Відгук надійшов до ради 13/10/2020

Пастур Л.А.

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Афанасьєва Євгенія Володимировича

ЗАСТОСУВАННЯ ГРАСМАНОВОГО ІНТЕГРУВАННЯ В ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ МАТРИЦЬ

подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії
з галузі знань 11 "Математика і статистика"
за спеціальністю 111 "Математика"

Дисертаційну роботу Афанасьєва Є. В. присвячено дослідженню асимптотичної поведінки кореляційних функцій характеристичних поліномів розріджених випадкових ермітових матриць та неермітових випадкових матриць з незалежними елементами методами грасманового інтегрування. Як відомо, випадкові матриці (матриці виду $M_n = \{x_{ij}\}_{i.j=1}^{n}$, де $\{x_{ij}\}_{i,j}$ є випадковими величинами) було вперше впроваджено у багатовимірній статистиці та обчислювальній математиці в 30-х роках 20-го сторіччя, потім незалежно у 50-х роках Вігнер запропонував використовувати ермітові випадкові матриці як статистичні моделі для важких ядер, що викликало стрімкий розвиток теорії з подальшим застосуванням в різноманітних галузях науки. Головним предметом дослідження теорії випадкових матриць є спектр матриць, а точніше функції власних значень $\{\lambda_j\}_j$ і власних векторів (спектральні статистики), зокрема залежність властивостей спектральних статистик від розміру матриці і асимптотична поведінка, коли розмір матриць n прямує до нескінченності. В асимптотичному режимі виділяють два основних режими - глобальний, коли аргументи досліджуваних статистик змінюються в областях, що містять $O(n)$ власних значень, і локальний режим, коли в середньому в область потрапляє лише $O(1)$ власних значень. В глобальному режимі найбільш важливими питаннями є збіжність емпіричних мір власних значень і граничні флуктуації спектральних статистик, ці два питання є аналогами закону великих чисел і центральної граничної теореми класичної теорії ймовірностей. В моделях розріджених випадкових ермітових матриць та неермітових випадкових матриць з незалежними змінними, що розглянуто в дисертації, глобальний режим є добре дослідженим, і автор приводить повний огляд результатів і методів у цьому напрямку.

Локальний режим є більш делікатним і технічно набагато складнішим і вибагливішим, з цілою низкою відкритих важливих питань. Одним з центральних об'єктів досліджень в локальному режимі є так звані спектральні кореляційні функції. Для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ і будь-якої обмеженої неперервної симетричної функції $\eta : \mathbb{F}^m \to \mathbb{C}$, m-та спектральна кореляційна функція R_m визначається тотожністю

$$\mathbf{E} \sum_{1 \le j_1 \ne \ldots \ne j_m \le n} \eta(\lambda_{j_1}^n, \ldots \lambda_{j_m}^n) = \int_{\mathbb{F}^m} \eta(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) R_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) d\widetilde{\mu}(\lambda_1) \ldots d\widetilde{\mu}(\lambda_m),$$

де $\{\lambda_j^n\}_j$ є власними значеннями M_n, $\widetilde{\mu}$ є мірою Лебега на $\mathbb{F}$. Спектральні кореляційні функції привертають значний інтерес фізиків, зокрема в галузях ядерної фізики, квантового хаосу та квантовій хромодинаміці. Одним з основних методів дослідження асимптотичної поведінки R_m у локальному режимі є метод грасманового інтегрування (суперaналіз), котрий вперше було впроваджено в теорію випадкових матриць на фізичному рівні строгості

Вербааршотом, Цирнбауером та Вайденмюлером при дослідженні гаусівських інваріантних ансамблей, і пізніше застосовано, зокрема, Федоровим та Мірліним для вивчення смужкових матриць та матриць суміжності випадкових графів, Брезаном та Хікамі для матричних моделей, Цирнбауером для кругових ансамблів (всі результати на фізичному рівні строгості). Загальна теорія супераналізу вперше описана Березіним. На математичному рівні строгості метод грасманового інтегрування почали застосовувати на початку 2000-них років для дослідження смужкових матриць (в роботах Дізерторі, Пінсера та Спенсера, потім Дізерторі, Лаґерра, Лоґмана та Содіна, Щербини Т. та Щербини М., Бао та Ердеша), а також для дослідження гаусівського унітарного ансамблю, ансамблю Марченко-Пастура, σ-моделі, оператора Шредінгера із випадковим потенціалом, тощо.

