

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Рибалко Ян Владиславович

УДК 517.955, 517.957

Дисертація

**«Метод оберненої задачі розсіювання для нелокальних
інтегровних рівнянь»**

Спеціальність 111 «математика»

(Галузь знань 11 «математика та статистика»)

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне
джерело.

_____ Рибалко Я.В.

Науковий керівник **Шепельський Дмитро Георгійович**, доктор
фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний
науковий співробітник Фізико-технічного інституту низьких температур
ім. Б.І. Веркіна Національної академії наук України.

Харків – 2021

Анотація

Рибалко Я.В., “Метод оберненої задачі розсіювання для нелокальних інтегровних рівнянь,” – кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «математика» (галузь знань 11 «математика та статистика»). Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна Національної академії наук України.

Предметом дослідження дисертаційної роботи є початкові задачі для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ):

$$\begin{aligned}iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2\sigma q^2(x, t)\bar{q}(-x, t) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\q(x, 0) &= q_0(x),\end{aligned}$$

де $i^2 = -1$, $q(x, t) \in \mathbb{C}$, \bar{q} позначає комплексно спряжену до q , а параметр σ приймає значення 1 (фокусує рівняння) або -1 (дефокусує рівняння). Розглядаються задачі з двома типами крайових умов при $|x| \rightarrow \infty$: (i) нульовими крайовими умовами, тобто $q(x, t) \rightarrow 0$ достатньо швидко при $x \rightarrow \pm\infty$ для всіх $t \geq 0$ (включаючи задану початкову функцію $q(x, 0)$), та (ii) асиметричними ступінчастими крайовими умовами:

$$\begin{aligned}q(x, t) &= o(1), & x \rightarrow -\infty, \quad t \geq 0, \\q(x, t) &= A + o(1), & x \rightarrow +\infty, \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

де $A > 0$, а через $o(1)$ позначено функції, що прямують до нуля. Зазначимо, що ступінчаста початкова задача для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера розглядається вперше.

У Розділі 2 дисертаційної роботи розглядається задача Коші зі спадаючими до нуля початковими даними, де розв'язок при всіх фіксованих $t > 0$ теж має спадати до нуля, коли $|x| \rightarrow \infty$. Для такої початкової задачі розроблено (підрозділ 2.1) метод оберненої задачі розсіювання у вигляді задачі факторизації Рімана-Гільберта, який виявився зручним для подальшого асимптотичного аналізу поведінки розв'язків задачі Коші за великим часом (підрозділ 2.2). Доведено, що вихідна задача Рімана-Гільберта задовольняє новій (нелокальній) умові симетрії. Для отримання асимптотики за великим часом, узагальнено так званий нелінійний метод перевалу (метод Дейфта і Жу) на випадок, коли певна комбінація спектральних функцій, що розглядається на контурі стрибка задачі Рімана-Гільберта, не є дійснозначною функцією (на відміну від випадку класичного (локального) нелінійного рівняння Шредінгера та інших відомих локальних нелінійних інтегровних рівнянь). Зокрема, показано, що для отримання коректних оцінок у асимптотичних формулах, спектральні функції мають задовольняти певну умову на поведінку аргументу на дійсній осі, яка апріорі виконується у випадку локальних інтегровних рівнянь. Таке припущення щодо поведінки аргументу спектральних функцій зроблено вперше у асимптотичному аналізі інтегровних систем.

Основною особливістю отриманого асимптотичного результату є те, що степінь спадання розв'язку початкової задачі до нуля при $t \rightarrow \infty$ вздовж напрямку $x/t = \text{const}$ залежить, взагалі кажучи, від значення x/t (на відміну від локального нелінійного рівняння Шредінгера, де головний асимптотичний член (у випадку відсутності солітонів) прямує до нуля як $O(t^{-1/2})$ у будь-якому напрямку). Більш точно, доведено, що головний член асимптотики розв'язку має вигляд

$$q(x, t) \sim t^{-\frac{1}{2} + \text{Im} \nu(-\xi)} p(-\xi) \exp \{ 4it\xi^2 - i \text{Re} \nu(-\xi) \ln t \}, \quad t \rightarrow \infty,$$

де $\xi = \frac{x}{4t} = \text{const}$, а функції $\nu(-\xi)$ та $p(-\xi)$ визначаються явно у термінах спектральних функцій, які, в свою чергу, визначаються початковими даними $q_0(x)$. Необхідною умовою існування такої асимптотики є умова

$\text{Im } \nu(-\xi) \in (-1/2, 1/2)$, яка формалізує згадану вище умову на поведінку аргументу певної спектральної функції (зазначимо, що у випадку локального нелінійного рівняння Шредінгера, $\text{Im } \nu(-\xi) \equiv 0$ для будь-якого початкового даного).

У Розділі 3 розглядається початкова задача для нелокального фокусуєчого нелінійного рівняння Шредінгера (тобто, у випадку $\sigma = 1$) зі ступінчастими граничними умовами: $q(x, t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$ та $q(x, t) \rightarrow A$ при $x \rightarrow \infty$, де $A > 0$. Для цієї задачі вперше запропоновано та детально розроблено метод обереної задачі розсіювання. Зокрема, показано, що відповідні спектральні функції мають особливості на неперервному спектрі, отримано зв'язки (відсутні у випадку локального рівняння) між певними спектральними функціями та дискретним спектром, та отримано точний солітонний розв'язок типу кінка

$$q(x, t) = \frac{A}{1 - e^{-Ax - iA^2t + i\phi_1}}, \quad \phi_1 \in \mathbb{R},$$

який має ізольовані, періодичні по t сингулярності у точках $x = 0$, $t = t_n$, де $t_n = \frac{\phi_1}{A^2} + \frac{2\pi}{A^2}n$, $n \in \mathbb{Z}$. Показано, що вихідна задача Рімана-Гільберта (у тому числі, у випадку початкових даних у вигляді “чистої сходінки”) має специфічну сингулярність на контурі стрибка задачі. Для проведення асимптотичного (за великим часом) аналізу, розроблено відповідну адаптацію нелінійного метод перевалу, яка, як і у випадку задачі на нульовому фоні (зі спадаючими початковими даними), ускладнюється “накруткою” аргументу певної спектральної функції. Показано, що асимптотика вздовж напрямків $\xi = \frac{x}{4t} = \text{const}$ має якісно різний вигляд у двох чверть-площинах півплощини $-\infty < x < \infty$, $t > 0$: (i) при $x < 0$, розв'язок описується формулою типу Захарова-Манаківа, особливістю якої є залежність швидкості спадання до 0 від напрямку; (ii) при $x > 0$, розв'язок прямує до “модульованої константи”, тобто сталого значення, яке залежить від напрямку $\xi = \frac{x}{4t} = \text{const}$:

коли $t \rightarrow \infty$,

$$q(x, t) \sim \begin{cases} t^{-\frac{1}{2} - \text{Im} \nu(\xi)} \alpha_1(\xi) \exp \{ 4it\xi^2 - i \text{Re} \nu(\xi) \ln t \}, & x < 0, \\ A\delta^2(0, \xi), & x > 0, \end{cases}$$

де функції $\nu(\xi)$, $\alpha_1(\xi)$ та $\delta^2(0, \xi)$ явно виписуються у термінах спектральних функцій, що відповідають початковому даному $q_0(x)$. Як і у випадку задачі на нульовому фоні, необхідною умовою існування такої асимптотики є умова $\text{Im} \nu(-\xi) \in (-1/2, 1/2)$.

У Розділі 4 розглядається задача Коші зі ступінчастими граничними умовами $q(x, t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$ та $q(x, t) \rightarrow A > 0$ при $x \rightarrow \infty$ для дефокусууючого рівняння (тобто з $\sigma = -1$). Центральна увага приділяється задачам з початковими даними, близькими, у певному сенсі, до “чистої сходинки зі зміщенням”, тобто до $q_{R,A}(x)$, де $q_{R,A}(x) = 0$ при $x < R$ та $q_{R,A}(x) = A$ при $x > R$, де $R > 0$. Зазначимо, що для нелокальних інтегровних рівнянь, задача з початковим даним у вигляді сходинки зі зміщенням розглядається вперше. Через те, що нелокальне нелінійне рівняння Шредінгера (на відміну від його локального аналога) не є трансляційно інваріантним, поведінка розв’язків таких задач апіорі має суттєво залежати від параметра R .

Для цієї задачі також був розроблений метод оберненої задачі розсіювання у формі задачі факторизації Рімана-Гільберта. Виявлено характерні риси даних для задачі Рімана-Гільберта (структура дискретних даних та властивості функцій на контурі стрибка), які суттєво відрізняються у порівнянні з локальними задачами. Зокрема, певні спектральні функції мають “накрутку” аргументу більшу, ніж π , у точках на неперервному спектрі, кількість яких залежить від R . Наявність таких точок суттєво впливає на асимптотичний аналіз і, як, наслідок, на кінцевий асимптотичний результат. Показано, що асимптотика вздовж напрямків $\xi = \frac{x}{4t} = \text{const}$ є якісно різною у різних секторах у (x, t) площині, кількість яких залежить від зв’язку між A та R (тобто між амплітудою граничних умов та величиною зміщення): при фіксованому A , чим більше R , тим більшою є

кількість секторів з якісно різною поведінкою розв'язку за великим часом. Ці сектори можна віднести до двох різних груп, які чергуються між собою: у секторах першої групи, розв'язок прямує до нуля, а у секторах другої групи розв'язок наближається до константи (залежної від значення x/t).

Точніше, має місце наступний асимптотичний результат. Нехай $n \in \mathbb{N}$ таке, що $\frac{(n-1)\pi}{A} < R < \frac{n\pi}{A}$, і нехай початкові дані породжують числа $\{p_j\}_1^n$ і $\{\omega_j\}_1^{n-1}$ ($p_j \in \mathbb{C}$ із $\text{Im } p_j > 0$ та $\omega_j \in \mathbb{R}$) (у спосіб, аналогічний тому, як подібні числа породжуються “чистою сходінкою зі зміщенням”), які задовольняють нерівностям

$$-\infty < \text{Re } p_n < -\omega_{n-1} < \text{Re } p_{n-1} < -\omega_{n-2} < \dots < \text{Re } p_1 < 0.$$

Тут $\{p_j\}_1^n$ – нулі відповідної спектральної функції, а числа $\{\omega_j\}_1^{n-1}$ фігурують в умовах на $\text{Im } \nu$: $\text{Im } \nu(\xi) - m \in (-1/2, 1/2)$ при $-\omega_{n-m} < \xi < \text{Re } p_{n-m}$, та $\text{Im } \nu(-\xi) - m \in (-1/2, 1/2)$ при $\omega_{n-m-1} < \xi < -\text{Re } p_{n-m}$, $m = \overline{0, n-1}$. Тоді існують $4n$ секторів у напівплощині (x, t) з $t > 0$, у яких головний член асимптотики при $t \rightarrow \infty$ має наступний вигляд:

$$q(x, t) \sim \begin{cases} A\delta^2(0, \xi) \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\xi}{p_{n-s}} \right)^2, & -\text{Re } p_{n-m} < \xi < \omega_{n-m}, \\ t^{-\frac{1}{2} - \text{Im } \nu(\xi) + m} \alpha_3(\xi) \exp\{4it\xi^2 - i \text{Re } \nu(\xi) \ln t\}, & -\omega_{n-m} < \xi < \text{Re } p_{n-m}, \\ \frac{-4\bar{p}_{n-m}^2}{A\delta^2(0, -\xi)} \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\bar{p}_{n-s}}{\xi} \right)^2, & \text{Re } p_{n-m} < \xi < -\omega_{n-m-1}, \\ t^{-\frac{1}{2} + \text{Im } \nu(-\xi) - m} \alpha_4(\xi) \exp\{4it\xi^2 - i \text{Re } \nu(-\xi) \ln t\}, & \omega_{n-m-1} < \xi < -\text{Re } p_{n-m}. \end{cases}$$

Тут $m = \overline{0, n-1}$, $\omega_0 = 0$, $\omega_n = +\infty$, а функції $\delta(0, \xi)$, $\alpha_3(\xi)$, $\alpha_4(\xi)$ та $\nu(\xi)$ визначаються у термінах спектральних функцій, породжених початковими даними.

Ключові слова: нелокальне нелінійне рівняння Шредінгера, метод обер-

неної задачі розсіювання, задача Рімана-Гільберта, нелінійний метод перевалу.

Abstract

Ya. Rybalko, “Inverse scattering transform method for nonlocal integrable equations,” – Scholarly manuscript.

PhD thesis in mathematics (index 111). B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine.

In this Thesis the following initial value (Cauchy) problem for the so-called integrable nonlocal nonlinear Schrödinger (NNLS) equation is considered:

$$\begin{aligned}iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2\sigma q^2(x, t)\bar{q}(-x, t) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\q(x, 0) &= q_0(x),\end{aligned}$$

where $i^2 = -1$, $q(x, t) \in \mathbb{C}$ and \bar{q} denotes the complex conjugate of q and parameter σ is either 1 (focusing equation) or -1 (defocusing equation). We consider problems with two types of boundary conditions as $|x| \rightarrow \infty$:

(i) decaying conditions, i.e. $q(x, t) \rightarrow 0$ sufficiently fast as $x \rightarrow \pm\infty$ for all $t \geq 0$, and (ii) asymmetric step-like conditions:

$$\begin{aligned}q(x, t) &= o(1), & x \rightarrow -\infty, \quad t \geq 0, \\q(x, t) &= A + o(1), & x \rightarrow +\infty, \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

where $A > 0$ and $o(1)$ means sufficient fast decay. Notice that step-like initial value problem for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation is considered for the first time.

In Section 2 we consider the Cauchy problem with decaying initial data. For this problem we develop the inverse scattering transform method in the form of a Riemann-Hilbert factorization problem, which turns to be useful in

the subsequent asymptotic analysis. It is proved that the original Riemann-Hilbert problem has new (nonlocal) symmetry properties. In order to obtain the large time asymptotics of solutions of the Cauchy problem, we generalize the nonlinear steepest descent method (Deift-Zhou method) to the case, where certain combination of the spectral functions considered on the jump contour of the Riemann-Hilbert problem is not real-valued (in contrast to the case of the local nonlinear Schrödinger equation and other conventional local integrable systems). Particularly, it is shown that in order to obtain correct estimates in asymptotic formula, the spectral functions have to satisfy certain condition on the behavior of the argument on the real axis (which a priori holds in the case of local integrable problems). This kind of assumptions (on the behavior of the argument of spectral functions) has been made for the first time in the asymptotic analysis for integrable systems.

The main result is that the power decay rate for the solution depends, in general, on x/t . This is in contrast with the case of the classical (local) nonlinear Schrödinger equation, where the main asymptotic term (in the solitonless case) decays to 0 as $O(t^{-1/2})$ along any ray $x/t = \text{const}$. More precisely, the large-time behavior of the solution is as follows:

$$q(x, t) \sim t^{-\frac{1}{2} + \text{Im} \nu(-\xi)} p(-\xi) \exp \{4it\xi^2 - i \text{Re} \nu(-\xi) \ln t\}, \quad t \rightarrow \infty,$$

where $\xi = \frac{x}{4t}$ and $\text{Im} \nu(-\xi) \in (-1/2, 1/2)$, and the functions $\nu(-\xi)$ and $p(-\xi)$ can be obtained explicitly in terms of the spectral functions associated with the initial data $q_0(x)$. Notice that the condition $\text{Im} \nu(-\xi) \in (-1/2, 1/2)$ follows from the restriction on the behavior of the argument of a certain spectral function mentioned above (in the case of the classical (local) nonlinear Schrödinger equation, $\text{Im} \nu(-\xi) \equiv 0$ for any initial data).

In Section 3 we consider the initial value problem for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation in the focusing case (i.e. in the case $\sigma = 1$) with step-like boundary conditions: $q(x, t) \rightarrow 0$ for $x \rightarrow -\infty$ and $q(x, t) \rightarrow A$ for $x \rightarrow \infty$, where $A > 0$. For this problem, we develop the inverse scattering transform method for the first time. We show that in the case of the initial data in the form

of the pure step function, the associated spectral functions have singularities on the continuous spectrum. We establish new types of connections between the spectral functions and the discrete spectrum and obtain the exact kink-type soliton solution:

$$q(x, t) = \frac{A}{1 - e^{-Ax - iA^2t + i\phi_1}}, \quad \phi_1 \in \mathbb{R},$$

which has isolated singularities, periodic w.r.t. t and located at $(x, t) = (0, t_n)$, where $t_n = \frac{\phi_1}{A^2} + \frac{2\pi}{A^2}n$. We show that the basic Riemann-Hilbert problem (particularly, that corresponding to the pure step-like initial data) has the singularity on the contour of a special kind, which can be coined as “pseudo-residue condition”. Adapting the nonlinear steepest decent method to the basic Riemann-Hilbert problem where, as in the case of the decaying problem, we have to deal with the winding of the argument of the certain spectral function, we carry out the asymptotic analysis and show that the large time asymptotics along the rays $\xi = \frac{x}{4t} = \text{const}$ has qualitatively different form in the quarter planes of the half plane $-\infty < x < \infty, t > 0$: (i) for $x < 0$, the solution approaches a slowly decaying, modulated wave of the Zakharov-Manakov type; (ii) for $x > 0$, the solution approaches the “modulated constant”, i.e., the constant that depends on the asymptotic direction $\xi = \text{const}$. More precisely, the following asymptotic formulas hold as $t \rightarrow \infty$:

$$q(x, t) \sim \begin{cases} t^{-\frac{1}{2} - \text{Im} \nu(\xi)} \alpha_1(\xi) \exp \{ 4it\xi^2 - i \text{Re} \nu(\xi) \ln t \}, & \xi < 0, \\ A\delta^2(0, \xi), & \xi > 0, \end{cases}$$

where $\xi = \frac{x}{4t}$ and $\text{Im} \nu(\xi) \in (-1/2, 1/2)$, and the functions $\nu(\xi)$, $\alpha_1(\xi)$ and $\delta^2(0, \xi)$ can be obtained explicitly in terms of the spectral data associated to the initial data $q_0(x)$.

In Section 4 we consider the Cauchy problem in the defocusing case (i.e. with $\sigma = -1$), with the step-like boundary conditions $q(x, t) \rightarrow 0$ for $x \rightarrow -\infty$ and $q(x, t) \rightarrow A$ for $x \rightarrow \infty$, where $A > 0$. Particularly, we focus on the evolution of the initial data having the form of the “pure shifted step function”: $q_0(x) = 0$ for $x < R$ and $q_0(x) = A$ for $x > R$, where $R > 0$. Notice that the problem

with the shifted step initial data is considered for nonlocal integrable problems for the first time. We develop the inverse scattering transform method in the form of the Riemann-Hilbert factorization problem. The basic Riemann-Hilbert problem in this case is characterized by an unusual structure of the discrete spectrum, and the spectral functions corresponding to the “pure shifted-step” initial data have properties uncommon for the local problems. Particularly, depending on the value of the shift $R > 0$ of the step, certain spectral functions have the growing winding of the argument (acquiring π at certain points on the continuous spectrum). It is shown that the presence of such “singular” points plays a significant role in the large time analysis.

Since the nonlocal nonlinear Schrödinger equation is not translation invariant (in contrast with its local counterpart), the long-time dynamics of the “shifted-step function” turns to be highly nontrivial. Substantially modifying the nonlinear steepest decent method, we obtain the large time asymptotics of the solution of the Cauchy problem and show that the asymptotics is qualitatively different in sectors of the (x, t) plane, the number of which depends on the relationship between A and R : for a fixed A , the bigger R , the larger number of sectors is. Moreover, the sectors can be collected into 2 alternate groups: in the sectors of the first group, the solution decays to 0 while in the sectors of the second group, the solution approaches a constant (varying with the direction $x/t = \text{const}$).

More precisely, the following asymptotic result holds. Let $n \in \mathbb{N}$ be such that $\frac{(n-1)\pi}{A} < R < \frac{n\pi}{A}$, and let the initial data generate the numbers $\{p_j\}_1^n$ and $\{\omega_j\}_1^{n-1}$ ($p_j \in \mathbb{C}$ with $\text{Im } p_j > 0$ and $\omega_j \in \mathbb{R}$) (in the same way as they are generated by the pure shifted step function), satisfying the inequalities

$$-\infty < \text{Re } p_n < -\omega_{n-1} < \text{Re } p_{n-1} < -\omega_{n-2} < \cdots < \text{Re } p_1 < 0,$$

Here $\{p_j\}_1^n$ are the zeros of the associated spectral function and $\{\omega_j\}_1^{n-1}$ are involved in the condition on $\text{Im } \nu(\xi)$: $\text{Im } \nu(\xi) - m \in (-1/2, 1/2)$ for $-\omega_{n-m} < \xi < \text{Re } p_{n-m}$, and $\text{Im } \nu(-\xi) - m \in (-1/2, 1/2)$ for $\omega_{n-m-1} < \xi < -\text{Re } p_{n-m}$, $m = \overline{0, n-1}$. Then there exist $4n$ sectors in the (x, t) half-plane (with $t > 0$),

where the main asymptotic term is as follows:

$$q(x, t) \sim \begin{cases} A\delta^2(0, \xi) \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\xi}{p_{n-s}} \right)^2, & -\operatorname{Re} p_{n-m} < \xi < \omega_{n-m}, \\ t^{-\frac{1}{2}-\operatorname{Im} \nu(\xi)+m} \alpha_3(\xi) \exp\{4it\xi^2 - i \operatorname{Re} \nu(\xi) \ln t\}, & \\ & -\omega_{n-m} < \xi < \operatorname{Re} p_{n-m}, \\ \frac{-4\bar{p}_{n-m}^2}{A\bar{\delta}^2(0, -\xi)} \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\bar{p}_{n-s}}{\xi} \right)^2, & \operatorname{Re} p_{n-m} < \xi < -\omega_{n-m-1}, \\ t^{-\frac{1}{2}+\operatorname{Im} \nu(-\xi)-m} \alpha_4(\xi) \exp\{4it\xi^2 - i \operatorname{Re} \nu(-\xi) \ln t\}, & \\ & \omega_{n-m-1} < \xi < -\operatorname{Re} p_{n-m}. \end{cases}$$

Here $m = \overline{0, n-1}$, $\omega_0 = 0$, $\omega_n = +\infty$, and the functions $\delta(0, \xi)$, $\alpha_3(\xi)$, $\alpha_4(\xi)$, and $\nu(\xi)$ are determined in terms of the spectral functions associated with the initial data.

Keywords: nonlocal nonlinear Schrödinger equation, Riemann-Hilbert problem, Inverse Scattering Transform method, nonlinear steepest decent method.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

1. Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “Long-time asymptotics for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation with step-like initial data,” *Journal of Differential Equations* **270**, 694–724 (2021).
2. Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “Long-time asymptotics for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation,” *Journal of Mathematical Physics* **60**, 031504 (2019).
3. Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “Defocusing nonlocal nonlinear Schrödinger equation with step-like boundary conditions: long-time behavior for shifted initial data”, *Journal of Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, **16**, No.4, 418–453 (2020).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

4. Ya. Rybalko, “Long-time asymptotics for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger”, 6th Ya. B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications. June 18-20, Vinnytsia, Ukraine.
5. Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “The integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation: Riemann-Hilbert approach and long-time asymptotics”, *Differential Equations and Control Theory*. V.Karazin Kharkiv National University, September 25-27, 2018, Kharkiv, Ukraine.
6. VI Ya. Rybalko, “Long-time asymptotics for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation with step-like initial data”, *International Conference. Analysis and Mathematical Physics*. B. Verkin Inst. LTPE. June 18-22, 2018.
7. Ya. Rybalko, “Long-time asymptotics for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation on the line”, *V International Conference. Analysis and Mathematical Physics*. B. Verkin Inst. LTPE, V.Karazin Kharkiv National University. June 19-24, 2017.

8. Ya. Rybalko, “Long-time asymptotics for solutions of the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation”, Modern problems in mathematics. V. Karazin Kharkiv National University. April 25-26, 2017.

Наукові праці, які додатково відображають результати дисертації

9. Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “Riemann-Hilbert approach for the integrable nonlocal nonlinear Schrodinger equation with step-like initial data”, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics **88**, 4–16 (2018).

Зміст

| | |
|---|-----------|
| Вступ | 16 |
| 1 Нелокальні нелінійні інтегровні системи (огляд літератури) | 21 |
| 1.1 Інтегровні рівняння та метод оберненої задачі розсіювання . | 21 |
| 1.2 Нелокальне нелінійне рівняння Шредінгера | 26 |
| 1.3 Інші нелокальні інтегровні рівняння | 31 |
| 1.4 Висновки до Розділу 1 | 34 |
| 2 Початкова задача для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера на нульовому фоні | 35 |
| 2.1 Метод оберненої задачі розсіювання та задача Рімана-Гільберта | 36 |
| 2.2 Асимптотична поведінка за великим часом для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера | 42 |
| 2.2.1 Факторизація матриці стрибка | 42 |
| 2.2.2 Перетворення задачі Рімана-Гільберта | 45 |
| 2.2.3 Зведення до модельної задачі Рімана-Гільберта | 47 |
| 2.3 Початкові дані у вигляді п'єдесталу | 59 |
| 2.4 Висновки до Розділу 2 | 62 |
| 3 Початкова задача для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера з початковими даними типу сходинок | 64 |
| 3.1 Метод оберненої задачі розсіювання та задача Рімана-Гільберта | 67 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.1.1 | Власні функції рівнянь пари Лакса | 67 |
| 3.1.2 | Дані розсіювання | 71 |
| 3.1.3 | Вихідна задача Рімана-Гільберта | 74 |
| 3.1.4 | Односолітонний розв'язок | 82 |
| 3.2 | Асимптотика за великим часом | 84 |
| 3.2.1 | Факторизації матриці стрибка | 85 |
| 3.2.2 | Перетворення задачі Рімана-Гільберта | 88 |
| 3.3 | Висновки до Розділу 3 | 103 |
| 4 | Дефокусуєче нелокальне нелінійне рівняння Шредінгера з початковим даним типу зміщеної сходинки | 104 |
| 4.1 | Метод оберненої задачі розсіювання та задача Рімана-Гільберта | 107 |
| 4.1.1 | Пряме перетворення розсіювання | 107 |
| 4.1.2 | Спектральні функції для початкового даного типу “змі- щеної сходинки” | 111 |
| 4.1.3 | Вихідна задача Рімана-Гільберта та обернене перетво- рення розсіювання | 115 |
| 4.2 | Асимптотика за великим часом | 119 |
| 4.2.1 | Факторизації матриці стрибка | 119 |
| 4.2.2 | Перетворення задачі Рімана-Гільберта | 121 |
| 4.3 | Перехідні зони | 137 |
| 4.4 | Висновки до Розділу 4 | 140 |
| | Загальні висновки | 142 |
| | Список використаних джерел | 145 |
| | Додатки | 159 |

Вступ

Обґрунтування вибору теми дослідження.

Точно розв'язувані моделі та інтегровні еволюційні рівняння зустрічаються скрізь та відіграють важливу роль у нелінійній фізиці. Більшість з цих систем можуть бути виведені з фундаментальних законів фізики та виникають як універсальні моделі у описанні різних фізичних процесів. Інтегровні рівняння мають унікальну структуру, зокрема, вони еквівалентні умові сумісності системи *лінійних* диференціальних рівнянь (пари Лакса [68]), та мають нескінченну кількість законів збереження. До початкових (та початково-крайових) задач для нелінійних інтегровних рівнянь може бути застосований метод оберненої задачі розсіювання (МОЗР), який “лінеаризує” вихідну задачу, тобто зводить її до розв'язання певної кількості лінійних задач.

Першим нелінійним рівнянням, яке вдалося розв'язати за допомогою МОЗР, було рівняння Кортевега-де Фріза (КдФ) [49]. Кілька років потому Захаров та Шабат [116], використовуючи ідеї Лакса [68], застосували МОЗР до нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ), яке має вигляд

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + \sigma |q(x, t)|^2 q(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad q(x, t) \in \mathbb{C}.$$

Важливо, що це рівняння є частинним випадком системи Абловіца-Каупа-Ньюелла-Сегура (АКНС) [4]

$$\begin{cases} iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2q^2(x, t)r(x, t) = 0 \\ -ir_t(x, t) + r_{xx}(x, t) + 2q(x, t)r^2(x, t) = 0 \end{cases},$$

з $r(x, t) = \sigma \bar{q}(x, t)$ (\bar{q} означає комплексно спряжену до q).

Кілька десятиліть вважалося, що ННРШ є єдиною цікавою редукцією системи АКНС. Але у 2013 році Абловіц та Мусслімані [7] показали, що є інша цікава *нелокальна* редукція $r(x, t) = \sigma \bar{q}(-x, t)$, яка призводить до інтегровного *нелокального* нелінійного рівняння Шредінгера (ННРШ):

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2\sigma q^2(x, t)\bar{q}(-x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad q(x, t) \in \mathbb{C}.$$

Важливо, що, по-перше, ця система є інтегрованою, а по-друге, що розв'язок $q(x, t)$ задовольняє так званій умові *PT-симетрії* (*parity-time-symmetry*) [19]: якщо $q(x, t)$ є розв'язком ННРШ, то й $\overline{q(-x, -t)}$ також є його розв'язком. Отже, це рівняння має відношення до теорії PT-симетричних процесів і явищ, яка є областю досліджень сучасної фізики, що активно розвивається.

PT-симетричної теорії, що наразі є активно розвиваючоюся областю в сучасній теоретичній фізиці.

Через свої цікаві фізичні та математичні властивості ННРШ викликало неабиякий інтерес у науковій спільноті. Зокрема, з'явилася низка робіт, присвячених побудові точних розв'язків ННРШ. З іншого боку, у існуючій літературі набагато менше робіт присвячено дослідженню загальних початкових (та початково-крайових) задач для цього рівняння, зокрема, асимптотичному аналізу розв'язків таких задач. У дисертаційній роботі, певною мірою заповнюється ця прогалина у вивченні властивостей нелокальних інтегровних нелінійних систем, зокрема, нелокального нелінійного рівняння Шредінгера.

Мета і завдання дослідження.

Головною метою дослідження є розробка методу оберненої задачі розсіювання для початкових задач для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера та асимптотичний аналіз, за великим часом, таких задач. Зокрема, розглядаються задачі на нульовому фоні (Розділ 2) та зі ступінчастими (асиметричними) крайовими умовами (Розділи 3 та 4).

Отримані результати (зокрема асимптотика розв'язків) порівнюються з результатами відповідних задач для класичного (локального) рівнян-

ня Шредінгера. Результати порівняння дозволяють зробити висновок, що ННРШ є системою з принципово іншою поведінкою розв'язків як у випадку нульових, так і у випадку ступінчастих крайових умов.

Методи дослідження.

Основним методом дослідження є метод оберненої задачі розсіювання, який застосовується до відповідної інтегрованої задачі. Метод оберненої задачі розсіювання розробляється у вигляді задачі Рімана-Гільберта, що є зручним для подальшого асимптотичного аналізу. Для отримання асимптотики розв'язків, застосовується нелінійний метод перевалу (метод Дейффа – Жу), адаптований до відповідної задачі Рімана-Гільберта.

Наукова новизна отриманих результатів.

У дисертаційній роботі вперше отримана асимптотика за великим часом розв'язку початкової задачі для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера на нульовому фоні у випадку відсутності солітонів (Розділ 2). Також була вперше розглянута задача на ступінчастому фоні, для якої було розроблено метод оберненої задачі розсіювання та отримана асимптотика за великим часом (Розділи 3 та 4). Крім того, вперше для нелокальних інтегровних рівнянь була розглянута задача з початковим даним типу “зміщеної сходинки” та отримана асимптотична поведінка розв'язку такої задачі (Розділ 4).

Особистий внесок здобувача.

Постановка задач, розглянутих у статтях [89] та [90] (і, відповідно, у розділах Розділах 2 та 3) належить науковому керівникові, а задача у статті [91] (Розділ 4) була поставлена автором разом з науковим керівником. Всі результати, які наведені у роботах [89], [90] та [91] і включені до дисертації, були отримані автором самостійно. Результати, що належать іншим науковцям, згадуються за необхідністю для повноти викладу та супроводжуються відповідними посиланнями.

Апробація результатів дисертації.

Отримані у дисертаційній роботі результати обговорювалися на науко-

вому семінарі відділу математичної фізики фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна Національної академії наук України та доповідалися на **п'ятьох** міжнародних конференціях:

1. Ya. Rybalko, “Long-time asymptotics for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger”, 6th Ya. B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications. June 18-20, Vinnytsia, Ukraine.
2. Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “The integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation: Riemann-Hilbert approach and long-time asymptotics”, Differential Equations and Control Theory. V.Karazin Kharkiv National University, September 25-27, 2018, Kharkiv, Ukraine.
3. VI Ya. Rybalko, “Long-time asymptotics for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation with step-like initial data”, International Conference. Analysis and Mathematical Physics. B. Verkin Inst. LTPE. June 18-22, 2018.
4. Ya. Rybalko, “Long-time asymptotics for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation on the line”, V International Conference. Analysis and Mathematical Physics. B. Verkin Inst. LTPE, V.Karazin Kharkiv National University. June 19-24, 2017.
5. Ya. Rybalko, “Long-time asymptotics for solutions of the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation”, Modern problems in mathematics. V.Karazin Kharkiv National University. April 25-26, 2017.

Структура та обсяг дисертації.

Дисертація складається зі змісту, вступу, чотирьох розділів, висновку та списку використаних джерел, який містить 122 найменування. Обсяг загального тексту дисертації – 160 сторінок. Обсяг основної частини роботи – 129 сторінок.

Розділ 1 присвячено огляду літератури за темою дисертації. У Розділі 2 вивчається початкова задача для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера на нульовому фоні. У Розділі 3 розглядається початкова задача

для фокусуєчого нелокального нелінійного рівняння Шредінгера з початковим даним типу сходинок. У Розділі 4 вивчається початкова задача для дефокусуєчого нелокального нелінійного рівняння Шредінгера з початковим даним типу “зміщеної сходинок”.

Практичне значення одержаних результатів.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати та запропоновані методи можна використати в подальших дослідженнях початкових та початково-крайових задач для нелокальних інтегровних рівнянь, які можуть бути перспективними моделями фізичних процесів різної природи.

Публікації.

Результати дисертації опубліковано у 9 наукових публікаціях. Основні результати дисертаційної роботи висвітлено у **трьох** статтях, проіндексованих у міжнародних наукометричних базах Scopus або Web of Science, дві з яких [89, 90] опубліковано у наукових періодичних виданнях інших держав, та одна [91] опублікована у фаховому виданні України. Додатково, результати дисертації відображено у публікації [92] у фаховому виданні України та у п’яти тезах конференцій (дивись 5-9 у Додатку А).

Відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, статті [90], [89] та [91], в яких відображено основні результати роботи, опубліковані у виданнях, які, відповідно, належать до кватилів **Q1**, **Q2** та **Q3**.

Розділ 1

Нелокальні нелінійні інтегровні системи (огляд літератури)

1.1 Інтегровні рівняння та метод оберненої задачі розсіювання

Солітони як нелінійні локалізовані хвилі з частинкоподібною взаємодією є одним із найважливіших відкриттів ХХ століття в математичній фізиці. У 1960-тих роках М. Краскал дізнався про так звану проблему Фермі – Паста – Улама (ФПУ) про нелінійні коливання системи мас, з'єднаних пружинами. При проведенні числових експериментів з цією системою, вона виявила незвичну властивість: періодичні початкові дані майже повторювалися через деякий час. Щоб зрозуміти та пояснити це явище, Краскал та Забужські провели ряд числових експериментів з рівнянням Кортевега-де Фріза (КдФ) [115],

$$u_t(x, t) + 6u(x, t)u_x(x, t) + u_{xxx}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad u(x, t) \in \mathbb{R},$$

яке є континуальною границею системи ФПУ, та виявили, що для цього рівняння має місце аналогічне явище повторювання з часом початкових даних. Цей ефект пояснювався способом взаємодії спеціальних розв'язків цього рівняння – локалізованих одиночних хвиль. Аналітична форма окремих таких хвиль була відома давно (рівняння КдФ як модель нелінійного розповсюдження хвиль на мілкій воді було винайдене у 1895 р.), але тут несподівано виявилось, що ці локалізовані хвилі “пружно” взаємодіють одна з

одною, тим самим проявляючи частинкоподібні властивості: після взаємодії двох хвиль, форма (висота, ширина і швидкість) обох хвиль залишається, якою була до взаємодії, а єдиним довготривалим ефектом взаємодії є зсув фаз. Через таку незвичну поведінку, ці хвилі отримали спеціальну назву – солітони.

Натхненні цими роботами, в 1967 р. Гарднер, Грін, Краскал та Міура [49] винайшли метод, який зараз називається методом оберненої задачі розсіювання (МОЗР) для задачі Коші для рівняння КдФ з початковими умовами, що спадають, коли просторова змінна прямує до обох нескінченностей (“задача на нульовому фоні”). Цей метод, пізніше формалізований Лаксом [68], ґрунтується на зведенні вихідної нелінійної задачі до серії лінійних, основною з яких у даному випадку виявляється обернена задача розсіювання для одновимірного лінійного оператора Шредінгера. Ключовою ідеєю було те, що рівняння КдФ можна представити як умову сумісності двох *лінійних* рівнянь – пари Лакса.

Знадобилося кілька років щоб зрозуміти, що це не якийсь чудовий трюк, що застосовується до окремого нелінійного рівняння, але й що існують і інші нелінійні рівняння, які мають пару Лакса і, завдяки цьому, можуть бути проінтегровані за допомогою МОЗР. Першим таким рівнянням стало нелінійне рівняння Шредінгера (НРШ)

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + \sigma |q(x, t)|^2 q(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad q(x, t) \in \mathbb{C}, \quad (1.1)$$

де $\sigma = 1$ відповідає фокусуючому рівнянню, а $\sigma = -1$ – дефокусуючому. Нелінійне рівняння Шредінгера (1.1) є універсальною моделлю, яка знаходить застосування, зокрема, в нелінійній оптиці та моделюванні хвиль на глибокій воді [15, 83, 86]. Захаров та Шабат у 1972 році [116] знайшли пару Лакса для НРШ та розробили МОЗР для задачі на нульовому фоні, що суттєво вплинуло на розвиток теорії інтегровних рівнянь.

У найширшому сенсі, рівняння називається інтегровним, якщо воно має пару Лакса, тобто якщо воно є умовою сумісності системи двох лінійних

звичайних диференціальних рівнянь (або систем таких рівнянь), які залежать від додаткового (спектрального) параметра. Зазвичай, для конкретного диференціального рівняння з частинними похідними дуже важко визначити, чи є воно інтегровним. Але існують прямі алгебраїчні методи для побудови інтегровних систем. Зокрема, ще у 1970-х роках Абловіц, Кауп, Ньюелл і Сегур [4] запропонували систематичний підхід до пошуку зображень Лакса для широкого класу фізично значущих нелінійних рівнянь (ієрархія Абловіца-Каупа-Ньюелла-Сегура, АКНС), таких як НРШ, рівняння КдФ, модифіковане рівняння Кортевега-де Фріза (мКдФ), рівняння синус-Гордона та багато інших. А нещодавно ієрархія АКНС була використана для побудови нових, нелокальних інтегровних рівнянь (див. Розділи 1.2 та 1.3).

Асимптотичний аналіз початкових (та початково-крайових) задач для нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними є важливою, цікавою та важкою проблемою. Стосовно інтегровних систем, перші значні кроки в цьому напрямку були зроблені на початку 1970-х років у роботах Шабата [98], Манакова [80], та Абловіца і Ньюелла [13]. Абловіц та Сегур [96] отримали повний опис головного члену асимптотики за великим часом розв'язку початкової задачі для рівняння КдФ, включаючи формули зв'язку між різними асимптотичними зонами, але без точної формули для фаз. Вирішальний крок був зроблений у 1976 році, коли Захаров і Манаков [117] змогли записати точні формули, які явно залежать від (відомих) початкових даних, для головного члена асимптотики нелінійного рівняння Шредінгера у фізично цікавій області $x = O(t)$. Пізніше Абловіц та Сегур [97] застосували модифікацію метода Захарова та Манакова та отримали головні члени асимптотик для розв'язків рівнянь мКдФ, КдФ та синус-Гордона, включаючи повну інформацію про фазу.

Головним недоліком методу Захарова та Манакова була необхідність в *апріорному анзаці* для асимптотики розв'язку вихідної задачі, який у кожному окремому випадку будувався окремо. Щоб уникнути використання

будь-якої апріорної інформації про асимптотику, потрібно було розробити прямий підхід для асимптотичного аналізу оберненої задачі. Один з таких підходів базується на асимптотичному аналізі матричної задачі Рімана-Гільберта (РГ), яка є формою зображення відповідної оберненої задачі.

У контексті інтегрування нелінійних рівнянь, задачею Рімана-Гільберта називається задача знаходження кусково-мероморфної матричної функції, яка задовольняє задану умову на стрибок вздовж заданого контуру та умови на лишки (якщо такі є). Більш точно [57], нехай Σ – орієнтовний контур у комплексній k -площині (контур Σ може мати точки самоперетину й мати більше, ніж одну зв'язну компоненту). Припустимо також, що нам відома неособлива $n \times n$ матриця $J(k)$, яка визначена для $k \in \Sigma$, та умови на лишки в сингулярних точках $\{a_1, \dots, a_p\}$. Тоді задача Рімана-Гільберта полягає в знаходженні кусково-мероморфної матриці функції $M(k)$, яка задовольняє наступні умови:

- $M(k)$ аналітична у $\mathbb{C} \setminus \{\Sigma \cup \{a_1, \dots, a_p\}\}$,
- $M_+(k) = M_-(k)J(k)$, $k \in \Sigma$ (умова стрибка),
- умови на лишки в точках a_j , $j = \overline{1, p}$,
- $M(k) \rightarrow I$ рівномірно при $k \rightarrow \infty$ (умова нормування).

Нижче, в Розділах 2, 3 та 4, ми розглянемо низку задач Рімана-Гільберта, пов'язаних із початковими задачами для нелокальних нелінійних інтегрованих рівнянь.

Перший крок у розробці прямого підходу до знаходження асимптотик був зроблений Манаковим ще у 1973 році [80], який отримав точну асимптотичну формулу для модуля розв'язку НРШ без будь-яких апріорних припущень щодо її вигляду. У 1981 році Ітс [58] далі розвинув підхід Манакова й запропонував метод, який дав змогу отримати повну асимптотику для розв'язку НРШ безпосередньо з аналізу відповідної задачі Рімана-Гільберта. Основною ідеєю було зведення вихідної задачі Рімана-Гільберта

до модельної ізомонодромної задачі, яка може бути розв’язана явно, в термінах деяких спеціальних функцій.

Вирішальний крок у розробці математично строгого методу дослідження асимптотики за великим часом для інтегровних задач, який не покладається на апріорний анзац, був зроблений в 1993 році Дейфтом та Жу, які, спираючись на вищезгадані праці Манакова [80] та Ітса [58], запропонували “нелінійний метод перевалу”. В основі методу лежить реалізація МОЗР у вигляді спеціальної задачі факторизації — матричної задачі Рімана-Гільберта, до якої застосовується точний асимптотичний аналіз (що має прозорі аналогії з лінійним асимптотичним методом — методом градієнтного спуску). А саме, метод Дейфта й Жу полягає [99] у перетворенні (“деформації”) вихідної задачі Рімана-Гільберта у такий спосіб, що матриця стрибка, яка залежить від параметра (скажімо, часу t), швидко прямує до одиничної матриці (коли параметр прямує до нескінченності) усюди, за винятком деяких точок (точок стаціонарної фази). У свою чергу, розв’язок задачі Рімана-Гільберта у околі точок стаціонарної фази можна наблизити розв’язком модельної задачі, яка має явний розв’язок (у термінах певних спеціальних функцій). Таким чином, вихідна задача Рімана-Гільберта зводиться до низки точно розв’язуваних, що, у кінцевому результаті дозволяє знайти точну асимптотичну формулу для розв’язку початкової (початково-крайової) задачі для відповідного нелінійного інтегровного рівняння.

Незважаючи на те, що як МОЗР, так і метод Дейфта й Жу, є до певної міри алгоритмічними, їхня адаптація до тієї чи іншої нестандартної задачі для конкретного нелінійного рівняння може бути складною задачею, яка вимагає значної попередньої аналітичної роботи. Наприклад, застосування МОЗР для початкових задач із ненульовими крайовими умовами на нескінченності (тобто коли просторова змінна x прямує до $\pm\infty$), дуже відрізняються від, скажімо, задачі на нульовому фоні. Зокрема, суттєво відмінними є властивості відповідних спектральних функцій, вихідна задача Рімана-Гільберта та адаптація метода Дейфта-Жу.

З іншого боку, дослідження конкретної проблеми може призвести не тільки до отримання асимптотики для цієї задачі (або, що ще важливіше, до відкриття нових, фізично значущих асимптотичних режимів), але також може дати поштовх до розробки нових аналітичних методів та підходів, які згодом можуть бути ефективно застосовані до широкого класу задач з інших областей математики (як це вже сталося, зокрема, у теорії ортогональних поліномів та випадкових матриць великого розміру).

