

Відгук надійшов до редакції
20.11.2020

ВХУС (Є.Я.Хрущ)

ВІДГУК ОПОНЕНТА

на дисертаційну роботу Теплової Дар'ї Павлівни
"Застосування теорії випадкових матриць до багатовимірних часових рядів",
подану на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань
11 – Математика та статистика за спеціальністю 111 – Математика

Сьогодні науковці часто зустрічаються з багатовимірними часовими рядами, наприклад у таких галузях, як цифровий зв'язок, електроенцефалографія, аналіз фінансових даних, промисловий контроль та в багатьох інших сферах. При цьому часто неможливо зібрати достатньо велику кількість результатів спостережень, оскільки тривалість сигналів обмежена та статистичні дані можуть змінюватися на великих проміжках часу, що не дає можливості користуватися класичним статистичним аналізом. Як наслідок, основні схеми виведення не можуть бути застосовані так, як у класичних випадках малої розмірності (коли розмірність даних набагато менша за їх кількість). Тому у випадку, коли кількість спостережень та їх розмірність збігаються до нескінченності так, що їх відношення збігається до ненульової сталої, виникає необхідність у нових статистичних методах. Зокрема, одним з таких методів, який почав використовуватися вже в цьому сторіччі, є теорія випадкових матриць. Саме для дослідження багатовимірних часових рядів використовуються асимптотичні властивості випадкових матриць, розмірність яких зростає до нескінченності. При цьому досліджуються функціонали, що залежать від матриць коваріацій та більш складних матриць, ніж матриці коваріацій.

В дисертаційній роботі Дар'ї Теплової вивчається поведінка власних значень двох видів ансамблів випадкових матриць. Перший з них використовується у проблемах статистичного висловлювання, що пов'язані з багатовимірними часовими рядами, що мають раціональний спектр.

Розглядається багатовимірний часовий ряд $v_n = u_n + y_n$, $n \in \mathbb{Z}$, розмірністю M , де y_n – це складова, яка представляє гауссівський шум така, що математичне очікування $E(y_{n+k}y_n^*) = R\delta_k$ для деякої невідомої додатно визначеної матриці R , і складова u_n є "корисним" сигналом з раціональним спектром, який залишається невідомим. У другому та третьому розділах даної дисертації вивчається розподіл сингулярних значень емпіричної матриці автоковаріацій у випадку, коли корисний сигнал відсутній, тобто $v_n = y_n$ і є гауссівським вектором з нульовим математичним сподіванням та матрицею коваріацій R_N , що залежить також від N . А саме, дисертантка вивчає асимптотику сингулярних значень матриці автоковаріацій $W_{f,N}W_{p,N}^* = N^{-1}Y_{f,N}Y_{p,N}^*$, що співпадають з квадратними коренями власних значень матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$.

Головними результатами цієї частини дисертації є наступні:

- було знайдено вираз для математичного сподівання резольвенти. Далі, так як перетворення Стілтєса нормованих рахуючих мір $\hat{\nu}_N$ матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ є обмеженими голоморфними функціями на компактах, дисертантка використовує класичну теорему Монтеля та доводить, що кожна послідовність перетворень Стілтєса цих мір містить підпослідовність, що збігається. Раніше дисертанткою була доведена низка теорем про властивості перетворення Стілтєса, з якої випливає, що відповідна підпослідовність мір збігається до деякої міри. Доводиться рівняння для перетворення Стілтєса цієї міри та те, що у деякій малій області це рівняння має єдине рішення, яке не залежить від послідовності мір. Таким чином, усі одержані перетворення Стілтєса для усіх граничних мір тотожно співпадають, звідки випливає, що слабо майже напевно $\hat{\nu}_N - \nu_N \rightarrow 0$ коли $N \rightarrow +\infty$, інакше кажучи, знайдена так звана асимптотично еквівалентна міра для $\hat{\nu}_N$,
- доведено, що з додатковим припущенням, а саме, якщо нормована рахуюча міра матриці R_N збігається до деякої кінцевої міри, міра $\hat{\nu}_N$ має границю, яка очевидно співпадає з границею міри ν_N ,
- детально досліджена поведінка перетворення Стілтєса міри ν_N біля осі дійсних чисел та доведені властивості відповідних границь,
- отримано асимптотичну поведінку щільності міри ν_N ,
- описано носій S_N міри ν_N та показано залежність між формою носія та власними значеннями матриці коваріацій R_N ,
- показано, що носій S_N належить деякому компактному відрізку, що не залежить від N , та наведена достатня умова для того, щоб він був представлений єдиним інтервалом.
- встановлено, що майже напевно усі власні значення матриці $W_{f,N}W_{p,N}^*W_{p,N}W_{f,N}^*$ належать околу носія S_N для достатньо великих N ,
- визначена функція, що є границею перетворення Стілтєса міри ν_N на дійсній вісі.