Аналіз спектральних кореляційних функцій та інших спектральних характеристик за допомогою генеруючих функцій може бути зведений до аналізу виразів виду

$$\mathbf{E}\prod_{j=1}^{m}\frac{\det((M_n-z_j)(M_n-z_j)^*+\varepsilon_j)}{\det((M_n-z_j)(M_n-z_j)^*+\delta_j)},$$

які на жаль в більшості випадків є дуже складними для дослідження. Тому досить природньо розглянути схожі за асимптотичною поведінкою але простіші для дослідження кореляційні функції характеристичних поліномів

$$f_m(y_1,\ldots,y_{2m}) := \mathbf{E}\prod_{j=1}^{m}\det((M_n-y_j)(M_n-y_j)^*,$$

де $y_1,\ldots,y_{2m}$ - дійсні або комплексні параметри, що можуть залежати від n. Зауважимо, що кореляційні функції характеристичних поліномів відіграють важливу роль не тільки для дослідження вихідних спектральних кореляційних функцій, вони також виникають при вивченні методами теорії випадкових матриць деяких питань пов'язаних з хаотичними квантовими системами. Крім того, на початку 2000-них у роботах Кітінга та Снейт та Х'юза, Кітінга й О'Коннелла було встановлено зв'язок між розподілом нулів дзета-функції Рімана та L-функцій Діріхле та кореляційними функціями характеристичних поліномів кругового унітарного й кругового ортогонального ансамблів, у зв'язку з чим інтерес наукової спільноти до характеристичних поліномів випадкових матриць неймовірно виріс і зараз ці функції інтенсивно вивчаються для різноманітних ансамблів випадкових матриць.

В дисертаційній роботі Афанасьєва Є. В. розглянуто ансамблі розріджених ермітових випадкових матриць та неермітових випадкових матриць з незалежними елементами (комплексний і дійсний випадки). Зауважимо, що дотепер кореляційні функції характеристичних поліномів розріджених ермітових матриць та загальних (негаусівських) неермітових матриць з незалежними елементами не вивчались. За допомогою грасманового інтегрування в роботі отримано певні інтегральні представлення для f_m, задля асимптотичного аналізу яких далі розвинуто і застосовано багатовимірну версію методу перевала, і таким чином отримано низку оригінальних результатів щодо асимптотичної поведінки відповідних кореляційних функцій характеристичних поліномів всередині і на межі спектра. Таким чином актуальність обраної теми та новизна результатів є безперечними.

Дисертація складається з анотації, переліку умовних позначень, вступу, п'яти розділів, загальних висновків та списку використаних джерел, який налічує 192 джерела. Зміст анотації ідентичний до змісту основних розділів дисертації. У вступі обґрунтовано актуальність обраної теми, сформульовано мету та описано методи дослідження, визначено наукову новизну отриманих результатів, а також надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

Перший розділ роботи носить оглядовий характер і містить необхідні попередні відомості та термінологію щодо теорії випадкових матриць взагалі та досліджуваних ансамблів зокрема. Також описано метод грасманового інтегрування та наведено історію його застосування в теорії випадкових матриць. Подано достатньо повний перелік попередніх результатів щодо теми дисертації.