1.2 Нелокальне нелінійне рівняння Шредінгера

Як було зазначено вище, класичні нелінійні рівняння Шредінгера (1.1) грають дуже важливу роль у сучасній фізиці. Рівняння (1.1) є універсальними моделями й можуть використовуватися в широкому діапазоні областей, від фотоніки та явищ на кшталт конденсації Бозе-Енштейна до динаміки хвиль на глибокій воді [1, 15, 86]. Ці рівняння можуть бути інтерпретовані як окремі випадки системи АКНС [4]

$$\begin{aligned} iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2q^2(x, t)r(x, t) &= 0, \\ -ir_t(x, t) + r_{xx}(x, t) + 2q(x, t)r^2(x, t) &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

що відповідають редукціям $r(x, t) = \sigma \bar{q}(x, t)$ (тут і далі \bar{q} означає комплексно спряжену до q). Зазначимо, що для будь-якої пари функцій r, q , система АКНС (1.2) є інтегрованою: вона є умовою сумісності наступної системи диференціальних рівнянь (пари Лакса):

$$\begin{aligned} \Phi_x + ik\sigma_3\Phi &= U(x, t)\Phi \\ \Phi_t + 2ik^2\sigma_3\Phi &= V(x, t, k)\Phi \end{aligned} \quad (1.3)$$

де $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\Phi(x, t, k)$ – 2×2 матричнозначна функція, $k \in \mathbb{C}$ є додатковим (спектральним) параметром, а матричні коефіцієнти $U(x, t)$ та $V(x, t, k)$ можуть бути записані в термінах розв'язків системи АКНС $\{r(x, t), q(x, t)\}$ у такий спосіб:

$$U(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x, t) \\ -r(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

де $V_{11} = -V_{22} = iq(x, t)r(x, t)$, $V_{12} = 2kq(x, t) + iq_x(x, t)$, $V_{21} = -2kr(x, t) + ir_x(x, t)$.

Кілька десятиліть вважалося, що НРШ є єдиною цікавою редукцією системи (1.2). Але у 2013 році Абловіц та Мусслімані [7] показали, що є інша цікава – *нелокальна* – редукція. А саме, вони запропонували розглянути редукцію $r(x, t) = \sigma\bar{q}(-x, t)$, яка зводить систему (1.2) до інтегровного *нелокального* нелінійного рівняння Шредінгера:

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2\sigma q^2(x, t)\bar{q}(-x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad q(x, t) \in \mathbb{C}. \quad (1.5)$$

Це рівняння можна розглядати як рівняння Шредінгера $iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + V(x, t)q(x, t)$ з нелокальним потенціалом $V(x, t) = 2\sigma\bar{q}(-x, t)q(x, t)$. Важливо зазначити, що розв'язок $q(x, t)$ задовольняє умові *PT-симетрії* (*parity-time-symmetry*) [19], тобто якщо $q(x, t)$ є розв'язком рівняння (1.5), то й $\overline{q(-x, -t)}$ також є його розв'язком. Отже, система (1.5), з одного боку, є інтегровною, а з іншого, має відношення до теорії *PT*-симетричних систем, яка наразі є областю в сучасній фізиці, що активно розвивається.

PT-симетричні системи вперше були запропоновані у видатній роботі Бендера та Боетчера [19], де автори започаткували нову область у теоретичній фізиці – неермітову (*PT*-симетричну) квантову механіку [17, 20, 28]. *PT*-симетрична квантова механіка є розширенням традиційної квантової механіки в комплексну площину, яке спочатку розглядалося як цікаве математичне відкриття, але майже без надії на практичне застосування [18]. Але починаючи з робіт Ель-Ганайні, Макріса, Мусслімані та Христодулідеса [43, 79, 82], у яких була розроблена *PT*-симетрична оптика, почався справжній спалах інтересу до цієї області [67]. Дійсно, після того, як була сформульована концепція *PT*-симетричних оптичних хвилеводів [43], досліджена динаміка променів у цих хвилеводах [79], та введена до розгляду *нелінійна PT*-симетрична теорія [82], *PT*-симетричні системи були розглянуті та експериментально досліджені в таких різноманітних областях, як оптичні хвилеводи, лазери, оптичні резонатори, мікро-хвильові порожнини,

надпровідні дроти, ядерний магнітний резонанс (ЯМР) [18]. Методи, розроблені в цих дослідженнях, дають надію на використання PT -симетрій для розробки нових способів управління світлом. Можливо, це навіть призведе до винайдення нових видів комп'ютерів, які використовують оптичні хвилеводи замість електричних проводів. Це явище також може бути використане для розробки нових видів матеріалів та комунікаційних пристроїв [18].

Однією з найважливіших характерних рис інтегровних систем є наявність точних розв'язків спеціального типу – солітонів. З фізичної точки зору, солітони, або поодинокі хвилі, являють собою скінченні, локалізовані у просторі енергетичні структури. Вони були теоретично передбачені та експериментально встановлені в різних областях фізики, таких як нелінійна оптика, магнетизм, розповсюдження хвиль на воді, та багато інших [95, 14, 84]. З математичної точки зору, солітони виникають як окремий природний клас точних розв'язків, наявність яких може свідчити про певні математичні властивості рівняння, такі як нескінченна кількість законів збереження та можливість застосування методу оберненої задачі розсіювання для задач із відповідними крайовими умовами.

Наразі було докладено багато зусиль для отримання точних розв'язків нелокального нелінійного рівняння Шредінгера (1.5). Зокрема, у роботі [9] (див. також [7]) автори розробили МОЗР для початкової задачі для фокусуєчого ($\sigma = 1$) та дефокусуєчого ($\sigma = -1$) рівняння (1.5) на нульовому фоні та отримали одно-, дво-, та трисолітонні розв'язки (у фокусуєчому випадку). Найпростіший односолітонний розв'язок має вигляд

$$q(x, t) = -\frac{2(\nu_1 + \nu_2)e^{-2\nu_1 x - 4i\nu_1^2 t - i\phi_1}}{1 + e^{-2(\nu_1 + \nu_2)x - 4i(\nu_1^2 - \nu_2^2)t - i(\phi_1 + \phi_2)}}, \quad (1.6)$$

де $\nu_1, \nu_2 > 0$ та $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$. Відзначимо, що у випадку, коли $\nu_1 = \nu_2$ та $\phi_1 = -\phi_2$, солітонний розв'язок (1.6) відповідає солітонному розв'язку класичного (локального) нелінійного рівняння Шредінгера. Важливо зазначити, що в загальному випадку точний розв'язок (1.6) має сингулярності в

точках

$$(x = 0, t = t_n), \text{ де } t_n = \frac{(2n + 1)\pi + (\phi_1 + \phi_2)}{4(\nu_2^2 - \nu_1^2)}, \quad (1.7)$$

а в околах усіх інших точок він є нескінченно гладкий та прямує до своїх крайових значень з експоненціальною швидкістю. Зауважимо, що пізніше, у роботах [52], [34, 32] і [63], цей солітонний розв'язок був побудований з використанням, відповідно, методу Хіроти, методу подвійних Вронскіанів, та методу Беклунда-Дарбу (також відмітимо, що у [110, 111] і [3] було знайдено загальний N -солітонний розв'язок на нульовому фоні, використовуючи підхід задачі Рімана-Гільберта та комбінацію метода Хіроти з ієрархією Кадомцева-Петвіашвілі).

Також відзначимо, що ННРШ (1.5) у фокусуєчому випадку має як світлий солітон

$$q(x, t) = \frac{2Ae^{iA^2t}}{e^{Ax} + e^{-Ax}}, \quad (1.8)$$

так і темний,

$$q(x, t) = A \frac{e^{Ax} - e^{-Ax}}{e^{Ax} + e^{-Ax}} e^{-2iA^2t}, \quad (1.9)$$

що принципово відрізняється від випадку локального нелінійного рівняння Шредінгера (1.1), який має, залежно від знака σ , або лише світлий солітон, або лише темний [94].

Взаємодії різних точних розв'язків присвячено низку робіт. Зокрема, у [72] (див. також [103]) вивчається взаємодія темних та світлих солітонів; роботи [73, 104, 120, 119] і [108] присвячені взаємодії раціональних та змішаних експоненціально-раціональних солітонних розв'язків для дефокусуєчого ННРШ (1.5) на фоні неперервних хвиль (continuous wave background) $q_{cw}(x, t) = \rho e^{2i\rho^2t}$. У [121] показано зв'язок між точним солітонним розв'язком та рухом певних кривих у \mathbb{C}^3 , що дає геометричну інтерпретацію ННРШ. Також низка робіт присвячена пошуку інших типів точних розв'язків, зокрема, хвиль-“вбивць” (rogue waves) [53, 54, 113], періодичних та гіперболічних розв'язків [81, 66, 105], солітонів на ненульовому фоні [3]. До того ж, будь-який парний розв'язок класичного нелінійного

рівняння Шредінгера також є розв'язком і нелокального; відповідно, парні раціональні розв'язки, наведені у [35], також є розв'язками ННРШ.

Помітно менше робіт присвячено аналізу загальних початкових задач для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера. У [9] (див. також [30, 102]) автори розробили метод оберненої задачі розсіювання для задачі Коші на нульовому фоні, а у [51] було доведено, що за цих умов, ННРШ є повністю інтегрованою нескінченновимірною гамільтоновою системою. У [50] було показано, що хоча початкова задача як для фокусуєчого, так і для дефокусуєчого ННРШ коректно поставлена локально в класі $q(x, t) \in C(H^1(\mathbb{R}), [0, T_{max}))$, у випадку фокусуєчого рівняння існують як завгодно малі початкові дані (у нормі $H^s(\mathbb{R})$ для будь-якого $s \geq 0$), які породжують розв'язок, що “вибухає” (blow up) за скінченний час. У [5] автори розробили МОЗР для початкової задачі на ненульовому симетричному фоні, а у [93] була розглянута періодична початково-крайова задача на скінченному інтервалі.

Наведені вище значні результати з аналізу нелокального нелінійного рівняння Шредінгера демонструють неабиякий інтерес до інтегровних PT -симетричних систем взагалі (див. також Розділ 1.3), та до цього рівняння зокрема. Виникає природне питання, чи є зв'язок між фізично релевантними моделями та ННРШ. У [48] (див. також [31]) було показано, що рівняння (1.5) є калібрувально еквівалентним до нетрадиційного парного рівняння Ландау-Ліфшиця, яке має відношення до теорії магнетизму. Крім того, ННРШ було виведене як квазімонохроматична редукція комплексних рівнянь Кортевега-де Фріза та кубічного нелінійного рівняння Клейна-Гордона [12] (див. також [85, 112] про перетворення між локальними та нелокальними інтегровними системами). З іншого боку, система (1.5) є частковим випадком інтегровних систем типу Аліси-Боба (Alice-Bob systems). Такі системи описують різні фізичні явища, що відбуваються у двох (або більше) різних місцях, певним чином пов'язаних між собою [74, 75]: якщо ці два різних місця не є сусідніми, відповідна модель стає

нелокальною. Крім того, були прикладені зусилля для фізичної реалізації просторової дзеркальної нелокальності, оскільки вона досить сильно відрізняється від звичайної нелокальності інтегрального типу. Було висловлено припущення, що нелокальний просторовий дзеркальний зв'язок може бути реалізований в (i) нелінійній струні, де кожна частинка одночасно з'єднана з її найближчими сусідами та дзеркальною частинкою [47], (ii) лінії електропередач із нелокальними нелінійними елементами [47], і (iii) у парних хвилеводах із певною просторовою симетрією між двома компонентами [109].

1.3 Інші нелокальні інтегровні рівняння

Завдяки неабиякій увазі до нелокального нелінійного рівняння Шредінгера, протягом останніх років було запропоновано низку інших нелокальних редукцій відомих інтегровних систем [10]. Також привернули увагу дискретні аналоги відповідних нелокальних неперервних моделей. Зокрема, Абловіц та Мусслімані [8] розглянули дискретну версію нелокального нелінійного рівняння Шредінгера (1.5), яка має вигляд

$$i \frac{dQ_n(\tau)}{d\tau} + Q_{n+1}(\tau) + Q_{n-1}(\tau) - 2Q_n(\tau) + \sigma Q_n(\tau) \overline{Q_{-n}(\tau)} (Q_{n+1}(\tau) + Q_{n-1}(\tau)) = 0 \quad (1.10)$$

і є дискретною PT -симетричною моделлю, яка має пару Лакса та нескінченну кількість законів збереження. У [8] також було отримано точний односолітонний розв'язок, який має цікаві незвичні властивості; зокрема, енергія $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |Q_n^{sol}(\tau)|^2$ (яка не є сталою) осцилює, а солітонний розв'язок має сингулярності, аналогічні (1.7) у неперервному випадку. Дискретне ННРШ (1.10) є калібрувально еквівалентним рівнянню типу Гейзенберга [78].

Крім того, були запропоновані інші редукції системи АКНС (1.2), які призводять до інтегровних нелокальних рівнянь з іншим типом нелокальності. Зокрема, при $r(x, t) = \sigma q(x, -t)$ отримуємо ННРШ зі зворотним

часом (reverse-time nonlocal nonlinear Schrödinger equation) [11]

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2\sigma q^2(x, t)q(x, -t) = 0, \quad (1.11)$$

а при $r(x, t) = \sigma q(-x, -t)$ маємо ННРШ зі зворотними часом та простором (reverse space-time nonlocal nonlinear Schrödinger equation) [11]

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2\sigma q^2(x, t)q(-x, -t) = 0. \quad (1.12)$$

Цікаво, що в обох цих редукаціях немає комплексного спряження, бо інакше не буде виконана зворотня часова симетрія (time reversal symmetry), тобто якщо $q(x, t)$ задовольняє рівнянню, то й $\bar{q}(x, -t)$ має бути його розв'язком. Зазначимо також, що для цих рівнянь були знайдені точні солітонні розв'язки як на нульовому фоні (використовуючи МОЗР) [76, 110, 111], так і на ненульовому (використовуючи прямий метод Дарбу-Беклунда) [114].

Також наведемо нелокальне нелінійне рівняння Шредінгера третього порядку [106]:

$$iq_t + icq_x(x, t) + q_{xx} + \sigma q^2 \overline{q(-x, t)} + i\lambda q_{xxx} + 3i\lambda \sigma q q_x \overline{q(-x, t)} = 0, \quad (1.13)$$

де $\lambda, c \in \mathbb{R}$, яке є нелокальним аналогом рівняння Хіроти $iq_t + q_{xx} + \sigma |q|^2 q + i\lambda(q_{xxx} + 3i\sigma |q|^2 q_x) = 0$, та нелокальне нелінійне рівняння Шредінгера з похідною (nonlocal derivative nonlinear Schrödinger equation) [122]

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + \sigma(q^2(x, t)\bar{q}(-x, t))_x = 0, \quad (1.14)$$

яке є нелокальним аналогом класичного ННРШ із похідною (derivative nonlinear Schrödinger equation) $iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + i\sigma(|q|^2(x, t)q(x, t))_x = 0$,

Відповідні до неперервних систем (1.11) та (1.12) дискретні моделі мають вигляд [11]

$$i\frac{dQ_n(\tau)}{d\tau} + Q_{n+1}(\tau) + Q_{n-1}(\tau) - 2Q_n(\tau) + \sigma Q_n(\tau)Q_n(-\tau)(Q_{n+1}(\tau) + Q_{n-1}(\tau)) = 0, \quad (1.15)$$

та

$$i\frac{dQ_n(\tau)}{d\tau} + Q_{n+1}(\tau) + Q_{n-1}(\tau) - 2Q_n(\tau) + \sigma Q_n(\tau)Q_{-n}(-\tau)(Q_{n+1}(\tau) + Q_{n-1}(\tau)) = 0. \quad (1.16)$$

Для цих дискретних інтегровних моделей був розроблений метод оберненої задачі розсіювання для початкової задачі на нульовому фоні та отримані солітонні розв'язки [6].

Крім того, помітний інтерес викликали дійсне та комплексне нелокальне модифіковане рівняння Кортвега-де Фріза [9]:

$$q_t(x, t) + q_{xxx} + 6\sigma q(x, t)q(-x, -t)q_x(x, t) = 0, \quad q(x, t) \in \mathbb{R}, \quad (1.17)$$

$$q_t(x, t) + q_{xxx} + 6\sigma q(x, t)\bar{q}(-x, -t)q_x(x, t) = 0, \quad q(x, t) \in \mathbb{C}, \quad (1.18)$$

які були отримані як редукція певного члена АКНС ієрархії. Дійсне рівняння мКдФ нещодавно знайшло застосування в нелінійній океанічній та атмосферній динаміці [101]. У [10], методом оберненої задачі розсіювання був отриманий односолітонний розв'язок для комплексного та дійсного рівняння мКдФ (з $\sigma = 1$). Властивості нелокального рівняння мКдФ (1.17), включаючи солітони, кінки, антикінки та хвилі-вбивці представлені в роботах [61, 62] (див. також [77], де були отримані темні солітони та точні періодичні розв'язки для комплексного нелокального рівняння мКдФ). Було показано, що рівняння (1.17) та (1.18) калібрувально еквівалентні рівнянню типу спінової моделі [77].

Початкові задачі для дійсного нелокального мКдФ (1.17) також розглядалися в низці робіт. Так, МОЗР для фокусуючого випадку ($\sigma = 1$) для початкової задачі на нульовому фоні представлено у [62]. Асимптотика для дефокусуючої задачі з нульовими крайовими умовами отримана у [56] за допомогою нелінійного методу перевалу (методу Дейфта й Жу). Задача на ненульовому (симетричному) фоні розглядається у [118], де автори розробили МОЗР та знайшли точні солітонні розв'язки різного типу.

Крім рівнянь, зазначених вище, було виведено цілу низку інших інтегровних нелокальних систем [10]. Також відзначимо [45], де були запропоновані багатовимірні нелокальні моделі (див. також [87, 88]). У [109] обговорюються фізично цікаві нелокальні рівняння, зокрема, різні варіанти нелокального рівняння Манакова (див. також [33]). Нелокальне нелінійне рівняння Мельнікова розглядалось у [71], а нелокальне рівняння Саса-Сатсуми

– у [100].

1.4 Висновки до Розділу 1

Наведений огляд літератури демонструє неабиякий інтерес науковців, що працюють у різних областях математики та фізики, до інтегровних нелокальних нелінійних рівнянь. З одного боку, це підтверджує актуальність обраної у дисертації тематики, а з іншого боку, маємо всі підстави вважати, що представлений вище певний зріз сучасного стану вивчення різних питань, пов'язаних з нелокальними нелінійними інтегровними рівняннями (зокрема, з нелокальним нелінійним рівнянням Шредінгера), дуже скоро буде далеко не повним.

Розділ 2

Початкова задача для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера на нульовому фоні

Результати цього Розділу опубліковані у роботі [89].

У цьому розділі розглядається початкова задача для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2\sigma q^2(x, t)\bar{q}(-x, t) = 0, \quad \sigma = \pm 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.1a)$$

$$q(x, 0) = q_0(x), \quad (2.1b)$$

де задана початкова функція $q_0(x)$ швидко прямує до нуля при $|x| \rightarrow \infty$ [89]. Основною метою є отримання асимптотики за великим часом задачі Коші (2.1). Для цього ми використовуємо метод оберненої задачі розсіювання (МОЗР) у формі задачі Рімана-Гільберта (Підрозділ 1.1) та адаптуємо нелінійний метод перевалу (метод Дейфта-Жу [38, 36]). Основні інгредієнти для побудови вихідної задачі Рімана-Гільберта — розв'язки Йоста відповідної пари Лакса — обговорювалися у роботі [9]. У Підрозділі 2.1 ми розробляємо формалізм методу оберненої задачі розсіювання у вигляді мультиплікативної задачі Рімана-Гільберта, який є зручним для подальшого асимптотичного (при $t \rightarrow \infty$) аналізу. Цей аналіз представлений у Підрозділі 2.2, де сформульовано основний результат цього Розділу. Наш аналіз є дійсним за певних припущень щодо поведінки спектральних функцій, пов'язаних із вихідними даними. Обґрунтованість цих припущень з

точки зору вихідних даних (зокрема, для початкових даних у формі п'єдестала) обговорюється в Підрозділі 2.3.

2.1 Метод оберненої задачі розсіювання та задача Рімана-Гільберта

Загальний метод Абловіца-Каупа-Ньюелла-Сегура [4, 14] був застосований до ННРШ (2.1а) у [9]. У нашій роботі, ми дещо інакше будемо формалізм методу оберненої задачі розсіювання, з прицілом на зручність його подальшого використання для асимптотичного аналізу.

Як зазначалося в Підрозділі 1.2, ННРШ є умовою сумісності двох лінійних рівнянь (пари Лакса) для 2×2 матриці-функції $\Phi(x, t, k)$:

$$\Phi_x + ik\sigma_3\Phi = U\Phi, \quad (2.2a)$$

$$\Phi_t + 2ik^2\sigma_3\Phi = V\Phi, \quad (2.2b)$$

де

$$U = \begin{pmatrix} 0 & q(x, t) \\ -\sigma\bar{q}(-x, t) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

у спектральній задачі АКНС (2.2а) та

$$V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

з $A = i\sigma q(x, t)\bar{q}(-x, t)$, $B = 2kq(x, t) + iq_x(x, t)$, та $C = -2k\sigma\bar{q}(-x, t) + i\sigma(\bar{q}(-x, t))_x$, у еволюційному рівнянні за часовою змінною (2.2b).

Припускаючи, що $q(x, t)$ задовольняє (2.1а) та що $q(\cdot, t) \in L^1(-\infty, \infty)$ для всіх $t \geq 0$, визначимо (матричнозначі) розв'язки Йоста $\Phi_j(x, t, k)$, $j = 1, 2$, системи рівнянь (2.2) у такий спосіб: $\Phi_j(x, t, k) = \Psi_j(x, t, k)e^{(-ikx - 2ik^2t)\sigma_3}$, де $\Psi_j(x, t, k)$ є розв'язками інтегральних рівнянь Вольтерра, які відповід-

ають системі (2.2):

$$\Psi_1(x, t, k) = I + \int_{-\infty}^x e^{ik(y-x)\sigma_3} U(y, t) \Psi_1(y, t, k) e^{-ik(y-x)\sigma_3} dy, \quad k \in (\mathbb{C}^+, \mathbb{C}^-), \quad (2.5a)$$

$$\Psi_2(x, t, k) = I + \int_{\infty}^x e^{ik(y-x)\sigma_3} U(y, t) \Psi_2(y, t, k) e^{-ik(y-x)\sigma_3} dy, \quad k \in (\mathbb{C}^-, \mathbb{C}^+). \quad (2.5b)$$

Тут і далі, $I \in 2 \times 2$ одиничною матрицею, $\mathbb{C}^\pm = \{k \in \mathbb{C} \mid \pm \operatorname{Im} k > 0\}$, та $k \in (\mathbb{C}^+, \mathbb{C}^-)$ означає, що перший та другий стовпчик матричнозначної функції може бути аналітично продовжений відповідно у верхню та нижню півплощину. Крім того, з (2.5) випливає, що стовпчики $\Psi_j(\cdot, \cdot, k) \in$ неперервними до межі (\mathbb{R}) відповідних півплощин, та $\Psi_j(\cdot, \cdot, k) \rightarrow I$ при $k \rightarrow \infty$, $k \in (\mathbb{C}^+, \mathbb{C}^-)$. З того, що матриця $U(x, t)$ є безслідовою, випливає, що $\det \Phi_j(x, t, k) \equiv 1$ для всіх x , t і k .

Визначимо матрицю розсіювання $S(k)$, $k \in \mathbb{R}$ ($\det S(k) \equiv 1$) як матрицю, яка пов'язує розв'язки системи (2.2) $\Phi_j(x, t, k)$ (для всіх x та t) для $k \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_1(x, t, k) = \Phi_2(x, t, k) S(k), \quad k \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Зазначимо, що симетрія [9]

$$\overline{\Lambda \Phi_1(-x, t, -k) \Lambda^{-1}} = \Phi_2(x, t, k), \quad (2.7)$$

де $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, пов'язує розв'язки Йоста, які нормовані на різних нескінченностях (відносно x). З цього випливає, що $S(k)$ може бути записана у формі

$$S(k) = \begin{pmatrix} a_1(k) & -\sigma \overline{b(-k)} \\ b(k) & a_2(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

з деякими $b(k)$, $a_1(k)$ та $a_2(k)$, де останні дві спектральні функції задовольняють наступні умови симетрії:

$$\overline{a_1(-\bar{k})} = a_1(k), \quad \overline{a_2(-\bar{k})} = a_2(k). \quad (2.9)$$

Зазначимо, що на відміну від випадку класичного (локального) нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ), де $\overline{a_1(k)} = a_2(k)$, спектральні функції $a_1(k)$ та $a_2(k)$ для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера не пов'язані між собою; замість цього, вони задовольняють умови симетрії (2.9), які, взагалі кажучи, не виконуються у випадку класичного НРШ.

Матриця розсіювання $S(k)$ однозначно визначається початковими даними $q(x, 0)$ у такий спосіб:

$$S(k) = \Phi_2^{-1}(x, 0, k)\Phi_1(x, 0, k) = e^{ikx}\Psi_2^{-1}(x, 0, k)\Psi_1(x, 0, k)e^{-ikx},$$

де $\Psi_j(x, 0, k)$ є розв'язками (лінійного) інтегрального рівняння (2.5) з $q(x, 0)$ замість $q(x, t)$. Дійсно, позначаючи $\psi_1(x, t) = (\Psi_1)_{11}(x, 0, k)$, $\psi_2(x, t) = (\Psi_1)_{12}(x, 0, k)$, $\psi_3(x, t) = (\Psi_1)_{21}(x, 0, k)$, $\psi_4(x, t) = (\Psi_1)_{22}(x, 0, k)$, отримуємо системи рівнянь для пар функцій ψ_1, ψ_3 та ψ_2, ψ_4 :

$$\begin{aligned}\psi_1(x, k) &= 1 + \int_{-\infty}^x q_0(y)\psi_3(y, k) dy, \\ \psi_3(x, k) &= -\sigma \int_{-\infty}^x e^{2ik(x-y)}\overline{q_0(-y)}\psi_1(y, k) dy,\end{aligned}\tag{2.10}$$

та

$$\begin{aligned}\psi_2(x, k) &= \int_{-\infty}^x e^{2ik(y-x)}q_0(y)\psi_4(y, k) dy, \\ \psi_4(x, k) &= 1 - \sigma \int_{-\infty}^x \overline{q_0(-y)}\psi_2(y, k) dy.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Спектральні функції можна визначити в термінах розв'язків цих рівнянь:

$$a_1(k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi_1(x, k), \quad b(k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2ikx}\psi_3(x, k),\tag{2.12}$$

та

$$a_2(k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi_4(x, k).\tag{2.13}$$

Зазначимо, що в термінах Ψ_j , співвідношення розсіювання (2.6) має вигляд

$$\Psi_1(x, t, k) = \Psi_2(x, t, k)e^{-(ikx+2ik^2t)\sigma_3}S(k)e^{(ikx+2ik^2t)\sigma_3}.\tag{2.14}$$

Підсумуємо властивості спектральних функцій.

1. $a_1(k)$ аналітична при $k \in \mathbb{C}^+$ та неперервна при $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$; $a_2(k)$ аналітична при $k \in \mathbb{C}^-$ та неперервна при $k \in \overline{\mathbb{C}^-}$.
2. $a_j(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right)$, $j = 1, 2$ та $b(k) = O\left(\frac{1}{k}\right)$ при $k \rightarrow \infty$ (останнє має місце при $k \in \mathbb{R}$).
3. $\overline{a_1(-\bar{k})} = a_1(k)$, $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$; $\overline{a_2(-\bar{k})} = a_2(k)$, $k \in \overline{\mathbb{C}^-}$.
4. $a_1(k)a_2(k) + \sigma b(k)\overline{b(-k)} = 1$, $k \in \mathbb{R}$ (випливає з того, що $\det S(k) = 1$).

Подібно до випадку класичного НРШ, визначимо матричнозначну функцію $M(x, t, k)$ у такий спосіб:

$$M(x, t, k) = \begin{cases} \left(\frac{\Psi_1^{(1)}(x, t, k)}{a_1(k)}, \Psi_2^{(2)}(x, t, k) \right), & \text{Im } k > 0, \\ \left(\Psi_2^{(1)}(x, t, k), \frac{\Psi_1^{(2)}(x, t, k)}{a_2(k)} \right), & \text{Im } k < 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

де $\Psi_i^{(j)}(x, t, k) \in j$ -им стовпчиком матриці $\Psi_i(x, t, k)$. Тоді співвідношення розсіювання (2.14) може бути переписано у вигляді умови стрибка для $M(\cdot, \cdot, k)$ вздовж $k \in \mathbb{R}$:

$$M_+(x, t, k) = M_-(x, t, k)J(x, t, k), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (2.16)$$

де M_\pm позначає граничні значення матриці M при наближенні k до \mathbb{R} з \mathbb{C}^\pm , та

$$J(x, t, k) = \begin{pmatrix} 1 + \sigma r_1(k)r_2(k) & \sigma r_2(k)e^{-2ikx-4ik^2t} \\ r_1(k)e^{2ikx+4ik^2t} & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (2.17)$$

де

$$r_1(k) := \frac{b(k)}{a_1(k)} \quad \text{та} \quad r_2(k) := \frac{\overline{b(-k)}}{a_2(k)}. \quad (2.18)$$

Крім того,

$$M(x, t, k) \rightarrow I, \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (2.19)$$

У цьому Розділі ми припускаємо, що $a_1(k)$ та $a_2(k)$ не мають нулів у $\overline{\mathbb{C}^+}$ та $\overline{\mathbb{C}^-}$ відповідно. У цьому випадку, співвідношення (2.16)–(2.19) можуть розглядатися як задача Рімана-Гільберта (РГ): за даними $r_1(k)$ та $r_2(k)$

при $k \in \mathbb{R}$, знайти кусково-аналітичну (відносно до \mathbb{R}), 2×2 функцію M , яка задовольняє умови (2.16) та (2.19) (якщо $a_1(k)$ та/або $a_2(k)$ мають нулі, тоді $M(\cdot, \cdot, k)$ може мати полюси в цих нулях, і задача Рімана-Гільберта має бути доповнена відповідними умовами на лишки (див., наприклад, [44]).

Припускаючи, що задача Рімана-Гільберта має розв'язок $M(x, t, k)$ для всіх x і t , розв'язок $q(x, t)$ задачі Коші (2.1) можна знайти в термінах (12) елемента матриці $M(x, t, k)$ у такий спосіб [14, 44]:

$$q(x, t) = 2i \lim_{k \rightarrow \infty} k M_{12}(x, t, k). \quad (2.20)$$

Зауваження 2.1. З огляду на (2.9), $r_1(k)$ і $r_2(k)$ при $k \in \mathbb{R}$ зв'язані між собою наступним чином:

$$\overline{r_2(-k)} = \frac{b(k)}{a_2(-k)} = r_1(k) \frac{a_1(k)}{a_2(-k)} = r_1(k) \frac{a_1(k)}{a_2(k)}. \quad (2.21)$$

Аналогічно,

$$\overline{r_1(-k)} = r_2(k) \frac{a_2(k)}{a_1(k)},$$

з чого випливає рівність

$$r_1(-k)r_2(-k) = \overline{r_1(k)} \overline{r_2(k)}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (2.22)$$

Крім того, з детермінантної властивості 4 випливає, що

$$1 + \sigma r_1(k)r_2(k) = \frac{1}{a_1(k)a_2(k)}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (2.23)$$

У свою чергу, з (2.21) та (2.23) випливає, що якщо $r_1(k)$ та $r_2(k)$ задані при $k \in \mathbb{R}$, то $a_1(k)$ та $a_2(k)$ однозначно визначаються при $k \in \mathbb{R}$ (та, в силу аналітичності, відповідно у \mathbb{C}^+ та \mathbb{C}^-).

Зауваження 2.2. Якщо $a_1(k)$ і $a_2(k)$ не мають нулів у відповідно $\overline{\mathbb{C}^+}$ і $\overline{\mathbb{C}^-}$, тоді за теоремою Коші та формулою Племеля-Сохоцького для $\ln a_1(k)$ та $\ln a_2(k)$ [44] маємо

$$\ln a_1(k) = \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln a_1(\zeta)}{\zeta - k} d\zeta, \quad k \in \mathbb{R},$$

$$\ln a_2(k) = -\frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln a_2(\zeta)}{\zeta - k} d\zeta, \quad k \in \mathbb{R},$$

і тому

$$\frac{a_1(k)}{a_2(k)} = \exp \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln a_1(\zeta) a_2(\zeta)}{\zeta - k} d\zeta \right\}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

Крім того, з огляду на (2.21), маємо

$$\frac{\overline{r_2(-k)}}{r_1(k)} = \frac{r_2(k)}{r_1(-k)} = \exp \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln a_1(\zeta) a_2(\zeta)}{\zeta - k} d\zeta \right\}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (2.25)$$

Лема 2.1. Розв'язок M задачі Рімана-Гільберта (2.16), (2.17), (2.19) задовольняє наступну умову симетрії (пор. з (2.7)):

$$M(x, t, k) = \begin{cases} \overline{\Lambda M(-x, t, -\bar{k})} \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1(k)} & 0 \\ 0 & a_1(k) \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{C}^+, \\ \overline{\Lambda M(-x, t, -\bar{k})} \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} a_2(k) & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2(k)} \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{C}^-. \end{cases} \quad (2.26)$$

Доведення. З (2.22) і (2.23) випливає, що матриця стрибка (2.17) у (2.16) задовольняє наступну умову симетрії:

$$\overline{\Lambda J(-x, t, -k)} \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} a_2(k) & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2(k)} \end{pmatrix} J(x, t, k) \begin{pmatrix} a_1(k) & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_1(k)} \end{pmatrix}.$$

Тоді твердження лемми випливає з єдиності розв'язку задачі Рімана-Гільберта (що має місце в силу теореми Ліувілля). \square

Зауваження 2.3. Симетрія (2.26) виконується для розв'язку задачі Рімана-Гільберта в більш загальній постановці, яка включає можливість скінченної кількості нулів спектральних функцій $a_1(k)$ і $a_2(k)$; тоді у формулювання вихідної задачі додаються умови на лишки. Доведення цього твердження знову ґрунтується на єдиності розв'язку задачі Рімана-Гільберта, беручи до уваги, що структура умов на лишки є такою, що зберігає єдиність розв'язку [44].

2.2 Асимптотична поведінка за великим часом для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера

Головною метою цього Розділу є отримання асимптотики за великим часом розв'язку задачі Коші (2.1). За аналогією до випадку класичного НРШ [36], ми використовуємо зображення розв'язку початкової задачі через розв'язок задачі Рімана-Гільберта і розглядаємо його асимптотично, застосовуючи нелінійний метод перевалу для осциляційних задач Рімана-Гільберта [38]. Цей метод ґрунтується на послідовних перетвореннях вихідної задачі Рімана-Гільберта, які зводять її до задачі, що розв'язується явно. Послідовні етапи методу подібні до тих, що застосовуються у випадку класичного нелінійного рівняння Шредінгера [36]: трикутні факторизації матриці стрибка; “абсорбація” трикутних матриць стрибка з придатною поведінкою за великим часом; зведення, після відповідного масштабування, задачі Рімана-Гільберта до такої, що явно розв'язується у термінах функцій параболічного циліндра; контроль похибок апроксимацій. При виконанні цих етапів ми будемо звертати увагу на особливості аналізу задачі у випадку нелокального нелінійного рівняння Шредінгера.

2.2.1 Факторизація матриці стрибка

Введемо до розгляду $\xi := \frac{x}{4t}$ і

$$\theta(k, \xi) = 4k\xi + 2k^2.$$

У матриці стрибка (2.17) є дві трикутних факторизації:

$$J(x, t, k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{r_1(k)}{1+\sigma r_1(k)r_2(k)} e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \sigma r_1(k)r_2(k) & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\sigma r_1(k)r_2(k)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma r_2(k)}{1+\sigma r_1(k)r_2(k)} e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \sigma r_2(k) e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r_1(k) e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

В процесі трансформації вихідної задачі РГ, факторизації (2.27) і (2.28) використовуються таким чином, щоб осциляційна матриця стрибка на \mathbb{R} для перетвореної задачі Рімана-Гільберта стала рівною (дивись нижче задачу Рімана-Гільберта для \hat{M}) одиничній матриці, у той час як стрибки, які виникають поза \mathbb{R} , були експоненціально малі при $t \rightarrow \infty$ [36]. Відповідно до “таблиці знаків” для θ (див. Рисунок 2.2), тобто розподілу знаку $\text{Im } \theta$ у k -площині, факторизація (2.28) є придатною для $k > -\xi$, у той час коли факторизація (2.27) є придатною (після того, як ми позбудемося діагонального множника) при $k < -\xi$. В свою чергу, діагонального множника (2.27) можна позбутися, використовуючи розв’язок наступної скалярної задачі Рімана-Гільберта: знайти скалярну функцію $\delta(k, \xi)$ (ξ є параметром), аналітичну у $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -\xi]$ і таку, що

$$\begin{aligned} \delta_+(k, \xi) &= \delta_-(k, \xi)(1 + \sigma r_1(k)r_2(k)), \quad k \in (-\infty, -\xi), \\ \delta(k, \xi) &\rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Маючи таку функцію $\delta(k, \xi)$, ми можемо ввести до розгляду $\tilde{M}(x, t, k) := M(x, t, k)\delta^{-\sigma_3}(k, \xi)$, яка задовольняє умові стрибка

$$\tilde{M}_+(x, t, k) = \tilde{M}_-(x, t, k)\tilde{J}(x, t, k), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (2.30)$$

де

$$\tilde{J}(x, t, k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{r_1(k)\delta_-^{-2}(k, \xi)}{1 + \sigma r_1(k)r_2(k)} e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma r_2(k)\delta_+^2(k, \xi)}{1 + \sigma r_1(k)r_2(k)} e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k < -\xi, \\ \begin{pmatrix} 1 & \sigma r_2(k)\delta^2(k, \xi)e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r_1(k)\delta^{-2}(k, \xi)e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix}, & k > -\xi, \end{cases} \quad (2.31)$$

та умові нормування $\tilde{M}(x, t, k) \rightarrow I$ при $k \rightarrow \infty$.

Функцію $\delta(k, \xi)$, яка задовольняє (2.29), можна виписати явно:

$$\delta(k, \xi) := \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\xi} \frac{\ln(1 + \sigma r_1(\zeta)r_2(\zeta))}{\zeta - k} d\zeta \right\}. \quad (2.32)$$

Однією з головних відмінностей у нашому аналізі (у порівнянні з випадком класичного НРШ) є те, що у випадку ННРШ, функція $1 + \sigma r_1(k)r_2(k)$ є, взагалі кажучи, комплекснозначною. Як наслідок, функція $\delta(k, \xi)$ у (2.32) може не бути обмеженою у $k = -\xi$. Дійсно, вона може бути записана у вигляді

$$\delta(k, \xi) = (\xi + k)^{i\nu(-\xi)} e^{\chi(k)}, \quad (2.33)$$

де

$$\chi(k) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\xi} \ln(k - \zeta) d\zeta \ln(1 + \sigma r_1(\zeta)r_2(\zeta)), \quad (2.34)$$

та

$$\nu(-\xi) := -\frac{1}{2\pi} \ln(1 + \sigma r_1(-\xi)r_2(-\xi)), \quad (2.35)$$

де логарифм визначено таким чином, що

$$\operatorname{Im} \nu(-\xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\xi} d \arg(1 + \sigma r_1(\zeta)r_2(\zeta)).$$

Припустимо, що неперервна функція $\arg(1 + \sigma r_1(\zeta)r_2(\zeta))$, $k \in \mathbb{R}$ є такою, що $\arg(1 + \sigma r_1(-\infty)r_2(-\infty)) = 0$ і $\int_{-\infty}^k d \arg(1 + \sigma r_1(\zeta)r_2(\zeta)) \in (-\pi, \pi)$ для всіх $k \in \mathbb{R}$. Тоді маємо

$$|\operatorname{Im} \nu(k)| < \frac{1}{2} \quad \text{для всіх } k \in \mathbb{R}, \quad (2.36)$$

звідки випливає, що сингулярність $\delta(k, \xi)$ у $k = -\xi$ (якщо вона є) є інтегрованою з квадратом: $\int_{-\infty}^{\infty} |\delta(k, \xi)|^2 dk < \infty$. Крім того, сингулярність розв'язку \hat{M} перетвореної задачі Рімана-Гільберта також буде інтегрованою з квадратом, що дозволить нам дотримуватись схеми виводу головного члена асимптотики (при $t \rightarrow \infty$) аналогічно випадку обмеженої функції $\delta(k, \xi)$ [70]. Але більш важливо, що припущення (2.36) забезпечує можливість розв'язати, для достатньо великих значень t , інтегральне рівняння для функції μ , див. (2.65) та (2.66) нижче, у термінах якої може бути виражений як розв'язок \hat{M} відповідної задачі РГ, так і $q(x, t)$ (Підрозділ 2.2.3).

Відзначимо симетрії (специфічні у випадку ННРШ) функцій ν і χ , які використовуються у виразі для δ .

Лема 2.2. *Нехай виконано (2.36). Тоді мають місце наступні рівності ($\xi \in \mathbb{R}$):*

$$\nu(-\xi) = \overline{\nu(\xi)} \quad (2.37)$$

та

$$\overline{\chi(-\xi)} + \chi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln a_1(\zeta)a_2(\zeta)}{\zeta - \xi} d\zeta. \quad (2.38)$$

Доведення: випливає з (2.9) і (2.23).

2.2.2 Перетворення задачі Рімана-Гільберта

Зазначимо, що як і у випадку класичного НРШ, коефіцієнти відбиття $r_j(k)$, $j = 1, 2$ визначені, взагалі кажучи, лише для $k \in \mathbb{R}$; однак можна наблизити $r_j(k)$ і $\frac{r_j(k)}{1+\sigma r_1(k)r_2(k)}$ певними раціональними функціями з добре контрольованою похибкою ([38]; див. також [70], розділ 4 стосовно обговорення регулярності $r_j(k)$, необхідної для встановлення відповідних наближень). З іншого боку, якщо ми припустимо, що початкові дані $q_0(x)$ прямують до 0 при $|x| \rightarrow \infty$ експоненціально швидко, тоді $r_j(k)$ виявляються аналітичними у смузі, що містить $k \in \mathbb{R}$ і, таким чином, відпадає необхідність у використанні раціональних наближень для того, щоби мати можливість виконати перетворення, наведені нижче (контури $\hat{\gamma}_j$ можна намалювати всередині цієї смуги).

Отже, зберігаючи ті ж самі позначення для аналітичних наближень $r_j(k)$ та $\frac{r_j(k)}{1+\sigma r_1(k)r_2(k)}$, якщо вони потрібні, визначимо функцію $\hat{M}(x, t, k)$ у такий

спосіб: (див. Рисунок 2.1)

$$\hat{M}(x, t, k) = \begin{cases} \tilde{M}(x, t, k), & k \in \hat{\Omega}_0, \\ \tilde{M}(x, t, k) \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\sigma r_2(k) \delta^2(k, \xi)}{1 + \sigma r_1(k) r_2(k)} e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\Omega}_1, \\ \tilde{M}(x, t, k) \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ -r_1(k) \delta^{-2}(k, \xi) e^{2it\theta} & & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\Omega}_2, \\ \tilde{M}(x, t, k) \begin{pmatrix} 1 & \sigma r_2(k) \delta^2(k, \xi) e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\Omega}_3, \\ \tilde{M}(x, t, k) \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ \frac{r_1(k) \delta^{-2}(k, \xi)}{1 + \sigma r_1(k) r_2(k)} e^{2it\theta} & & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\Omega}_4. \end{cases} \quad (2.39)$$

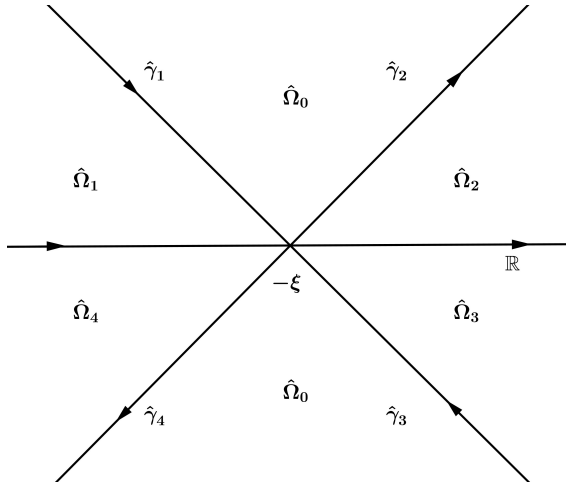


Рис. 2.1:

$$\hat{\Gamma} = \hat{\gamma}_1 \cup \dots \cup \hat{\gamma}_4$$

Ця функція \hat{M} задовольняє наступній задачі Рімана-Гільберта зі стрибком вздовж $\hat{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} \hat{M}_+(x, t, k) &= \hat{M}_-(x, t, k) \hat{J}(x, t, k), \quad k \in \hat{\Gamma}, \\ \hat{M}(x, t, k) &\rightarrow I, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.40)$$

| | |
|-------------------------|-------------------------|
| $\text{Im } \theta < 0$ | $\text{Im } \theta > 0$ |
| $\text{Im } \theta > 0$ | $\text{Im } \theta < 0$ |

Рис. 2.2:

Таблиця знаків

де

$$\hat{J}(x, t, k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma r_2(k) \delta^2(k, \xi)}{1 + \sigma r_1(k) r_2(k)} e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\gamma}_1, \\ \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ r_1(k) \delta^{-2}(k, \xi) e^{2it\theta} & & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\gamma}_2, \\ \begin{pmatrix} 1 & -\sigma r_2(k) \delta^2(k, \xi) e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\gamma}_3, \\ \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ \frac{-r_1(k) \delta^{-2}(k, \xi)}{1 + \sigma r_1(k) r_2(k)} e^{2it\theta} & & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\gamma}_4. \end{cases} \quad (2.41)$$

Згідно з припущенням (2.36), \hat{M} може мати особливість при $k = -\xi$, але не сильнішу за $(k + \xi)^{-1/2}$, що дозволяє застосувати стандартні міркування (засновані на теоремі Ліувілля), які показують, що розв'язок задачі Рімана-Гільберта (2.40) єдиний, якщо він існує.

Таблиця знаків для $\text{Im } \theta$ чітко показує, що матриця стрибка $\hat{J}(x, t, k)$ для деформованої задачі (2.40) швидко прямує, при $t \rightarrow \infty$, до одиничної матриці для всіх $k \in \hat{\Gamma} \setminus \{-\xi\}$, а збіжність є рівномірною поза будь-якого фіксованого околу точки $-\xi$.