Отримані результати можливо використати для оцінки найбільшого сингулярного значення та відповідного лівого сингулярного вектора у випадку присутнього корисного сигналу та оцінки наближення для параметрів часового ряду.

Другий ансамбль виникає у проблемах теорії квантової інформації та є модифікацією моделі великих випадкових матриць. Дисертантка досліджує нормовану рахуючу міру емпіричних матриць коваріацій $\mathcal{M}_N = N^{-2} \sum_{\mu=1}^M B_N(Y^\mu \otimes Y^\mu)(Y^\mu \otimes Y^\mu)^* B_N^*$, де B_N є не випадковими матрицями,

а випадкові вектори Y^μ є незалежними з однаково розподіленими елементами, які можуть не бути гауссівськими, але мають рівномірно обмежений другий момент. Дослідження, яке тут проводить дисертантка, використовує інший класичний метод теорії випадкових матриць, а саме метод обурення рангу один.

Головними результатами цієї частини дисертації є наступні:

- доведено, що нормована рахуюча міра власних значень визначеного ансамблю матриць коваріацій слабко збігається майже напевно до деякої не випадкової міри,
- наведено рівняння, якому задовольняє перетворення Стілтєса граничної міри.

Зауваження

1. Вступ: слід пояснити, чому перетворення Стілтєса застосовується замість стандартного перетворення Фур'є.
2. с.25, 8 $\uparrow$: потрібно замінити z на Iz ,
3. с.47, в (2.27) и в (2.28) не вказано, якої може бути стала c ,
4. с.66, 11 $\downarrow$ визначення терміна "послідовність мір щільна" повинно бути виділено, а не заховано всередині доказу однієї з теорем,
5. с.66, 10 $\uparrow$ не можна в одній формулі вживати t_n , і $t_n(z)$,
6. с.70, потрібен більш докладний доказ Зауваження 2.1,
7. с.74, 4 $\uparrow$ треба при опису властивостей перетворення Стілтєса пояснити, коли збіжність перетворень тягне за собою слабку збіжність мір, так як це властивість використовується в дисертації на цій сторінці без будь-яких згадок,
8. с.76, 1 $\uparrow$ треба дати визначення для $\mu_1 \boxtimes \mu_2$,
9. с.85, 5 $\downarrow$ в (3.1) і в наступній формулі треба замінити z на z_n ,
10. с.99, звичайно, можна прибрати індекс N у ω , R , c . Але тоді це треба зробити у всіх формулах цього параграфа,
11. с.100, 12 $\uparrow$ незрозуміло, що означає $(S^0)^c$, це або $\mathbf{R} \setminus \mathbf{S}^0$, або $\mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{S}^0$, або $\mathbf{C} \setminus \mathbf{S}^0$?
12. с.100, "Для $x > 0$ рівняння $\phi(w) = x$ поліноміальне". Це означає, що $\phi(w)$ поліном?

Але ці недоліки є несуттєвими та не впливають на мою дуже високу оцінку дисертації.

Зауважу, що використання перетворення Стілтєса потребує від здобувача вільного володіння методами комплексного аналізу, і хочу відзначити професійний рівень використання єю цих методів.

Дисертація має теоретичний характер, написана сучасною математичною мовою. Всі результати дисертації є новими, вони доповідалися на багатьох семінарах та семи конференціях, всі основні твердження строго доведені, їх достовірність не викликає сумніву. Текстових запозичень без посилання на джерело я не побачив.

З першого розділу дисертації випливає добрий рівень обізнаності здобувача з результатами наукових досліджень інших учених із зазначених у дисертації наукових завдань, їх порівнянність з результатами наукових досліджень здобувача,

Результати дисертації з достатньою повнотою відображені в 2 статтях, що входять до міжнародних наукометричних баз, з яких одна публікація в фаховому виданні України, а друга в міжнародному виданні з високим рейтингом, публікації не є тотожними за змістом. Крім того, результати досліджень доповідались та були надруковані в збірниках тез доповідей на 7 наукових конференціях, в тому числі в Майнці (Німеччина), в Ліллі (Франція) і в Барселоні (Іспанія).

Результати дисертації можуть знайти застосування в математичній фізиці, в теорії ймовірностей та математичній статистиці, і навіть за межами математики - в різних галузях науки, всюди, де дослідження потребує статистичний аналіз багатовимірних часових рядів.

Висновок. Дисертація Теплової Д.П. "Застосування теорії випадкових матриць до багатовимірних часових рядів" є завершеною цілісною науковою працею, одержані автором результати мають значний науковий інтерес. Вони можуть бути використані в наукових дослідженнях колективів Львівського, Харківського, Чернівецького, Прикарпатського, Київського національних університетів, ІМ НАН України, ФТІНТ НАН України, та у багатьох зарубіжних університетах.

Дисертація відповідає всім необхідним вимогам, а її автор заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 – Математика та статистика за спеціальністю 111 – Математика.

Науковий опонент

доктор фіз.-мат. наук, професор

С.Ю.Фаворов