Другий розділ роботи присвячено дослідженню ансамблю розріджених ермітових випадкових матриць виду $M_n = \{d_{jk}w_{jk}\}_{j,k=1}^n$, де $\mathbf{P}(d_{jk} = p^{-1/2}) = 1 - \mathbf{P}(d_{jk} = 0) = p/n$, $\{\mathrm{Re}\, w_{jk}, \mathrm{Im}\, w_{jk}, w_{\ell\ell} : 1 \le j < k \le n, 1 \le \ell \le n\}$ є незалежними однаково розподіленими дійсними нормальними випадковими величинами, що задовольняють умовам $\mathbf{E}w_{jk} = \mathbf{E}w_{jk}^2 = 0$, $\mathbf{E}|w_{jk}|^2 = 1$, та $\{d_{jk}\}_{j,k}$ є незалежними одна від одної та від величин $\mathrm{Re}\, w_{jk}$, $\mathrm{Im}\, w_{jk}$, $w_{\ell\ell}$. В Пропозиції 2.6 отримано інтегральне представлення для кореляційних функцій характеритичних поліномів матриць M_n. Основними результатами цього розділу є Теореми 2.1, 2.3 та 2.4: в Теоремі 2.1 встановлено асимптотичну поведінку другої кореляційної функції f_2 характеристичних поліномів слабо і сильно розріджених ермітових випадкових матриць всередині спектра і досліджено залежність встановленої асимптотичної поведінки від ступеню розрідженості матриць, в Теоремі 2.3 встановлено асимптотичну поведінку всіх кореляційних функцій f_m характеристичних поліномів слабо розріджених ермітових випадкових матриць всередині спектра, в Теоремі 2.4 встановлено асимптотичну поведінку другої кореляційної функції характеристичних поліномів слабо розріджених ермітових випадкових матриць на межі спектра.

У третьому розділі вивчаються комплексні випадкові матриці з незалежними елементами виду $M_n = n^{-1/2}\{x_{jk}\}_{j,k=1}^n$, де $\{x_{jk}\}_{j,k}$ є такими незалежними однаково розподіленими комплексними випадковими величинами, що $\mathbf{E}x_{jk} = \mathbf{E}x_{jk}^2 = 0$, $\mathbf{E}|x_{jk}|^2 = 1$. В Пропозиції 3.3 отримано інтегральне представлення для відповідних кореляційних функцій характеристичних поліномів. Основним результатом цього розділу є Теорема 3.3, де для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ за умови скінченності перших $2m$ абсолютних моментів спільного розподілу елементів матриць M_n встановлено асимптотичну поведінку кореляційної функції f_m характеристичних поліномів всередині спектра.

В четвертому розділі вивчаються дійсні випадкові матриці з незалежними елементами виду $M_n = n^{-1/2}\{x_{jk}\}_{j,k=1}^n$, де $\{x_{jk}\}_{j,k}$ є такими незалежними однаково розподіленими дійсними випадковими величинами, що $\mathbf{E}x_{jk} = 0$, $\mathbf{E}x_{jk}^2 = 1$. Основним результатом цього розділу є Теорема 4.1, де для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ за умови скінченності перших $2m$ абсолютних моментів спільного розподілу елементів матриць M_n знайдено асимптотичну формулу для кореляційної функції f_m характеристичних поліномів всередині спектра з головним членом у вигляді інтеграла по деякій множині матриць скінченного розміру, причому цей інтеграл було точно обчислено для другої кореляційної функції f_2.

П'ятий розділ дисертації містить необхідні попередні відомості щодо метода грасманового інтегрування, а також доведення деяких допоміжних властивостей зовнішнього добутку лінійних операторів.

До дисертації є наступні дрібні зауваження:

- стор. 44: добре було б a_ℓ, b_ℓ, $\widetilde{b}_\ell$ визначити відразу після (2.10), тим більше що ці константи потрібні для того щоб з (2.10) отримати (2.15),
- стор. 49: в “dQ змінюється на $\frac{\pi}{2}(t_1 - t_2)^2 dt_1 dt_2$” пропущено міру Хаара (так само на стор. 53),
- стор. 57: друкарська помилка в Лемі 2.10 - повинно бути $(-\lambda^*(p), \lambda^*(p))$,
- стор. 66: добре було б написати початок Розділу 2.3 більш детально і пояснити вибір стаціонарних точок. І далі можна було зауважити, що значення матриці других похідних в точці $T = \widetilde{T}, R = 0, b = 0$ залежить від вибору $\widetilde{T}$, хоча це і не впливає на її невиродженість,
- стор. 120: друкарська помилка - повинно бути “всередині”,
- стор. 121: після “Ця множина” треба додати “доповнена одиницею’, і далі “є поліномами від $\{\varphi_j, \widetilde{\varphi}_j\}_j$ ступеня не вище n”,
- у дисертації трапляються стилістичні та друкарські помилки, але їх мало.