2.2.3 Зведення до модельної задачі Рімана-Гільберта

Відповідно до загальної схеми асимптотичного аналізу задач Рімана-Гільберта із точкою стаціонарної фази функції θ , поблизу якої порушується рівномірне прямування матриці стрибка до I [38, 36], задача Рімана-Гільберта порівнюється із задачею, яка є її модифікацією в околі цієї точки. Ця модифікація виконується за допомогою масштабування спектрального параметра. Оскільки воно диктується фазовою функцією $\theta(k)$, а θ в нашому випадку є такою самою, як і у випадку класичного НРШ, то масштабований спектральний параметр z вводиться у такий же спосіб:

$$k = \frac{z}{\sqrt{8t}} - \xi. \quad (2.42)$$

Тоді

$$e^{2it\theta} = e^{i\frac{z^2}{2} - 4it\xi^2}. \quad (2.43)$$

Біля $k = -\xi$, функції, які задіяні в матриці стрибка (2.41), можуть бути наближені у такий спосіб:

$$\begin{aligned} r_j(k(z)) &\approx r_j(-\xi), \quad j = 1, 2, \\ \delta(k(z), \xi) &\approx \left(\frac{z}{\sqrt{8t}}\right)^{i\nu(-\xi)} e^{\chi(-\xi)}. \end{aligned}$$

Маючи на увазі ці наближення, а також специфічну залежність експоненти (2.43) від нової змінної z , ми проводимо асимптотичний аналіз при $t \rightarrow \infty$ розв'язку задачі Рімана-Гільберта (2.40) (і, як наслідок, асимптотичний аналіз $q(x, t)$), дотримуючись схеми, застосованої у [70]:

- (i) вводимо локальний параметрикс, тобто розв'язок $m^\Gamma(\xi, z)$ задачі Рімана-Гільберта у z -площині з контуром $\Gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_4$ (див. Рисунок 2.3):

$$\begin{cases} m_+^\Gamma(\xi, z) = m_-^\Gamma(\xi, z)j^\Gamma(\xi, z), & z \in \Gamma \\ m^\Gamma(\xi, z) \rightarrow I, & z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.44)$$

де

$$j^\Gamma(\xi, z) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma r_2(-\xi)}{1+\sigma r_1(-\xi)r_2(-\xi)} e^{-i\frac{z^2}{2}} z^{2i\nu(-\xi)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \gamma_1, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r_1(-\xi) e^{i\frac{z^2}{2}} z^{-2i\nu(-\xi)} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \gamma_2, \\ \begin{pmatrix} 1 & -\sigma r_2(-\xi) e^{-i\frac{z^2}{2}} z^{2i\nu(-\xi)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \gamma_3, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-r_1(-\xi)}{1+\sigma r_1(-\xi)r_2(-\xi)} e^{i\frac{z^2}{2}} z^{-2i\nu(-\xi)} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \gamma_4. \end{cases} \quad (2.45)$$

- (ii) використовуючи $m^\Gamma(\xi, z)$, вводимо $\tilde{m}_0(x, t, k)$ для k біля $-\xi$:

$$\tilde{m}_0(x, t, k) = \Delta(\xi, t) m^\Gamma(\xi, z(k)) \Delta^{-1}(\xi, t), \quad (2.46)$$

де

$$\Delta(\xi, t) = e^{(2it\xi^2 + \chi(-\xi))\sigma_3} (8t)^{-\frac{i\nu(-\xi)}{2}\sigma_3}; \quad (2.47)$$

(iii) використовуючи $\tilde{m}_0(x, t, k)$, вводимо $\hat{m}(x, t, k)$:

$$\hat{m}(x, t, k) = \begin{cases} \hat{M}(x, t, k)\tilde{m}_0^{-1}(x, t, k), & |k + \xi| < \varepsilon, \\ \hat{M}(x, t, k), & |k + \xi| > \varepsilon, \end{cases} \quad (2.48)$$

(з деяким малим $\varepsilon > 0$); тоді $\hat{m}(x, t, k)$ є розв'язком наступної задачі Рімана-Гільберта:

$$\begin{cases} \hat{m}_+(x, t, k) = \hat{m}_-(x, t, k)\hat{v}(x, t, k), & k \in \hat{\Gamma}_1, \\ \hat{m}(x, t, k) \rightarrow I, & k \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.49)$$

де $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma} \cup \{k : |k + \xi| = \varepsilon\}$ (коло $\{k : |k + \xi| = \varepsilon\}$ вважається орієнтованим проти годинникової стрілки) та

$$\hat{v}(x, t, k) = \begin{cases} \tilde{m}_{0-}(x, t, k)\hat{J}(x, t, k)\tilde{m}_{0+}^{-1}(x, t, k), & k \in \hat{\Gamma}, |k + \xi| < \varepsilon, \\ \tilde{m}_0^{-1}(x, t, k), & |k + \xi| = \varepsilon, \\ \hat{J}(x, t, k), & \text{на інших частинах } \hat{\Gamma}_1. \end{cases} \quad (2.50)$$

Зазначимо, що з (2.20) випливає, що

$$q(x, t) = 2i \lim_{k \rightarrow \infty} k \hat{m}_{12}(x, t, k). \quad (2.51)$$

(iv) оцінюючи $\hat{v} - I$, встановлюємо оцінки поведінки $\hat{m}(x, t, k)$ (і, як наслідок, $\hat{M}(x, t, k)$) при великих значеннях t . У свою чергу, це дозволить отримати оцінку для $q(x, t)$, використовуючи зображення $q(x, t) = 2i(\hat{M}_1)_{12}(x, t)$ (див. (2.20)), де $(\hat{M}_1)_{12}(x, t)$ отримується з розкладу (при великих k) функції \hat{M} : $\hat{M}(x, t, k) = I + \frac{\hat{M}_1(x, t)}{k} + \dots$

Перейдемо до реалізацію цього плану аналізу. Щодо пункту (i), зазначимо, що $m^\Gamma(\xi, z)$ можна побудувати наступним чином:

$$m^\Gamma(\xi, z) = m_0(\xi, z)D_j^{-1}(\xi, z), \quad z \in \Omega_j, \quad j = 0, \dots, 4, \quad (2.52)$$

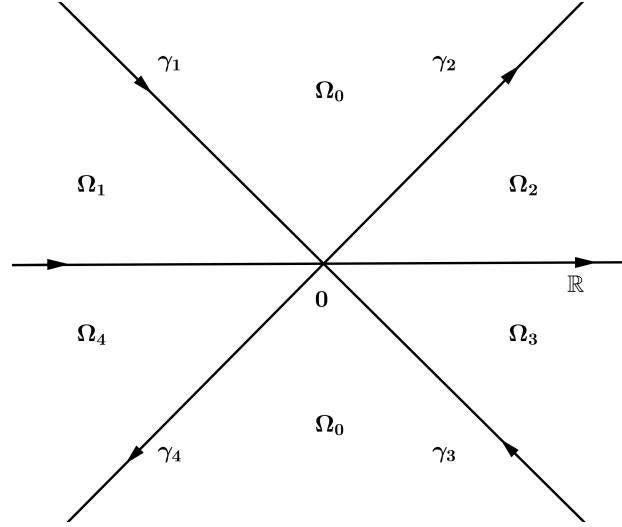


Рис. 2.3:

$$\Gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_4$$

де

$$D_0(\xi, z) = e^{-i\frac{z^2}{4}\sigma_3} z^{i\nu(-\xi)\sigma_3},$$

$$D_1(\xi, z) = D_0(\xi, z) \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma r_2(-\xi)}{1+\sigma r_1(-\xi)r_2(-\xi)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(\xi, z) = D_0(\xi, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r_1(-\xi) & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_3(\xi, z) = D_0(\xi, z) \begin{pmatrix} 1 & -\sigma r_2(-\xi) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_4(\xi, z) = D_0(\xi, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-r_1(-\xi)}{1+\sigma r_1(-\xi)r_2(-\xi)} & 1 \end{pmatrix},$$

та $m_0(\xi, z)$ є розв'язком наступної задачі Рімана-Гільберта зі *сталюю* матрицею стрибка вздовж \mathbb{R} :

$$\begin{cases} m_{0+}(\xi, z) = m_{0-}(\xi, z)j_0(\xi), & z \in \mathbb{R}, \\ m_0(\xi, z) = (I + O(1/z)) e^{-i\frac{z^2}{4}\sigma_3} z^{i\nu(-\xi)\sigma_3}, & z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.53)$$

де

$$j_0(\xi) = \begin{pmatrix} 1 + \sigma r_1(-\xi)r_2(-\xi) & \sigma r_2(-\xi) \\ r_1(-\xi) & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Нарешті, розв'язок $m_0(\xi, z)$ цієї задачі може бути знайдений явно, в термінах функцій параболичного циліндру, аналогічно випадку класичного НРШ [58, 46].

Дійсно, з того, що матриця $j_0(\xi)$ не залежить від z , випливає, що логарифмічна похідна $\frac{d}{dz}m_0 \cdot m_0^{-1}$ є цілою функцією. Беручи до уваги асим-

птотичну умову в задачі Рімана-Гільберта (2.53) і використовуючи теорему Ліувілля, отримуємо (аналогічно [70]), що $m_0(\xi, z)$ задовольняє наступному звичайному диференціальному рівнянню:

$$\frac{d}{dz}m_0(\xi, z) + \begin{pmatrix} \frac{iz}{2} & \beta(\xi) \\ \gamma(\xi) & \frac{-iz}{2} \end{pmatrix} m_0(\xi, z) = 0, \quad (2.55)$$

з деякими $\beta(\xi)$ та $\gamma(\xi)$; крім того, (див. (2.52)), $\beta(\xi) = -i(m_1^\Gamma)_{12}(\xi)$, $\gamma(\xi) = i(m_1^\Gamma)_{21}(\xi)$, де m_1^Γ входить до розвинення $m_0(\xi, z) = (I + \frac{m_1^\Gamma(\xi)}{z} + \dots)e^{-i\frac{z^2}{4}\sigma_3} z^{i\nu(-\xi)\sigma_3}$ при $z \rightarrow \infty$.

Зазначимо, що розв'язок $m_0(\xi, z)$ рівняння (2.55) може бути записане у вигляді

$$m_0(\xi, z) = \begin{pmatrix} (m_0)_{11}(\xi, z) & \frac{(\frac{d}{dz} - i\frac{z}{2})(m_0)_{22}(\xi, z)}{-\gamma(\xi)} \\ \frac{(\frac{d}{dz} + i\frac{z}{2})(m_0)_{11}(\xi, z)}{-\beta(\xi)} & (m_0)_{22}(\xi, z) \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

де функції $(m_0)_{jj}(\xi, z)$, $j = 1, 2$ задовольняють рівняння параболічного циліндра

$$\frac{d^2}{dz^2}(m_0)_{11}(\xi, z) + \left(\frac{i}{2} - \beta(\xi)\gamma(\xi) + \frac{z^2}{4} \right) (m_0)_{11}(\xi, z) = 0, \quad (2.57)$$

$$\frac{d^2}{dz^2}(m_0)_{22}(\xi, z) + \left(-\frac{i}{2} - \beta(\xi)\gamma(\xi) + \frac{z^2}{4} \right) (m_0)_{22}(\xi, z) = 0, \quad (2.58)$$

і тому можуть бути виражені в термінах функцій параболічного циліндра $D_{i\tilde{\nu}(-\xi)}(\pm ze^{\frac{\pi i}{4}})$ та $D_{-i\tilde{\nu}(-\xi)}(\pm ze^{\frac{3\pi i}{4}})$ відповідно, де $\tilde{\nu}(-\xi) := \beta(\xi)\gamma(\xi)$. Дійсно, використовуючи формулу для похідної функції параболічного циліндра $D_a(z)$:

$$\frac{d}{dz}D_a(z) = \frac{z}{2}D_a(z) - D_{a+1}(z),$$

та порівнюючи асимптотичну умову у (2.53) з асимптотичною формулою для $D_a(z)$:

$$D_a(z) = z^a e^{-\frac{z^2}{4}} \left(1 - \frac{a(a-1)}{2z^2} + O(z^{-4}) \right), \quad \arg z \in \left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right), \quad z \rightarrow \infty, \quad a \in \mathbb{C},$$

отримуємо:

$$(m_0)_{11}(\xi, z) = \begin{cases} e^{-\frac{3\pi}{4}\tilde{\nu}(-\xi)} D_{i\tilde{\nu}(-\xi)} \left(e^{-\frac{3\pi i}{4}} z \right), & \text{Im } z > 0, \\ e^{\frac{\pi}{4}\tilde{\nu}(-\xi)} D_{i\tilde{\nu}(-\xi)} \left(e^{\frac{\pi i}{4}} z \right), & \text{Im } z < 0, \end{cases} \quad (2.59)$$

$$(m_0)_{22}(\xi, z) = \begin{cases} e^{\frac{\pi}{4}\tilde{\nu}(-\xi)} D_{-i\tilde{\nu}(-\xi)} \left(e^{-\frac{\pi i}{4}} z \right), & \text{Im } z > 0, \\ e^{-\frac{3\pi}{4}\tilde{\nu}(-\xi)} D_{-i\tilde{\nu}(-\xi)} \left(e^{\frac{3\pi i}{4}} z \right), & \text{Im } z < 0. \end{cases} \quad (2.60)$$

Тепер обчислимо $m_{0-}^{-1}(\xi, z)m_{0+}(\xi, z)$ для $z \in \mathbb{R}$, виходячи з (2.56), (2.59) та (2.60), звертаючи увагу, що $m_{0-}^{-1}(\xi, z)m_{0+}(\xi, z) = m_{0-}^{-1}(\xi, 0)m_{0+}(\xi, 0)$, та використовуючи рівності

$$D_a(0) = \frac{2^{\frac{a}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)}, \quad D'_a(0) = -\frac{2^{\frac{1+a}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\frac{a}{2}\right)}, \quad (2.61)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{a}{2}\right) = \frac{\pi}{\cosh\frac{\pi a}{2}}, \quad a \neq 2i\mathbb{Z} + 1,$$

$$\Gamma\left(-i\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(i\frac{a}{2}\right) = \frac{2\pi}{a \sinh\frac{\pi a}{2}}, \quad a \neq 2i\mathbb{Z},$$

де $\Gamma(\cdot)$ це Гамма-функція Ейлера. В результаті ми отримуємо:

$$m_{0-}^{-1}(\xi, z)m_{0+}(\xi, z) \equiv m_{0-}^{-1}(\xi, 0)m_{0+}(\xi, 0) = \begin{pmatrix} \frac{e^{\frac{\pi\tilde{\nu}}{4}}2^{\frac{i\tilde{\nu}}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-i\tilde{\nu}}{2}\right)} & \frac{e^{\frac{3\pi}{4}(i-\tilde{\nu})}2^{\frac{1-i\tilde{\nu}}{2}}\sqrt{\pi}}{\gamma(\xi)\Gamma\left(\frac{i\tilde{\nu}}{2}\right)} \\ \frac{e^{\frac{\pi}{4}(i+\tilde{\nu})}2^{\frac{1+i\tilde{\nu}}{2}}\sqrt{\pi}}{\beta(\xi)\Gamma\left(\frac{-i\tilde{\nu}}{2}\right)} & \frac{e^{-\frac{3\pi\tilde{\nu}}{4}}2^{-\frac{i\tilde{\nu}}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1+i\tilde{\nu}}{2}\right)} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{e^{-\frac{3\pi\tilde{\nu}}{4}}2^{\frac{i\tilde{\nu}}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-i\tilde{\nu}}{2}\right)} & \frac{e^{\frac{\pi}{4}(\tilde{\nu}-i)}2^{\frac{1-i\tilde{\nu}}{2}}\sqrt{\pi}}{\gamma(\xi)\Gamma\left(\frac{i\tilde{\nu}}{2}\right)} \\ \frac{e^{-\frac{3\pi}{4}(i+\tilde{\nu})}2^{\frac{1+i\tilde{\nu}}{2}}\sqrt{\pi}}{\beta(\xi)\Gamma\left(\frac{-i\tilde{\nu}}{2}\right)} & \frac{e^{\frac{\pi\tilde{\nu}}{4}}2^{-\frac{i\tilde{\nu}}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1+i\tilde{\nu}}{2}\right)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi\tilde{\nu}} & \frac{e^{-\frac{\pi\tilde{\nu}}{2}}e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{2\pi}}{\gamma(\xi)\Gamma(i\tilde{\nu})} \\ \frac{e^{-\frac{\pi\tilde{\nu}}{2}}e^{-\frac{3\pi i}{4}}\sqrt{2\pi}}{\beta(\xi)\Gamma(-i\tilde{\nu})} & 1 \end{pmatrix}$$

де $\tilde{\nu} \equiv \tilde{\nu}(-\xi)$.

Нарешті, прирівнюючи отриманий вираз до матриці $j_0(\xi)$, яка визначена у (2.54):

$$\begin{pmatrix} e^{-2\pi\tilde{\nu}} & \frac{e^{-\frac{\pi\tilde{\nu}}{2}}e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{2\pi}}{\gamma(\xi)\Gamma(i\tilde{\nu})} \\ \frac{e^{-\frac{\pi\tilde{\nu}}{2}}e^{-\frac{3\pi i}{4}}\sqrt{2\pi}}{\beta(\xi)\Gamma(-i\tilde{\nu})} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sigma r_1(-\xi)r_2(-\xi) & \sigma r_2(-\xi) \\ r_1(-\xi) & 1 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

ми отримуємо, що $\tilde{\nu}(\xi) \equiv \nu(\xi)$, де $\nu(\xi)$ визначена у (2.35), та що $\beta(\xi)$ та $\gamma(\xi)$ можуть бути виражені у термінах $r_1(\xi)$ та $r_2(\xi)$ (“обернена задача монодромії”, див. [46]) наступним чином:

$$\beta(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\pi}{2}\nu(-\xi)}e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{r_1(-\xi)\Gamma(-i\nu(-\xi))}, \quad (2.63)$$

$$\gamma(\xi) = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\pi}{2}\nu(-\xi)}e^{-\frac{\pi i}{4}}}{r_2(-\xi)\Gamma(i\nu(-\xi))}. \quad (2.64)$$

Повертаючись до асимптотичного аналізу, зазначимо, що з (2.50) та (2.52) випливає, що $\hat{w}(x, t, k) := \hat{v}(x, t, k) - I \in L^2(\hat{\Gamma}_1) \cap L^\infty(\hat{\Gamma}_1)$, і тому ми можемо дотримуватися схеми доведення Теорема 2.1 у [70], зокрема у тому, що стосується оцінок для $\hat{w}(x, t, k)$ при великих значеннях t . Найбільшою різницею між нашим випадком та випадком, який розглядався у [70] є те, що множник $\Delta(\xi, t)$, визначений у (2.47) ($D(\xi, t)$ у позначеннях [70]), наразі містить зростаючий (з t) член $t^{\frac{\text{Im}\nu(-\xi)}{2}}$ або $t^{-\frac{\text{Im}\nu(-\xi)}{2}}$ (в залежності від знаку $\text{Im}\nu(-\xi)$). Зокрема, з цього випливає, що оцінки для стовпчиків матриці $\hat{w}(x, t, k)$ (див. Твердження 1–4 у [70]) у нашому випадку мають наступний вигляд (нагадаємо, що $A^{(j)}$ означає j -ий стовпчик матриці A):

$$\hat{w}^{(j)}(\xi, t, \cdot) = O\left(t^{-\frac{1}{2}+(-1)^j \text{Im}\nu(-\xi)}e^{-a(k+\xi)^2 t} \ln t\right), \quad t \rightarrow \infty, \quad a > 0, \quad j = 1, 2.$$

рівномірно відносно k при $k \in \hat{\Gamma} \cap \{|k + \xi| < \varepsilon\}$. Крім того,

$$\|\hat{w}^{(j)}(\xi, t, \cdot)\|_{L^2(\hat{\Gamma}_1)} = O\left(t^{-\frac{1}{2}+(-1)^j \text{Im}\nu(-\xi)}\right), \quad t \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2,$$

$$\|\hat{w}(\xi, t, \cdot)\|_{L^\infty(\hat{\Gamma}_1)} = O\left(t^{-\frac{1}{2}+|\text{Im}\nu(-\xi)|} \ln t\right), \quad t \rightarrow \infty,$$

та

$$\|\hat{w}^{(j)}(\xi, t, \cdot)\|_{L^1(\hat{\Gamma})} = O\left(t^{-1+(-1)^j \text{Im}\nu(-\xi)} \ln t\right), \quad t \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2.$$

Зокрема, з оцінок вище випливає оцінка для інтегрального оператора $\mathcal{C}_{\hat{w}} : L^2(\hat{\Gamma}_1) + L^\infty(\hat{\Gamma}_1) \rightarrow L^2(\hat{\Gamma}_1)$:

$$\|\mathcal{C}_{\hat{w}}\|_{\mathcal{B}(L^2(\hat{\Gamma}_1))} = O\left(t^{-\frac{1}{2}+|\text{Im}\nu(-\xi)|} \ln t\right), \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.65)$$

Цей оператор визначається наступним чином: $\mathcal{C}_{\hat{w}}f = \mathcal{C}_-(f\hat{w})$, де оператор \mathcal{C} є оператором Коші, що відповідає контуру $\hat{\Gamma}_1$:

$$(\mathcal{C}f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\Gamma}_1} \frac{f(s)}{s-z} ds, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \hat{\Gamma}_1.$$

Крім того, для розв'язку $\mu = I + L^2(\hat{\Gamma}_1)$ інтегрального рівняння

$$\mu - \mathcal{C}_{\hat{w}}\mu = I, \quad (2.66)$$

маємо оцінку

$$\|\mu(\xi, t, \cdot) - I\|_{L^2(\hat{\Gamma}_1)} = O\left(t^{-\frac{1}{2} + |\operatorname{Im} \nu(-\xi)|}\right), \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

(або, більш точно, $\mu - I \in L^2(\hat{\Gamma}_1)$ є розв'язком інтегрального рівняння $(I - \mathcal{C}_{\hat{w}})(\mu - I) = \mathcal{C}_{\hat{w}}I$).

Нарешті, ми використовуємо зображення для \hat{m} (де $\hat{m}(x, t, k) \equiv \hat{m}(\xi, t, k)$) в термінах μ :

$$\hat{m}(\xi, t, k) = I + \mathcal{C}(\mu\hat{w}) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\Gamma}_1} \mu(\xi, t, s)\hat{w}(\xi, t, s) \frac{ds}{s-k},$$

з якого випливає, що

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} k(\hat{m}(\xi, t, k) - I) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\Gamma}_1} \mu(\xi, t, k)\hat{w}(\xi, t, k) dk \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|k+\xi|=\varepsilon} \mu(\xi, t, k)(\tilde{m}_0^{-1}(\xi, t, k) - I) dk \quad (2.67) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\Gamma}} \mu(\xi, t, k)\hat{w}(\xi, t, k) dk. \end{aligned}$$

Використовуючи оцінки, наведені вище та обмеження $-\frac{1}{2} < \operatorname{Im} \nu(-\xi) < \frac{1}{2}$, накладене на $\operatorname{Im} \nu(-\xi)$ (див. (2.35) та (2.36)), стовпчики другого члену у (2.67) можна оцінити при $t \rightarrow \infty$ у такий спосіб (пор. [70]):

$$\int_{\hat{\Gamma}} (\mu(\xi, t, k)\hat{w}(\xi, t, k))^{(1)} dk = \begin{cases} O(t^{-1}), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) > 0, \\ O(t^{-1} \ln t), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) = 0, \\ O(t^{-1+2|\operatorname{Im} \nu(-\xi)|}), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) < 0, \end{cases} \quad (2.68a)$$

та

$$\int_{\hat{\Gamma}} (\mu(\xi, t, k) \hat{w}(\xi, t, k))^{(2)} dk = \begin{cases} O(t^{-1+2|\operatorname{Im} \nu(-\xi)|}), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) > 0, \\ O(t^{-1} \ln t), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) = 0, \\ O(t^{-1}), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) < 0. \end{cases} \quad (2.68b)$$

З іншого боку, головний асимптотичний член отримується з обчислення першого члена, використовуючи асимптотику при $t \rightarrow \infty$ для $\tilde{m}_0^{-1}(\xi, t, k)$, яка, в свою чергу, отримується з поведінки за великим z для $m^\Gamma(\xi, z)$. Дійсно, використовуючи

$$m^\Gamma(\xi, z) = I + \frac{i}{z} \begin{pmatrix} 0 & \beta(\xi) \\ -\gamma(\xi) & 0 \end{pmatrix} + O(z^{-2}), \quad z \rightarrow \infty,$$

(де $\beta(\xi)$ та $\gamma(\xi)$ означені у (2.63) та (2.64)) та (2.46) з (2.47), отримуємо

$$\tilde{m}_0^{-1}(\xi, t, k) = \Delta(\xi, t) (m^\Gamma)^{-1}(\xi, \sqrt{8t}(k+\xi)) \Delta^{-1}(\xi, t) = I + \frac{B(\xi, t)}{\sqrt{8t}(k+\xi)} + \tilde{r}_1(\xi, t),$$

де

$$B(\xi, t) = \begin{pmatrix} 0 & -i\beta(\xi) e^{4it\xi^2 + 2\chi(-\xi)} (8t)^{-i\nu(-\xi)} \\ i\gamma(\xi) e^{-4it\xi^2 - 2\chi(-\xi)} (8t)^{i\nu(-\xi)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

Стовпчики залишку оцінюються таким чином:

$$\tilde{r}_1^{(j)}(\xi, t) = O\left(t^{-1+(-1)^j \operatorname{Im} \nu(-\xi)}\right), \quad t \rightarrow \infty, j = 1, 2. \quad (2.70)$$

Тому, для першої 2×2 матриці в правій частині (2.67) ми маємо таку оцінку:

$$\begin{aligned} & \int_{|k+\xi|=\varepsilon} \mu(\xi, t, k) (\tilde{m}_0^{-1}(\xi, t, k) - I) dk = \int_{|k+\xi|=\varepsilon} (\tilde{m}_0^{-1}(\xi, t, k) - I) dk \\ & + \int_{|k+\xi|=\varepsilon} (\mu(\xi, t, k) - I) (\tilde{m}_0^{-1}(\xi, t, k) - I) dk = 2\pi i \tilde{B}(\xi, t) + \tilde{r}_1(\xi, t) + \tilde{r}_2(\xi, t), \end{aligned} \quad (2.71)$$

де (нагадаємо, що коло $\{k : |k + \xi| = \varepsilon\}$ орієнтоване проти годинникової стрілки)

$$\tilde{B}(\xi, t) = \begin{pmatrix} 0 & -i\beta(\xi)e^{4it\xi^2+2\chi(-\xi)}(8t)^{-\frac{1}{2}-i\nu(-\xi)} \\ i\gamma(\xi)e^{-4it\xi^2-2\chi(-\xi)}(8t)^{-\frac{1}{2}+i\nu(-\xi)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

та залишок $\tilde{r}_2(\xi, t) \equiv \|\mu - I\|_{L^2(|k+\xi|=\varepsilon)} \cdot O\left(\tilde{B}(\xi, t)\right)$ оцінюється при $t \rightarrow \infty$ наступним чином:

$$\tilde{r}_2^{(1)}(\xi, t) = \begin{cases} O(t^{-1}), & \text{Im } \nu(-\xi) \geq 0, \\ O(t^{-1+2|\text{Im } \nu(-\xi)|}), & \text{Im } \nu(-\xi) < 0, \end{cases} \quad (2.73a)$$

та

$$\tilde{r}_2^{(2)}(\xi, t) = \begin{cases} O(t^{-1+2|\text{Im } \nu(-\xi)|}), & \text{Im } \nu(-\xi) \geq 0, \\ O(t^{-1}), & \text{Im } \nu(-\xi) < 0. \end{cases} \quad (2.73b)$$

Нарешті, приймаючи до уваги (2.68), (2.70), (2.71) та (2.73), з рівняння (2.67) отримуємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k(\hat{m}(\xi, t, k) - I) = -\tilde{B}(\xi, t) + \tilde{r}_3(\xi, t), \quad (2.74)$$

де $\tilde{r}_3(\xi, t) \equiv \tilde{r}_1(\xi, t) + \tilde{r}_2(\xi, t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu(\xi, t, k) w(\xi, t, k) dk$ оцінюється за аналогією до (2.68).

Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема 2.3. *Розглянемо задачу Коші (2.1) з початковою умовою (2.1b), де функція $q_0(x)$ є достатньо гладкою та достатньо швидко прямує до нуля. Нехай спектральні функції $a_1(k)$, $a_2(k)$ та $b(k)$, які визначаються за допомогою (2.10)–(2.13), є такими, що:*

(i) $a_1(k)$ та $a_2(k)$ не мають нулів відповідно у $\overline{\mathbb{C}^+}$ та $\overline{\mathbb{C}^-}$;

(ii) $\int_{-\infty}^a d \arg(1 + \sigma r_1(\zeta) r_2(\zeta)) \in (-\pi, \pi)$ для всіх $a \in \mathbb{R}$, де $r_1(k) = \frac{b(k)}{a_1(k)}$,
 $r_2(k) = \frac{\overline{b(-k)}}{a_2(k)}$.

Нехай розв'язок $q(x, t)$ задачі (2.1) існує. Тоді його асимптотика за великим часом має вигляд:

$$q(x, t) = t^{-\frac{1}{2} + \text{Im} \nu(-\xi)} p(-\xi) \exp \{4it\xi^2 - i \text{Re} \nu(-\xi) \ln t\} + R(\xi, t), \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.75)$$

рівномірно для $|\xi| \leq C$ з будь-якою константою $C > 0$, де $\xi = \frac{x}{4t}$,

$$\nu(-\xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln(1 + \sigma r_1(-\xi) r_2(-\xi)),$$

$$p(-\xi) = \frac{\sqrt{\pi} \exp \left\{ -\frac{\pi}{2} \nu(-\xi) + \frac{\pi i}{4} + 2\chi(-\xi) - 3i\nu(-\xi) \ln 2 \right\}}{r_1(-\xi) \Gamma(-i\nu(-\xi))},$$

$\Gamma(\cdot)$ є Гамма-функцією Ейлера, та

$$\chi(-\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\xi} \ln(-\xi - \zeta) d_\zeta \ln(1 + \sigma r_1(\zeta) r_2(\zeta)).$$

При цьому залишковий член $R(\xi, t)$ оцінюється наступним чином:

$$R(\xi, t) = \begin{cases} O(t^{-1+2|\text{Im} \nu(-\xi)|}), & \text{Im} \nu(-\xi) > 0, \\ O(t^{-1} \ln t), & \text{Im} \nu(-\xi) = 0, \\ O(t^{-1}), & \text{Im} \nu(-\xi) < 0. \end{cases}$$

Зауваження 2.4. На відміну від класичного (локального) нелінійного рівняння Шредінгера, де головний член асимптотики прямує до нуля як $O(t^{-1/2})$ вздовж будь-якого променя $\xi = \text{const}$, степінь прямування до нуля у випадку нелокального нелінійного рівняння Шредінгера залежить, взагалі кажучи, від ξ , і визначається уявною частиною функції $\nu(-\xi)$.

Зауваження 2.5. Із симетрії (2.26) випливає, що розв'язок $q(x, t)$ також можна отримати у такий спосіб

$$q(x, t) = -2i\sigma \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{k M_{21}(-x, t, k)} = -2i\sigma \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{k \hat{m}_{21}(-x, t, k)}.$$

З (2.63) та (2.64) (зважаючи на (2.37), (2.38) та (2.25)) випливає зв'язок між функціями $\gamma(\xi)$ та $\beta(-\xi)$:

$$\gamma(\xi) = -\sigma e^{2(\overline{\chi(\xi)} + \chi(-\xi))} \overline{\beta(-\xi)}. \quad (2.76)$$

Відповідно, асимптотичну формулу для $q(x, t)$ можна також отримати через (21) елемент у (2.74). В силу симетрії (2.37) та (2.76), ця формула співпадає з асимптотичною формулою (2.75).

Зауваження 2.6. Якщо функція $q_0(x)$ у початковій умові (2.1b) є парною, то розв'язок задачі Коші (2.1) також є парним при всіх t , і тому він задовольняє класичне (локальне) нелінійне рівняння Шредінгера. У цьому випадку, $r_1(k) = \bar{r}_2(k) =: r(k)$, і тому

$$\nu(-\xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln(1 + \sigma|r(-\xi)|^2),$$

$$\chi(k) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\xi} \ln(k - \zeta) d\zeta \ln(1 + \sigma|r(\zeta)|^2),$$

а асимптотична формула приймає наступний добре відомий вигляд [36]

$$q(x, t) = t^{-\frac{1}{2}} p(-\xi) \exp \{4it\xi^2 - i\nu(-\xi) \ln t\} + O(t^{-1} \ln t), \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.77)$$

де

$$|p(-\xi)|^2 = \frac{\sigma}{4\pi} \ln(1 + \sigma|r(-\xi)|^2),$$

та

$$\arg p(-\xi) = -3\nu(-\xi) \ln 2 + \frac{\pi}{4} + \arg \Gamma(i\nu) - \arg r(-\xi) - 2i\chi(-\xi).$$

Зауваження 2.7. Достатню умову виконання припущень (i) та (ii) у Теоремі 2.3 можна записати в термінах $\|q_0(x)\|_{L^1(\mathbb{R})}$ у такий спосіб:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q_0(x)| dx < \sqrt{0.817}. \quad (2.78)$$

Дійсно, зважаючи на (2.10) та (2.12), $a_1(k)$ можна оцінити [14], використовуючи ряд Неймана для розв'язку ψ_1 інтегрального рівняння Вольтерра:

$$\psi_1(x, k) = 1 - \sigma \int_{-\infty}^x \bar{q}_0(-y) \int_y^x e^{2ik(y-z)} q_0(z) dz \psi_1(y, k) dy. \quad (2.79)$$

У термінах $Q_0(x) := \int_{-\infty}^x |q_0(x)| dx$ та $R_0(x) := \int_{-\infty}^x |q_0(-x)| dx$, оцінка ряду Неймана дає

$$\begin{aligned} |\psi_1(x, k) - 1| &\leq Q_0(x)R_0(x) + \frac{1}{(2!)^2} Q_0^2(x)R_0^2(x) + \frac{1}{(3!)^2} Q_0^3(x)R_0^3(x) + \dots \\ &= I_0(2\sqrt{Q_0(x)R_0(x)}) - 1, \end{aligned}$$

де $I_0(\cdot)$ є модифікованою функцією Бесселя. З того, що $R_0(\infty) = Q_0(\infty)$, випливає, що якщо $I_0(2Q_0(\infty)) < 2$ (що вірно, зокрема, при $Q_0(\infty) < \sqrt{0.817}$), то функція $a_1(k)$ для $\text{Im } k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ може бути представлена у вигляді $a_1(k) = 1 + F_1(k)$, де $|F_1(k)| < 1$. Аналогічно для $a_2(k)$ у напівплощині $\text{Im } k \in \overline{\mathbb{C}^-}$. Як наслідок, маємо, що (i) функції $a_j(k)$, $j = 1, 2$ не мають нулів у відповідних напівплощинах; (ii) $\arg a_j(k) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, з чого, в свою чергу, беручи до уваги (2.23), випливає пункт (ii) у Теоремі 2.3.

Зауваження 2.8. Якщо задача Рімана-Гільберта (2.16)–(2.19) має розв’язок для всіх x та t , тоді існує розв’язок $q(x, t)$ задачі (2.1) (див., наприклад, [44]), який прямує до нуля при $x \rightarrow \pm\infty$. З іншого боку, якщо L^1 -норма початкової функції $q_0(x)$ достатньо мала, тоді з (2.10) та (2.12) випливає, що L^∞ -норми r_1 та r_2 також є малими, з чого, у свою чергу, випливає [39], що інтегральне рівняння, яке відповідає задачі Рімана-Гільберта (2.16)–(2.19) (а тому й сама задача Рімана-Гільберта) має розв’язок при всіх x та t .

Зазначимо також, що солітонні розв’язки можуть бути використані (див. [50]) для демонстрації того, що малість H^s -норми ($s \geq 0$) початкової функції $q_0(x)$ не гарантує глобального існування розв’язку задачі (2.1) у цьому просторі.

2.3 Початкові дані у вигляді п’єдесталу

У Підрозділі 2.2 ми отримали асимптотичну формулу для розв’язку задачі Коші (2.1) за умови, що спектральні функції, які відповідають початковим даним, задовольняють умовам (i) та (ii) у Теоремі 2.3. У цьому розділі

ми перевіряємо ці умови у випадку початкових даних у формі п'єдесталу (див. [9], розділ 11), для яких спектральні функції можна легко вирахувати у явній формі.

Розглянемо початкову функцію $q_0(x)$ у вигляді

$$q_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ H, & 0 < x < L, \\ 0, & x > L, \end{cases} \quad (2.80)$$

де $H \in \mathbb{C}$ та $L > 0$. Використовуючи рівняння (2.10), (2.11) та означення (2.12) і (2.13), вирахуємо спектральні функції:

$$\begin{aligned} a_1(k) &= 1 + \frac{\sigma |H|^2}{4k^2} (e^{2ikL} - 1)^2, \\ a_2(k) &\equiv 1, \\ b(k) &= \frac{\sigma \bar{H}}{2ik} (1 - e^{2ikL}). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Зазначимо, що у цьому випадку $1 + \sigma r_1(k)r_2(k) = a_1^{-1}(k)$, і тому $\int_{-\infty}^{\xi} d \arg(1 + \sigma r_1(\zeta)r_2(\zeta)) = - \int_{-\infty}^{\xi} d \arg a_1(\zeta)$.

Твердження 2.1. *Нехай $\sigma = 1$. Має місце наступний результат:*

- Якщо $|H|L < 1$, то $a_1(k)$ не має нулів при $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$, та $\arg a_1(k) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ для всіх $k \in \mathbb{R}$;
- Якщо $|H|L > 1$, то $a_1(k)$ має щонайменше один нуль у \mathbb{C}^+ , і існує $k \in \mathbb{R}$ таке, що $\left| \int_{-\infty}^k d \arg a_1(\zeta) \right| > \pi$.

Доведення. Спершу зазначимо, що $a_1(0) = 1 - |H|^2 L^2 \neq 0$ в обох випадках. Далі, вводячи до розгляду $z = z_1 + iz_2$ для $z \in \mathbb{C}^+$, існування $k \in \mathbb{C}^+ \setminus \{0\}$ такого, що $a_1(k) = 0$, еквівалентно існуванню розв'язку системи рівнянь

$$\begin{cases} e^{-z_2} \cos z_1 - 1 = \mp \frac{z_2}{C} \\ e^{-z_2} \sin z_1 = \pm \frac{z_1}{C} \end{cases} \quad (2.82)$$

де $C = |H|L$ та $z = 2kL$ ($z \neq 0$). Якщо $z_1 = 0$, то система (2.82) зводиться до рівняння $e^{-z_2} - 1 = \frac{z_2}{C}$ або $e^{-z_2} - 1 = -\frac{z_2}{C}$; перше рівняння не має розв'язків при $z_2 > 0$, а друге має розв'язок з $z_2 > 0$ тоді й тільки тоді, коли $C > 1$. У випадку $C < 1$, друге рівняння у (2.82) не має розв'язків при $z_1 \neq 0$ та $z_2 \geq 0$, і тому в цьому випадку $a_1(k)$ не має нулів у $\overline{\mathbb{C}^+}$.

Стосовно аргумента $a_1(k)$, зазначимо, що якщо $|H|L < 1$, тоді $\operatorname{Re} a_1(k) = 1 - \frac{|H|^2}{k^2} \sin^2 kL \cos 2kL > 0$ для $k \in \mathbb{R}$, і тому $\arg a_1(k) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ у цьому випадку. З іншого боку, якщо $|H|L > 1$, тоді існує $\delta > 0$ таке, що $\operatorname{Re} a_1(k) < 0$ для всіх $k \in (-\delta, \delta)$ і, більше того, $\operatorname{Im} a_1(k) = -\frac{|H|^2}{k^2} \sin^2 kL \sin 2kL > 0$ при $k \in (-\delta, 0)$ та $\operatorname{Im} a_1(k) < 0$ при $k \in (0, \delta)$. \square

Твердження 2.1 дає приклад сім'ї початкових даних із такими властивостями: якщо $\|q_0(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} < 1$ для q_0 з цієї сім'ї, то обидва припущення (i) та (ii), зазначені в Теоремі 2.3, виконуються. З іншого боку, якщо $\|q_0(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} > 1$, то обидва припущення не виконуються одночасно.

Наступний приклад ілюструє ситуацію, коли припущення (i) виконується, але (ii) не виконується.

Твердження 2.2. *Нехай $\sigma = -1$. Тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що якщо $\frac{\pi}{2} < |H|L < \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, то $a_1(k)$ не має нулів у $\overline{\mathbb{C}^+}$, але існує $k \in \mathbb{R}$ таке, що $\left| \int_{-\infty}^k d \arg a_1(\zeta) \right| > \pi$.*

Доведення. Спершу зазначимо, що $a_1(0) \neq 0$ через те, що $|H|L > 1$ у цьому випадку. За аналогією з попереднім Твердженням, існування $k \in \mathbb{C}^+ \setminus \{0\}$ такого, що $a_1(k) = 0$, еквівалентно існуванню розв'язку системи

$$\begin{cases} e^{-z_2} \cos z_1 - 1 = \pm \frac{z_1}{C} \\ e^{-z_2} \sin z_1 = \pm \frac{z_2}{C} \end{cases} \quad (2.83)$$

де, як і вище, $C = |H|L$ та $z = 2kL$. Зазначимо, що якщо C близько до $\frac{\pi}{2}$, то система (2.83) не має розв'язків з $z_2 = 0$ та $z_1 \neq 0$. Далі, з другого рівняння (2.83) випливає, що не існує розв'язків з $z_1 = 0$, та з першого рівняння випливає, що якщо z_1 є дійсною частиною розв'язку, тоді воно має задовольняти $|z_1| \leq 2C$.

В силу умови симетрії $a_1(k) = \overline{a_1(-\bar{k})}$, достатньо показати, що (2.83) не має розв'язків з $z_1 > 0$ та $z_2 > 0$. Будемо шукати розв'язок (2.83) у вигляді $z_2 = \rho z_1$ з деяким $\rho > 0$; тоді (2.83) зводиться до

$$\begin{cases} e^{-\rho z_1}(\rho \cos z_1 - \sin z_1) - \rho = 0 \\ e^{-\rho z_1} \sin z_1 = \pm \frac{\rho z_1}{C} \end{cases}$$

з чого випливає, зокрема, рівняння для z_1 :

$$e^{-\rho z_1}(\rho \cos z_1 - \sin z_1) = \rho.$$

Але це рівняння не має розв'язків при $0 < z_1 \leq \pi + 2\varepsilon$ для $\varepsilon > 0$ достатньо малих, з чого випливає, що $a_1(k)$ не має нулів з $|z_1| \leq 2C$ з C , яке задовольняє нерівність $\frac{\pi}{2} < C < \frac{\pi}{2} + \varepsilon$.

Тепер зазначимо, що якщо $C > \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{Re} a_1(k) = 1 + \frac{|H|^2}{k^2} \sin^2 kL \cos 2kL < 0$ для $k \in (\frac{\pi}{2L} - \delta, \frac{\pi}{2L} + \delta)$ з деяким $\delta > 0$. У той же час, $\operatorname{Im} a_1(k) \equiv \frac{|H|^2}{k^2} \sin^2 kL \sin 2kL > 0$ для $k \in (\frac{\pi}{2L} - \delta, \frac{\pi}{2L})$, та $\operatorname{Im} a_1(k) < 0$ при $k \in (\frac{\pi}{2L}, \frac{\pi}{2L} + \delta)$. Тому $|\int_{-\infty}^k d \arg a_1(\zeta)| > \pi$ для таких k . \square

2.4 Висновки до Розділу 2

У цьому Розділі розглянута початкова задача для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера на нульовому фоні. Для цієї задачі розроблена адаптація методу оберненої задачі розсіювання у формі задачі Рімана-Гільберта, яка є зручною для отримання асимптотики розв'язку початкової задачі за великим часом (Підрозділ 2.1). Для асимптотичного аналізу розв'язку відповідної вихідної задачі Рімана-Гільберта був застосований нелінійний метод перевалу (метод Дейффа-Жу; див. Підрозділ 2.2). Хоча застосування цього методу у нашому випадку є близьким до випадку класичного (локального) нелінійного рівняння Шредінгера, відмінні властивості спектральних функцій (точніше, їх симетрії) суттєво впливають як на припущення щодо вигляду початкових даних, необхідні для проведення коректного аналізу, так і на отриманий асимптотичний результат

(Теорема 2.3). Нарешті, у Підрозділі 2.3 ми розглядаємо початкові дані у вигляді п'єдесталу і перевіряємо, при яких значеннях параметрів вони відповідають умовам у Теоремі 2.3.

Розділ 3

Початкова задача для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера з початковими даними типу сходинки

Результати цього Розділу опубліковані у роботі [90].

У цьому Розділі ми розглядаємо наступну початкову задачу для фокусуючого нелокального нелінійного рівняння Шредінгера з початковими даними типу сходинки [90]:

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2q^2(x, t)\bar{q}(-x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (3.1a)$$

$$q(x, 0) = q_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.1b)$$

де

$$q_0(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty \text{ та } q_0(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad (3.1c)$$

достатньо швидко, з деяким $A > 0$. Початкова задача для рівняння (3.1a) з наступними ненульовими крайовими умовами:

$$q(x, t) \rightarrow q_{\pm}(t) = q_0 e^{i(\alpha t + \theta_{\pm})}, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (3.2)$$

де $q_0 > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta_{\pm} < 2\pi$, розглядалася у роботі [5], де був розроблений метод оберненої задачі розсіювання для окремих значень параметрів θ_{\pm} та отримані солітонні розв'язки (див. також [3], де представлений загальний N -солітонний розв'язок).

