

Відгук

офіційного опонента, член-кореспондента НАН України,
доктора фізико-математичних наук, директора Інституту прикладної
математики і механіки НАН України

Скрипніка Ігоря Ігоровича

на дисертаційну роботу Карпенко Ірини Миколаївни

«Метод задачі Рімана-Гільберта для модифікованого рівняння Камасси-Хольма з ненульовими крайовими умовами»,
представлену на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань
11 «Математика і статистика» за спеціальністю 111 «Математика»

Актуальність роботи

Солітонні рівняння відіграють важливу роль в нелінійній фізиці та застосовуються для пояснення різних природних явищ. Вперше солітони (локалізовані хвилі, які пружно взаємодіють одна з одною) були помічені у 1960-х роках Забужским та Краскалом, які виконували числові експерименти з періодичною задачею для рівняння Кортевега-де Фріза. Ці результати надихнули Гарднера, Гріна, Крускала, Міуру, Лакса, Захарова і Шабата визначити поняття інтегровних (солітонних) рівнянь та розвинути загальний систематичний підхід до розв'язання початкових задач для таких рівнянь.

Інтегровність є ключовим поняттям у фізиці і, відповідно до цього, не дивно, що, окрім класичних інтегровних систем, таких як рівняння Кортевега-де Фріза, нелінійне рівняння Шредінгера, рівняння синус-Гордона та інші, постійно виникають нові цікаві фізичні моделі, які привертають увагу вчених, як фізиків, так і математиків. Зокрема, у 1993 році у роботах Камасси та Хольма з'явилося рівняння, що описує поширення хвиль на поверхні мілкої води над пласким дном, відоме тепер як рівняння Камасси-Хольма. Це рівняння не є класичним у тому сенсі, що воно допускає негладкі розв'язки солітонного типу, пікони (розв'язки, що мають форму піків, з негладкою поведінкою біля піку).

Цей факт надихнув до дослідження різних модифікацій цього рівняння. Зокрема, у 2009 році Новіков застосував підхід збуруненої симетрії для класифікації інтегровних рівнянь типу Камасси-Хольма. Модифіковане рівняння Камасси-Хольма (МКХ) було отримано в результаті цієї класифікації як таке, що має кубічну нелінійність. Раніше (у 1996 році) воно виникло

незалежно у роботах Фокаса та Олвера і Розенау. Рівняння мКХ має низку цікавих фізичних та математичних властивостей. Зокрема, воно має бігамільтонову структуру, є цілком інтегровним та належить до класу піконних рівнянь.

Основні результати дисертаційної роботи

Дисертаційна робота присвячена аналізу низки початкових задач (задач Коші, де даними є значення розв'язку на всій просторовій прямій) для модифікованого рівняння Камасси-Хольма. Дисертація складається з чотирьох розділів. У першому розділі зроблено огляд літератури, у якому, зокрема, наведені основні результати, отримані на сьогоднішній день у теорії піконних інтегровних рівнянь. У розділах 2–4 наведені основні результати дисертаційної роботи: у другому та третьому розділах розглядається задача Коші для рівняння мКХ на постійному ненульовому фоні, а у четвертому розділі автор розглядає задачу Коші з початковими даними типу «сходінки», тобто такими, які по-різному ведуть себе, коли просторова змінна прямує до одної та іншої нескінченності. Такі задачі викликають значний інтерес, оскільки вони можуть служити моделями для аналізу різних нелінійних хвильових явищ.

Для аналізу всіх задач, що розглядаються у дисертаційній роботі, застосовується метод оберненої задачі розсіювання у формі задачі аналітичної факторизації типу Рімана-Гільберта. Цей метод виявився дуже ефективним при дослідженні класичних інтегровних рівнянь, зокрема, при дослідженні поведінки розв'язків задач з загальними початковими умовами (з певних функціональних класів) за великим часом. Тому не дивно, що з'явилися спроби адаптувати цей метод до дослідження піконних нелінійних інтегровних рівнянь. Але виявилось (зокрема, у роботах здобувачки), що така адаптація не є автоматичною, але потребує значних зусиль у подоланні численних аналітичних труднощів на її шляху.