Висловлені зауваження не впливають на достовірність результатів і не знижують якості дисертаційної роботи по суті. Також дисертаційна робота не містить запозичених висновків інших авторів і відповідає вимогам академічної доброчесності.

Підсумовуючи досягнення і характеризуючи актуальність теми та рівень виконання дисертаційної роботи, треба окремо зазначити

- *надзвичайно високий технічний рівень дисертації* і особливу майстерність автора у розвитку і застосуванні багатовимірної версії методу перевалу, а також загальну математичну зрілість і самостійність автора.
- *актуальність обраної теми* - метод грасманового інтегрування має широке застосування в теоретичній фізиці, але донедавна він застосовувався без належного рівня строгості. У даній роботі метод грасманового інтегрування отримує подальший розвиток і обґрунтування на математичному рівні строгості і використовується для отримання інтегральних представлень кореляційних функцій характеристичних поліномів важливих в застосуваннях ансамблів розріджених ермітових випадкових матриць та неермітових випадкових матриць з незалежними елементами. Зауважимо, що цей метод можна використовувати для подальших досліджень інших спектральних характеристик різних інших ансамблів випадкових матриць.
- *новизну отриманих результатів* - всі основні результати праці є цілком оригінальними. Особливо цікавими на думку опонента є досліджений фазовий перехід в асимптотичній поведінці другої кореляційної функції в залежності від ступеню розрідженості ермітових випадкових матриць, а також досліджена залежність кореляційних функцій характеристичних поліномів від кумулянтів розподілу елементів матриць.

- *добру ознайомленість автора з історією питань, розглянутих в праці*, попередніми результатами в цій галузі, застосуваннями у фізиці, різними математичними методами дослідження таких питань, а також *глибоке знання методів і завдань теорії випадкових матриць*, що виходить далеко за межі теми дисертації.

- *строгу обґрунтованість всіх наукових положень, висновків та рекомендацій, сформульованих у дисертації.* Всі заявлені у роботі твердження і теореми викладено з повними чіткими доведеннями, коректність яких не викликає сумніву. Результати дисертації повністю опубліковано в 7 наукових публікаціях, у тому числі в 3 статтях, написаних без співавторів, у виданнях, що входять до міжнародної наукометричної бази Scopus. Також результати пройшли апробацію на семінарах та конференціях, у тому числі міжнародних.

- *добре продуману структуру роботи, а також високий методологічний рівень викладу.* Зокрема, для кожної розглянутої моделі випадкових матриць автор спочатку розглядає другі кореляційні функції, а потім старші кореляційні функції, або спочатку гаусівські матриці, а потім загальний випадок, що сприяє кращому розумінню метода і ходу доведень.

На підставі вищезазначеного вважаю, що дисертаційна робота "Застосування грасманового інтегрування в задачах теорії випадкових матриць" задовольняє всім вимогам, що передбачено наказом Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. №40 "Про затвердження Вимог до оформлення дисертації" та постановою Кабінету Міністрів України від 06.03.2019 р. №167 "Про проведення експерименту з присудження ступеня доктора філософії", а її автор, Афанасьєв Євгеній Володимирович, заслуговує на присудження ступеня доктора філософії з галузі знань 11 – Математика і статистика за спеціальністю 111 – Математика.

Офіційний опонент,
кандидат фізико-математичних наук,
професор Опольського університету (Польща)

UNIWERSYTET OPOLSKI
Instytut Fizyki
45-052 OPOLE, ul. Oleska 48
tel. 077 452 72 50, fax 077 452 72 90

04. 10. 2020

Г. Ю. Литова

UNIWERSYTET OPOLSKI
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
45-052 OPOLE, ul. Oleska 48
tel. 77 452 7200, 77 452 7202