Ми припускаємо, що розв'язок $q(x, t)$ задачі (3.1a-3.1b) задовольняє наступні крайові умови для всіх $t > 0$:

$$q(x, t) = o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (3.3a)$$

$$q(x, t) = A + o(1), \quad x \rightarrow +\infty \quad (3.3b)$$

(далі ми уточнимо швидкість прямування розв'язку до крайових значень). Такий вибір початкових даних та крайових умов обумовлений активними дослідженнями відповідних початкових задач для класичного (локального) нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ)

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) + 2|q(x, t)|^2q(x, t) = 0, \quad (3.4)$$

та інших локальних інтегровних рівнянь. Ці задачі почали розглядатися з 1980-1990-х років [22, 23, 42, 59, 65], але більша частина строгих результатів для них отримана лише в останні роки (див., напр., [27, 29, 16, 41, 55, 60]). Зокрема, у [27] автори вивчають задачу Коші для НРШ з наступним початковим даним:

$$q_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ Ae^{-2iBx}, & x > 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

припускаючи, що розв'язок задовольняє крайові умови

$$q(x, t) = o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (3.6a)$$

$$q(x, t) = q^p(x, t) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (3.6b)$$

де $q^p(x, t) = Ae^{-2iBx+2i\omega t}$ з $\omega = A^2 - 2B^2$ є розв'язком типу плоскої хвилі для НРШ (3.4). Зазначимо, що у випадку класичного нелінійного рівняння Шредінгера, обидві граничні функції у (3.6), тобто, $q_-(x, t) \equiv 0$ та $q_+(x, t) = q^p(x, t)$ є розв'язками (3.4). З іншого боку, у випадку нелокального нелінійного рівняння Шредінгера, $q_+(x, t) \equiv A$ не є точним розв'язком цього рівняння. Через це ненульові крайові умови (3.3), які є найпростішими ступінчастими крайовими умовами для ННРШ (3.1a), відрізняються від аналогічних умов у випадку класичного НРШ (з якими вони співпадають для початкових функцій).

Метою цього розділу є (i) розробка методу задачі Рімана-Гільберта для початкової задачі (3.1) з крайовими умовами (3.3) та (ii) асимптотичний аналіз її розв'язку, заснований на використанні нелінійного методу перевалу (метод Дейфга-Жу [38]). Цей метод був успішно застосований до задач із початковими даними типу сходінки для локальних рівнянь (див. [16, 24, 25, 27, 29, 40, 41, 55, 107]).

Розділ 3 організовано у такий спосіб. У Підрозділі 3.1 ми розвиваємо формалізм методу оберненої задачі розсіювання у формі мультиплікативної задачі Рімана-Гільберта, зручної для подальшого асимптотичного (при $t \rightarrow \infty$) аналізу [92]. Зокрема, ми робимо акцент на основних характерних особливостях реалізації цього підходу у випадку ступінчастих крайових умов. Однією з них є сингулярність (різна для різних типів початкових даних) специфічного типу на контурі стрибка задачі Рімана-Гільберта. Асимптотика за великим часом розв'язку задачі Рімана-Гільберта (і, як наслідок, розв'язку задачі Коші для ННРШ) представлена в Підрозділі 3.2, де сформульований основний результат цього Розділу (Теорема 3.1). Двома головними характерними рисами нашого асимптотичного результату є (i) залежність степені прямування до нуля розв'язку (у відповідній області) від напрямку $x/t = \text{const}$ (нагадаємо, що у випадку класичного НРШ, у відповідних областях розв'язок прямує до нуля зі швидкістю $t^{-1/2}$, яка не залежить від напрямку); (ii) присутність сектору “модульованої константи” та відсутність сектору (типового для локальних інтегровних нелінійних рівнянь із початковими даними типу сходінки, включаючи локальне НРШ [25, 27]) з прямолінійними межами $x/t = c_1$ та $x/t = c_2$, де головний асимптотичний член описується в термінах еліптичних функцій.

3.1 Метод оберненої задачі розсіювання та задача Рімана-Гільберта

3.1.1 Власні функції рівнянь пари Лакса

Нагадаємо, що фокубуюче ННРШ (3.1а) є умовою сумісності системи двох лінійних рівнянь (пари Лакса) (2.2)–(2.4) з $\sigma = 1$.

Введемо позначення

$$U_+ = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, U_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A & 0 \end{pmatrix}, V_+ = \begin{pmatrix} 0 & 2kA \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2kA & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Тоді, припускаючи, що існує $q(x, t)$, яка задовольняє (3.1) та (3.3), маємо наступну асимптотичну поведінку коефіцієнтів рівнянь пари Лакса (2.2):

$$U(x, t) \rightarrow U_{\pm} \text{ та } V(x, t, k) \rightarrow V_{\pm}(k) \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty. \quad (3.8)$$

Легко бачити, що системи рівнянь

$$\begin{aligned} \Phi_x + ik\sigma_3\Phi &= U_+\Phi \\ \Phi_t + 2ik^2\sigma_3\Phi &= V_+(k)\Phi \end{aligned} \quad (3.9)$$

та

$$\begin{aligned} \Phi_x + ik\sigma_3\Phi &= U_-\Phi \\ \Phi_t + 2ik^2\sigma_3\Phi &= V_-(k)\Phi \end{aligned} \quad (3.10)$$

є сумісними. Зокрема, функції $\Phi_+(x, t, k)$ та $\Phi_-(x, t, k)$, визначені як

$$\Phi_{\pm}(x, t, k) = N_{\pm}(k)e^{-(ikx+2ik^2t)\sigma_3}, \quad (3.11)$$

де $N_+(k) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{A}{2ik} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ та $N_-(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{A}{2ik} & 1 \end{pmatrix}$, задовольняють, відповідно, системи (3.9) та (3.10).

Зазначимо, що Φ_{\pm} вибрані таким чином, щоб $\det \Phi_{\pm} \equiv 1$. Це зручно для подальшого асимптотичного аналізу, зокрема, при розгляданні питання про єдиність розв'язку задачі Рімана-Гільберта.

Відзначимо, що сингулярності $N_{\pm}(k)$ при $k = 0$ значно впливають на аналіз. Зокрема, розв'язок вихідної задачі Рімана-Гільберта буде мати особливість при $k \rightarrow 0$, тобто у точці на контурі задачі (див. (3.54) та (3.55) нижче).

Тепер введемо 2×2 матричні функції $\Psi_j(x, t, k)$, $j = 1, 2$, $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t < \infty$ як розв'язки інтегральних рівнянь Вольтерра:

$$\Psi_1(x, t, k) = N_-(k) + \int_{-\infty}^x G_-(x, y, k) (U(y, t) - U_-) \Psi_1(y, t, k) e^{ik(x-y)\sigma_3} dy, \quad (3.12a)$$

$$\Psi_2(x, t, k) = N_+(k) + \int_{\infty}^x G_+(x, y, k) (U(y, t) - U_+) \Psi_2(y, t, k) e^{ik(x-y)\sigma_3} dy, \quad (3.12b)$$

де $G_{\pm}(x, y, k) = \Phi_{\pm}(x, t, k)[\Phi_{\pm}(y, t, k)]^{-1}$. Функції $\Psi_j(x, t, k)$, $j = 1, 2$ є основними інгредієнтами для побудови задачі Рімана-Гільберта. Основні властивості матриць $\Psi_j(x, t, k)$ (які випливають із інтегральних рівнянь (3.12)) підсумовані у Твердженні 3.1, де ми позначаємо через $\Psi_j^{(i)}(x, t, k)$ i -ий стовпчик $\Psi_j(x, t, k)$, $\mathbb{C}^{\pm} = \{k \in \mathbb{C} \mid \pm \operatorname{Im} k > 0\}$, та $\overline{\mathbb{C}^{\pm}} = \{k \in \mathbb{C} \mid \pm \operatorname{Im} k \geq 0\}$.

Твердження 3.1. *Матриці $\Psi_1(x, t, k)$ та $\Psi_2(x, t, k)$ мають наступні властивості:*

(i) *Стовпчики $\Psi_1^{(1)}(x, t, k)$ та $\Psi_2^{(2)}(x, t, k)$ є коректно визначеними та аналітичними при $k \in \mathbb{C}^+$ та неперервними при $\overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}$; крім того,*

$$\Psi_1^{(1)}(x, t, k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O(k^{-1}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{C}^+,$$

та

$$\Psi_2^{(2)}(x, t, k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + O(k^{-1}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{C}^+.$$

(ii) *Стовпчики $\Psi_1^{(2)}(x, t, k)$ та $\Psi_2^{(1)}(x, t, k)$ є коректно визначеними та аналітичними при $k \in \mathbb{C}^-$ та неперервними при $\overline{\mathbb{C}^-}$; крім того,*

$$\Psi_1^{(2)}(x, t, k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + O(k^{-1}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{C}^-,$$

та

$$\Psi_2^{(1)}(x, t, k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O(k^{-1}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{C}^-.$$

(iii) Функції $\Phi_j(x, t, k)$, $j = 1, 2$, визначені формулами

$$\Phi_j(x, t, k) = \Psi_j(x, t, k)e^{-(ikx+2ik^2t)\sigma_3}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad j = 1, 2, \quad (3.13)$$

є розв'язками Йоста пари Лакса (2.2) з коефіцієнтами, які задовольняють крайові умови (3.8), причому

$$\Phi_1(x, t, k) \rightarrow \Phi_-(x, t, k), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (3.14a)$$

$$\Phi_2(x, t, k) \rightarrow \Phi_+(x, t, k), \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.14b)$$

(iv) $\det \Psi_j(x, t, k) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $k \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$.

(v) Мають місце умови симетрії:

$$\overline{\Lambda \Psi_1(-x, t, -k)} \Lambda^{-1} = \Psi_2(x, t, k), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (3.15)$$

$$\partial_e \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(vi) При $k \rightarrow 0$,

$$\Psi_1^{(1)}(x, t, k) = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix} + O(1), \quad (3.16a)$$

$$\Psi_1^{(2)}(x, t, k) = \frac{2i}{A} \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix} + O(k), \quad (3.16b)$$

та

$$\Psi_2^{(1)}(x, t, k) = \frac{2}{iA} \begin{pmatrix} \overline{v_2(-x, t)} \\ \overline{v_1(-x, t)} \end{pmatrix} + O(k), \quad (3.16c)$$

$$\Psi_2^{(2)}(x, t, k) = -\frac{1}{k} \begin{pmatrix} \overline{v_2(-x, t)} \\ \overline{v_1(-x, t)} \end{pmatrix} + O(1), \quad (3.16d)$$

де $\{v_1(x, t), v_2(x, t)\}$ є розв'язком наступної системи рівнянь Вольтерра:

$$\begin{aligned} v_1(x, t) &= \int_{-\infty}^x q(y, t)v_2(y, t) dy, \\ v_2(x, t) &= -i\frac{A}{2} - \int_{-\infty}^x \overline{q(-y, t)}v_1(y, t) dy. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Доведення. Властивості (i)-(iii) випливають безпосередньо з зображень Ψ_j у термінах рядів Неймана для розв'язків рівнянь (3.12). Для збіжності цих рядів достатньо мати збіжність інтегралів $\int_{-\infty}^0 |q(x, t)|dx < \infty$ та $\int_0^{\infty} |q(x, t) - A|dx < \infty$ для всіх $t \geq 0$. Пункт (iv) випливає з того, що сліди матриць U та V у рівняннях (2.2) дорівнюють нулю. Пункт (v) випливає з відповідних симетрій $\Lambda U(-x, t)\Lambda^{-1} = U(x, t)$.

Що стосується пункту (vi), то з (3.12) та структури сингулярності матриць N_{\pm} у $k = 0$ випливає, що при $k \rightarrow 0$,

$$\Psi_1^{(1)}(x, t, k) = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix} + O(1), \quad \Psi_1^{(2)}(x, t, k) = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1(x, t) \\ \tilde{v}_2(x, t) \end{pmatrix} + O(k), \quad (3.18a)$$

$$\Psi_2^{(1)}(x, t, k) = \begin{pmatrix} \tilde{w}_1(x, t) \\ \tilde{w}_2(x, t) \end{pmatrix} + O(k), \quad \Psi_2^{(2)}(x, t, k) = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} w_1(x, t) \\ w_2(x, t) \end{pmatrix} + O(1), \quad (3.18b)$$

з деякими v_j , \tilde{v}_j , w_j та \tilde{w}_j ($j = 1, 2$). Далі, в силу співвідношення симетрії (3.15), маємо

$$\begin{pmatrix} w_1(x, t) \\ w_2(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{v_2(-x, t)} \\ -\overline{v_1(-x, t)} \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{pmatrix} \tilde{w}_1(x, t) \\ \tilde{w}_2(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\tilde{v}_2(-x, t)} \\ \overline{\tilde{v}_1(-x, t)} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Підставляючи (3.18) у (3.12), приходимо до висновку, що $\{v_1(x, t), v_2(x, t)\}$ задовольняють систему (3.17), а $\{\tilde{v}_1(x, t), \tilde{v}_2(x, t)\}$ є розв'язком наступної системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(x, t) &= \int_{-\infty}^x q(y, t)\tilde{v}_2(y, t) dy, \\ \tilde{v}_2(x, t) &= 1 - \int_{-\infty}^x \overline{q(-y, t)}\tilde{v}_1(y, t) dy. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Порівнюючи (3.20) з (3.17), ми отримуємо

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_1(x, t) \\ \tilde{v}_2(x, t) \end{pmatrix} = \frac{2i}{A} \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

і тому для характеристики поведінки $\Psi_l^{(j)}(x, t, k)$, $j, l = 1, 2$, при $k \rightarrow 0$ (3.16) достатньо лише двох функцій, $v_1(x, t)$ та $v_2(x, t)$. \square

3.1.2 Дані розсіювання

З того, що функції $\Phi_1(x, t, k)$ та $\Phi_2(x, t, k)$ коректно визначені для $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ та задовольняють диференціальні рівняння у парі Лакса (2.2), випливає, що вони пов'язані між собою за допомогою матриці $S(k)$ (яка не залежить від x та t ; як і у випадку нульового фону, вона називається матрицею розсіювання):

$$\Phi_1(x, t, k) = \Phi_2(x, t, k)S(k), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (3.22)$$

У термінах Ψ_j , це рівняння приймає вигляд

$$\Psi_1(x, t, k) = \Psi_2(x, t, k)e^{-(ikx+2ik^2t)\sigma_3}S(k)e^{(ikx+2ik^2t)\sigma_3}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (3.23)$$

Подібно до випадку нульового фону, з умови симетрії (3.15) випливає, що розв'язки Йоста $\Phi_1(x, t, k)$ та $\Phi_2(x, t, k)$ задовольняють симетрії

$$\overline{\Lambda\Phi_1(-x, t, -k)\Lambda^{-1}} = \Phi_2(x, t, k), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (3.24)$$

а матриця розсіювання $S(k)$ може бути написана у вигляді

$$S(k) = \begin{pmatrix} a_1(k) & -\overline{b(-k)} \\ b(k) & a_2(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (3.25)$$

з деякими $b(k)$, $a_1(k)$, та $a_2(k)$. Крім того, $a_1(k)$ та $a_2(k)$ є коректно визначеними у $\overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}$ та $\overline{\mathbb{C}^-}$ відповідно, де вони задовольняють умови симетрії

$$\overline{a_1(-\bar{k})} = a_1(k), \quad \overline{a_2(-\bar{k})} = a_2(k). \quad (3.26)$$

Матриця розсіювання $S(k)$ визначається однозначно початковими даними $q_0(x)$. Дійсно, якщо ввести позначення $\psi_1(x, k) = (\Psi_1)_{11}(x, 0, k)$, $\psi_2(x, k) =$

$(\Psi_1)_{12}(x, 0, k)$, $\psi_3(x, k) = (\Psi_1)_{21}(x, 0, k)$ та $\psi_4(x, k) = (\Psi_1)_{22}(x, 0, k)$, то можна звести рівняння (3.12a) до систем інтегральних рівнянь Вольтерра – окремо для ψ_1 та ψ_3 :

$$\begin{cases} \psi_1(x, k) = 1 + \int_{-\infty}^x q_0(y) \psi_3(y, k) dy, \\ \psi_3(x, k) = \frac{A}{2ik} + \int_{-\infty}^x e^{2ik(x-y)} \left(A - \overline{q_0(-y)} \right) \psi_1(y, k) dy \\ \quad + \frac{A}{2ik} \int_{-\infty}^x q_0(y) (1 - e^{2ik(x-y)}) \psi_3(y, k) dy, \end{cases} \quad (3.27)$$

та для ψ_2 та ψ_4 :

$$\begin{cases} \psi_2(x, k) = \int_{-\infty}^x e^{-2ik(x-y)} q_0(y) \psi_4(y, k) dy, \\ \psi_4(x, k) = 1 + \int_{-\infty}^x \left(A - \overline{q_0(-y)} \right) \psi_2(y, k) dy \\ \quad + \frac{A}{2ik} \int_{-\infty}^x q_0(y) (e^{-2ik(x-y)} - 1) \psi_4(y, k) dy. \end{cases} \quad (3.28)$$

Тоді елементи a_1 , a_2 та b матриці розсіювання можуть бути визначені у такий спосіб:

$$a_1(k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\psi_1(x, k) - \frac{A}{2ik} \psi_3(x, k) \right), \quad b(k) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2ikx} \psi_3(x, k), \quad (3.29)$$

та

$$a_2(k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi_4(x, k). \quad (3.30)$$

Також вони можуть бути записані в термінах детермінантів:

$$a_1(k) = \det \left(\Psi_1^{(1)}(0, 0, k), \Psi_2^{(2)}(0, 0, k) \right), \quad k \in \overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}, \quad (3.31a)$$

$$a_2(k) = \det \left(\Psi_2^{(1)}(0, 0, k), \Psi_1^{(2)}(0, 0, k) \right), \quad k \in \overline{\mathbb{C}^-}, \quad (3.31b)$$

$$b(k) = \det \left(\Psi_2^{(1)}(0, 0, k), \Psi_1^{(1)}(0, 0, k) \right), \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.31c)$$

Властивості спектральних функцій, які випливають із Твердження 3.1, підсумовані у наступному твердженні.

Твердження 3.2. *Спектральні функції $a_j(k)$, $j = 1, 2$, та $b(k)$ мають наступні аналітичні властивості:*

1. $a_1(k)$ аналітична при $k \in \mathbb{C}^+$ та неперервна при $k \in \overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}$; $a_2(k)$ аналітична при $k \in \mathbb{C}^-$ та неперервна при $k \in \overline{\mathbb{C}^-}$.

2. $a_j(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right)$, $j = 1, 2$ при $k \rightarrow \infty$, $k \in \overline{\mathbb{C}^{(-1)^{j+1}}}$ та $b(k) = O\left(\frac{1}{k}\right)$ при $k \rightarrow \infty$, $k \in \mathbb{R}$.
3. $\overline{a_1(-\bar{k})} = a_1(k)$, $k \in \overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}$; $\overline{a_2(-\bar{k})} = a_2(k)$, $k \in \overline{\mathbb{C}^-}$.
4. $a_1(k)a_2(k) + b(k)\overline{b(-k)} = 1$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (впливає з $\det S(k) = 1$).
5. $a_1(k) = \frac{A^2 a_2(0)}{4k^2} + O\left(\frac{1}{k}\right)$ при $k \rightarrow 0$, $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ та $b(k) = \frac{A a_2(0)}{2ik} + O(1)$ при $k \rightarrow 0$, $k \in \mathbb{R}$.

Зауваження 3.1. Підставляючи (3.16) у (3.31), ми отримуємо, при $k \rightarrow 0$,

$$a_1(k) = \frac{1}{k^2}(|v_2(0,0)|^2 - |v_1(0,0)|^2) + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad (3.32a)$$

$$a_2(k) = \frac{4}{A^2}(|v_2(0,0)|^2 - |v_1(0,0)|^2) + O(k), \quad (3.32b)$$

$$b(k) = -\frac{2i}{kA}(|v_2(0,0)|^2 - |v_1(0,0)|^2) + O(1), \quad (3.32c)$$

з чого впливає Пункт 5.

Зауваження 3.2. Зазначимо, що у (3.31) можна вибрати будь-які (x, t) замість $(0, 0)$ як аргументи в правій частині. З цього впливає, що $|v_2(0,0)|^2 - |v_1(0,0)|^2$ у правій частині (3.32) може бути замінено на $v_2(x, t)\bar{v}_2(-x, t) - v_1(x, t)\bar{v}_1(-x, t)$, і, таким чином, ми отримуємо закон збереження (ліва частина не залежить від x та t):

$$v_2(x, t)\bar{v}_2(-x, t) - v_1(x, t)\bar{v}_1(-x, t) \equiv |v_2(0,0)|^2 - |v_1(0,0)|^2.$$

Зауваження 3.3. У випадку початкових даних у вигляді “чистої сходінки”, тобто коли

$$q_0(x) = q_{0A}(x) := \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A, & x > 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

матрицю розсіювання $S(k)$ можна обчислити явно:

$$S(k) = [\Phi_2(0, 0, k)]^{-1} \Phi_1(0, 0, k) = N_+^{-1}(k) N_-(k) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{A^2}{4k^2} & -\frac{A}{2ik} \\ \frac{A}{2ik} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Зокрема, у цьому випадку функція $a_1(k)$ має єдиний, простий нуль (при $k = i\frac{A}{2}$) у верхній півплощині, а функція $a_2(k)$ не має нулів у нижній півплощині.

3.1.3 Вихідна задача Рімана-Гільберта

Як і у випадку нульового фону, формалізм задачі Рімана-Гільберта методу оберненої задачі розсіювання ґрунтується на побудові (використовуючи розв'язки Йоста) кусково-мероморфної 2×2 матричної функції в комплексній k -площині, яка може бути охарактеризована умовою стрибка вздовж деякого контуру, умовою нормування і, якщо потрібно, умовами в сингулярних точках, причому усі умови визначаються початковими даними.

Визначимо 2×2 матричну функцію $M(x, t, k)$, яка є кусково-мероморфною (відносно \mathbb{R}), у такий спосіб:

$$M(x, t, k) = \begin{cases} \left(\frac{\Psi_1^{(1)}(x, t, k)}{a_1(k)}, \Psi_2^{(2)}(x, t, k) \right), & k \in \mathbb{C}^+, \\ \left(\Psi_2^{(1)}(x, t, k), \frac{\Psi_1^{(2)}(x, t, k)}{a_2(k)} \right), & k \in \mathbb{C}^-. \end{cases} \quad (3.35)$$

Тоді зі співвідношення розсіювання (3.23) випливає, що граничні умови $M_{\pm}(x, t, k) = \lim_{k' \rightarrow k, k' \in \mathbb{C}^{\pm}} M(x, t, k')$, $k \in \mathbb{R}$, задовольняють мультиплікативну умову стрибка

$$M_+(x, t, k) = M_-(x, t, k)J(x, t, k), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (3.36)$$

з матрицею стрибка

$$J(x, t, k) = \begin{pmatrix} 1 + r_1(k)r_2(k) & r_2(k)e^{-2ikx-4ik^2t} \\ r_1(k)e^{2ikx+4ik^2t} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

де $r_j(k)$, $j = 1, 2$ – коефіцієнти відбиття, яки визначаються елементами матриці розсіювання:

$$r_1(k) := \frac{b(k)}{a_1(k)}, \quad r_2(k) := \frac{\overline{b(-k)}}{a_2(k)}. \quad (3.38)$$

Крім того, M задовольняє умові нормування

$$M(x, t, k) \rightarrow I, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.39)$$

Зазначимо, що з умови симетрії 3 у Твердженні 3.2 випливає, що

$$r_1(-k)r_2(-k) = \overline{r_1(k)} \overline{r_2(k)}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (3.40)$$

а детермінантна властивість 4 може бути записана як

$$1 + r_1(k)r_2(k) = \frac{1}{a_1(k)a_2(k)}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (3.41)$$

З огляду на (3.32), поведінка M при $k \rightarrow 0$ якісно відрізняється у випадках $a_2(0) \neq 0$ та $a_2(0) = 0$. Перший випадок включає в себе випадок “чистої сходінки” (3.33), (3.34): тут $a_1(k)$ має єдиний простий нуль у півплощині \mathbb{C}^+ , який знаходиться на уявній осі, а $a_2(k)$ не має нулів у \mathbb{C}^- . Відповідно, далі у цьому Розділі ми розглядаємо два випадки:

Випадок I: Спектральна функція $a_1(k)$ має один (чисто уявний) простий нуль у $\overline{\mathbb{C}^+}$, скажімо, при $k = ik_1$, $k_1 > 0$, а $a_2(k)$ не має нулів у $\overline{\mathbb{C}^-}$.

Випадок II: Спектральна функція $a_1(k)$ має один простий нуль у $\overline{\mathbb{C}^+}$, а $a_2(k)$ має один простий нуль у $\overline{\mathbb{C}^-}$ при $k = 0$ (отже, $a_2(0) = 0$ та $\dot{a}_2(0) \neq 0$). Крім того, ми вважаємо, що $a_{11} := \lim_{k \rightarrow 0} ka_1(k) \neq 0$.

Зауваження 3.4. Випадок I відповідає нерівності $|v_2(0,0)|^2 - |v_1(0,0)|^2 \neq 0$, а у Випадку II має місце рівність $|v_2(0,0)|^2 - |v_1(0,0)|^2 = 0$, див. (3.17) та (3.32). Через це, Випадок I відповідає початковим даним “загального положення”, а Випадок II відповідає спеціальним початковим даним.

Зауваження 3.5. З умов симетрії (3.26) випливає, що a_{11} є чисто уявним. Крім того, якщо $a_1(k)$ має один простий нуль, то $\text{Im } a_{11} < 0$ у Випадку II.

Суттєвою відмінністю від випадку локального НРШ є той факт, що в рамках оберненої задачі (коли задаються спектральні дані, а коефіцієнти у диференціальному рівнянні підлягають визначенню), значення k_1 не може бути задано незалежно від $b(k)$.

Твердження 3.3. Для даного $b(k)$ при $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, нуль $k = ik_1$ спектральної функції $a_1(k)$ визначається наступним чином:

(i) У Випадку I,

$$k_1 = \frac{A}{2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \frac{\zeta^2}{\zeta^2+1} (1 - b(\zeta)\bar{b}(-\zeta))}{\zeta} d\zeta \right\}, \quad (3.42)$$

(ii) У Випадку II,

$$k_1 = A \frac{\sqrt{(\text{Re } b(0))^2 + E_2^2} - \text{Re } b(0)}{2E_1 E_2}, \quad (3.43)$$

де (зазначимо, що $1 - |b(0)|^2 = a_{11}a_2(0) \neq 0$ за припущенням)

$$E_1 = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - b(\zeta)\bar{b}(-\zeta))}{\zeta} d\zeta \right\}, \quad (3.44a)$$

$$E_2 = \exp \left\{ \frac{1}{2} \ln(1 - |b(0)|^2) \right\}. \quad (3.44b)$$

Доведення. (i) Випадок I. Визначимо функції $\tilde{a}_1(k)$ та $\tilde{a}_2(k)$ у такий спосіб:

$$\tilde{a}_1(k) = a_1(k) \frac{k^2}{(k - ik_1)(k + i)}, \quad \tilde{a}_2(k) = a_2(k) \frac{k - ik_1}{k - i}.$$

Детермінантне співвідношення (див. Пункт 4 у Твердженні 3.2) може розглядатися як наступна скалярна задача Рімана-Гільберта відносно $\tilde{a}_j(k)$, $j = 1, 2$: для даного $b(k)$, $k \in \mathbb{R}$, знайти функції $\tilde{a}_1(k)$ та $\tilde{a}_2(k)$, аналітичні відповідно у \mathbb{C}^+ та \mathbb{C}^- та неперервні у $\overline{\mathbb{C}^+}$ та $\overline{\mathbb{C}^-}$, які не мають нулів відповідно у $\overline{\mathbb{C}^+}$ та $\overline{\mathbb{C}^-}$, і які задовольняють умову стрибка

$$\tilde{a}_1(k)\tilde{a}_2(k) = \frac{k^2}{k^2 + 1} (1 - b(k)\bar{b}(-k)), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (3.45)$$

та умову нормування $\tilde{a}_j(k) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. Єдиний розв'язок цієї задачі Рімана-Гільберта дається інтегралом типу Коші та має вигляд

$$\tilde{a}_1(k) = e^{\chi(k)}, \quad \tilde{a}_2(k) = e^{-\chi(k)},$$

де

$$\chi(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \frac{\zeta^2}{\zeta^2+1} (1 - b(\zeta)\bar{b}(-\zeta))}{\zeta - k} d\zeta.$$

Відповідно, функції $a_1(k)$ та $a_2(k)$ можуть бути представлені у вигляді

$$a_1(k) = \frac{(k - ik_1)(k + i)}{k^2} e^{\chi(k)}, \quad (3.46a)$$

та

$$a_2(k) = \frac{k - i}{k - ik_1} e^{-\chi(k)}. \quad (3.46b)$$

Зокрема, при $k = 0$ маємо

$$a_1(k) = \frac{k_1 e^{\chi(+i0)}}{k^2} (1 + o(k)) \quad \text{та} \quad a_2(0) = \frac{e^{-\chi(-i0)}}{k_1}. \quad (3.47)$$

З іншого боку, (див. (3.32)),

$$a_1(k) = \frac{A^2 a_2(0)}{4k^2} (1 + o(k)), \quad k \rightarrow 0. \quad (3.48)$$

Порівнюючи (3.47) та (3.48) та беручи до уваги, що (за формулою Племелі – Сохоцького)

$$\chi(+i0) + \chi(-i0) = \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \frac{\zeta^2}{\zeta^2+1} (1 - b(\zeta) \bar{b}(-\zeta))}{\zeta} d\zeta,$$

ми отримуємо (3.42).

(ii) *Випадок II.* Зі співвідношення симетрії (3.15) та Пункту (vi) у Твердження 3.1 випливає, що поведінка $\Psi_j(x, t, k)$, $j = 1, 2$ при $k \rightarrow 0$ може бути охарактеризована у такий спосіб:

$$\Psi_1^{(1)}(x, t, k) = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1(x, t) \\ s_2(x, t) \end{pmatrix} + O(k), \quad (3.49a)$$

$$\Psi_1^{(2)}(x, t, k) = \frac{2i}{A} \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} h_1(x, t) \\ h_2(x, t) \end{pmatrix} + O(k^2), \quad (3.49b)$$

$$\Psi_2^{(1)}(x, t, k) = -\frac{2i}{A} \begin{pmatrix} \bar{v}_2(-x, t) \\ \bar{v}_1(-x, t) \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} \bar{h}_2(-x, t) \\ \bar{h}_1(-x, t) \end{pmatrix} + O(k^2), \quad (3.49c)$$

$$\Psi_2^{(2)}(x, t, k) = -\frac{1}{k} \begin{pmatrix} \bar{v}_2(-x, t) \\ \bar{v}_1(-x, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{s}_2(-x, t) \\ \bar{s}_1(-x, t) \end{pmatrix} + O(k), \quad (3.49d)$$

з деякими v_j , s_j , та h_j ($j = 1, 2$). Далі, використовуючи визначення (3.31) спектральних функцій та беручи до уваги, що $|v_2(0, 0)|^2 - |v_1(0, 0)|^2 = 0$ у Випадку II, ми маємо, при $k \rightarrow 0$:

$$a_1(k) = \frac{1}{k}(v_1\bar{s}_1 - \bar{v}_1s_1 - v_2\bar{s}_2 + \bar{v}_2s_2) \Big|_{x,t=0} + O(1), \quad (3.50a)$$

$$a_2(k) = k \frac{2i}{A}(v_1\bar{h}_1 + \bar{v}_1h_1 - v_2\bar{h}_2 - \bar{v}_2h_2) \Big|_{x,t=0} + O(k^2), \quad (3.50b)$$

$$b(k) = v_1\bar{h}_1 - v_2\bar{h}_2 + \frac{2i}{A}(\bar{v}_1s_1 - \bar{v}_2s_2) \Big|_{x,t=0} + O(k). \quad (3.50c)$$

З рівнянь (3.50) випливає, що

$$a_{11} = iA \operatorname{Re} b(0) - \frac{A^2}{4} \dot{a}_2(0), \quad (3.51)$$

де $a_{11} = \lim_{k \rightarrow 0} (ka_1(k))$.

З іншого боку, у термінах

$$\hat{a}_1(k) = a_1(k) \frac{k}{k - ik_1} \quad \text{та} \quad \hat{a}_2(k) = a_2(k) \frac{k - ik_1}{k},$$

детермінантне відношення може бути розглянуто як скалярна задача Рімана-Гільберта з умовою стрибка

$$\hat{a}_1(k)\hat{a}_2(k) = 1 - b(k)\bar{b}(-k),$$

для несингулярних та відмінних від нуля функцій $\hat{a}_1(k)$ та $\hat{a}_2(k)$. Її розв'язок дається інтегралами типу Коші, звідки випливають зображення для $a_1(k)$ та $a_2(k)$:

$$a_1(k) = \frac{k - ik_1}{k} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - b(\zeta)\bar{b}(-\zeta))}{\zeta - k} d\zeta \right\}, \quad (3.52a)$$

та

$$a_2(k) = \frac{k}{k - ik_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - b(\zeta)\bar{b}(-\zeta))}{\zeta - k} d\zeta \right\}. \quad (3.52b)$$

У свою чергу, з (3.52) та формул Племелі-Сохоцького отримуємо

$$a_{11} = -ik_1 E_1 E_2 \quad \text{та} \quad \dot{a}_2(0) = \frac{i}{k_1} E_1^{-1} E_2, \quad (3.53)$$

де E_1 та E_2 визначені у (3.44). Порівнюючи (3.51) та (3.53), отримуємо $k_1 > 0$ (3.43) як (однозначно визначений) розв'язок квадратного рівняння. \square

Беручи до уваги сингулярності функцій $\Psi_j(x, t, k)$, $j = 1, 2$ та $a_1(k)$ при $k = 0$ (див. Твердження 3.1), можемо описати поведінку $M(x, t, k)$ при $k = 0$ наступним чином:

у Випадку I,

$$M(x, t, k) = \begin{pmatrix} \frac{4}{A^2 a_2(0)} v_1(x, t) & -\bar{v}_2(-x, t) \\ \frac{4}{A^2 a_2(0)} v_2(x, t) & -\bar{v}_1(-x, t) \end{pmatrix} (I + O(k)) \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}, \quad k \rightarrow +i0, \quad (3.54a)$$

$$M(x, t, k) = \frac{2i}{A} \begin{pmatrix} -\bar{v}_2(-x, t) & \frac{v_1(x, t)}{a_2(0)} \\ -\bar{v}_1(-x, t) & \frac{v_2(x, t)}{a_2(0)} \end{pmatrix} + O(k), \quad k \rightarrow -i0, \quad (3.54b)$$

та у Випадку II,

$$M(x, t, k) = \begin{pmatrix} \frac{v_1(x, t)}{a_{11}} & -\bar{v}_2(-x, t) \\ \frac{v_2(x, t)}{a_{11}} & -\bar{v}_1(-x, t) \end{pmatrix} (I + O(k)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}, \quad k \rightarrow +i0, \quad (3.55a)$$

$$M(x, t, k) = \frac{2i}{A} \begin{pmatrix} -\bar{v}_2(-x, t) & \frac{v_1(x, t)}{\dot{a}_2(0)} \\ -\bar{v}_1(-x, t) & \frac{v_2(x, t)}{\dot{a}_2(0)} \end{pmatrix} (I + O(k)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}, \quad k \rightarrow -i0 \quad (3.55b)$$

(нагадаємо, що $a_1(k) = \frac{a_{11}}{k} + O(1)$ при $k \rightarrow 0$).

Зважаючи на те, що функції v_j не визначаються початковими умовами (3.1b), доцільно виключити їх з опису (сингулярної) поведінки $M(x, t, k)$ при $k \rightarrow 0$:

у Випадку I,

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \in \mathbb{C}^+}} M(x, t, k) \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = M(x, t, -i0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{A}{2i} \\ -\frac{2i}{A} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.56a)$$

у Випадку II,

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \in \mathbb{C}^+}} M(x, t, k) \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \frac{A}{2i} \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \in \mathbb{C}^-}} M(x, t, k) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dot{a}_2(0)k & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.56b)$$

причому $\det M(x, t, k) = O(1)$ при $k \rightarrow 0$.

Крім того, якщо $a_1(ik_1) = 0$ з деяким $k_1 > 0$ (нагадаємо, що у цьому випадку ми припускаємо, що цей нуль простий), то $M(x, t, k)$ має задовольняти умові на лишок:

$$\operatorname{Res}_{k=ik_1} M^{(1)}(x, t, k) = \frac{\gamma_1}{\dot{a}_1(ik_1)} e^{-2k_1 x - 4ik_1^2 t} M^{(2)}(x, t, ik_1), \quad |\gamma_1| = 1, \quad (3.57)$$

де $\Psi_1^{(1)}(0, 0, ik_1) = \gamma_1 \Psi_2^{(2)}(0, 0, ik_1)$. Зазначимо, що з умови симетрії (3.15) випливає, що $\bar{\Psi}_1^{(1)}(0, 0, ik_1) = \gamma_1^{-1} \bar{\Psi}_2^{(2)}(0, 0, ik_1)$, і тому $|\gamma_1| = 1$ (пор. з [9]).

Зазначимо, що якщо функція $a_1(k)$ має нуль $k = \zeta_1$, який не є чисто уявним, то, в силу умови симетрії, вона також має нуль при $k = \zeta_2 = -\bar{\zeta}_1$, а відповідні умови на лишки мають вигляд:

$$\operatorname{Res}_{k=\zeta_1} M^{(1)}(x, t, k) = \frac{\eta_1}{\dot{a}_1(\zeta_1)} e^{2i\zeta_1 x + 4i\zeta_1^2 t} M^{(2)}(x, t, \zeta_1), \quad (3.58a)$$

та

$$\operatorname{Res}_{k=\zeta_2} M^{(1)}(x, t, k) = \frac{1}{\bar{\eta}_1 \dot{a}_1(\zeta_2)} e^{2i\zeta_2 x + 4i\zeta_2^2 t} M^{(2)}(x, t, \zeta_2), \quad (3.58b)$$

де η_1 визначається з рівності $\Psi_1^{(1)}(0, 0, \zeta_1) = \eta_1 \Psi_2^{(2)}(0, 0, \zeta_1)$.

Тепер ми можемо сформулювати задачу Рімана-Гільберта, розв'язок якої дає розв'язок початкової задачі (3.1), (3.3). Нехай $b(k)$, $k \in \mathbb{R}$ та γ_1 з $|\gamma_1| = 1$ є спектральними даними, які відповідають початковим даним $q_0(x)$ у (3.1). Тоді задача Рімана-Гільберта формулюється наступним чином:

Вихідна задача Рімана-Гільберта: Для даних $b(k)$ та γ_1 , знайти 2×2 матричну функцію $M(x, t, k)$, яка є кусково-мероморфною (відносно \mathbb{R}) за змінною k та задовольняє наступним умовам:

- (i) Умова стрибка. Недотичні границі $M_{\pm}(x, t, k) = M(x, t, k \pm i0)$ існують майже всюди при $k \in \mathbb{R}$, причому $M_{\pm}(x, t, \cdot) - I \in L^2(\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon])$ для будь-якого $\varepsilon > 0$, і задовольняють умову

$$M_+(x, t, k) = M_-(x, t, k) J(x, t, k) \quad \text{майже всюди при } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (3.59)$$

де матриця стрибка $J(x, t, k)$ задається формулою (3.37), у якій r_1 та r_2 задаються в термінах b та a_j (3.38), де, у свою чергу, a_j визначені у (3.46) (Випадок I) або у (3.52) (Випадок II).

(ii) Нормування при $k = \infty$:

$$M(x, t, k) = I + O(k^{-1}) \quad \text{рівномірно при } k \rightarrow \infty.$$

(iii) Умова на лишок (3.57) при $k = ik_1$, де k_1 визначається у термінах $b(k)$, використовуючи (3.42) (Випадок I) або (3.43) (Випадок II).

(iv) Умова на особливість у $k = 0$: $\det M(x, t, k) = O(1)$ при $k \rightarrow 0$ та $M(x, t, k)$ задовольняє умову (3.56a) (Випадок I) або (3.56b) (Випадок II).

Припустимо, що задача Рімана-Гільберта (i)–(iv) має розв'язок $M(x, t, k)$. Тоді розв'язок початкової задачі (3.1), (3.3) визначається у термінах елементів (12) та (21) матриці $M(x, t, k)$ у такий спосіб:

$$q(x, t) = 2i \lim_{k \rightarrow \infty} k M_{12}(x, t, k), \quad (3.60)$$

та

$$q(-x, t) = -2i \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{k M_{21}(x, t, k)}. \quad (3.61)$$

Важливо зазначити, що розв'язок задачі Рімана-Гільберта – єдиний (якщо існує). Дійсно, визначник матриці $M(x, t, k)$ є аналітичною функцією всюди, крім точки $k = 0$, де цей визначник є обмеженою функцією. Тоді, за теоремою Ліувілля, з того, що $\det M(x, t, k) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, випливає, що $\det M(x, t, k) \equiv 1$, і отже $M^{-1}(x, t, k)$ існує при всіх значення x, t та k . Припускаючи, що M та \tilde{M} – два розв'язки, з умов (3.56) на особливість при $k = 0$ випливає, що $M\tilde{M}^{-1}$ обмежена у $k = 0$, а зі структури умови на лишок (3.57) випливає, що $M\tilde{M}^{-1}$ обмежена у $k = ik_1$. Застосовуючи теорему Ліувілля до $M\tilde{M}^{-1}$, отримуємо, що $M\tilde{M}^{-1} \equiv I$.

Зауваження 3.6. З формул (3.60) та (3.61) випливає, що для того, щоб отримати розв'язок (3.1), (3.3) для всіх $x \in \mathbb{R}$, достатньо мати розв'язок задачі Рімана-Гільберта тільки, скажімо, для $x \geq 0$.

Зауваження 3.7. У загальному випадку, коли $a_1(k)$ та/або $a_2(k)$ мають більше нулів відповідно у \mathbb{C}^+ та \mathbb{C}^- , треба додати умови на лишки типу (3.57) та/або (3.58) у цих нулях.

Твердження 3.4. Розв'язок M задачі Рімана-Гільберта (i)-(iv) задовольняє наступну умову симетрії (пор. з (3.24)):

$$M(x, t, k) = \begin{cases} \overline{\Lambda M(-x, t, -\bar{k})} \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1(k)} & 0 \\ 0 & a_1(k) \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{C}^+ \setminus \{0\}, \\ \overline{\Lambda M(-x, t, -\bar{k})} \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} a_2(k) & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2(k)} \end{pmatrix}, & k \in \mathbb{C}^- \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (3.62)$$

Доведення. Це випливає із симетрії матриці стрибка (3.37) у (3.59)

$$\overline{\Lambda J(-x, t, -k)} \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} a_2(k) & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2(k)} \end{pmatrix} J(x, t, k) \begin{pmatrix} a_1(k) & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_1(k)} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

яка, в свою чергу, випливає з (3.40) та (3.41), та того факту, що умови на структуру (3.54) та (3.55) та умови на лишки (3.57) погоджуються з (3.62). \square

3.1.4 Односолітонний розв'язок

Твердження 3.5. Нехай $a_1(k)$, $a_2(k)$, та $b(k)$ є спектральними функціями, які (i) відповідають деякому $q_0(x)$ та (ii) задовольняють наступним умовам:

- $b(k) = 0$ для всіх $k \in \mathbb{R}$;
- $a_1(k)$ має єдиний, простий нуль $k = ik_1$ із деяким $k_1 > 0$ у $\overline{\mathbb{C}^+}$;
- $a_2(k)$ має єдиний, простий нуль $k = 0$ у $\overline{\mathbb{C}^-}$.

Також, нехай задане число $\gamma_1 = e^{i\phi_1}$, де $\phi_1 \in \mathbb{R}$. Тоді:

(1) k_1 є однозначно визначеним, причому $k_1 = \frac{A}{2}$;

- (2) Задача Рімана-Гільберта (i)–(iv) має єдиний розв'язок для всіх (x, t) , де $x \in \mathbb{R}$ та $t \geq 0$, за виключенням множини $\cup_{n \in \mathbb{Z}} \{(0, t_n)\}$ із $t_n = \frac{\phi_1}{A^2} + \frac{2\pi}{A^2}n$;
- (3) Відповідні точні розв'язки $q(x, t)$ задачі (3.1), (3.3) мають вигляд (див. Рисунок 3.1)

$$q(x, t) = \frac{A}{1 - e^{-Ax - iA^2t + i\phi_1}}. \quad (3.63)$$

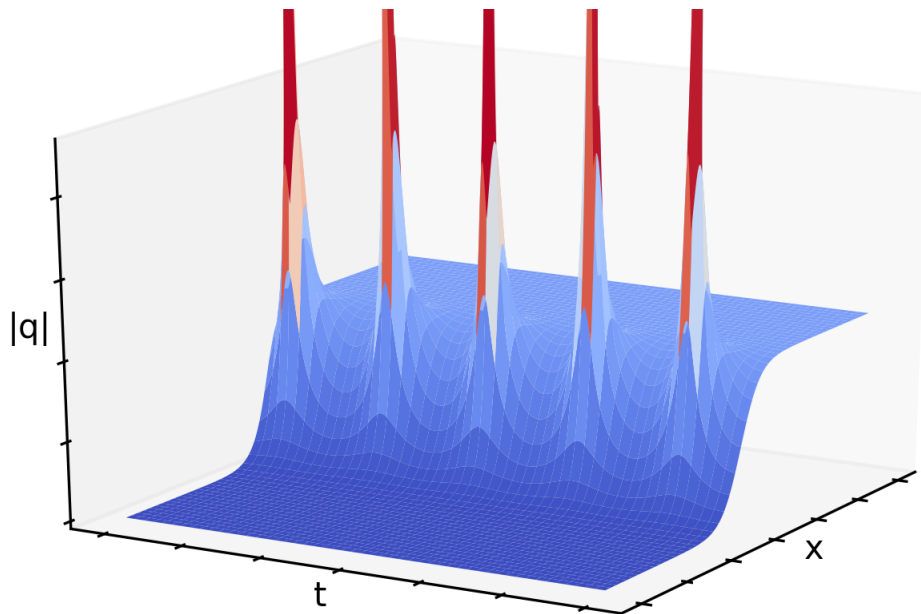


Рис. 3.1: Солітонний розв'язок (3.63) з параметрами $A = 1$ та $\phi_1 = \pi$.

