

АНОТАЦІЯ

Афанасьєв Є. В. Застосування грасманового інтегрування в задачах теорії випадкових матриць. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика». — Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Веркіна Національної академії наук України, Харків, 2020.

У **вступі** обґрунтовано актуальність досліджуваних задач, наведено зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Сформульовано мету, задачі та методи дослідження. Визначено наукову новизну і значення отриманих результатів. Надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

Перший розділ присвячений огляду та аналізу літератури. У **підрозділі 1.1** дано визначення основним спектральним характеристикам, які досліджуються в теорії випадкових матриць, а саме: нормованій рахуючій мірі власних значень, лінійній статистиці власних значень, спектральним кореляційним функціям та кореляційним функціям характеристичних поліномів. Також наведено головні попередні результати про ці спектральні характеристики.

У **підрозділі 1.2** описано метод грасманового інтегрування та наведено історію його застосування в теорії випадкових матриць.

У роботі ми досліджуємо два ансамблі випадкових матриць: ансамбль розріджених ермітових матриць та ансамбль матриць з незалежними елементами. У **підрозділах 1.3** та **1.4** наведено ключові результати по вищезгаданих ансамблях.

Ансамбль розріджених ермітових випадкових матриць досить добре досліджено в глобальному режимі. Так, відомо, що нормована рахуюча міра власних значень слабо збігається до невивадкової міри, причому для слабо розріджених матриць гранична міра є напівкруговим законом. Також доведено Центральну граничну теорему для лінійної статистики. У локальному режимі обчислено асимптотичну поведінку спектральних кореляційних функцій у випадку слабого розрідження. Якщо ж матриці сильно розріджені, то асимптотична поведінка спектральних кореляційних функцій невідома.

Ансамбль випадкових матриць з незалежними елементами також добре досліджено в глобальному режимі як у комплексному, так і у дійсному випадку. Відомо, що нормована рахуюча міра власних значень слабо збігається до кругового закону. Також доведено Центральну граничну теорему для лінійної статистики. У локальному режимі обчислено асимптотичну поведінку спектральних кореляційних функцій на межі спектра в загальному випадку, а всередині спектра — з деякими обмеженнями на моменти спільного розподілу ймовірностей елементів матриць.

Другий розділ присвячений дослідженню ансамблю розріджених ермітових випадкових матриць розміром $n \times n$ виду

$$M_n = (d_{jk}w_{jk})_{j,k=1}^n$$

де

$$d_{jk} = p^{-1/2} \begin{cases} 1 \text{ з ймовірністю } \frac{p}{n}; \\ 0 \text{ з ймовірністю } 1 - \frac{p}{n}; \end{cases}$$

$$w_{jk} = w_{jk}^{(1)} + iw_{jk}^{(2)}, \quad j \neq k$$

та $\{w_{jk}^{(1)}, w_{jk}^{(2)}, w_{ll} : 1 \leq j < k \leq n, 1 \leq l \leq n\}$ є такими незалежними однаково розподіленими (н. о. р.) дійсними нормальними випадковими величинами із нульовим середнім, що

$$2\mathbf{E}\{|w_{jk}^{(1)}|^2\} = 2\mathbf{E}\{|w_{jk}^{(2)}|^2\} = \mathbf{E}\{|w_{ll}|^2\} = 1, \quad j \neq k.$$

Тут і всюди нижче \mathbf{E} позначає математичне сподівання по всім випадковим величинам. Випадкові величини $\{d_{jk} : j \leq k\}$ також незалежні одна від одної та від величин $w_{jk}^{(1)}, w_{jk}^{(2)}, w_{ll}$.

Означення. Кореляційною функцією характеристичних поліномів називається

$$f_m(Y) = \mathbf{E} \left\{ \prod_{j=1}^m \det(M_n^* - y_j) (M_n - y_{m+j}) \right\},$$

де $Y = \text{diag}\{y_1, \dots, y_{2m}\}$, причому y_1, \dots, y_{2m} — дійсні або комплексні параметри, що можуть залежати від n .

У **підрозділі 2.1** отримано інтегральне представлення для кореляційних функцій характеристичних поліномів розріджених ермітових випадкових матриць. Основним результатом цього підрозділу є Пропозиція 2.6.

