Ігор Гавриленко
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, аспірант 3 року навчання
Науковий керівник Петров Євген В'ячеславович, кандидат фізико-математичних наук
Тема доповіді: "Стійкість мінімальних поверхонь у субрімановому многовиді $\widetilde{E(2)}$"
Анотація:
Субрімановим многовидом зветься гладкий многовид M разом з гладким векторним розподілом $\mathcal{H}$ на M (він зветься горизонтальним розподілом) і гладким полем евклідових скалярних добутків $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{H}$ (субрімановою метрикою). Розглянемо гладку орієнтовану поверхню Σ у тривимірному субрімановому многовиді M, субріманова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ якого будується як обмеження на $\mathcal{H}$ деякої рімановой метрики M. Сингулярна множина Σ_0 цієї поверхні складається з тих точок $p \in \Sigma$, для яких дотична площина $T_p\Sigma$ збігається з $\mathcal{H}_p$. Якщо N – одиничне нормальне поле Σ у рімановому сенсі, то можно описати сингулярну множину як $\Sigma_0 = \{p \in \Sigma | N^h(p) = 0\}$, де N^h – ортогональна проекція поля N на $\mathcal{H}$. Субріманова площа області $D \subset \Sigma$ визначається як $A(D) = \int\limits_D |N^h| d\Sigma$, де $d\Sigma$ – ріманова форма площі Σ. Нормальною варіацією Σ, що задана гладкою функцією u, будемо називати відображення $\varphi : \Sigma \times I \to M$, що визначене умовою $\varphi_s(p) = exp_p(su(p)N(p))$. Тут I – деякий окіл нуля в $\mathbb{R}$, а exp_p – ріманове експоненційне відображення. Іншими словами, ми будуємо варіацію традиційним для рімановой геометрії чином, випускаючи геодезичні з точки p в напрямку $u(p)N(p)$. Позначимо $A(s) = \int\limits_{\Sigma_s} |N^h| d\Sigma_s$, де $\Sigma_s = \varphi_s(\Sigma)$. Тоді $A'(0)$ зветься першою варіацією площі, що відповідає φ, а $A''(0)$ – другою. Поверхня Σ називається мінімальною, якщо $A'(0) = 0$ для будь-яких нормальних варіацій з компактним носієм у $\Sigma\backslash\Sigma_0$. Зауважимо, що тут ми слідуємо рімановій традиції, називаючи мінімальними поверхнями стаціонарні точки субріманового функціонала площі. Мінімальна поверхня Σ називається стійкою, якщо $A''(0) \geq 0$ для будь-яких нормальних варіацій з компактним носієм у $\Sigma \setminus \Sigma_0$.
Многовид $\widetilde{E(2)}$ визначається як універсальне накриття групи власних рухів площини. Це простір $\mathbb{R}^3$ з координатами (x, y, z) (де (x, y) відповідає паралельному перенесенню, а z – куту обертання), на якому структура групи Лі визначає наступний базис лівоінваріантних векторних полів:

$$X_1 = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial z},\ X_3 = \sin z \frac{\partial}{\partial x} - \cos z \frac{\partial}{\partial y}.$$

Розглянемо на $\widetilde{E(2)}$ ріманову метрику $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ таку, що X_1, X_2, X_3 є ортонормованим базисом в кожній точці. Зауважимо, що вона виявляється евклідовою. У якості горизонтального розподілу $\mathcal{H}$ візьмемо розподіл, що натягнутий на X_1, X_2, а у якості $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ – обмеження евклідової метрики на $\mathcal{H}$. Нехай Σ тепер – гладка орієнтована поверхня у $\widetilde{E(2)}$. Введемо деякі додаткові позначення. На регулярній частині $\Sigma\backslash\Sigma_0$ поверхні визначимо горизонтальне гаусове відображення $\nu^h = \frac{N^h}{|N^h|}$ та характеристичне векторне поле Z, яке у кожній точці утворюється з ν^h обертанням на прямий кут у площині $\mathcal{H}_p$ (в орієнтації, що визначена $N(p)$). Позначимо $S = \langle N, X_3\rangle - |N^h|X_3 \in T_p\Sigma$. Векторне поле S доповнює Z до базису дотичної площини. Через ∇ позначатимемо ріманову коваріантну похідну. Нехай B – оператор Вейнгартена поверхні Σ відносно N, що визначається для будь-якого дотичного до Σ векторного поля W умовою $B(W) = \nabla_W N$.

Теорема 1. *Нехай Σ – поверхня $\widetilde{E(2)}$. Тоді перша нормальна варіація її площі, що задана функцією u, має наступний вигляд:*

$$A'(0) = \int\limits_{\Sigma\backslash\Sigma_0} |N^h|^{-1}(<B(Z), Z> + <N, X_3><\nabla_{\nu^h} X_3, \nu^h>) u d\Sigma.$$

Якщо Σ мінімальна, то друга нормальна варіація її площі, що задана функцією u, має наступний вигляд:

$$A''(0) = \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_0} 2|N^h|{<}B(Z),S{>}^2u^2 + 2|N^h|{<}B(Z),Z{>}{<}B(S),S{>}u^2 +$$

$$+2|N^h|{<}B(Z),Z{>}u^2({<}B(S),S{>} + {<}B(Z),Z{>})2{<}N,X_3{>}{<}B(S),Z{>}Z(u)u+$$
$$+|N^h|^1(Z(u) + {<}N,X_3{>}|N^h|{<}\nabla_{\nu^h}X_3,Z{>}u)^2-$$
$$-2|N^h|^2{<}\nabla_{\nu^h}X_3,\nu^h{>}u - |N^h|^3{<}\nabla_{\nu^h}X_3,\nu^h{>}^2u^2d\Sigma.$$

Твердження 1. *Евклідова площина у $\widetilde{E(2)}$ є мінімальною тоді й тільки тоді, коли це горизонтальна або вертикальна площина. Усі мінімальні евклідові площини $\widetilde{E(2)}$ є стійкими.*

Будемо називати поверхню Σ у тривимірному субрімановому многовиді вертикальною, якщо $T_p\Sigma \perp \mathcal{H}_p$ для кожної $p \in \Sigma$. Зокрема, такі поверхні не містять сингулярних точок.

Теорема 2. *Будь-яка повна зв'язна вертикальна мінімальна поверхня у $\widetilde{E(2)}$ – це горизонтальна евклідова площина $z = C$ або паралельно перенесений уздовж площини (x, y) стандартний гелікоїд $xcosz + ysinz = 0$. При цьому гелікоїди є нестійкими.*

Звідси отримуємо наступний частковий результат типу Бернштейна.

Наслідок 1. *У $\widetilde{E(2)}$ повна зв'язна вертикальна мінімальна поверхня є стійкою тоді й тільки тоді, коли ця поверхня є горизонтальною евклідовою площиною.*

Статті:

1. Є. В. Петров, І. О. Гавриленко Стійкість мінімальних поверхонь в універсальному накритті групи власних рухів евклідової площини. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна Серія "Математика, прикладна математика і механіка", № 98, 2023, с. 50-67. DOI: https://doi.org/ 10.26565/2221-5646-2023-98-04
2. Подана до друку стаття "Stability of vertical minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian" у журнал Proceedings of the International Geometry Center manifolds.