Доведення. Через те, що $b(0) = 0$, ми знаходимося у рамках Випадку II, і тому Пункт 1 впливає з пункту (ii) Твердження 3.3. Крім того, з (3.52) отримуємо вирази для a_1 та a_2 :

$$a_1(k) = \frac{k - i\frac{A}{2}}{k}, \quad a_2(k) = \frac{k}{k - i\frac{A}{2}}, \quad (3.64)$$

і тому константи, задіяні у (3.55), мають вигляд:

$$a_{11} = \frac{A}{2i}, \quad \dot{a}_2(0) = \frac{2i}{A}.$$

Зазначимо, що з того, що $b(k) \equiv 0$, випливає, що $M(\cdot, \cdot, k)$ є мероморфною (у \mathbb{C}) функцією з єдиним полюсом у $k = ik_1$. Тоді, порівнюючи (3.55a) та (3.55b), отримуємо $v_1(x, t) = -\bar{v}_2(-x, t)$, і тому умова на особливість (3.55) зводиться до звичайної умови на лишок:

$$\operatorname{Res}_{k=0} M^{(2)}(x, t, k) = \frac{A}{2i} M^{(1)}(x, t, 0). \quad (3.65)$$

Далі, беручи до уваги вихідну умову на лишок (3.57) та нормування (ii), ми отримуємо наступне зображення для M :

$$M(x, t, k) = \begin{pmatrix} \frac{k+v_1(x,t)}{k-\frac{iA}{2}} & \frac{v_1(x,t)}{k} \\ \frac{-\bar{v}_1(-x,t)}{k-\frac{iA}{2}} & \frac{k-\bar{v}_1(-x,t)}{k} \end{pmatrix}, \quad (3.66)$$

де $v_1(x, t)$ має вигляд

$$v_1(x, t) = \frac{A}{2i} \cdot \frac{1}{1 - e^{-Ax - iA^2t + i\phi_1}}. \quad (3.67)$$

Зокрема, сингулярна множина солітонного розв'язку визначається як множина нулів знаменника у (3.67). Нарешті, використовуючи (3.60) або (3.61), отримуємо солітонний розв'язок (3.63). \square

3.2 Асимптотика за великим часом

Асимптотика початкової задачі для локального нелінійного рівняння Шредінгера зі ступінчастими крайовими умовами (3.5), (3.6) була отримана у [27], де було показано, що завжди існує три сектори у півплощині $t > 0$ площини (x, t) , які характеризуються якісно різною асимптотичною поведінкою: сектор, де розв'язок прямує до нуля (причому порядок прямування q до нуля дорівнює $O(t^{-1/2})$); еліптичний сектор; та сектор модуляційної плоскої хвилі. Зокрема, якщо $B = 0$ у (3.5), то еліптична хвиля займає сектор $0 < \frac{x}{t} < 8\sqrt{2}A$.

Природньо порівняти цю поведінку з асимптотикою у випадку нелокального нелінійного рівняння Шредінгера з таким самим типом початкових

даних (3.1b), (3.1c). Це мотивує нас дослідити, у цьому Підрозділі, асимптотику за великим часом розв'язку початкової задачі (3.1), (3.3). Наш аналіз ґрунтується на адаптації нелінійного методу перевалу [38] до задачі Рімана-Гільберта (i)–(iv). Застосування методу у цьому випадку має низку специфічних рис; зокрема, нам доводиться мати справу з сингулярністю на контурі задачі Рімана-Гільберта, та з тим фактом, що стрибок $1+r_1(k)r_2(k)$ у скалярній задачі Рімана-Гільберта для $\delta(k, \xi)$ (див. (3.70) нижче) не є, взагалі кажучи, дійсним.

Ми покажемо, що основною відмінністю асимптотики нелокального нелінійного рівняння Шредінґера порівняно з локальним є те, що у нелокальному випадку також існує спадаючий сектор та сектор “модуляційної константи”, але немає перехідного сектору (з прямолінійними межами) між цими двома секторами (хоча перехідна зона між ними має існувати та описуватися асимптотикою вздовж сімей кривих, які наближаються до променя $x = 0, t > 0$).

3.2.1 Факторизації матриці стрибка

Зазначимо, що з огляду на (3.60) та (3.61), дослідження задачі Рімана-Гільберта для $x > 0$ є достатнім для дослідження асимптотики $q(x, t)$ для всіх (x, t) за межами сектору $|x/t| < \varepsilon$ для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Введемо до розгляду змінну $\xi := \frac{x}{4t}$ та фазову функцію

$$\theta(k, \xi) = 4k\xi + 2k^2. \quad (3.68)$$

Нагадаємо, що матриця стрибка (3.37) має дві трикутні факторизації (див. (2.27)):

$$J(x, t, k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{r_1(k)e^{2it\theta}}{1+r_1(k)r_2(k)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+r_1(k)r_2(k) & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+r_1(k)r_2(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{r_2(k)e^{-2it\theta}}{1+r_1(k)r_2(k)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.69a)$$

та

$$J(x, t, k) = \begin{pmatrix} 1 & r_2(k)e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r_1(k)e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.69b)$$

Через те, що фазова функція $\theta(k, \xi)$ така ж сама, як і у випадку класичного локального НРШ, її таблиця знаків (див. Рисунок 2.2) знову дозволяє дотримуватися відомих кроків у асимптотичному аналізі [38, 36], які включають в себе (i) необхідність позбутися діагонального множника у (3.69а) та (ii) перетворення вихідної задачі Рімана-Гільберта (відносно дійсної осі) до нової задачі відносно “хреста”, де матриця стрибка прямує, при $t \rightarrow \infty$, до одиничної матриці рівномірно за межами околу точки стаціонарної фази $k = -\xi$. Але у випадку ступінчастого фону, дотримуючись цього плану аналізу, ми повинні приділяти увагу сингулярності при $k = 0$, яка відсутня у випадку нульового фону.

Подібно до випадку нульового фону, введемо $\delta(k, \xi)$ як розв’язок скалярної задачі Рімана-Гільберта: знайти функцію $\delta(k, \xi)$, аналітичну у $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -\xi]$, яка задовольняє умови

$$\begin{aligned} \delta_+(k, \xi) &= \delta_-(k, \xi)(1 + r_1(k)r_2(k)), & k \in (-\infty, -\xi), \\ \delta(k, \xi) &\rightarrow 1, & k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Розв’язок цієї задачі може бути знайдений у формі інтегралу типу Коші:

$$\delta(k, \xi) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\xi} \frac{\ln(1 + r_1(\zeta)r_2(\zeta))}{\zeta - k} d\zeta \right\}. \quad (3.71)$$

Зазначимо, що через те, що ми маємо справу з $\xi > 0$, поведінка $r_j(k)$ у $k = 0$ не впливає на $\delta(k, \xi)$. За допомогою функції $\delta(k, \xi)$, введемо до розгляду $\tilde{M}(x, t, k)$:

$$\tilde{M}(x, t, k) = M(x, t, k)\delta^{-\sigma_3}(k, \xi). \quad (3.72)$$

Зазначимо, що у випадку початкового даного у вигляді чистої сходінки (3.33), ми маємо $1 + r_1(k)r_2(k) = \frac{4k^2}{4k^2 + A^2}$ (див. Зауваження 3.3), і тому $1 + r_1(k)r_2(k)$ є дійсним. Однак у загальному випадку, $1 + r_1(k)r_2(k)$ може приймати комплексні значення, що робить $\delta(k, \xi)$ сингулярною у $k = -\xi$ (пор. з Розділом 2).

Дійсно, функція $\delta(k, \xi)$ може бути записана у такий спосіб:

$$\delta(k, \xi) = (\xi + k)^{i\nu(-\xi)} e^{\chi(k, \xi)}, \quad (3.73)$$

де

$$\chi(k, \xi) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\xi} \ln(k - \zeta) d\zeta \ln(1 + r_1(\zeta)r_2(\zeta)), \quad (3.74)$$

та

$$\nu(-\xi) := -\frac{1}{2\pi} \ln(1 + r_1(-\xi)r_2(-\xi)) = -\frac{1}{2\pi} \ln |1 + r_1(-\xi)r_2(-\xi)| - \frac{i}{2\pi} \Delta(-\xi), \quad (3.75)$$

із

$$\Delta(-\xi) := \int_{-\infty}^{-\xi} d \arg(1 + r_1(\zeta)r_2(\zeta)).$$

Подальший аналіз робиться за припущення, що

$$\Delta(k) \in (-\pi, \pi), \quad \text{для всіх } k \in (-\infty, 0), \quad (3.76)$$

і тому $|\operatorname{Im} \nu(k)| < \frac{1}{2}$. У цьому випадку, $\ln(1 + r_1(k)r_2(k))$ є однозначною функцією (такою, що $\ln(1 + r_1(-\infty)r_2(-\infty)) = 0$), і сингулярність $\delta(k, \xi)$ (як і $\tilde{M}(x, t, k)$) у $k = -\xi$ є інтегровною з квадратом: $\int_{-\infty}^{\infty} |\delta(k, \xi)|^2 dk < \infty$. Припущення (3.76) дозволить нам отримати коректні формули для головного члена за великим часом, тобто отримати оцінки залишків, які є меншими за наведений головний асимптотичний член (див. (3.89) у Теоремі 3.1).

Зазначимо, (3.76) має місце у випадку початкового даного у вигляді чистої сходинок (3.33): у цьому випадку, $\Delta(k) \equiv 0$ для $k \in (-\infty, 0)$.

Функція $\tilde{M}(x, t, k)$, визначена у (3.72), задовольняє задачу Рімана-Гільберта, яка має наступні умови на стрибок, нормування та умови на лишки:

$$\tilde{M}_+(x, t, k) = \tilde{M}_-(x, t, k) \tilde{J}(x, t, k), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (3.77a)$$

$$\tilde{M}(x, t, k) \rightarrow I, \quad k \rightarrow \infty, \quad (3.77b)$$

$$\operatorname{Res}_{k=ik_1} \tilde{M}^{(1)}(x, t, k) = \frac{\gamma_1}{\dot{a}_1(ik_1)\delta^2(ik_1, \xi)} e^{-2k_1x - 4ik_1^2t} \tilde{M}^{(2)}(x, t, ik_1), \quad |\gamma_1| = 1, \quad (3.77c)$$

де (ми опустили аргументи матриці стрибка $\tilde{J}(x, t, k)$)

$$\tilde{J} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{r_1(k)\delta_-^{-2}(k, \xi)}{1+r_1(k)r_2(k)}e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{r_2(k)\delta_+^2(k, \xi)}{1+r_1(k)r_2(k)}e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in (-\infty, -\xi), \\ \begin{pmatrix} 1 & r_2(k)\delta^2(k, \xi)e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r_1(k)\delta^{-2}(k, \xi)e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix}, & k \in (-\xi, \infty) \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (3.77d)$$

Крім того, ця задача має умову на сингулярність у особливій точці $k = 0$:

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \in \mathbb{C}^+}} \tilde{M}(x, t, k) \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \tilde{M}(x, t, -i0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{A}{2i}\delta^2(0, \xi) \\ -\frac{2i}{A\delta^2(0, \xi)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.77e)$$

у Випадку I, та

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \in \mathbb{C}^+}} \tilde{M}(x, t, k) \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \frac{A}{2i} \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \in \mathbb{C}^-}} \tilde{M}(x, t, k) \begin{pmatrix} 0 & \delta^2(0, \xi) \\ \frac{\dot{a}_2(0)}{\delta^2(0, \xi)}k & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.77f)$$

причому $\det \tilde{M}(x, t, k) = O(1)$ при $k \rightarrow 0$. у Випадку II.

3.2.2 Перетворення задачі Рімана-Гільберта

Аналогічно випадку локального нелінійного рівняння Шредінгера, якщо припустити, що $\int_{-\infty}^0 |q_0(x)|dx < \infty$ та $\int_0^\infty |q_0(x) - A|dx < \infty$, то коефіцієнти відбиття $r_j(k)$, $j = 1, 2$ є визначеними, взагалі кажучи, тільки при $k \in \mathbb{R}$ (див. Твердження 3.1 та 3.2). З іншого боку, для дослідження асимптотики $\tilde{M}(x, t, k)$ за великим часом, було б зручно мати $r_j(k)$ продовженими як мероморфні функції у \mathbb{C} ; це забезпечує можливість робити необхідні перетворення задачі Рімана-Гільберта. В протилежному випадку, $r_j(k)$ та $\frac{r_j(k)}{1+r_1(k)r_2(k)}$ мають бути наближені певними раціональними функціями, з добре контрольованими відхиленнями (див., наприклад, [36, 70]).

Для того, щоб зробити процес отримання асимптотик більш прозорим, далі ми припускаємо, що початкова функція $q_0(x)$ є компактним збуренням сходінки $q_{0A}(x)$ (3.33); тоді всі стовпчики $\Psi_l^{(m)}(x, 0, k)$, $l, m = 1, 2$ є

мероморфними (пор. Твердження 3.1), і тому $r_j(k)$ також є мероморфними функціями у \mathbb{C} .

Визначимо $\hat{M}(x, t, k)$ у такий спосіб (дивись Рисунок 3.2):

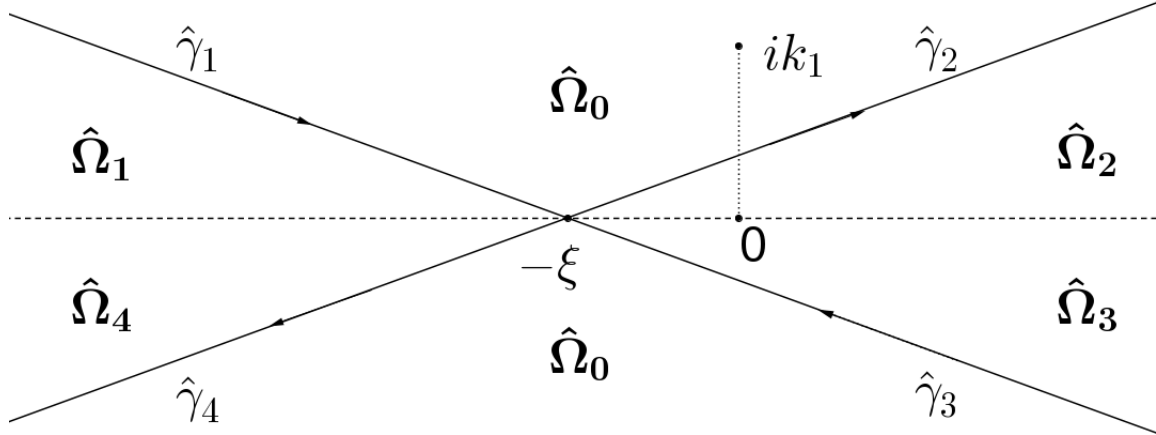


Рис. 3.2: Контур $\hat{\Gamma} = \hat{\gamma}_1 \cup \dots \cup \hat{\gamma}_4$.

$$\hat{M}(x, t, k) = \begin{cases} \tilde{M}(x, t, k), & k \in \hat{\Omega}_0, \\ \tilde{M}(x, t, k) \begin{pmatrix} 1 & \frac{-r_2(k)\delta^2(k, \xi)}{1+r_1(k)r_2(k)} e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\Omega}_1, \\ \tilde{M}(x, t, k) \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ -r_1(k)\delta^{-2}(k, \xi)e^{2it\theta} & & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\Omega}_2, \\ \tilde{M}(x, t, k) \begin{pmatrix} 1 & r_2(k)\delta^2(k, \xi)e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\Omega}_3, \\ \tilde{M}(x, t, k) \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ \frac{r_1(k)\delta^{-2}(k, \xi)}{1+r_1(k)r_2(k)} e^{2it\theta} & & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\Omega}_4. \end{cases} \quad (3.78)$$

Тут кути між променями $\hat{\gamma}_j = \hat{\gamma}_j(\xi)$ та дійсною віссю вибрані такими, що точка ik_1 розташована у секторі $\hat{\Omega}_0$. Тоді $\hat{M}(x, t, k)$ задовольняє задачу Рімана-Гільберта зі стрибком вздовж $\hat{\Gamma} = \hat{\gamma}_1 \cup \dots \cup \hat{\gamma}_4$:

$$\hat{M}_+(x, t, k) = \hat{M}_-(x, t, k)\hat{J}(x, t, k), \quad k \in \hat{\Gamma}, \quad (3.79a)$$

із

$$\hat{J}(x, t, k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \frac{r_2(k)\delta^2(k, \xi)}{1+r_1(k)r_2(k)} e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\gamma}_1, \\ \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ r_1(k)\delta^{-2}(k, \xi)e^{2it\theta} & & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\gamma}_2, \\ \begin{pmatrix} 1 & -r_2(k)\delta^2(k, \xi)e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\gamma}_3, \\ \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ \frac{-r_1(k)\delta^{-2}(k, \xi)}{1+r_1(k)r_2(k)} e^{2it\theta} & & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\gamma}_4, \end{cases} \quad (3.79b)$$

нормуванням

$$\hat{M}(x, t, k) \rightarrow I, \quad k \rightarrow \infty, \quad (3.79c)$$

та умову на лишок

$$\operatorname{Res}_{k=ik_1} \hat{M}^{(1)}(x, t, k) = c_1(x, t) \hat{M}^{(2)}(x, t, ik_1), \quad (3.79d)$$

де

$$c_1(x, t) = \frac{\gamma_1}{\dot{a}_1(ik_1)\delta^2(ik_1, \xi)} e^{-2k_1x - 4ik_1^2t}, \quad \text{із } |\gamma_1| = 1. \quad (3.79e)$$

Стосовно умови в особливій точці $k = 0$, зазначимо, що вона приймає, в обох випадках, звичний вигляд умови на лишок:

$$\operatorname{Res}_{k=0} \hat{M}^{(2)}(x, t, k) = c_0(\xi) \hat{M}^{(1)}(x, t, 0), \quad (3.79f)$$

де (пор. з (3.65))

$$c_0(\xi) = \frac{A\delta^2(0, \xi)}{2i}. \quad (3.79g)$$

Задача Рімана-Гільберта (3.79), яка має дві умови на лишки, (3.79d) та (3.79f), може бути зведена до регулярної задачі Рімана-Гільберта (без умов на лишки), за допомогою множників Бляшке-Потапова (див., наприклад, [44]):

Твердження 3.6. Розв'язок $q(x, t)$ початкової задачі (3.1), (3.3) може бути представлений у вигляді:

$$q(x, t) = -2k_1 P_{12}(x, t) + 2i \lim_{k \rightarrow \infty} k \hat{M}_{12}^R(x, t, k), \quad x > 0, \quad (3.80a)$$

$$q(x, t) = -2k_1 \overline{P_{21}(-x, t)} - 2i \lim_{k \rightarrow \infty} k \overline{\hat{M}_{21}^R(-x, t, k)}, \quad x < 0. \quad (3.80b)$$

Тут (i) $\hat{M}^R(x, t, k)$ є розв'язком регулярної задачі Рімана-Гільберта:

$$\begin{cases} \hat{M}_+^R(x, t, k) = \hat{M}_-^R(x, t, k) \hat{J}^R(x, t, k), & k \in \hat{\Gamma}, \\ \hat{M}^R(x, t, k) \rightarrow I, & k \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3.81a)$$

із

$$\hat{J}^R(x, t, k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{k-ik_1}{k} \end{pmatrix} \hat{J}(x, t, k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{k}{k-ik_1} \end{pmatrix}, \quad k \in \hat{\Gamma}, \quad (3.81b)$$

i (ii) P_{12} та P_{21} визначені у термінах \hat{M}^R у такий спосіб:

$$P_{12}(x, t) = \frac{g_1(x, t)h_1(x, t)}{g_1(x, t)h_2(x, t) - g_2(x, t)h_1(x, t)}, \quad (3.82a)$$

$$P_{21}(x, t) = -\frac{g_2(x, t)h_2(x, t)}{g_1(x, t)h_2(x, t) - g_2(x, t)h_1(x, t)}, \quad (3.82b)$$

де $g(x, t) = \begin{pmatrix} g_1(x, t) \\ g_2(x, t) \end{pmatrix}$ та $h(x, t) = \begin{pmatrix} h_1(x, t) \\ h_2(x, t) \end{pmatrix}$ визначаються наступним чином:

$$g(x, t) = ik_1 \hat{M}^{R(1)}(x, t, ik_1) - c_1(x, t) \hat{M}^{R(2)}(x, t, ik_1), \quad (3.83a)$$

$$h(x, t) = ik_1 \hat{M}^{R(2)}(x, t, 0) + c_0(\xi) \hat{M}^{R(1)}(x, t, 0). \quad (3.83b)$$

Доведення. Розв'язок $\hat{M}(x, t, k)$ задачі Рімана-Гільберта (3.79) може бути представлений у термінах розв'язку $\hat{M}^R(x, t, k)$ регулярної задачі Рімана-Гільберта (3.81) у такий спосіб [44]:

$$\hat{M}(x, t, k) = B(x, t, k) \hat{M}^R(x, t, k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{k-ik_1}{k} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{C}, \quad (3.84)$$

де множник Бляшке-Потапова B має вигляд $B(x, t, k) = I + \frac{ik_1}{k-ik_1} P(x, t)$. Тут $P(x, t)$ є проектором, який однозначно визначається умовами

$$\ker P(x, t) = \text{lin}_{\mathbb{C}} \{g(x, t)\} \quad \text{та} \quad \text{Im } P(x, t) = \text{lin}_{\mathbb{C}} \{h(x, t)\}, \quad (3.85)$$

де $g(x, t)$ та $h(x, t)$ визначені у (3.83). Відповідно, елементи (12) та (21) матриці P визначаються у вигляді (3.82), а елементи (11) та (22) – у термінах елементів (12) та (21):

$$P_{11}(x, t) = -\frac{P_{12}(x, t)g_2(x, t)}{g_1(x, t)} \quad \text{та} \quad P_{22}(x, t) = -\frac{P_{21}(x, t)g_1(x, t)}{g_2(x, t)}. \quad (3.86)$$

Нарешті, беручи до уваги розкладання

$$\hat{M}(x, t, k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{ik_1}{k} \end{pmatrix} + \frac{ik_1}{k - ik_1} P(x, t) + \frac{\hat{M}_1^R(x, t)}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty, \quad (3.87)$$

та $\hat{M}^R(x, t, k) = I + \frac{\hat{M}_1^R(x, t)}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$, $k \rightarrow \infty$, та використовуючи (3.60) та (3.61), отримуємо зображення (3.80). \square

За допомогою Твердження 3.6, знаходження асимптотики за великим часом розв'язку $q(x, t)$ зводиться до асимптотичного аналізу регулярної задачі Рімана-Гільберта (3.81). З іншого боку, ця задача має такий самий вигляд, як і у випадку задачі для ННРШ на нульовому фоні, див. Розділ 2 та [89]. Отже, ми можемо дотримуватися схеми асимптотичного аналізу, який представлений у Розділі 2 (див. також [89]), для отримання асимптотики за великим часом матричної функції $\hat{M}^R(x, t, k)$ при $k = ik_1$, $k = 0$ (див. (3.83)), та при великих k (див. (3.80)), що у кінцевому рахунку дасть змогу отримати асимптотику за великим часом розв'язку $q(x, t)$.

Перед тим, як отримати точну асимптотику, ми спершу зазначимо, що груба оцінка $\hat{M}^R(x, t, k) \approx I$ при $t \rightarrow \infty$ із $x/t \geq \varepsilon$ для будь-якого $\varepsilon > 0$ (для запобігання можливої сингулярності $\delta(k, \xi)$ при $\xi \rightarrow 0$), будучи підставленою у (3.83), дає головний член асимптотики розв'язку $q(x, t)$ з грубою оцінкою залишку:

Твердження 3.7. *При $t \rightarrow \infty$,*

$$q(x, t) = A\delta^2(0, \xi) + o(1) \quad \text{при} \quad x > 0 \quad \text{та} \quad q(x, t) = o(1) \quad \text{при} \quad x < 0 \quad (3.88)$$

вздовж будь-якого променя $\xi = \frac{x}{4t} = \text{const} > 0$ або $\xi = \text{const} < 0$.

Дійсно, з $\hat{M}^R(x, t, k) \approx I$ випливає, що $\begin{pmatrix} g_1(x, t) \\ g_2(x, t) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} ik_1 \\ -c_1(x, t) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} ik_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} h_1(x, t) \\ h_2(x, t) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} c_0(\xi) \\ ik_1 \end{pmatrix}$. Відповідно, для $x > 0$ ми маємо

$$q(x, t) \approx -2k_1 P_{12}(x, t) \approx -2k_1 \frac{ik_1 c_0(\xi)}{-k_1^2 + c_0(\xi)c_1(x, t)} \approx 2ic_0(\xi) = A\delta^2(0, \xi),$$

у той час коли при $x < 0$ ми маємо

$$q(x, t) \approx -2k_1 \overline{P_{21}(-x, t)} \approx 2k_1 \frac{-\bar{c}_1(-x, t)(-ik_1)}{-k_1^2 + \bar{c}_0(-\xi)\bar{c}_1(-x, t)} \approx 0.$$

Наш основний результат, наведений нижче, уточнює асимптотику (3.88).

Теорема 3.1. *Розглянемо задачу Коші (3.1), (3.3), де початкова функція $q_0(x)$ є компактним збуренням чистої сходінки (3.33): $q_0(x) - q_{0A}(x) = 0$ при $|x| > N$ для деякого $N > 0$. Припустимо, що спектральні функції, які відповідають $q_0(x)$ і які визначені у (3.27)–(3.30), задовольняють наступні умови:*

(a) $a_1(k)$ має один простий нуль у $\overline{\mathbb{C}^+}$ у $k = ik_1$, а $a_2(k)$ або не має нулів у $\overline{\mathbb{C}^-}$, або має один простий нуль у $k = 0$.

(b) $\text{Im } \nu(-\xi) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ для всіх $\xi > 0$, де $\text{Im } \nu(-\xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\xi} d \arg(1 + r_1(\zeta)r_2(\zeta))$, $r_1(k) = \frac{b(k)}{a_1(k)}$, $r_2(k) = \frac{\bar{b}(-k)}{a_2(k)}$.

Нехай існує розв'язок $q(x, t)$ задачі (3.1), (3.3). Тоді його асимптотика за великим часом вздовж будь-якого променя $\xi = \frac{x}{4t} = \text{const} \neq 0$ має вигляд:

(i) при $x < 0$:

$$q(x, t) = t^{-\frac{1}{2} - \text{Im } \nu(\xi)} \alpha_1(\xi) \exp \{4it\xi^2 - i \text{Re } \nu(\xi) \ln t\} + R_1(-\xi, t), \quad (3.89a)$$

(ii) при $x > 0$, можливі три типи асимптотичної поведінки, в залежності від значення $\text{Im } \nu(-\xi)$:

(a) якщо $\text{Im } \nu(-\xi) \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}]$, то

$$q(x, t) = A\delta^2(0, \xi) + t^{-\frac{1}{2} - \text{Im } \nu(-\xi)} \alpha_2(\xi) \exp \{-4it\xi^2 + i \text{Re } \nu(-\xi) \ln t\} + R_1(\xi, t). \quad (3.89b)$$

(b) якщо $\text{Im } \nu(-\xi) \in \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$, то

$$q(x, t) = A\delta^2(0, \xi) + t^{-\frac{1}{2} + \text{Im } \nu(-\xi)} \alpha_3(\xi) \exp \{4it\xi^2 - i \text{Re } \nu(-\xi) \ln t\} \\ + t^{-\frac{1}{2} - \text{Im } \nu(-\xi)} \alpha_2(\xi) \exp \{-4it\xi^2 + i \text{Re } \nu(-\xi) \ln t\} + R_3(\xi, t). \quad (3.89c)$$

(c) якщо $\text{Im } \nu(-\xi) \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$, то

$$q(x, t) = A\delta^2(0, \xi) + t^{-\frac{1}{2} + \text{Im } \nu(-\xi)} \alpha_3(\xi) \exp \{4it\xi^2 - i \text{Re } \nu(-\xi) \ln t\} \\ + R_2(\xi, t). \quad (3.89d)$$

Функції, задіяні в асимптотичних формулах (3.89), визначаються наступним чином:

$$\delta(0, \xi) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\xi} \frac{\ln(1 + r_1(\zeta)r_2(\zeta))}{\zeta} d\zeta \right\},$$

$$\nu(-\xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln |1 + r_1(-\xi)r_2(-\xi)| - \frac{i}{2\pi} \Delta(-\xi),$$

$$\Delta(-\xi) = \int_{-\infty}^{-\xi} d \arg(1 + r_1(\zeta)r_2(\zeta)),$$

$$\alpha_1(\xi) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi} \tilde{E}_1(\xi)}{r_2(\xi)\Gamma(-i\nu(\xi))}, & r_1(-\xi)r_2(-\xi) \neq 0, \\ \frac{r_1(\xi)e^{\frac{3\pi i}{4}}}{2\sqrt{\pi}}, & r_1(-\xi) = 0, r_2(-\xi) \neq 0, \\ 0, & r_1(-\xi) \neq 0, r_2(-\xi) = 0, \\ 0, & r_1(-\xi) = r_2(-\xi) = 0, \end{cases}$$

$$\alpha_2(\xi) = \begin{cases} \frac{c_0^2(\xi)\sqrt{\pi} \tilde{E}_2(\xi)}{\xi^2 r_2(-\xi)\Gamma(i\nu(-\xi))}, & r_1(-\xi)r_2(-\xi) \neq 0, \\ 0, & r_1(-\xi) = 0, r_2(-\xi) \neq 0, \\ \frac{c_0^2(\xi)r_1(-\xi)e^{\frac{\pi i}{4}}}{2\sqrt{\pi}\xi^2}, & r_1(-\xi) \neq 0, r_2(-\xi) = 0, \\ 0, & r_1(-\xi) = r_2(-\xi) = 0, \end{cases}$$

$$\alpha_3(\xi) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi} \tilde{E}_3(\xi)}{r_1(-\xi)\Gamma(-i\nu(-\xi))}, & r_1(-\xi)r_2(-\xi) \neq 0, \\ \frac{r_2(-\xi)e^{\frac{3\pi i}{4}}}{2\sqrt{\pi}}, & r_1(-\xi) = 0, r_2(-\xi) \neq 0, \\ 0, & r_1(-\xi) \neq 0, r_2(-\xi) = 0, \\ 0, & r_1(-\xi) = r_2(-\xi) = 0, \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1(\xi) &= \exp \left\{ -\frac{\pi}{2}\bar{\nu}(\xi) + \frac{\pi i}{4} - 2\bar{\chi}(\xi, -\xi) - 3i\bar{\nu}(\xi) \ln 2 \right\}, \\ \tilde{E}_2(\xi) &= \exp \left\{ -\frac{\pi}{2}\nu(-\xi) + \frac{3\pi i}{4} - 2\chi(-\xi, \xi) + 3i\nu(-\xi) \ln 2 \right\}, \\ \tilde{E}_3(\xi) &= \exp \left\{ -\frac{\pi}{2}\nu(-\xi) + \frac{\pi i}{4} + 2\chi(-\xi, \xi) - 3i\nu(-\xi) \ln 2 \right\}, \end{aligned}$$

та

$$\chi(k, \xi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\xi} \ln(k - \zeta) d\zeta \ln(1 + r_1(\zeta)r_2(\zeta)),$$

де $\Gamma(\cdot)$ є Гамма-функцією Ейлера.

Оцінки залишків $R_1(\xi, t)$ та $R_2(\xi, t)$ є рівномірними у будь-якій компактній підмножині $\xi \in (0, \infty)$ та мають вигляд:

$$R_1(\xi, t) = \begin{cases} O(t^{-1}), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) > 0, \\ O(t^{-1} \ln t), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) = 0, \\ O(t^{-1+2|\operatorname{Im} \nu(-\xi)|}), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) < 0, \end{cases} \quad (3.90)$$

$$R_2(\xi, t) = \begin{cases} O(t^{-1+2|\operatorname{Im} \nu(-\xi)|}), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) > 0, \\ O(t^{-1} \ln t), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) = 0, \\ O(t^{-1}), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) < 0, \end{cases} \quad (3.91)$$

та

$$R_3(\xi, t) = R_1(\xi, t) + R_2(\xi, t) = \begin{cases} O(t^{-1+2|\operatorname{Im} \nu(-\xi)|}), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) \neq 0, \\ O(t^{-1} \ln t), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) = 0. \end{cases}$$

Зауваження 3.8. Зазначимо, що $\delta(0, \xi) \rightarrow 1$ при $\xi \rightarrow \infty$, і тому асимптотика (3.89b)-(3.89d) погоджується з крайовою умовою (3.3b).

Зауваження 3.9. У випадку початкових даних у вигляді чистої сходінки, тобто $q(x, 0) = 0$ при $x < 0$ та $q(x, 0) = A$ при $x \geq 0$, обидва припущення Теорема 3.1 виконуються. Більше того, у цьому випадку $1 + r_1(k)r_2(k) = \frac{4k^2}{4k^2 + A^2}$, і тому $\text{Im } \nu = 0$ у (3.89).

Зауваження 3.10. Опис перехідної зони між прямолінійними секторами, де $x < 0$ та $x > 0$, залишається відкритою задачею. Наступні міркування показують, що ця задача є досить складною.

1. З точки зору формалізму задачі Рімана-Гільберта, перехідна зона відповідає “злиттю” точки стаціонарної фази $k = -\xi$ із сингулярною точкою $k = 0$; при децю інших умовах на сингулярність, схожа задача розглядається у [64], але якщо адаптація розробленого у [64] підходу і можлива, цей аналіз потребує значних видозмін.
2. Головний асимптотичний член при $x > 0$, $A\delta^2(0, \xi)$, має, взагалі кажучи, зростаючі осциляції при $\xi \rightarrow +0$; лише у дуже спеціальних випадках (які належать лише до Випадку II), де $b(0) = 0$, існує скінченна границя $\delta(0, \xi)$ при $\xi \rightarrow +0$ (див. також Зауваження 3.11).
3. Навіть у найпростішому випадку солітонного розв’язку (3.63), де отримана асимптотика має місце при зростанні $|x|$ разом із t вздовж будь-якого напрямку у секторах $x > 0$ та $x < 0$ (у цьому випадку, ми маємо $\nu \equiv 0$, і тому $\delta(k, \xi) \equiv 1$), на межі $x = 0$ розв’язок має дискретну (відносно t) множину сингулярних точок, див. Підрозділ 3.1.4.

Зауваження 3.11. У випадку початкових даних $q_0(x)$, для яких $b(0) = 0$, асимптотика розв’язку при фіксованому $x = x_0 \in \mathbb{R}$ (що відповідає $\xi \rightarrow 0$) має вигляд:

$$q(x_0, t) = \frac{2iAk_1^2 \dot{a}_1(ik_1) \delta^2(ik_1, 0) \exp\{2\hat{\chi}_1\}}{2ik_1^2 \dot{a}_1(ik_1) \delta^2(ik_1, 0) - A\gamma_1 \exp\{-2k_1 x_0 - 4ik_1^2 t + 2\hat{\chi}_1\}} + o(1), \quad t \rightarrow \infty \quad (3.92)$$

із

$$\hat{\chi}_1 = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \ln(-\zeta) d\zeta \ln(1 + r_1(\zeta)r_2(\zeta)), \quad (3.93)$$

де x_0 та t такі, що знаменник у (3.92) не дорівнює нулю, тобто

$$\exp\{-2k_1x_0 - 4ik_1^2t\} \neq \frac{2ik_1^2}{A\gamma_1} \dot{a}_1(ik_1) \exp\left\{\frac{k_1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\ln(1 + r_1(\zeta)r_2(\zeta))}{\zeta(\zeta - ik_1)} d\zeta\right\}. \quad (3.94)$$

Дійсно, розв'язок \hat{M}^R регулярної задачі Рімана-Гільберта (3.81) має наступну асимптотику при всіх $\xi \geq 0$:

$$\hat{M}^R(x, t, k) = I + o(1), \quad t \rightarrow \infty, \quad x \geq 0. \quad (3.95)$$

Інтегруючи (3.71) частинами (зазначимо, що $b(0) = 0$ належить до Випадку II), ми отримуємо

$$\delta(0, \xi) \sim \exp\left\{\frac{i}{2\pi} \ln \xi \cdot \ln a_{11}\dot{a}_2(0) + \hat{\chi}_1\right\}, \quad \text{при } \xi \rightarrow +0. \quad (3.96)$$

Крім того, якщо $b(0) = 0$, то $a_{11}\dot{a}_2(0) = 1 - |b(0)|^2 = 1$, і тому $\delta(0, 0) = e^{\hat{\chi}_1}$, з чого випливає, що функція $c_0(\xi)$ (див. (3.79g)) є визначеною коректно при $\xi = 0$. Як наслідок, (3.80a) має місце при всіх $x \geq 0$ та $t > 0$ таких, що $P_{12}(x, t)$ та $P_{21}(x, t)$ (див. (3.82) та (3.83)) мають ненульові знаменники. Обчислюючи $P_{12}(x, t)$ та $P_{21}(x, t)$ у (3.80) та використовуючи (3.95), ми робимо висновок, що при $t \rightarrow \infty$,

$$q(x_0, t) = \frac{2iAk_1^2\dot{a}_1(ik_1)\delta^2(ik_1, 0) \exp\{2\hat{\chi}_1\}}{2ik_1^2\dot{a}_1(ik_1)\delta^2(ik_1, 0) - A\gamma_1 \exp\{-2k_1x_0 - 4ik_1^2t + 2\hat{\chi}_1\}} + o(1), \quad (3.97a)$$

якщо $x_0 \geq 0$,

$$q(x_0, t) = \frac{4k_1^2}{2ik_1^2\gamma_1\dot{a}_1(ik_1)\delta^2(ik_1, 0) \exp\{-2k_1x_0 - 4ik_1^2t\} + A \exp\{2\hat{\chi}_1\}} + o(1), \quad (3.97b)$$

якщо $x_0 < 0$.

Беручи до уваги (3.43), (3.52a), (3.71) та використовуючи рівність $1 + r_1(k)r_2(k) = (1 - b(k)\overline{b(-k)})^{-1}$, ми маємо

$$k_1 \overline{\dot{a}_1(ik_1)\delta^2(ik_1, 0)} = \frac{1}{k_1 \dot{a}_1(ik_1)\delta^2(ik_1, 0)} \quad \text{та} \quad \frac{A \exp\{2\overline{\hat{\chi}_1}\}}{2k_1} = \frac{2k_1}{A \exp\{2\hat{\chi}_1\}},$$

з чого випливає, що формула головного члена у (3.97b) співпадає з (3.97a), і тому ми приходимо до (3.92) при всіх $x_0 \in \mathbb{R}$.

Нарешті, зазначимо, що у випадку, коли $b(k) \equiv 0$, ми маємо $\delta \equiv 1$, $\hat{\chi}_1 = 0$, $k_1 = \frac{A}{2}$, $\dot{a}_1(ik_1) = -\frac{2i}{A}$, і тому головний член у (3.92) зводиться до солітонного розв'язку (3.63).

Схема доведення Теорема 3.1.

Ми розглядаємо випадок, коли $r_j(-\xi) \neq 0$, $j = 1, 2$ (стосовно випадків, коли один з коефіцієнтів $r_j(-\xi)$ (або обидва) дорівнюють нулю, достатньо взяти граничні значення в отриманих виразах, пор. Підрозділ 1.5 Розділу 2 у [46]). З огляду на (3.80), для отримання асимптотики (3.89) достатньо оцінити розв'язок $\hat{M}^R(x, t, k)$ регулярної задачі Рімана-Гільберта (3.81) у $k = 0$, $k = ik_1$ та $k = \infty$. Зазначимо, що ця задача Рімана-Гільберта аналогічна задачі, яка розглядалася у Розділі 2 та у [89], тому далі ми будемо посилалися на результати Розділу 2 стосовно деталей відповідних кроків у асимптотичному аналізі.

По-перше, введемо до розгляду масштабовану змінну z

$$k = \frac{z}{\sqrt{8t}} - \xi, \quad (3.98)$$

у термінах якої

$$e^{2it\theta} = e^{\frac{iz^2}{2} - 4it\xi^2}.$$

Введемо до розгляду “локальний параметрикс” $\hat{m}_0^R(x, t, k)$ як розв'язок задачі Рімана-Гільберта з матрицею стрибка, яка є “спрощеною $\hat{J}^R(x, t, k)$ ” у тому сенсі, що у її конструкції $r_j(k)$, $j = 1, 2$ замінені на константи $r_j(-\xi)$, а $\delta(k, \xi)$ замінена на (пор. з (3.73)) $\delta \simeq \left(\frac{z}{\sqrt{8t}}\right)^{i\nu(-\xi)} e^{\chi(-\xi, \xi)}$. Така задача Рімана-Гільберта може бути розв'язана явно, у термінах функцій параболічного циліндру [58].

Дійсно, $\hat{m}_0^R(x, t, k)$ може бути визначена у такий спосіб:

$$\hat{m}_0^R(x, t, k) = \Delta(\xi, t)m^\Gamma(\xi, z(k))\Delta^{-1}(\xi, t), \quad (3.99)$$

де

$$\Delta(\xi, t) = e^{(2it\xi^2 + \chi(-\xi, \xi))\sigma_3} (8t)^{-\frac{i\nu(-\xi)}{2}\sigma_3}, \quad (3.100)$$

а $m^\Gamma(\xi, z)$ визначається у термінах матриці $m_0(\xi, z)$

$$m^\Gamma(\xi, z) = m_0(\xi, z)D_j^{-1}(\xi, z), \quad z \in \Omega_j, \quad j = 0, \dots, 4, \quad (3.101)$$

див. Рисунок 3.3, де γ_j відповідає $\hat{\gamma}_j$ у відповідності до (3.98). Тут $D_0(\xi, z) = e^{-i\frac{z^2}{4}\sigma_3} z^{i\nu(-\xi)\sigma_3}$,

$$D_1(\xi, z) = D_0(\xi, z) \begin{pmatrix} 1 & \frac{r_2^R(-\xi)}{1+r_1^R(-\xi)r_2^R(-\xi)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(\xi, z) = D_0(\xi, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r_1^R(-\xi) & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_3(\xi, z) = D_0(\xi, z) \begin{pmatrix} 1 & -r_2^R(-\xi) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_4(\xi, z) = D_0(\xi, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-r_1^R(-\xi)}{1+r_1^R(-\xi)r_2^R(-\xi)} & 1 \end{pmatrix},$$

із

$$r_1^R(k) = \frac{k - ik_1}{k} r_1(k), \quad r_2^R(k) = \frac{k}{k - ik_1} r_2(k).$$

У свою чергу, матриця $m_0(\xi, z)$ є розв'язком наступної задачі Рімана-Гільберта у z -площині (відносно \mathbb{R}), із постійною матрицею стрибка:

$$\begin{cases} m_{0+}(\xi, z) = m_{0-}(\xi, z)j_0(\xi), & z \in \mathbb{R}, \\ m_0(\xi, z) = (I + O(1/z)) e^{-i\frac{z^2}{4}\sigma_3} z^{i\nu(-\xi)\sigma_3}, & z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3.102)$$

де

$$j_0(\xi) = \begin{pmatrix} 1 + r_1^R(-\xi)r_2^R(-\xi) & r_2^R(-\xi) \\ r_1^R(-\xi) & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.103)$$

Ця задача Рімана-Гільберта для $m_0(\xi, z)$ може бути розв'язана явно у термінах функцій параболічного циліндру, див. Підрозділ 2.2.3. Зважаючи на те, що ми зацікавлені у поведінці при великих значеннях t , від функції $m_0(\xi, z)$ (і, відповідно, від $m^\Gamma(\xi, z)$) нам потрібна лише її асимптотика при

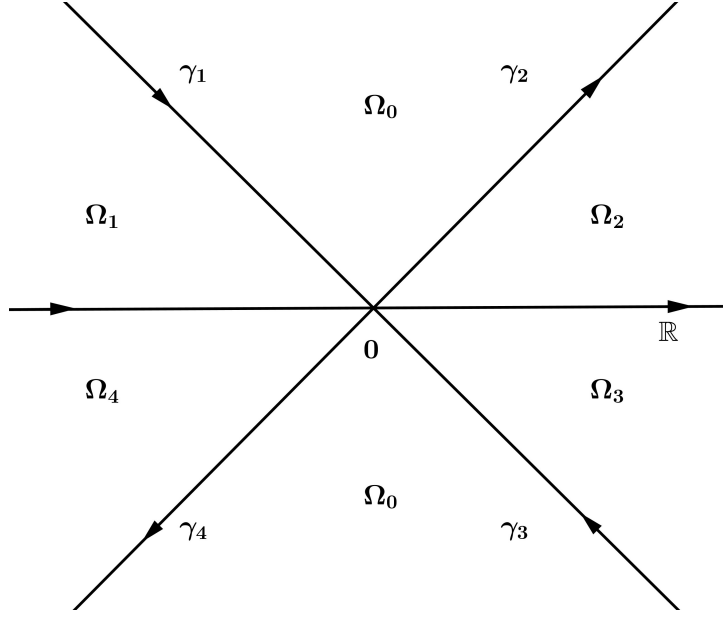


Рис. 3.3: Контур та області для $m^\Gamma(\xi, z)$ у z -площині.

