченності. Одна з умов є новою навіть для дійсного потенціалу.

– Явна формула спектральних функцій розширень мінімального диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами на півосі.

Робота має теоретичний характер. Але отримані результати стосовно базисності Ріса моделі балки Тимошенка дають наступні важливі властивості багатьох типів балок: стабільність вібрацій згідно спектру задачі, генерація C_0-напівгрупи, явний вираз розв'язків через власні вектори. До того ж, властивості повноти і базисності, отримані для граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку, мають застосування для систем типу Дірака. Результати про прямування розв'язків ЗДР другого порядку до нуля на нескінченності відіграють важливу роль при вивченні стабільності відповідних фізичних моделей.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Луньов А. А. Про регулярність степенів диференціального оператора. *Український математичний вісник.* 2009. Т. 6, № 4. С. 475–491.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Zentralblatt MATH, Google Scholar)

2. Луньов А. А., Оридорога Л. Л. Про прямування до нуля рішень диференціального рівняння другого порядку з комплекснозначним потенціалом. *Український математичний вісник.* 2011. Т. 8, № 3. С. 580–595 (Lunyov A. A., Oridoroga L. L. On the convergence to zero of solutions of a second-order differential equation with complex-valued potential. *Journal of Mathematical Sciences.* 2012. V. 182. № 1. P. 87–99).

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus**, Zentralblatt MATH, Google Scholar)

3. Lunyov A. A. Spectral functions of the simplest even order ordinary differential operator. *Methods of Functional Analysis and Topology.* 2013. Vol. 19, № 4. P. 319–326.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз Zentralblatt MATH, MathSciNet, Google Scholar)

Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

4. Лунёв А. А., Оридорога Л. Л. Точные константы в обобщенных неравенствах для промежуточных производных. *Математические заметки.* 2009. Т. 85,

№ 5. С. 737–744 (Lunev A.A., Oridoroga L.L. Exact constants in generalized inequalities for intermediate derivatives. *Mathematical Notes.* 2009. V. 85, № 5-6. p. 703–711).

(Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus**, Zentralblatt MATH, MathSciNet, Google Scholar)

5. Lunyov A. A., Malamud M. M. On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications. *Journal of Spectral Theory.* 2015. Vol. 5, № 1. P. 17–70.

   (Входить до міжнародних наукометричних баз **Scopus**, Web of Science, Zentralblatt MATH, MathSciNet, Impact Factor: 1.160, Q1)

Наукові праці, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

6. Луньов А. А. Точні константи в нерівностях для проміжних похідних. Тези доповідей *наукової конференції студентів математичного факультету*: зб. наук. та наук.-метод. праць. Донецьк: Донецький національний університет, 2009. С. 3–4.

7. Lunyov A. A. On completeness of the root vector system of boundary value problem for first order system. Book of Abstracts of *International Workshop on Spectral Theory and Differential Operators*, August 27–31, 2012, TU Graz, Austria, 2012. P. 23–25.

8. Луньов А. А. Про повноту системи кореневих векторів граничної задачі для системи першого порядку. Book of Abstracts of *the Fourth International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii*, November 14–17, 2012, Donetsk, 2012. P. 48–49.

Анотація

Луньов А. А. ***Питання повноти і базисності граничних задач для систем звичайних диференціальних рівнянь.*** — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Харків, 2021.

Дисертаційна робота присвячена деяким питанням спектральної теорії граничних задач для загальних систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) першого порядку на скінченному інтервалі. Також досліджуються деякі спектральні властивості ЗДР високого порядку на півосі.

Отримано нові достатні умови повноти і блочної базисності систем власних і приєднаних функцій граничних задач для загальних систем ЗДР першого порядку. Отримані результати застосовуються для отримання нових достатніх умов повноти і блочної базисності Ріса для динамічного генератора загальної моделі балки Тимошенка при послаблених умовах гладкості на параметри моделі, які не покривались попередніми результатами.

Також отримано нові умови на комплекснозначний потенціал ЗДР другого порядку, які забезпечують прямування усіх розв'язків до нуля на нескінченності. За допомогою теорії граничних трійок отримано явну формулу спектральних функцій розширень мінімального диференціального оператора парного порядку з нульовими коефіцієнтами на півосі.

Ключові слова: Система звичайних диференціальних рівнянь, регулярні граничні умови, повнота кореневих векторів, базисність Ріса, модель балки Тимошенка, ВКБ-оцінки, спектральна функція, функція Вейля.

Аннотация

Лунёв А. А. ***Вопросы полноты и базисности граничных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.*** — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков, 2021.

Диссертация посвящена некоторым вопросам спектральной теории граничных задач для общих систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка на конечном отрезке. Также исследуются некоторые спектральные свойства ОДУ высокого порядка на полуоси.

Для граничных задач для общих систем ОДУ первого порядка с нерегулярными условиями получены новые общие достаточные условия полноты систем собственных и присоединенных функций (ССПФ), существенно зависящие от значений потенциальной матрицы на концах отрезка. Общие абстрактные результаты применяется для получения явных условий полноты в различных случаях.

Также получены новые достаточные условия блочной базисности ССПФ граничных задач для общих систем ОДУ первого порядка с ограниченной потенциальной матрицей и широким классом регулярных граничных условий, охватывающих разделяющиеся и периодические граничные условия.

Полученные результаты применяются для получения новых достаточных условий полноты и блочной базисности Рисса для динамического генератора общей модели балки Тимошенко при ослабленных условиях гладкости на параметры модели, которые не покрывались предыдущими результатами.

Также получены новые условия на комплекснозначный потенциал ОДУ второго порядка, которые обеспечивают стремление всех решений к нулю на бесконечности. С помощью теории граничных троек получена явная формула спектральных функций расширений минимального дифференциального оператора четного порядка с нулевыми коэффициентами на полуоси.

Ключевые слова: Система обыкновенных дифференциальных уравнений, регулярные граничные условия, полнота корневых векторов, базисность Рисса, модель балки Тимошенко, ВКБ-оценки, спектральная функция, функция Вейля.

Abstract

Lunyov A. A. ***On completeness and Riesz basis property of boundary value problems for systems of ordinary differential equations.*** — Manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Physics and Mathematics: Speciality 01.01.01 Mathematical Analysis. — B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2021.

The thesis is devoted to the study of some spectral properties of the general boundary value problems (BVP) for first order system of ordinary differential equations (ODE). Some spectral properties of higher order ODE on semi-axis are also investigated.

For general BVP for first order system of ODE with non-weakly regular boundary conditions, completeness property was obtained under certain potential-dependent conditions. Riesz basis property with parentheses for such BVP with a wide class of regular boundary conditions and bounded potential matrix was established. These results were used to obtain new conditions of completeness and Riesz basis property with parentheses for the dynamic generator of the general spatially non-homogeneous Timoshenko beam model with smoothness assumptions on the parameters of the model that were not treated in the previous papers.

For the second order ODE, new conditions on a complex-valued potential guarantying convergence of all solutions to zero at infinity were obtained. One of the results is new even in the case of real-valued potential. An explicit formula for a spectral function for Dirichlet and Neumann BVP on a semiaxis for differential operator of even order with zero coefficients was obtained using the method of boundary triplets.

Keywords: Systems of ordinary differential equations, regular boundary conditions, completeness of root vectors, Riesz basis property, Timoshenko beam model, WKB-estimates, spectral function, Weyl function.