У **підрозділі 2.2** проводиться асимптотичний аналіз отриманого інтегрального представлення для другої кореляційної функції характеристичних поліномів всередині спектра. Основним результатом цього підрозділу є Теорема 2.1.

Теорема 2.1. Нехай $p = \text{const}$, $\lambda_*(p) = \sqrt{\max\left(4 - \frac{8}{p}, 0\right)}$, $\lambda_j = \lambda_0 + \frac{x_j}{n}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$. Тоді кореляційна функція двох характеристичних поліномів $f_1(\Lambda)$ задовольняє асимптотичні співвідношення

(i) при $\lambda_0 \in (-\lambda_*(p), \lambda_*(p))$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(\Lambda)}{\sqrt{f_1(\lambda_1 I) f_1(\lambda_2 I)}} = \frac{\sin\left((x_1 - x_2) \sqrt{\lambda_*(p)^2 - \lambda_0^2/2}\right)}{(x_1 - x_2) \sqrt{\lambda_*(p)^2 - \lambda_0^2/2}};$$

(ii) при $\lambda_0 \notin (-\lambda_*(p), \lambda_*(p))$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(\Lambda)}{\sqrt{f_1(\lambda_1 I) f_1(\lambda_2 I)}} = 1.$$

У **підрозділі 2.3** проводиться асимптотичний аналіз отриманого інтегрального представлення для всіх кореляційних функцій характеристичних поліномів всередині спектра. Основним результатом цього підрозділу є Теорема 2.3.

Теорема 2.3. Нехай $p \rightarrow \infty$, $\lambda_j = \lambda_0 + \frac{x_j}{n}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, 2m$. Тоді кореляційні функції характеристичних поліномів $f_m(\Lambda)$ для $\lambda_0 \in (-2, 2)$ задовольняють асимптотичні співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_m(\Lambda)}{\left(\prod_{j=1}^{2m} f_m(\lambda_j I)\right)^{1/2m}} = \frac{\hat{s}_{2m}(X)}{\hat{s}_{2m}(I)},$$

де $X = \text{diag}\{x_1, \dots, x_{2m}\}$ та

$$\hat{s}_{2m}(X) = \frac{\det \left\{ \frac{\sin\left((x_j - x_{m+k}) \sqrt{4 - \lambda_0^2/2}\right)}{(x_j - x_{m+k}) \sqrt{4 - \lambda_0^2/2}} \right\}_{j,k=1}^m}{\Delta(x_1, \dots, x_m) \Delta(x_{m+1}, \dots, x_{2m})},$$

а також $\Delta(y_1, \dots, y_m)$ — визначник Вандермонда чисел y_1, \dots, y_m .

У підрозділі 2.4 проводиться асимптотичний аналіз отриманого інтегрального представлення для другої кореляційної функції характеристичних поліномів на межі спектра. Основним результатом цього підрозділу є Теорема 2.4.

Теорема 2.4. *Нехай $p \rightarrow \infty$, $\lambda_j = \lambda_0 + \frac{x_j}{n^{2/3}}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, $\lambda_0 = 2$. Тоді кореляційна функція двох характеристичних поліномів $f_1(\Lambda)$ задовольняє асимптотичні співвідношення*

(i) *Якщо $\frac{n^{2/3}}{p} \rightarrow \infty$, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(\Lambda)}{\sqrt{f_1(\lambda_1 I) f_1(\lambda_2 I)}} = 1;$$

(ii) *Якщо $\frac{n^{2/3}}{p} \rightarrow c$, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(\Lambda)}{\sqrt{f_1(\lambda_1 I) f_1(\lambda_2 I)}} = \frac{\mathbb{A}(x_1 + 2c, x_2 + 2c)}{\sqrt{\mathbb{A}(x_1 + 2c, x_1 + 2c) \mathbb{A}(x_2 + 2c, x_2 + 2c)}},$$

де $\mathbb{A}(x, y)$ — ядро Ейрі. Для $\lambda_0 = -2$ справджуються аналогічні твердження.