великих z (з огляду на (3.98), навіть скінченні значення k відповідають великим значенням z , якщо t велике), яка має вигляд

$$m^\Gamma(\xi, z) = I + \frac{i}{z} \begin{pmatrix} 0 & \beta^R(\xi) \\ -\gamma^R(\xi) & 0 \end{pmatrix} + O(z^{-2}), \quad z \rightarrow \infty,$$

де (пор. з $\beta(\xi)$ та $\gamma(\xi)$, визначеними відповідно у (2.63) та (2.64))

$$\beta^R(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\pi}{2}\nu(-\xi)} e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{r_1^R(-\xi) \Gamma(-i\nu(-\xi))}, \quad (3.104a)$$

$$\gamma^R(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\pi}{2}\nu(-\xi)} e^{-\frac{\pi i}{4}}}{r_2^R(-\xi) \Gamma(i\nu(-\xi))}. \quad (3.104b)$$

Тепер, визначивши параметрикс $\hat{m}_0^R(x, t, k)$, визначимо $\check{M}^R(x, t, k)$ (пор. з $\hat{m}(x, t, k)$ у (2.48)) у такий спосіб:

$$\check{M}^R(x, t, k) = \begin{cases} \hat{M}^R(x, t, k) (\hat{m}_0^R)^{-1}(x, t, k), & |k + \xi| < \varepsilon, \\ \hat{M}^R(x, t, k), & |k + \xi| > \varepsilon, \end{cases}$$

де ε настільки мале, що $|\xi| > \varepsilon$ та $|ik_1 + \xi| > \varepsilon$. Кусково-аналітична матриця \check{M}^R має наступний стрибок вздовж $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma} \cup \{|k + \xi| = \varepsilon\}$ (коло $|k + \xi| = \varepsilon$

орієнтоване проти годинникової стрілки)

$$\check{J}^R(x, t, k) = \begin{cases} \hat{m}_{0-}^R(x, t, k) \hat{J}^R(x, t, k) (\hat{m}_{0+}^R)^{-1}(x, t, k), & k \in \hat{\Gamma}, |k + \xi| < \varepsilon, \\ (\hat{m}_0^R)^{-1}(x, t, k), & |k + \xi| = \varepsilon, \\ \hat{J}^R(x, t, k), & \text{на інших частинах } \hat{\Gamma}_1. \end{cases} \quad (3.105)$$

Наступний крок полягає у обчисленні функції $\check{M}^R(x, t, k)$ при великих значеннях t , використовуючи її зображення у термінах розв'язку сингулярного інтегрального рівняння, яке відповідає задачі Рімана-Гільберта, визначеної умовою стрибка (3.105) та стандартною умовою нормування $\check{M}^R \rightarrow I$ при $k \rightarrow \infty$. Ми маємо

$$\check{M}^R(x, t, k) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\Gamma}_1} \mu(x, t, s) (\check{J}^R(x, t, s) - I) \frac{ds}{s - k}, \quad (3.106)$$

де μ є розв'язком інтегрального рівняння $\mu - C_w \mu = I$, із $w = \check{J}^R - I$. Тут оператор типу Коші C_w визначається як $C_w f = C_-(fw)$, де $(C_-h)(k)$, $k \in \hat{\Gamma}_1$ є недотичні граничні значення справа (відповідно до орієнтації $\hat{\Gamma}_1$)

$$(Ch)(k') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\Gamma}_1} \frac{h(s)}{s - k'} ds, \quad k' \in \mathbb{C} \setminus \hat{\Gamma}_1.$$

Міркуючи як у Підрозділі 2.2.3, можна показати, що головний член у асимптотиці при великих значеннях t матриці \check{M}^R у (3.106) дається інтегралом вздовж кола $|s + \xi| = \varepsilon$, звідки

$$\check{M}^R(x, t, k) = I - \frac{1}{2\pi i} \int_{|s+\xi|=\varepsilon} \frac{\tilde{B}^R(\xi, t)}{(s + \xi)(s - k)} ds + R(\xi, t), \quad |k + \xi| > \varepsilon, \quad (3.107)$$

де

$$\tilde{B}^R(\xi, t) = \begin{pmatrix} 0 & i\beta^R(\xi) e^{4it\xi^2 + 2\chi(-\xi, \xi)} (8t)^{-\frac{1}{2} - i\nu(-\xi)} \\ -i\gamma^R(\xi) e^{-4it\xi^2 - 2\chi(-\xi, \xi)} (8t)^{-\frac{1}{2} + i\nu(-\xi)} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.108)$$

а залишок R має матричну структуру $R(\xi, t) = \begin{pmatrix} R_1(\xi, t) & R_2(\xi, t) \\ R_1(\xi, t) & R_2(\xi, t) \end{pmatrix}$, із R_1 та R_2 , які мають, взагалі кажучи, різні порядки прямування до нуля, див. (3.90)

та (3.91). Зокрема, з того, що $\check{M}^R = \hat{M}^R$ при всіх k таких, що $|k + \xi| > \varepsilon$, ми отримуємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\hat{M}^R(x, t, k) - I \right) = \tilde{B}^R(\xi, t) + R(\xi, t), \quad (3.109)$$

а також

$$\hat{M}^R(x, t, 0) = I + \frac{\tilde{B}^R(\xi, t)}{\xi} + R(\xi, t), \quad (3.110a)$$

$$\hat{M}^R(x, t, ik_1) = I + \frac{\tilde{B}^R(\xi, t)}{\xi + ik_1} + R(\xi, t). \quad (3.110b)$$

Тепер ми можемо обчислити функції $P_{12}(x, t)$ та $P_{21}(x, t)$ у (3.80). Спершу ми обчислимо функції $g_j(x, t)$ та $h_j(x, t)$, $j = 1, 2$, які визначені у (3.83), використовуючи (3.110) та змінюючи \hat{M}^R на \check{M}^R :

$$g_1(x, t) = ik_1 + R_1(\xi, t), \quad g_2(x, t) = \frac{ik_1}{\xi + ik_1} \tilde{B}_{21}^R(\xi, t) + R_1(\xi, t),$$

$$h_1(x, t) = c_0(\xi) + \frac{ik_1}{\xi} \tilde{B}_{12}^R(\xi, t) + R_3(\xi, t), \quad h_2(x, t) = ik_1 + \frac{c_0(\xi)}{\xi} \tilde{B}_{21}^R(\xi, t) + R_3(\xi, t),$$

де $R_3(\xi, t) = R_1(\xi, t) + R_2(\xi, t)$ (ми використали стандартні позначення для елементів матриці $\tilde{B}^R(\xi, t)$). Із цього випливає, що (опускаючи аргументи функцій)

$$g_1 h_1 = ik_1 c_0(\xi) - \frac{k_1^2}{\xi} \tilde{B}_{12}^R + R_3, \quad g_1 h_2 = -k_1^2 + \frac{ik_1 c_0(\xi)}{\xi} \tilde{B}_{21}^R + R_3, \quad (3.111a)$$

$$g_2 h_1 = \frac{ik_1 c_0(\xi)}{\xi + ik_1} \tilde{B}_{21}^R + R_1, \quad g_2 h_2 = -\frac{k_1^2}{\xi + ik_1} \tilde{B}_{21}^R + R_1. \quad (3.111b)$$

Підставляючи (3.111) у (3.82), отримуємо

$$P_{12}(x, t) = -\frac{ic_0(\xi)}{k_1} + \frac{\tilde{B}_{12}^R(\xi, t)}{\xi} + \frac{ic_0(\xi)^2}{\xi k_1 (\xi + ik_1)} \tilde{B}_{21}^R(\xi, t) + R_3(\xi, t), \quad (3.112a)$$

$$P_{21}(x, t) = -\frac{\tilde{B}_{21}^R(\xi, t)}{\xi + ik_1} + R_1(\xi, t). \quad (3.112b)$$

Зазначимо, що формули (3.112) включають в себе k_1 у явному вигляді. Але, використовуючи рівняння

$$\tilde{B}_{12}^R = \tilde{B}_{12} \frac{\xi}{\xi + ik_1}, \quad \tilde{B}_{21}^R = \tilde{B}_{21} \frac{\xi + ik_1}{\xi},$$

де \tilde{B} визначена аналогічно \tilde{B}^R , див. (3.104) та (3.108), де $r_j^R(-\xi)$ замінені на $r_j(-\xi)$, та підставляючи (3.109) та (3.112) у (3.80), ми отримуємо, що (явна) залежність від k_1 у головних членів асимптотичної формули зникає, і асимптотика набуває вигляду (3.89).

3.3 Висновки до Розділу 3

У цьому Розділі розглядається початкова задача для фокусуєчого нелокального нелінійного рівняння Шредінгера на ступінчастому фоні. Для цієї задачі був розроблений метод оберненої задачі розсіювання у формі задачі Рімана-Гільберта, яка у цьому випадку має сингулярності на контурі задачі. Були досліджені основні властивості спектральних функцій, які принципово відрізняються від випадку ступінчастої задачі для фокусуєчого класичного нелінійного рівняння Шредінгера (дивись Підрозділ 3.1). Зокрема, спектральні функції мають інші симетрії та аналітичні властивості (див. Твердження 3.2 та 3.3). Нарешті, у Підрозділі 3.1.4 був отриманий односолітонний розв'язок методом множників Бляшке-Поталова.

Асимптотичний аналіз розв'язку вихідної задачі Рімана-Гільберта проводиться методом Дейфта-Жу (див. Підрозділ 3.2). Виявилось, що асимптотика розв'язку у даному випадку якісно відрізняється від асимптотики відповідної ступінчастої задачі для класичного фокусуєчого нелінійного рівняння Шредінгера: у випадку ННРШ, немає прямолінійного перехідного сектору між спадаючою зоною та зоною “модуляційної константи” (див. Теорему 3.1), у той час коли у випадку НРШ, ця зона завжди існує і описується у термінах еліптичних функцій.

Розділ 4

Дефокусуєче нелокальне нелінійне рівняння Шредінгера з початковим даним типу зміщеної сходинки

Результати цього Розділу опубліковані у роботі [91].

У цьому розділі ми розглядаємо задачу Коші для дефокусуєчого нелокального нелінійного рівняння Шредінгера з початковим даним типу сходинки [91]:

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) - 2q^2(x, t)\bar{q}(-x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (4.1a)$$

$$q(x, 0) = q_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.1b)$$

(що відповідає $\sigma = -1$ у (2.1a)), де ми припускаємо, що початкове дане $q_0(x)$ (та відповідно розв'язок $q(x, t)$ при $t \geq 0$) задовольняють таким самим крайовим умовам, як і у Розділі 3, див. (3.1c) та (3.3):

$$q_0(x) \rightarrow \begin{cases} 0, & x \rightarrow -\infty, \\ A, & x \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4.1c)$$

та

$$q(x, t) \rightarrow \begin{cases} 0, & x \rightarrow -\infty, \\ A, & x \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4.2)$$

з деяким $A > 0$, де прямування до крайових умов є достатньо швидким.

На відміну від попереднього Розділу, тут ми будемо мати справу з початковим даним типу “зміщеної ступінчастої функції” $q_{R,A}(x)$ [91]:

$$q_{R,A}(x) = \begin{cases} 0, & x < R, \\ A, & x > R, \end{cases} \quad (4.3)$$

де $A > 0$ та $R > 0$ є константами. Зазначимо, що у випадку локальних інтегровних рівнянь, які є трансляційно інваріантними (наприклад, класичне нелінійне рівняння Шредінгера [27]), ясно, що асимптотика за великим часом розв’язку початкової задачі з початковими даними (4.3) вздовж промінів $\frac{x}{4t} = \text{const}$ не залежить від R . Але у випадку нелокального рівняння, ситуація, очевидно, зовсім інша: нелокальний член миттєво “переміщує” стан системи у точках x та $-x$, і тому ми очікуємо різну асимптотичну поведінку для різних R . Точніше, якщо $\frac{(n-1)\pi}{A} < R < \frac{n\pi}{A}$ при деякому $n \in \mathbb{N}$, або якщо початкове дане таке, що відповідні спектральні функції задовольняють умовам Теорема 4.1 (які виконуються для $q_{R,A}(x)$ з параметрами, які задовольняють нерівності вище), то має місце наступний результат:

Теорема 4.1. *Якщо виконуються Припущення (a)–(c), див. Підрозділ 4.1.3, на спектральні функції, відповідні початковим даним $q_0(x)$, розв’язок початкової задачі (4.1), (4.2) має $4n$ якісно різних асимптотичних секторів при $t \rightarrow +\infty$, які визначаються певними діапазонами зміни значень $\xi = \frac{x}{4t}$:*

$$q(x, t) = \begin{cases} A\delta^2(0, \xi) \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\xi}{p_{n-s}} \right)^2 + o(1), & -\operatorname{Re} p_{n-m} < \xi < \omega_{n-m}, \\ o(1), & -\omega_{n-m} < \xi < \operatorname{Re} p_{n-m}, \\ \frac{4\bar{p}_{n-m}^2}{A\bar{\delta}^2(0, -\xi)} \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\bar{p}_{n-s}}{\xi} \right)^2 + o(1), & \operatorname{Re} p_{n-m} < \xi < -\omega_{n-m-1}, \\ o(1), & \omega_{n-m-1} < \xi < -\operatorname{Re} p_{n-m}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Тут $m = \overline{0, n-1}$, $\omega_0 = 0$, $\omega_n = +\infty$, функція $\delta(0, \xi)$ та числа $\{p_j\}_1^n$ і

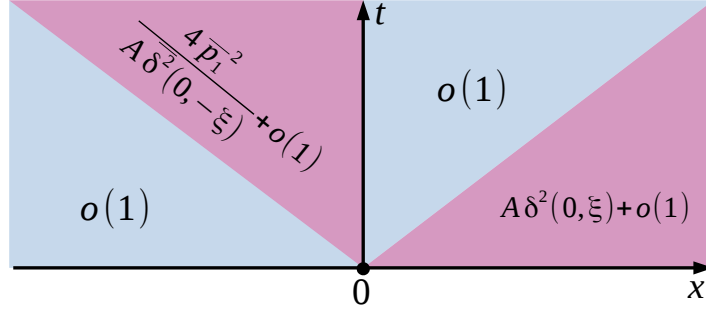


Рис. 4.1: Асимптотична поведінка розв'язку задачі (4.1), (4.2), яка задовольняє Припущенням (а)–(с) з $n = 1$.

$\{\omega_j\}_1^{n-1}$ ($p_j \in \mathbb{C}$ із $\text{Im } p_j > 0$ та $\omega_j \in \mathbb{R}$), які задовольняють нерівностям

$$-\infty < \text{Re } p_n < -\omega_{n-1} < \text{Re } p_{n-1} < -\omega_{n-2} < \dots < \text{Re } p_1 < 0,$$

визначені у термінах спектральних функцій, відповідних початковим даним $q_0(x)$, див. (4.49) та Припущення (а)–(с). Зокрема, у випадку $n = 1$, головні асимптотичні члени відображені на Рисунку 4.1.

Зазначимо, що у випадку ступінчастої задачі для класичного дефокусуєчого НРШ, асимптотика налічує п'ять різних прямолінійних областей: одна “нульова” область (у якій розв'язок спадає до 0) та чотири різні “ненульові” сектори [21, 60, 42].

Наш основний результат у цьому Розділі – уточнення асимптотики (4.4), яке включає другий член асимптотики та явно виписаний головний спадаючий член у відповідних секторах, див. Теорему 4.2.

Цей розділ організовано у такий спосіб. У Підрозділі 4.1 ми розробляємо метод оберненої задачі розсіювання для задачі Коші (4.1) у формі задачі Рімана-Гільберта та вивчаємо властивості спектральних функцій, що відповідають початковим даним. Окрему увагу ми приділяємо випадку “зміщеного ступінчастого початкового даного”, тобто випадку, коли $q(x, 0) = q_{R,A}(x)$: це дає можливість вивчити певні властивості відпо-

відних спектральних функцій, які ми потім будемо застосовувати у якості припущень у загальному випадку. Асимптотичний аналіз відповідної задачі Рімана-Гільберта та основний результат Розділу (Теорема 4.2) представлені у Підрозділі 4.2, а у Підрозділі 4.3 ми коротко обговорюємо асимптотику у перехідних зонах.

4.1 Метод оберненої задачі розсіювання та задача Рімана-Гільберта

Впровадження підходу задачі Рімана-Гільберта для ступінчастих задач для локального нелінійного рівняння Шредінгера сильно відрізняється у фокусуєчому і дефокусуєчому випадку через те, зокрема, що спектр відповідних диференціальних операторів (з пари Лакса) є якісно різним: у дефокусуєчому випадку, весь спектр лежить на дійсній прямій, у той час коли у фокусуєчому випадку, частина (неперервного) спектру лежить поза дійсної прямої. З цього приводу ми зазначимо, що фокусуєчий і дефокусуєчий варіанти нелокального нелінійного рівняння Шредінгера більш близькі один до одного. У наступному підрозділі представлено результати прямого перетворення розсіювання як для фокусуєчого (дивись Підрозділи (3.1.1) та (3.1.2)), так і для дефокусуєчого випадків.

4.1.1 Пряме перетворення розсіювання

Як було зазначено вище, нелокальне нелінійне рівняння Шредінгера є умовою сумісності системи двох лінійних диференціальних рівнянь (пари Лакса) (2.2)–(2.4). Беручи до уваги крайові умови (4.2) і припускаючи, що розв'язок $q(x, t)$ задачі (4.1) існує, ми робимо висновок, що матриці $U(x, t)$ та $V(x, t, k)$ прямують до наступних постійних (відносно x та t) матриць:

$$U(x, t) \rightarrow U_{\pm} \text{ та } V(x, t, k) \rightarrow V_{\pm}(k), \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty, \quad (4.5)$$

де

$$U_+ = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, U_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sigma A & 0 \end{pmatrix}, V_+(k) = \begin{pmatrix} 0 & 2kA \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V_-(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2\sigma kA & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Система (2.2) залишається сумісною, коли U та V замінюються на U_+ , V_+ або U_- , V_- , що дозволяє (подібно до Розділу 3) ввести розв'язки Φ_{\pm} відповідних систем:

$$\Phi_{\pm}(x, t, k) = N_{\pm}(k)e^{-(ikx+2ik^2t)\sigma_3}, \quad (4.7)$$

де $N_+(k) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{A}{2ik} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N_-(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sigma A}{2ik} & 1 \end{pmatrix}$. Подібно випадку фокусууючого ННРШ (див. Розділ 3 та [90]), $N_{\pm}(k)$ мають сингулярності при $k = 0$, які грають значну роль у конструкції вихідної задачі Рімана-Гільберта та її подальшому асимптотичному аналізі.

Визначимо 2×2 матричні функції $\Psi_j(x, t, k)$, $j = 1, 2$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ як розв'язки інтегральних рівнянь Вольтерра, подібних до (3.12), де $N_{\pm}(k)$ у загальному випадку $\sigma = \pm 1$ наведені вище:

$$\Psi_1(x, t, k) = N_-(k) + \int_{-\infty}^x G_-(x, y, k) (U(y, t) - U_-) \Psi_1(y, t, k) e^{ik(x-y)\sigma_3} dy, \quad (4.8a)$$

$$\Psi_2(x, t, k) = N_+(k) - \int_x^{\infty} G_+(x, y, k) (U(y, t) - U_+) \Psi_2(y, t, k) e^{ik(x-y)\sigma_3} dy, \quad (4.8b)$$

де

$$G_{\pm}(x, y, k) = \Phi_{\pm}(x, t, k)[\Phi_{\pm}(y, t, k)]^{-1}, \quad (4.9)$$

Як і у Розділі 3, стовпчики цих функцій грають ключову роль у визначенні вихідної задачі Рімана-Гільберта. Матриці $\Psi_j(x, t, k)$, $j = 1, 2$ мають властивості $(i) - (v)$, описані у Твердженні 3.1 із $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а стосовно пункту

(vi), стовпчики цих матриць мають наступну поведінку при $k \rightarrow 0$:

$$\Psi_1^{(1)}(x, t, k) = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix} + O(1), \quad (4.10a)$$

$$\Psi_1^{(2)}(x, t, k) = \frac{2i\sigma}{A} \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix} + O(k), \quad (4.10b)$$

$$\Psi_2^{(1)}(x, t, k) = -\frac{2i}{A} \begin{pmatrix} \sigma \bar{v}_2(-x, t) \\ \bar{v}_1(-x, t) \end{pmatrix} + O(k), \quad (4.10c)$$

$$\Psi_2^{(2)}(x, t, k) = -\frac{1}{k} \begin{pmatrix} \sigma \bar{v}_2(-x, t) \\ \bar{v}_1(-x, t) \end{pmatrix} + O(1), \quad (4.10d)$$

де $v_1(x, t)$ та $v_2(x, t)$ є деякими (не визначеними у термінах початкових даних) функціями.

Дійсно, зі структури сингулярності $N_{\pm}(k)$ при $k \rightarrow 0$ та визначення (4.8) матричних функцій $\Psi_j(x, t, k)$, $j = 1, 2$ випливає, що при $k \rightarrow 0$ (пор. з (3.18)),

$$\Psi_1^{(1)}(x, t, k) = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix} + O(1), \quad \Psi_1^{(2)}(x, t, k) = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1(x, t) \\ \tilde{v}_2(x, t) \end{pmatrix} + O(k), \quad (4.11a)$$

$$\Psi_2^{(1)}(x, t, k) = \begin{pmatrix} \tilde{w}_1(x, t) \\ \tilde{w}_2(x, t) \end{pmatrix} + O(k), \quad \Psi_2^{(2)}(x, t, k) = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} w_1(x, t) \\ w_2(x, t) \end{pmatrix} + O(1). \quad (4.11b)$$

Тоді, зі співвідношення симетрії (3.15) із $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ випливає, що

$$\begin{pmatrix} w_1(x, t) \\ w_2(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma \bar{v}_2(-x, t) \\ -\bar{v}_1(-x, t) \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{pmatrix} \tilde{w}_1(x, t) \\ \tilde{w}_2(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{v}_2(-x, t) \\ \sigma \bar{v}_1(-x, t) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Далі, підставляючи (4.11a) у (4.8a), ми приходимо до висновку, що $\{v_1(x, t), v_2(x, t)\}$ задовольняють систему інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} v_1(x, t) = \int_{-\infty}^x q(y, t) v_2(y, t) dy, \\ v_2(x, t) = -i\sigma \frac{A}{2} - \sigma \int_{-\infty}^x \overline{q(-y, t)} v_1(y, t) dy, \end{cases} \quad (4.13)$$

а $\{\tilde{v}_1(x, t), \tilde{v}_2(x, t)\}$ є розв'язком наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} \tilde{v}_1(x, t) = \int_{-\infty}^x q(y, t) \tilde{v}_2(y, t) dy, \\ \tilde{v}_2(x, t) = 1 - \sigma \int_{-\infty}^x \overline{q(-y, t)} \tilde{v}_1(y, t) dy. \end{cases} \quad (4.14)$$

Порівнюючи (4.13) із (4.14), ми отримуємо, що

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_1(x, t) \\ \tilde{v}_2(x, t) \end{pmatrix} = \frac{2i\sigma}{A} \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix}.$$

Як і в Розділі 3, розв'язки Йюста $\Phi_j(x, t, k) = \Psi_j(x, t, k)e^{-(ikx+2ik^2t)\sigma_3}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $j = 1, 2$ пов'язані між собою матрицею розсіювання $S(k)$:

$$\Phi_1(x, t, k) = \Phi_2(x, t, k)S(k), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (4.15)$$

або, у термінах $\Psi_j(x, t, k)$, $j = 1, 2$,

$$\Psi_1(x, t, k) = \Psi_2(x, t, k)e^{-(ikx+2ik^2t)\sigma_3} S(k) e^{(ikx+2ik^2t)\sigma_3}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4.16)$$

В силу симетрії (3.15) із $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, матриця $S(k)$ може бути записана у вигляді (пор. з (3.25)):

$$S(k) = \begin{pmatrix} a_1(k) & -\sigma \overline{b(-k)} \\ b(k) & a_2(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (4.17)$$

де (спектральні) функції $a_j(k)$, $j = 1, 2$ задовольняють умову симетрії $\overline{a_j(-\bar{k})} = a_j(k)$, $j = 1, 2$.

Підсумуємо властивості спектральних функцій $b(k)$ та $a_j(k)$, $j = 1, 2$ у наступному Твердженні (порі. з (3.2); зокрема, Пункт 5 нижче впливає з (4.10)):

Твердження 4.1. *Спектральні функції $b(k)$, $a_j(k)$, $j = 1, 2$, мають наступні властивості*

1. $a_1(k)$ аналітична при $k \in \mathbb{C}^+$ та неперервна у $\overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}$; $a_2(k)$ аналітична при $k \in \mathbb{C}^-$ та неперервна у $\overline{\mathbb{C}^-}$.

2. $a_j(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right)$, $j = 1, 2$ та $b(k) = O\left(\frac{1}{k}\right)$ при $k \rightarrow \infty$ (останнє має місце при $k \in \mathbb{R}$).
3. $\overline{a_1(-\bar{k})} = a_1(k)$, $k \in \overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}$; $\overline{a_2(-\bar{k})} = a_2(k)$, $k \in \overline{\mathbb{C}^-}$.
4. $a_1(k)a_2(k) + \sigma b(k)\overline{b(-k)} = 1$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (випливає з $\det S(k) = 1$).
5. При $k \rightarrow 0$, $a_1(k) = \sigma \frac{A^2 a_2(0)}{4k^2} + O\left(\frac{1}{k}\right)$ та $b(k) = \sigma \frac{A a_2(0)}{2ik} + O(1)$.

4.1.2 Спектральні функції для початкового даного типу “зміщеної сходнки”

З цього моменту ми будемо мати справу з дефокусуючим ННРШ ($\sigma = -1$). Почнемо з аналітичних міркувань, які відносяться до випадку чистої сходнки (4.3) і які мотивують загальні припущення щодо початкових даних (властивостей спектральних функцій), наведені нижче.

Спектральні функції, які відповідають початковим даним $q_0(x) = q_{R,A}(x)$, мають вигляд

$$a_1(k) = 1 - \frac{A^2}{4k^2} e^{4ikR}, \quad (4.18a)$$

$$a_2(k) = 1, \quad (4.18b)$$

$$b(k) = -\frac{A}{2ik} e^{2ikR}. \quad (4.18c)$$

Дійсно, матриця розсіювання $S(k)$ може бути отримана із (4.16) при $x = -R$ та $t = 0$:

$$S(k) = e^{-ikR\sigma_3} \Psi_2^{-1}(-R, 0, k) \Psi_1(-R, 0, k) e^{ikR\sigma_3}. \quad (4.19)$$

З (4.8) при $t = 0$ випливає, що

$$\Psi_1(-R, 0, k) = N_-(k), \quad (4.20a)$$

$$\Psi_2(-R, 0, k) = N_+(k) - \int_{-R}^R G_+(-R, y, k) \begin{pmatrix} 0 & -A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi_2(y, 0, k) e^{-ik(R+y)\sigma_3} dy, \quad (4.20b)$$

де $\Psi_2(x, 0, k)$ при $x \in [-R, R]$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$\Psi_2(x, 0, k) = N_+(k) - \int_x^R G_+(x, y, k) \begin{pmatrix} 0 & -A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi_2(y, 0, k) e^{ik(x-y)\sigma_3} dy, \quad (4.21)$$

де $x \in [-R, R]$. З визначення G_+ (див. (4.9)) випливає, що

$$G_+(x, y, k) = \begin{pmatrix} e^{-ik(x-y)} & \frac{A}{2ik} (e^{ik(x-y)} - e^{-ik(x-y)}) \\ 0 & e^{ik(x-y)} \end{pmatrix},$$

і прямий розрахунок дає розв'язок рівняння (4.21) у вигляді

$$\Psi_2(x, 0, k) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{A}{2ik} e^{2ik(R-x)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in [-R, R]. \quad (4.22)$$

Підставляючи (4.20) та (4.22) у (4.19), ми отримуємо (4.18).

Тепер проаналізуємо розташування нулів функції $a_1(k)$ у $\overline{\mathbb{C}^+}$ та поведінку її аргументу при $k \in \mathbb{R}$.

Твердження 4.2. (i) При $\frac{(n-1)\pi}{A} < R < \frac{n\pi}{A}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_1(k)$ має наступні властивості:

- $a_1(k)$ має $2n$ простих нулів у $\overline{\mathbb{C}^+}$: $\{p_j, -\bar{p}_j\}_{j=1}^n$. Тут $\{\operatorname{Re} p_j\}_{j=1}^n$ – упорядкована множина розв'язків рівнянь

$$k = \pm \frac{A}{2} \cos(2kR) e^{-2kR \tan(2kR)}, \quad (4.23)$$

які розглядаються при $k < 0$, причому $\operatorname{Im} p_j$ та $\operatorname{Re} p_j$ пов'язані між собою:

$$\operatorname{Im} p_j = \operatorname{Re} p_j \tan(2 \operatorname{Re} p_j R), \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.24)$$

Зазначимо, що

$$\operatorname{Re} p_j \in \left(-\frac{(2j-1)\pi}{4R}, -\frac{(j-1)\pi}{2R} \right), \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.25)$$

Поведінка дійсних та уявних частин нулів p_j при збільшенні R показана на Рисунок 4.2.

- Визначимо ω_j , $j = \overline{0, n}$ у такий спосіб: $\omega_0 = 0$, $\omega_j = \frac{j\pi}{2R}$ де $j = \overline{1, n-1}$, та $\omega_n = \infty$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{-\omega_{n-j}} d \arg a_1(k) = (2j-1)\pi, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad (4.26a)$$

$$\int_{-\infty}^{-\xi} d \arg a_1(k) \in ((2j-1)\pi, (2j+1)\pi), j = \overline{0, n-1}, \quad (4.26b)$$

де $-\omega_{n-j} < -\xi < -\omega_{n-j-1}$.

- (ii) Якщо $R = \frac{n\pi}{A}$ для деякого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, тоді $a_1(k)$ має $2n+2$ простих нулів у $\overline{\mathbb{C}^+}$ у $\{\pm \frac{A}{2}, \{p_j, -\bar{p}_j\}_{j=1}^n\}$, де $\operatorname{Re} p_j$ ($j = \overline{1, n}$) є розв'язками (4.23), а $\operatorname{Im} p_j$ визначені за допомогою (4.24).

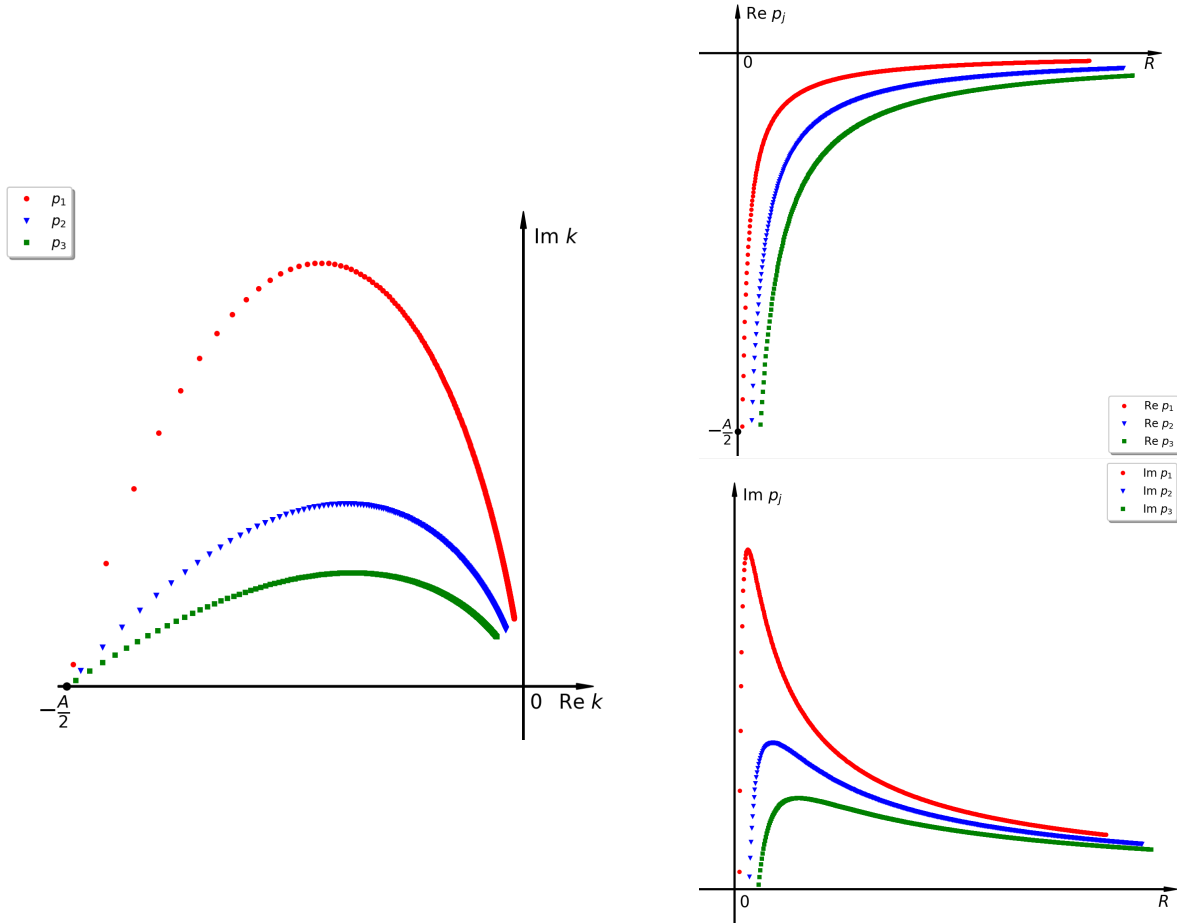


Рис. 4.2: “Еволюція” нулів p_j , $j = 1, 2, 3$, при $R \rightarrow \infty$.

Доведення. Рівняння $a_1(k) = 0$ еквівалентно системі

$$\begin{cases} k_1 = \pm \frac{A}{2} \cos(2k_1 R) e^{-2k_2 R} \\ k_2 = \pm \frac{A}{2} \sin(2k_1 R) e^{-2k_2 R} \end{cases}, \quad (4.27)$$

де $k = k_1 + ik_2$, $k \in \overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}$. Завдяки умові симетрії $a_1(k) = \overline{a_1(-\bar{k})}$, достатньо розглянути (4.27) тільки при $k_1 \geq 0$.

(i) При $k_1 = 0$ ясно, що система (4.27) не має розв'язків, тому $a_1(k)$ не має чисто уявних нулів.

(ii) Припустимо, що $k_2 = 0$. Тоді з другого рівняння у (4.27) випливає, що k_1 має дорівнювати $\frac{\pi n}{2R}$ із деяким $n \in \mathbb{N}$. Але з першого рівняння у (4.27) випливає, що $k_1 = \frac{A}{2}$. Тому $k = \pm \frac{A}{2}$ є простими нулями $a_1(k)$ тоді і тільки тоді, коли існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що $\pi n = AR$. Зазначимо, що у випадку $R = 0$, спектральна функція $a_1(k)$ має рівно два простих нуля, а саме, $\frac{A}{2}$ та $-\frac{A}{2}$.

(iii) Розглянемо питання розташування нулів функції $a_1(k)$ у відкритій чверті площини $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Поділив рівняння у (4.27) одне на одне, ми отримуємо (пор. з (4.24))

$$k_2 = k_1 \tan(2k_1 R), \quad k_1 \neq \frac{\pi(2n+1)}{4R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.28)$$

з чого випливає, що (пор. з (4.25))

$$k_1 \in \left(\frac{(n-1)\pi}{2R}, \frac{(2n-1)\pi}{4R} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.29)$$

Підставляючи (4.28) у перше рівняння (4.27) і беручи до уваги знак $\cos(2k_1 R)$ для k_1 , яке задовольняє (4.29), ми отримуємо рівняння для k_1 :

$$k_1 = \frac{A}{2} \cos(2k_1 R) e^{-2k_1 R \tan(2k_1 R)} \quad \text{при } k_1 \in \left(\frac{(n-1)\pi}{R}, \frac{(4n-3)\pi}{4R} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.30a)$$

або

$$k_1 = -\frac{A}{2} \cos(2k_1 R) e^{-2k_1 R \tan(2k_1 R)} \quad \text{при } k_1 \in \left(\frac{(2n-1)\pi}{2R}, \frac{(4n-1)\pi}{4R} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.30b)$$

В силу того, що права частина у (4.30a) та (4.30b) монотонно спадає відносно k_1 у відповідних інтервалах, при $\frac{(n-1)\pi}{A} < R \leq \frac{n\pi}{A}$ рівняння (4.30) мають n простих розв'язків $\{k_{1,j}\}_{j=1}^n$ у чвертьплощині $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ такі, що $k_{1,j} \in \left(\frac{(j-1)\pi}{2R}, \frac{(2j-1)\pi}{4R}\right)$, $j = \overline{1, n}$ (пор. з (4.25)).

Щодо властивостей “накрутки” аргумента $\arg a_1(k)$, (4.26) впливає з оцінок (при $\frac{(n-1)\pi}{A} < R < \frac{n\pi}{A}$):

$$\frac{A^2}{4k_{(m)}^2} e^{4ik_{(m)}R} < 1 \quad \text{при } k_{(m)} = -\frac{m\pi}{2R}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad m \geq n, \quad (4.31a)$$

$$\frac{A^2}{4k_{(m)}^2} e^{4ik_{(m)}R} > 1 \quad \text{при } k_{(m)} = -\frac{m\pi}{2R}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad m < n. \quad (4.31b)$$

□

Зауваження 4.1. *Якщо розглядати початкові дані у вигляді чистої сходінки $q_{R,A}$, де A зафіксоване, а R змінюється (росте), то значення $R = \frac{n\pi}{A}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ виявляються точками біфуркації: коли R переходить через будь-яке з цих значень, $a_1(k)$ отримує додаткову пару нулів (пор. з [26], Підрозділ 4.1, де розглядалися початкові дані у вигляді п'єдесталу для початкової задачі для дефокусуєчого класичного НРШ з ненульовими крайовими умовами, які ілюструють біфуркацію дискретних власних значень).*

4.1.3 Вихідна задача Рімана-Гільберта та обернене перетворення розсіювання

Як і у випадку фокусуєчого НРШ (див. [90] та Розділ 3), визначимо 2×2 матричну, кусково-мероморфну (відповідно до дійсної прямої) функцію $M(x, t, k)$ наступним чином:

$$M(x, t, k) = \begin{cases} \left(\frac{\Psi_1^{(1)}(x, t, k)}{a_1(k)}, \Psi_2^{(2)}(x, t, k) \right), & k \in \mathbb{C}^+, \\ \left(\Psi_2^{(1)}(x, t, k), \frac{\Psi_1^{(2)}(x, t, k)}{a_2(k)} \right), & k \in \mathbb{C}^-. \end{cases} \quad (4.32)$$

Як і у Розділі 3, зі співвідношення розсіювання (4.16) випливає, що граничні значення $M_{\pm}(x, t, k) = \lim_{k' \rightarrow k, k' \in \mathbb{C}^{\pm}} M(x, t, k')$, $k \in \mathbb{R}$ задовольняють умови

стрибка

$$M_+(x, t, k) = M_-(x, t, k)J(x, t, k), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (4.33)$$

з матрицею стрибка

$$J(x, t, k) = \begin{pmatrix} 1 - r_1(k)r_2(k) & -r_2(k)e^{-2ikx-4ik^2t} \\ r_1(k)e^{2ikx+4ik^2t} & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

де коефіцієнти відбиття $r_j(k)$, $j = 1, 2$ визначаються як

$$r_1(k) := \frac{b(k)}{a_1(k)}, \quad r_2(k) := \frac{\overline{b(-k)}}{a_2(k)}. \quad (4.35)$$

Зазначимо, що з детермінантного відношення (див. Пункт 4 з $\sigma = -1$ у Твердженні 4.1), у дефокусуючому випадку ми маємо

$$1 - r_1(k)r_2(k) = \frac{1}{a_1(k)a_2(k)}. \quad (4.36)$$

Крім того,

$$M(x, t, k) \rightarrow I, \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.37)$$

Беручи до уваги особливості $\Psi_j(x, t, k)$, $j = 1, 2$ та $a_1(k)$ у $k = 0$ (див. (4.10) та Твердження 4.1), отримуємо поведінку $M(x, t, k)$ при $k \rightarrow 0$:

$$M(x, t, k) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{A^2 a_2(0)} v_1(x, t) & \overline{v_2(-x, t)} \\ -\frac{4}{A^2 a_2(0)} v_2(x, t) & -\overline{v_1(-x, t)} \end{pmatrix} (I + O(k)) \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}, \quad k \rightarrow 0, k \in \mathbb{C}^+, \quad (4.38a)$$

$$M(x, t, k) = \frac{2i}{A} \begin{pmatrix} \overline{v_2(-x, t)} & -\frac{v_1(x, t)}{a_2(0)} \\ -\overline{v_1(-x, t)} & -\frac{v_2(x, t)}{a_2(0)} \end{pmatrix} + O(k), \quad k \rightarrow 0, k \in \mathbb{C}^-, \quad (4.38b)$$

де $v_j(x, t)$, $j = 1, 2$ – деякі функції.

Зважаючи на те, що функції v_j не визначаються початковими умовами (4.1b), доцільно виключити їх з опису (сингулярної) поведінки $M(x, t, k)$ при $k \rightarrow 0$ (пор. з (3.56)):

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \in \mathbb{C}^+}} M(x, t, k) \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = M(x, t, -i0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{A}{2i} \\ -\frac{2i}{A} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Властивості $a_j(k)$, $j = 1, 2$ у випадку початкового даного у вигляді “зміщеної сходинки” (див. Твердження 4.2) мотивують нас зробити припущення щодо властивостей спектральних функцій $a_j(k)$, $j = 1, 2$, які відповідають початковим даним, що задовільняють (4.1с).

Припущення:

- (а) $a_1(k)$ має $2n$, $n \in \mathbb{N}$, простих нулів у $\overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}$, $\{p_j\}_{j=1}^n$ та $\{-\bar{p}_j\}_{j=1}^n$, з $\text{Im } p_j > 0$ та $\text{Re } p_n < \dots < \text{Re } p_1 < 0$.
- (б) $a_2(k)$ не має нулів у $\overline{\mathbb{C}^-}$.
- (с) Існують числа $\omega_m > 0$, $m = \overline{1, n-1}$ такі, що

$$-\infty < \text{Re } p_n < -\omega_{n-1} < \text{Re } p_{n-1} < -\omega_{n-2} < \dots < \text{Re } p_1 < 0, \quad (4.40)$$

$$\int_{-\infty}^{-\omega_{n-m}} d \arg (a_1(k)a_2(k)) = (2m-1)\pi, \quad m = \overline{1, n-1}, \quad (4.41a)$$

та

$$\int_{-\infty}^{-\xi} d \arg (a_1(k)a_2(k)) \in ((2m-1)\pi, (2m+1)\pi), \quad -\omega_{n-m} < -\xi < -\omega_{n-m-1},$$

$$m = \overline{0, n-1} \quad (4.41b)$$

(тут ми ввели позначення $\omega_0 = 0$ та $\omega_n = +\infty$).

З конструкції M випливає, що у нулях $a_1(k)$, $M(x, t, k)$ задовольняє наступним умовам на лишки:

$$\text{Res}_{k=p_j} M^{(1)}(x, t, k) = \frac{\eta_j}{\dot{a}_1(p_j)} e^{2ip_j x + 4ip_j^2 t} M^{(2)}(x, t, p_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (4.42a)$$

$$\text{Res}_{k=-\bar{p}_j} M^{(1)}(x, t, k) = \frac{1}{\bar{\eta}_j \dot{a}_1(-\bar{p}_j)} e^{-2i\bar{p}_j x + 4i\bar{p}_j^2 t} M^{(2)}(x, t, -\bar{p}_j), \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.42b)$$

Тут константи η_j , $j = \overline{1, n}$ визначаються початковими даними: $\Psi_1^{(1)}(0, 0, p_j) = \eta_j \Psi_2^{(2)}(0, 0, p_j)$.

Виходячи з аналітичних властивостей M , які представлені вище, зазначимо, що можна *охарактеризувати* M як розв'язок задачі Рімана-Гільберта, дані якої однозначно визначаються початковим даним $q_0(x)$ у термінах відповідних спектральних даних.

Вихідна задача Рімана-Гільберта: За даними $b(k)$, $k \in \mathbb{R}$ та $a_j(k)$, $j = 1, 2$, які задовольняють властивостям 1-5 у Твердженні 4.1 та Припущенням (а)-(с), та константами η_j , $j = \overline{1, n}$, знайти 2×2 матричну, кусково-мероморфну (відносно \mathbb{R}) за k функцію $M(x, t, k)$, яка задовольняє наступні умови:

(1) Умова на стрибок:

$$M_+(x, t, k) = M_-(x, t, k)J(x, t, k), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (4.43)$$

з матрицею стрибка $J(x, t, k)$, яка наведена у (4.34), де $r_j(k)$, $j = 1, 2$ визначені у термінах $b(k)$ та $a_j(k)$, $j = 1, 2$ у (4.35).

(2) Умова на лишки (4.42).

(3) Поведінка при $k \rightarrow 0$: існує границя $M(x, t, -i0)$ функції $M(x, t, k)$, коли $k \rightarrow 0$ та $k \in \mathbb{C}^-$, а поведінка $M(x, t, k)$, коли $k \rightarrow 0$ та $k \in \mathbb{C}^+$, описується формулою (4.39) (так звана *умова на псевдо-лишок* у $k = 0$).

(4) Умова нормування у $k = \infty$:

$$M(x, t, k) = I + O(k^{-1}) \quad \text{рівномірно при } k \rightarrow \infty.$$

Як і у попередніх розділах, припускаючи, що задача Рімана-Гільберта (1)–(4) має розв'язок $M(x, t, k)$, розв'язок вихідної початкової задачі (4.1), (4.2) можемо отримати у вигляді

$$q(x, t) = 2i \lim_{k \rightarrow \infty} k M_{12}(x, t, k), \quad (4.44)$$

або

$$q(-x, t) = 2i \lim_{k \rightarrow \infty} k \overline{M_{21}(x, t, k)}, \quad (4.45)$$

що дозволяє аналізувати розв'язок задачі Рімана-Гільберта тільки при $x \geq 0$.