Для задачі на постійному ненульовому фоні (розділи 2, 3), автором вперше запропонована та досліджена відповідна вихідна задача Рімана-Гільберта. А саме, було запропоновано калібрувальне перетворення для рівнянь пари Лакса, що приводить початкову пару Лакса до вигляду, що дозволяє ефективно контролювати аналітичні властивості її розв'язків як функцій спектрального параметру; потім були введені відповідні розв'язки

Йоста та пов'язані з ними коефіцієнти розсіювання, та проаналізовані їх аналітичні та асимптотичні властивості; використовуючи ці властивості було побудовано асоційовану задачу Рімана-Гільберта. Використовуючи розроблений формалізм, здобувачка отримала параметричне зображення (у термінах розв'язку асоційованої задачі Рімана-Гільберта) розв'язку початкової задачі для модифікованого рівняння Камасси-Хольма, яке розглядається на постійному ненульовому фоні, та описала односолітонні розв'язки (як регулярні, так і нерегулярні). Цікавою особливістю рівняння мКХ у порівнянні з рівнянням КХ є те, що для контролю розв'язків Йоста при $\lambda = 0$ (вихідний спектральний параметр) не треба вводити нове калібрувальне перетворення початкової пари Лакса, а достатньо перегрупувати члени у парі Лакса, яка забезпечує ефективний контроль її розв'язків при $\lambda \rightarrow \infty$. Для дослідження асимптотики за великим часом, було адаптовано нелінійний метод перевалу (метод Дейффа-Жу) до цієї задачі Рімана-Гільберта. Ще однією особливістю рівняння мКХ є те, що асоційована задача РГ має умови сингулярності при $\mu = 1$ та $\mu = -1$ (модифікований спектральний параметр) з різними матричними структурами, що не дозволяє позбутися їх шляхом зведення матричної задачі РГ до векторної (як у випадку оригінального рівняння Камасси-Хольма). Зведення вихідної задачі РГ до регулярної (до якої вже застосовується метод Дейффа-Жу) виявилось непростю задачею, з якою здобувачка з успіхом впоралася.

У розділі 4 розглядається задача Коші для модифікованого рівняння Камасси-Хольма з початковими даними типу «сходинок». При побудові формалізму задачі Рімана-Гільберта, здобувачка провела докладні дослідження аналітичних властивостей відповідних розв'язків Йоста та спектральних функцій, включаючи їхню симетрію та поведінку в точках розгалуження. Розроблений формалізм дозволив отримати параметричне зображення розв'язку початкової задачі для модифікованого рівняння Камасси-Хольма, яке розглядається на ступінчатому ненульовому фоні, в термінах розв'язку пов'язаної з нею задачі Рімана-Гільберта. Зауважу, що формалізм розроблено для двох випадків: коли правий фон для просторової змінної більший за лівий, і навпаки.

В цілому, проведені дослідження свідчать про те, що їхня авторка майстерно опанувала сучасні методи дослідження інтегровних рівнянь, а отримані нею результати є новими і важливими для подальшого розвитку теорії таких рівнянь і систем. Вони опубліковані у визнаних фахових виданнях, які індексовані у всіх провідних наукометричних базах та належать до 2 та 3 квартилів відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank. Потенційно, отримані результати можуть мати практичні застосування, зокрема, у гідродинаміці.

Зауваження до дисертаційної роботи

До тексту можна зробити наступні зауваження:

1. Для наочності, у розділі 2 можна було б зобразити солітонні розв'язки.
2. У розділі 3 можна було б більш детально пояснити солітонний випадок.
3. Можна було б навести більш детальне доведення теореми 4.3.6.

Загальні висновки

Ці зауваження, безумовно, не впливають на загальне, цілком позитивне, враження від роботи. Вважаю, що дисертаційна робота «Метод задачі Рімана-Гільберта для модифікованого рівняння Камасси-Хольма з ненульовими крайовими умовами» задовольняє всім вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затверджене постановою Кабінету Міністрів України № 44 від 12.01.2022, а її авторка, Карпенко Ірина Миколаївна, безумовно заслуговує на присудження їй ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика» з галузі знань 11 «Математика і статистика».

Офіційний опонент
член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
директор Інституту прикладної
математики і механіки НАН України



Ігор СКРИПНИК

Ірина Карпенко завідує
Інститутом прикладної математики і механіки НАН України
(Савунов Р.В.)