У третьому розділі ми вивчаємо комплексні випадкові матриці з незалежними елементами виду

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{n}} X = \frac{1}{\sqrt{n}} (x_{jk})_{j,k=1}^n,$$

де x_{jk} — такі н. о. р. комплексні випадкові величини, що

$$\mathbf{E}\{x_{jk}\} = \mathbf{E}\{x_{jk}^2\} = 0, \quad \mathbf{E}\{|x_{jk}|^2\} = 1.$$

У підрозділі 3.1 отримано інтегральне представлення для кореляційних функцій характеристичних поліномів комплексних неермітових випадкових матриць з незалежними елементами. Основним результатом цього підрозділу є Пропозиція 3.3.

У підрозділі 3.2 проводиться асимптотичний аналіз отриманого інтегрального представлення для кореляційних функцій характеристичних поліномів всередині спектра. Основним результатом цього підрозділу є Теорема 3.1.

Теорема 3.1. *Нехай перші $2m$ абсолютних моментів спільного розподілу елементів матриць M_n є скінченними, і $z_j = z_0 + \frac{\zeta_j}{\sqrt{n}}$, $\zeta_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, m$, $|z_0| < 1$. Тоді*

(i) m -та кореляційна функція характеристичних поліномів $f_m(\check{Z})$ задовольняє асимптотичне співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{m^2-m}{2}} \frac{f_m(\check{Z})}{f_1(\bar{z}_1, z_1) \cdots f_1(\bar{z}_m, z_m)} = e^{\frac{m^2-m}{2}(1-|z_0|^2)^2 \kappa_{2,2}} \frac{\det(K_{\mathbb{C}}(\zeta_j, \zeta_k))_{j,k=1}^m}{|\Delta(\mathcal{Z})|^2},$$

де $\check{Z} = \text{diag}\{\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m, z_1, \dots, z_m\}$, $\kappa_{2,2} = \mathbf{E}\{|x_{11}|^4\} - 2$; $\mathcal{Z} = \text{diag}\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ та

$$K_{\mathbb{C}}(z, w) = e^{-|z|^2/2 - |w|^2/2 + z\bar{w}}.$$

(ii) у окремому випадку $\zeta_1 = \dots = \zeta_m = 0$ ми маємо

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left\{ |\det(M_n - z_0)|^{2m} \right\} \\ &= (2\pi)^{m/2} \left(\prod_{j=1}^{m-1} j! \right)^{-1} e^{\frac{m^2-m}{2}(1-|z_0|^2)^2 \kappa_{2,2}} n^{\frac{m^2}{2}} e^{mn(|z_0|^2-1)} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

У четвертому розділі ми вивчаємо дійсні випадкові матриці з незалежними елементами виду

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{n}} X = \frac{1}{\sqrt{n}} (x_{jk})_{j,k=1}^n,$$

де x_{jk} — такі н. о. р. дійсні випадкові величини, що

$$\mathbf{E}\{x_{jk}\} = 0 \quad \text{та} \quad \mathbf{E}\{x_{jk}^2\} = 1.$$

У підрозділі 4.1 отримано інтегральне представлення для кореляційних функцій характеристичних поліномів дійсних випадкових матриць з незалежними елементами. Основним результатом цього підрозділу є Пропозиція 4.3.

У підрозділі 4.2 проводиться асимптотичний аналіз отриманого інтегрального представлення для кореляційних функцій характеристичних поліномів всередині спектра. Основним результатом цього підрозділу є Теорема 4.2.

Теорема 4.2. Нехай перші $2m$ абсолютних моментів спільного розподілу елементів матриць M_n є скінченними, і $z_j = z_0 + \frac{\zeta_j}{\sqrt{n}}$, $\zeta_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, m$, $z_0 \in (-1, 1)$. Тоді

(i) t -та кореляційна функція характеристичних поліномів $f_m(\check{Z})$ задовольняє асимптотичне співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-m^2+m} \frac{f_m(\check{Z})}{f_1(\bar{z}_1, z_1) \cdots f_1(\bar{z}_m, z_m)} = C_{m, z_0} e^{\frac{m^2-m}{2}(1-z_0^2)^2 \kappa_4} \times \int_{V=V^R \in U(2m)} \exp \left\{ \frac{1}{2} \text{tr} \check{Z} V \check{Z}^R V^* - \frac{1}{2} \text{tr} \check{Z} \check{Z}^R \right\} d\mu_s(V),$$