Зауваження 4.2. *На відміну від локальних інтегровних рівнянь, де нулі деяких спектральних функцій (аналогічних до $a_j(k)$, $j = 1, 2$) відповідають солітонам на визначеному фоні (навіть якщо крайові умови ненульові), для нелокальних рівнянь певна кількість нулів $a_j(k)$, $j = 1, 2$ пов'язана з самим фоном. У цьому розділі ми обмежуємо себе розглядом ситуації без додаткових нулів, не пов'язаних з фоном.*

4.2 Асимптотика за великим часом

У цій частині ми вивчаємо асимптотику за великим часом розв'язку початкової задачі (4.1), (4.2) при виконанні Припущень **(а)**-**(с)**. Для цього ми адаптуємо нелінійний метод перевалу до вихідної задачі Рімана-Гільберта **(1)**-**(4)** (див. Підрозділ 4.1.3).

4.2.1 Факторизації матриці стрибка

Як і у попередніх розділах, ведемо фазову функцію

$$\theta(k, \xi) = 4k\xi + 2k^2, \quad (4.46)$$

де $\xi = \frac{x}{4t}$, у термінах якої матриця стрибка (4.34) (у дефокусуючому випадку) має трикутні факторизації двох типів:

$$J(x, t, k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{r_1(k)e^{2it\theta}}{1-r_1(k)r_2(k)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-r_1(k)r_2(k) & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-r_1(k)r_2(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-r_2(k)e^{-2it\theta}}{1-r_1(k)r_2(k)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.47a)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -r_2(k)e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r_1(k)e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.47b)$$

Для того, щоб позбутися діагонального множника у (4.47a), вводимо скалярну функцію $\delta(k, \xi)$ як розв'язок скалярної задачі Рімана-Гільберта:

$$\delta_+(k, \xi) = \delta_-(k, \xi)(1 - r_1(k)r_2(k)), \quad k \in (-\infty, -\xi), \quad (4.48a)$$

$$\delta(k, \xi) \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.48b)$$

Вона визначається інтегралом типу Коші

$$\delta(k, \xi) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\xi} \frac{\ln(1 - r_1(\zeta)r_2(\zeta))}{\zeta - k} d\zeta \right\}, \quad (4.49)$$

та може бути представлена у вигляді

$$\delta(k, \xi) = (k + \xi)^{i\nu(-\xi)} e^{\chi(k, \xi)}, \quad (4.50)$$

де

$$\chi(k, \xi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\xi} \ln(k - \zeta) d\zeta (1 - r_1(\zeta)r_2(\zeta)), \quad (4.51)$$

та

$$\nu(-\xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln |1 - r_1(-\xi)r_2(-\xi)| - \frac{i}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{-\xi} d \arg(1 - r_1(\zeta)r_2(\zeta)) \right). \quad (4.52)$$

Тепер зазначимо, що з огляду на (4.36) та (4.41b), ми маємо:

$$\operatorname{Im} \nu(-\xi) \in ((m - 1/2), (m + 1/2)) \quad \text{при} \quad -\xi \in (-\omega_{n-m}, -\omega_{n-m-1}), \\ m = \overline{0, n-1}, \quad (4.53a)$$

$$\operatorname{Im} \nu(-\omega_{n-m-1}) = m + 1/2, \quad m = \overline{0, n-2}, \quad (4.53b)$$

що призводить до, взагалі кажучи, сильної сингулярності $\delta(k, \xi)$, див. (4.50).

Введемо

$$\tilde{M}(x, t, k) = M(x, t, k) \delta^{-\sigma_3}(k, \xi). \quad (4.54)$$

Функція $\tilde{M}(x, t, k)$ задовольняє умови стрибка

$$\tilde{M}_+(x, t, k) = \tilde{M}_-(x, t, k) \tilde{J}(x, t, k), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (4.55a)$$

$$\tilde{M}(x, t, k) \rightarrow I, \quad k \rightarrow \infty, \quad (4.55b)$$

з (ми опустили аргументи $\tilde{J}(x, t, k)$)

$$\tilde{J} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{r_1(k)\delta_-^{-2}(k, \xi)}{1-r_1(k)r_2(k)}e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{r_2(k)\delta_+^2(k, \xi)}{1-r_1(k)r_2(k)}e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in (-\infty, -\xi), \\ \begin{pmatrix} 1 & -r_2(k)\delta^2(k, \xi)e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r_1(k)\delta^{-2}(k, \xi)e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix}, & k \in (-\xi, \infty) \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (4.56)$$

Також $\tilde{M}(x, t, k)$ задовольняє умови на лишки

$$\operatorname{Res}_{k=p_j} \tilde{M}^{(1)}(x, t, k) = \frac{\eta_j}{\dot{a}_1(p_j)\delta^2(p_j, \xi)} e^{2ip_j x + 4ip_j^2 t} \tilde{M}^{(2)}(x, t, p_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (4.57a)$$

$$\operatorname{Res}_{k=-\bar{p}_j} \tilde{M}^{(1)}(x, t, k) = \frac{1}{\bar{\eta}_j \dot{a}_1(-\bar{p}_j)\delta^2(-\bar{p}_j, \xi)} e^{-2i\bar{p}_j x + 4i\bar{p}_j^2 t} \tilde{M}^{(2)}(x, t, -\bar{p}_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (4.57b)$$

та умову на псевдо-лишок при $k = 0$:

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \in \mathbb{C}^+}} \tilde{M}(x, t, k) \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \tilde{M}(x, t, -i0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{A}{2i}\delta^2(0, \xi) \\ -\frac{2i}{A\delta^2(0, \xi)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

Крім того, $\tilde{M}(x, t, k)$ є, взагалі кажучи, сингулярною при $k = -\xi$:

$$\tilde{M}_{\pm}(x, t, k) = \left(\tilde{M}_{\pm}(x, t) + O(k + \xi) \right) (k + \xi)^{\operatorname{Im} \nu(-\xi)\sigma_3}, \quad k \rightarrow -\xi, \quad (4.59)$$

де $\det \tilde{M}_{\pm}(x, t) = 1$ для всіх x, t .

Зазначимо, що умови (4.55)–(4.59) визначають задачу Рімана-Гільберта з єдиним розв'язком (якщо він існує) для всіх значень $\operatorname{Im} \nu(-\xi)$.

4.2.2 Перетворення задачі Рімана-Гільберта

Трикутні факторизації (4.56) дають змогу “деформувати” контур задачі Рімана-Гільберта у крест із центром при $k = -\xi$ (дивись Рисунок 4.3), у такий спосіб, що (перетворена) матриця стрибка прямує (при $t \rightarrow \infty$) до одиничної матриці експоненціально швидко поза околу точки $k = -\xi$.

Як і у попередньому розділі, у випадку, коли початкова функція $q_0(x)$ є локальним (зі скінченним носієм) збуренням ступінчастої функції, яка визначається крайовими умовами, коефіцієнти відбиття $r_j(k)$, $j = 1, 2$ є аналітичними (мероморфними), що дозволяє проводити необхідні деформації вихідного контуру у задачі Рімана-Гільберта.

Вводячи позначення $\hat{\Omega}_j$, $j = 0, \dots, 4$ для секторів як на Рисунку 4.3 (зазначимо, що точки $\{p_j\}_1^n$ та $\{-\bar{p}_j\}_1^n$ розташовані у $\hat{\Omega}_0$), визначимо $\hat{M}(x, t, k)$ наступним чином:

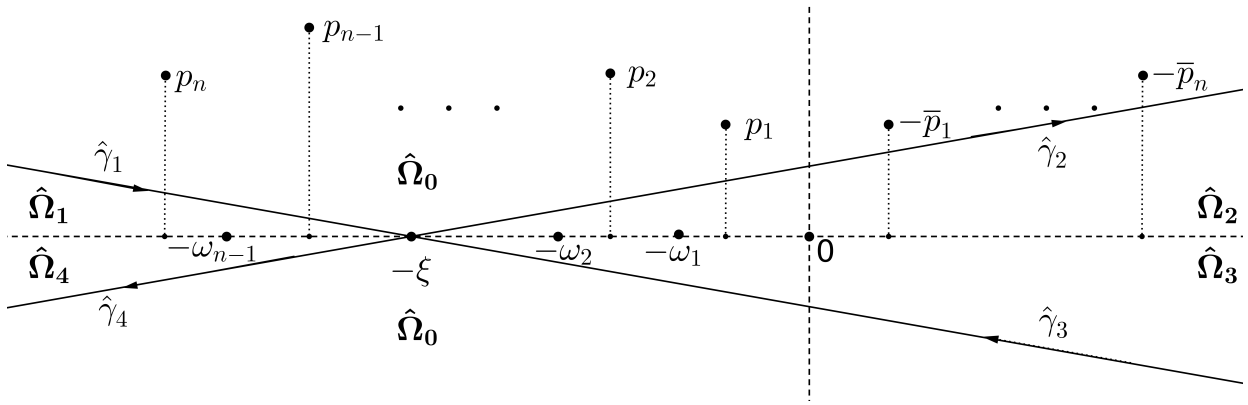


Рис. 4.3: Області $\hat{\Omega}_j$, $j = 0, \dots, 4$ та контур $\hat{\Gamma} = \hat{\gamma}_1 \cup \dots \cup \hat{\gamma}_4$.

$$\hat{M}(x, t, k) = \begin{cases} \tilde{M}(x, t, k), & k \in \hat{\Omega}_0, \\ \tilde{M}(x, t, k) \begin{pmatrix} 1 & \frac{r_2(k)\delta^2(k, \xi)}{1-r_1(k)r_2(k)} e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\Omega}_1, \\ \tilde{M}(x, t, k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r_1(k)\delta^{-2}(k, \xi)e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\Omega}_2, \\ \tilde{M}(x, t, k) \begin{pmatrix} 1 & -r_2(k)\delta^2(k, \xi)e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\Omega}_3, \\ \tilde{M}(x, t, k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{r_1(k)\delta^{-2}(k, \xi)}{1-r_1(k)r_2(k)} e^{2it\theta} & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\Omega}_4. \end{cases} \quad (4.60)$$

Така функція $\hat{M}(x, t, k)$ задовольняє умову на стрибок (вздовж $\hat{\Gamma}$) та нор-

мування

$$\hat{M}_+(x, t, k) = \hat{M}_-(x, t, k)\hat{J}(x, t, k), \quad k \in \hat{\Gamma}, \quad (4.61a)$$

$$\hat{M}(x, t, k) \rightarrow I, \quad k \rightarrow \infty, \quad (4.61b)$$

з матрицею стрибка

$$\hat{J}(x, t, k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-r_2(k)\delta^2(k, \xi)}{1-r_1(k)r_2(k)}e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\gamma}_1, \\ \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ r_1(k)\delta^{-2}(k, \xi)e^{2it\theta} & & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\gamma}_2, \\ \begin{pmatrix} 1 & r_2(k)\delta^2(k, \xi)e^{-2it\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\gamma}_3, \\ \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ \frac{-r_1(k)\delta^{-2}(k, \xi)}{1-r_1(k)r_2(k)}e^{2it\theta} & & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\gamma}_4, \end{cases} \quad (4.62)$$

а також умови на лишки

$$\operatorname{Res}_{k=p_j} \hat{M}^{(1)}(x, t, k) = f_j(x, t)\hat{M}^{(2)}(x, t, p_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (4.63a)$$

$$\operatorname{Res}_{k=-\bar{p}_j} \hat{M}^{(1)}(x, t, k) = \tilde{f}_j(x, t)\hat{M}^{(2)}(x, t, -\bar{p}_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (4.63b)$$

із

$$f_j(x, t) = \frac{\eta_j e^{2ip_j x + 4ip_j^2 t}}{\dot{a}_1(p_j)\delta^2(p_j, \xi)}, \quad \tilde{f}_j(x, t) = \frac{e^{-2i\bar{p}_j x + 4i\bar{p}_j^2 t}}{\bar{\eta}_j \dot{a}_1(-\bar{p}_j)\delta^2(-\bar{p}_j, \xi)}, \quad (4.64)$$

та умову на лишок у $k = 0$:

$$\operatorname{Res}_{k=0} \hat{M}^{(2)}(x, t, k) = c_0(\xi)\hat{M}^{(1)}(x, t, 0), \quad (4.65)$$

з $c_0(\xi) = \frac{A\delta^2(0, \xi)}{2i}$.

Крім того, до характеристичі $\hat{M}(x, t, k)$ входить наступний опис сингулярної поведінки при $k = -\xi$:

$$\hat{M}(x, t, k) = \left(\hat{M}_{-\xi}(x, t) + O(k + \xi) \right) (k + \xi)^{\operatorname{Im} \nu(-\xi)\sigma_3}, \quad k \rightarrow -\xi, \quad (4.66)$$

де $\hat{M}_{-\xi}(x, t)$ є деякою матричною функцією з $\det \hat{M}_{-\xi}(x, t) = 1$ для всіх x та t .

Зазначимо, що умови на псевдо-лишок (4.38) перетворилися на (4.65), що має форму звичайної умови на лишок.

Твердження 4.3. *Для будь-якого фіксованого $\xi = \frac{x}{4t}$, $\xi > 0$ такого, що $\xi \notin \{\omega_m\}_1^{n-1} \cup \{\text{Re } p_m\}_1^n \cup \{0\}$, розв'язок задачі Рімана-Гільберта (4.61)-(4.66) може бути апроксимований (при $t \rightarrow \infty$) розв'язком іншої задачі Рімана-Гільберта (позначеного як M^{as}), який характеризується єдиною умовою на лишок (у $k = 0$) та має слабку сингулярність у $k = -\xi$. Залежно від значення ξ , апроксимована задача Рімана-Гільберта для M^{as} має одну з двох наступних форм (для більш прозорого викладу ми ввели позначення $\prod_{s=m_1}^{m_2} (\cdot)_s = 1$, якщо $m_1 > m_2$):*

(i) При $-\omega_{n-m} < -\xi < \text{Re } p_{n-m}$, $m = \overline{0, n-1}$, M^{as} є розв'язком наступної задачі Рімана-Гільберта

$$M_+^{as}(\xi, t, k) = M_-^{as}(\xi, t, k) J^{as}(\xi, t, k), \quad k \in \hat{\Gamma}, \quad (4.67a)$$

$$M^{as}(\xi, t, k) \rightarrow I, \quad k \rightarrow \infty, \quad (4.67b)$$

$$\text{Res}_{k=0} M^{as(2)}(\xi, t, k) = c_0^{as}(\xi) M^{as(1)}(\xi, t, 0), \quad (4.67c)$$

$$M^{as}(\xi, t, k) = (M_{-\xi}^{as}(\xi, t) + O(k + \xi)) (k + \xi)^{(\text{Im } \nu(-\xi) - m)\sigma_3}, \quad k \rightarrow -\xi, \quad (4.67d)$$

де

$$c_0^{as}(\xi) = \frac{A\delta^2(0, \xi)}{2i} \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\xi}{p_{n-s}} \right)^2, \quad (4.68)$$

та

$$J^{as}(\xi, t, k) = \left(\prod_{s=0}^{m-1} \frac{k + \xi}{k - p_{n-s}} \right)^{\sigma_3} \hat{J}(x, t, k) \left(\prod_{s=0}^{m-1} \frac{k + \xi}{k - p_{n-s}} \right)^{-\sigma_3}, \quad k \in \hat{\Gamma}. \quad (4.69)$$

(ii) При $\text{Re } p_{n-m} < -\xi < -\omega_{n-m-1}$, $m = \overline{0, n-1}$, M^{as} є розв'язком задачі

Рімана-Гільберта

$$M_+^{as}(\xi, t, k) = M_-^{as}(\xi, t, k)J^{as}(\xi, t, k), \quad k \in \hat{\Gamma}, \quad (4.70a)$$

$$M^{as}(\xi, t, k) \rightarrow I, \quad k \rightarrow \infty, \quad (4.70b)$$

$$\operatorname{Res}_{k=0} M^{as(1)}(\xi, t, k) = c_0^{as\#}(\xi)M^{as(2)}(\xi, t, 0), \quad (4.70c)$$

$$M^{as}(x, t, k) = (M_{-\xi}^{as}(x, t) + O(k + \xi)) (k + \xi)^{(\operatorname{Im} \nu(-\xi) - m)\sigma_3}, \quad k \rightarrow -\xi, \quad (4.70d)$$

де

$$c_0^{as\#}(\xi) = \frac{2ip_{n-m}^2}{A\delta^2(0, \xi)} \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{p_{n-s}}{\xi} \right)^2 \quad (4.71)$$

та (ми опустили аргументи $J^{as}(\xi, t, k)$)

$$J^{as} = \left(d(k) \prod_{s=0}^{m-1} \frac{k + \xi}{k - p_{n-s}} \right)^{\sigma_3} \hat{J}(x, t, k) \left(d(k) \prod_{s=0}^{m-1} \frac{k + \xi}{k - p_{n-s}} \right)^{-\sigma_3}, \quad k \in \hat{\Gamma}, \quad (4.72)$$

$$z d(k) = \frac{k}{k - p_{n-m}}.$$

Більш того, розв'язок задачі (4.1)-(4.2) може бути охарактеризований у термінах M^{as} наступним чином:

$$q(x, t) = 2i \lim_{k \rightarrow \infty} k M_{12}^{as}(\xi, t, k) + O(e^{-Ct}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (4.73)$$

$$q(-x, t) = 2i \lim_{k \rightarrow \infty} k \overline{M_{21}^{as}(\xi, t, k)} + O(e^{-Ct}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (4.74)$$

де $C \equiv C(\xi) = \min_{s=0, m} [8 \operatorname{Im} p_{n-m}(\operatorname{Re} p_{n-m} + \xi)]$ при $\operatorname{Re} p_{n-m} < -\xi < \operatorname{Re} p_{n-m-1}$, $m = \overline{0, n-1}$ (тут ми використовуємо позначення $\operatorname{Re} p_0 := 0$).

Доведення. (i) Розглянемо ξ таке, що $-\omega_{n-m} < -\xi < \operatorname{Re} p_{n-m}$, $m = \overline{0, n-1}$. У цьому випадку задача Рімана-Гільберта для $\hat{M}(x, t, k)$ має m умов на лишок у $k = p_{n-s}$, $s = \overline{0, m-1}$, з експоненціально зростаючими (при $t \rightarrow \infty$) множниками, а інші мають експоненціально спадаючі множники, див. (4.63a). Функція $\check{M}(x, t, k)$, визначена формулою

$$\check{M}(x, t, k) := \hat{M}(x, t, k) \left(\prod_{s=0}^{m-1} \frac{k + \xi}{k - p_{n-s}} \right)^{-\sigma_3}, \quad k \in \mathbb{C}, \quad (4.75)$$

задовольняє (див. (4.67c)) задачу Рімана-Гільберта з усіма експоненціально спадаючими умовами на лишок, крім одного (при $k = 0$). Крім того, $\tilde{M}(x, t, k)$ задовольняє умові на стрибок з матрицею стрибка, яка має вигляд (4.69), та має слабку сингулярність типу (4.67d) (з огляду на (4.53), $\text{Im } \nu(-\xi) - m \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$). Нехтуючи умовами на лишки зі спрямуючими до нуля множниками, ми приходимо до задачі Рімана-Гільберта (4.67).

(ii) Тепер розглянемо $\text{Re } p_{n-m} < -\xi < -\omega_{n-m-1}$, $m = \overline{0, n-1}$. У цьому випадку, задача Рімана-Гільберта для $\hat{M}(x, t, k)$ включає в себе $m + 1$ умови на лишки у $k = p_{n-s}$, $s = \overline{0, m}$ з експоненціально зростаючими множниками. Застосовуючи перетворення (4.75) та нехтуючи експоненціально спадаючими множниками, ми отримуємо задачу Рімана-Гільберта з двома умовами на лишок, одна з яких (при $k = p_{n-m}$) має експоненціально зростаючий множник (див. (4.64)):

$$\tilde{M}_+^{as}(\xi, t, k) = \tilde{M}_-^{as}(\xi, t, k) \tilde{J}^{as}(\xi, t, k), \quad k \in \hat{\Gamma}, \quad (4.76a)$$

$$\tilde{M}^{as}(\xi, t, k) \rightarrow I, \quad k \rightarrow \infty, \quad (4.76b)$$

$$\text{Res}_{k=p_{n-m}} \tilde{M}^{as(1)}(\xi, t, k) = f(x, t) \tilde{M}^{as(2)}(\xi, t, p_{n-m}), \quad (4.76c)$$

$$\text{Res}_{k=0} \tilde{M}^{as(2)}(\xi, t, k) = c_0^{as}(\xi) \tilde{M}^{as(1)}(\xi, t, 0), \quad (4.76d)$$

$$\tilde{M}^{as}(x, t, k) = \left(\tilde{M}_{-\xi}^{as}(x, t) + O(k + \xi) \right) (k + \xi)^{(\text{Im } \nu(-\xi) - m)\sigma_3}, \quad k \rightarrow -\xi, \quad (4.76e)$$

де $f(x, t) = f_{n-m}(x, t) \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{p_{n-m} - p_{n-s}}{p_{n-m} + \xi} \right)^2$, $c_0^{as}(\xi)$ наведено у (4.68), та

$$\tilde{J}^{as}(\xi, t, k) = \left(\prod_{s=0}^{m-1} \frac{k + \xi}{k - p_{n-s}} \right)^{\sigma_3} \hat{J}(x, t, k) \left(\prod_{s=0}^{m-1} \frac{k + \xi}{k - p_{n-s}} \right)^{-\sigma_3}, \quad k \in \hat{\Gamma}.$$

Остання задача має дві умови на лишки для різник стовпчиків, одна з яких має експоненціально зростаючий множник, а інша – обмежений. Задачі такого типу можуть бути перетворені (див., наприклад, [37]) таким чином, що експоненціально зростаючі умови (у нашому випадку, (4.76c)) перетворюються на експоненціально спадаючі. Дійсно, задача (4.76) з умовами на лишки може бути перетворена у регулярну задачу (для \hat{M}^{as}), яка

має додаткові частини контуру у вигляді малих кіл, S_0 та $S_{p_{n-m}}$, які обточують відповідно $k = 0$ та $k = p_{n-m}$, з умовою на стрибок:

$$\hat{M}_+^{as}(x, t, k) = \hat{M}_-^{as}(x, t, k)\hat{J}^{as}(x, t, k), \quad k \in \hat{\Gamma} \cup S_0 \cup S_{p_{n-m}}, \quad (4.77a)$$

$$\hat{M}^{as}(x, t, k) \rightarrow I, \quad k \rightarrow \infty, \quad (4.77b)$$

де

$$\hat{J}^{as}(x, t, k) = \begin{cases} \tilde{J}^{as}(x, t, k), & k \in \hat{\Gamma}, \\ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{c_0^{as}(\xi)}{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in S_0, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{f(x,t)}{k-p_{n-m}} & 1 \end{pmatrix}, & k \in S_{p_{n-m}}. \end{cases} \quad (4.78)$$

Нарешті, якщо ввести $\hat{M}^{as\#}$ у вигляді

$$\hat{M}^{as\#}(x, t, k) = \begin{cases} \hat{M}^{as}(x, t, k)N(\xi, k)d^{-\sigma_3}(k), & k \text{ всередині } S_0, \\ \hat{M}^{as}(x, t, k)Q(x, t, k)d^{-\sigma_3}(k), & k \text{ всередині } S_{p_{n-m}}, \\ \hat{M}^{as}(x, t, k)d^{-\sigma_3}(k), & \text{у інших випадках,} \end{cases} \quad (4.79)$$

де $d(k) = \frac{k}{k-p_{n-m}}$, $N(\xi, k) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c_0^{as}(\xi)}{k} \\ -\frac{k}{c_0^{as}(\xi)} & 1 \end{pmatrix}$, та $Q(x, t, k) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{k-p_{n-m}}{f(x,t)} \\ \frac{f(x,t)}{k-p_{n-m}} & 0 \end{pmatrix}$

і розглянути задачу Рімана-Гільберта для $\hat{M}^{as\#}$, то виявиться, що матриці стрибка для $\hat{M}^{as\#}$ вздовж $S_{p_{n-m}}$ експоненціально швидко прямують до одиничної матриці, а стрибок вздовж $\hat{\Gamma}$ має вигляд (4.72). \square

Нехтуючи умовами на стрибок у задачах Рімана-Гільберта (4.67) та (4.70) (нагадаємо, що в силу таблиці знаків, матриці стрибка прямують, при $t \rightarrow \infty$, до одиничної матриці експоненціально швидко поза околom $k = -\xi$), отримуємо, що ці задачі зводяться до алгебраїчних рівнянь, які

можуть бути розв'язані явно:

$$M^{as}(\xi, t, k) \simeq \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_0^{as}(\xi)}{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{для задачі (4.67),} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c_0^{as\#}(\xi)}{k} & 1 \end{pmatrix}, & \text{для задачі (4.70),} \end{cases} \quad (4.80)$$

де $c_0^{as}(\xi)$ та $c_0^{as\#}(\xi)$ наведені відповідно у (4.68) та (4.71). Підставляючи (4.80) у (4.73) та (4.74), отримуємо грубу асимптотику (4.4), зазначену у Теоремі 4.1.

Зауваження 4.3. У випадку фокууючого нелокального нелінійного рівняння Шредінгера (див. [90] та Розділ 3), початкові дані у вигляді чистої сходінки з $R = 0$ (тобто, $q_0(x) = q_{0,A}(x)$) задовольняють умовам, аналогічним до Припущень (a)-(c) (див. вихідну задачу Рімана-Гільберта у Підрозділі 3.1.3), і тому випадок таких початкових даних описується відповідними асимптотичними формулами. З іншого боку, у випадку дефокууючого нелокального нелінійного рівняння Шредінгера, $R = 0$ є однією з точок біфуркації (див. Зауваження 4.1), і, як наслідок, випадок чистої сходінки з $R = 0$ не описується асимптотиками, наведеними у Теоремах 4.1 та 4.2.

Відповідна адаптація нелінійного методу перевалу дозволяє нам не тільки довести справедливість асимптотичних формул (4.4), але й строго обґрунтувати більш точну асимптотику.

Теорема 4.2. Розглянемо початкову задачу (4.1), (4.2). Припустимо, що (i) початкова функція $q_0(x)$ прямує до своїх крайових значень достатньо швидко, (ii) відповідні спектральні функції $a_j(k)$, $j = 1, 2$ задовольняють Припущення (a)-(c), та (iii) спектральні функції $r_j(k)$, $j = 1, 2$ можуть бути аналітично продовжені з дійсної прямої у смугу вздовж неї. Припустимо також, що розв'язок $q(x, t)$ задачі (4.1), (4.2) існує. Тоді він має наступну поведінку за великим часом вздовж променів $\frac{x}{4t} = \xi$:

(i) при $-\omega_{n-m} < -\xi < \overline{\operatorname{Re} p_{n-m}}$, $m = \overline{0, n-1}$, існують три типи асимптотики, залежно від значення $\operatorname{Im} \nu(-\xi)$:

1) якщо $\operatorname{Im} \nu(-\xi) \in (m - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{6}]$, то

$$q(x, t) = A\delta^2(0, \xi) \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\xi}{p_{n-s}} \right)^2 + t^{-\frac{1}{2} - \operatorname{Im} \nu(-\xi) + m} \alpha_1(\xi) \\ \times \exp\{-4it\xi^2 + i \operatorname{Re} \nu(-\xi) \ln t\} + R_1(\xi, t),$$

2) якщо $\operatorname{Im} \nu(-\xi) \in (m - \frac{1}{6}, m + \frac{1}{6})$, то

$$q(x, t) = A\delta^2(0, \xi) \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\xi}{p_{n-s}} \right)^2 \\ + t^{-\frac{1}{2} - \operatorname{Im} \nu(-\xi) + m} \alpha_1(\xi) \exp\{-4it\xi^2 + i \operatorname{Re} \nu(-\xi) \ln t\} \\ + t^{-\frac{1}{2} + \operatorname{Im} \nu(-\xi) - m} \alpha_2(\xi) \exp\{4it\xi^2 - i \operatorname{Re} \nu(-\xi) \ln t\} + R_3(\xi, t),$$

3) якщо $\operatorname{Im} \nu(-\xi) \in [m + \frac{1}{6}, m + \frac{1}{2})$, то

$$q(x, t) = A\delta^2(0, \xi) \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\xi}{p_{n-s}} \right)^2 + t^{-\frac{1}{2} + \operatorname{Im} \nu(-\xi) - m} \alpha_2(\xi) \\ \times \exp\{4it\xi^2 - i \operatorname{Re} \nu(-\xi) \ln t\} + R_2(\xi, t),$$

(ii) при $-\operatorname{Re} p_{n-m} < -\xi < \omega_{n-m}$, $m = \overline{0, n-1}$:

$$q(x, t) = t^{-\frac{1}{2} - \operatorname{Im} \nu(\xi) + m} \alpha_3(\xi) \exp\{4it\xi^2 - i \operatorname{Re} \nu(\xi) \ln t\} + R_2(-\xi, t),$$

(iii) при $\operatorname{Re} p_{n-m} < -\xi < -\omega_{n-m-1}$, $m = \overline{0, n-1}$:

$$q(x, t) = t^{-\frac{1}{2} + \operatorname{Im} \nu(-\xi) - m} \alpha_4(\xi) \exp\{4it\xi^2 - i \operatorname{Re} \nu(-\xi) \ln t\} + R_2(\xi, t),$$

(iv) при $\omega_{n-m-1} < -\xi < -\operatorname{Re} p_{n-m}$, $m = \overline{0, n-1}$, існують три типи асимптотики, в залежності від значення $\operatorname{Im} \nu(\xi)$:

1) якщо $\operatorname{Im} \nu(\xi) \in (m - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{6}]$, тоді

$$q(x, t) = \frac{4\bar{p}_{n-m}^2}{A\bar{\delta}^2(0, -\xi)} \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\bar{p}_{n-s}}{\xi} \right)^2 + t^{-\frac{1}{2} - \operatorname{Im} \nu(\xi) + m} \alpha_5(\xi) \\ \times \exp\{4it\xi^2 - i \operatorname{Re} \nu(\xi) \ln t\} + R_1(-\xi, t),$$

2) якщо $\text{Im } \nu(\xi) \in (m - \frac{1}{6}, m + \frac{1}{6})$, тоді

$$q(x, t) = \frac{4\bar{p}_{n-m}^2}{A\delta^2(0, -\xi)} \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\bar{p}_{n-s}}{\xi} \right)^2 \\ + t^{-\frac{1}{2} - \text{Im } \nu(\xi) + m} \alpha_5(\xi) \exp\{4it\xi^2 - i \text{Re } \nu(\xi) \ln t\} \\ + t^{-\frac{1}{2} + \text{Im } \nu(\xi) - m} \alpha_6(\xi) \exp\{-4it\xi^2 + i \text{Re } \nu(\xi) \ln t\} + R_3(-\xi, t),$$

3) якщо $\text{Im } \nu(\xi) \in [m + \frac{1}{6}, m + \frac{1}{2})$, тоді

$$q(x, t) = \frac{4\bar{p}_{n-m}^2}{A\delta^2(0, -\xi)} \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\bar{p}_{n-s}}{\xi} \right)^2 + t^{-\frac{1}{2} + \text{Im } \nu(\xi) - m} \alpha_6(\xi) \\ \times \exp\{-4it\xi^2 + i \text{Re } \nu(\xi) \ln t\} + R_2(-\xi, t).$$

Функції, задіяні в асимптотичних формулах, визначаються наступним чином:

$$\delta(k, \xi) = (k + \xi)^{i\nu(-\xi)} e^{\chi(k, \xi)}, \quad (4.81)$$

де

$$\nu(-\xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln |1 + r_1(-\xi)r_2(-\xi)| - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\xi} d \arg(1 - r_1(\zeta)r_2(\zeta)), \quad (4.82)$$

з

$$\chi(k, \xi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\xi} \ln(k - \zeta) d_\zeta(1 - r_1(\zeta)r_2(\zeta)), \quad (4.83)$$

а функції $\alpha_j(\xi)$, $j = \overline{1, 6}$ мають наступний вигляд:

$$\alpha_1(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}(c_0^{as}(\xi))^2 \prod_{s=0}^{m-1} (\xi + p_{n-s})^2}{\xi^2 r_2(-\xi) \Gamma(i\nu(-\xi) + m)} \\ \times \exp \left\{ -\frac{\pi}{2}(\nu(-\xi) - im) + \frac{3\pi i}{4} - 2\chi(-\xi, \xi) + 3(i\nu(-\xi) + m) \ln 2 \right\},$$

$$\alpha_2(\xi) = \frac{\sqrt{\pi} \prod_{s=0}^{m-1} (\xi + p_{n-s})^{-2}}{r_1(-\xi) \Gamma(-i\nu(-\xi) - m)} \\ \times \exp \left\{ -\frac{\pi}{2}(\nu(-\xi) - im) + \frac{\pi i}{4} + 2\chi(-\xi, \xi) - 3(i\nu(-\xi) + m) \ln 2 \right\},$$

$$\alpha_3(\xi) = \frac{\sqrt{\pi} \prod_{s=0}^{m-1} (\bar{p}_{n-s} - \xi)^2}{\bar{r}_2(\xi) \Gamma(-i\nu(\xi) + m)} \times \exp \left\{ -\frac{\pi}{2}(\overline{\nu(\xi)} + im) - \frac{3\pi i}{4} - 2\overline{\chi(\xi, \xi)} - 3(i\overline{\nu(\xi)} - m) \ln 2 \right\},$$

$$\alpha_4(\xi) = \frac{\sqrt{\pi} \xi^2 \prod_{s=0}^m (\xi + p_{n-s})^{-2}}{r_1(-\xi) \Gamma(-i\nu(-\xi) - m)} \times \exp \left\{ -\frac{\pi}{2}(\nu(-\xi) - im) + \frac{\pi i}{4} + 2\chi(-\xi, \xi) - 3(i\nu(-\xi) + m) \ln 2 \right\},$$

$$\alpha_5(\xi) = \frac{\sqrt{\pi} \prod_{s=0}^m (\bar{p}_{n-s} - \xi)^2}{\xi^2 \bar{r}_2(\xi) \Gamma(-i\nu(\xi) + m)} \times \exp \left\{ -\frac{\pi}{2}(\overline{\nu(\xi)} + im) - \frac{3\pi i}{4} - 2\overline{\chi(\xi, \xi)} - 3(i\overline{\nu(\xi)} - m) \ln 2 \right\},$$

$$\alpha_6(\xi) = \frac{\sqrt{\pi} \left(c_0^{as\#}(-\xi) \right)^2 \prod_{s=0}^m (\bar{p}_{n-s} - \xi)^{-2}}{\bar{r}_1(\xi) \Gamma(i\nu(\xi) - m)} \times \exp \left\{ -\frac{\pi}{2}(\overline{\nu(\xi)} + im) - \frac{\pi i}{4} + 2\overline{\chi(\xi, \xi)} + 3(i\overline{\nu(\xi)} - m) \ln 2 \right\},$$

де

$$c_0^{as}(\xi) = \frac{A\delta^2(0, \xi)}{2i} \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\xi}{p_{n-s}} \right)^2, \quad c_0^{as\#}(\xi) = \frac{2ip_{n-m}^2}{A\delta^2(0, \xi)} \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{p_{n-s}}{\xi} \right)^2.$$

Нарешті, залишки $R_j(\xi, t)$, $j = \overline{1, 3}$ оцінюються у такий спосіб:

$$R_1(\xi, t) = \begin{cases} O(t^{-1}), & \text{Im } \nu(-\xi) > m, \\ O(t^{-1} \ln t), & \text{Im } \nu(-\xi) = m, \\ O(t^{-1+2|\text{Im } \nu(-\xi) - m|}), & \text{Im } \nu(-\xi) < m, \end{cases} \quad (4.84)$$

$$R_2(\xi, t) = \begin{cases} O(t^{-1+2|\operatorname{Im} \nu(-\xi)-m|}), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) > m, \\ O(t^{-1} \ln t), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) = m, \\ O(t^{-1}), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) < m, \end{cases} \quad (4.85)$$

та

$$R_3(\xi, t) = R_1(\xi, t) + R_2(\xi, t) = \begin{cases} O(t^{-1+2|\operatorname{Im} \nu(-\xi)-m|}), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) \neq m, \\ O(t^{-1} \ln t), & \operatorname{Im} \nu(-\xi) = m. \end{cases}$$

Доведення. Почнемо з аналізу задачі Рімана-Гільберта (4.67) (аналіз задачі (4.70) проводиться аналогічно). Спершу, зробимо наступне перетворення:

$$\check{M}^{as}(x, t, k) = \begin{cases} M^{as}(x, t, k) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{c_0^{as}}{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \text{ всередині } S_0, \\ M^{as}(x, t, k), & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

де $S_0 = \{k : |k| < \varepsilon\}$ з достатньо малим $\varepsilon > 0$. Тоді $\check{M}^{as}(x, t, k)$ є розв'язком задачі Рімана-Гільберта без умов на лишки:

$$\check{M}_+^{as}(x, t, k) = \check{M}_-^{as}(x, t, k) \check{J}^{as}(x, t, k), \quad k \in \hat{\Gamma} \cup S_0, \quad (4.86a)$$

$$\check{M}^{as}(x, t, k) \rightarrow I, \quad k \rightarrow \infty, \quad (4.86b)$$

з

$$\check{J}^{as}(x, t, k) = \begin{cases} J^{as}(x, t, k), & k \in \hat{\Gamma}, \\ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{c_0^{as}}{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in S_0. \end{cases} \quad (4.87)$$

Беручи до уваги (4.50), запишемо матрицю стрибка \check{J}^{as} на $\hat{\Gamma}$ у такий спосіб:

$$\hat{J}(x, t, k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\check{r}_2^{as}(k)(k+\xi)^{2i\check{\nu}(-\xi)}}{1-\check{r}_1^{as}(k)\check{r}_2^{as}(k)} e^{-2it\theta+2\chi(k,\xi)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\gamma}_1, \\ \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ \check{r}_1^{as}(k)(k+\xi)^{-2i\check{\nu}(-\xi)} e^{2it\theta-2\chi(k,\xi)} & & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\gamma}_2, \\ \begin{pmatrix} 1 & \check{r}_2^{as}(k)(k+\xi)^{2i\check{\nu}(-\xi)} e^{-2it\theta+2\chi(k,\xi)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\gamma}_3, \\ \begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ \frac{-\check{r}_1^{as}(k)(k+\xi)^{-2i\check{\nu}(-\xi)}}{1-\check{r}_1^{as}(k)\check{r}_2^{as}(k)} e^{2it\theta-2\chi(k,\xi)} & & 1 \end{pmatrix}, & k \in \hat{\gamma}_4, \end{cases} \quad (4.88)$$

де

$$\check{r}_1^{as}(k) = r_1(k) \prod_{s=0}^{m-1} (k - p_{n-s})^2, \quad (4.89a)$$

$$\check{r}_2^{as}(k) = r_2(k) \prod_{s=0}^{m-1} (k - p_{n-s})^{-2}, \quad (4.89b)$$

$$i\check{\nu}(-\xi) = i\nu(-\xi) + m. \quad (4.89c)$$

Тепер введемо до розгляду локальний параметрикс $\check{m}_0^{as}(x, t, k)$:

$$\check{m}_0^{as}(x, t, k) = \Delta(\xi, t) m^\Gamma(\xi, z(k)) \Delta^{-1}(\xi, t), \quad (4.90)$$

де $z(k)$ є масштабованою змінною

$$z = \sqrt{8t}(k + \xi), \quad (4.91)$$

а

$$\Delta(\xi, t) = e^{(2it\xi^2 + \chi(-\xi, \xi))\sigma_3} (8t)^{\frac{-i\check{\nu}(-\xi)}{2}\sigma_3}. \quad (4.92)$$

Матриця $m^\Gamma(\xi, z)$ визначається як (дивись Рисунок 4.4)

$$m^\Gamma(\xi, z) = m_0(\xi, z) D_j^{-1}(\xi, z), \quad z \in \Omega_j, \quad j = \overline{0, 4}, \quad (4.93)$$

де

$$D_0(\xi, z) = e^{-i\frac{z^2}{4}\sigma_3} z^{i\check{\nu}(-\xi)\sigma_3},$$

$$D_1(\xi, z) = D_0(\xi, z) \begin{pmatrix} 1 & \frac{\check{r}_2^{as}(-\xi)}{1+\check{r}_1^{as}(-\xi)\check{r}_2^{as}(-\xi)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2(\xi, z) = D_0(\xi, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \check{r}_1^{as}(-\xi) & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_3(\xi, z) = D_0(\xi, z) \begin{pmatrix} 1 & -\check{r}_2^{as}(-\xi) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_4(\xi, z) = D_0(\xi, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-\check{r}_1^{as}(-\xi)}{1+\check{r}_1^{as}(-\xi)\check{r}_2^{as}(-\xi)} & 1 \end{pmatrix},$$

а матриця $m_0(\xi, z)$ є розв'язком наступної задачі Рімана-Гільберта з постійною матрицею стрибка:

$$m_{0+}(\xi, z) = m_{0-}(\xi, z)j_0(\xi), \quad z \in \mathbb{R}, \quad (4.94a)$$

$$m_0(\xi, z) = (I + O(1/z)) e^{-i\frac{z^2}{4}\sigma_3} z^{i\check{\nu}(-\xi)\sigma_3}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (4.94b)$$

де

$$j_0(\xi) = \begin{pmatrix} 1 + \check{r}_1^{as}(-\xi)\check{r}_2^{as}(-\xi) & \check{r}_2^{as}(-\xi) \\ \check{r}_1^{as}(-\xi) & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.95)$$

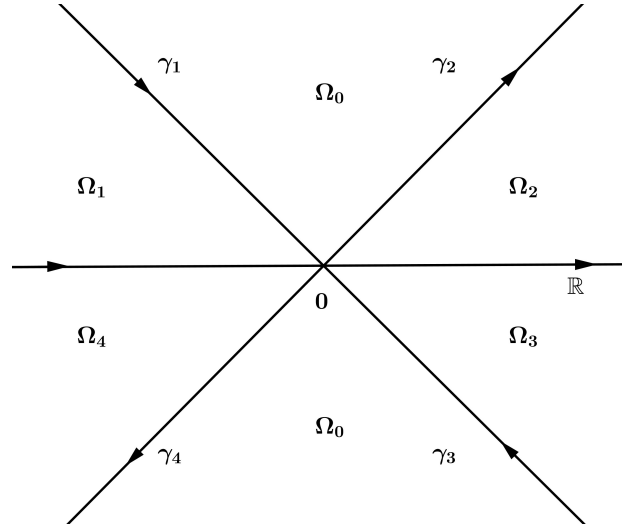


Рис. 4.4: Контур та області для $m^\Gamma(\xi, z)$ у z -площині.

