

Рецензія

на дисертаційну роботу Карпенко Ірини Миколаївни «Метод задачі Рімана-Гільберта для модифікованого рівняння Камасси-Хольма з ненульовими крайовими умовами» на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика», галузь знань 11 «Математика і статистика».

Метод оберненої задачі розсіювання та теорія солітонів є одними з яскравих, революційних досягнень у галузі математичної фізики за останні 60 років. Теорія солітонів виникла завдяки фундаментальним дослідженням видатних вчених, таких як Гарднер, Грін, Краскал, Міура, Лакс, Захаров і Шабат, у період з кінця 1960-х по початок 1970-х років. Однією з центральних проблем, яку розглядають у рамках цієї теорії, є адаптація та вдосконалення методу оберненої задачі розсіювання для розв'язання початкових і початково-крайових задач для певних нелінійних рівнянь з частинними похідними. Застосування методу призводить до лінеаризації вихідних нелінійних задач та надає можливість отримувати їхні розв'язки через використання сингулярних інтегральних рівнянь та відповідних задач Рімана-Гільберта. Такий підхід, зокрема, дозволяє проводити детальний асимптотичний аналіз, що є однією з ключових проблем у теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними.

У 1996 році Фокас та Олвер і Розенау незалежно запропонували нову інтегровну систему, відому тепер під назвою модифіковане рівняння Камасси-Хольма. Пара Лакса для цього рівняння була запропонована Цяо у 2006 році. Крім того, у 2009 році воно виникло у роботі Новікова як рівняння типу Камасси-Хольма з кубічною нелінійністю. Це рівняння має бігамільтонову структуру та належить до класу піконних рівнянь: воно має розв'язки у вигляді локалізованих пікових хвиль, що біжать.

Огляд літератури, наведений автором у першому розділі роботи, демонструє значний інтерес науковців з різних областей математики та фізики до інтегровних нелінійних рівнянь типу Камасси-Хольма як окремого напрямку досліджень нелінійних систем. Це підтверджує актуальність обраної теми дисертації і яскраво демонструє, що автор роботи добре ознайомлений із сучасним станом досліджень, пов'язаних з рівняннями типу Камасси-Хольма і особливо з обраним об'єктом дослідження — модифікованим рівнянням Камасси-Хольма.

У другому та третьому розділах дисертаційної роботи здобувач розглядає початкову задачу для модифікованого рівняння Камасси-Хольма на сталому ненульовому фоні. Вона успішно розробила метод оберненої задачі розсіювання у формі задачі факторизації Рімана-Гільберта, що є зручним і потужним інструментом для подальшого асимптотичного аналізу. Особливістю рівнянь типу Камасси-Хольма є те, що спектральний параметр входить у x -рівняння пари Лакса як добуток з “моментом” $m(x, t)$, який у рамках оберненої задачі є невідомою функцією, що суттєво впливає на контроль поведінки розв'язків Йоста. Для вирішення цієї проблеми здобувач вводить калібрувальне перетворення для рівнянь пари Лакса, що зводить початкову пару Лакса до вигляду, який дозволяє ефективно контролювати аналітичні властивості її розв'язків як функцій спектрального параметру, та вводить нову просторову змінну, що дозволяє отримати явний опис поведінки розв'язків Йоста при $\lambda \rightarrow \infty$ (спектральний параметр) у термінах (нової) просторової та часової змінних. Використовуючи розроблений формалізм, здобувач отримала параметричне зображення розв'язку початкової задачі для модифікованого рівняння Камасси-Хольма, яке розглядається на сталому фоні, у термінах розв'язку пов'язаної задачі Рімана-Гільберта (Теорема 2.2.3 та Зауваження 2.3.8). Дані цієї пов'язаної задачі РГ, включаючи матрицю стрибків та параметри для умов на лишки в

сингулярних точках (якщо вони є), однозначно визначаються початковими даними для початкової задачі Коші. Крім того, здобувач описала односолітонні розв'язки, як регулярні, так і нерегулярні (Теорема 2.4.7). До того ж, використовуючи розроблений формалізм та нелінійний метод перевалу Дейффа і Жу, здобувач описала основні асимптотичні члени для розв'язку $u(x, t)$ задачі Коші у двох секторах напівплощини (x, t) , де відхилення від фону є нетривіальним (Теорема 3.2.2 та Теорема 3.2.4).

У четвертому розділі була розглянута початкова задача для модифікованого рівняння Камасси-Хольма на ступінчастому фоні. Для цієї задачі, при побудові формалізму відповідної задачі Рімана-Гільберта були детально досліджені аналітичні властивості відповідних розв'язків Йоста та спектральних функцій, зокрема, симетрії та поведінка в точках розгалуження. Використовуючи розроблений формалізм, здобувач отримала параметричне зображення розв'язку початкової задачі для модифікованого рівняння Камасси-Хольма, яке розглядається на ступінчастому фоні, у термінах розв'язку пов'язаної задачі Рімана-Гільберта (Теорема 4.4.3). Запропонований підхід може стати ефективною основою для подальшого дослідження асимптотичної поведінки розв'язків цієї задачі за великим часом.

Я маю декілька зауважень щодо рукопису. Один з основних результатів розділу 2 — зображення розв'язку початкової задачі у термінах розв'язку пов'язаної задачі Рімана-Гільберта — краще було б сформулювати як теорему. Крім того, у рукописі присутні описки.

Ці зауваження не є суттєвими і не впливають на цілком позитивну оцінку роботи. В представленій дисертації було подолано значні технічні та аналітичні труднощі та надано розвиток і вдосконалення методу оберненої задачі розсіювання та нелінійного методу перевалу для інтегровних задач типу Камасси-Хольма. Всі одержані результати є новими, повністю

обґрунтованими, і можуть бути відправним моментом для постановки фізичних експериментів.

Основні результати дисертації викладено у трьох статтях, опублікованих у періодичних наукових виданнях, проіндексованих у міжнародній наукометричній базі Scopus, які, відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank належать до квартилів Q2 (2 статті) та Q3. Усі результати у наукових публікаціях, зарахованих за темою дисертації, автором були отримані самостійно.

Отже, на підставі вищезазначеного вважаю, що дисертаційна робота Карпенко Ірини Миколаївни «Метод задачі Рімана-Гільберта для модифікованого рівняння Камасси-Хольма з ненульовими крайовими умовами» є оригінальною, завершеною науковою працею, що повністю відповідає спеціальності 111 «Математика», а її автор безумовно заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії з математики.

Рецензент

головний науковий співробітник

відділу математичної фізики

ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна

НАН України, д.ф.-м.н., професор

В.П. Котляров

В.П. Котляров