де $\check{Z} = \text{diag}\{\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m, z_1, \dots, z_m\}$, C_{m, z_0} — деяка константа, яка не залежить ані від спільного розподілу елементів матриці, ані від ζ_1, \dots, ζ_m ; $\kappa_4 = \mathbf{E}\{x_{11}^4\} - 3$,

$$A^R = - \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix} A^T \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix},$$

$U(k)$ — унітарна група, ймовірнісна міра $d\mu_s(V)$ відповідає диференціальній формі

$$\det^{-m+1/2} V \bigwedge_{j, k \leq m} dv_{jk} \bigwedge_{j < k \leq m} dv_{j, k+m} \wedge dv_{k+m, j}$$

та

$$\check{Z} = \text{diag}\{\bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_m, \zeta_1, \dots, \zeta_m\}.$$

(ii) в окремому випадку $t = 2$ інтеграл по самодуальним унітарним матрицям можна обчислити, і ми маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \frac{f_2(\check{Z})}{f_1(\bar{z}_1, z_1) f_1(\bar{z}_2, z_2)} = C_{2, z_0} e^{(1-|z_0|^2)^2 \kappa_4} \frac{\text{Pf}(K_{\mathbb{R}}(\zeta_j, \zeta_k))_{j, k=1}^2}{\Delta(\zeta_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2)},$$

де

$$K_{\mathbb{R}}(\zeta_j, \zeta_k) = e^{-\frac{|\zeta_j|^2}{2} - \frac{|\zeta_k|^2}{2}} \begin{pmatrix} (\zeta_j - \zeta_k) e^{\zeta_j \zeta_k} & (\zeta_j - \bar{\zeta}_k) e^{\zeta_j \bar{\zeta}_k} \\ (\bar{\zeta}_j - \zeta_k) e^{\bar{\zeta}_j \zeta_k} & (\bar{\zeta}_j - \bar{\zeta}_k) e^{\bar{\zeta}_j \bar{\zeta}_k} \end{pmatrix}.$$

У п'ятому розділі ми коротко опишемо метод грасманового інтегрування, а також доводимо деякі допоміжні властивості зовнішнього добутку лінійних операторів.

Ключові слова: грасманові змінні, суперсиметрія, теорія випадкових матриць, розріджені випадкові матриці, матриці суміжності випадкових графів, випадкові матриці з незалежними елементами, ансамбль Жинібра, кореляційні функції характеристичних поліномів, моменти характеристичних поліномів.

Список публікацій здобувача

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Afanasiev, I.: On the Correlation Functions of the Characteristic Polynomials of Real Random Matrices with Independent Entries. Журнал математичної фізики, аналізу, геометрії. **16**(2), 91–118 (2020)

(Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar; Impact Factor: 0.227; кuartиль Q3)

Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

2. Afanasiev, I.: On the Correlation Functions of the Characteristic Polynomials of the Sparse Hermitian Random Matrices. J. Stat. Phys. **163**(2), 324–356 (2016)

(Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar, zbMATH; Impact Factor: 1.349; кuartиль Q2)

3. Afanasiev, I.: On the Correlation Functions of the Characteristic Polynomials of Non-Hermitian Random Matrices with Independent Entries. J. Stat. Phys. **176**(6), 1561–1582 (2019)

(Входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar, zbMATH; Impact Factor: 1.243; кuartиль Q2)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

4. Afanasiev, I.: On the second correlation function of characteristic polynomials of sparse hermitian random matrices. In: II International Conference “ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS”: Book of abstracts, p. 29. B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv (2014)

5. Afanasiev, I.: Correlation function of two characteristic polynomials of diluted hermitian random matrices near the edge points of the spectrum. In: III International Conference “ANALYSIS AND MATHEMATICAL PHYSICS”: Book

of abstracts, p. 16. B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv (2015)

6. Afanasiev, I.: On the Second Mixed Moment of Characteristic Polynomials of Sparse Hermitian Random Matrices. In: Abstracts of Lectures and Talks: Trilateral German-Russian-Ukrainian Summer School “Spectral Theory, Differential Equations and Probability”, p. 12. Johannes Gutenberg Universität Mainz, Mainz (2016)
7. Afanasiev, I.: On the Correlation Functions of the Characteristic Polynomials of the Non-Hermitian Random Matrices with Independent Entries. In: International Conference “Geometry, Differential Equations and Analysis”: Book of abstracts, p. 39. V.N. Karazin Kharkiv National University and B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv (2019)