Задача (4.94)-(4.95) має явний розв'язок у термінах функцій параболічного циліндру [58], а її асимптотика при $z \rightarrow \infty$ дає відповідну асимптотику для $m^\Gamma(\xi, z)$:

$$m^\Gamma(\xi, z) = I + \frac{i}{z} \begin{pmatrix} 0 & \beta(\xi) \\ -\gamma(\xi) & 0 \end{pmatrix} + O(z^{-2}), \quad z \rightarrow \infty,$$

де

$$\beta(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\pi}{2}\check{\nu}(-\xi)}e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{\check{r}_1^{as}(-\xi)\Gamma(-i\check{\nu}(-\xi))}, \quad (4.96a)$$

$$\gamma(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\pi}{2}\check{\nu}(-\xi)}e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\check{r}_2^{as}(-\xi)\Gamma(i\check{\nu}(-\xi))}. \quad (4.96b)$$

Визначимо функцію $\check{M}^{as}(x, t, k)$ формулами

$$\check{M}^{as}(x, t, k) = \begin{cases} \check{M}^{as}(x, t, k)(\check{m}_0^{as})^{-1}(x, t, k)V(k), & k \text{ всередині } S_{-\xi}, \\ \check{M}^{as}(x, t, k), & k \text{ всередині } S_0, \\ \check{M}^{as}(x, t, k)V(k), & \text{у інших випадках,} \end{cases} \quad (4.97)$$

де $V(k) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{c_0^{as}}{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ та $S_{-\xi}$ є малим колом з центром у $k = -\xi$, яке орієнтоване проти годинникової стрілки. Безпосередня перевірка показує, що \check{M}^{as} є розв'язком наступної задачі Рімана-Гільберта на контурі $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma} \cup S_{-\xi}$:

$$\check{M}_+^{as}(x, t, k) = \check{M}_-^{as}(x, t, k)\check{J}^{as}(x, t, k), \quad k \in \hat{\Gamma}_1, \quad (4.98)$$

$$\check{M}^{as}(x, t, k) \rightarrow I, \quad k \rightarrow \infty, \quad (4.99)$$

з матрицею стрибка

$$\check{J}^{as}(x, t, k) = \begin{cases} V^{-1}(k)\check{m}_{0-}^{as}(x, t, k)\check{J}^{as}(x, t, k)(\check{m}_{0+}^{as})^{-1}(x, t, k)V(k), & k \in \hat{\Gamma}_1, k \text{ всередині } S_{-\xi}, \\ V^{-1}(k)(\check{m}_0^{as})^{-1}(x, t, k)V(k), & k \in S_{-\xi}, \\ V^{-1}(k)\check{J}^{as}(x, t, k)V(k), & \text{у інших випадках.} \end{cases} \quad (4.100)$$

У термінах $\check{M}^{as}(x, t, k)$, розв'язок вихідної задачі Рімана-Гільберта дається у такий спосіб:

$$q(x, t) = 2i \left(c_0^{as} + \lim_{k \rightarrow \infty} k \check{M}_{12}^{as}(x, t, k) \right), \quad (4.101)$$

та

$$q(-x, t) = 2i \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{k \check{M}_{21}^{as}(x, t, k)}. \quad (4.102)$$

Для обчислення асимптотики при великих значеннях t матриці $\check{M}^{as}(x, t, k)$, нам потрібна асимптотика локального параметриксу $(\check{m}_0^{as})^{-1}(x, t, k)$:

$$(\check{m}_0^{as})^{-1}(x, t, k) = \Delta(\xi, t)(m^\Gamma)^{-1}(\xi, \sqrt{8t}(k+\xi))\Delta^{-1}(\xi, t) = I + \frac{B(\xi, t)}{\sqrt{8t}(k+\xi)} + \tilde{r}(\xi, t), \quad (4.103)$$

де матричні елементи $B(\xi, t)$ мають вигляд

$$B_{11}(\xi, t) = B_{22}(\xi, t) = 0, \quad (4.104a)$$

$$B_{12}(\xi, t) = -i\beta(\xi)e^{4it\xi^2+2\chi(-\xi,\xi)}(8t)^{-i\check{\nu}(-\xi)}, \quad (4.104b)$$

$$B_{21}(\xi, t) = i\gamma(\xi)e^{-4it\xi^2-2\chi(-\xi,\xi)}(8t)^{i\check{\nu}(-\xi)}, \quad (4.104c)$$

а залишок оцінюється наступним чином:

$$\tilde{r}(\xi, t) = \begin{pmatrix} O(t^{-1-\text{Im}\check{\nu}(-\xi)}) & O(t^{-1+\text{Im}\check{\nu}(-\xi)}) \\ O(t^{-1-\text{Im}\check{\nu}(-\xi)}) & O(t^{-1+\text{Im}\check{\nu}(-\xi)}) \end{pmatrix}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.105)$$

Зобразимо $\check{M}^{as}(x, t, k)$ у вигляді

$$\check{M}^{as}(x, t, k) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\Gamma}_1} \mu(x, t, s)(\check{J}^{as}(x, t, s) - I) \frac{ds}{s-k}, \quad (4.106)$$

де $\mu(x, t, k)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$\mu(x, t, k) = I + \frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{k' \rightarrow k \\ k' \in \text{-side}}} \int_{\hat{\Gamma}_1} \frac{\mu(x, t, s)(\check{J}^{as}(x, t, s) - I)}{s-k'} ds. \quad (4.107)$$

Оцінюючи праву частину (4.106) (пор. з [89] та Розділом 2), приходимо до висновку, що

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\check{M}^{as}(x, t, k) - I \right) &= \frac{i}{2\pi} \int_{S_{-\xi}} V^{-1}(k) \left((\check{m}_0^{as})^{-1}(x, t, k) - I \right) V(k) dk + R(\xi, t) \\ &= B^{as}(\xi, t) + R(\xi, t), \end{aligned} \quad (4.108)$$

де $R(\xi, t) = \begin{pmatrix} R_1(\xi, t) & R_1(\xi, t) + R_2(\xi, t) \\ R_1(\xi, t) & R_1(\xi, t) + R_2(\xi, t) \end{pmatrix}$ та (див. (4.104))

$$B^{as}(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{8t}} \begin{pmatrix} \frac{c_0^{as}(\xi)}{\xi} B_{21}(\xi, t) & \frac{(c_0^{as}(\xi))^2}{\xi^2} B_{21}(\xi, t) - B_{12}(\xi, t) \\ -B_{21}(\xi, t) & -\frac{c_0^{as}(\xi)}{\xi} B_{21}(\xi, t) \end{pmatrix}. \quad (4.109)$$

Замінюючи $\check{r}_j^{as}(-\xi)$, $j = 1, 2$ та $\check{\nu}(-\xi)$ відповідно на $r_j(-\xi)$, $j = 1, 2$ та $\nu(-\xi)$, ми приходимо до асимптотики, яка дана у **(i)** та **(iii)** Теорема 4.2.

Повернемося до задачі Рімана-Гільберта (4.70). Тут коефіцієнти відбиття $\check{r}_j^{as}(k)$, $j = 1, 2$ (див. (4.89a) та (4.89b)) мають вигляд

$$r_1^{as}(k) = r_1(k)d^{-2}(k) \prod_{s=0}^{m-1} (k - p_{n-s})^2, \quad r_2^{as}(k) = r_2(k)d^2(k) \prod_{s=0}^{m-1} (k - p_{n-s})^{-2},$$

де $d(k) = \frac{k}{k - p_{n-m}}$. Крім того, у визначенні $\check{M}^{as}(x, t, k)$ маємо (див. (4.97))

$$V(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c_0^{as\#}(\xi)}{k} & 1 \end{pmatrix}. \text{ Відповідно, маємо}$$

$$q(x, t) = 2i \lim_{k \rightarrow \infty} k \check{M}_{12}^{as}(x, t, k), \quad (4.110a)$$

$$q(-x, t) = 2i \left(\overline{c_0^{as\#}(\xi)} + \lim_{k \rightarrow \infty} k \overline{\check{M}_{21}^{as}(x, t, k)} \right), \quad (4.110b)$$

а $B^{as}(\xi, t)$ і $R(\xi, t)$ у (4.108) мають вигляд:

$$B^{as}(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{8t}} \begin{pmatrix} -\frac{c_0^{as\#}(\xi)}{\xi} B_{12}(\xi, t) & -B_{12}(\xi, t) \\ \frac{(c_0^{as\#}(\xi))^2}{\xi^2} B_{12}(\xi, t) - B_{21}(\xi, t) & \frac{c_0^{as\#}(\xi)}{\xi} B_{12}(\xi, t) \end{pmatrix} \quad (4.111)$$

та $R(\xi, t) = \begin{pmatrix} R_1(\xi, t) + R_2(\xi, t) & R_2(\xi, t) \\ R_1(\xi, t) + R_2(\xi, t) & R_2(\xi, t) \end{pmatrix}$. Збираючи докупи (4.110) та (4.111), отримуємо твердження пунктів **(ii)** та **(iv)** Теорема 4.2.

□

4.3 Перехідні зони

У Теоремі 4.2 ми представили асимптотику за великим часом розв'язку $q(x, t)$ вздовж променів $\xi = \frac{x}{4t} = const$ для всіх $\xi \notin \{\pm \text{Re } p_m, \pm \omega_{m-1} | m = \overline{1, n}\}$, тобто для всіх $\xi \in \mathbb{R}$, крім меж якісно різних асимптотичних секторів. Через те, що асимптотичні режими у суміжних секторах суттєво відрізняються один від одного, виникає задача дослідження асимптотик у перехідних зонах між секторами.

Можна виділити три типи перехідних зон для асимптотик, представлених у Теоремі 4.2:

- (1) зони навколо променів $\xi = \pm \operatorname{Re} p_m$, $m = \overline{1, n}$,
- (2) зони навколо променів $\xi = \omega_m$, $m = \overline{1, n-1}$,
- (3) зона навколо $\xi = 0$.

У наступному твердженні ми описуємо перехідні зони типу (1); тут перехід описується одиночною хвилею, яка розповсюджується вздовж променів $\xi = \pm \operatorname{Re} p_m$, $m = \overline{1, n}$ (пор. із Зауваженням 3.11):

Твердження 4.4. *Нехай виконуються умови Теорема 4.2. Тоді розв'язок $q(x, t)$ задачі (4.1), (4.2) має наступну асимптотику вздовж променів $\xi = \pm \operatorname{Re} p_{n-m}$, $m = \overline{0, n-1}$:*

$$q(x, t) = \begin{cases} \frac{2ip_{n-m}^2 c_0^{as}(-\operatorname{Re} p_{n-m})}{p_{n-m}^2 + c_0^{as}(-\operatorname{Re} p_{n-m}) f_{n-m}^{as}(x', t)} + o(1), & t \rightarrow \infty, x = -4 \operatorname{Re} p_{n-m} t + x', \\ \frac{2i\bar{p}_{n-m}^2 \overline{f_{n-m}^{as}}(x', t)}{\bar{p}_{n-m}^2 + \overline{c_0^{as}}(-\operatorname{Re} p_{n-m}) \overline{f_{n-m}^{as}}(x', t)} + o(1), & t \rightarrow \infty, x = 4 \operatorname{Re} p_{n-m} t - x', \end{cases} \quad (4.112)$$

де $x' \in \mathbb{R}$, $c_0^{as}(\xi)$ дається у (4.68), а $f_{n-m}^{as}(x', t)$ задається формулами

$$f_{n-m}^{as}(x', t) = \frac{\eta_{n-m} \exp\{2ip_{n-m}x_0 - 4it(\operatorname{Re}^2 p_{n-m} + \operatorname{Im}^2 p_{n-m})\}}{\dot{a}_1(p_{n-m})\delta^2(p_{n-m}, -\operatorname{Re} p_{n-m})}, \quad m = \overline{0, n-1}. \quad (4.113)$$

Асимптотика (4.112) має місце для всіх $t \gg 0$ та $x' \in \mathbb{R}$ таких, що

$$p_{n-m}^2 + c_0^{as}(-\operatorname{Re} p_{n-m}) f_{n-m}^{as}(x', t) \neq 0.$$

Крім того, при $x' \rightarrow \pm\infty$, асимптотика (4.112) погоджується з асимптотиками (4.4) у суміжних секторах.

Доведення. За аналогією з пунктом (і) у Твердженні 4.3, можна показати, що вздовж променів $\xi = -\operatorname{Re} p_{n-m}$, $m = \overline{0, n-1}$ (див. Рисунок 4.3), асимптотика за великим часом $q(x, t)$ описується у термінах розв'язків задачі

Рімана-Гільберта (пор. з (4.67)):

$$M_+^{as}(\xi, t, k) = M_-^{as}(\xi, t, k)J^{as}(\xi, t, k), \quad k \in \hat{\Gamma}, \quad (4.114a)$$

$$M^{as}(\xi, t, k) \rightarrow I, \quad k \rightarrow \infty, \quad (4.114b)$$

$$\operatorname{Res}_{k=0} M^{as(2)}(\xi, t, k) = c_0^{as}(\xi)M^{as(1)}(\xi, t, 0), \quad (4.114c)$$

$$\operatorname{Res}_{k=p_{n-m}} M^{as(1)}(\xi, t, k) = f_{n-m}^{as}(x', t)M^{as(2)}(\xi, t, p_{n-m}) \quad (4.114d)$$

$$M^{as}(\xi, t, k) = \left(M_{-\xi}^{as}(\xi, t) + O(k + \xi) \right) (k + \xi)^{(\operatorname{Im} \nu(-\xi) - m)\sigma_3}, \quad k \rightarrow -\xi, \quad (4.114e)$$

де $J^{as}(\xi, t, k)$ дається у (4.69), а $x_0 \in \mathbb{R}$ параметризує постійні паралельні зсуви проміння, який розглядається: $x = -4 \operatorname{Re} p_{n-m} t - x'$, $m = \bar{0}, n - 1$ (зазначимо, що такий зсув не змінює значення повільної змінної $\xi = \frac{x}{4t}$ при $t \rightarrow \infty$). Використовуючи множники Бляшке-Потапова, асимптотика $q(x, t)$ може бути знайдена у термінах розв'язків регулярної задачі Рімана-Гільберта:

$$q(x, t) = 2ip_{n-m}P_{12}(\xi, t) + 2i \lim_{k \rightarrow \infty} k M_{12}^{as, R}(\xi, t, k), \quad x > 0, \quad (4.115a)$$

$$q(x, t) = 2i\bar{p}_{n-m}\overline{P_{21}(-\xi, t)} + 2i \lim_{k \rightarrow \infty} k \overline{M_{21}^{as, R}(-\xi, t, k)}, \quad x < 0, \quad (4.115b)$$

де $M^{as, R}(\xi, t, k)$ є розв'язком наступної задачі Рімана-Гільберта:

$$M_+^{as, R}(\xi, t, k) = M_-^{as, R}(\xi, t, k)J^{as, R}(\xi, t, k), \quad k \in \hat{\Gamma}, \quad (4.116a)$$

$$M^{as, R}(\xi, t, k) \rightarrow I, \quad k \rightarrow \infty, \quad (4.116b)$$

$$M^{as, R}(\xi, t, k) = \left(M_{-\xi}^{as, R}(\xi, t) + O(k + \xi) \right) (k + \xi)^{(\operatorname{Im} \nu(-\xi) - m)\sigma_3}, \quad k \rightarrow -\xi, \quad (4.116c)$$

де $\xi = -\operatorname{Re} p_{n-m}$, $m = \bar{0}, n - 1$ та

$$J^{as, R}(\xi, t, k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{k-p_{n-m}}{k} \end{pmatrix} J^{as}(\xi, t, k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{k}{k-p_{n-m}} \end{pmatrix}, \quad k \in \hat{\Gamma}. \quad (4.116d)$$

Тут $P_{12}(\xi, t)$ та $P_{21}(\xi, t)$ визначаються у термінах $M^{as, R}(\xi, t, k)$ у такий

спосіб:

$$\begin{aligned} P_{12}(\xi, t) &= \frac{g_1(\xi, t)h_1(\xi, t)}{g_1(\xi, t)h_2(\xi, t) - g_2(\xi, t)h_1(\xi, t)}, \\ P_{21}(\xi, t) &= -\frac{g_2(\xi, t)h_2(\xi, t)}{g_1(\xi, t)h_2(\xi, t) - g_2(\xi, t)h_1(\xi, t)}, \end{aligned} \quad (4.117)$$

де $g(\xi, t) = \begin{pmatrix} g_1(\xi, t) \\ g_2(\xi, t) \end{pmatrix}$ та $h(\xi, t) = \begin{pmatrix} h_1(\xi, t) \\ h_2(\xi, t) \end{pmatrix}$ мають вигляд

$$g(\xi, t) = p_{n-m}M^{as, R(1)}(\xi, t, p_{n-m}) - f_{n-m}^{as}(x_0, t)M^{as, R(2)}(\xi, t, p_{n-m}), \quad (4.118a)$$

$$h(\xi, t) = p_{n-m}M^{as, R(2)}(\xi, t, 0) + c_0^{as}(\xi)M^{as, R(1)}(\xi, t, 0). \quad (4.118b)$$

Покладаючи $M^{as, R}(\xi, t, k) \approx I$ (при $t \rightarrow \infty$), можна обчислити $g(\xi, t)$ та $h(\xi, t)$; підставляючи їх у (4.117) та (4.115), отримуємо формули для основних членів у (4.112). \square

Опис перехідних зон типу (2) та (3) є відкритою, складною та цікавою задачею, яка виходить за рамки цього Розділу та роботи в цілому. При аналізі перехідних зон типу (2) ми стикаємося з проблемою “накрутки” аргументу деяких спектральних функцій, див. (4.41), а у випадку, коли ξ наближається до нуля (перехідна зона типу (3)), стають на заваді інші труднощі: повільна змінна ξ та сингулярність задачі Рімана-Гільберта (див. (4.38) та (4.65)) зливаються.

4.4 Висновки до Розділу 4

У цьому Розділі була розглянута початкова задача для дефокусуєчого нелокального нелінійного рівняння Шредінгера з початковими даними типу “зміщеної сходинки” (див. (4.3)). Відзначимо, що для нелокальних рівнянь відсутня трансляційна інваріантність розв’язків, і просте зміщення початкових даних призводить до низки різних асимптотик залежно від величини цього зміщення.

Для даної початкової задачі був розроблений метод оберненої задачі розсіювання у формі задачі Рімана-Гільберта та вивчені властивості відповідних спектральних функцій. Зокрема, встановлено, що в залежності

від зміщення $R > 0$, функції $a_1(k)$ та $1 + r_1(k)r_2(k)$ мають різну кількість нулів та точок, де “накручується” аргумент (див. Твердження 4.2). Зазначимо, що накрутка аргументу певних спектральних функцій є притаманною саме нелокальним задачам (у локальних задачах, цей феномен відсутній), а самі точки, у яких відбувається додавання аргументу, є важливими якісними асимптотичними параметрами: вони визначають межі якісно різних асимптотичних зон (див. ω_j , $j = \overline{1, n-1}$ у Теоремі 4.1 та 4.2).

Загальні висновки

Дисертаційна робота присвячена розробці методу оберненої задачі розсіювання та асимптотичному аналізу задач Коші для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера на нульовому та ступінчастому фоні. Для задач з нульовими крайовими умовами, вперше була отримана асимптотика за великим часом розв'язку у випадку відсутності солітонів, а для початкових задач на ступінчастому фоні вперше був розроблений метод оберненої задачі розсіювання та отримана асимптотика за великим часом. Крім цього, вперше для нелокальних інтегровних рівнянь була досліджена задача Коші з початковими даними типу “зміщеної сходинки” та описано асимптотичні режими, які є якісно новими у теорії інтегровних систем.

Для початкової задачі для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера на нульовому фоні отримані наступні основні результати (див. Розділ 2 та [89]):

- Розроблено метод оберненої задачі розсіювання у формі задачі Рімана-Гільберта, який є зручним для подальшого асимптотичного аналізу.
- Отримано нові співвідношення симетрії для вихідної задачі Рімана-Гільберта та спектральних функцій.
- Досліджено асимптотику за великим часом розв'язків задачі Коші для нелокального нелінійного рівняння Шредінгера у випадку відсутності дискретного спектру та обмеженого прирощення аргументу відповідної спектральної функції. Описано новий асимптотичний режим, який якісно відрізняється від класичної асимптотики Захарова-Манакова, притаманної для локальних інтегровних рівнянь.

Зазначимо, що аналогічна асимптотика була представлена нещодавно у роботі [56], з посиланням на нашу роботу [89].

Для початкової задачі для фокусуєчого нелокального нелінійного рівняння Шредінгера з початковим даним типу сходинки отримано такі основні результати (див. Розділ 3 та [90]):

- Для поставленої задачі, вперше було запропоновано та детально розроблено метод оберненої задачі розсіювання у формі задачі Рімана-Гільберта. Виявлено властивості відповідних спектральних функцій, які принципово відрізняються від випадку класичного (локального) нелінійного рівняння Шредінгера. Зокрема, виявлено, що до неперервного спектра належить лише дійсна пряма (на відміну від локального фокусуєчого НРШ, де частина неперервного спектру розташована за межами дійсної вісі), а специфіка ступінчастих крайових умов відбивається у (сингулярних) властивостях спектральних функцій та розв'язків Йоста рівнянь пари Лакса.
- Отримано зображення розв'язку початкової задачі у термінах задачі Рімана-Гільберта зі специфічною поведінкою при $k \rightarrow 0$, яка має вигляд умов "псевдо-лишку".
- Отримано асимптотику за великим часом розв'язку відповідної задачі Коші (зокрема, у випадку початкових даних у вигляді "чистої сходинки"), яка принципово відрізняється від асимптотики відповідної ступінчастої задачі для локального нелінійного рівняння Шредінгера: у нелокальному випадку, асимптотична поведінка розв'язу є якісно різною у двох чвертьплощинах площини (x, t) , між якими відсутній прямолінійний сектор, притаманний локальному рівнянню, у якому асимптотика описується у термінах еліптичних функцій.
- Вперше отримано односолітонний розв'язок задачі зі ступінчастими крайовими умовами (типу кінка).

- Досліджено властивості спектральних функцій для ступінчастої задачі: співвідношення симетрії, формули для нулів, поведінка в особливих точках та закон збереження.

Для початкової задачі для дефокусуєчого нелокального нелінійного рівняння Шредінгера з початковим даним типу “зміщеної сходинки” отримано такі основні результати (див. Розділ 4 та [91]):

- Вперше для інтегровних нелокальних нелінійних рівнянь поставлена задача з початковими даними типу “зміщеної сходинки”.
- Для поставленої задачі, розроблено метод оберненої задачі розсіювання у формі задачі Рімана-Гільберта та досліджено властивості відповідних спектральних функцій в залежності від величини зміщення сходинки. Зокрема, виявлено, що спектральні функції мають парну кількість нулів $2n$ (де n залежить від величини зсуву) та $n - 1$ точок “накрутки” аргументу. “Накрутка” аргументу є новою властивістю, яка, з одного боку, не зустрічається у локальних інтегровних системах (через виконання певних умов симетрії), а з іншого боку, відіграє суттєву роль у асимптотичному аналізі при дослідженні відповідної нелокальної задачі.
- Отримано асимптотику розв’язку задачі Коші для дефокусуєчого нелокального нелінійного рівняння Шредінгера у випадку початкових даних типу зміщеної сходинки. Встановлено, що асимптотична картина є якісно різною в залежності від величини зсуву сходинки. Зокрема, встановлено, що число якісно різних асимптотичних зон росте з ростом величини зміщення, і всі асимптотичні зони можна поділити на дві групи: (i) сектори, де розв’язок прямує до нуля та (ii) сектори, де розв’язок прямує до ненульового сталого значення (залежного від асимптотичного напрямку), причому сектори з різних груп перемежуються.

- Досліджено перехідні області між якісно різними асимптотичними зонами. Зокрема, виявлено, що перехід із сектора, де розв'язок спадає до нуля, до сектора, де він прямує до сталих значень, описується в термінах солітона типу кінка. Відповідно, чим більше зміщення сходинок, тим більше солітонів виникає у асимптотиці за великим часом.

Список використаних джерел

- [1] M. J. Ablowitz, *Nonlinear Dispersive Waves. Asymptotic Analysis and Solitons*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge: Cambridge University Press (2011).
- [2] M. J. Ablowitz, B.-F. Feng, X.-D. Luo and Z. H. Musslimani, “Reverse space-time nonlocal Sine-Gordon/Sinh-Gordon equations with nonzero boundary conditions,” *Stud. Appl. Math.* **141** (2018) 267–307.
- [3] M. J. Ablowitz, B.-F. Feng, X.-D. Luo, Z. H. Musslimani, “General soliton solution to a nonlocal nonlinear Schrödinger equation with zero and nonzero boundary conditions,” *Nonlinearity* **31** 5385 (2018).
- [4] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur, “The inverse scattering transform – Fourier analysis for nonlinear problems,” *Stud. Appl. Math.* **53** (1974), 249–315.
- [5] M. J. Ablowitz, X.-D. Luo and Z. H. Musslimani, “Inverse scattering transform for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation with nonzero boundary conditions,” *J. Math. Phys.* **59**, 011501 (2018).
- [6] M. J. Ablowitz, X.-D. Luo and Z. H. Musslimani, “Discrete nonlocal nonlinear Schrödinger systems: Integrability, inversescattering and solitons,” *Nonlinearity* **33**, 3653 (2020).
- [7] M. J. Ablowitz and Z. H. Musslimani, “Integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation,” *Phys. Rev. Lett.* **110**, 064105 (2013).

- [8] M. J. Ablowitz and Z. H. Musslimani, “Integrable discrete PT symmetric model,” *Phys. Rev. E* **90**, 032912 (2014).
- [9] M. J. Ablowitz and Z. H. Musslimani, “Inverse scattering transform for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation,” *Nonlinearity* **29**, 915–946 (2016).
- [10] M. J. Ablowitz and Z. H. Musslimani, “Integrable nonlocal nonlinear equations,” *Stud. Appl. Math.* **139**, 7–59 (2017).
- [11] M. J. Ablowitz and Z. H. Musslimani, “Integrable Nonlocal PT Symmetric and Reverse Space-Time Nonlinear Schrödinger Equations,” *Springer Tracts Mod. Phys.* **280** 493–512 (2018).
- [12] M. J. Ablowitz and Z. H. Musslimani, “Integrable nonlocal asymptotic reductions of physically significant nonlinear equations,” *J. Phys. A: Math. Theor.* **52**, 15LT02 (2019).
- [13] M. J. Ablowitz and A. C. Newell, “The decay of the continuous spectrum for solutions of the Korteweg de Vries equation,” *J. Math. Phys.* **14**, 1277–1284 (1973).
- [14] M. J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and Inverse Scattering Transform*. SIAM Studies in Applied Mathematics Vol. 4 (SIAM, Philadelphia, PA, 1981).
- [15] G. P. Agrawal *Nonlinear Fiber Optics*, San Diego, CA: Academic.
- [16] K. Andreiev, I. Egorova, T. L. Lange and G. Teschl, “Rarefaction waves of the Korteweg-de Vries equation via nonlinear steepest descent,” *J. Differential Equations* **261**, 5371–5410 (2016).
- [17] C. M. Bender, “Making sense of non-Hermitian Hamiltonians,” *Rep. Prog. Phys.* **70** 947 (2007).

- [18] C. M. Bender, “PT symmetry in quantum physics: From a mathematical curiosity to optical experiments,” *Europhysics News*, **47**, No. 2, 17–20 (2016).
- [19] C. M. Bender and S. Boettcher, “Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having P-T symmetry,” *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5243 (1998).
- [20] C. M. Bender, S. Boettcher and P. N. Meisinger, “PT-symmetric quantum mechanics,” **40**, 2201 (1999).
- [21] R. F. Bikbaev, “Diffraction in a nonlinear defocusing medium,” *J. Math. Sci.* **57**, 3078–3083 (1991).
- [22] R. F. Bikbaev, “On the shock waves in one-dimensional models with the cubic non-linearity,” *Theor. Math. Phys.* **97**, No.2, 191–212 (1993).
- [23] R. Bikbaev, V. Kudashev, “Example of shock waves in unstable media: the focusing nonlinear Schrödinger equation,” *Phys. Lett. A* **190**, 255–258 (1994).
- [24] G. Biondini and G. Kovacic, “Inverse scattering transform for the focusing nonlinear Schrödinger equation with nonzero boundary conditions,” *J. Math. Phys.* **55**, 031506 (2014).
- [25] G. Biondini and D. Mantzavinos, “Long-time asymptotics for the focusing nonlinear Schrödinger equation with nonzero boundary conditions at infinity and asymptotic stage of modulational instability,” *Comm. Pure Appl. Math.* **70**, 2300–2365 (2017).
- [26] G. Biondini and B. Prinari, “On the spectrum of the Dirac operator and the existence of discrete eigenvalues for the defocusing nonlinear Schrödinger equation,” *Stud. Appl. Math.* **132**, No.2 138–159 (2014).
- [27] A. Boutet de Monvel, V. P. Kotlyarov and D. Shepelsky, “Focusing NLS Equation: Long-time dynamics of step-like initial data,” *Int. Math. Res. Not.* **7**, 1613–1653 (2011).

- [28] D. C. Brody, “PT-symmetry, indefinite metric, and nonlinear quantum mechanics,” *J. Phys. A: Math. Theor.* **50**, 485202 (2017).
- [29] R. Buckingham and S. Venakides, “Long-time asymptotics of the nonlinear Schrödinger equation shock problem,” *Comm. Pure Appl. Math.* **60**, 1349–1414 (2007).
- [30] V. Caudrelier, “Interplay between the Inverse Scattering Method and Fokas’s Unified Transform with an Application,” *Stud. Appl. Math.* **140**, No. 1, 3–26 (2018).
- [31] J. Cen, F. Correa, A. Fring, “Nonlocal gauge equivalence: Hirota versus extended continuous Heisenberg and Landau–Lifschitz equation,” *J. Phys. A: Math. Theor.* **53** 195201 (2020).
- [32] K. Chen, X. Deng, S. Lou, D. Zhang, “Solutions of Nonlocal Equations Reduced from the AKNS Hierarchy,” *Stud. Appl. Math.* **141**, No. 1, 113–141 (2018).
- [33] J. Chen, Q. Yan, H. Zhang, “Multiple bright soliton solutions of a reverse-space nonlocal nonlinear Schrödinger equation,” *Appl. Math. Lett.* **106**, 106375 (2020).
- [34] K. Chen, D.J. Zhang, “Solutions of the nonlocal nonlinear Schrödinger hierarchy via reduction,” *Appl. Math. Lett.* **75**, 82–88 (2018).
- [35] P. A. Clarkson, “Special polynomials associated with rational solutions of the defocusing nonlinear Schrödinger equation and the fourth Painlevé equation,” *European J. Appl. Math.* **null**, pp. 293–322 (2006).
- [36] P. A. Deift, A. R. Its and X. Zhou, “Long-time asymptotics for integrable nonlinear wave equations,” In *Important developments in Soliton Theory 1980-1990*, edited by A. S. Fokas and V. E. Zakharov, New York: Springer, 181–204 (1993).

- [37] P. Deift, S. Kamvissis, T. Kriecherbauer, X. Zhou, “The Toda rarefaction problem,” *Comm. Pure Appl. Math.* **XLIX**, 35–83, (1996).
- [38] P. A. Deift and X. Zhou, “A steepest descend method for oscillatory Riemann–Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation,” *Ann. Math.* **137**(2), 295–368 (1993).
- [39] P. A. Deift and X. Zhou, “Long-time asymptotics for solutions of the NLS equation with initial data in a weighted Sobolev space,” *Comm. Pure Appl. Math.* **56**, 1029–1077 (2003).
- [40] F. Demontis, B. Prinari, C. van der Mee, and F. Vitale, “The inverse scattering transform for the focusing nonlinear Schrödinger equation with asymmetric boundary conditions,” *J. Math. Phys.* **55**, 101505 (2014).
- [41] I. Egorova, Z. Gladka, V. Kotlyarov and G. Teschl, “Long-time asymptotics for the Korteweg-de Vries equation with steplike initial data,” *Nonlinearity* **26**, 1839–1864 (2013).
- [42] G. A. El, V. V. Geogjaev, A. V. Gurevich, A. L. Krylov, “Decay of an initial discontinuity in the defocusing NLS hydrodynamics,” *Physica D* **87**, 186–192 (1995).
- [43] R. El-Ganainy, K. G. Makris, D. N. Christodoulides, and Z. H. Musslimani, “Theory of coupled optical PT-symmetric structures,” *Opt. Lett.* **32**, 2632–2634 (2007).
- [44] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*. Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [45] A. S. Fokas, “Integrable multidimensional versions of the nonlocal nonlinear Schrödinger equation,” *Nonlinearity* **29**, 319–324 (2016).
- [46] A. S. Fokas, A. R. Its, A. A. Kapaev and V. Yu. Novokshenov, *Painleve Transcendents. The Riemann–Hilbert Approach*, AMS, 2006.

- [47] T. A. Gadzhimuradov, “Envelope solitons in a nonlinear string with mirror nonlocality,” *Nonlinear Dyn.* **96**, 1939 (2019).
- [48] T. Gadzhimuradov and A. Agalarov, “Towards a gauge-equivalent magnetic structure of the nonlocal nonlinear Schrödinger equation,” *Phys. Rev. A* **93**, 062124 (2016).
- [49] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, “Method for solving the Korteweg-deVries equation,” *Phys. Rev. Lett.* **19**, pp. 1095–1097 (1967).
- [50] F. Genoud, “Instability of an integrable nonlocal NLS,” *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **355**, 299–303 (2017).
- [51] V. S. Gerdjikov and A. Saxena, “Complete integrability of nonlocal nonlinear Schrödinger equation,” *J. Math. Phys.* **58**, 013502 (2017).
- [52] M. Gürses, A. Pekcan, “Nonlocal nonlinear Schrödinger equations and their soliton solutions,” *J. Math. Phys.* **59** 051501 (2018)
- [53] S. K. Gupta, “A string of Peregrine rogue waves in the nonlocal nonlinear Schrödinger equation with parity-time symmetric self-induced potential,” *Opt. Commun.* **411**, 1–7 (2018).
- [54] S. K. Gupta and A. K. Sarma, “Peregrine rogue wave dynamics in the continuous nonlinear Schrödinger system with parity-time symmetric Kerr nonlinearity,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **36**, 141 (2016).
- [55] V. Kotlyarov and A. Minakov, “Riemann-Hilbert problem to the modified Korteweg-de Vries equation: Long-time dynamics of the step-like initial data,” *J. Math. Phys.* **51** (2010), 093506.
- [56] F. He, E. Fan, J. Xu, “Long-time asymptotics for the Nonlocal mKdV equation,” *Commun. Theor. Phys.* **71** 475–488 (2019).

- [57] A. R. Its, “The Riemann-Hilbert Problem and Integrable Systems,” *Not. AMS*, **50** (11):1389, (2003).
- [58] A. R. Its, “Asymptotic behavior of the solutions to the nonlinear Schrödinger equation, and isomonodromic deformations of systems of linear differential equations,” *Doklady Akad. Nauk SSSR* **261**(1), 14–18 (1981).
- [59] A. R. Its and A. F. Ustinov, “Formulation of the scattering theory for the NLS equation with boundary conditions of the type of finite density in the soliton-free sector,” *Zap. Nauchn. Sem. LOMI* **169**, 60–67 (1988).
- [60] R. Jenkins, “Regularization of a sharp shock by the defocusing nonlinear Schrödinger equation,” *Nonlinearity* **28**, 2131–2180 (2015).
- [61] J. L. Ji and Z. N. Zhu, “On a nonlocal modified Korteweg-de Vries equation: integrability, Darboux transformation and soliton solutions,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **42**, 699–708 (2017).
- [62] J. L. Ji and Z. N. Zhu, “Soliton solutions of an integrable nonlocal modified Korteweg-de Vries equation through inverse scattering transform,” *J. Math. Anal. Appl.* **453**, No 2, 973–984 (2017).
- [63] X. Huang, L. Ling, “Soliton solutions for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation,” *Eur. Phys. J. Plus* **131**, 148–158 (2016).
- [64] S. Kamvissis, “Long time behavior for the focusing nonlinear Schroedinger equation with real spectral singularities,” *Comm. Math. Phys.* **180**, No.2, 325–342 (1996); revised version (2020).
- [65] V. P. Kotlyarov and E. Ya. Khruslov, “Solitons of the nonlinear Schrödinger equation, which are generated by the continuous spectrum,” *Teor. Mat. Fiz.* **68**, No.2, 172–186 (1986).

- [66] A. Khare and A. Saxena, “Periodic and hyperbolic soliton solutions of a number of nonlocal nonlinear equations,” *J. Math. Phys.* **56**, 032104 (2015).
- [67] V. V. Konotop, J. Yang and D. A. Zezyulin, “Nonlinear waves in PT-symmetric systems,” *Rev. Mod. Phys.* **88**, 035002 (2016).
- [68] P. D. Lax, “Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves,” *Comm. Pure Appl. Math.* **21**, pp. 467–490 (1968).
- [69] J. Lenells, “Matrix Riemann-Hilbert problems with jumps across Carleson contours,” *J. Monatsh Math* (2017).
- [70] J. Lenells, “The nonlinear steepest descent method for Riemann-Hilbert problems of low regularity,” *Indiana Univ. Math.* **66**, 1287–1332 (2017).
- [71] M. Li, H. Fu, C. Wu, “General soliton and (semi-)rational solutions to the nonlocal Mel’nikov equation on the periodic background,” *Stud. Appl. Math.* **145**, 97–136 (2020).
- [72] M. Li and T. Xu, “Dark and antidark soliton interactions in the nonlocal nonlinear Schrödinger equation with the self-induced parity-time-symmetric potential,” *Phys. Rev. E* **91**, 033202 (2015).
- [73] M. Li, T. Xu, and D. X. Meng, “Rational Solitons in the Parity-Time-Symmetric Nonlocal Nonlinear Schrödinger Model,” *J. Phys. Soc. Jpn.* **85**, 124001 (2016).
- [74] S. Y. Lou, “Alice-Bob systems, $\hat{P} - \hat{T} - \hat{C}$ symmetry invariant and symmetry breaking soliton solutions,” *J. Math. Phys.* **59**, 083507 (2018).
- [75] S. Lou and F. Huang, “Alice-Bob Physics: Coherent Solutions of Nonlocal KdV Systems,” *Scientific Reports* **7**, 869 (2017)
- [76] W.-X. Ma, “Inverse scattering for nonlocal reverse-time nonlinear Schrödinger equations,” *Applied Mathematics Letters* **102**, 106161 (2020).

- [77] L. Ma, S. Shen and Z. Zhu, “Soliton solution and gauge equivalence for an integrable nonlocal complex modified Korteweg-de Vries equation,” *J. Math. Phys.* **58**, 083507 (2017).
- [78] L. Ma and Z. Zhu, “Nonlocal nonlinear Schrödinger equation and its discrete version: Soliton solutions and gauge equivalence,” *J. Math. Phys.* **57**, 083507 (2016).
- [79] K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, and Z. H. Musslimani, “Beam dynamics in PT-symmetric optical lattices,” *Phys. Rev. Lett.* **100**, 103904 (2008).
- [80] S. V. Manakov, “Nonlinear Fraunhofer diffraction,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **65** (1973), 1392–1398.
- [81] J. Michor and A. L. Sakhnovich, “GBDT and algebro-geometric approaches to explicit solutions and wave functions for nonlocal NLS,” *J. Phys. A: Math. Theor.* **52** 025201 (2018).
- [82] Z. H. Musslimani, K. G. Makris, R. El-Ganainy, and D. N. Christodoulides, “Optical solitons in PT-periodic potentials,” *Phys. Rev. Lett.* **100**, 030402 (2008).
- [83] A. C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics*, SIAM, (1985).
- [84] S. P. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii and V. E. Zakharov, *Theory of Solitons: The inverse Scattering Method*, Plenum (1984).
- [85] L. Peng, “Symmetries and Reductions of Integrable Nonlocal Partial Differential Equations,” *Symmetry* **11**, No. 7, 884 (2019).
- [86] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose–Einstein Condensates in Dilute Gases* Cambridge: Cambridge University Press (2008).
- [87] J. Rao, Y. Zhang, A. S. Fokas, J. He, “Rogue waves of the nonlocal Davey–Stewartson I equation,” *Nonlinearity* **31**, 4090–4107 (2018).

- [88] J. Rao, J. He, D. Mihalache, Y.Cheng, “PT-symmetric nonlocal Davey–Stewartson I equation: General lump-soliton solutions on a background of periodic line waves,” *Appl. Math.Lett.* **104**, 106246 (2020).
- [89] Ya. Rybalko and D. Shepelsky, “Long-time asymptotics for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation,” *J. Math. Phys.* **60**, 031504 (2019).
- [90] Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “Long-time asymptotics for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation with step-like initial data,” *J. Differential Equations* **270**, 694–724 (2021).
- [91] Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “Defocusing nonlocal nonlinear Schrödinger equation with step-like boundary conditions: long-time behavior for shifted initial data,” *Journal of Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, **16**, No.4, 418–453 (2020).
- [92] Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “Riemann-Hilbert approach for the integrable nonlocal nonlinear Schrodinger equation with step-like initial data”, *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics* **88**, 4–16 (2018).
- [93] P. M. Santini, “The periodic Cauchy problem for PT-symmetric NLS, I: the first appearance of rogue waves, regular behavior or blow up at finite times,” *J. Phys. A: Math. Theor.* **51** 025201 (2018).
- [94] A. K. Sarma, M.-A. Miri, Z. H. Musslimani and D. N. Christodoulides, “Continuous and discrete Schrödinger systems with parity-time-symmetric nonlinearities,” *Phys. Rev. E* **89**, 052918 (2014).
- [95] M. Segev, “Optical spatial solitons,” *Opt. Quantum Electron* **30**, 503–533 (1998).
- [96] H. Segur and M. J. Ablowitz, “Asymptotic solutions of the Korteweg-de Vries equation,” *Stud. Appl. Math.* **57** (1977), 13–44.

- [97] H. Segur and M. J. Ablowitz, “Asymptotic solutions of nonlinear evolution equations and a Painleve transcendent,” *Physica 3D*, 1+2, 165–184 (1981).
- [98] A. B. Shabat, “On the Korteweg de Vries equation,” *Sov. Math. Dokl.*, **14**, 1266 (1973).
- [99] D. Shepelsky, “Riemann–Hilbert methods in integrable systems,” *Encyclopedia of Mathematical Physics*, 429–435 (2006).
- [100] C. Song, D. Xiao and Z. Zhu, “Reverse Space-Time Nonlocal Sasa–Satsuma Equation and Its Solutions,” *J. Phys. Soc. Jpn.* **86**, 054001 (2017).
- [101] X.-Y. Tang, Z.-F. Liang and X.-Z. Hao, “Nonlinear waves of a nonlocal modified KdV equation in the atmospheric and oceanic dynamical system,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **60**, 62–71 (2018).
- [102] T. Valchev, “On a nonlocal nonlinear Schrödinger equation,” In *Slavova, A.(ed) Mathematics in Industry, Cambridge Scholars Publishing* pp. 36–52 (2014).
- [103] Z. Wen and Z. Yan, “Solitons and their stability in the nonlocal nonlinear Schrödinger equation with PT-symmetric potentials,” *Chaos* **27**, 053105 (2017).
- [104] X. Y. Wen, Z. Y. Yan, and Y. Q. Yang, “Dynamics of higher-order rational solitons for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation with the self-induced parity-time-symmetric potential,” *Chaos* **26**, 063123 (2016).
- [105] T. Xu, Y. Chen, M. Li, and D.-X. Meng, “General stationary solutions of the nonlocal nonlinear Schrödinger equation and their relevance to the PT-symmetric system,” *Chaos* **29**, 123124 (2019).
- [106] Z.X. Xu and K.W. Chow, “Breathers and rogue waves for a third order nonlocal partial differential equation by a bilinear transformation,” *Appl. Math. Lett.* **56**, 72–77 (2016).

- [107] J. Xu, E. Fan, Y. Chen, “Long-time asymptotic for the derivative nonlinear Schrödinger equation with step-like initial value,” *Mathematical Physics, Analysis and Geometry* **16**, No.3, 253–288 (2013).
- [108] T. Xu, S. Lan, M. Li, L.-L. Li, G.-W. Zhang, “Mixed soliton solutions of the defocusing nonlocal nonlinear Schrödinger equation,” *Phys. D*, **390**, 47–61 (2019).
- [109] J. K. Yang, “Physically significant nonlocal nonlinear Schrödinger equation and its soliton solutions,” *Phys. Rev. E* **98**, 042202 (2018).
- [110] J. Yang, “General N-solitons and their dynamics in several nonlocal nonlinear Schrödinger equations,” *Physics Letters A* **383**, 4 (2019), 328–337.
- [111] B. Yang and Y. Chen, “Dynamics of high-order solitons in the nonlocal nonlinear Schrödinger equations,” *Nonlinear Dyn.* **94**, 489–502 (2018).
- [112] B. Yang and J. Yang, “Transformations between Nonlocal and Local Integrable Equations,” *Stud. Appl. Math.* **140**, 178–201 (2018).
- [113] B. Yang and J. Yang, “General rogue waves in the nonlocal PT-symmetric nonlinear Schrödinger equation,” *Lett. Math. Phys.* **109** (2019), 945–973.
- [114] R. Ye, Y. Zhang, “General soliton solutions to a reverse-time nonlocal nonlinear Schrödinger equation,” *Stud. Appl. Math.* **145**, 197–216 (2020).
- [115] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, “Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states,” *Phys. Rev. Lett.* **15**, pp. 240–243 (1965).
- [116] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, “Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media,” *Sov. Phys. JETP* **34**, pp. 62–69 (1972).
- [117] V. E. Zakharov and S. V. Manakov, “Asymptotic behavior of nonlinear wave systems integrated by the inverse method,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **71**,

203–215 (1976) (in Russian); *Sov. Phys. JETP*, **44**(1), 106–112 (1976) (in English).

- [118] G. Zhang and Z. Yan, “Inverse scattering transforms and soliton solutions of focusing and defocusing nonlocal mKdV equations with non-zero boundary conditions,” *Phys. D* **402** 132170 (2020).
- [119] Y. Zhang, D. Qiu, Y. Cheng, J. He, “Rational Solution of the Nonlocal Nonlinear Schrödinger Equation and Its Application in Optics,” *Rom. J. Phys.* **62**, 108 (2017).
- [120] G. Q. Zhang, Z. Y. Yan, and Y. Chen, “Novel higher-order rational solitons and dynamics of the defocusing integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation via the determinants,” *Appl. Math. Lett.* **69**, 113 (2017).
- [121] S. Zhong, “A motion of complex curves in \mathbb{C}^3 and the nonlocal nonlinear Schrödinger equation,” *J. Nonlinear Sci. Appl.* **12**, 75–85 (2019).
- [122] Z. Zhou, “Darboux transformations and global solutions for a nonlocal derivative nonlinear Schrödinger equation,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **62**, 480–488 (2018).

Додатки

Додаток А: Список публікацій здобувача за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

1. Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “Long-time asymptotics for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation with step-like initial data,” *Journal of Differential Equations* **270**, 694–724 (2021).
2. Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “Long-time asymptotics for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation,” *Journal of Mathematical Physics* **60**, 031504 (2019).
3. Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “Defocusing nonlocal nonlinear Schrödinger equation with step-like boundary conditions: long-time behavior for shifted initial data”, *Journal of Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, **16**, No.4, 418–453 (2020).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

4. Ya. Rybalko, “Long-time asymptotics for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger”, 6th Ya. B. Lopatynsky International School-Workshop on Differential Equations and Applications. June 18-20, Vinnytsia, Ukraine.
5. Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “The integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation: Riemann-Hilbert approach and long-time asymptotics”, *Differential Equations and Control Theory*. V.Karazin Kharkiv National University, September 25-27, 2018, Kharkiv, Ukraine.

6. VI Ya. Rybalko, “Long-time asymptotics for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation with step-like initial data”, International Conference. Analysis and Mathematical Physics. B. Verkin Inst. LTPE. June 18-22, 2018.
7. Ya. Rybalko, “Long-time asymptotics for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation on the line”, V International Conference. Analysis and Mathematical Physics. B. Verkin Inst. LTPE, V.Karazin Kharkiv National University. June 19-24, 2017.
8. Ya. Rybalko, “Long-time asymptotics for solutions of the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation”, Modern problems in mathematics. V.Karazin Kharkiv National University. April 25-26, 2017.

Наукові праці, які додатково відображають результати дисертації

9. Ya. Rybalko, D. Shepelsky, “Riemann-Hilbert approach for the integrable nonlocal nonlinear Schrodinger equation with step-like initial data”, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics **88**, 4–16 (2018).